Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Úlohy z geometrie v prostoru

Vypracovala: Lucie Kratochvílová
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek Ph.D.

České Budějovice 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Úlohy z geometrie v prostoru jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ………….   …..……………………….

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph. D. za vedení mé bakalářské práce, cenné rady, zapůjčené materiály, ochotu, trpělivost a čas.

Anotace

Stěžejní částí této bakalářské práce je sbírka úloh, zaměřená na přípravu žáků základních škol na jednotné příjímací zkoušky. Sbírka se skládá z úloh z příjímacích zkoušek vykazujících nízkou úspěšnost řešení, které jsou doplněné podobnými příklady z učebnic, publikací a mými vlastními příklady. Součástí práce je GeoGebra kniha, která obsahuje nejen zadání a řešení příkladů, ale také dynamické aplety k vytvoření lepší představy o dané problematice. Vzorové řešení příkladů je zároveň vysvětleno ve čtvrté kapitole.

Kromě toho práce zahrnuje poznatky z provedené rešerše, která porovnává učebnice s požadavky k jednotným přijímacím zkouškám od Cermat. Dále je kapitola věnována přiblížení důležitosti rozvoje představivosti žáků a jejich klíčových kompetencí.

Abstract

The key part of this bachelor thesis is a collection of tasks focused on preparing primary school students for entrance exams. The collection consists of tasks from entrance exams showing low success rates, supplemented by similar examples from textbooks, publications, and my own examples. The thesis also includes a GeoGebra book containing not only the assignments and solutions but also dynamic applets to better visualize the given issues. Sample solutions to the problems are also explained in the fourth chapter.

Additionally, the thesis incorporates findings from conducted research comparing textbooks with the requirements for the unified entrance exams by Cermat.
Furthermore, one of the chapters expresses the importance of developing students' imagination and their key competencies.

OBSAH

ÚVOD

V dnešní digitální době, kdy je technologie nepostradatelnou součástí našich životů, se výuka geometrie v prostoru stále více zaměřuje na efektivní využití moderních prostředků k rozvoji geometrické prostorové představivosti u žáků. Schopnost představit si a pracovat s trojrozměrnými objekty a prostorovými vztahy je nezbytná nejen pro úspěšné pochopení dané problematiky, ale také pro řešení praktických úloh a problémů jak ve škole, tak i v každodenním životě. Proto je klíčové hledat moderní a inovativní metody výuky, které nejenže respektují osvědčené pedagogické postupy, ale také reflektují aktuální poznatky a technologický pokrok.

Cílem této bakalářské práce je sbírka úloh, která je zaměřena především na žáky 2. stupně základní školy. Sbírka je složena z úloh z jednotných příjímacích zkoušek od Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání (dále jen Cermat) doplněných podobnými příklady. Tyto příklady jsou převzaty z učebnic pro 2. stupeň základních škol a publikací určených k přípravě na jednotné přijímací zkoušky, případně doplněných o mé vlastní příklady. Soubor vytvořených úloh obsahuje nejen problematické příklady, ale také dynamické aplety, vytvořené v programu GeoGebra. Tím pomůže žákům vytvořit si o objektech přesnější představy. Ke všem příkladům je na konci práce uvedeno podrobné vzorové řešení.

Součástí práce je kapitola týkající se poznatkům z rešerše v oblasti geometrie. Provedla jsem rešerši obsahu učebnic 2. stupně základních škol se specifikacemi pro jednotnou příjímací zkoušku v přijímacím řízení na střední školy v oborech vzdělávání s maturitní zkouškou od Cermat.

1. STEREOMETRIE A PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST

Stereometrie je obor geometrie, který se zabývá trojrozměrným prostorem. Ve výuce na základních školách je stereometrie věnována základním pojmům a vlastnostem těles jako jsou hranoly, válce, kužely, jehlany a koule. Stereometrie se zaměřuje na vlastnosti objektů v trojrozměrném prostoru. Tento obor nás učí porozumění a chápání pojmů například objemu, povrchu, síti a geometrickým vztahům mezi objekty. Což je důležité nejen pro řešení stereometrických úloh, ale také rozvíjení naší geometrické představivosti a kompetencí žáka.

Rozvojem prostorové představivosti se zabývá Univerzita Palackého v Olomouci katedra algebry a geometrie. Tématem rozvoje představivosti se podrobněji zabývají v publikaci *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii,* nebo v rigorózní práci *Rozvíjení prostorové představivosti pomocí úloh ve stereometrii*. RNDr. Marie Chodorová Ph.D. se v práci zaměřuje na sbírku úloh, která pomáhá studentům rozvíjet jejich schopnost představit si a manipulovat s trojrozměrnými objekty. Práce přináší cenné poznatky a přístupy, jež mohou posílit výuku stereometrie a podpořit lepší porozumění tohoto důležitého oboru. Dále vysvětluje pojem prostorová představivost v matematice.

V matematice prostorovou představivostí chápeme geometrickou představivost, což je schopnost žáků řešit stereometrické úlohy. Zatímco při řešení planimetrických úloh si můžeme danou situaci v rovině nějak znázornit či načrtnout a z náčrtku můžeme odvozovat a usuzovat o správném řešení v rovině. Při řešení stereometrické úlohy si už situaci v prostoru můžeme pouze naznačit, protože zobrazujeme trojrozměrný útvar do roviny, která je o dimenzi nižší, a k tomu je zapotřebí představivosti, znalosti vztahů mezi jednotlivými objekty v prostoru. (Chodorová, 2017, str. 15)

2. POZNATKY Z REŠERŠE RELEVANTNÍCH ZDROJŮ

Kapitolu věnuji shrnutí poznatků získaných z rešerše, ve které jsem porovnávala obsah učebnic geometrie pro 2. stupeň základních škol s požadavky od Cermat. Vybrala jsem učebnice od nakladatelství Fraus (původní řada učebnic, rok vydání 2008 – 2010) a Prometheus. Jedná se o často používané učebnice na základních školách a zároveň jsou zařazeny na seznamu schválených učebnic pro základní školy od MŠMT zveřejněného v únoru 2024. V následujícím textu odkazuji na poznámky pod čarou, kde se nachází přesné znění požadavků pro jednotnou příjímací zkoušku v přijímacím řízení na střední školy v oborech vzdělávání s maturitní zkouškou od Cermat. Požadavky jsou použity z části B1 – Specifikace didaktického testu pro šestiletá gymnázia a části C1 – Specifikace didaktického testu pro čtyřleté obory vzdělávání a nástavbová studia s maturitní zkouškou.

Při provádění rešerše jsem se zaměřila hlavně na geometrii v prostoru. V obou sadách učebnic se zmiňují shodná tělesa, konkrétně se jedná o hranoly, válec, jehlan, kužel a kouli. V učebnicích od nakladatelství Fraus i Prometheus vzorce odvozují na základě již naučených znalostí z předchozího učiva.

Učebnice od nakladatelství Fraus poukazuje na mezipředmětové vztahy matematiky s jinými vzdělávacími obory, například s historií, fyzikou nebo zeměpisem. Poslední kapitola učebnic geometrie pro 2. stupeň ZŠ je věnována kapitole s názvem Angličtina v matematice. Ta obsahuje stručné shrnutí probraného učiva matematiky v anglickém jazyce. Učebnice od nakladatelství Prometheus věnují geometrii většinou třetí díl učebnic. Výjimkou je učebnice pro 9. ročník, kde je věnován geometrii 2. díl.

V učebnicích pro základní školy od nakladatelství Prometheus a Fraus je nedostatek podobných příkladů s úlohami z jednotných příjímacích zkoušek týkajících se geometrie v prostoru. Zejména pokud jde o úlohy z příjímacích zkoušek na šestiletá gymnázia. Z učebnic jsem převzala tři příklady a pět úloh jsem doplnila o vlastní příklady. Častěji se shodují příklady z učebnic od nakladatelství Fraus s úlohami z příjímacích zkoušek na čtyřleté obory. Těmi jsem doplnila čtyři úlohy, naopak příklady z učebnic od Prometheus jsem nepoužila žádné. Vlastními příklady jsem doplnila zbylé tři úlohy, jednalo se převážně o úlohy, kde se pracuje se sítěmi hranolů. Tento nedostatek může být problematický zejména pro žáky, kteří se připravují na víceletá gymnázia a může vést k nedostatečné přípravě na jednotné příjímací zkoušky, které chtějí absolvovat. Počet přihlášek na víceletá gymnázia, ve srovnání s celkovým počtem žáků v daném ročníku, je malý. Vzhledem k tomu si myslím, že je důležitější, aby učebnice spíše připravovaly žáky na jednotné příjímací zkoušky pro čtyřleté obory než na víceletá gymnázia.

Zde uvádím vybrané poznatky ze srovnání učebnic od nakladatelství Fraus:

1. V požadavcích k příjímacím zkouškám pro šestiletá gymnázia se žádá, aby žák prováděl rozbor konstrukčních úloh pomocí náčrtků [1]. Učebnice 6. třídy však nevede žáky k rozboru, ale přímo k rýsování. Ve vyšších ročnících už je rozbor pomocí náčrtků zahrnut.
2. V požadavcích k příjímacím zkouškám na šestiletá gymnázia dále požadují sestrojení úhlů bez použití úhloměru o velikostech $60°, 90°, 45°$ apod.[2], což v učebnicích není obsaženo.
3. Dále chybí charakteristika pravidelného hranolu[3].
4. V požadavcích na příjímací zkoušky pro čtyřleté obory vzdělání a nástavbová studia s maturitní zkouškou se požaduje vyjádření Ludolfova čísla zlomkem[4]. V učebnici se nachází vyjádření Ludolfova čísla zlomkem pouze při přiblížení historie čísla, je zde zmíněna dokonce i přesnější hodnota než $\frac{22}{7}$. Dále se s vyjádřením Ludolfova čísla zlomkem nepracuje, používá se pouze hodnota $\pi = 3{,}14$. Součástí zadání didaktického testu je jak Ludolfovo číslo ve tvaru desetinného čísla, tak i ve formě zlomku[5].
5. V učebnici geometrie pro 9. třídu jsou navíc obsaženy pojmy týkající se kuželu, včetně jeho charakteristiky, objemu a povrchu, komolého kuželu a pojem

[1] provede rozbor konstrukční úlohy formou náčrtu (bez zápisu postupu konstrukce), sestrojí trojúhelník ze zadaných údajů (sss, sus, usu), sestrojí čtyřúhelník ze zadaných údajů

[2] rozlišuje a používá různé druhy čar, sestrojí střed a osu úsečky, sestrojí výšky a těžnice trojúhelníku, přenese úhel, porovná dva úhly, sestrojí osu úhlu, bez použití úhloměru sestrojí úhly o velikostech 60°, 90°, 45° apod., sestrojí pravidelný šestiúhelník a osmiúhelník

[3] rozlišuje pojmy rovina a prostor, charakterizuje krychli a kvádr, využívá při řešení úloh metrické a polohové vlastnosti krychle a kvádru, správně používá pojmy podstava, hrana, stěna, vrchol, stěnová úhlopříčka, charakterizuje kolmý hranol, pravidelný hranol

[4] účelně používá přibližnou hodnotu čísla π (desetinné číslo, zlomek), vypočítá obvod a obsah kruhu a délku kružnice pomocí vzorců

[5] Součástí testového sešitu bude následující text: $\pi \doteq 3{,}14;\ \pi \approx \frac{22}{7}$

rotačního kuželu. Naopak chybí zobrazení jehlanu při pohledu shora, zepředu, zdola, zprava atd[6].

6. Dále se v učebnici nachází informace o goniometrických funkcích, které se obvykle probírají na konci deváté třídy, tedy po absolvování příjímacích zkoušek. Goniometrické funkce nejsou součástí požadavků k příjímacím zkouškám.

Zde uvádím vybrané poznatky ze srovnání učebnic od nakladatelství Prometheus:

1. V učebnici pro 6. třídu je uvedeno sestrojení kružnice vepsané trojúhelníku, což není obsaženo v požadavcích pro šestiletá gymnázia. V učebnici pro 7. třídu jsou navíc obsaženy pojmy konvexní a nekonvexní, které nejsou součástí požadavků.
2. Naopak v učebnicích pro 6. a 7. třídu geometrie nejsou vysvětleny postupy pro sestrojení úhlů o velikostech $60°, 90°, 45°$ atd a zároveň neučí sestrojení šestiúhelníku a osmiúhelníku[7], což je obsaženo v požadavcích k příjímacím zkouškám na šestiletá gymnázia.
3. V učebnici není definován pojem totožnost[8]. Nezavádí pojem samodružný bod a samodružný rovinný útvar v osové ani ve středové souměrnosti[9].
4. Dále chybí zobrazení krychle a kvádru při pohledu shora, zepředu, zprava, zleva a zdola[10].

[6] rozpozná jehlan ve volném rovnoběžném promítání, zobrazí jehlan při pohledu shora, zepředu, zdola, zprava atd., rozpozná síť jehlanu, využívá při řešení úloh metrické a polohové vlastnosti jehlanu

[7] rozlišuje a používá různé druhy čar, sestrojí střed a osu úsečky, sestrojí výšky a těžnice trojúhelníku, přenese úhel, porovná dva úhly, sestrojí osu úhlu, bez použití úhloměru sestrojí úhly o velikostech 60°, 90°, 45° apod., sestrojí pravidelný šestiúhelník a osmiúhelník

[8] používá příslušnou matematickou symboliku (označení bodu, přímky, kružnice, úhlu, trojúhelníku, mnohoúhelníku, polopřímky, symbol pro rovnoběžnost, kolmost, totožnost, shodnost, písmena řecké abecedy pro označení úhlů, symbol pro zápis velikosti úhlu, vzdálenost bodů, obvod a obsah rovinného útvaru, apod.)

[9] rozpozná útvary souměrné podle osy souměrnosti, v osové souměrnosti k sobě přiřadí vzor a obraz, rozezná samodružný bod a samodružný rovinný útvar, charakterizuje osově souměrné útvary, sestrojí osu úhlu a úsečky, určí osu souměrnosti, sestrojí obraz rovinného útvaru v osové souměrnosti

rozpozná útvary souměrné podle středu souměrnosti, ve středové souměrnosti k sobě přiřadí vzor a obraz, rozezná samodružný bod a samodružný rovinný útvar, určí střed souměrnosti, sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové souměrnosti

[10] načrtne a sestrojí síť krychle, kvádru a kolmého hranolu, načrtne obraz tělesa (krychle, kvádru, hranolu) ve volném rovnoběžném promítání, zobrazí tělesa při pohledu shora, zepředu, zprava, zleva a zdola

5. V učebnici pro 8. třídu je uvedeno pouze Ludolfovo číslo ve tvaru $\pi = 3{,}14$, zatímco vyjádření zlomkem chybí.
6. Dále v učebnicích chybí zobrazení jehlanu při pohledu shora, zepředu, zdola, zprava atd.

3. SBÍRKA VYBRANÝCH ÚLOH

V této kapitole uvádím úlohy vybrané z didaktických testů určené k příjímacím zkouškám na šestiletá gymnázia a příjímacím zkouškám pro čtyřleté obory vzdělávání a nástavbová studia s maturitní zkouškou. Do sbírky jsem zařadila úlohy, které prokazují nízkou úspěšnost řešení. Věřím, že výběr vhodných příkladů pomůže studentům lépe se připravit na jednotné příjímací zkoušky.

Všechny úlohy jsem doplnila o podobné příklady z učebnic určených pro 2. stupeň základních škol zaměřených na geometrii (od nakladatelství Prometheus a Fraus), a z publikací určených k přípravě na jednotné příjímací zkoušky. Kromě toho jsem do výběru zařadila i vlastní příklady. Ty doplňují úlohy, ke kterým jsem nenašla podobný příklad v učebnicích.

Všechny úlohy jsou označeny číslem, jež odpovídá jejich pořadí v práci a v závorce jsou označeny kódem testu a číslem úlohy v daném didaktickém testu od Cermat. Pod úlohami z příjímacích zkoušek je graf zobrazující úspěšnost řešení v procentech. Příklady z učebnic a publikací jsou označeny stejným číslem jako odpovídající úloha z didaktických testů, doplněné malým písmenem v abecedním pořadí. V závorce je vždy uveden název knihy, nakladatelství a strana/číslo příkladu v učebnici.

Mé vlastní příklady jsou také očíslovány stejným způsobem jako příklady u učebnic a publikací, s uvedením mého jména a roku v závorce.

Kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly, které oddělují příklady pro šestiletá gymnázia a čtyřleté obory. Zároveň je podkapitola Přijímací zkoušky na šestiletá gymnázia vhodná i pro přípravu žáků na čtyřleté obory vzdělávání a nástavbová studia s maturitní zkouškou.

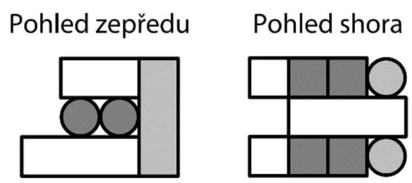
Řešení příkladů je k dispozici ve 4. kapitole nebo online formou, a to buď prostřednictvím QR kódu u jednotlivých příkladů, nebo odkazem na GeoGebra knihu, kterou lze snadno zobrazit rozkliknutím uvedeného odkazu nebo naskenováním QR kódu pod tímto textem.

GeoGebra kniha: https://www.geogebra.org/m/ztkybm9j

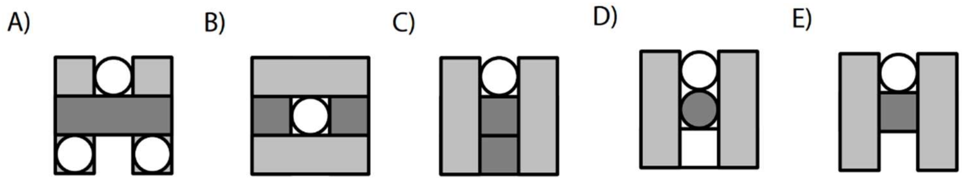
PŘÍJÍMACÍ ZKOUŠKY NA ŠESTILETÁ GYMNÁZIA

Příklad 1 (M7PBD23C0T02, 12)

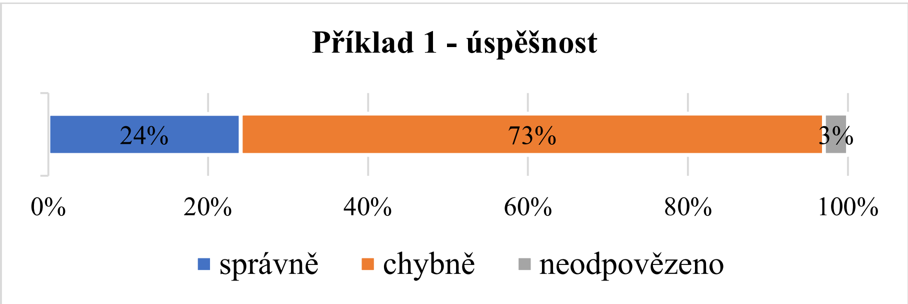
Stavba byla vytvořena ze **stejně velkých** válců tří různých barev. Stavbu jsme zobrazili při pohledu zepředu a shora.



Který z obrázků může představovat pohled na stavbu zprava?



Obr. 1 (zdroj: [1])

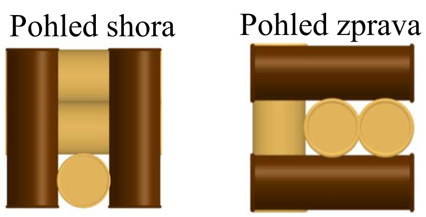


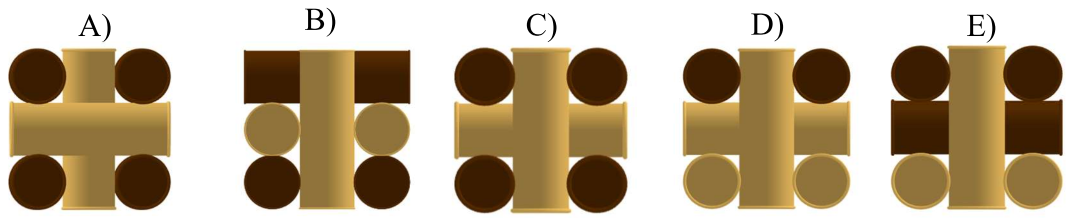
Graf 1: úspěšnost žáků v řešení příkladu 1

Příklad 1a (Lucie Kratochvílová, 2024)

Stavba hranice dřeva tvoří stejně dlouhé klády ze světlého a tmavého dřeva. Stavba je zobrazena při pohledu shora a zprava.

Urči, který obrázek zobrazuje pohled **zepředu**.

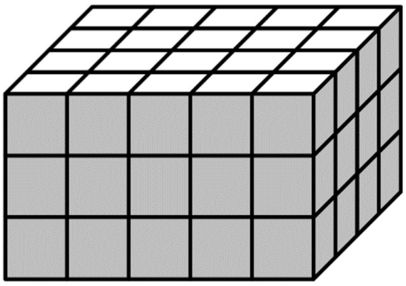




Obr. 2 (zdroj: autorka)

Příklad 2 (M7PAD23C0T01, 7)

Ze 60 dřevěných krychliček o hraně délky 1 cm jsme slepili kvádr s rozměry 5 cm, 4 cm, 3 cm. Poté jsme povrch kvádru obarvili – obě stěny s největším obsahem na bílo a zbývající čtyři stěny na šedo. Slepené stěny zůstaly neobarveny.



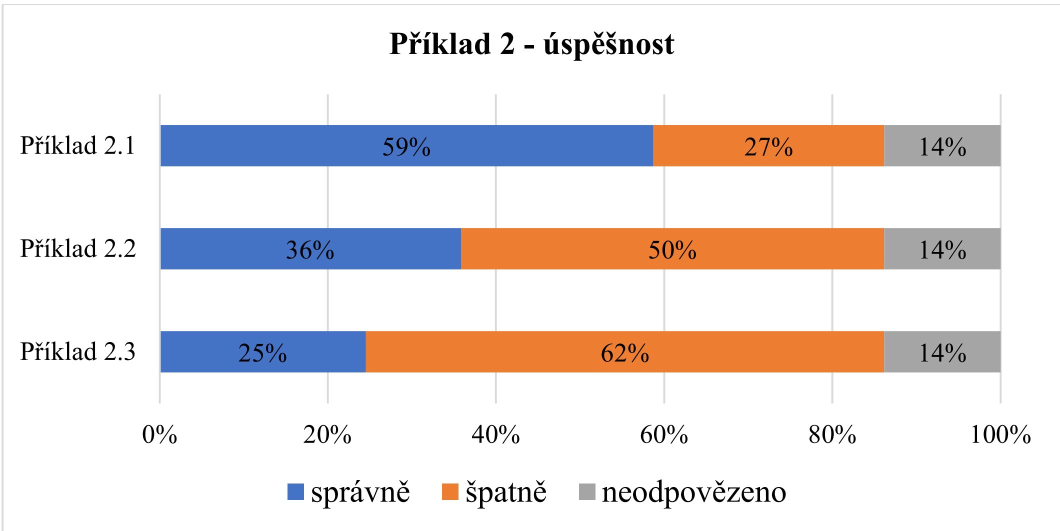
Obr. 3 (zdroj: [1])

Určete, kolik ze všech krychliček kvádru

2.1 má šedé právě dvě stěny,

2.2 nemá žádnou šedě obarvenou stěnu,

2.3 má obarvené právě dvě stěny.

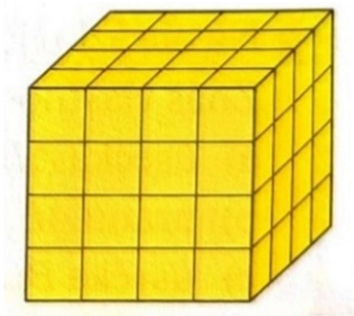


Graf 2: úspěšnost žáků v řešení příkladu 2

Příklad 2a (Matematika pro 6. ročník ZŠ (učebnice 1.díl), Prometheus, 68/8)

Natřeme krychli žlutou barvou a rozřežeme ji na krychličky, jak ukazuje obrázek.

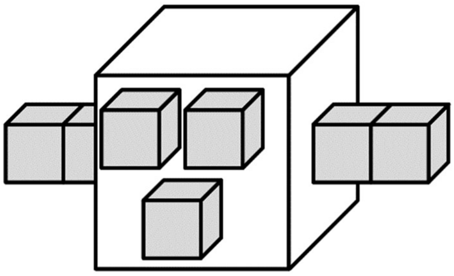
a) Kolik krychliček takto vznikne?
b) Kolik krychliček má tři žluté stěny?
c) Kolik krychliček má dvě žluté stěny?
d) Kolik krychliček má jednu žlutou stěnu?
e) Kolik krychliček nemá žlutou barvu obarvenou ani jednu stěnu?



Obr. 4 (zdroj: [4])

Příklad 3 (M7PBD22C0T02, 7)

Dřevěná hlava robota byla slepena z jedné velké a 7 shodných malých krychlí. Po slepení byly části vyčnívající z velké krychle obarveny na šedo, všechny ostatní plochy na bílo. (Bílá je i spodní stěna velké krychle, neobarvené zůstaly jen slepené plochy.)



Obr. 5 (zdroj: [1])

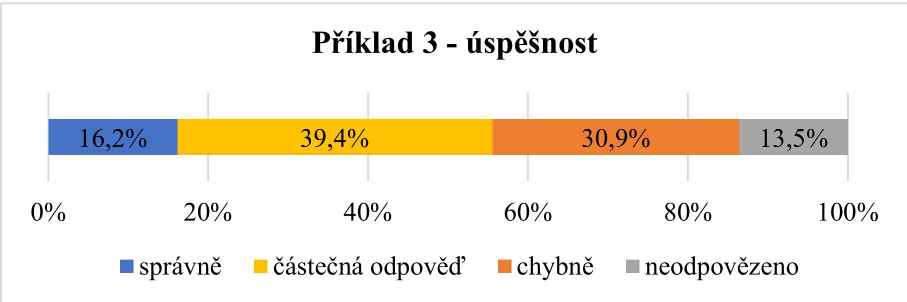
Jedna **stěna** malé krychle má obsah 9 cm^2. Velká krychle má hranu délky 10 cm.

Vypočtěte

3.1 v cm^2 celkový obsah všech **šedých** ploch,

3.2 v cm^2 celkový obsah všech **bílých** ploch,

3.3 v cm^3 **objem** celé hlavy robota (tj. objem všech krychlí dohromady.



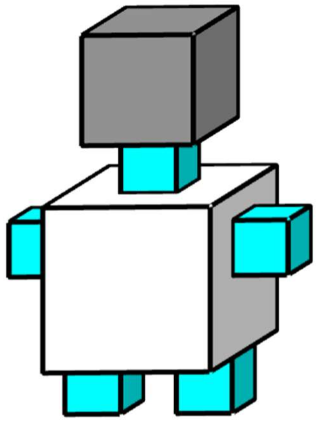
Graf 3: úspěšnost žáků v řešení příkladu 3

Příklad 3a (Lucie Kratochvílová, 2024)

Panáček je slepený z 5 modrých krychlí, jedné šedé a jedné bílé krychle. Hrana modré krychle má délku 1 cm, hrana bílé krychle má délku 3 cm a obsah jedné stěny šedé krychle je 4 cm^2.

Vypočítejte

a) v cm^2 celkový obsah všech **modrých** ploch,
b) v cm^2 celkový obsah všech **bílých** ploch,
c) v cm^3 **objem** celého panáčka (objem všech krychlí dohromady).



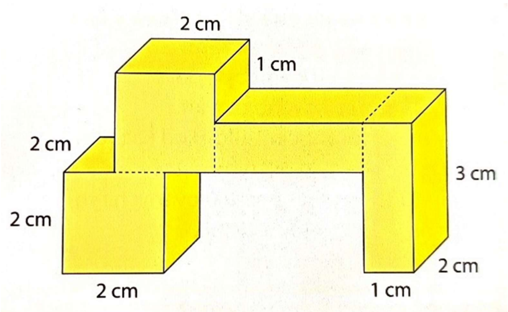
Obr. 6 (zdroj: autorka)

Příklad 3b (Testy 2023–2024 z matematiky pro žáky 9. třídy ZŠ, didaktis, 151/11)

Těleso na obrázku je slepeno ze dvou krychlí s hranou délky 2 cm a dvou kvádrů s rozměry 1 cm × 2 cm × 3 cm.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

a) Povrch tělesa je 96 cm^2.
b) Objem jedné krychle, která je součástí tělesa, tvoří tři desetiny objemu celého tělesa.
c) Obsah sítě krychle je o méně než 3 cm^2 větší než obsah sítě kvádru.



Obr. 7 (zdroj: [2])

Příklad 4 (M7PAD21C0T01, 7)

Horní část skleněného kvádru tvoří 6 krychlí z barevného skla umístěných v jedné vrstvě. Každá krychle má hranu délky 2 cm.

Stejná vrstva krychlí tvoří také spodní část kvádru. Obě vrstvy barevných krychlí dohromady zaujímají 20 % objemu celého kvádru.

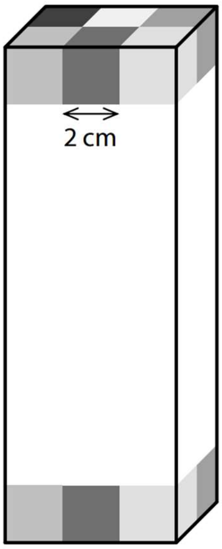
Zbytek kvádru je z bílého skla.

Vypočtěte

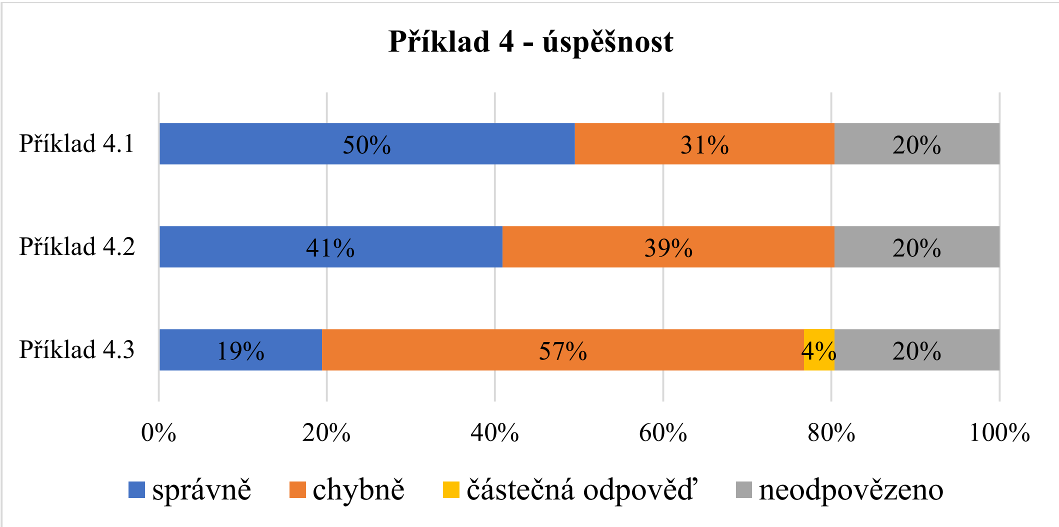
4.1 v cm^3 objem **jedné** vrstvy barevných krychlí,

4.2 v cm délku nejdelší hrany **celého** kvádru,

4.3 v cm^2 povrch **celého** kvádru.



Obr 8 (zdroj: [1])



Graf 4: úspěšnost žáků v řešení příkladu 4

Příklad 4a (Lucie Kratochvílová, 2024)

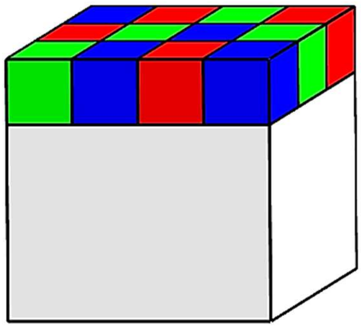
Na velký bílý kvádr byly naskládány barevné krychličky o délce hrany 3 cm. Kvádr a krychličky vytvořily dohromady kvádr s výškou 12 cm.

Vypočítejte

a) v cm^3 objem všech barevných krychlí dohromady,

b) v % kolik objemu zaujímají barevné krychle z celého složeného kvádru,

c) v cm^2 povrch **celého** složeného kvádru.



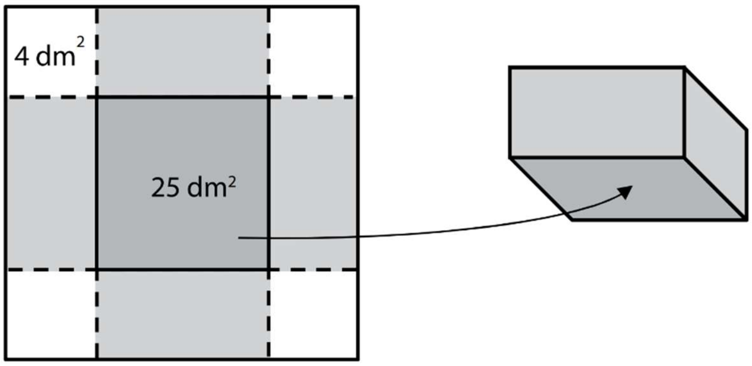
Obr. 9 (zdroj: autorka)

Příklad 5 (M7PAD17C0T01, 8)

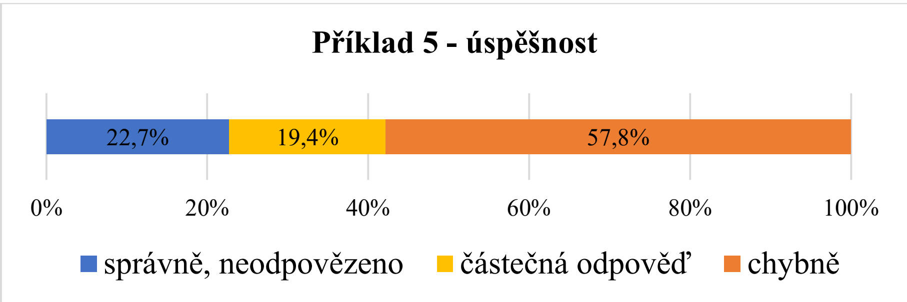
V každém rohu papírového čtverce odstřihneme bílý čtverec o obsahu 4 dm^2, Přehneme hrany, složíme krabici a spoje přelepíme izolepou. Dno krabice má obsah 25 dm^2.

5.1 Vypočtěte v dm obvod papírového čtverce (před odstřižením v rozích).

5.2 Vypočtěte v dm^3 objem krabice.



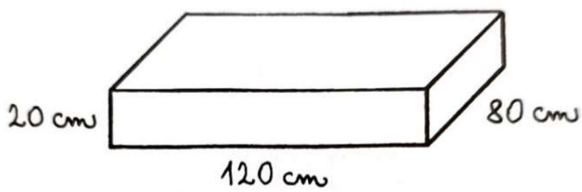
Obr. 10 (zdroj: [1])



Graf 5: úspěšnost žáků v řešení příkladu 5

Příklad 5a (Matematika pro 6. ročník ZŠ (učebnice 1.díl), Prometheus, 79/15)

Eva dobře zpívá a skupina DRACI jí navrhla, aby s nimi vystupovala. Viktor rozhodl, že Eva bude zpívat na malém podiu. Náčrtek pódia vidíš na obrázku.



Obr. 11 (zdroj [4])

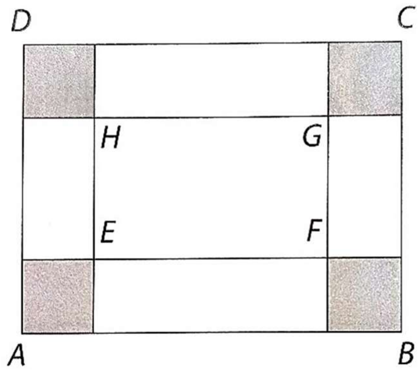
Všechny čtyři boční stěny polepí Robin fialovou látkou, na horní stěnu pódia nalepí modrý koberec. Koupil 1 metr modrého koberce s šířkou 120 cm a metr fialové látky s šířkou 90 cm. Budou mu obě látky stačit?

Napovíme: Načrtni si obdélník koupené fialové látky a zkoušej navrhnout její rozstříhání tak, aby na polepení stěn stačila.

Příklad 5b (Testy pro deváťáky k jednotným příjímacím zkouškám matematika, Fortuna, 67/8)

Z obdélníkového kusu kartonu $ABCD$ s rozměry $|AB| = 10$ dm, $|BC| = 8$ dm odstřihneme v každém rohu čtverec o straně 2 dm (čtverce jsou šedě vybarvené). Ze zbytku slepíme krabici bez víka se dnem $EFGH$.

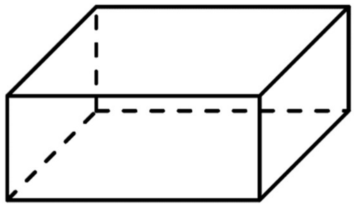
Vypočteme objem této krabice.



Obr. 12 (zdroj [10])

Příklad 6 (M7PCD23C0T03, 7)

Povrch pravidelného čtyřbokého hranolu je 144 cm^2. Obsah pláště tohoto hranolu je dvakrát větší než obsah jedné jeho čtvercové podstavy. (Plášť tohoto hranolu tvoří čtyři shodné boční stěny.)



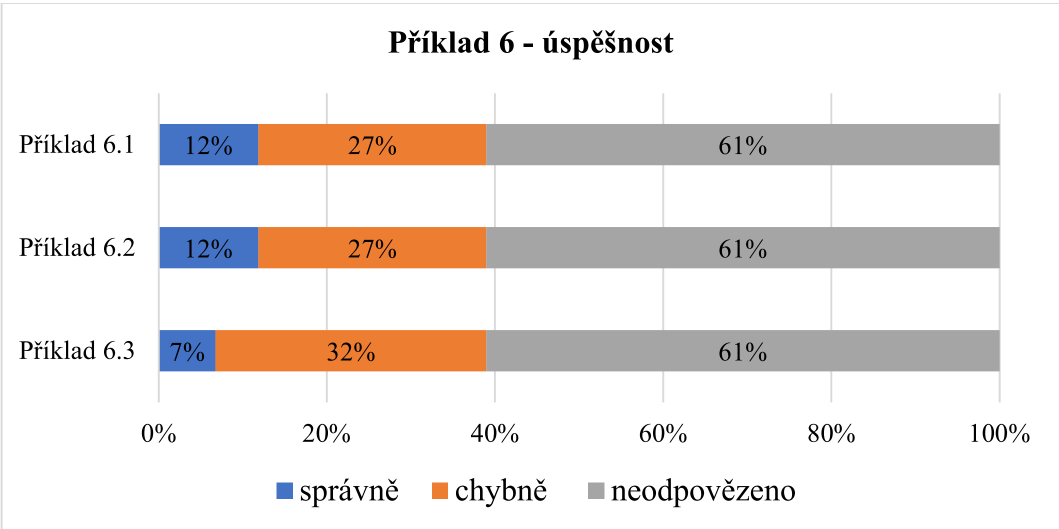
Obr. 13 (zdroj: [1])

Vypočtěte

6.1 v cm délku strany čtvercové podstavy,

6.2 v cm^2 obsah jedné boční stěny hranolu,

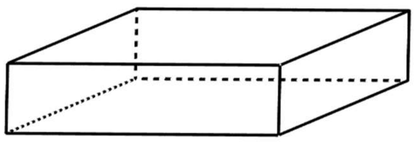
6.3 v dm^3 objem hranolu.



Graf 6: úspěšnost žáků v řešení příkladu 6

Příklad 6a (Lucie Kratochvílová, 2024)

Povrch kvádru je 192 cm^2. Obsah čtvercové podstavy je stejně velký jako obsah pláště kvádru.



Obr. 14 (zdroj: autorka)

Vypočtěte

a) v cm délku strany čtvercové podstavy,

b) v cm výšku kvádru,

c) v dm^3 objem kvádru.

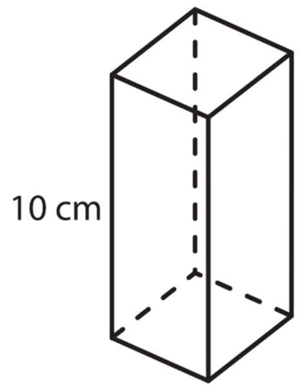
Příklad 7 (M7PAD20C0T01, 7)

Podstava kolmého čtyřbokého hranolu je **kosočtverec**. Výška hranolu je 10 cm a povrch je 360 cm^2. Obsah pláště hranolu je sedmkrát větší než obsah jedné podstavy.

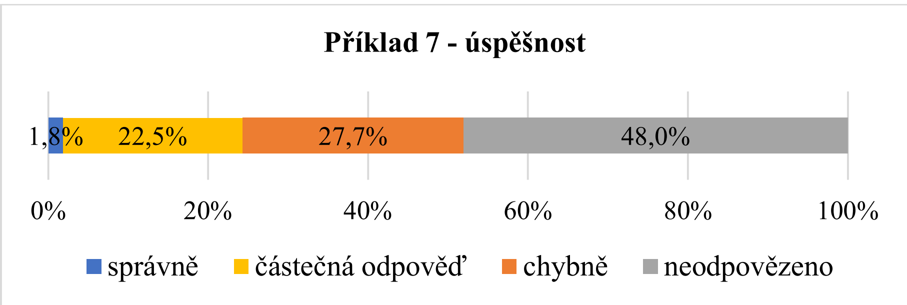
Vypočtěte

7.1 v cm^2 obsah pláště hranolu,

7.2 v cm součet délek všech 12 hran hranolu.



Obr. 15 (zdroj: [1])



Graf 7: úspěšnost žáků v řešení příkladu 7

Příklad 7a (Lucie Kratochvílová, 2024)

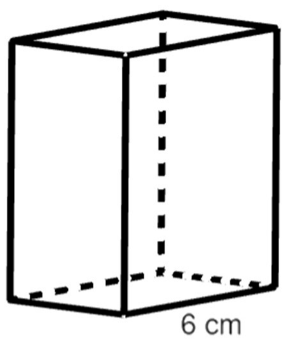
Podstava kolmého čtyřbokého hranolu je kosočtverec.

Délka hrany podstavy je 6 cm. Obsah pláště hranolu je 240 cm^2. Obsah pláště hranolu je osmkrát větší než obsah jedné podstavy.

Vypočtěte

a) v cm^2 obsah povrchu hranolu,

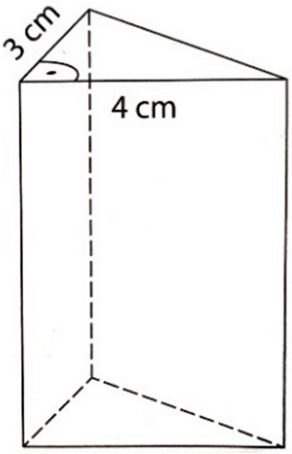
b) v cm součet délek všech 12 hran hranolu.



Obr. 16 (zdroj: autorka)

Příklad 7b (Testy 2023–2024 z matematiky pro žáky 9. třídy ZŠ, didaktis, 126/11)

Kolmý trojboký hranol má podstavu ve tvaru pravoúhlého trojúhelníku s délkami odvěsen 3 cm a 4 cm. Jeho objem je 36 cm^3.



Obr. 17 (zdroj: [2])

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

a) Nejdelší hrana trojbokého hranolu má délku 5 cm.

b) Obsah podstavy je roven jedné pětině obsahu největší boční stěny hranolu.

c) Obsah podstavy tvoří $\frac{1}{14}$ povrchu hranolu.

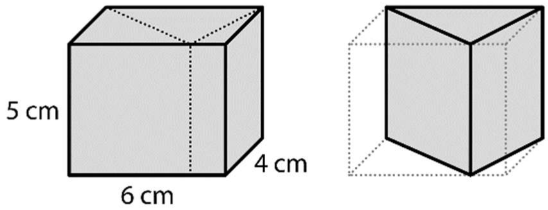
Poznámka: *Tato úloha je určena pro žáky 9. tříd, pro kompletní řešení je nutnost znát Pythagorovu větu.*

Příklad 8 (M7PCD22C0T03, 7)

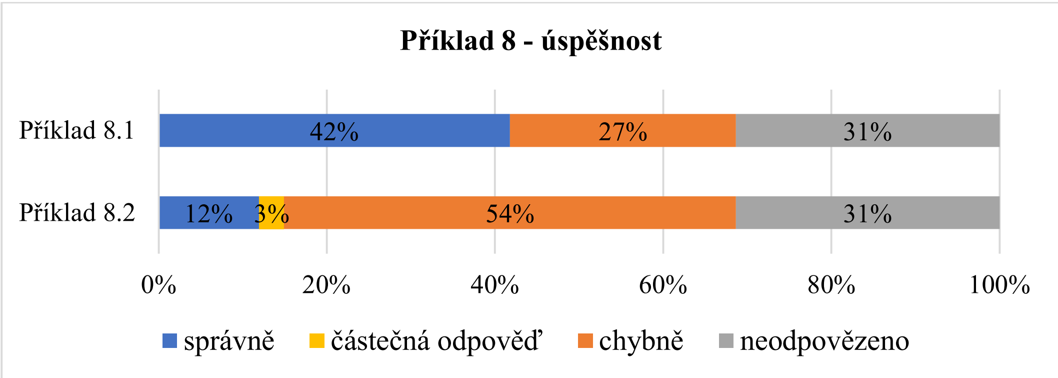
Kvádr o rozměrech 6 cm, 4 cm a 5 cm jsme dvěma svislými řezy rozdělili na tři kolmé trojboké hranoly.

8.1 **Vypočtěte** v cm^2 **povrch kvádru**.

8.2 Ze tří trojbokých hranolů vybereme ten, který má největší objem. **Vypočteme** v cm^3 **objem vybraného trojbokého hranolu.**



Obr. 18 (zdroj: [1])

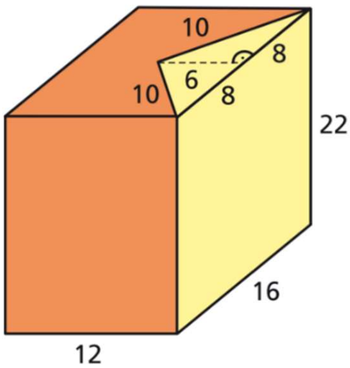


Graf 8: úspěšnost žáků v řešení příkladu 8

Příklad 8a (Matematika 7 – Geometrie (učebnice), Fraus, 99/15)

Kvádr na obrázku je rozříznut na dva hranoly. Urči objem i povrch obou hranolů.

Uvědom si, že součet objemů obou hranolů se musí rovnat objemu kvádru. Platí stejné tvrzení i pro povrch hranolů?



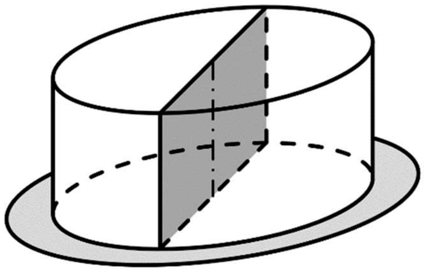
Obr. 19 (zdroj: [12])

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY PRO ČTYŘLETÉ OBORY VZDĚLÁNÍ A NÁSTAVBOVÁ STUDIA S MATURITNÍ ZKOUŠKOU

Příklad 9 (M9PBD23C0T02, 8)

Dort tvaru rotačního válce leží na kruhovém tácu. (Průměr podstavy dortu je větší než výška dortu, ale menší než průměr tácu.)

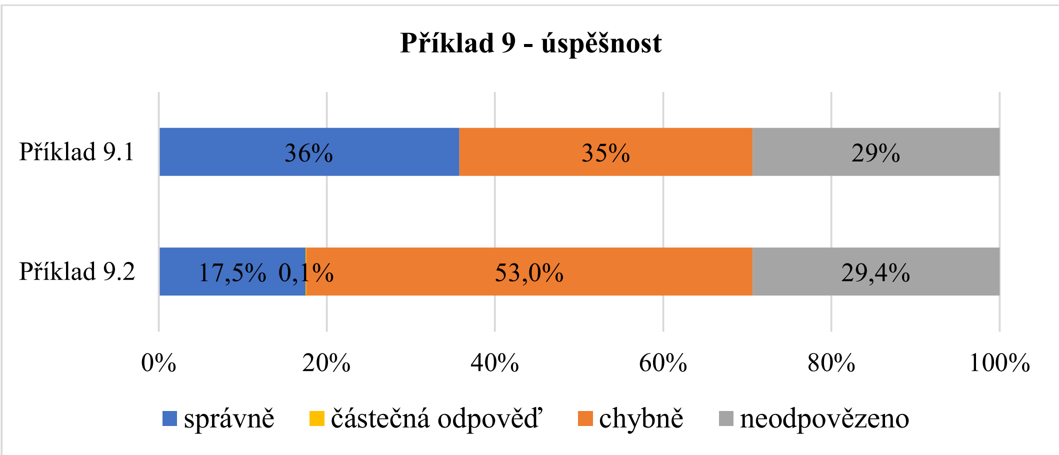
Dort jsme rozdělili svislým řezem na dvě stejné poloroviny.



Obr. 20 (zdroj: [1])

9.1 Tác má tvar kruhu o průměru d a obsahu $\pi \cdot 144\ \text{cm}^2$. Vypočtěte v **cm** průměr d tácu.

9.2 Plocha řezu dortu má obsah $200\ \text{cm}^2$ a tvoří ji obdélník, který lze rozdělit na dva čtverce. Vypočtěte v **cm**^{3} objem celého dortu. Výsledek zaokrouhlete na desítky cm^3.



Graf 9: úspěšnost žáků v řešení příkladu 9

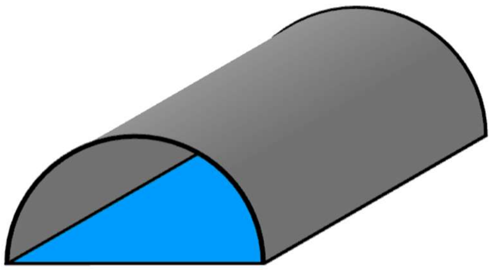
Příklad 9a (Matematika 8 – geometrie (učebnice), Fraus, 67/4)

Deska stolu tvaru kruhu má obsah $78{,}5\ \mathrm{dm}^2$. Vypočítejte průměr ubrusu, má-li přesahovat okraj stolu o 25 cm.

Poznámka: *Hodnota obsahu byla oproti původnímu zadání (72,35* dm^2*) modifikována tak, aby příklad byl řešitelný bez použití kalkulátoru.*

Příklad 9b (Lucie Kratochvílová, 2024)

Na dětském hřišti je tunel ve tvaru pláště rotačního válce rozříznutého na polovinu. Děti zjistily, že tunel má dvakrát delší délku než šířku. V tunelu je podlaha (tj. modrá plocha) o obsahu $1800\ \mathrm{dm}^2$ a můžeme jí rozdělit na dva shodné čtverce.



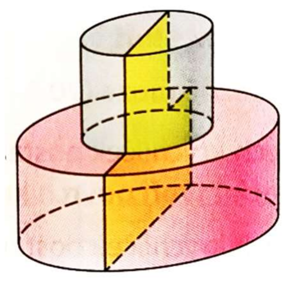
Obr. 21 (zdroj: autorka)

Vypočítejte

a) v dm rozměry podlahy (tj. modrá plocha),
b) v dm^2 povrch prolézačky (tj. šedá plocha). Lze dosadit $\pi = 3{,}14$.

Příklad 9c (Testy 2023–2024 z matematiky pro žáky 9. třídy ZŠ, didaktis, 93/17)

Katka si objednala svatební dort o objemu 15,7 l. Skládá se ze dvou pater. Objem horního patra je čtyřikrát menší než objem dolního patra. Výška obou pater je stejná a je rovna poloměru horního patra dortu. Katka celý dort rozkrojila kolmo k podložce na dvě stejné poloviny. Za π lze dosadit 3,14.



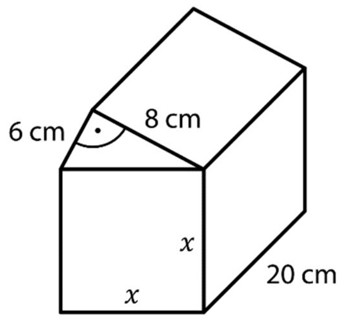
Obr. 22 (zdroj: [2])

a) **Vypočtěte v cm výšku celého dortu.**
b) **Vypočtete v cm průměr dolního patra dortu.**
c) **Vypočtete v cm^2 obsah řezu dortu.**

Příklad 10 (M9PAD22C0T01, 6)

Domeček je vytvořen z pravidelného čtyřbokého hranolu a kolmého trojbokého hranolu. Oba hranoly mají jednu stěnu společnou.

Rozměry čtyřbokého hranolu jsou x, x a 20 cm. Podstavou trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 6 cm a 8 cm.

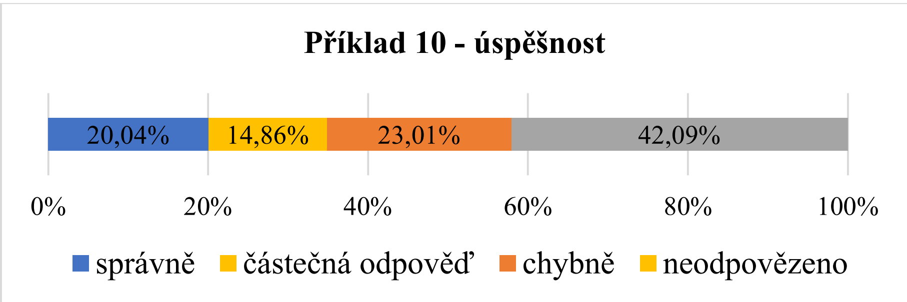


Obr. 23 (zdroj: [1])

Vypočtěte v cm^3

10.1 Objem trojbokého hranolu,

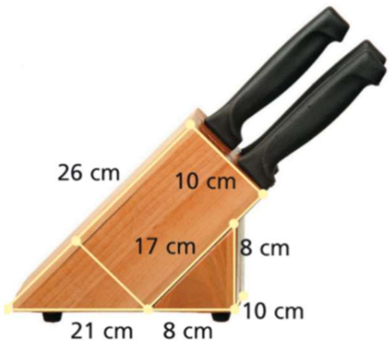
10.2 objem pravidelného čtyřbokého hranolu.



Graf 10: úspěšnost žáků v řešení příkladu 10

Příklad 10a (Matematika 7 – geometrie (učebnice), Fraus, 90/1)

Na obrázku vidíš dřevěný nosič na nože. Jaký objem smrkového dřeva potřebuje truhlář Nývlt na výrobu patnácti takových nosičů?



Obr. 24 (zdroj: [12])

Příklad 11 (M9PAD17C0T01, 13)

Nádrž s vodou má tvar kvádru. Rozměry nádrže jsou uvedeny v obrázku. Zahrádkář naplnil vodou z nádrže 15 prázdných dvanáctilitrových konví, a hladina vody v nádrži tak klesla.

O kolik cm kleska hladina vody v nádrži?

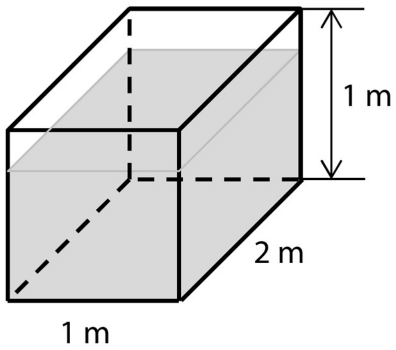
A) méně než 9 cm

B) 9 cm

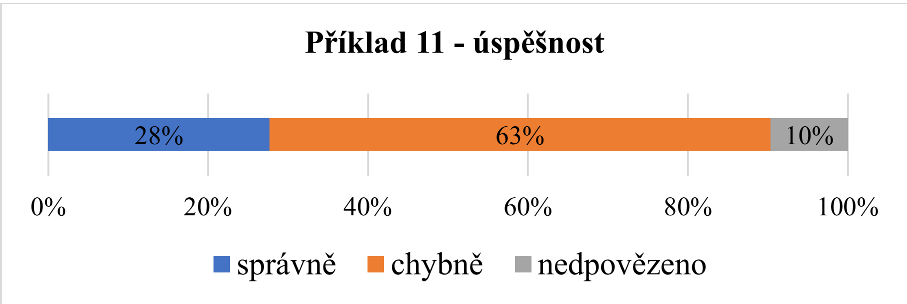
C) 10 cm

D) 11 cm

E) více než 11 cm



Obr. 25 (zdroj: [1])



Graf 11: úspěšnost žáků v řešení příkladu 11

Příklad 11a (Matematika 7 – geometrie (učebnice), Fraus, 93/18)

Alenka Kovářová zalévala zákon rajčat dlouhý 10 m a široký 6 m. Celkem nanosila 20 desetilitrových konví. V noci napršelo 7 mm srážek. Napršelo na zákon víc vody, než kolik jí nanosila Alenka?

Příklad 11b (Testy 2023–2024 z matematiky pro žáky 9. třídy ZŠ, didaktis, 88/2)

Nádrž na vodu má tvar krychle s hranou délky 2 m. Nádrž je z 80 % naplněna vodou.

Rozhodněte o každém tvrzení, zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

a) Volný prostor v nádrži má objem 1 600 l.

b) Hladina vody v nádrží je ve výšce 0,4 m pod okrajem nádrže.

c) Všechna voda v nádrži by zcela zaplnila kvádr s rozměry 4 m × 4 m × 40 cm.

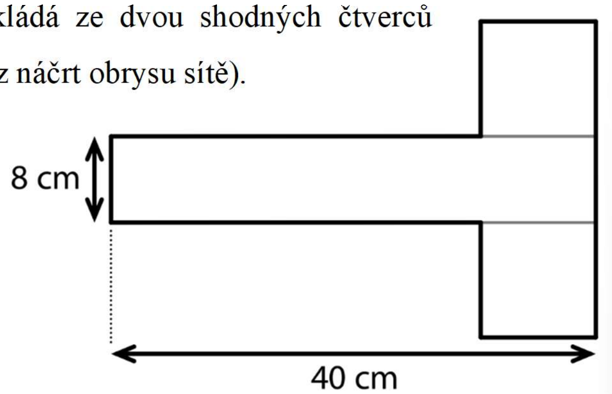
Příklad 12 (M9PAD21C0T01, 8)

Síť kolmého čtyřbokého hranolu se skládá ze dvou shodných čtverců a obdélníku s rozměry 40 cm a 8 cm (viz náčrt obrysu sítě).

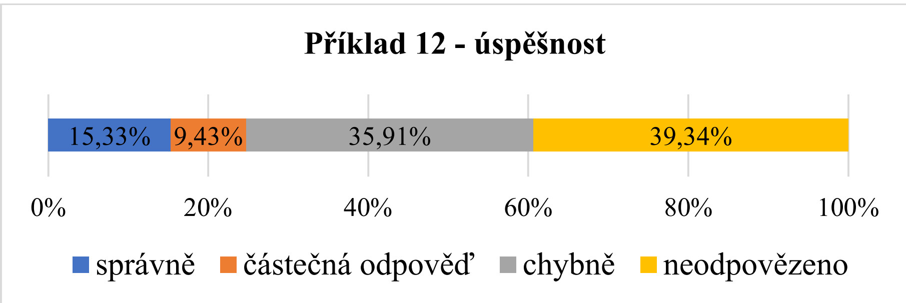
Vypočtěte

12.1 v cm^2 povrch hranolu,

12.2 v cm^3 objem hranolu.



Obr. 26 (zdroj: [1])



Graf 12: úspěšnost žáků v řešení příkladu 12

Příklad 12a (Lucie Kratochvílová, 2024)

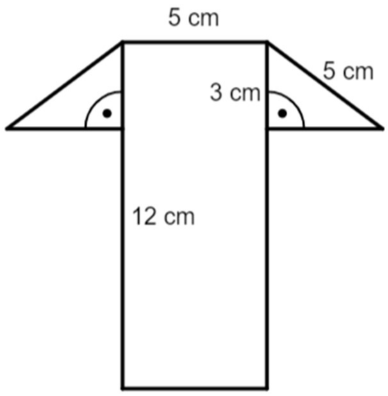
Síť kolmého trojbokého hranolu se skládá z obdélníku a dvou pravoúhlých trojúhelníků.

Obdélník má rozměry 12 cm a 5 cm, trojúhelník má délku jedné odvěsny 3 cm a délku přepony 5 cm.

Vypočtěte

a) v cm^2 povrch hranolu,

b) v cm^3 objem hranolu.

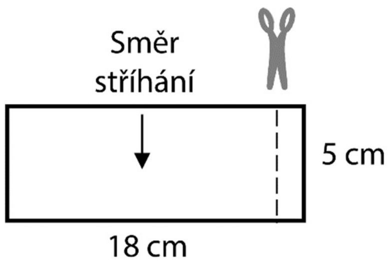


Obr. 27 (zdroj: autorka)

Příklad 13 (M9PAD18C0T01, 7)

Papírový obdélník s rozměry 18 cm × 5 cm se **beze zbytku** použije na zhotovení kvádru.

Obdélník se rozstříhá na jednotlivé stěny kvádru (tj. podstavy i boční stěny). Stříhat se smí jen v naznačeném směru – rovnoběžném s kratší stranou původního obdélníku.



Obr. 28 (zdroj: [1])

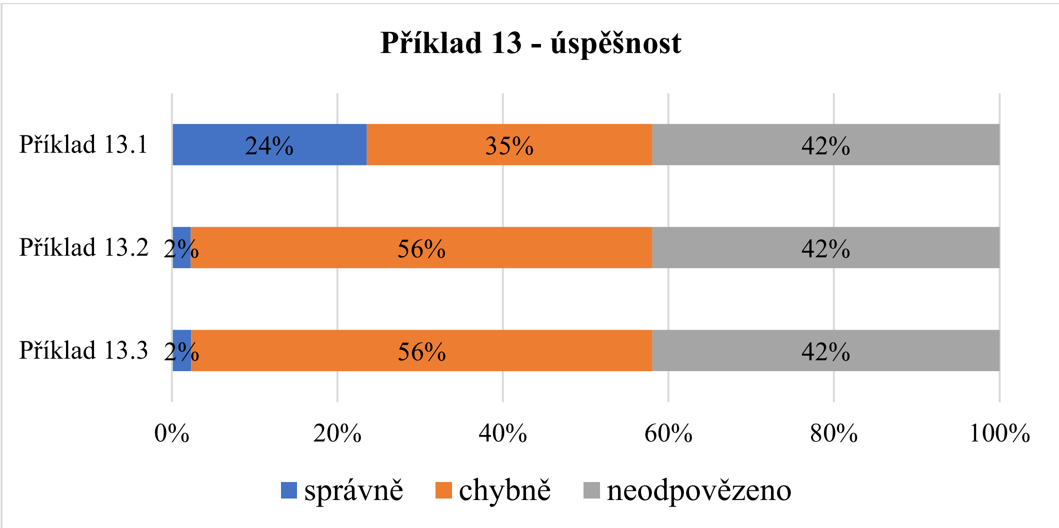
Z nastříhaných stěn se složí kvádr tak, aby se papír nikde nepřekrýval, a po hranách se spojí lepící páskou.

Vypočtěte

13.1 v cm^2 povrch složeného kvádru;

13.2 v cm rozměry kvádru (existuje jediné možné řešení);

13.3 v cm^3 objem složeného kvádru.

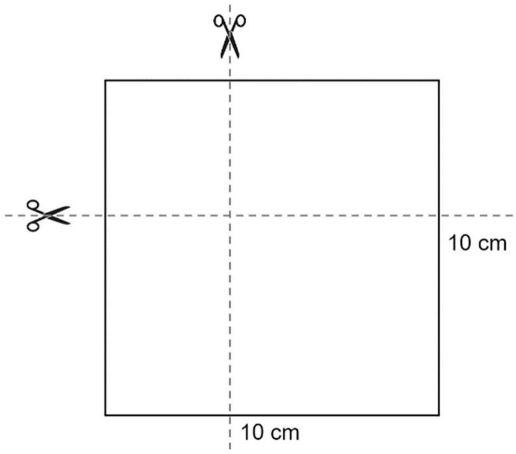


Graf 13: úspěšnost žáků v řešení příkladu 13

Příklad 13a (Lucie Kratochvílová, 2024)

Papírový čtverec o délce strany 10 cm se **beze zbytku** použije na zhotovení kvádru.

Čtverec rozstříháme na jednotlivé stěny kvádru, které se budou lepit k sobě. Můžeme stříhat ve dvou směrech, které jsou naznačené na obrázku. O kvádru víme, že jeho podstavy tvoří dva shodné čtverce a zároveň obsah podstav je roven obsahu pláště.



Obr. 29 (zdroj: autorka)

Vypočtěte

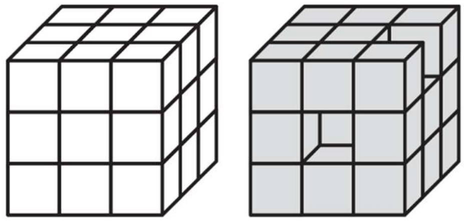
a) v cm^2 povrch složeného kvádru;

b) v cm rozměry kvádru (existuje jediné možné řešení);

c) v cm^3 objem složeného kvádru.

Příklad 14 (M9PAD19C0T01, 14)

Krychle byla slepena z 27 malých bílých krychliček o hraně délky $2\ \text{cm}$. Dvě malé krychličky jsme odstranili, a vzniklo tak nové těleso. Všechny dostupné plochy nového tělesa jsme obarvili na šedo (i zespodu).



Obr. 30 (zdroj: [1])

Jaký je celkový obsah šedých ploch nového tělesa?

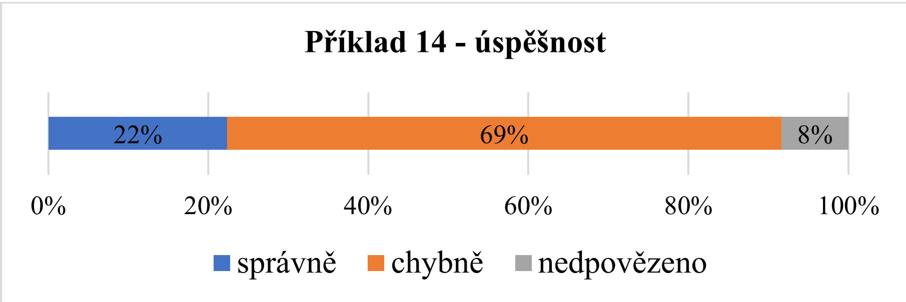
A) menší než $236\ \text{cm}^2$

B) $236\ \text{cm}^2$

C) $240\ \text{cm}^2$

D) $244\ \text{cm}^2$

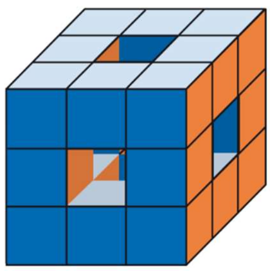
E) větší než $244\ \text{cm}^2$



Graf 14: úspěšnost žáků v řešení příkladu 14

Příklad 14a (Matematika 6 – geometrie (učebnice), Fraus, 82/8)

Z původní krychle složené z 27 krychliček byly všechny středy stěn provrtány (příslušné „prostřední“ krychličky byly odstraněny jako na obrázku).



Obr. 31 (zdroj: [11])

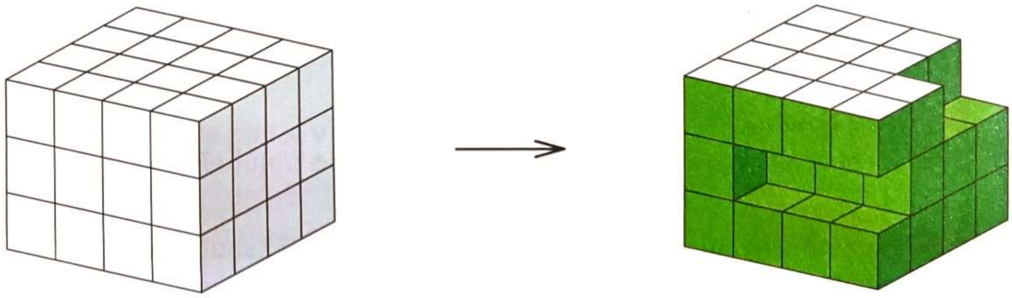
Kolik krychliček bylo celkem odstraněno?

Vypočítej objem takto vzniklého tělesa, pokud objem krychličky je $125\ \text{cm}^3$.

Vypočítej povrch takto vzniklého tělesa.

Příklad 14b (Testy 2023–2024 z matematiky pro žáky 9. třídy ZŠ, didaktis, 141/13)
Kvádr byl slepený ze 48 malých krychliček. Obsah horní podstavy kvádru byl 64 cm^2. Pět krychliček jsme odstranili a vzniklo nové těleso.

Nové těleso jsme nastříkali ze dvou stran nazeleno (všechny ostatní plochy zůstaly bílé). Nastříkané jsou i všechny plošky, které vznikly odstraněním krychliček.



Obr. 32 (zdroj: [2])

Jaký je celkový obsah zelených ploch nového tělesa?

A) 116 cm^2
B) 120 cm^2
C) 124 cm^2
D) 128 cm^2
E) větší než 128 cm^2

4. ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ

V této kapitole jsou zpracována řešení všech příkladů, jejichž zadání se nachází ve třetí kapitole. Řešení lze snadno zobrazit online pomocí QR kódu umístěných pod zadáním příkladů. Kromě toho je níže uveden odkaz na GeoGebra knihu, která obsahuje řešení všech příkladů, doplněná interaktivními aplety, které umožňují lépe pochopit danou problematiku. Řešení obsahující GeoGebra kniha jsou rozdělené do dvou kapitol stejně jako v kapitole Sbírka úloh v bakalářské práci.

Řešení úloh z didaktických testů z příjímacích zkoušek od Cermat, která jsou zpracována na webových stránkách https://www.statniprijimacky.cz/matematika nebo https://prijimacky.cermat.cz/ nejsou součástí této práce, zároveň řešení lze rozkliknou pomocí odkazů uvedených níže, pro upřesnění je v závorce uvedeno číslo úlohy, kterým je označena úloha v příslušném didaktickém testu.

GeoGebra kniha: https://www.geogebra.org/m/ztkybm9j

PŘÍJÍMACÍ ZKOUŠKY NA ŠESTILETÁ GYMNÁZIA

Řešení příkladu 1

https://www.statniprijimacky.cz/reseni-prijimaciho-testu-matematiky-stredni-skoly-2023-sestilete-obory-2-termin (úloha 12)

Řešení příkladu 1a

Na obrázku pohledu shora vidíme dva tmavé válce, které se při pohledu zepředu zobrazí jako dva kruhy nahoře vpravo a vlevo, tím vypadává možnost B). Dále vidíme na obrázku pohledu shora dole uprostřed světlý válec, který se zobrazuje jako kruh, ten se při pohledu zepředu zobrazí jako obdélník umístěný svisle uprostřed a není překrytý jiným válcem, tím vypadává možnost A).

Na obrázku pohledu zprava leží dole vodorovně tmavý válec, který se při pohledu zepředu zobrazí jako kruh vpravo dole, tím vypadávají možnosti D) a E) .

Správným řešením je poslední možnost, která nám zůstala, C).

Řešení příkladu 2:

https://www.statniprijimacky.cz/reseni-prijimaciho-testu-matematiky-stredni-skoly-2023-sestilete-obory-1-termin (úloha 7)

Řešení příkladu 2a

a) Počet krychliček vypočítáme jako objem krychle $a \cdot a \cdot a = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ krychliček.
b) Právě tři žluté stěny mají pouze krychličky, které se nachází u vrcholů krychle. Z toho vyplývá, že počet krychlí se třemi žlutými stěnami je roven počtu vrcholů krychle, což je 8 krychliček.
c) Právě dvě žluté stěny mají krychličky, které mají právě jednu hranu společnou s hranou velké krychle. Pro každou hranu velké krychle připadají právě dvě krychličky. Krychle má dvanáct hran. Dvě žluté stěny má $12 \cdot 2 = 24$ krychliček.
d) Právě jednu žlutou stěnu mají krychličky, které leží ve stěně velké krychle a žádná jejich hrana neleží na hraně velké krychle. V každé stěně jsou čtyři takové krychle. Krychle má šest stěn. Právě jednu stěnu má $6 \cdot 4 = 24$ krychliček.
e) Žlutou stěnu nemají krychličky uvnitř krychle. Což je $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ krychliček.

Řešení příkladu 3:

https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/6lete-mat/2022/M7B_2022_reseni.pdf (úloha 7)

Řešení příkladu 3a

a) Obsah všech modrých ploch vypočítáme vynásobením počtu modrých čtverců vypočítaným obsahem jednoho čtverce. Počet modrých čtverců krychle je $5 \cdot 5 + 4 = 25 + 4 = 29$ čtverců. Obsah jedné stěny modré krychle je $1 \cdot 1 = 1\ \text{cm}^2$. Nakonec hodnoty vynásobíme a dostaneme obsah všech modrých ploch $29 \cdot 1 = 29\ \text{cm}^2$.
b) Obsah všech bílých ploch získáme odečtením obsahu pěti stěn modrých krychlí (tj. všech stěn, které jsou přilepené k velké bílé krychle) od povrchu bílé krychle $6 \cdot (3 \cdot 3) - 5 \cdot (1 \cdot 1) = 6 \cdot 9 - 5 \cdot 1 = 54 - 5 = 49\ \text{cm}^2$.

c) Objem panáčka vypočítáme sečtením objemů všech krychlí, ze kterých je slepený. Abychom vypočítali objem šedé krychle musíme dopočítat délku její hrany, ta má délku $a = 2$ cm $(4 = a \cdot a = 2 \cdot 2)$. Nakonec sečteme objemy všech modrých krychlí s objemem bílé a šedé krychle $5 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) + (3 \cdot 3 \cdot 3) + (2 \cdot 2 \cdot 2) =$ $= 5 + 27 + 8 = 40$ cm^3.

Řešení příkladu 3b

a) Vypočítáme povrch složeného tělesa sečtením obsahů všech jeho stěn $10\,(2 \cdot 2) + 3\,(3 \cdot 2) + 4\,(1 \cdot 3) + 5\,(2 \cdot 1) = 36 + 34 + 6 + 4 = 80$ cm^2. N

b) Vypočítáme objem jedné krychle, který vydělíme objemem celého tělesa $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{8}{2 \cdot 8 + 2 \cdot 6} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$. N

c) Rozdíl obsahů získáme odečtením obsah sítě kvádru od obsahu sítě krychle $6 \cdot (2 \cdot 2) - 2 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 6 \cdot 4 - 2 \cdot 11 = 24 - 22 = 2$ cm^2, 2 cm$^2 < 3$ cm^2. A

Řešení příkladu 4

https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/6lete-mat/2021/M7A_2021_reseni.pdf (úloha 7)

Řešení příkladu 4a

a) Na obrázku vidíme složené těleso, které obsahuje $4 \cdot 3 = 12$ barevných krychliček. Objem všech barevných krychlí vypočítáme vynásobením objemu jedné krychličky počtem krychliček $V_{BK} \cdot 12 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12 = 27 = 324$ cm^3.

b) Ze zadání známe výšku kvádru $c = 12$ cm. Pomocí barevných krychliček si dopočítáme délku a a šířku b, $a = 4 \cdot 3 = 12$ cm ; $b = 3 \cdot 3 = 9$ cm. Vypočítáme objem kvádru $V = a \cdot b \cdot c = 12 \cdot 9 \cdot 12 = 1296$ cm^3. Nakonec vydělíme objem krychliček objemem celého kvádru a dostaneme, v procentech část objemu, kterou zaujímají barevné krychle $\frac{324}{1296} = \frac{1}{4} = 25$ %.

c) Z již známých rozměrů kvádru dopočítáme povrch pomocí příslušného vzorce $S = 2(ab + bc + ac) = 2(12 \cdot 9 + 9 \cdot 12 + 12 \cdot 12) = 2 \cdot 360 = 720$ cm^2.

Řešení příkladu 5

a) Abychom mohli vypočítat obvod papírového čtverce, musíme znát jeho rozměry. Z obrázku vidíme, že délka strany papírového čtverce je rovna délce strany odstřihnutého čtverce a délce strany dna krabice. Vypočítáme délky potřebných stran čtverců pomocí vzorce pro obsah čtverce $S = a \cdot a$. Musíme se zamyslet, pro která dvě stejná čísla po vynásobení platí, že se rovnají 25 a pro která 4. Tímto vypočítáme délku strany dna krabice 5 dm a délka strany odstřiženého čtverce $2\ \mathrm{dm}$. Nyní vypočítáme délku strany papírového čtverce $2 + 5 + 2 = 9\ \mathrm{dm}$. Nakonec hodnotu dosadíme do vzorce pro obvod $o = 4 \cdot 9 = 36$ dm.
b) Pro výpočet objemu krabice musíme znát rozměry podstavy a výšku. Podstavou je čtverec, jehož délku strany známe. Výška krabice je rovna délce strany odstřihnutého čtverce, kterou také známe. Potřebné hodnoty dosadíme do vzorce pro objem $V = S_p \cdot v = 25 \cdot 2 = 50\ \mathrm{dm}^3$.

Řešení příkladu 5a

Načrtneme si obdélník s rozměry modrého koberce. Zjistíme, zda je větší než horní stěna pódia, která má délku $120\ \mathrm{cm}$ a šířku $80\ \mathrm{cm}$. Jedna strana koberce a stěna pódia (120 cm) se shoduje. Porovnáme délku druhé strany koberce s délkou druhé strany pódia 100 cm $>$ 80 cm. Délka druhé strany koberce je větší, takže koberec bude stačit.

Dále musíme zjistit, zda bude stačit látka na boční stěny pódia. Jelikož boční stěna pódia má šířku 20 cm, tak vypočítáme délku obdélníku s šířkou 20 cm, který budeme potřebovat na polepení pódia $2 \cdot 120 + 2 \cdot 80 = 400$ cm.

Látku rozstříháme svisle. Obdélník s rozměry 1 m $=$ 100 cm a 90 cm, rozstříháme na 5 stejných obdélníku s šířkou $20\ \mathrm{cm}$ a délkou $90\ \mathrm{cm}$. Délka všech pruhů látky dohromady $5 \cdot 90 = 450$ cm, 450 cm je větší než 400 cm, takže látka na polepení bude stačit.

Látku můžeme rozstříhat i vodorovně, tím dostaneme 4 pruhy o délce 100 cm a šířce 20 cm a jeden pruh o délce 100 cm a šířce 10 cm. Pruhy s šířkou 20 cm dají dohromady $4 \cdot 100 = 400$ cm, což odpovídá délce pruhu potřebného k potažení pódia.

Řešení příkladu 5b

K výpočtu objemu krabice potřebujeme znát rozměry podstavy a výšku krabice. Rozměry podstav krabice vypočítáme odečtením délek stran dvou odstřihnutých čtverců od obou známých rozměrů kusu kartonu $a = 10 - 2 \cdot 2 = 6$ dm; $b = 8 - 2 \cdot 2 = 4$ dm. Výška krabice je rovna straně odstřihnutého čtverce, což jsou 2 dm.

Nakonec vypočítáme objem krabice dosadím do vzorce pro objem kvádru $V = a \cdot b \cdot c = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48\ \mathrm{dm}^3$.

Řešení příkladu 6

https://www.statniprijimacky.cz/reseni-prijimaciho-testu-matematiky-stredni-skoly-2023-sestilete-obory-1-nahradni-termin (úloha 7)

Řešení příkladu 6a

b) Vypočítáme obsah podstavy vydělením povrchu kvádru třemi, protože obsah čtvercové podstavy je stejně velký jako obsah pláště a kvádr má dvě podstavy $192 : 3 = 64\ \mathrm{cm}^2$. Podle vzorce pro obsah čtverce dopočítáme délku strany podstavy $64 = a \cdot a = 8 \cdot 8$, takže délka strany čtvercové podstavy se rovná 8 cm.

c) Obsah pláště je roven obsahu čtvercové podstavy, což je $64\ \mathrm{cm}^2$. Jelikož má kvádr čtvercové podstavy, tak má všechny boční stěny kvádru shodné. Výšku v dopočítáme pomocí obsahu jedné boční stěny, jež má obsah $64 : 4 = 16\ \mathrm{cm}^2$. Známe obsah a délku boční stěny, pomocí jejího obsahu dopočítáme výšku kvádru $16 = 8 \cdot v \rightarrow v = \frac{64}{32} = 2$ cm.

d) Z předchozích výpočtů známe rozměry kvádru, které dosadíme do vzorečku a dopočítáme objem kvádru $V = a \cdot a \cdot v = 8 \cdot 8 \cdot 2 = 128\ \mathrm{cm}^3$.

Řešení příkladu 7

https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/6lete-mat/2020/M7A_2020_vzorove_reseni.pdf (úloha 7)

Řešení příkladu 7a

a) Ze zadání známe obsah pláště, který je osmkrát větší než obsah jedné podstavy, obsah podstavy získáme vydělením obsahu pláště osmi $S_{1p} = 240 : 8 = 30\ \text{cm}^2$. Povrch hranolu vypočítáme sečtením obsahu pláště a obsahu obou podstav, kde $S = S_{pl} + S_p = S_{pl} + 2 \cdot S_{1p} = 240 + 2 \cdot 30 = 300\ \text{cm}^2$.

b) Jelikož podstavou je kosočtverec o délce strany $6\ \text{cm}$, známe délku a šířku hranolu. Výšku c dopočítáme pomocí obsahu jedné boční stěny (obdélníku), kde nejprve vypočítáme obsah obdélníka $S_s = 240 : 4 = 60\ \text{cm}^2$. Následně dopočítáme výšku pomocí vzorce pro obsah $60 = 6 \cdot c \rightarrow c = 10\ \text{cm}$. Součet délek stran je $8 \cdot 6 + 4 \cdot 10 = 48 + 40 = 84\ \text{cm}$.

Řešení příkladu 7b

a) Dopočítáme všechny zbylé rozměry hranolu, což poslední rozměr podstavy (přepona pravoúhlého trojúhelníku) a výška kvádru. Výšku dopočítáme pomocí objemu a obsahu podstavy, kde obsah podstavy je $S_{1p} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ \text{cm}^2$. Vše dosadíme do vzorce pro objem $36 = 6 \cdot v = 6 \cdot 6 \rightarrow\ v = 6\ \text{cm}$. Poslední rozměr vypočítáme vzorcem pro Pythagorovu větu $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$, odmocněním dostaneme délku přepony $c = 5\ \text{cm}$. Nejdelší rozměr kvádru je výška (6 cm), která je delší než 5 cm. N

b) Dopočítáme obsah největší boční stěny hranolu $S_s = 5 \cdot 6 = 30\ \text{cm}^2$, kterým vydělíme obsah podstavy $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$. A

c) Vypočítáme povrch hranolu $S = 30 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 84\ \text{cm}^2$. Povrchem hranolu vydělíme obsah podstavy, dostaneme $\frac{6}{84} = \frac{1}{14}$. A

Řešení příkladu 8

https://www.statniprijimacky.cz/reseni-test-matematika-2022-ctyrlete-nahradni-1 (úloha 7)

Řešení příkladu 8a

Objem kvádru je $V = 12 \cdot 16 \cdot 22 = 4224$.

Podstava trojbokého hranolu je složena z dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků s délkami odvěsen 8 a 6. Objem trojbokého hranolu vypočítáme jako obsah podstavy vynásobený výškou hranolu $V_1 = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 22 = 8 \cdot 6 \cdot 22 = 1056$.

Objem pětibokého hranolu vypočítáme odečtením objemu trojbokého hranolu od objemu kvádru $V_2 = V - V_1 = 4224 - 1056 = 3168$.

Vypočítáme povrch hranolů sečtením obsahů stěn jednotlivých hranolů. Povrch trojbokého hranolu je $S_1 = 16 \cdot 22 + 2 \cdot 10 \cdot 22 + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 888$. Povrch pětibokého hranolu je $S_2 = 2 \cdot 12 \cdot 22 + 16 \cdot 22 + 2 \cdot 10 \cdot 22 + 2 \cdot 12 \cdot 16 - 2 \cdot 6 \cdot 8 = 1\,608$.

Vypočítáme povrch kvádru $S = 2 \cdot (12 \cdot 22 + 16 \cdot 22 + 12 \cdot 16) = 1\,616$. Součet povrchů dvou hranolů vzniklých rozříznutím je $S_1 + S_2 = 888 + 1\,608 = 2\,496$. Povrch kvádru se nerovná součtu povrchů obou hranolů, protože do povrchu hranolů navíc započítáváme dvakrát obsah ploch řezu.

PŘÍJÍMACÍ ZKOUŠKY PRO ČTYŘLETÉ OBORY VZDĚLÁNÍ A NÁSTAVBOVÁ STUDIA S MATURITNÍ ZKOUŠKOU

Řešení příkladu 9

https://www.statniprijimacky.cz/reseni-test-matematika-2023-2-termin (úloha 8)

Řešení příkladu 9a

Vypočítáme poloměr desky stolu r pomocí známého obsahu desky $78{,}5 = \pi \cdot r^2$, po vyjádření $r^2 = \frac{78{,}5}{\pi} = \frac{78{,}5}{3{,}14} = 25 \to r = 5\ \text{dm} = 50\ \text{cm}$.

Průměr ubrusu d vypočítáme sečtením průměru desky stolu a přesahu ubrusu na obou stranách $d = 2 \cdot r + 2 \cdot 25 = 2 \cdot 50 + 50 = 150\ \text{cm}$.

Řešení příkladu 9b

a) Dopočítáme délku a šířku podlahy pomocí vzorce pro obsah čtverce, kde obsah čtverce činí polovinu obsahu podlahy ve tvaru obdélníka $\frac{1800}{2} = 900\ \text{dm}^2$.

Vypočítáme délku strany čtverce $a^2 = 900 \rightarrow a = \sqrt{900} = \sqrt{100 \cdot 3} = 30$ dm, což je zároveň šířka podlahy $a = 30$ cm, délku podlahy dopočítáme pomocí rozměrů čtverce $b = 2a = 60$ dm.

b) Dopočítáme poloměr rotačního válce, pomocí kterého vypočítáme povrch prolézačky. Poloměr je polovina šířky prolézačky $r = \frac{a}{2} = \frac{30}{2} = 15$ dm. Povrch prolézačky je roven polovině obsahu pláště rotačního válce, jenž vypočítáme dosazením hodnoty $\pi = 3{,}14$, $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot b = 3{,}14 \cdot 15 \cdot 60 = 2\,826$ dm^2.

Řešení příkladu 9c

Objem horního patra označíme V_1, objem dolního patra V_2 a objem dortu V. Ze zadání víme, že $V_2 = 4 \cdot V_1$ a $V = V_1 + V_2 = 15{,}7$ l $= 15{,}7$ dm^3. Dopočítáme objem horní části dortu V_1, pomocí objemu celého dortu V, $15{,}7 = V_1 + 4V_1 = 5V_1$, kde po úpravě $V_1 = 3{,}14$ dm^3.

a) Výška jednoho patra dortu v je rovna poloměru horního patra r_1 $(v = r_1)$. Výšku vypočítáme pomocí známého objemu V_1.

$V_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot v$

$3{,}14 = 3{,}14 \cdot v^2 \cdot v$

$v^3 = 1$

$v = 1$ dm $= 10$ cm

Dort se skládá ze dvou stejně vysokých pater $2 \cdot 10$ cm $= 20$ cm.

b) Průměr dolního patra dortu vypočítáme dosazením do vzorce pro objem válce, kde je neznámou poloměr podstavy.

$V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot v$

$4 \cdot 3{,}14 = 3{,}14 \cdot r_2^2 \cdot 1$

$r_2^2 = 4$

$r_2 = 2$ dm $= 20$ cm $\rightarrow d_2 = 2 \cdot 20 = 40$ cm

Průměr dolního patra dortu je 40 cm.

c) Řez dortu se skládá z dvou obdélníku. Šířka obou obdélníků je rovna výšce jednoho patra v, délka obdélníků je rovna průměru horní a dolní části dortu. Pomocí těchto údajů dopočítáme obsah řezu.

$S = v \cdot 2r_1 + v \cdot d_2$

$S = 10 \cdot 2 \cdot 10 + 10 \cdot 40$

$S = 600 \text{ cm}^2$

Obsah řezu dortu je 600 cm^2.

Řešení příkladu 10

https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/2022/M9A_2022_vzorove_reseni.pdf (úloha 6)

Řešení příkladu 10a

Vypočítáme objem jednoho nosiče, který vynásobíme počtem nosičů.

Objem nosiče se skládá z objemu tří kolmých hranolů, kvádru s objemem V_1, trojbokého hranolu (vlevo na obrázku) s objemem V_2 a trojbokého hranolu (vpravo na obrázku) s objemem V_3. Objem nosiče vypočítáme sečtením všech objemů $V = V_1 + V_2 + V_3$. Vypočítáme objemy jednotlivých hranolů, objemy sečteme a dostaneme objem jednoho nosiče, který vynásobíme počtem potřebných nosičů.

$V_1 = 17 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,700 \text{ cm}^3$

$V_2 = \frac{10 \cdot (26-17)}{2} \cdot 10 = \frac{90}{2} \cdot 10 = 450 \text{ cm}^3$

$V_3 = \frac{8 \cdot 8}{2} \cdot 10 = \frac{64}{2} \cdot 10 = 320 \text{ cm}^3$

$V = 1\,700 + 450 + 320 = 2470 \text{ cm}^3$

Objem patnácti nosičů je $15 \cdot 2170 = 32\,550 \text{ cm}^3$.

Řešení příkladu 11

https://www.statniprijimacky.cz/reseni-test-matematika-2017 (úloha 13)

Řešení příkladu 11a

Pomocí objemu nanošené vody dopočítáme výšku kvádru s podstavou, která odpovídá rozměrům záhonu. Výšku porovnáme se 7 mm srážek, které napršeli v noci.

Objem nanošené vody v konvích vypočítáme vynásobením objemu konve jejich počtem $V = 20 \cdot 10 = 200 \text{ l} = 0{,}2 \text{ m}^3$. Dopočítáme výšku pomocí vzorce pro objem kvádru $0{,}2 = 10 \cdot 6 \cdot v \rightarrow v = \frac{0{,}2}{60} = \frac{1}{300} \text{ m} \doteq 0{,}0033 \text{ m} = 3{,}3 \text{ mm}$.

Nakonec porovnáme výšku s napršenými milimetry $7\ \mathrm{mm} > 3{,}3\ \mathrm{mm}$. Na záhon napršelo víc vody, než nanosila Alenka.

Řešení příkladu 11b

Vypočítáme objem nádrže $V_N = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8\ \mathrm{m}^3 = 8\,000\ \mathrm{l}$, který vynásobíme 80 %, abychom zjistili objem vody v nádrži $V_V = 8\,000 \cdot 0{,}8 = 6\,400\ \mathrm{l}$.

a) Objem volného prostoru dostaneme odečtením objemu vody od objemu nádrže $8\,000 - 6\,400 = 1\,600\ \mathrm{l}$. A
b) Vypočítáme výšku volného prostoru v nádrži pomocí známého objemu $1\,600\ \mathrm{l} = 1{,}6\ \mathrm{m}^3 = 2 \cdot 2 \cdot v \rightarrow v = 0{,}4\ \mathrm{m}$. A
c) Vypočítáme objem kvádru s rozměry $4\ \mathrm{m} \times 4\ \mathrm{m} \times 40\ \mathrm{cm}$ a porovnáme s objemem vody $V_K = 4 \cdot 4 \cdot 0{,}4 = 6{,}4\ \mathrm{m}^3 = 6\,400\ \mathrm{l}$, kde $V_K = V_V$. A

Řešení příkladu 12

https://prijimacky.cermat.cz/files/files/M9PAD21C0T01_reseni_6.pdf (úloha 8)

Řešení příkladu 12a

a) Povrch hranolu vypočítáme jako obsah sítě $S = S_1 + 2S_2$, kde $S_1 = 12 \cdot 5 = 60\ \mathrm{cm}^2$ a $2S_2 = 2 \cdot \frac{3 \cdot x}{2} = 3 \cdot x$. Neznámou x dopočítáme pomocí Pythagorové věty $x^2 = 5^2 - 3^2 \rightarrow x = \sqrt{25 - 9} = 4\ \mathrm{cm}$. Neznámou dosadíme, zpět do vzorečku $2S_2 = 12\ \mathrm{cm}^2$ a obsahy sečteme $S = 60 + 12 = 72\ \mathrm{cm}^2$.
b) Objem hranolu vypočítáme jako obsah podstavy (pravoúhlého trojúhelníku) vynásobený výškou $V = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 30\ \mathrm{cm}^3$.

Řešení příkladu 13

https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/M9PAD18C0T01_reseni_final_ZA.pdf (úloha 7)

Řešení příkladu 13a

a) Jelikož slepíme kvádr z papírového čtverce beze zbytku, tak povrch kvádru je roven obsahu papírového čtverce. Povrch kvádru $S = 10 \cdot 10 = 100\ \mathrm{cm}^2$.

b) Jelikož obsah podstav je roven obsahu pláště, tak rozstřihneme čtverec na polovinu. Dostaneme dva shodné obdélníky s rozměry 5 cm a 10 cm. Podstavy tvoří dva shodné čtverce, které získáme rozstřihnutím obdélníku na polovinu. Délka strany čtvercové podstavy je $5\ \mathrm{cm}$. Z druhého obdélníku musíme vystřihnout 4 shodné obdélníky s délkou jedné strany 5 cm (hrana boční stěny se shoduje s hranou podstavy). Jelikož jedna strana obdélníka má délku 5 cm, tak musíme délku druhé strany vydělit počtem bočních stěn $10 : 4 = 2{,}5\ \mathrm{cm}$, tím dostaneme druhý rozměr stěny. Kvádr má rozměry 5 cm × 5 cm × 2,5 cm.

c) Nakonec vypočítáme objem kvádru $V = 5 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 62{,}5\ \mathrm{cm}^3$.

Řešení příkladu 14

https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/M9PAD19C0T01_reseni_final_ZA.PDF (úloha 14)

Řešení příkladu 14a

Byla odstraněna jedna krychlička z každé stěny, což je 6 krychliček a jedna krychlička ze středu krychle, celkem bylo odstraněno 7 krychliček.

Nově vzniklé těleso je složeno z $27 - 7 = 20$ krychliček. Objem nově vzniklého tělesa vypočítáme vynásobením objemu jedné krychličky počtem krychliček nového tělesa $V = 125 \cdot 20 = 2500\ \mathrm{cm}^3$.

K vypočítání povrchu nejprve musíme vypočítat délku hrany krychličky $125 = a^3 \rightarrow a = 5\ \mathrm{cm}$. Dále sečteme počet stěn krychliček. Každá strana krychle je tvořena 8 stěnami krychliček, V každé stěně vznikl otvor, který je tvořen 4 stěnami krychliček.

Povrch tělesa vypočítáme vynásobením obsahu stěny krychličky počtem stěn (musíme započítat také stěny, které jsou v otvorech tělesa vzniklých po provrtání původní krychle) $S = (5 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 6 + 4 \cdot 6) = 25 \cdot 72 = 1\,800\ \mathrm{cm}^2$.

Řešení příkladu 14b

Abychom vypočítali obsah zelených ploch musíme zjistit délku hrany malé krychličky. Tu dopočteme pomocí obsahu horní podstavy $64 = 4a^2 \rightarrow a^2 = \frac{64}{4} = 4\ \text{cm}^2$, po odmocnění $a = 2$ cm. Počet stěn krychliček obarvených na zeleno je 33. Obsah zelených ploch je roven součinu obarvených stěn a obsahu jedné stěny $S = 33 \cdot 4 = 132\ \text{cm}^2$. Správnou odpovědí je E).

5. ZÁVĚR

Hlavní částí této práce je sbírka úloh, která obsahuje celkem 35 příkladů z toho 27 převzatých a 8 mnou vytvořených. Účelem této sbírky je příprava žáků na jednotnou příjímací zkoušku.

Do řešení příkladů jsem promítla své osobní poznatky z asistentské praxe a doučování učiva geometrie. Práce je určená pro žáky, učitele, lektory připravující žáky na jednotné příjímací zkoušky, popřípadě i rodiče. Integrální součástí bakalářské práce je digitální složka ve formě GeoGebra knihy, která je přístupná online. Kniha obsahuje nejen zadání a řešení příkladů, ale také pohyblivé aplety, které mohou pomoci v utvoření přesnější představy.

Stručně zmiňuji vliv výuky geometrie v trojrozměrném prostoru na rozvoj představivosti žáků. Věřím, že má práce je přínosná a využitelná. Tématu se dále plánuji věnovat i v rámci mé diplomové práce.

6. SEZNAM CITOVANÉ LITERATURY

[1] *Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (Cermat)*. Online. Dostupné z: https://cermat.cz/. [cit. 2024-04-06].

[2] FILIPČUKOVÁ, Alena; HEDVÁBNÁ, Hana; KRÁLOVÁ, Magda; LIŠKOVÁ, Hana a ONDRÁČKOVÁ, Ivana. *Testy z matematiky pro žáky 9. třídy ZŠ 2023-2024*. Brno: Didaktis, 2022. ISBN 978-80-7358-410-8

[3] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl*. 4. vydání. Praha: Prometheus, spol., 2022. ISBN 978-80-7196-530-5.

[4] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 1. díl*. 4. vydání. Praha: Prometheus, spol., 2023. ISBN 978-80-7196-528-2.

[5] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl*. Dotisk 3. přepracovaného vydání. Praha: Prometheus, spol., 2016. ISBN 978-80-7196-427-8.

[6] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl*. Dotisk 3. přepracovaného vydání. Praha: Prometheus, spol., 2022. ISBN 978-80-7196-430-8.

[7] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl*. Dotisk 2. přepracovaného vydání. Praha: Prometheus, spol., 2015. ISBN 978-80-7196-434-6.

[8] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 3. díl*. Dotisk 2. přepracovaného vydání. Praha: Prometheus, spol., 2021. ISBN 978-80-7196-436-0.

[9] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. Dotisk 3. přepracovaného vydání. Praha: Prometheus, spol., 2022. ISBN 978-80-7196-441-4.

[10] TALIÁN, František. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: Fortuna, 2017. ISBN 978-80-7373-133-5.

[11] KOLDOVÁ, Helena; FUCHS, Eduard a TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-681-9.

[12] KOLDOVÁ, Helena; FUCHS, Eduard a TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 7 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-681-9.

[13] KOLDOVÁ, Helena; FUCHS, Eduard a TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 8 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-686-4.

[14] KOLDOVÁ, Helena; FUCHS, Eduard a TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 9 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-691-8.

[15] KOLDOVÁ, Helena; FUCHS, Eduard a TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 7 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-679-6.

[16] *GeoGebra*. Online. 2024. Dostupné z: https://www.geogebra.org/. [cit. 2024-04-06].

[17] *Státní přijímačky*. Online. Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/matematika. [cit. 2024-04-06].

[18] *Generátor QR kódů*. Online. Dostupné z: https://qrgenerator.cz/. [cit. 2024-04-08].

[19] *MŠMT (seznam učebnic a učebních textů se schvalovací doložkou pro základní vzdělávání)*. Online. Dostupné z: https://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/seznam-ucebnic-a-ucebnich-textu-pro-zs. [cit. 2024-04-13].