**Univerzita Hradec Králové**

**Přírodovědecká fakulta**

**Katedra matematiky**


# Matematická analýza na středních školách v 1. polovině 20. století

*Bakalářská práce*


Autor: Kateřina Voglová


Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Matematika a Hudební kultura se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.

V Hradci Králové 2019

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové Jméno a příjmení

Poděkování:

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Vízkovi, Ph.D. za Jeho trpělivé vedení, připomínky, rady a veškerou Jeho podporu poskytnutou při psaní práce.

Anotace:

Úkolem práce je analyzovat koncepci výuky infinitesimálního počtu ve středoškolském vzdělávání po tzv. Marchetově reformě. Pozornost bude věnována příslušným učebnicím matematiky, jejich autorům a jejich didaktické koncepci. Ta bude porovnána se současným přístupem k zavádění pojmů v matematické analýze, formulaci a dokazování tvrzení. Práce bude obsahovat odpovídající faktografické přílohy.

Klíčová slova:

historie matematiky, infinitesimální počet, Alois Strnad

Annotation:

The goal of this bachelor thesis is analyze concept of teaching infinitesimal calculus at hight school after the Marchet reform. The thesis is focus on the textbooks, their authors and the didactic conception, which is confronting with the teaching calculus these days. The thesis include the factual attachment.

Key words:

history of mathematics, infinitesimal calculus, Alois Strnad

Obsah:

# Úvod

Infinitesimální počet se začal do středních škol dostávat teprve na začátku minulého století. Mezi první, kdo ho do učebnice zařadil byl Alois Strnad. Od té doby se učebnice změnily, ale základ zůstává stále stejný. V této práci se zaměřuji na počátek výuky infinitesimálního počtu v naší zemi. Chtěla bych zjistit, jaké jsou rozdíly v obsahu výkladu dříve a dnes. V první části se budu věnovat vývoji kalkulu samotnému. V druhé části se zaměřím na zavedení počtu do učebnic pro střední školy u nás. K samotnému porovnání dojde v části třetí, která je ještě rozdělena na dva větší celky diferenciální a integrální počet. Čtvrtou část věnuji autorovi učebnice Aloisi Strnadovi, kde popisuji jeho život a pedagogickou činnost.

# 1 Historický vývoj matematické analýzy

## 1.1 Infinitesimální počet ve starověku

První poznatky z oblasti matematiky vznikaly v starověkém Egyptě, Indii a Číně. Objevy nebyly ještě systematicky členěny, neopíraly se o teorii, byly pouze empiricky zjištěny. Matematika sloužila čistě k praktickému využití, jednalo se o různé daňové předpisy, stavební úlohy a další matematické problémy spojené s obchodem nebo zemědělstvím. (Kopáčková, 2001) Počítalo se se zlomky, mezi další matematické metody patřily např. řešení lineárních rovnic o jedné i dvou neznámých (v Babylónu r. 1950 př.n.l.), a dokonce i problémy zahrnující kubické a bikvadratické rovnice. Dále se matematika využívala v geometrii. Postupně se začala rozvíjet směrem k abstrakci. (Struik, 1963) Prvky matematické analýzy se zde objevily ve formě tabulek, nebo také ve snaze zachytit spojitý děj při pozorování oblohy a nebeských dějů. (Kopáčková, 2011)

Ve starověku si Sofisté začali klást otázku příčiny fungování věcí a přírodních jevů kolem nich. Praktické využití matematiky se začalo přesouvat k teoretickému vysvětlení. Pythagorejci vycházeli ze studia neměnných prvků v přírodě. (Struik, 1963) Jejich přínos v oblasti historie infinitesimálního počtu je patrný v pokusech přijít na základní zákonitosti akustiky a na závislost mezi různými fyzikálními veličinami, jako je např. závislost výšky tónu na délce a tloušťce struny. (Kopáčková, 2011)

Dále můžeme prvky analytických problémů sledovat ve starověké řecké matematice v úlohách, kde se hledá tečna ke křivce a v myšlenkách o nekonečnu, které se objevují v pracích Zenona (kolem roku 450 př.n.l.) a Aristotela (přibližně 384–322 př. n. l.), jako je Achilleus a želva. Jedná se o známou úlohu, kdy Achilles závodí se želvou v běhu na 100 metrů. Želva vybíhá s deseti metrovým náskokem. Po deseti metrech se Achilleus dostane do místa, kde želva startovala, ale želva je už napřed. Po čase začíná Achilles želvu dohánět, ale když on se dostane na místo, kde byla želva, je ona už zase před ním, i když jen o desetinu metru. Takto se bude stále k želvě přibližovat. Náskok želvy bude menší a menší, ale nikdy ji nebude moc dohnat. (Devlin, 2011) Dalším důležitým matematikem z období Antiky byl bezpochyby Archimedes (287–212 př.n.l.), jehož velký přínos byl právě v oblasti integrálního počtu. Vnesl do matematiky objevy při stanovování velikostí ploch křivočarých útvarů v rovině a velikosti povrchů a objemů těles ohraničených těmito křivkami. (Kolman, 1968)

## 1.2 Infinitezimální počet ve středověku

V této době začaly vznikat první univerzity, kde přírodní filosofové navazovali na Aristotela. Objevila se myšlenka přírodních zákonů jako zákonů funkčního typu a pomalu vznikaly teorie, kde se veličiny měnily v závislosti na čase. Mohli bychom nyní jmenovat scholastiky, jako jsou Robert Grosseteste (přibližně 1168–1253), Thomas Bradwardinus (přibližně 1290–1349), Richard Swineshead (14. stol.), Nicole Oresme (přibližně 1323–1382). Bradwardinus se snažil najít a vyjádřit závislost mezi rychlostí, pohybovou silou a odporem. Swineshead jako první uvažoval o okamžité rychlosti. (Kopáčková, 2001)

## 1.3 Matematická analýza v novověku (až po současnost)

V období renesance se začaly objevovat myšlenky kritizující scholastické tendence a společnost se postupně odvracela od dogmat k přirozenému bytí věcí. Tím se přesunula pozornost k přírodním vědám. Velikým podnětem k rozvoji matematiky byly nové zámořské objevy a s nimi nutnost většího rozvoje astronomie a navigačních metod, které vyžadovaly složitější numerické výpočty. Novým důležitým objevem byly logaritmy, které poprvé publikoval John Napier v *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Popis nádherného zákona logaritmů*) roku 1614. (Kopáčková, 2001)

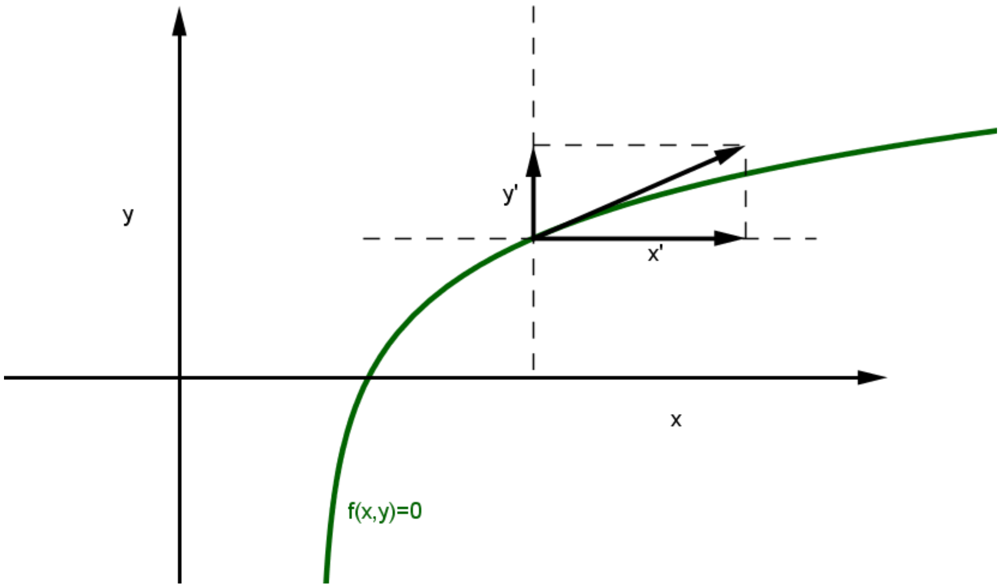
Nemůžeme opomenout Johanna Keplera (1571–1630), jehož přínos pro matematickou analýzu byl díky jeho počítání obsahů. Velikost plochy kruhu (jako i dalších těles) počítal tak, že si těleso rozložil na menší kousky. Sečtením jejich obsahů vypočítal celkový obsah. Dalším jeho přínosem byly úlohy s vinnými sudy, kde počítal objemy těles vzniklé rotací částí kuželoseček kolem osy, která ležela v jejich rovině. Nevytvořil ještě „názvosloví" pro daný způsob počítání, ale právě v myšlence o sečtení malých kusů můžeme naleznout infinitesimální uvažování. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

Bonaventura Cavalieri patřil mezi další, kteří se zabývali výpočtem obsahů těles. Přišel s dodnes známým Cavalieriho principem. Ten říká, že pokud máme dvě tělesa, jež mají stejnou výšku, a poměr obsahů řezů (vznikající rovinou rovnoběžnou s podstavou ve stejné vzdálenosti) je vždy stejný, mají potom objemy těles totožný poměr. Jak uvádí Netuka a Schwabik: *„B. Cavalieri použil metodu porovnávání nekonečně malých částí těles, jakýchsi vrstviček, které nazýval indivisibilie. Jde při tom o nedělitelné části nižší* *dimenze, než je vyšetřovaný útvar. Cavalieri je nesčítal, pouze je porovnával s analogickými nedělitelnými částmi jiného útvaru.*“ *(Netuka, Schwabik, 1987, str. 129)*

Postupně přibývalo úloh, které byly řešeny pomocí infinitesimálního počtu. Matematici se začali více zabývat problematikou tečen, tedy metody nalezení tečny k dané křivce. Přistupovali k ní ze dvou pohledů – geometrického a algebraického. Newton, Torricelli a další vycházeli z geometrických metod. Jiní, jako Descartes (1596–1650) a Fermat k problému přistupovali skrz algebru, pomocí které vykládali klasickou geometrii.

Descarta i Fermata považujeme za zakladatele analytické geometrie, která přispěla k rozvoji infinitesimálního počtu, a to díky jejich zájmu o algebraické křivky. Ani Descartes ani Fermat však nekreslili křivku funkce tak, jak ji známe dnes. Měli pouze jednu osu s vyznačeným počátkem, na kterou zakreslovali body ve směru dnešní osy y (ordináty), a tak získali obraz bodu. (Schwabik, Šarmanová, 1996)

Stále však nebyl vymyšlen obecný algoritmus pro derivování a integrování. Prvními, kdo převedli úvahy a výpočty v matematické analýze na obecnější algoritmy, byli Isaac Newton (1643–1721) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Je zřejmé, že už dříve před nimi měli matematici své obecné metody, jak pracovat s integrálním a diferenciálním počtem. Jejich postupy se staly obecnými pro všechny. Vycházely z tzv. problému tečen, který nastoupil s úlohami o pohybu. Zjistilo se, že pokud se bod pohybuje po křivce, pak je směr pohybu dán směrem tečny ke křivce. Isaac Newton vycházel z této představy. Pokud je křivka zadána rovnicí $f(x, y) = 0$, určuje se její proměnný bod jako průsečík dvou přímek, které jsou rovnoběžné s osami $x$ a $y$. Zavádí fluxe, což je označení pro okamžitou rychlost $\dot{x}$, vodorovného pohybu a $\dot{y}$, svislého pohybu. Směrnici tečny pak lze určit jako poměr fluxí: $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. (viz obrázek č. 1) Důležitý byl právě vztah mezi fluxemi, na který se snažil přijít. Jak ze známého $\dot{x}$ a $\dot{y}$ určit vztah, kterému vyhovují veličiny $x$ a $y$.




*Obr.: 1 Představa tečny Newtona, (Netuka, Schwabik, 1987, str. 132) (upraveno v GeoGebře)*

Newtonův postup budeme ilustrovat na funkci $f(x,y) = \sum a_{ij}x^i y^j = 0$. Pokud bod na křivce bude mít v jednu dobu polohu $x$ a $y$, pak v dalším okamžiku bude jeho poloha $x + \dot{x} \cdot k$ a $y + \dot{y} \cdot k$.Po dosazení do rovnice dostaneme

$$\sum a_{ij}(x + \dot{x} \cdot k)^i (y + \dot{y} \cdot k)^j = 0,$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 133)*

v binomickém rozvoji pak

$$\sum a_{ij}x^{\,i}y^j + a_{ij}x^{\,i}jy^{j-1}\dot{y} \cdot k + \cdots + a_{ij}y^j ix^{\,i-1}\dot{x} \cdot k + \cdots + \cdots = 0.$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 133)*

Členy, které jsou vyšší než prvního řádu, zanedbává vzhledem k jejich nekonečně malým rozměrům. Proto po vydělení členem $k$ dostáváme vztah

$$\sum a_{ij}(jx^{\,i}y^{j-1}\dot{y} + ix^{\,i-1}y^j\dot{x}) = 0.$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 133)*

To už je vztah mezi fluxemi

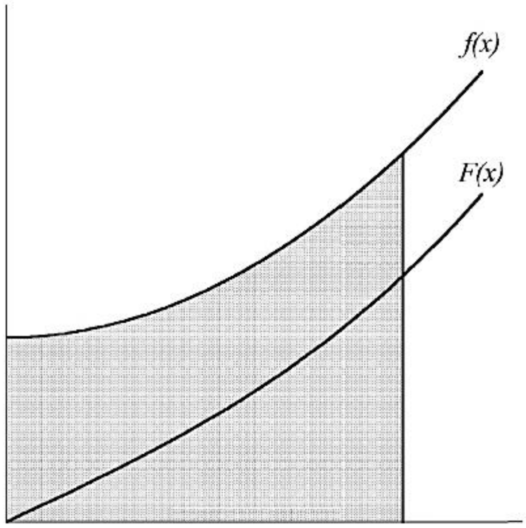
$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\sum a_{ij} i x^{i-1} y^j}{\sum a_{ij} j x^i y^{j-1}}$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 133)*

Newton tady počítal s nekonečně malou veličinou, i když sám ji tak nenazval.

Zabýval se také hledáním primitivní funkce. Pokud mám zadaný např. poměr $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, tak jak nalézt $y$ dané rovnicí $f(x, y) = 0$. Problém se vyskytoval hlavně při počítání obsahů ploch útvarů pomocí postupů opačných derivování. Pro objasnění jeho myšlenek budeme používat označení, jaké známe dnes. Můžeme tedy napsat, že pro obsah platí:

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx$$




*Obr.:.2 Vztah mezi funkcí f a primitivní funkcí F (Schwabik, Šarmanová; 1996, str.39)*

Pokud nalezneme nějakým způsobem funkci $F$, pro níž platí, že na intervalu $[a, b]$ je $F'(x) = f(x)$. Potom je možné s její pomocí určit velikost plochy dané funkcí $f$, která je ohraničená na intervalu $[a, b]$ osou $x$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Lze pak napsat:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

přitom předpokládáme, že $F(a) = 0$. A tak se dostáváme k dnešní definici Newtonova integrálu:

*Je-li* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *funkce, která má primitivní funkci* $F: [a,b] \to \mathbb{R}$*, tj. platí-li* $F'(x) = f(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$*, pak existuje Newtonův integrál* $\int_a^b f(x)dx$ *funkce* $f$ *v intervalu* $[a,b]$ *a je definován vztahem*

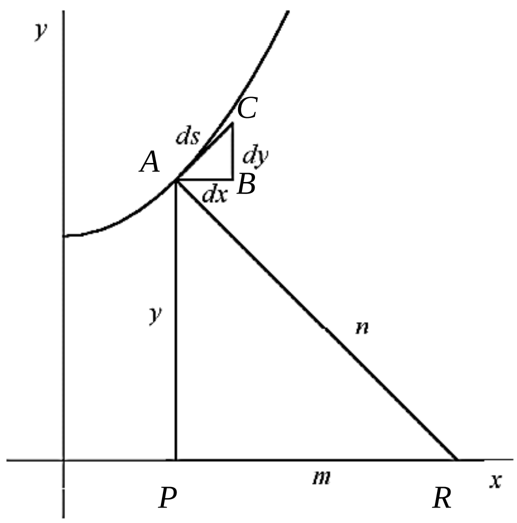
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

*(Schwabik, Šarmanová;1996, str. 39)*

To je znak pro Newtonovu metodu fluxí, kde je integrování bráno jako inverzní operací k diferencování.

Téměř ve stejnou dobu přišel s metodou infinitesimálního počtu Leibniz. Ve svých úvahách vycházel z Pascalovy metody charakteristického trojúhelníku pro určení tečny ke křivce, Descartovy analytické metody zobrazování geometrických křivek a z poznatků od Mercatora a Wallese z oblasti nekonečných řad. Podívejme se nyní podrobněji na Leibnizovy myšlenky, budu však používat současnou symboliku.

Nechť je dána funkce $f(x)$ a pomoci ní křivka. Buď $A$ bod na křivce, kterým prochází tečna ke křivce.




*Obr.: 3 Leibnizův charakteristický trojúhelník (Schwabik, Šarmanová, 1996, str. 41)*

Trojúhelník ABC vznikne z tečny ($AC = ds$). Odvěsny $dx(AB)$ a $dy(BC)$ jsou úsečky rovnoběžné s osami $x$ a $y$. Trojúhelník APR tvoří úsečka$AP$, která je rovnoběžná s osou $y$ a úsečka $PR$, která splývá s osou $x$. Přímka $n$ je kolmicí na tečnu $ds$.

Z podobnosti trojúhelníků dostaneme vztah

$$\frac{m}{y} = \frac{dy}{dx}$$

Představoval si trojúhelník jako infinitezimální veličiny, tedy že $dx$ je nekonečně malé a blíží se k nule. Takový trojúhelník viděl v každém bodě křivky a veličiny na obou stranách rovnice sečetl. Tyto součty nazval integrál a došel tak ke vztahu

$$\int y \frac{dy}{dx} dx = \int y dy.$$

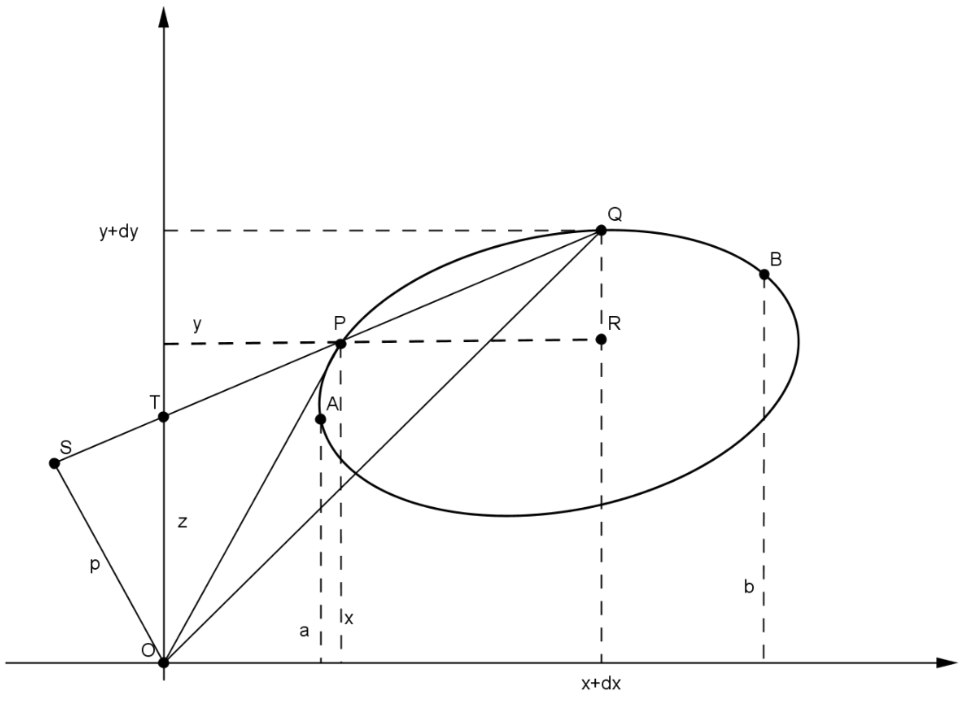
*(Schwabik, Šarmanová, 1996, str. 42)*

Můžeme ho zapsat ve formě určitého integrálu, pak bude vypadat takto:

$$\int_a^b y \frac{dy}{dx} dx = \int_{y(a)}^{y(b)} y dy = \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{y(a)}^{y(b)} = \frac{1}{2} [y(b)^2 - y(a)^2].$$

*(Schwabik, Šarmanová,1996, str. 42)*

Rozvinul tzv. teorii transmutace, která vznikla na základě charakteristického trojúhelníku, rozkladu do řad a integrování.




*Obr.:.4 Transmutace (Netuka, Schwabik, 1987, str. 136) (upraveno v GeoGebře)*

Pokud jsou body $P$ a $Q$ blízko u sebe, pak pro jejich směrnici platí, že je rovna $\frac{dy}{dx}$. Její rovnice pak je:

$$y = z + \frac{dy}{dx} \cdot x$$

Bod $S$ je patou kolmice k přímce $PQ$, která prochází počátkem $O$ a $p$ je velikost úsečky $OS$. Označme velikost úsečky $PQ$ jako $ds$. Pak podle podobnosti $\Delta OST$ a $\Delta PRQ$ můžeme psát:

$$\frac{ds}{z} = \frac{dx}{p}$$

Pro obsah $\Delta OPQ$ dostaneme

$$\Delta OPQ = \frac{1}{2} p \cdot ds = \frac{1}{2} z \cdot dx$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 136)*

Pokud budou body $P$ a $Q$ dostatečně blízko u sebe, můžeme oblouk nahradit přímkou mezi body. Pak bude obsah $\Delta OPQ$ nepatrně odlišný od obsahu útvaru ohraničeného úsečkami $OP$, $OQ$ a obloukem mezi body $P$ a $Q$. Pro zjištění obsahu útvaru ohraničeného úsečkami $OA$, $OB$ a obloukem mezi $A$ a $B$, musíme sečíst všechny obsahy útvarů typu $OPQ$. Tedy obsah bude

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} \int_a^b z \, dx$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 135)*

Z toho Leibniz určuje integrál. Buď $C$ bodem o souřadnicích $[a, 0]$ a bod $D$ o souřadnicích $[b, 0]$. Pak je výpočet obsahu útvaru pod křivkou následující

$$\int_a^b y \, dx = \Delta OAB + \Delta ODB - \Delta OCA = \frac{1}{2} \int_a^b z \cdot dx + \frac{1}{2} b \cdot f(b) - \frac{1}{2} a \cdot f(a),$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 136)*

z toho vzniká rovnost

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_a^b z\,dx + [xy]_a^b\right)$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 136)*

Tato rovnost je součástí tzv. transmutační věty, jejíž podstatou je, že výpočet jednoho integrálu je zaměněn výpočtem jiného. Za $z$ můžeme dosadit

$$z = y - x\frac{dy}{dx},$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 136)*

pak je

$$\int_a^b z\,dx = \int_a^b y\,dx - \int_{f(a)}^{f(b)} x\,dy.$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 136)*

To dosadíme do vztahu rovnosti a dostaneme Leibnizovu rovnost, která je obměnou formulace metody per partes.

$$\int_a^b ydx = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} xdy$$

*(Netuka, Schwabik, 1987, str. 137)*

Leibniz se velmi snažil o vytvoření symboliky nových výpočtů. V porovnání s Newtonem se zaměřil na rozvíjení obecných postupů a metod. Newton se oproti němu věnuje spíše praktickému využití kalkulu v úlohách.

V 17 a 18. století se matematika rozvíjela převážně v oblasti její aplikace. Bylo častým jevem, že matematik byl zároveň i fyzik. Tzv. přímá metoda a inverzní metoda tečen dostaly r. 1698 díky Leibnizovi nový název – diferenciální a integrální počet. Avšak celé toto období s sebou neslo problém nespolehlivého základu, na kterém celá matematická analýza stála, a tím byly úvahy o nekonečně malých veličinách, které se blíže nedefinovaly. Sám Leibniz měl pochybnosti o existenci infinitesimálních veličin. Mezi matematiky se vyskytovaly různé tendence, jak s výpočty pracovat. Někteří se snažili nekonečně malé veličiny nepoužívat a pracovat jen s konečnými přírůstky $\Delta x$. Další začali uvažovat nad limitním výpočtem a nemalá skupina se snažila obhajovat infinitesimální počet pomocí algebry. Důležitým krokem byl pokus o vyjádření derivace jako limity poměru přírůstků veličin. O to se zasloužil Jean BaptisteLe Rond d'Alembert (1717–1783).

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

*(Schwabik, Šarmanová, 1996, str. 47)*

Mezi další důležité matematiky 18. století patřili Jakob a Johann Bernoulli. Johann byl učitelem Guillaume Francoise de l'Hospitala, jenž napsal první učebnici diferenciálního a integrálního počtu s názvem *Analýza nekonečně malých veličin ve studiu křivek*. V ní byly publikovány i některé z výsledků Bernoulliho, jako je l' Hospitalovo pravidlo pro limitu podílu dvou funkcí. Mezi další přínos bratrů Bernoulliových patřily součty řad např. $\sum \frac{1}{n(n+1)}, \sum \frac{1}{n^2-1}$.

Nemalý podíl na rozvoji matematiky má i Leonhard Euler (1707–1783), který byl prvním, kdo definoval logaritmus jako exponent. Tedy, že $\log_a x$ je exponent $y$ a platí pro něj $a^y = x$. Dále určil přirozený logaritmus, jehož základem je tzv. Eulerovo číslo. Snažil se pozměnit chápání pojmu funkce, která byla vnímána spíše jako jistý analytický výraz reprezentovaný mocninnou řadou. Pokoušel se vymyslet její co nejobecnější pojetí, protože postupně zjišťoval, že pouze její analytické pojetí nestačí. Pozměnil definici Johanna Bernoulliho z roku 1718:

> *„Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina, která je sestavena libovolným způsobem z proměnných veličin a konstant.“*

*(Schwabik, Šarmanová, 1996, str. 52).*

Tu však později ještě přeformuloval a jeho definice z roku 1755 byla v tomto znění:

> *„Když některé veličiny závisí na jiných tak, že při změně těchto (druhých) se také pozmění, říkáme, že první jsou funkcí druhých. Tento název má mimořádně široký charakter a zahrnuje všechny možné způsoby, jak lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných veličin.“*

*(Schwabik, Šarmanová; 1996, str. 52)*

Podobu definice funkce, jak ji známe dnes, vyslovil např. P. G. L. Dirichlet roku 1829:

*„…y je funkce x, jestliže každé hodnotě x z daného intervalu odpovídá jediná hodnota y.“*

*(Schwabik, Šarmanová, 1996, str. 53)*

Mezi další, kteří přispěli do rozvoje infinitesimálního počtu, můžeme zařadit Bernarda Bolzana (1781–1848) a Augustina Louise Cauchyho (1789–1857), kteří mají zásluhu na zavedení pojmu limity. Můžeme také říci, že Cauchy dokončil teorii integrálu pro spojité funkce jedné proměnné. Neměli bychom vynechat ani Bernharda Riemanna (1822–1866), jemuž můžeme zapsat zásluhu v oblasti teorie integrálu.

# 2 Vývoj výuky a učebnic infinitezimálního počtu u nás

Učebnici od Aloise Strnada a Karla Rašína *Počátky počtu diferenciálního a integrálního* z roku 1918 lze zařadit mezi první učebnice věnující se této tématice u nás. Je však nutné zasadit celou učebnici do hlubšího historického kontextu.

## 2.1 Vývoj do roku 1909

K rozvoji tvorby učebnic pro střední školy v českém jazyce došlo po roce 1848, kdy se zrovnoprávnil český a německý jazyk v naší zemi. To otevřelo cestu k vyučování v národním jazyce. Jenže v této době české učebnice pro střední školy chyběly. Středoškolští profesoři, jako byl např. V. Šimerka, V. Jandečka, J. Smolík a další, se snažili situaci zachránit a chybějící materiály vytvořit. Většinou se jednalo o překlady z jiných jazyků, a to hlavně německého a francouzského, nebo o přepisování starých textů. Všechny učebnice v té době, podle kterých se na rakouských státních školách vyučovalo, musely být schváleny ministerstvem kultu. Tím byl však omezen tvůrčí duch každého autora. Chybělo systematické vydávání učebnic, každý profesor psal o tématu, o které se sám zajímal podle sebe, takže se často učebnice rozcházely v terminologii, výkladu, symbolice atd. Situace se zlepšila až v devadesátých letech 19. století, kdy se vydávání ujala Jednota českých matematiků a za chvíli pokryla velikou škálu matematických oblastí. (Vízek, 2018)

V roce 1864 publikoval svůj *Přídavek k algebře pro vyšší gymnasia* profesor Václav Šimerka. Jedná se o nejstarší učebnici vyšší matematiky u nás. Nebyla však ministerstvem kultu a vyučování schválena, a proto zůstala pouze přídavkem pro bystřejší studenty, kteří se o toto téma zajímali. Jak sám Šimerka napsal ve svém úvodu: *„Dle rady některých z mých vědeckých přátel a maje za to, že čas nynější toho požaduje, přijal jsem i základy počtu diferenciálního a integrální ve spis ten, vynechav za to řetězce co méně důležité…V srpnu 1862 obdržel jsem od vys. c. k. ministerstva svůj rukopis zpět, s ním pak čtveru recensi. Všechny ty kritiky shodují se v tom, že jest spis onen práce nová, a vyniká zvláštní jasností – vlastnosti to, jimiž se každá podobná práce vykázati nemůže. Co do vady udáno vynechání řetězců, že jich semo tam ve fysice znáti třeba, mimo to vytýkáno z dvou stran knize mé množství obsahu, přijmutím totiž počtu differenciálného a integrálného že budou žáci přetíženi. Jiným se však počet ten pro stručnost a srozumitelnost velmi líbil. Vysoké ministerstvo rozhodlo* *se dle stávajícího školního plánu pro vynechání." (Šimerka, 1864, nestránkovaná Předmluva)*

V jeho práci nenajdeme přesný teoretický výklad, pouze vysvětlení počtu integrálního a diferenciálního na základě intuitivního chápání. (Vízek, 2018)

Mezi další, kteří se zasadili o rozvoj počtu u nás, patří František Josef Studnička (1863–1903). Pocházel z jižních Čech, kde získal své základní vzdělání. Po studiu gymnázia v Jindřichově Hradci získal doktorát z filosofie na univerzitě ve Vídni. Poté působil jako profesor pražské polytechniky a později pražské univerzity. Od svého příchodu na pražskou polytechniku začal tvořit a vydávat české vysokoškolské učebnice matematiky. Tyto texty měly sloužit pouze do doby, než vzniknou učebnice nové a kvalitnější. Proto i jejich obsah je utvořen spíše na základě jeho matematického cítění. Nejedná o sepsání teorie, chybí zde exaktní vyjadřování, hlavně ε a δ aritmetika při zavádění pojmů a dokazování tvrzení. Ale přesto se podle nich učilo až do počátku 20. století. Pro nás je důležité zmínit učebnici *Základové vyšší matematiky*, která měla tři díly – první, *O počtu differenciálním*, druhý, *O počtu integrálním* a třetí, O teorii *integrace diferenciálních rovnic a variačním počtu*.

Počtem diferenciálním se zabýval i profesor pražské techniky a univerzity Eduard Weyr (1852–1903). Na požádání Jednoty českých matematiků sepsal texty, které měly nahradit nevyhovující práce Studničkovy. Ve své knize *Počet diferenciální* shrnul nauku o teorii čísel, reálných posloupností, elementárních a implicitních funkcí jedné a více proměnných, spojitosti, limitě, derivaci, aplikacích diferenciálního počtu a funkcích komplexní proměnné. Inspirací mu byla jak francouzská a německá literatura tak i starší Studničkovy práce. (Bečvářová, 2008), (Vízek, 2018)

Literatura však nebyla stále dostačující. O zlepšení se pokusil Josef Úlehla se svým *Počtem infinitesimálním*. V úvodu ke své učebnici naráží na nutnost sepsání knihy, *„která by stručně učila základním pravidlům počtu diferenciálního a integrálního. Šimerkův Přídavek k algebře jest příliš stručný, učebnice Studničkova a Weyrova jsou nesnadny pro začátečníky."* (Úlehla, str. I) Učebnice nebyla určena do škol, protože by nejspíš, stejně jako Šimerkova, neuspěla u ministerstva. Látku vykládal srozumitelným jazykem, vše se snažil názorně ukázat a zapojil i historické pozadí infinitezimálního počtu. Nenajdeme zde důkazy tvrzení, učebnice, stejně jako u jeho předchůdců, vychází z intuitivního vnímání problematiky. Text byl ideální pro kandidáty učitelství a pedagogy obecných a měšťanských škol.

## 2.2 Období po Marchetově reformě

V průběhu druhé poloviny 19. století zájem o matematiku stále sílil. Díky prudkému rozvoji vědy a techniky byly nutné změny ve školství. Vysoké školy technické začaly vyžadovat širší a pevnější základ středoškolské matematiky. I samotná matematika prodělala v letech 1800 až 1870 podstatné změny v jejím obsahu, metodách práce i aplikacích, na něž střední školy neodpovídaly. Všechny tyto aspekty vedly ve snahu o nutnou reformu. Jedním z výsledků byl Meranský program[1], na který v celé rakouské monarchii, a tedy i u nás, reagovala Marchetova reforma. (Trkovská, 2015) Jednotou českých matematiků byl vybrán Bohumil Bydžovský, aby sestrojil učebnice podle nových osnov, které byly dány na základě reformy. V nových materiálech byla vyložena teorie konkrétních funkcí na obecnější úrovni, obecnou definici funkce autor v učebnici ještě nepoužil. Ale již v ní je zařazen diferenciální počet. To se děje na konkrétním příkladu kvadratické funkce, ale je pak rozšířena i na další funkce vyšších řádů. Derivace je vysvětlena pomocí intuitivního vnímání přechodu od sečny paraboly k tečně, tak je tomu i s limitou použitou v definici. Ve své učebnici zavedl derivaci jako $\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ a používal klasické označení y‘.

V letech od 1924 až 1927 vycházely Bendlovy-Mukovy učebnice, které se svým stylem výkladu blížily knihám Bydžovského. Obsahovaly však více příkladových úloh na počítání, proto se občas používaly i jako sbírky úloh. Byly určeny pro reálky a gymnázia.

Základy infinitezimálního počtu se neobjevily pouze v algebře, ale promítly se také do učebnice geometrie. Po úpravě, která byla provedena Karlem Rašínem podle osnov z roku 1909, se používala již existující Strnadova učebnice. Více se této učebnici budeme věnovat v dalších kapitolách.

Spolu se Strnadovou učebnicí geometrie vyšla po roce 1909 učebnice *Geometrie pro 5. až 7. třídu středních škol* od Josefa Vinše. Byla obsahově stručnější a ve výkladu

[1] Návrh německé komise pro reformu výuky přírodovědných předmětů na středních školách. (Trkovská, 2015)

postupuje často opačně než Rašín, v případě infinitezimálního počtu se přiklání spíše k způsobu B. Bydžovského, který použil v algebře pro šestou třídu.

## 2.3 Výuka do roku 1945

V samostatném československém státu se pokračovalo ve výuce podle starých zákonů pocházejících z dob Rakousko-Uherska. V roce 1919 byl na středních školách posílen význam přírodovědných předmětů, tedy i matematice bylo dáno více prostoru. Začal se klást větší důraz na praktické využití probírané látky. (Potůček, 1992)

Učebnice Strnada a Rašína ze školních lavic vymizela, protože její provedení bylo už zastaralé. Dále přetrvávaly práce od Bydžovského i Vinše, byly pouze upraveny podle nových osnov z roku 1933. Sjednotily se učebnice vydávané Jednotou českých matematiků. Z učebnic algebry byl infinitezimální počet odebrán a ponechal se pouze v učebnicích geometrie. Nadále zůstávala i Bendlovo-Mukova učebnice. Ta se stala obsahově nejrozsáhlejší učebnicí této problematiky až do roku 1945. Je v ní vyložena derivace funkce, derivace součinu funkcí, složené a implicitní funkce a počítá i druhé a vyšší derivace. Funkční závislost je zapsána jako $y = (x)$. Z integrálního počtu je zastoupen Newtonův integrál.

## 2.4 Od roku 1945 po současnost

V tomto období byl výraznou osobností Eduard Čech, který se svým týmem dalších matematiků vytvořil osnovy a učebnice pro dva typy škol gymnázia a klasické střední školy. Byla v nich zařazena látka o limitě, které předcházel výklad o posloupnosti, a to hlavně posloupnosti ohraničené. Ve čtvrtém ročníku na gymnáziích se zaměřovaly na pojem funkce a derivace funkce. Poprvé je zde zaveden i definiční obor funkce. Derivace je přesně matematicky definována pomocí limity. Dále se limita objevuje v učivu o objemech těles.

Školní zákon z r. 1953 zkrátil školní docházku na jedenáct let. Dotace hodin matematiky však zůstaly téměř nezměněné, proto se obsah učiva nemusel výrazně měnit. Po roce 1959 byly vydány nové učebnice, které měly odstranit metodické nedostatky předchozích učebnic. Další nové učebnici vyšly v roce 1976, poté co opět proběhla nová školní reforma a byla zavedena desetiletá povinná školní docházka. Jednalo se o sadu učebnic *„Matematika pro gymnázia, sada 1–8“*. Díky událostem z roku 1989 došlo následujícího roku k uzákonění nového školního zákona, který snížil povinnou školní docházku na devět let. V únoru roku 2001 vešla v platnost tzv. *„Bílá kniha“* neboli *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice*. (Tesařová, 2010)

Dnes jsou školní osnovy tvořeny podle Rámcově vzdělávacího programu. V RVP pro gymnázia je infinitezimální počet zahrnut do učiva funkce a obecné poznatky o funkcích. V očekávaných výstupech ho najdeme v jeho aplikacích, např. *načrtne grafy požadovaných funkcí (zadaných jednoduchým funkčním předpisem) a určí jejich vlastnosti, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí a posloupností, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí, řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích a posloupnostech.* (RVP, 2008, str. 24)

V dnešní době můžeme na trhu najít mnoho učebnic zabývajících se touto tematikou. Já bych ráda zmínila *Matematiku pro gymnázia, Diferenciální a integrální počet* od autorů Hrubého a Kubáta z nakladatelství Prometheus, vydávané ve spolupráci s Jednotou českých matematiků. Další je sada učebnice s názvem Učebnice pro střední školy od nakladatelství Didaktis. Desátý díl v sobě zahrnuje základy diferenciálního a integrálního počtu.

# 3 Učebnice

Jak už bylo v předchozí kapitole uvedeno, infinitezimální počet se po roce 1909 začal do učebnic pro střední školy postupně zařazovat, a to na základě reformních požadavků. Ze začátku se mísilo pojetí geometrické a analytické. Ve své práci se zaměřím na učebnici *Geometrie pro vyšší školy reálné* z rukopisu Aloise Strnada, kde se v části s názvem *Počátky počtu diferenciálního a integrálního* věnují infinitezimálnímu počtu. Původní práce od Aloise Strnada byla následně poupravena Karlem Rašínem, aby vyhovovala tehdejším školním osnovám.

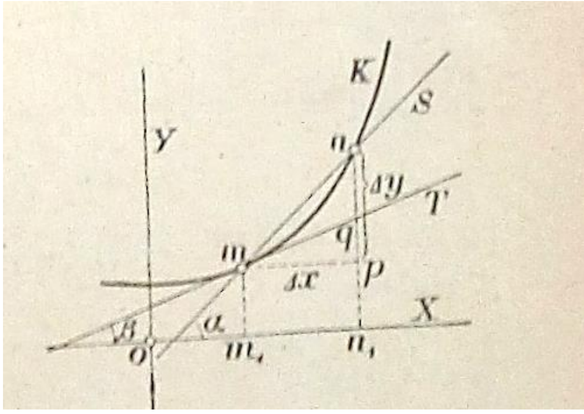
Pro lepší přiblížení a porovnání zavádění pojmů limity, derivace a integrálu tehdy a dnes, budu z dnešních učebnic popisovat Matematiku pro gymnázia, Diferenciální a integrální počet, kterou považuji za dobrý příklad pojetí a výkladu kalkulu na našich středních školách dnes. V každé z částí se budu nejdříve věnovat učebnicím dřívějším, tedy *Počátku počtu diferenciálního a integrálního* a následně je okomentuji poznámkami z učebnice dnes používané.

Vraťme se k učebnici Strnadově. Infinitezimální počet byl zařazen do učebnice geometrie. Uspořádání výkladu je z mnoha ohledů jiné, než jak ho známe dnes. Např. derivace se zavádí v kapitole o elipse, kde se hledá její tečna. V samotné kapitole věnované infinitezimálnímu počtu za sebou látka následuje jinak, než jak je seřazena v dnešních učebnicích. Nejdříve se autoři věnují derivacím elementárních funkcí, pokračují derivací součtu a rozdílu, pak maximem a minimem funkce, derivace sinu a cosinu. Na závěr je ještě věnována kapitola diferenciálu a diferenciálnímu poměru. Integrální počet je ukázán pouze v základech, pozornost je zaměřena na jeho konkrétní využití v úlohách. Celý výklad je ukázán obecně bez podrobnějších důkazů, jak uvidíte v následujících odstavcích.

## 3.1 Limita

V první části knihy, věnované právě analytické geometrii, se setkáváme se zavedením pojmu limity a derivace u výpočtu tečny k elipse a parabole:

> *Jsou-li m* $(x_1, y_1)$, *n* $(x_2, y_2)$ *dva body křivky K (obr. 5), α odchylka sečny* $S \equiv mn$, *β odchylka tečny T od osy X a označíme-li rozdíl (diferenci)* $y_2 - y_1$ *a* $x_2 - x_1$ *krátce* $\Delta x$ *a* $\Delta y$, *jest směrnice sečny* $tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.




*Obr.:5 Ilustrace tečny k elipse (Rašín, Strnad, 1918, str.71)*

*Je-li bod m pevný a blíží-li se n po křivce stále bodu m, zmenšuje se* $\Delta x$ *a také* $\Delta y$*. Poměr* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *se mění a blíží se obecně určité hodnotě jakožto mezi, blíží-li se x nulle. Sečna mn přechází v tečnu bodu m, mezná hodnota poměru differenci* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *udává pak směrnici tgβ této tečny, což píšeme*

$$\lim_{\Delta \mathrm{x}=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$$

*(Rašín, Strnad, 1918, str.72)*

Pojem limita je zaveden pouze intuitivně jako mez, ke které se hodnota funkce blíží. Není blíže definována. Mezní hodnota tg $\beta$ je považována za funkci proměnné $x$ a je označena jako $y'$, $f'(x)$ nebo také $D_x f(x)$. Je nazvaná funkcí odvozenou či derivovanou nebo krátce derivací. Můžeme pak psát:

$$y' = f'(x) = D_x f(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

*(Rašín, Strnad, 1918, str. 73)*

Při záměně $x_1 + \Delta x$ místo $x_2$ , pak můžeme psát $f(x_1 + \Delta x)$ a $f(x_2) = y_2$. Dostaneme poměr diferencí $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$ ve tvaru $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ . Dojdeme k

$$f'(x) = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

*(Rašín, Strnad, 1918, str. 73)*

Tak se dostaneme k derivaci funkce. Není uvedeno, kde je definována. Chybí zmínka o spojitosti funkce. Teorie se neopírá o důkazy, je předkládána na základě autorova matematického cítění.

Podívejme se, jak je pojem limity uveden v dnešních učebnicích:

> *„Funkce $f$ má v bodě $a$ limitu L, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje okolí bodu $a$ tak, že pro všechna reálná $x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L."* *(Hrubý, Kubát, 2011, str.40)*

Je zajímavé, že se často v učebnici objevuje využití matematické symboliky pro zápis základních pouček. Pro limitu můžeme vidět:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R:$$
$$(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 41)*

Limita je zavedena pomocí tzv. $\varepsilon, \delta$ symboliky na okolí bodu. Celý výklad je v kapitole uveden konkrétní funkcí, v tomto případě $f: y = \frac{tg\,x}{x}$.

| $x$ | $\Delta x$ | $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ | $\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1$ |
|---|---|---|---|
| −0,100 | −0,100 | 1,003 346 7 | 0,003 346 7 |
| −0,010 | −0,010 | 1,000 033 3 | 0,000 033 3 |
| −0,001 | −0,001 | 1,000 000 3 | 0,000 000 3 |
| +0,001 | +0,001 | 1,000 000 3 | 0,000 000 3 |
| +0,010 | +0,010 | 1,000 033 3 | 0,000 033 3 |
| +0,100 | +0,100 | 1,003 346 7 | 0,003 346 7 |

*Obr.: 6 Výpočet hodnot funkce, výklad limity (Hrubý, Kubát, 2011, str. 40)*

Žák postupně dosazuje za $x$ čísla blížící se nule a sám počítá, jak se mění hodnota funkce a k jakému číslu se blíží v bodě blízkém nule.

Zůstaňme ještě u dnešních učebnice. Předtím než je zavedena limita, je definována spojitost funkce a okolí bodu, která je důležitá pro celou definici limity a ve staré učebnici ji postrádáme.

> *„Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu f(a) existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty f(x) do zvoleného okolí bodu f(a).“ (Hrubý, Kubát, 1997, str.26)*

Následuje opět zápis pomocí množinově-logické symboliky

*Funkce f je spojitá v bodě* $a \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in R$:

$$(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 27)*

Pozornost je pak věnována větám o limitách, větě o třech limitách, jednostranné limitě, nevlastní limitě a limitě v nevlastních bodech.

V poslední části kapitoly o limitě autoři ukazují jejich konkrétní využití, a to při zjišťování asymptot a tečen ke křivce. Výpočet tečny je demonstrován na parabole funkce $f\colon y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. Poté je ukázán obecnější postup křivky $y = x^3$. Z čehož je vyvozena směrnice tečny takto:

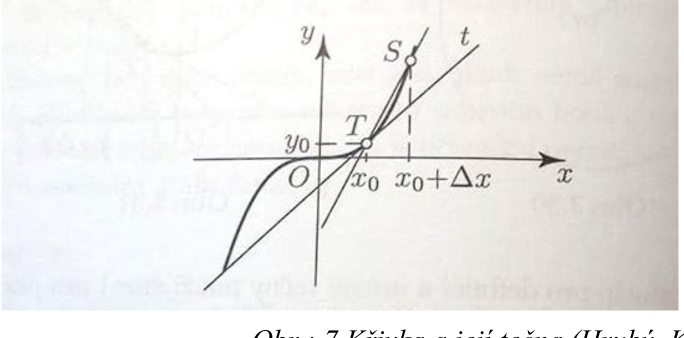
*Je-li křivka grafem funkce* $y = f(x)$ *a existuje-li vlastní limita*

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

*pak tečna křivky v bodě* $T[x_0, y_0]$ *je přímka o rovnici*

$$y - y_0 = k_T(x - x_0).$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 81)*




*Obr.: 7 Křivka a její tečna (Hrubý, Kubát, 2011, str. 81)*

Úvahy o tečně jsou v obou učebnicích podobné. Shodují se ve vnímání přechodu sečny v tečnu a její význam jako určité meze, limity. Tento pojem však není v původních učebnicích ještě blíže specifikován a určen, pouze tak chápán. Chybí v nich odborná terminologie, definice nejsou přesné.

## 3.2 Derivace

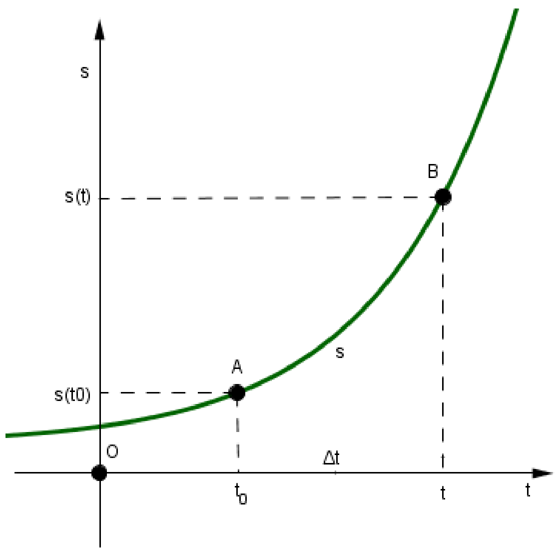
Ve starší učebnici je derivace definována pouze v části o geometrii, kde se používá při výpočtu tečny k elipse. Proto můžeme z předchozí kapitoly jen poznamenat, že se derivace zavádí následovně:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 73)*

V dnešních učebnicích začíná kapitola o derivacích konkrétním příkladem, úlohou o okamžité rychlosti pohybu hmotného bodu. Zadání je:

> *„Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje. Od jistého okamžiku začneme měřit čas a zároveň v závislosti na čase t budeme měřit dráhu s(t), kterou bod urazil od okamžiku t=0. Dráha s(t) je funkcí času t. Na jednu osu soustavy budeme nanášet čas t, na druhou dráhu s=s(t). V době mezi časy* $t_0$ *a t urazil bod dráhu délky s(t)-*$s(t_0)$*."*




*Obr.:8 Graf funkce s=s(t), (Hrubý, Kubát, 2011, str. 86) (upraveno v GeoGebře)*

Průměrnou rychlost vypočítáme, pokud celkovou dráhu vydělíme celkovým časem:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 87)*

Pro získání okamžité rychlosti se musí $\Delta t$ blížit nule. Proto můžeme tuto rychlost definovat jako limitu z podílu dráhy a času

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 87)*

Z toho je již patrná souvislost s předchozími úvahami, že okamžitá rychlost v bodě $t$ je tečnou ke grafu funkce závislosti dráhy na čase. Jak je v učebnici napsáno:

*„Tato limita má pro nás zásadní význam, a proto je zcela přirozené, že má své vlastní označení a svůj vlastní název.“ (Hrubý, Kubát, 1997, str.88)*

Následně se dostáváme k definici derivace funkce:

*Mějme funkci $f$ definovanou v jistém okolí bodu $x_0$. Existuje-li vlastní limita*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

*nazýváme ji derivací funkce $f$ v bodě $x_0$.*

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 88)*

Definice se ve své podstatě shodují, ale liší se formou zavedení. V druhém případě se vychází z fyzikální úlohy, nikoli z geometrie jako v dřívější učebnici. Funkce je definovaná v bodě a jeho okolí, její existence je závislá na existenci vlastní limity.

V kapitole o derivaci se pokračuje geometrickou interpretací derivace funkce v bodě, kde se navazuje na předchozí kapitolu o limitě. Derivaci funkce $f$ v bodě $x_0$ lze psát jako $k_T = f'(x_0)(x - x_0)$.

Celý výklad je završen příklady, které se počítají nejdříve pomocí limity.

*Např.: Vypočítejte derivaci funkce $f$ v bodě $x_0 = 0$, jestliže $f\colon y = x^3$.*

Řešením je pak: $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^3 - 0^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 0$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 89)*

### 3.2.1 Derivace elementárních funkcí

Vrátíme se opět k učebnici *Geometrie pro vyšší školy reálné*. Protože dle autorů je způsob výpočtu tečny elipsy a paraboly zdlouhavý, snaží se autor ukázat způsob jiný, časově méně náročný. Tak se zavádí obecná pravidla pro derivaci:

*„Derivace mocniny rovná se součinu z mocnitele a původní mocniny, jejíž mocnitel byl o jedničku zmenšen.“*

*(Rašín, Strnad, 1918, str.126)*

Věta je následně dokázána:

*Nechť je dána funkce $y = x^n$, kde $n$ je celé číslo kladné. Pokud $x$ zvýšíme o malou, konečnou hodnotu, vzroste pak i $y$ o malou, konečnou hodnotu. Dostaneme tak:*

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

*Dosadíme-li za $y = x^n$, tak po odečtení $x^n$ a vydělení $\Delta x$ dojdeme k rovnici*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

*Napíšeme-li $x + \Delta x$ jako $x_1$, bude*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x_1 x^{n-2} + x^{n-1}$$

*Pokud se bude blížit $\Delta x$ nule, stane se $x_1 = x$, takže*

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = nx^{n-1}.$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 125)*

Postupně objasňuje pravidla pro výpočty dalších derivací, jako je $y = x^{-n}$ . Kde je výsledek jednoduše dokázán:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x^n}}{x_1 - x} = \frac{-1}{x_1^n x^n} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = -\frac{1}{x_1^n x^n}\left(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right)$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 126)*

Z odvození goniometrických funkcí uvedeme pro příklad derivaci funkce $\sin(x)$.

*Z rovnice* $y = \sin(x)$ *plyne*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

*pro* $\lim_{\Delta x = 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. *Jest tedy* $y' = \cos x$.

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 134)*

Limita je uvedena s tímto vysvětlením: „*...při malém úhlu jest rozdíl mezi arcem a příslušným sinem velmi malý a tím menší, čím menší jest úhel, takže pro* $lim \Delta x = 0$ *jest* $lim \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$.“ *(Strnad, Rašín; str.134)*

Dnes je derivace mocninné funkce zavedena takto:

*Pro funkci f: y=*$x^n$, $x \in R$, $n \in N$, *platí* $y' = nx^{n-1}$.

Důkaz:

$$\forall x_0 \in R: y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}h + \cdots + nx_0 h^{n-1} + h^n - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(nx_0^{n-1} + \cdots + nx_0 h^{n-2} + h^{n-1})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}(nx_0^{n-1} + \cdots + nx_0 h^{n-2} + h^{n-1}) = nx_0^{n-1}$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 93)*

Důkazy vychází ze znalostí limity a definice derivace, na kterou navazují. Věnují se také derivaci goniometrických funkcí. Jako příklad zde uvedeme odvození funkce $\sin(x)$.

*Pro funkci* $f: y = sin(x)\,, x \in R$*, platí* $y' = cos(x)$.

Důkaz: Pro každé $x_0 \in R$ platí:

$$y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{x_0+h+x_0}{2}\sin\frac{x_0+h-x_0}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right] = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 93)*

Jak se můžete sami přesvědčit, tyto části jsou velmi podobné, vycházejí ze stejných úvah a postupů. Akorát dnes je ještě doplněna derivace exponenciální a logaritmické funkce, která není v učebnici Strnada a Rašína uvedena.

### 3.2.2 Součet, rozdíl, součin a podíl derivace

Nyní se zaměříme na zavedení součtu a rozdílu dvou funkcí. Na počátku 20. století byl výklad:

*Budiž* $y = f(x) + \varphi(x)$, *pak jest*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) + \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},$$

$$\check{y}' = f'(x) + \varphi'(x).$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 127)*

Stejně je tomu tak u rozdílu. Součin je následovně:

*Budiž dán součin* $y = u \cdot v$, *v němž jest* $u = f(x), \vartheta = \varphi(x)$. *Především jest*

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$čili\ \ \Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v,$$

$$takže\ \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x\Delta x}\Delta x.$$

*Pro limitu* lim $\Delta x = 0$ *vychází* $D_x(uv) = uD_xv + vD_xu$ *aneb*

$$(uv)' = uv' + u'v$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 131)*

Pro podíl funkce vycházejí při odvození ze zavedeného součinu funkce.

*Ustanovíme derivaci podílu* $y = \frac{u}{v}$. *Ježto* $u = vy$, *jest* $u' = vy' + yv'$, *tudíž*

$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v}v'}{v}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 131)*

Ukazují se pak ještě různé případy složených funkcí, které je lepší řešit pomocí substituce nebo jako součin.

Dnes se setkáme v učebnicích s tímto postupem:

*Jestliže funkce u, v mají v bodě* $x_0$ *derivaci, má v bodě* $x_0$ *derivaci i součet, rozdíl, součin a pro* $v(x_0) \neq 0$ *i podíl, funkcí u, v a platí:*

$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$
$$(u - v)'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$$
$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 94)*

Následuje důkaz pro derivaci součtu. Předpokládejme, že pokud existuje derivace funkcí $u(x), v(x)$ v bodě $x_0$, pak jsou tyto funkce definovány v jistém okolí $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu $x_0$, a proto je v tomto okolí definována i funkce $f(x) = u(x) + v(x)$ a pro $h \in (-\delta, \delta)$ jsou definovány i funkční hodnoty $u(x_0 + h), v(x_0 + h)$.

Tedy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) + v(x_0 + h) - u(x_0) - v(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[ \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \right] =$$

$$= u'(x_0) + v'(x_0).$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 94)*

Důkaz součinu a podílu není uveden, je napsaná pouze poznámka, že si má čtenář sám dokázat tento vztah a je uvedena nápověda: ... *označíme-li $f = uv$, pak je třeba k důkazu „vhodně“ vyjádřit:*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} \cdot v(x_0 + h) + \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h} \cdot u(x_0).$$

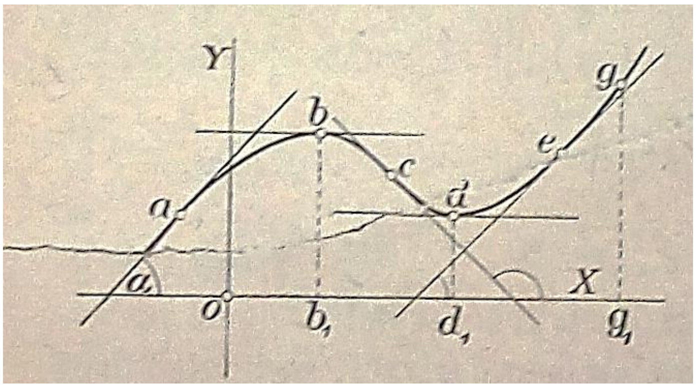
*Uvědomte si, že k důkazu je nutné použít větu o vztahu mezi derivací a spojitostí funkce v bodě, kterou jsme vyslovili dříve. (Hrubý, Kubát; 2011, str. 95)*

### 3.2.3 Průběh funkce

Tato část je nazvána průběh funkce, i když se v učebnici Aloise Strnada samostatná kapitola s tímto názvem v neobjevuje. Kapitoly jsou nazvané *Maxima a minima* a *Geometrický význam druhé derivace*. Pokusím se přiblížit, o co se v následujících kapitolách jedná. Začneme zavedením maxima a minima funkce následující větou:

> *Roste-li funkce $y = f(x)$ při rostoucím argumentu x, stoupá příslušná křivka a její tečny svírají s kladným směrem osy X úhel ostrý; jich směrnice, tj. derivace*

*$y' = f'(x) = tg\,\alpha$ jest tedy kladná. Klesá-li hodnota funkce při rostoucím argumentu, klesá i příslušná křivka a směrnice tečny, tj. derivace $y'$jest záporná. Změnu křivky (stoupání, klesání) v určitém bodě (a jeho sousedství) poznáme dle znamení, jehož nabude derivace příslušné funkce po dosazení souřadnic onoho bodu.*




*Obr.:9 Maximum a minimu (Strnad, Rašín, 1918, str. 128)*

*Při přechodu ze stoupání ku klesání a naopak musí býti $y' = tg\,\alpha\ = 0$. V prvém případě jest pořadnice $y$ dotyčného bodu $b$ větší než pořadnice bodů sousedních (bod nejvyšší), funkce nabývá tu hodnoty největší čili maxima. Ve druhém případě (bod d, zvaný nejnižší) nabývá funkce hodnoty nejmenší čili minima.*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 128)*

Více se už tímto tématem nezabývají. Dále se jen krátce zmiňují o druhé derivaci. Její význam vidí v určování změny stoupání.

*Je-li $y'' > 0$ , při rostoucím x se zvětšuje i derivace $y'$. Je-li $y'' < 0$, zmenšuje se $y'$ a křivka je nahoru vypuklá. Pokud je $y'' = 0$, pak je tento bod bodem obratu.*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 133)*

To je vše, co věnují „průběhu funkce“, pokud to tak můžeme z dnešního pohledu nazvat. Je to zřejmě způsobeno tím, že učebnice byla používaná jako učebnice geometrie a samotná derivace sloužila spíše jako nástroj k nalezení tečny ke křivce. Můžeme se všimnout hlavně jiného názvosloví. Autoři používají odlišná slova než dnes, např. místo okolí bodu sousedství, pořadnice je souřadnice a inflexní bod jako bod obratu.

Dnes se setkáváme s kapitolou věnované celé průběhu funkce, která je dle autorů Kubáta a Hrubého považována za základní úlohy diferenciálního počtu. V úvodu se seznámíme s Rohllenovou větou, díky které máme zavedené podmínky funkce, jejichž průběh budeme zkoumat. Zobecněním Rohllenovy věty je věta Lagrangeova:

*Mějme funkci f, která má tyto vlastnosti:*

a) *je spojitá v uzavřeném intervalu* $\langle a, b \rangle$,
b) *v každém bodě otevřeného intervalu* $(a, b)$ *má derivaci.*

*Potom existuje v otevřeném intervalu* $(a, b)$ *aspoň jeden bod c, pro který platí*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

kde závěr věty můžeme zapsat ve tvaru

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c).$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 106)*

Což je hned interpretována geometricky a následně je vysvětlen její význam ve fyzice. Díky ní můžeme dokázat větu:

*Platí-li* $f'(x) = 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$*, potom f je konstantní funkce.*

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 107)*

Důkaz je veden sporem.

K průběhu funkce patří i určení monotónnosti. Je tak učiněno pomocí jednoduché poučky. Pokud má funkce $f$ v každém bodu intervalu $(a, b)$ kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí, pokud je tomu opačně, je v intervalu klesající. To celé je doplněno o důkaz. Je potřeba také určit extrémy funkce. Nejdřív je vše předvedeno na obrázku konkrétní funkce a shrnuto následující větou:

*Funkce f má v bodě* $x_0$ *lokální maximum, existuje-li takové okolí* $\cup(x_0)$ *bodu* $x_0$*, že pro všechna x z* $\cup(x_0) \cap D_f$ *platí:* $f(x) \leq f(x_0)$. *Funkce* $f$ *má v bodě* $x_0$ *lokální minimum, existuje-li takové okolí* $\cup(x_0)$ *bodu* $x_0$*, že pro všechna x z* $\cup(x_0) \cap D_f$ *platí:* $f(x) \geq f(x_0)$.

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 110)*

Věta je pak doplněna:

*Má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí: $f'(x_0) = 0$.*

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 110)*

Stacionárním bodem funkce (tzv. nulovým bodem) je bod $x_0$, ve kterém je $f'(x_0) = 0$ a funkce $f$ má v tomto bodě derivaci. Je zdůrazněno, že tyto body jsou pouze „podezřelé z extrému“, tudíž tam být extrém nemusí. Pro lepší určení lokálního extrému je nutno přejít k druhé derivaci, která je uvedena hned v následující kapitole. Opět je nejdříve předveden geometrický význam druhé derivace, z kterého plyne následující poučka:

*Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje v bodě $x_0$ druhá derivace.*
*Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum,*
*je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum.*

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 115)*

Jsou zavedeny další důležité pojmy, a to konkávnost, konvexnost funkce a bod inflexe, které nám pomohou při určování průběhu funkce.

*Je-li $f''(x_0) > 0$, pak je funkce $f$ v bodě $x_0$ konvexní.*
*Je-li $f''(x_0) < 0$, pak je funkce $f$ v bodě $x_0$ konkávní*

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 122).*

Věta o inflexním bodě:

*Nechť funkce $f$ má v bodě $x_0$ derivaci. Přechází-li v tomto bodě graf funkce $f$ z polohy „nad tečnou“ do polohy „pod tečnou“ nebo z polohy „pod tečnou“ do polohy „nad tečnou“, nazýváme bod $x_0$ inflexní bod funkce $f$.*

*Je-li bod $x_0$ inflexním bodem funkce $f$ a má-li funkce $f$ v tomto bodě druhou derivaci, pak $f''(x_0) = 0$.*

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 123-124)*

Závěrečnou kapitolu o derivacích tvoří jejich využití v praxi. Jsou zde uvedeny úlohy z oblasti geometrie a fyziky. Těmto příkladům se budu věnovat v další části zaměřené na slovní úlohy.

### 3.2.4 Doplnění

Do původní učebnice je ještě zahrnuta část věnovaná diferenciálu a diferenciálnímu poměru. Pokud se podíváme na obr. 5, tečna T dělí přírůstek $\Delta y$ v bodě $q$ na $pq$ a $qn$. Z obrázku vidíme, že $mp = \Delta x$. Můžeme pak napsat $qp = mp \operatorname{tg} \beta$. Tento součin vyjadřuje závislost přírůstku proměnné $x$ na derivaci funkce a nazýváme ho dle Leibnize diferenciálem funkce $y$ a označujeme ho $dy$ nebo také $df(x)$, proto:

$$dy = y' \Delta x = df(x) = f'(x) \Delta x$$

*Differenciál neodvisle proměnné jest její (zcela libovolný) přírůstek.*

*Differenciál funkce rovná se součinu z její derivace a differenciálu neodvisle proměnné. Naopak derivace rovná se poměru těchto differenciálů* $y' = \frac{dy}{dx}$, *slove proto také poměr diferenciálním a výkon, jímž derivaci (nebo differenciál) ustanovujeme, differencováním.*

*(Strnad, Rašín; 1918, str. 137)*

## 3.3 Integrální počet

Největší část je v učebnici věnována diferenciálnímu počtu. Nemůžeme však opomíjet počet integrální, i když tvoří jen menší část knihy. Budeme se zabývat nejdříve zavedením kalkulu, dále jeho využitím.

### 3.3.1 Zavedení integrálu

Celá kapitola je v učebnici Strnada a Rašína uvedena:

> *„Dosud hledali jsme k dané funkci $f(x)$ její derivaci $f'(x)$ aneb differenciál $f'(x)dx$. Přirozeně naskytuje se úloha obrácená, totiž k dané derivaci aneb k danému differenciálu ustanoviti funkci původní. Jinak vysloveno: Známa-li funkce $f'(x)$, jest vyhledati onu funkci $f(x)$, jejímž derivováním $f'(x)$ vznikla.“*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 138)*

Pokud víme, že derivováním funkce $f(x) = x^2$ dostaneme funkci $f(x) = 2x$ tudíž diferenciál $2x\ dx$. Pak k derivaci $f'(x) = 2x$ je funkce původní $f(x) = x^2$ a nazýváme ji integrálem funkce $2x$. To zapíšeme jako $\int 2x\ dx = x^2$. Obecně můžeme napsat:

$$\int f'(x)\ dx = f(x)$$

Je zdůrazněno, že hledáme původní funkci k diferenciálu ne k derivaci a pak můžeme říct, že jsme diferenciál $f'(x)dx$ integrovali. Je z toho patrné, že *„výkony differencování a integrování (provedené postupně u téže funkci) se vzájemně ruší; jsou to výkony navzájem obrácené čili inversní. Píšeme pak:*

$$\int d[f(x)] = p\left[\int f(x)\right] = f(x)$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str.139)*

Je zde zmíněna libovolná veličina stálá *C*, a tedy k danému diferenciálu $f'(x)\ dx$ je možno vytvořit nesčíslně mnoho integrálů. To můžeme zapsat jako $\int f'(x) = f(x) + C$ a říkáme mu obecný integrál. *C* je nazváno integrační konstantou. Výklad je opět převeden do geometrie.

*„… ve smyslu geometrickém tedy vyhledati křivku, jejíž tečna má směrnici $y' = 2x$. Ježto $y = \int 2x\, dx = x^2 + C$, jest křivka ta parabola, jejíž osou je Y a vrcholem bod $v(0, C)$. Posouváme-li tuto parabolu ve směru osy $Y$, tj. klademe-li za C různé zvláštní hodnoty, nemění se odchylka tečny bodu $(x, y)$ od osy X tj. směrnice $y' = 2x$; úloze tedy vyhovuje nesčíselné množství parabol vzájemně shodných. Je-li pak připojena podmínka, aby žádaná křivka např. procházela bodem $(2,1)$, musí býti $1 = 4 + C$, tudíž $C = -3$.“*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 139)*

Ze vzorců pro integrování jsou zde uvedeny:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

*Vzorec tento pozbývá platnosti při $n = -1$; případ ten, tj. $\int \frac{dx}{x}$ vyžadoval by zvláštního vyšetření.*

Dále jsou ukázány další vzorce pro integrování sinu a cosinu:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 140)*

Jako poslední je zavedeno pravidlo o integrování konstanty:

*Značíme-li $u, v$ funkce proměnné $x, a$ veličinu stálou, jest $\frac{d(au)}{dx} = au'$, tedy naopak*

$$\int au' dx = au = a \int u' dx$$

*tj. Stálého činitele lze vyjmouti před znamení integrační.*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 140)*

Integrál součtu rovná se součtu integrálů jednotlivých sčítanců (platí i pro rozdíl).

$$\int (u' + v')dx = u + v = \int u'dx + \int v'dx$$

V dnešních učebnicích se setkáme se stejným úvodem, kde se jedná stejný princip. Pokud máme funkci $f'(x)$, integrováním získáme funkci $f(x)$. Vše je shrnuto v definici:

*Mějme dány funkce $F, f$ definované v otevřeném intervalu $J$. Jestliže pro všechna $x \in J$ platí*

$$F'(x) = f(x),$$

*říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci $f$ v intervalu $J$.*

(Hrubý, Kubát, 2011, str. 145)

K tomu je uveden příklad, kde je definice názorně ukázána. Následně je doplněna o další informaci:

*Je-li funkce $F$ v intervalu $J$ primitivní funkcí k funkci $f$, pak každá primitivní funkce k funkci $f$ je tvaru $F(x) + C$, kde C je reálná konstanta.*

(Hrubý, Kubát, 2011, str. 146)

Stejně jako u předešlé učebnice, i tady je význam integrálu demonstrován geometricky. Je ukázán význam konstanty C, která posunuje graf ve směru osy $y$. Autoři ještě objasňují použité symboly a zápis:

*„Protože pojem primitivní funkce úzce souvisí s pojmem určitý integrál, jak bude ukázáno později, používáme pro označení primitivní funkce také zápis*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in J$$

*V této souvislosti funkci $f$ nazýváme integrandem, symbol $\int$ integračním znakem, C integrační konstantou. Symbol dx slouží k odlišení integrační proměnné od případných parametrů. Postup, při kterém určujeme primitivní funkci $F(x) + C$ k dané funkci $f$, nazýváme integrování nebo také integrace funkce $f$.*

(Kubát, Hrubý, 2011, str. 146)

Mezi základní vzorce pro derivování autoři zařadili:

$$\int 0\,dx = C, x \in R$$

$$\int dx = x + C, x \in R$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ x \in (0, +\infty), n \in R\backslash\{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\ \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\int e^x dx = e^x + C,\ \ x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0,\ \ a \neq -1,\ \ x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ \ x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,\ \ x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,\ \ x \in \left(-\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi\right), k \in Z$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C,\ \ x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in Z$$

V následujících odstavcích najdeme základní vztahy pro výpočty:

$$\int cf(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

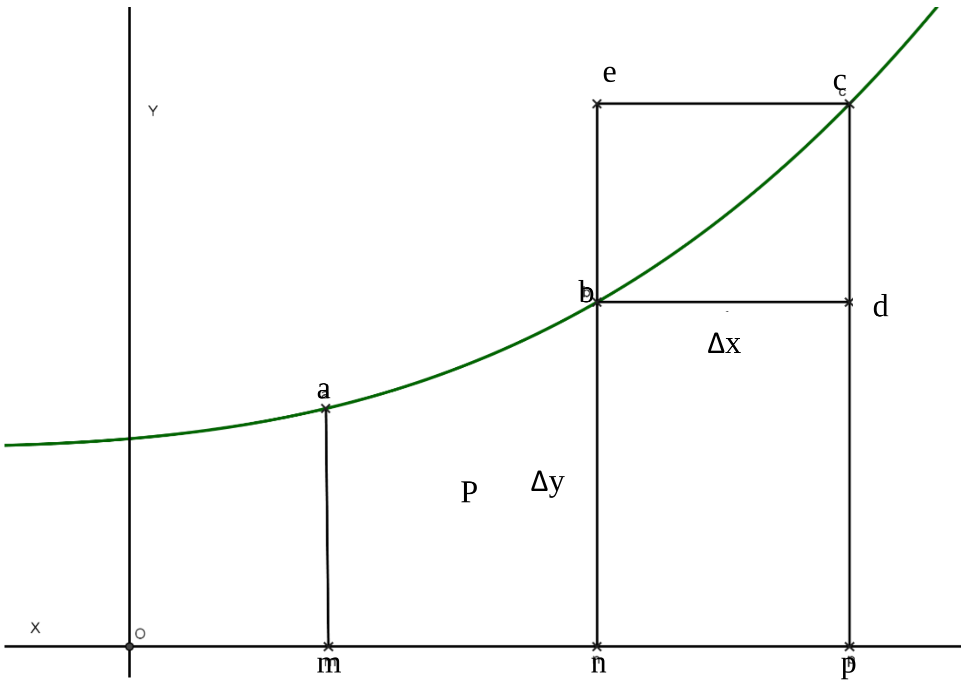
$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 148)*

Další celá část je věnována integračním metodám. S nimi se v učebnici z první poloviny 20. století nesetkáme, nejsou jejím obsahem. Podívejme se i na všechny vzorce integrací, v dnešních učebnicích jich je více. Také je uveden definiční obor $x$, ke každé z integrací. Jak je patrné z uvedených přístupů, neliší se ve formě pojetí integrálního počtu. Dnes je definice ale více přesná. Je zavedena na otevřeném intervalu. I značení je jiné, používáme velká písmena pro označení primitivní funkce. Pojem primitivní funkce není v dřívějších učebnicích zmíněn. Opět bychom mohli říci, že pojetí dřívější bylo spíš intuitivní, tak jak ho vnímali autoři. Více se zaměřují na význam integrálu z pohledu geometrického.

### 3.3.2 Určitý integrál

O využití počtu integrálního se dozvídáme víc v kapitole s názvem Kvadratura křivek rovinných. Jako první problém, který se v kapitole řeší je: *„Ustanoviti obsah části roviny omezené obloukem ab křivky $y = f(x)$, pořadnicemi jeho krajních bodů a příslušnou částí osy X." (Strnad, Rašín, 2011, str. 142)* Dostaneme se tak k zavedení určitého integrálu. Celý postup, který je v učebnici uveden, budeme představovat:




*Obr. 10.: Obsah roviny pod křivkou (Strnad, Rašín, 1918, str. 142) (upraveno v GeoGebře)*

Bod $a$ buď pevný bod, $b$ bod pohyblivý. Pak se mění velikost plochy $P$, ohraničenou body $m\,n\,b\,a$, v závislosti na pohybu bodu $b$. Je funkcí úsečky $x$ a můžeme napsat

$$P = F(x).$$

*Vzroste-li* $x$ *o* $\Delta x$, *vzroste* $P$ *o plochu* $\Delta P = npcb = npdb + bdc$. *Plocha* $bdc$ *je menší než pravoúhelník* $bdce = \Delta x \cdot \Delta y$, *takže značí-li* $n$ *ryzí zlomek, lze položiti* $bdc = n\Delta x \Delta y$. *Jest tedy*

$$\Delta P = y\Delta x + n\Delta x \Delta y.$$

*Zmenšuje-li se* $\Delta x$, *mění se poměr* $\frac{\Delta P}{\Delta x} = y + n\Delta y$; *pro* $\lim \Delta x = 0$ *jest* $\lim \Delta y = 0$, *takže* $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{dP}{dx} = y$ *aneb*

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

*Funkce* $y = f(x)$ *jest tedy derivací funkce* $F(x)$, *čili naopak* $F(x)$ *jest integrálem funkce* $f(x)\ dx$. *I nalézáme pro obsah plochy* $m\ n\ b\ a$ *vzorec*

$$P = \int f(x) dx = \int y\ dx.$$

Po těchto integracích nám vznikne obecně $P = F(x) + C$. K určitému integrálu docházíme v úvahách pomocí konstanty *C*, která je nezávislá na $x$. Právě tak můžeme *C* naleznout. Dosadíme za $x$ $x_1$kdy je $P = 0$. Dostaneme $0 = F(x_1) + C$ a pak pro obsah platí

$$P = F(x) - F(x_1)$$

to také můžeme napsat jako

$$P = \int_{x_1}^{x} f(x) dx$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 142)*

Tomuto integrálu říkáme určitý.

*Hodnotu určitého integrálu v daných mezích obdržíme, jestli dosadíme do integrálu neurčitého mez horní a pak dolní a od prvého výsledku druhý odečteme.*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 143)*

V dalším odstavci nalezneme úvahu, která souvisí s počátkem integrálu. Vezmeme si úsečku $\overline{mn}$ (viz. obr. 10) a rozdělíme ji na malé části $\Delta x$.Tak můžeme rozdělit celou plochu $m, n, b, a$ na elementární prvky plochy, které mají přibližně tvar obdélníků se stranou $\Delta x(= dx)$ a $f(x)$. Z toho je obsah jednoho obdélníku $f(x) \cdot dx$. Pokud se $dx$ bude blížit nule, pak se bude součet všech obdélníků rovnat hodnotě integrálu $\int_{x_1}^{x} f(x)dx$. Je zde zmínka o vzniku označení $\int$. Pochází od Leibnize jako protáhle počáteční písmeno $S$ od slova suma (součet). Opět následují konkrétní příklady, kterým se budeme věnovat v kapitole o úlohách.

Vraťme se k učebnicím dnes. Kroky, podle kterých je veden výklad, se drží předešlé struktury. Nejdříve je uvedeno prostředí, v kterém budeme integrál zavádět.

> *Mějme dány funkce $F, f$ definované na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $F'(x) = f(x)$, přičemž derivací funkce $F$ v bodě $a$ rozumíme derivaci v bodě $a$ zprava a derivací funkce $F$ v bodě $b$ derivaci v bodě $b$ zleva, říkáme, že funkce $F$ je primitivní funkcí k funkci $f$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.*

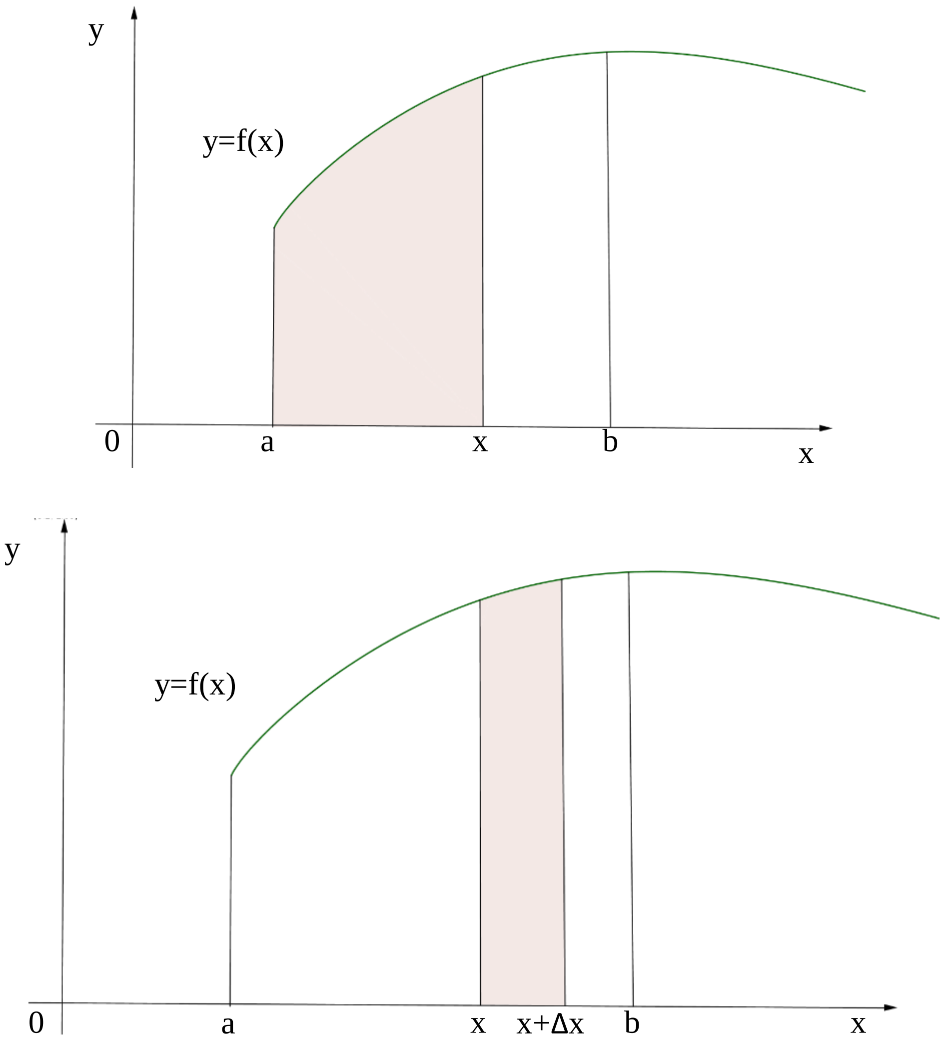
*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 161)*

Celá úvaha je vedena následovně:

Funkce $f$ z obrázku je v $\langle a, b\rangle$ spojitá a nezáporná. Útvar $U$ je tvořen funkcí $f(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, přímkami $x = a, x = b$ a $y = 0$. Cílem je určit obsah tohoto útvaru. Tento obsah bychom mohli aproximovat do obsahu obdélníku vepsaného útvaru, značíme ho $m$. Obsah bude $m(b - a)$. Nebo opačně určit jeho největší hodnotu, obsah obdélníku opsaného ploše tu označíme $M$, pak $M(b - a)$. Pro skutečný obsah bude platit:

$$m(b - a) \leqq S(U) \leqq M(b - a)$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 162)*




*Obr.: 11 Určitý integrál (Kubát, Hrubý, 2011, str. 162) (upraveno v GeoGebře)*

Zvolíme si libovolně $x$, dostaneme tak útvar $U_x = U(a, x, f)$. Můžeme vybrat jiné $x$ a dostaneme opět jiný obsah. Měníme-li $x$, říkáme, že je obsah útvaru $U_x = U(a, x, f)$ funkcí proměnné $x$. Označíme ji $S = S(x)$ a budeme zkoumat její přírůstek v bodě $x \in \langle a, b \rangle$. Pokud označíme $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, budou body $x, x + \Delta x$ definovat útvar $U = U(x, x + \Delta x, f)$, pro jehož obsah platí $S\big(U(x, x + \Delta x, f)\big) = S(x + \Delta x) - S(x) = \Delta S$. Z toho je patrné, že přírůstek funkce $S(x)$ v bodě $x$ $(\Delta x > 0)$ je roven obsahu útvaru $U$. Protože je funkce v intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$ spojitá, její největší hodnota je v $f(x_2)$ a nejmenší hodnoty v $f(x_1)$, $x_1, x_2 \in \langle x, x + \Delta x \rangle$. Pak platí

$$f(x_1)\Delta x \leqq \Delta S(x) \leqq f(x_2)\Delta x$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 163)*

Jestliže $f(x_1)\,\Delta x$ a $f(x_2)\,\Delta x$ jsou obsahy vepsaného a opsaného obdélníku, z nerovnic vyplývá

$$f(x_1) \leqq \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leqq f(x_2)$$

Protože je funkce $f$ spojitá, platí

$$\lim_{x_1 \to x} f(x_1) = f(x) \;\; a \;\; \lim_{x_2 \to x} f(x_2) = f(x)$$

*tedy*

$$f(x) \leqq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leqq f(x).$$

*Odtud dostáváme*

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

*Podobně pro* $\Delta x < 0$ *lze odvodit, že*

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

*Z těchto nerovností a z definice derivace plyne, že*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x), \frac{dS(x)}{dx} = f(x),$$

$$S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

*kde F je primitivní funkce k funkci* $f$.

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 163)*

Pro přesné určení konstanty $C$, využijeme podmínku $S(a) = 0$. Pak bude platit $S(a) = F(a) + C = 0$. Pro obsah útvaru $U_x = U(a, x, f)$ je:

$$S(x) = \int f(x) dx = F(x) - F(a)$$

Pro $b$ bude platit $S(b) = F(b) - F(a)$. Z těchto úvah dojdeme k větě, která je uvedena bez důkazu.

*Ke každé funkci spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje v tomto intervalu primitivní funkce.*

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 164)*

Po těchto úvahách se dostáváme k samotné definici integrálního počtu:

*Nechť $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ v intervalu $I$. Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce $F$ v libovolných bodech $a, b$ tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce $f$ v mezích od $a$ do $b$ a značí se $\int_a^b f(x)dx$.*

*To můžeme napsat podle definice*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 165)*

V poznámkách je ještě doplnění, že se jedná o Newtonův určitý integrál, $x$ je integrační proměnná a číslo $a$ a $b$ jsou dolní a horní meze. Funkci $f$ se říká integrant. Dále se dočteme o původu integrálního značení a o jeho historii, jako je snaha sčítat „nekonečně malé obsahy".

Dále je ukázána součtová definice určitého integrálu a výpočty určitých integrálů, kde jsou uvedeny věty:

*Nechť $f_1, f_2$ jsou v intervalu I spojité funkce, $a, b$ nechť jsou libovolné body z I a $c_1, c_2$ libovolné reálné konstanty. Potom platí*

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\ dx = c_1 \int_a^b f_1(x) + c_2 \int_a^b f_1(x)\,dx$$

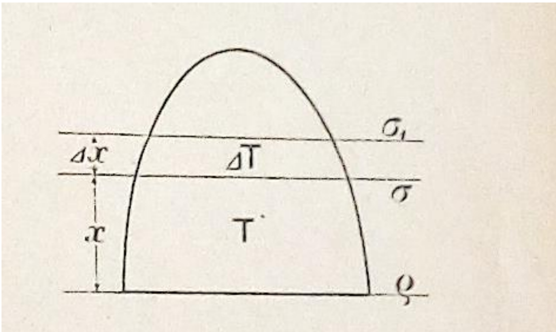
*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 169)*

V dalších odstavcích se dočteme o pravidlu pro změnu horní a dolní meze, větě o aditivnosti určitého integrálu. V závěru kapitoly se setkáme s metodou per partes, která ještě nebyla uvedena. Tak už mohou žáci počítat integrály buď přes substituci, nebo přes tuto metodu. Jako v každé jiné kapitole, ani v této nechybí na konci příklady na procvičení.

### 3.3.3 Užití integrálního počtu

Tato část tvoří bezpochyby důležitou část dnešních učebnic, kde je tomuto tématu věnováno poměrně dost prostoru. Pokud se podíváme do učebnice z počátku 20. století, najdeme dost rozdílů. Žádná kapitola není takto pojmenována, přestože se s využitím kalkulu setkáme. Zvolila jsem toto označení, protože se jedná o jejich využití a dají se tak nazvat.

Kapitola v učebnice Strnada a Rašína nese název *Ustanovení obsahu (kubatura) těles*.




*Obr.: 12 Výpočet obsahu tělesa (Strnad, Rašín, 1918, str. 145)*

V jejím začátku je podle obrázku vysvětlen vzorec pro výpočet obsahu. Mějme rovinu $\delta$ a na ní těleso. (viz. obr.: 12). To je přeťato rovinou $\sigma$ ve vzdálenosti $x$, ta je rovnoběžná s rovinou $\delta$. Část $T$ je obsah části tělesa obsaženého mezi oběma rovinami a je funkcí vzdálenosti $x. Q$ značí obsah průseku roviny $\sigma$ s tělesem. Posune-li se rovina $\sigma$ do polohy $\sigma_1$, vzroste $x$ o $\Delta x$, krychlový obsah pak o $\Delta T$ a $Q$ o $\Delta Q$.Přírůstek $\Delta T$ se teď nachází mezi dvěma hranoly (mezemi) o společné výšce $\Delta x$ a základnách $Q$ a $Q + \Delta Q.$ Rozdíl mezi $\Delta T$ a jakýmkoliv z hranolů je menší než rozdíl mezi oběma hranoly. Platí tedy:

$$\Delta T - Q\Delta x = n \cdot \Delta Q \Delta x$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 145)*

$n$ značí zlomek. Následně:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = Q + n \cdot \Delta Q$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 145)*

Pro $\lim \Delta x = 0$ je také $\lim \Delta Q = 0$ a $\lim \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{dT}{dx} = Q$, což je:

$$T = \int Q\, dx$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 145)*

*Obsah tělesa v mezích $x = x_1$ a $x = x_2$ ustanovíme dle vzorce*

$$T = \int_{x_1}^{x_2} Q\, dx.$$

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 145)*

*Obsah $Q$ průseku musí býti ovšem známou funkcí vzdálenosti $x$.*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 145)*

To má stejný následek jako Cavalieriho princip. $T$ (pokud jsou dány meze $x_1$ a $x_2$) je závislé na velikosti řezu $Q$. Pak mají dvě tělesa, jejichž řezy jsou rovnoběžné s rovinou vedenou tělesem, stejný obsah. To je demonstrováno na konkrétním příkladu výpočtu obsahu jehlanu.

Dnes je v učebnici zmíněno využití integrálního počtu při výpočtu obsahu rovinného útvaru a objemu rotačního tělesa.

Můžeme počítat buď obsah útvaru $U = U(a, b, f)$ nebo útvaru $U = U(a, b, f, g)$. Pro prvý případ zapíšeme integrál následně:

$$S(U) = \int_a^b f(x)\, dx$$

*(Kubát, Hrubý, 2011, str. 179)*

Protože se při řešení některých úloh můžeme setkat se zápornými hodnotami, kterých funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá, píšeme integrál v absolutní hodnotě: $S(U) = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$.

V případě, že je plocha ohraničená dvěma funkcemi, vypočítáme obsah útvaru ohraničeného funkcemi $f(x)$ a $g(x)$:

$$S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

*(Kubát, Hrubý, 2011, str. 182)*

Pro objem rotačního tělesa je uvedena věta

*Objem $V$ rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru $U = U(a, b, f)$ kolem osy $x$, se vypočte podle vzorce*

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

*(Hrubý, Kubát, 2011, str. 190)*

Předtím je ještě uvedená celá souvislost mezi objemem rotační plochy a jejím výpočtem. Blíže je kalkul ukázán u konkrétních příkladů, jako je objem kulové úseče, rotačního kužele, koule nebo rotačních ploch zadaných libovolnou křivkou.

# 4 Úlohy

V žádné z předchozích kapitol nebyly ještě zmíněny úlohy, které jsou v učebnici v hojném zastoupení. Každá kapitola je jimi ukončena. Najdeme zde příklady, které jsou založené na stejném principu jako dnes. To je např. *Vypočítejte derivaci funkce* $2x^3$ *atd*. Nebo úlohy zaměřené na hledání tečny ke grafu jako je *Ustanovte směrnici tečny v bodě* $m$ *křivky určené rovnicí* $\frac{1}{3}x^3 + 1, m(x_1 = -1,0,2)$ *a křivku i tečnu zobrazte.* Další úlohy se liší v zaměření. V obou učebnicích se setkáme s příklady zaměřenými na rychlost, zrychlení a další fyzikální veličiny.

Zaujalo mě počítání maxima. Je potřeba připomenout, že celá část o infinitesimálním počtu je zasazena do učebnice geometrie. Proto i úlohy jsou zaměřeny na využití v geometrii. Jedná se o výpočty maximálních obsahů těles vepsaných nebo jinak vzniklých ploch. Některé úlohy jsou ukázány i s řešením. Například:

> *Kouli poloměru r vepsati jest rotační kužel co největšího objemu.*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 130)*

Řešení je následující:

> *Je-li* $\delta$ *poloměr základny,* $x$ *výška kužele, jest* $\delta^2 = x(2r - x)$ *a obsah kužele* $K = \frac{\pi}{3}\delta^2 x = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$*. Tento bude největší, dosáhne-li výraz* $y = 2rx^2 - x^3$ *maxima. Rovnice* $y' = 0$ *čili* $4rx - 3x^2 = 0$ *dává* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}r$*. První kořen poskytuje minimum a nemá tu významu, pro druhý jest* $y'' = 4r - 6x = -4r$ *a příslušný obsah* $K = \frac{32}{81}\pi r^3 = \frac{8}{27}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{27}$ *dané koule tudíž maximum, jak plyne již přímo z rázu úlohy.*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 129)*

Ráz dalších úloh je podobný a setkáme se s takovými cvičeními i dnes. Jsou to úlohy typu hledání útvaru, který má při daném obvodu maximální obsah nebo hledání útvaru vepsaného do jiné útvaru, tak aby měl co možno největší obsah. Dále se počítají úlohy zaměřené na zjišťování tělesa s minimálním povrchem při daném objemu nebo jak vepsat danému tělesu útvar s maximálním objemem. Uvedu pár zajímavých úloh:

*„16.Z válcového kmene (poloměr $r$) vytesati jest trám pravoúhlého průřezu o co největší nosnosti. Sestrojení! (Nosnost trámu je úměrná šířce $x$ a čtverci výšky $v$ průřezu, tedy úměrná součinu $v^2x$.“*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 130)*

*„12. Jak vysoko na zdi třeba upevniti světelný zdroj $s$, aby určité místo $a$ na podlaze, jehož vzdálenost od zdi jest $d$, bylo co nejsilněji osvětleno? Sestrojení! (Ježto intensita osvětlení je přímo úměrná sinu odchylky $\alpha$ paprsku od osvětlené plochy a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti $\overline{as}$, má funkce $\sin\alpha\left(\frac{d}{\cos\alpha}\right)^{-2}$ dosáhnouti maxima.“*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 136)*

*„11. Těleso váhy $Q$ taženo jest po vodorovné rovině silou $f$ působící ve směru odchýleném od této roviny o úhel $\alpha$. Při které velikosti tohoto úhlu jest síla $f$, jež právě překonávati tření, nejmenší? (Velikost tření rovná se součinu z tlaku na styčné ploše a koeficientu $k$ tření. Sílu $f$ rozložme ve složku svislou zmenšuje tlak $Q$ a vodorovnou překonává tření.) Např. $k = 0{,}07$.“*

*(Strnad, Rašín, 1918, str. 136)*

V části o integrálech se setkáme s integrací základních derivovaných funkcí jako je $\int x\,dx, \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}\,dx, \int (1-2x)^3\,dx$ a další. Není nikde uvedena metoda per partes ani metoda substituce, proto jsou všechny uvedené funkce integrovatelné bez použití těchto metod. Pár funkcí by se dalo počítat s užitím substituce, u těch je malý návod, jako například u úlohy $\int \sin 2x\,dx$. *Ježto* $d\,2\,x = 2dx$. *Pišme* $\int \sin 2x \cdot \frac{1}{2} d\,2x = \frac{1}{2}\int \sin 2x\ d\ 2x$. *(Strnad, Rašín, 1918, str. 141)* Nebo integrál: $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. Čtenáři je doporučeno vynásobit čitatele dvojčlenem $\sin^2 x + \cos^2 x$. V dalších kapitolách jsou úlohy podobné jako dnes. Najdeme tam úlohy o výpočtu určitých integrálů, obsah části roviny ohraničené úsečkami a obloukem funkce. Dále úlohu, kde se má určit obsah kruhu.

# 5 Alois Strnad

Celou svoji práci jsem se věnovala učebnici *Geometrie pro vyšší školy reálné* napsané původně od autora Aloise Strnada. Považuji proto za důležité zmínit se i pár slovy o jeho osobě.

*Obr.: 13 Alois Strnad portrét* (Lepka, 2012, str. 51)

Alois Strnad přišel na svět v Praze roku 1852. Ve škole, kam nastoupil na Malé Straně a poté i na reálce v Panské ulici, dosahoval vynikajících výsledků. Proto začal studovat r. 1870 na tzv. Českém polytechnickém ústavu zemském obor pozemní a vodní stavitelství.

V roce 1876 složil zkoušky učitelské způsobilosti pro střední školy a nastoupil na reálku do Hradce Králové, kde vyučoval až do roku 1891. Poté vystřídal ještě další dvě školy – reálku v Praze a reálku v Kutné hoře, kde pobýval až do své smrti roku 1911. Během svého života se mu dvakrát naskytla příležitost vyučovat na vysoké škole v Praze. Poprvé se ucházel o místo učitele deskriptivní geometrie, žel na tuto pozici se nedostal. Podruhé už neměl o přechod na vysokou školu zájem.

S jeho jménem se setkáváme hlavně v historii matematické olympiády. Problémem často bylo, že se úlohy svojí obtížností vyrovnaly látce vysoké školy. Právě Strnad se zasloužil o jejich zjednodušení a zpřístupnění pro středoškolské studenty. Pokud se sečtou všechny úlohy dodané pro olympiádu v letech 18721918, dojdeme k číslu

1351. Z nich 508 připravoval právě Strnad. Jeho přínos byl i díky jeho širokému rozhledu v matematice. Jeho úlohy byly z oblasti konstrukční a analytické geometrie, stereometrie, trigonometrie, různé typy rovnic, teorie čísel a mnoha dalších. (Lepka, 2012)

# Závěr

V teoretické části je popsán vývoj infinitesimálního počtu od starověku až po 20. století. Druhá část je věnována zavedení kalkulu do učebnic pro střední školy v naší zemi a jeho vývoj a do dnešních dnů.

Ve části třetí jsem se snažila čtenáře seznámit se základními rozdíly v učebnici dnes a téměř před sto lety. Mezi hlavní rozdíl bych zmínila přístup a definování pojmů. Dnes jsou všechny jevy přesně definovány a zavedeny. Dříve k tomu přistupovali mnohem více intuitivně. Výklad se neopírá mnohdy o teorii, vše je vysvětlováno na základě vnímání autora. Také celkový cíl výpočtu je jiný. Tím, že je zařazen do učebnice geometrie, slouží hlavně jí, ať se jedná o hledání tečen nebo výpočet obsahů obrazců. Dnes mají příklady a celkově využití infinitesimálního počtu mnohem větší zaměření na řešení fyzikálních problémů. Také používají občas jiné názvosloví. Body jsou značeny malými písmeny, nula se píše jako nulla nebo differenciál s dvěma f. Při zavádění integrálu dnes hovoříme o primitivní funkci, která v učebnici Strnada a Rašína není zmíněna. Integrování je vnímáno jako operace opačná k derivování. Práce s integrály není rozvinuta. Chybí zmínka o metodě Per partes. Metoda substituce není také zmíněna, ale v příkladech je nutno ji použít. Dochází k tomu na základě logické úvahy, není pojmenována jako konkrétní metoda.

Podívám-li se na učebnice ze svého pohledu, přišla mi učebnice od autorů Aloise Strnada a Karla Rašína více přehledná Protože je výklad podáván jednoduše, není použita odborná matematická terminologie. Vše je vysvětlováno na jednoduchých konkrétních příkladech. Zatímco dnes už jsou definice derivace i integrálu zařazeny přesně do určitého prostředí. Otázkou je, pokud je to vůbec možné říci, který přístup je lepší? Troufnu si tvrdit, že oba dva. Je důležité, aby žáci měli konkrétní představu, proč a co při infinitesimálním počtu počítají. Na stranu druhou je nutností studenty připravit na další studium tohoto kalkulu. To se neobejde bez přesného určení, zasazení do prostředí a výkladu založeném na pevném základu.

V pokračování této práce by se dalo více zaměřit na úlohy, které jsou v učebnicích. Nebo by bylo také zajímavé podívat se do dalších učebnic zaměřených na tento počet i ze staršího období nebo určených pro vysoké školy.

## Seznam použité literatury


1. BEČVÁŘOVÁ, Martina. *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. V Praze: Matfyzpress, 2008, 355 s. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-028-9.
2. DEVLIN, Keith J. *Jazyk matematiky: jak zviditelnit neviditelné*. 2. vyd. v českém jazyce. Přeložil Jan ŠVÁBENICKÝ. Praha: Argo, 2011, 343 s. ISBN 978-80-257-0494-3
3. HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet.* Prometheus, 2011, 210 s. ISBN 978-80-363-9
4. KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968, 221 s.
5. KOPÁČKOVÁ, Alena. Fylogeneze pojmu funkce. In: *Matematika v proměnách věků II*. Praha: Prometheus, 2001, 267 s. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-218-X
6. LEPKA, Karel. *Alois Strnad*. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2012. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/142077
7. MIKULČÁK, Jiří a Jindřich BEČVÁŘ. *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918.* Praha: Matfyzpress, 2010, 312 s. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-112-5
8. NETUKA, SCHWABIK. Vznik a vývoj matematické analýzy. *In: Světonázorová výchova v matematice: sborník vybraných referátů z letních škol MPS Jednoty čs. matematiků a fyziků*. Praha: Jednota čs. matematiků a fyziků, 1987
9. POTŮČEK, Jiří. *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900-1945, I. díl: Vznik a vývoj jednotlivých typů škol a jejich osnov matematiky*. Plzeň: Pedagogická fakulta ZČU, 1992, 55 s. ISBN 8070430397.
10. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha: MŠMT, 2008 [cit. 2019-03-19]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-gymnazia
11. SCHWABIK, Štefan. Druhá krize matematiky aneb potíže růstu diferenciálního a integrálního počtu In: *Matematika v proměnách věků I: sborník*. Praha: Prometheus, 1998, 218 s. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-107-8
12. SCHWABIK, Štefan a Petra ŠARMANOVÁ. *Malý průvodce historií integrálu*. Praha: Prometheus, 1996, 95 s. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-038-1.

13. STRNAD, Alois a Karel RAŠÍN. *Geometrie pro vyšší školy reálné. Díl IV, Analytická geometrie s počátky počtu differenciálního a integrálního pro VII. třídu*. V Praze: F. Kytka, 1918. 150 s.
14. STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963, 250 s. Malá moderní encyklopedie.
15. ŠEDIVÝ, Jaroslav, Jiří MIKULČÁK a Stanislav ŽIDEK. *Antologie z učebnic matematiky: období 1860-1960*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988, 320 s.
16. ŠIMERKA V., *Přídavek k algebře pro vyšší gymnasia*. Dr. E. Grégr, Praha, 1864, 56 s.
17. TESAŘOVÁ, Libuše. *Pojem funkce v učivu střední školy*. Brno, 2010. Diplomová práce. Masarykova universita. Přírodovědecká fakulta
18. TRKOVSKÁ, Dana. *Historický vývoj geometrických transformací*. Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2015. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-289-4.
19. ÚLEHLA, Josef. *Počet infinitesimální*. Praha: Dědictví Komenského, 1906, 130 s. Dědictví Komenského.
20. VÍZEK, Lukáš. *Josef Úlehla* (1852-1933). Hradec Králové: Gaudeamus, Univerzita Hradec Králové, 2018, 334 s. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7435-694-0