JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Pedagogická fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2009 **Kateřina Štěrbová**

Kateřina Štěrbová

Jihočeský matematický korespondenční seminář 1993–1996

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Jihočeský matematický korespondenční seminář 1993-1996

Diplomová práce

Vypracovala: Kateřina Štěrbová
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Anotace

Název: Jihočeský matematický korespondenční seminář 1993 – 1996

Vypracovala: Kateřina Štěrbová

Vedoucí: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Didaktika, práce s nadanými studenty, metody řešení úloh

Obsahem této práce jsou vyřešené úlohy Jihočeského matematického korespondenčního semináře z let 1993 – 1996, které mohou být využity jako materiál pro další práce s podobnými typy úloh. Jsou vhodné zejména pro studenty středních škol.

Abstract

Title: South Bohemia correspondence mathematical competition 1993 – 1996

Author: Kateřina Štěrbová

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Keywords: Didactics, work with talented students, methods of promblems solutions

This thesis contains solved problems from South Bohemia correspondence mathematical competition from Years 1993 – 1996, which can be used as a material for another work with similar types of problems. They are useful especially for intermediate school students.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma
"Jihočeský matematický korespondenční seminář 1993 – 1996"
jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě - v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných Pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

. . . .
Kateřina Štěrbová

V Českých Budějovicích dne 20. dubna 2009

Poděkování

Za cenné rady a připomínky děkuji panu RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D., který mi pomáhal při přípravě této práce. Také děkuji své rodině a přátelům za podporu a pochopení během celého studia.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Korespondenční semináře jsou významné z hlediska práce s nadanými studenty; ani matematické korespondenční semináře nejsou výjimkou. V dnešní době jich existuje celá řada, a to na středních i základních školách. Jejich oblíbenost u studentů a žáků spočívá především v tom, že poskytují relativně dostatek času na vyřešení jednotlivých úloh, stejně tak i na seznámení se s tématem, které nepatří mezi oblasti matematiky vyučované na příslušném typu školy. Například vyšší kola matematické olympiády nebo populární soutěž Klokan takové možnosti širšímu okruhu zájemců z řad studentů nedovolují.

Korespondenční semináře svou podstatou tak pomáhají nejen rozvíjet myšlení a dosavadní znalosti a vědomosti žáků a studentů, ale rovněž posilují pozitivní vztah k matematice. V současné době je tento prvek popularizování matematiky velmi důležitý, neboť tuto disciplínu považují žáci, studenti, ale i veřejnost v posledních letech za nesmírně náročnou a nezajímavou, na mnoha typech škol dokonce za zbytečnou. Proto věřím, že korespondenční semináře, které dávají větší prostor pro širší okruh řešitelů, napomáhají motivovat studenty k tomu, že matematika je pro ně přínosem nejenom v získávání matematických dovedností vyřešením určité úlohy. Do povědomí řešitelů tak proniká poznatek, že matematika je disciplína, která je učí systému v práci, vytrvalosti, trpělivosti a důslednosti.

Jihočeský matematický korespondenční seminář je jedním z mnoha, které vznikly kolem roku 1980. V té době kromě matematické olympiády existoval i korespondenční seminář Ústředního výboru matematické olympiády, který však byl určen pro vymezenou skupinu nejlepších řešitelů matematické olympiády. Pro ostatní studenty byly úlohy tohoto semináře příliš náročné. Proto se Ústřední výbor matematické olympiády obrátil na krajské garanty matematické olympiády s návrhem, zda by se nepokusili o vytvoření "lehčí formy" korespondenčního semináře určené mj. i pro další zájemce o matematiku. Tak proběhl ve školním roce 1980/81 první ročník Jihočeského matematického korespondenčního semináře, u jehož zrodu stála doc. Lada Vaňatová, která byla hlavním garantem semináře až do roku 1989. Na opravě úloh se tehdy značnou měrou podíleli studenti Pedagogické fakulty. Později při sestavování úloh pomáhal Ladě Vaňatové i Pavel Pech. V roce 1989 byla organizace semináře předána učitelům jihočeských gymnázií. Garantem semináře se stal Pavel Leischner z Gymnázia Strakonice a kromě něj sestavovali a opravovali jednotlivá kola v letech 1989 – 2002 tito učitelé: Michaela Koblížková (Gymnázium Jindřichův Hradec), Marie Štěpánková (Gymnázium Tábor) a Petr Sokol (Pedagogická fakulta v Českých Budějovicích).

V roce 2002 došlo ke krizi a Jihočeský matematický korespondenční seminář zanikl.

Kapitola 2

Ročník 1993/94

2.1 1. série

Sérii sestavil Petr Sokol

Zadání

1. (jen pro první ročník)
   V rovnici $(x^2 + a)(x + 1) = (x^4 + 1)(x + 2)$ určete hodnotu parametru a, jestliže je známo, že tato rovnice má jeden kořen roven jedné.

2. Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá reálný kořen, současně platí $a + b + c < 0$. Určete jaké znaménko má parametr c.

3. Dokažte, že výraz $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ není roven číslu 33 pro žádná celá čísla x, y.

4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost
   $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$.

5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b je splněna nerovnost $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

6. V pravoúhlém trojúhelníku jsou a, b jeho odvěsny, c přepona, v výška na přeponu. Dokažte, že $c + v$ je větší $a + b$.

7. Máme dvě nádoby. Rozlijeme do nich libovolně 1 l vody. Z první nádoby přelijeme polovinu objemu vody do druhé nádoby. Potom polovinu objemu z druhé nádoby do první a opět z první polovinu do druhé nádoby, atd. Dokažte, že nezávisle na počátečním množství vody v nádobách bude po 100 přelitích v nádobách 2/3 l a 1/3 l vody s přesností 1 ml.

Řešení

1. Text úlohy. V rovnici $(x^2 + a)(x + 1) = (x^4 + 1)(x + 2)$ určete hodnotu parametru a, jestliže je známo, že tato rovnice má jeden kořen roven jedné.

   Řešení úlohy. Jestliže rovnice má jeden kořen roven jedné, potom po dosazení kořene do rovnice musí být tato podmínka splněna. Po dosazení tedy obdržíme $(1 + a) \cdot 2 = 2 \cdot 3$. Získáme hodnotu parametru $a = 2$.

2. Text úlohy. Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá reálný kořen, současně platí $a + b + c < 0$. Určete jaké znaménko má parametr c.

   Řešení úlohy. Pokud je $a \neq 0$, nemá parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ průsečík s osou x. Leží celá buď nad osou x nebo pod osou x. Hodnota funkce v bodě 1 je $f(1) = a + b + c$. Odtud a ze zadání plyne, že $f(1) < 0$. Proto všechny hodnoty této funkce jsou záporné. Je tedy $c = f(0) < 0$. Navíc musí být $a < 0$.

   Pokud $a = 0$, má rovnice tvar $bx + c = 0$. Grafem funkce $g(x) = bx + c$ je přímka, která neprotne osu x jen tehdy, když bude $b = 0$. Z podmínky, že rovnice nemá reálný kořen tedy dostáváme $g(x) = c = a + b + c < 0$.

   Závěr. Parametr c je záporný.

3. Text úlohy. Dokažte, že výraz $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ není roven číslu 33 pro žádná celá čísla x, y.

   Řešení úlohy. Výraz $V = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ nejprve rozložíme na součin. Postupným vytýkáním obdržíme
   $V = x^4(x + 3y) - 5x^2y^2(x + 3y) + 4y^4(x + 3y)$,
   $V = (x + 3y)(x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4)$.

   Bikvadratický polynom v poslední závorce má kořeny y a $4y$. Platí tedy
   $V = (x + 3y)(x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2)$

   a po úpravě podle vzorce pro rozdíl čtverců dostaneme
   $V = (x + 3y)(x - y)(x + y)(x - 2y)(x + 2y)$.

   Výraz V je tedy součinem pěti různých celých čísel která si označíme a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 v daném pořadí.

   $$V = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \quad (a_1, \ldots, a_5 \in \mathcal{Z})$$

   Pro $y = 0$ je $V = x^5$. Rovnice $x^5 = 33$ nemá celočíselné řešení.

   Je-li $y \neq 0$, je V pro každou dvojici $[x, y] \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ součinem pěti různých celých čísel. Číslo 33 lze rozložit na součin maximálně čtyř různých celých čísel:
   $33 = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-11)$
   $33 = (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 11$

Proto platí

$$\forall\ x, y \in \mathcal{Z} : V \neq 33.$$

4. Text úlohy. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$.

   Řešení úlohy. Pro všechna $x, y, z \in \mathcal{R}$ zřejmě platí

   $$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,$$

   přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $x = y = z$. Tuto nerovnost ekvivalentně upravíme na tvar

   $$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz. \tag{2.1}$$

   Nerovnost (2.1) je splněna pro každou trojici reálných čísel x, y, z a rovnost nastane právě tehdy, když $x = y = z$.

   Do nerovnosti (2.1) dosadíme nejprve $x = a^2, y = b^2, z = c^2$:

   $$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2. \tag{2.2}$$

   Rovnost nastane právě, když $|a| = |b| = |c|$.

   Nyní do (2.1) dosadíme $x = ab, y = ac, z = bc$:

   $$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq a^2bc + abc^2 + ab^2c. \tag{2.3}$$

   Rovnost nastane právě tehdy, když $ab = bc = ac$ a zároveň $|a| = |b| = |c|$. Snadno ověříme, že tyto vztahy jsou ekvivalentní s podmínkou $a = b = c$.

   Z nerovností (2.2) a (2.3) okamžitě plyne, že pro všechna reálná a, b, c je

   $$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab,$$

   přičemž rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

5. Text úlohy. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b je splněna nerovnost $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

   Řešení úlohy. Pro každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{R}^+$ platí nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (A-G nerovnost):

   $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}, \tag{2.4}$$

   přičemž rovnost nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Do nerovnosti (2.4) dosadíme $n = 5$, $x_1 = x_2 = \sqrt{a}$, $x_3 = x_4 = x_5 = \sqrt[3]{b}$ $(a \in \mathcal{R}^+, b \in \mathcal{R}^+)$.

Dostaneme nerovnici

$$\frac{2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}},$$

kterou posléze vynásobíme pěti a dostaneme nerovnost

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab} \qquad \forall a,b \in \mathcal{R}^+,$$

kterou jsme chtěli dokázat. Rovnost nastane, právě když $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b}$, to znamená právě když $a = b$.

6. Text úlohy. V pravoúhlém trojúhelníku jsou a, b jeho odvěsny, c přepona, v výška na přeponu. Dokažte, že $c + v$ je větší $a + b$.

   Řešení úlohy. V pravoúhlém trojúhelníku ABC ($\gamma = 90°$), můžeme využít Pythagorovu větu
   $$c^2 = a^2 + b^2 \tag{2.5}$$
   a dvě různá vyjádření obsahu:
   $$S \;=\; \frac{1}{2}\;ab \;=\; \frac{1}{2}\;vc.$$
   Odtud určíme
   $$4S \;=\; 2\;ab \;=\; 2\;cv. \tag{2.6}$$
   Víme, že vztah $v^2 > 0$ platí vždy. Proto musí platit také
   $$v^2 + c^2 + 4S > c^2 + 4S.$$
   Dosadíme-li za v^2 a $4S$ ze vztahů (2.5) a (2.6) dostaneme odtud
   $$c^2 + v^2 + 2cv \;>\; a^2 + b^2 + 2ab,$$
   neboli
   $$(c+v)^2 \;>\; (a+b)^2.$$
   Protože jsou čísla $c + v$ a $a + b$ kladná a pro kladná x platí $\sqrt{x^2} = x$, je poslední vztah ekvivaletní s nerovností
   $$c + v > a + b.$$

7. Text úlohy. Máme dvě nádoby. Rozlijeme do nich libovolně 1 l vody. Z první nádoby přelijeme polovinu objemu vody do druhé nádoby. Potom polovinu objemu z druhé nádoby do první a opět z první polovinu do druhé nádoby, atd. Dokažte, že nezávisle na počátečním množství vody v nádobách bude po 100 přelitích v nádobách 2/3 l a 1/3 l vody s přesností 1 ml.

   Řešení úlohy. Případ, že v nádobách je 2/3 l a 1/3 l je zřejmý. Budeme tedy předpokládat, že v nádobách je množství vody odlišné od předchozího případu. Libovolnou z nádob označíme jako první a počáteční množství v ní označíme $p+2/3$ (litru). Ve druhé nádobě bude $1-(p+2/3) = 1/3-p$ litru vody. Dále zapisujeme stavy vody v nádobách:

Původní stav:
první nádoba... $(2/3 + p)$ l,
druhá nádoba... $(1/3 - p)$ l.

Po prvním přelití:
první nádoba... $(1/3 + p/2)$ l,
druhá nádoba... $(2/3 - p/2)$ l.

Po druhém přelití:
první nádoba... $(2/3 + p/4)$ l,
druhá nádoba... $(1/3 - p/4)$ l.

Vidíme, že se po každých dvou přelitích množství p zmenší 4 krát ($p/4$ l). Po 100 přelitích se zmenší 4^{50} krát. Množství p po posledním přelití je tedy rovno

$$\frac{p}{4^{50}} \quad \text{neboli} \quad p \cdot 4^{-50} \text{ litru} \qquad p \in \langle -2/3; 1/3 \rangle$$

a to je zřejmě mnohem menší než jeden ml (1 ml=10^{-3} l).

2.2 2. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (jen pro první ročník)
Pavouk Albert, rodný bratr pavouka Huberta, si jednou utkal pavučinu tvaru čtvercové sítě 10×10 jednotkových čtverců. Označme vrcholy sítě A, B, C, D a zaveďme si souřadnice tak, aby $A = [0,0]$, $B = [10,0]$, $C = [10,10]$, $D = [0,10]$. V místech $K = [1,1]$, $L = [9,2]$ a $M = [6,9]$ se mu chytly mouchy. Namalujte si příslušný obrázek a určete, v jakém bodě X si má Albert zvolit stanoviště, aby součet délek cest z X do K, z X do L a z X do M byl minimální.

2. Jindy pavouk Albert pospojoval středy hran drátěného modelu krychle $ABCDEFGH$ pavučinami rovnoběžnými s hranami krychle. Průsečíky těchto pavučin, to znamená středy stěn krychle, pospojoval rovněž pavoučími vlákny rovnoběžnými s hranami krychle. Tím vznikla (z vláken i drátů modelu) krychlová síť typu $2 \times 2 \times 2$ obsahující celkem 8 jednotkových krychlí a 27 mřížových bodů (tj. vrcholů jednotkových krychlí). Určete v této síti počet všech nejkratších cest, po kterých se může Albert dostat z vrcholu A do vrcholu G.

3. Uvažujme síť z úlohy 2. Kolika cestami se může Albert dostat z vrcholu A do mřížového bodu ve středu krychle, má-li přitom projít všemi mřížovými body a to každým právě jednou?

4. Letecká společnost zajišťuje spojení mezi každými dvěma z několika velkých měst. Následující rok chce zvýšit počet leteckých linek o 38 a to tak, že přibere určitý počet měst a opět bude zajišťovat spojení mezi každými dvěma v nově vzniklé soustavě měst. Stanovte, v kolika městech zajišťuje společnost spojení letos a kolik měst bude mít na starosti příští rok. (Letecké linky z A do B a z B do A nerozlišujeme – považujeme je za jedinou linku).

5. V jednom státě je soustava leteckých tratí utvořena tak, že každé město je spojeno leteckou linkou nejvýš se třemi dalšími městy a z libovolného města je možné letět do kteréhokoli dalšího s nejvýše jedním přestupem. Jaký největší počet měst může být v tomto státě?

6. Na každé z planet určitého planetárního systému je astronom, který pozoruje nejbližší planetu. Každé dvě vzdálenosti mezi planetami jsou různé. Dokažte, že když je počet planet lichý, pak některou planetu žádný z astronomů nepozoruje.

7. Je dáno n bodů, $n > 4$. Dokažte, že je možno tyto body spojit šipkami (tj. orientovanými čarami) tak, aby bylo možné se z každého bodu dostat

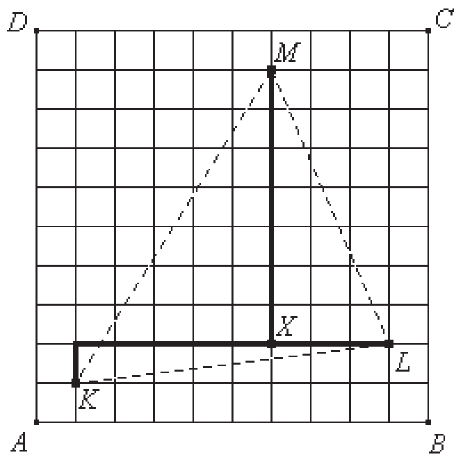
do kteréhokoliv jiného nejvýše po dvou šipkách. Postupovat můžeme jen ve směru příslušné šipky a každé dva body je možné spojit šipkou jen v jednom směru.

Řešení

1. Text úlohy. Pavouk Albert, rodný bratr pavouka Huberta, si jednou utkal pavučinu tvaru čtvercové sítě 10×10 jednotkových čtverců. Označme vrcholy sítě A, B, C, D a zaveďme si souřadnice tak, aby $A = [0, 0]$, $B = [10, 0]$, $C = [10, 10]$, $D = [0, 10]$. V místech $K = [1, 1]$, $L = [9, 2]$ a $M = [6, 9]$ se mu chytly mouchy. Namalujte si příslušný obrázek a určete, v jakém bodě X si má Albert zvolit stanoviště, aby součet délek cest z X do K, z X do L a z X do M byl minimální.

   Řešení úlohy.

   Obrázek 2.1:

   První způsob:
   Součet délek nejkratších cest po síti z libovolného bodu X do bodů K, L, M označíme $s(X)$. Je zřejmé, že hledaný bod X, pro nějž je $s(X)$ minimální, není vně trojúhelníka KLM. Je to proto jeden z 29 mřížových bodů v trojúhelníku KLM. Postupným vyšetřením všech 29 možností zjistíme, že nejmenší součet $s(X) = 16$ pro $X = [6; 2]$ (obr. 2.1).

Druhý způsob:
Hledáme bod $X = [x;y]$, kde $x \in \{0,1,2,\ldots,10\}$ a $y \in \{0,1,2,\ldots,10\}$, popřípadě se můžeme omezit jen na body v trojúhelníku KLM. Popíšeme nyní délky nejkratších cest z bodu X do ostatních bodů takto:

$$\begin{array}{lll} X \longrightarrow K & : s_K & = & |x-1|+|y-1| \\ X \longrightarrow L & : s_L & = & |x-9|+|y-2| \\ X \longrightarrow M & : s_M & = & |x-6|+|y-9|. \end{array}$$

Součet těchto délek s je tedy $s = s_K + s_L + s_M$ a po dosazení:

$$s = \underbrace{|x-1|+|x-9|+|x-6|}_{f(x)} + \underbrace{|y-1|+|y-2|+|y-9|}_{g(y)}.$$

Pokud do $f(x) = |x-1|+|x-6|+|x-9|$ postupně dosadíme hodnoty $x \in \{0,1,\ldots,10\}$ zjistíme, že

$$f(x) \geq f(6) = 8.$$

Analogicky do $g(y) = |y-1|+|y-2|+|y-9|$ dosadíme hodnoty $y \in \{0,1,\ldots,10\}$ a opět zjistíme, že

$$g(y) \geq g(2) = 8.$$

Pro všechny cesty tedy platí $s \geq f(x)+g(y)$, přičemž cesta nejkratší je $s_{\min} = f(6)+g(2) = 8+8 = 16 \qquad$ pro $(x = 6 \wedge y = 2) \Rightarrow X = [6;2]$.

Třetí způsob:
Spočívá v tom, že zvolíme libovolný mřížový bod v trojúhelníku KLM, označme ho X_0. Přesuneme-li se odtud do libovolného sousedního mřížového bodu X_1, bude

$$s(X_1) < s(X_0) \quad \text{nebo} \quad s(X_1) > s(X_0)$$

a to vždy o jeden jednotkový dílek. Záleží to na tom, zda se při přesouvání ke dvěma z vrcholů K, L, M přibližujeme a od jednoho vzdalujeme či naopak. Postupně se přesouváme z X_0 do X_1, X_2, atd. až do X_n tak, aby platilo

$$s(X_0) > s(X_1) > s(X_2) > \ldots > s(X_n),$$

kde $X_n = X$ je bod z něhož se již nelze přesouvat tak, aby se součet s dále zmenšoval.

Pro názornost si jednu konkrétní posloupnost ukážeme a postup hledání jednotlivých bodů zapíšeme pomocí tabulky. Zvolíme si například bod $X_0 = [4;3]$ (uvnitř $\triangle KLM$). Označíme s_K, s_L, s_M vzdálenosti zvoleného bodu k bodům K, L, M a s jejich součet.

V tabulce vidíme, že volba cesty není jednoznačná, ale vždy vede do jednoho bodu. Hledaným bodem je tedy bod $X = [6;2]$, pro který je s minimální.

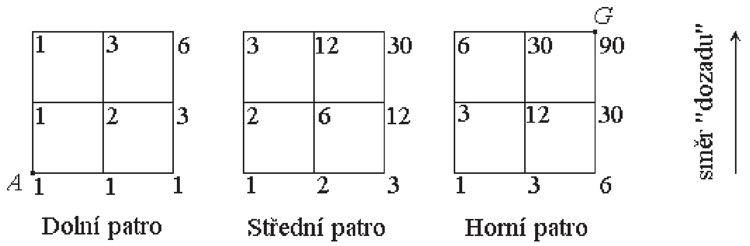
Bod	$[x;y]$	s_K	s_L	s_M	s
X_0	[4;3]	5	6	8	19
-	[3;3]	4	7	9	20
-	[4;2]	4	5	9	18
X_1	[5;3]	6	5	7	18
-	[4;4]	6	7	7	20
-	[5;2]	5	4	8	17
X_2	[6;3]	7	4	6	17
-	[5;4]	7	6	6	19
$X = X_3$	[6;2]	6	3	7	16
-	[7;3]	8	3	7	18
-	[6;4]	8	5	5	18
-	[7;2]	7	2	8	17

2. Text úlohy. Jindy pavouk Albert pospojoval středy hran drátěného modelu krychle $ABCDEFGH$ pavučinami rovnoběžnými s hranami krychle. Průsečíky těchto pavučin, to znamená středy stěn krychle, pospojoval rovněž pavoučími vlákny rovnoběžnými s hranami krychle. Tím vznikla (z vláken i drátů modelu) krychlová síť typu $2 \times 2 \times 2$ obsahující celkem 8 jednotkových krychlí a 27 mřížových bodů (tj. vrcholů jednotkových krychlí). Určete v této síti počet všech nejkratších cest, po kterých se může Albert dostat z vrcholu A do vrcholu G.

Řešení úlohy.

První způsob:

Obrázek 2.2:



V této úloze budeme předpokládat, že A je levý přední dolní vrchol modelu krychle.

Má-li jít Albert nejkratší cestou, musí se z každého mřížového bodu, v němž se právě nachází, přesunout vždy buď doprava nebo dozadu nebo nahoru. Do každého bodu M se tedy může dostat z levého nebo předního nebo spodního mřížového bodu. Počet všech možných cest do M je dán součtem počtů možných cest z těchto tří sousedních bodů. Úlohu můžeme vyřešit postupným vypsáním možností pro všechny mřížové body naší sítě. Vycházíme při tom z bodu A a abychom nemuseli kreslit prostorový obrázek, rozkreslíme situace v jednotlivých patrech krychlové sítě (obr. 2.2). Počet všech cest je 90.

Druhý způsob:
Označme souřadnice bodu $A = [0;0;0]$ a $G = [2;2;2]$. Nejkratší délka cesty z bodu A do bodu G je 6 jednotek délky (např. 2 jednotky doprava ve směru osy x, 2 jednotky dozadu ve směru osy y a dvě jednotky nahoru ve směru osy z).

Možné cesty můžeme vyjádřit jako uspořádané šestice kroků o 1 jednotku v daném směru:

$$\begin{array}{cccccc} x & x & y & y & z & z \\ x & y & z & z & y & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z & z & y & y & x & x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \rightarrow\ x & \text{je krok doprava o 1 jednotku} \\ \rightarrow\ y & \text{je krok dozadu o 1 jednotku} \\ \rightarrow\ z & \text{je krok nahoru o 1 jednotku} \end{array}$$

Počet všech možných cest p je počet permutací s opakováním šesti prvků trojího druhu:
2 prvky 1.druhu(x), 2 prvky 2.druhu(y) a 2 prvky 3.druhu(z).

$n_1 = n_2 = n_3 = 2, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 = 6$

$$p = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$$

Existuje tedy právě 90 nejkratších cest z bodu A do bodu G. Všechny tyto cesty mají délku 6 jednotek.

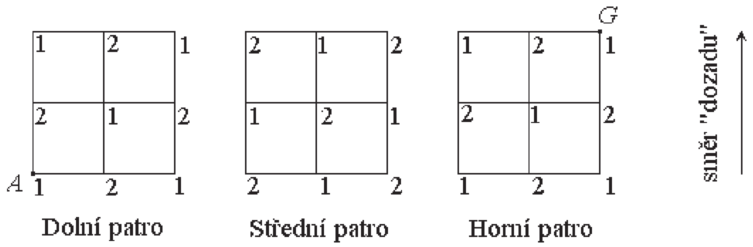
3. Text úlohy. Uvažujme síť z úlohy 2. Kolika cestami se může Albert dostat z vrcholu A do mřížového bodu ve středu krychle, má-li přitom projít všemi mřížovými body a to každým právě jednou?

Řešení úlohy.

První způsob:
Vrcholu A přiřadíme cifru 1, sousedním mřížovým bodům cifru 2 a dalším bodům postupně přiřazujeme cifry 1 a 2 tak, aby žádné dvě sousedící cifry nebyly stejné (obr. 2.3). Ať půjde Albert jakoukoli cestou, pravidelně střídá body typu 1 a 2. Projde-li každým mřížovým bodem právě jednou, nemůže nikdy skončit ve středu krychle, neboť tomuto bodu přísluší cifra 2 a bodů s touto cifrou je jen 13, kdežto bodů označených 1 je 14. Má-li projít všechny body, je nutné, aby začínal a končil v bodě s cifrou 1.

Druhý způsob:
Vychází-li pavouk z A a končí ve středu krychle, znamená to, že počet úseček, které vyleze nahoru je o 1 větší, než počet úseček, které sleze dolů. Celkový počet úseček zdolaných Albertem ve svislém směru je tedy lichý. Analogicky je lichý i počet úseků, které projde v předozadním i pravolevém směru. Jeho celková dráha se tedy skládá z lichého počtu úseků, které projde v předozadním i pravolevém směru. Celková dráha se tedy skládá

Obrázek 2.3:



z lichého počtu úseček. Na druhé straně, má-li projít všemi 27 body sítě, a to každým právě jednou, musí zdolat 26 úseček, tedy sudý počet. Cesta splňující dané podmínky neexistuje.

Třetí způsob:
Pavouk se může dostat zmíněným způsobem do středu krychle, jen když existuje cesta z vrcholu A přes ostatní vrcholy a středy hran a stěn, která prochází každým z těchto bodů právě jednou a končí ve středu hrany nebo stěny. (Z vrcholu totiž do středu krychle nevede přímo žádná úsečka.)
Na střed hrany se může dostat jen z vrcholu nebo středu stěny a naopak ze středu hrany jen na vrchol nebo střed stěny. Středů hran je však o 2 méně než vrcholů a středů stěn dohromady. Proto taková cesta neexistuje.

4. Text úlohy. Letecká společnost zajišťuje spojení mezi každými dvěma z několika velkých měst. Následující rok chce zvýšit počet leteckých linek o 38 a to tak, že přibere určitý počet měst a opět bude zajišťovat spojení mezi každými dvěma v nově vzniklé soustavě měst. Stanovte, v kolika městech zajišťuje společnost spojení letos a kolik měst bude mít na starosti příští rok. (Letecké linky z A do B a z B do A nerozlišujeme - považujeme je za jedinou linku).

Řešení úlohy. Označme po řadě n, k počet původních a přibývajících měst a zabývejme se nejprve původním stavem. Z jednoho města do zbývajících lze vést $n-1$ linek, to činí pro všech n měst celkem

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

linek, protože v součinu $n(n-1)$ je každá linka zahrnuta dvakrát.

Přidáme-li k měst, bude celkový počet linek

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

Odtud máme rovnici

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + 38.$$

Upravme ji na tvar

$$76 = k(2n+k-1) = 1 \cdot 76 = 2 \cdot 38 = 4 \cdot 19.$$

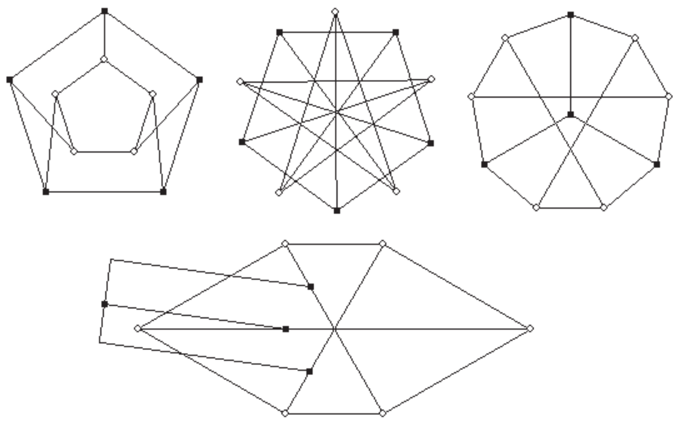
Jiné rozklady na součin dvou přirozených činitelů možné nejsou. Menší z činitelů zřejmě odpovídá číslu k, větší je roven výrazu $2n+k-1$. Snadno dále zjistíme, že vyhovuje jen $n = 38$ a $k = 1$ nebo $n = 8$ a $k = 4$.

Počet měst se tedy změnil z 38 na 39 nebo z 8 na 12.

5. Text úlohy. V jednom státě je soustava leteckých tratí utvořena tak, že každé město je spojeno leteckou linkou nejvýš se třemi dalšími městy a z libovolného města je možné letět do kteréhokoli dalšího s nejvýše jedním přestupem. Jaký největší počet měst může být v tomto státě?

Řešení úlohy. Z jednoho města, označme jej A, lze letět nejvýš do tří měst a z každého z těchto tří měst můžeme letět ještě do dvou dalších. Z těchto již do žádného nového města letět nelze, protože linku do A z nich přímo vybudovat nemůžeme. To znamená, že přidáním dalšího města by nebyla pro cestu z něj do A splněna podmínka nejvýše jednoho přestupu.

Obrázek 2.4:



Pro hledaný počet měst n platí: $n \leq 1+3+3 \cdot 2 = 10$. Největší počet měst je deset. Je ale ještě nutné dokázat, že letecká síť splňující dané podmínky pro 10 měst existuje. Na obrázku 2.4 jsou znázorněna různá schémata splňující podmínky úlohy. Představují všechna schémata tutéž soustavu leteckých tratí?

6. Text úlohy. Na každé z planet určitého planetárního systému je astronom, který pozoruje nejbližší planetu. Každé dvě vzdálenosti mezi planetami jsou různé. Dokažte, že když je počet planet lichý, pak některou planetu žádný z astronomů nepozoruje.

   Řešení úlohy. Nechť n je počet planet daného systému. Pro $n = 1$ nejsou splněny podmínky úlohy (astronom na této jediné planetě nemůže pozorovat nejbližší planetu systému). Tvrzení úlohy je sice pravdivé, ale stejně pravdivé by bylo tvrzení se stejnými předpoklady a opačným závěrem. Proto je rozumné (vzhledem k tomu, že n je liché) předpokládat $n \geq 3$.

   Nechť je tedy $n \geq 3$ a uvažujme dvě nejbližší planety. Astronomové na těchto planetách se pozorují navzájem. Pokud někdo ze zbývajících $n-2$ astronomů pozoruje některou z vybraných dvou planet, pak ostatních $n-3$ astronomů již nestačí pozorovat všech $n-2$ planet a tvrzení je dokázáno. Pozorují-li se však na zbývajících $n-2$ planetách navzájem, vybereme z nich opět dvě nejbližší a postup opakujeme. Tak pokračujeme dál, až v nejnepříznivějším případě zůstane na konci jediná planeta, kterou nikdo nepozoruje.

   Uvedený způsob řešení je důkaz matematickou indukcí. Lze jej provést i standardním postupem, při kterém tvrzení $V(n)$ dokazujeme tak, že dokážeme platnost:

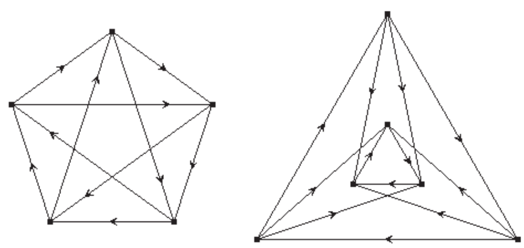
   1) $V(n)$ pro nejmenší n,
   2) $V(n) \Rightarrow (n+1)$.

7. Text úlohy. Je dáno n bodů, $n > 4$. Dokažte, že je možno tyto body spojit šipkami (tj. orientovanými čarami) tak, aby bylo možné se z každého bodu dostat do kteréhokoliv jiného nejvýše po dvou šipkách. Postupovat můžeme jen ve směru příslušné šipky a každé dva body je možné spojit šipkou jen v jednom směru.

   Řešení úlohy. Důkaz matematickou indukcí:

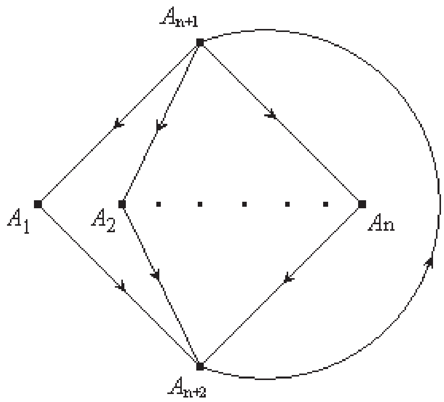
   (a) Pro $n = 5$ a $n = 6$ tvrzení platí (obr. 2.5)

Obrázek 2.5:



(b) Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n > 4$ přirozené a dokážeme, že tvrzení musí platit i pro $n + 2$ bodů. Prvních n z uvažovaných $n + 2$ bodů již podle indukčního předpokladu spojit umíme. Napojíme-li na těchto n bodů zbývající dva (obr. 2.6), zjistíme, že tvrzení platí. Tím je věta dokázána.

Obrázek 2.6:



2.3 3. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (jen pro první ročník)
   Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel. Spočítejte jejich součet s, víte-li, že když umažeme první a poslední číslo zmenší se součet o 21 a jestliže mazání ještě jednou zopakujeme bude součet $s/2$.

2. Existuje $2n + 1$ po sobě jdoucích celých čísel, pro která platí, že součet čtverců prvních $n + 1$ z nich, se rovná součtu čtverců zbývajících n čísel.

   (a) Napište aspoň jeden příklad takových čísel.

   (b) Určete všechny $2n + 1$ -členné posloupnosti celých čísel, které mají danou vlastnost.

3. Posloupnost $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ se nazývá Fibonacciova.

   (a) Určete její rekurentní vzorec.

   (b) Dokažte, že pro její členy a_i platí: $(a_n)^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$.

4. Někteří z Vás nedávno v domácím kole MO kategorie B dokazovali, že n kružnic rozdělí rovinu nejvýše na $n^2 - n + 2$ disjunktních částí.

   (a) Nakreslete příklad situace, kdy 6 kružnic rozděluje rovinu právě na 32 částí.

   (b) Rozhodněte, zda lze disjunktní políčka, na která je rovina rozdělena n kružnicemi, obarvit dvěma barvami tak, aby žádná dvě sousední políčka neměla stejnou barvu. (Za sousední políčka nepovažujeme ta políčka, jejichž hranice mají společný jen jediný bod).

5. V geometrické praxi někdy užíváme i "neklasické" konstrukce. Například v deskriptivní geometrii tzv. "proužkovou konstrukci elipsy" (viz. např. Menšík, Setzer, Špaček: Deskriptivní geometrie, příručka pro přípravu na vysokou školu, str.73–74). Eukleidovsky nepřípustným, ale prakticky proveditelným krokem je v ní to, že se na okraji rovného proužku papíru vyznačená úsečka XY předepsané délky zkusmo přikládá ke dvěma narýsovaným kolmicím o_1, o_2 tak, aby $X \in o_1$ a $Y \in o_2$. Na připojeném obrázku je podobným "přikládáním proužku papíru" s vyznačenou úsečkou XY vhodné délky, řešena jedna slavná úloha (v obecném případě eukleidovsky neřešitelná). Určete, o kterou úlohu jde a dokažte správnost výsledku.

   Na proužku vyznačíme $|XY| = r$. Přiložíme tak, aby hrana proužku procházela B. $X \in \overrightarrow{VA}$, $Y \in k$.

6. Dány tři, po dvou k sobě kolmé polopřímky $\overrightarrow{DX}$, $\overrightarrow{DY}$, $\overrightarrow{DZ}$.
   (a) Určete na polopřímkách postupně body A, C, H tak, aby v krychli $ABCDEFGH$ platilo, že vzdálenost hrany krychle od tělesové úhlopříčky s ní mimoběžné je 2 cm.
   (b) Když krychli $ABCDEFGH$ otočíme kolem osy spojující středy stěn $ABCD$ a $EFGH$ o $45°$, dostaneme krychli $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Sjednocením obou krychlí vznikne kolmý hranol s hvězdicovými podstavami. Spočítejte jeho objem.
7. Dokažte, že součet všech vnitřních úhlů všech stěn konvexního mnohostěnu je dvakrát větší než součet vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníka se stejným počtem vrcholů jako má mnohostěn.

Řešení

První dva příklady se týkaly skupiny (konečné posloupnosti) po sobě jdoucích celých čísel. Tato čísla jsou zřejmě rozložena symetricky kolem svého aritmetického průměru p. Pro lichý počet čísel je p rovno prostřednímu číslu a platí

$$p = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_2 + a_{n-1}}{2} = \frac{a_k + a_{n-(k-1)}}{2}.$$

Pro řešení tedy nebylo nutné znát aritmetické posloupnosti, ale bylo to vhodné.

1. Text úlohy. Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel. Spočítejte jejich součet s, víte-li, že když umažeme první a poslední číslo zmenší se součet o 21 a jestliže mazání ještě jednou zopakujeme bude součet $s/2$.

   Řešení úlohy. Posloupnost čísel můžeme vyjádřit například takto ($x \in \mathcal{N}$, $n \in \mathcal{N}$):

$$\begin{array}{rcl} a_1 &=& x \\ a_2 &=& x+1 \\ &\vdots& \\ a_{n-1} &=& x+(n-2) \\ a_n &=& x+(n-1) \\ \hline \end{array} \tag{2.7}$$

   Součet s je tedy

$$s = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

a po dosazení za a_1 a a_n dostaneme

$$s = \frac{(2x+n-1)\cdot n}{2}.$$

Ze zadání víme, že $a_1 + a_n = 21$, a z toho vyplývají rovnice

$$s = \frac{21\cdot n}{2} \quad \wedge \quad 2x+n = 22. \tag{2.8}$$

Nyní zjistíme součet s. Ze vztahů (2.7) plyne

$$a_1 + a_n = 2x+n-1$$

a

$$a_2 + a_{n-1} = (x+1)+x+(n-2) = 2x+n-1.$$

Odtud a ze tadání úlohy plyne

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_2 = 21.$$

Je tedy

$$s/2 = a_1 + a_2 + a_{n-1} + a_n = 42.$$

Součet čísel napsaných na tabuli je

$$s = 84. \tag{2.9}$$

Určíme ještě danou posloupnost. Řešením soustavy rovnic (2.8) a (2.9) dostaneme

$$84 = \tfrac{21n}{2}, \qquad \text{odtud} \qquad n = 8$$

a

$$2x+8 = 22, \qquad \text{neboli} \qquad x = 7.$$

Posloupnost čísel vypadá tudíž následovně:

$$a_1 = 7,\ a_2 = 8,\ a_3 = 9,\ a_4 = 10,\ a_5 = 11,\ a_6 = 12,\ a_7 = 13,\ a_8 = 14.$$

Zkouškou se lze snadno přesvědčit, že těchto osm po sobě jdoucích čísel splňuje všechny podmínky úlohy.

2. Text úlohy. Existuje $2n+1$ po sobě jdoucích celých čísel, pro která platí, že součet čtverců prvních $n+1$ z nich, se rovná součtu čtverců zbývajících n čísel.

   (a) Napište aspoň jeden příklad takových čísel.

   (b) Určete všechny $2n+1$ -členné posloupnosti celých čísel, které mají danou vlastnost.

Řešení úlohy. Máme $2n+1$ po sobě jdoucích celých čísel, z nichž prostřední označíme proměnnou x ($x \in \mathcal{Z};\ n \in \mathcal{N}$).

$$\begin{array}{ccccccccc}
x-n; & \dots; & x-2; & x-1; & x; & x+1; & x+2; & \dots; & x+n \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
a_1 & & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & & a_{2n+1}
\end{array}$$

$$\underbrace{a_1\ ;\ \dots\ ;\ a_{n-1}\ ;\ a_n\ ;\ a_{n+1}}_{(n+1)\text{ nejmenších}}\ ;\ \underbrace{a_{n+2}\ ;\ a_{n+3}\ ;\ \dots\ ;\ a_{2n+1}}_{n\text{ největších}}$$

Posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{2n+1}$ je rostoucí.

Podle podmínky úlohy platí:

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n+1}^2 &= a_{n+2}^2 + a_{n+3}^2 + \dots + a_{2n+1}^2 \\
\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 &= \textstyle\sum_{k=n+2}^{2n+1} a_k^2.
\end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned}
&(x-n)^2 + [x-(n-1)]^2 + \ \cdots\ + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = \\
&= (x+1)^2 + (x+2)^2 + \ \cdots\ + [x+(n-1)]^2 + (x+n)^2
\end{aligned}$$

a po úpravě

$$x^2 = 4x[\underbrace{1+2+3+\ \cdots\ +(n-1)+n}_{s_n}].$$

Součet řady v závorce označíme s_n

$$s_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned}
x^2 &= 4x \cdot \frac{n(n+1)}{2}, \\
x^2 &= 2x \cdot n \cdot (n+1)
\end{aligned}$$

a dostáváme tedy rovnici

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x \cdot n \cdot (n+1) &= 0, \\
x \cdot [x - 2n(n+1)] &= 0.
\end{aligned}$$

(a) $n \in \mathcal{N} \quad \wedge \quad x = 0$

pro $n = 1$ $\qquad -1, 0, +1$

pro $n = 2$ $\qquad -2, -1, 0, +1, +2$

$\vdots$

pro$(n \in \mathcal{N})$ $\quad -n, \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots, +n$

(b) $n \in \mathcal{N} \quad \wedge \quad x = 2n \cdot (n+1) = 2n^2 + 2n$

$$2n^2+n\ ,\ 2n^2+n+1\ ,\ \dots\ ,\ 2n^2+2n\ ,\ \dots\ ,\ 2n^2+3n-1\ ,\ 2n^2+3n$$

například:

pro $n = 1$ $\qquad 3, 4, 5$

pro $n = 2$ $\quad 10, 11, 12, 13, 14$
atd.

Závěr. Existuje nekonečně mnoho rostoucích posloupností $(2n+1)$ po sobě jdoucích celých čísel, které splňují požadovanou podmínku:

(a) $a_1 = -n \qquad a_{2n+1} = +n \qquad (n \in \mathcal{N})$,

(b) $a_1 = 2n^2 + n \qquad a_{2n+2} = 2n^2 + 3n \qquad (n \in \mathcal{N})$.

Posloupnosti tvaru (b) jsou dokonce posloupnosti po sobě jdoucích přirozených čísel.

3. Text úlohy. Posloupnost $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ se nazývá Fibonacciova.

(a) Určete její rekurentní vzorec.

(b) Dokažte, že pro její členy a_i platí: $(a_n)^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$.

Řešení úlohy. Označme:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \ldots \end{array}$$

(a) $a_1 = 0 \quad a_2 = 1$

$$\forall n \in \mathcal{N};\ n \geq 2: \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \tag{2.10}$$

$$\forall n \in \mathcal{N}: \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{2.11}$$

Rekurentní vzorce (2.10) a (2.11) jsou ekvivalentní.

(b) $\forall n \in \mathcal{N};\ n \geq 2: \quad (a_n)^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$

Důkaz provedeme matematickou indukcí:

Nejprve dokážeme, že věta platí pro $n = 2$, $(a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1)$:
L=$(a_2)^2 - a_1 \cdot a_3 = 1^2 - 0 \cdot 1 = 1$
P=$(-1)^2 = 1$
L=P
Rovnost tedy pro $n = 2$ platí.

Následně dokážeme indukční krok $(V(n) \Rightarrow V(n+1))$.
$\forall n \in \mathcal{N};\ n \geq 2:$

$$\underbrace{(a_n)^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n}_{\text{indukční předpoklad}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{a_{n+1}^2 - a_n \cdot a_{n+2}}_{V} = (-1)^{n+1}$$

Pokusíme se upravit výraz V na požadovaný tvar s využitím indukčního předpokladu a rekurentních vztahů (2.10) a (2.11).

$$\begin{aligned}
V &= a_{n+1}^2 - a_n \cdot \underbrace{a_{n+2}}_{(2.11)} = a_{n+1}^2 - a_n \cdot \underbrace{a_{n+1} + a_n}_{(2.11)} \\
&= (a_{n+1}^2 - a_n^2) - a_n \cdot a_{n+1} = \\
&= \underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{(2.10)} \cdot (a_{n+1} + a_n) - a_n \cdot a_{n+1} = \\
&= \underbrace{a_{n-1}}_{(2.10)} \cdot (a_{n+1} + a_n) - a_n \cdot a_{n+1} = \\
&= a_{n-1} \cdot a_{n+1} + (a_n \cdot a_{n-1} - a_n \cdot a_{n+1}) = \\
&= a_{n-1} \cdot a_{n+1} + a_n \cdot (\underbrace{a_{n-1} - a_{n+1}}_{(2.10)}) = \\
&= a_{n-1} \cdot a_{n+1} + a_n \cdot (\underbrace{-a_n}_{(2.10)}) = \\
&= a_{n-1} \cdot a_{n+1} - (a_n)^2 = \\
&= (-1) \cdot [(a_n)^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}] = \\
&= (-1) \cdot [(-1)^n] = (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Indukční krok je dokázán a věta platí pro každé $n \in \mathcal{N};\ n \geq 2$.

4. Text úlohy. Někteří z Vás nedávno v domácím kole MO kategorie B dokazovali, že n kružnic rozdělí rovinu nejvýše na $n^2 - n + 2$ disjunktních částí.

   (a) Nakreslete příklad situace, kdy 6 kružnic rozděluje rovinu právě na 32 částí.

   (b) Rozhodněte, zda lze disjunktní políčka, na která je rovina rozdělena n kružnicemi, obarvit dvěma barvami tak, aby žádná dvě sousední políčka, neměla stejnou barvu. (Za sousední políčka nepovažujeme ta políčka, jejichž hranice mají společný jen jediný bod).

   Řešení úlohy.

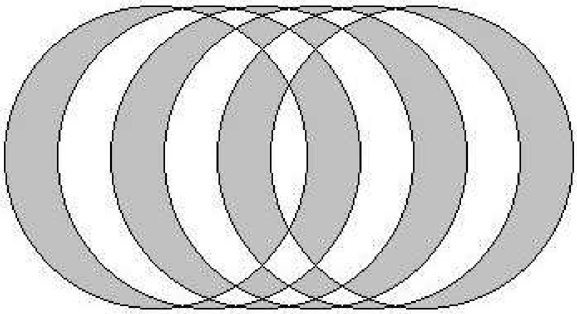
   (a) Na obrázcích 2.7 – 2.9 jsou uvedeny příklady situací, kdy 6 kružnic dělí rovinu na 32 disjunktních částí. Zároveň je dokázáno, že je můžeme obarvit dvěma barvami tak, aby sousední políčka neměla stejnou barvu. Průnikem sousedních políček je oblouk kružnice, průnikem nesousedních políček je bod (průsečík dvou kružnic).

   (b) Největší možný počet částí, ve kterých n kružnic rozdělí rovinu nastane, když se každé 2 kružnice protínají ve 2 bodech a žádné 3 kružnice se neprotínají v 1 bodě. Počet těchto částí je $a_n = n^2 - n + 2$.

   Dokážeme matematickou indukcí, že je lze vždy obarvit dvěma barvami tak, aby sousední políčka nebyla stejné barvy.

   Pro $n = 1$ obarvíme vnitřek kružnice tmavě a vnějšek bílou barvou

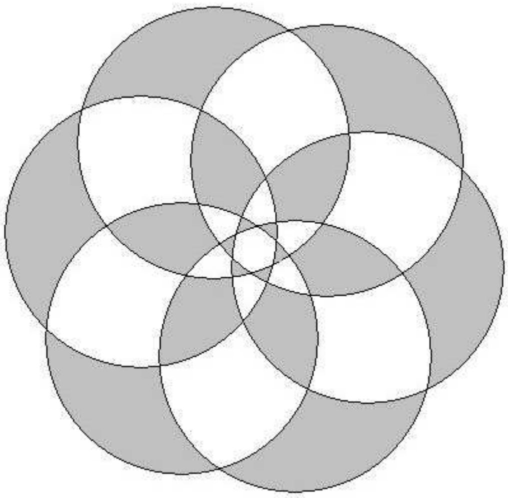
Obrázek 2.7:



a věta tedy pro $n = 1$ platí.

Předpokládejme, že a_n políček pro n kružnic lze obarvit tak, aby žádná dvě sousední políčka neměla stejnou barvu. Sestrojíme další kružnici k, která protne n předcházejících kružnic ve $2n$ bodech. Těchto $2n$ bodů na nové kružnici k určuje $2n$ disjunktních oblouků této kružnice. Tyto oblouky rozdělí $2n$ původních políček na 2 části a počet políček se zvýší o $2n$ ($\forall n \in \mathcal{N}: \ a_{n+1} = a_n + 2n$).

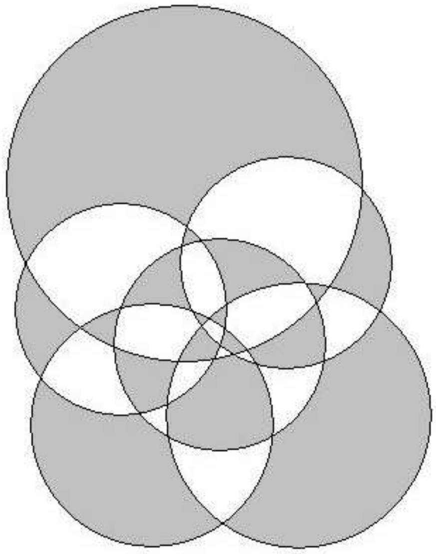
Obrázek 2.8:



Políčka vně nové kružnice k ponecháme obarvena stejně a políčka uvnitř této kružnice obarvíme opačnou barvou, než kterou měly v případě n kružnic. Potom nových $2n$ sousedních políček bude mít opačnou barvu a původní sousední políčka uvnitř i vně k také.

Z toho vyplývá, že pokud jde obarvit a_n políček, na které rovinu

Obrázek 2.9:



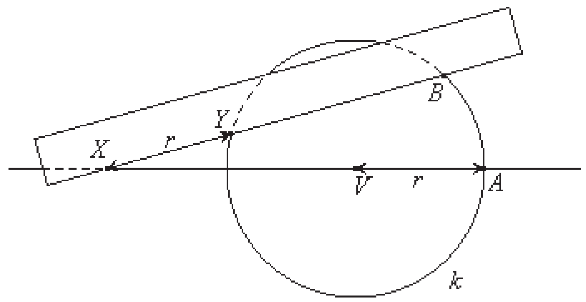
rozdělí n kružnic, pak jde obarvit i a_{n+1} políček, na které rovinu rozdělí $n+1$ kružnic. Tím je dokázán indukční krok a věta platí pro každé $n \in \mathcal{N}$.

5. Text úlohy. V geometrické praxi někdy užíváme i "neklasické" konstrukce. Například v deskriptivní geometrii tzv. "proužkovou konstrukci elipsy". Eukleidovsky nepřípustným, ale prakticky proveditelným krokem je v ní to, že se na okraji rovného proužku papíru vyznačená úsečka XY předepsané délky zkusmo přikládá ke dvěma narýsovaným kolmicím o_1, o_2 tak, aby $X \in o_1$ a $Y \in o_2$. Na obrázku 2.10 je podobným "přikládáním proužku papíru" s vyznačenou úsečkou XY vhodné délky, řešena jedna slavná úloha (v obecném případě eukleidovsky neřešitelná). Určete, o kterou úlohu jde a dokažte správnost výsledku.
   Na proužku vyznačíme $|XY| = r$. Přiložíme tak, aby hrana proužku procházela B. $X \in \overrightarrow{VA}, Y \in k$.

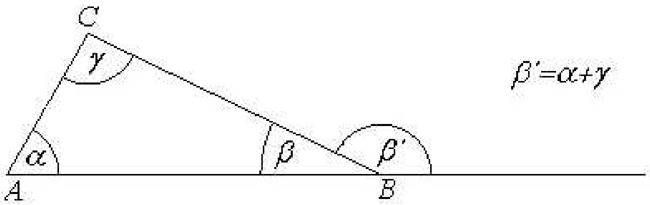
   Řešení úlohy. Jedná se o trisekci úhlu $\alpha = \angle AVB$. Úloha spočívá v sestrojení úhlu φ, jehož velikost je třetinou velikosti úhlu α ($\varphi = \alpha/3$).

   Připomeňme si nejprve větu o vnějším úhlu:
   V každém trojúhelníku je velikost vnějšího úhlu rovna součtu velikostí protějších dvou úhlů vnitřních (obr. 2.11).

Obrázek 2.10:



Obrázek 2.11:



Je totiž $180° = \alpha + \beta + \gamma$ a zároveň $\beta + \beta\,' = 180°$. Sečtením obou vztahů dostaneme $\beta\,' = \alpha + \beta$ a tím je věta dokázána.

Podle obr. 2.12 v trojúhelníku XVY platí:

$$|\angle VYB| = |\angle VXY| + |\angle XVY| = 2\varphi.$$

Podobně pro vnější úhel BVD rovnoramenného trojúhelníku BYV platí:

$$|\angle BVD| = |\angle VYB| + |\angle YBV| = 4\varphi.$$

Navíc jsou vrcholové úhly XVY a AVD shodné, a tak $|\angle AVD| = \varphi$. Z obrázku také vidíme, že

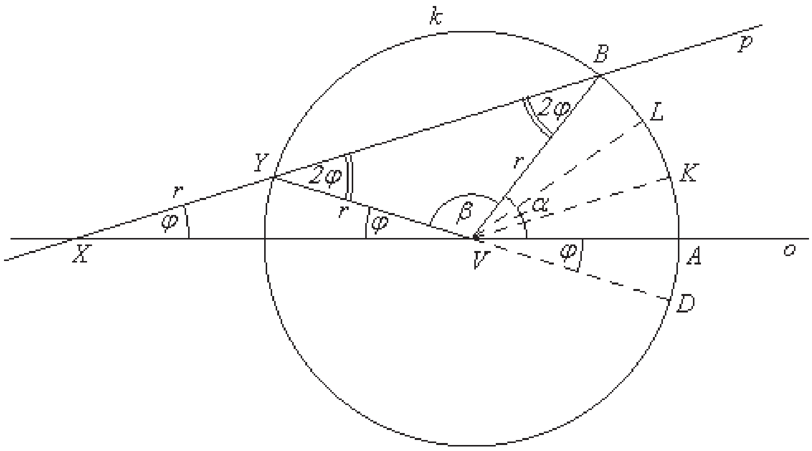
$$\alpha = |\angle AVB| = |\angle BVD| - |\angle AVD| = 4\varphi - \varphi,$$

tedy $\alpha = 3\varphi$.

Úhel AVD je třetinou úhlu AVB. Nanesením délky oblouku AD na oblouk AB získáme body K, L a polopřímky VK a VL, které dělí úhel AVB na třetiny. Konstrukce podle obrázku 2.12 je proveditelná jen když $4\varphi < 180°$, tedy pro $\alpha < 135°$.

Pro větší úhly provedeme nejprve trisekci přilehlého úhlu BVZ (viz. obr. 2.13) výše popsanou konstrukcí.

Obrázek 2.12:

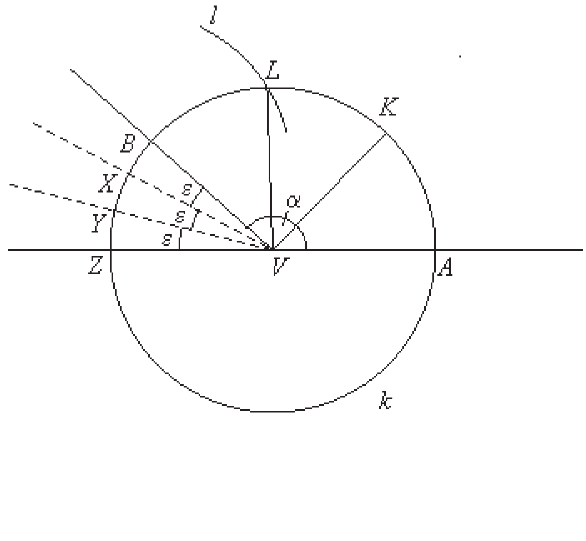


Je-li $|\angle BVZ| = \beta$, pak z podmínky $\alpha + \beta = 180°$ po dosazení $\alpha = 3\varphi$ a $\beta = 3\epsilon$ dostaneme $\epsilon + \varphi = 60°$.

Při označení podle obr. 2.13 sestrojíme bod L jako průsečík kružnice $k(V, r)$ s kružnicí $l(X, r)$ (v polovině BVK). Bod K je pak průsečík kružnice k s osou úhlu AVL a platí

$$\varphi = |\angle AVK| = |\angle KVL| = |\angle LVB| = \frac{\alpha}{3}.$$

Obrázek 2.13:



6. Text úlohy. Dány tři, po dvou k sobě kolmé polopřímky $\overrightarrow{DX}$, $\overrightarrow{DY}$, $\overrightarrow{DZ}$.

   (a) Určete na nich postupně body A, C, H, aby v krychli $ABCDEFGH$ platilo, že vzdálenost hrany krychle od tělesové úhlopříčky s ní mimoběžné je 2 cm.

   (b) Když krychli $ABCDEFGH$ otočíme kolem osy spojující středy stěn $ABCD$ a $EFGH$ o 45°, dostaneme krychli $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Sjednocením obou krychlí vznikne kolmý hranol s hvězdicovými podstavami. Spočítejte jeho objem.

Řešení úlohy. Nejprve připomeneme několik poznatků ze stereometrie.

Jsou-li p, q mimoběžky, můžeme libovolným bodem K přímky p vést rovnoběžku q' s přímkou q a libovolným bodem L přímky q rovnoběžku p' s přímkou p (obr. 2.14 (a)). Různoběžky p', q určují rovinu ρ a různoběžky p, q' určují rovinu σ, přičemž $\rho \parallel \sigma$.

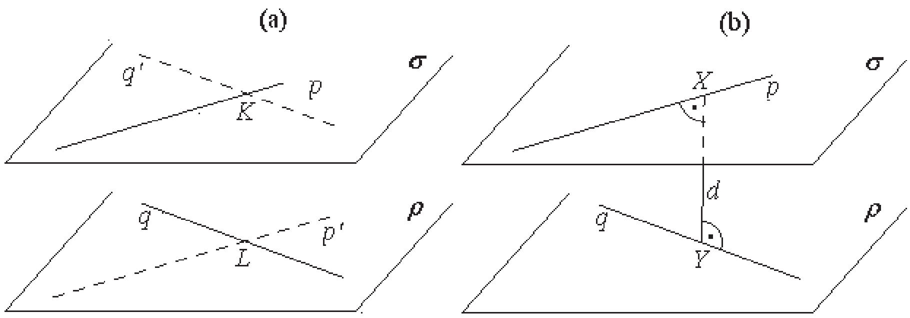
Příčka mimoběžek p, q je definována jako úsečka XY, kde $X \in p$ a $Y \in q$. Vzdálenost mimoběžek p, q se pak definuje jako délka jejich nejkratší příčky

$$d = \min\{|XY|\,,\ X \in p \wedge Y \in q\}.$$

Příčka odpovídající nejkratší vzdálenosti je zřejmě kolmá k oběma mimoběžkám, jejichž vzdálenost je rovna vzdálenosti rovin ρ a σ (obr. 2.14 (b))

$$d = |p, q| = |\rho, \sigma|\,.$$

Obrázek 2.14:



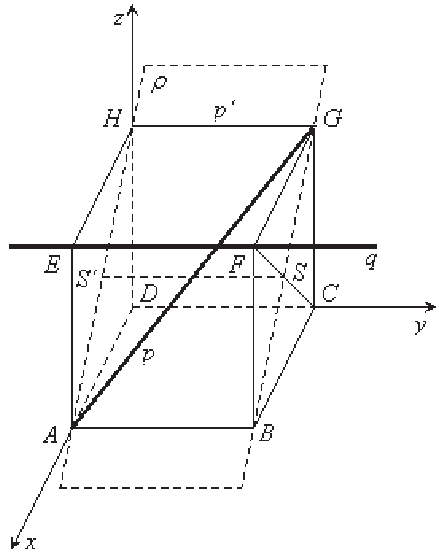
Vlastní řešení:

   (a) Zvolíme-li $p = \leftrightarrow AG$ a $q = \leftrightarrow EF$, je p' například přímka GH a ρ je rovina ABG (obr. 2.15). Stačí najít přímku kolmou k rovině ρ a zároveň k přímce q.

   Přímka je kolmá k rovnině, pokud je kolmá alespoň k dvěma různoběžným přímkám z této rovniny. Označme S střed FC a S' střed AH

(jsou to zároveň po řadě středy stěn $BCGF$ a $ADHE$). FS je zřejmě kolmá k přímkám BG a SS', které leží v rovině ρ. Vycházíme při tom z vlastností krychle a kolmostí úhlopříček ve čtverci.

Obrázek 2.15:



Vzdálenost v přímek p, q je tedy rovna velikosti úsečky FS

$$v(\leftrightarrow EF; \leftrightarrow AG) = |FS| = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Ze zadání plyne

$$v = 2 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2} \text{ cm},$$

vzdálenost a bodů A, C, H od bodu D bude tedy $a = 2\sqrt{2}$ cm.

(b) Pro výpočet objemu musíme spočítat délku x, z obrázku 2.16 plyne

$$a = x + x\sqrt{2} + x = 2x + x\sqrt{2} = x \cdot (2 + \sqrt{2}),$$

$$\text{odtud} \qquad x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\text{a po úpravě:} \qquad x = \frac{a \cdot (2 - \sqrt{2})}{2}.$$

Obsah podstavy (hvězdice) označíme S_p. Platí

$$S_p = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{NCT}.$$

Postupně dostáváme

$$S_p \;=\; a^2 + 4\cdot\frac{x^2}{2} \;=\; a^2 + 2x^2 \;=\; a^2 + 2\cdot\left[\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}\right]^2 \;=$$

$$=\; a^2 + \frac{a^2(2-\sqrt{2})^2}{2} \;=\; a^2\cdot(1+\frac{6-4\sqrt{2}}{2}) \;=\; a^2\cdot(4-2\sqrt{2}).$$

Je tedy $\qquad S_p = 2a^2\cdot(2-\sqrt{2}).$

Tělesová výška kolmého hranolu $v = a$. Nyní máme vše potřebné k výpočtu objemu V:

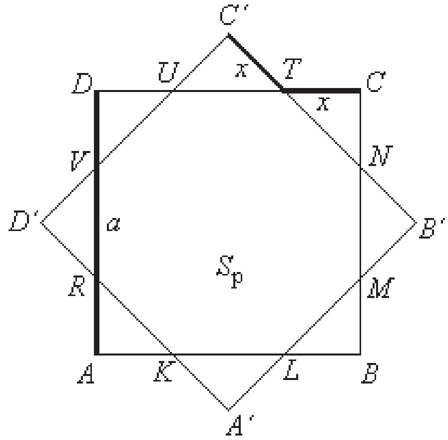
$$V \;=\; S_p\cdot v \;=\; 2a^2\cdot(2-\sqrt{2})\cdot a \;=\; 2a^3\cdot(2-\sqrt{2}).$$

Dosazením $a = 2\sqrt{2}$ cm dostáváme

$$V \;=\; 2\cdot(2\sqrt{2})^3\cdot(2-\sqrt{2}) \;=\; 32\cdot\sqrt{2}\cdot(2-\sqrt{2}) \;=\; 32\cdot(2\sqrt{2}-2),$$

$$V \;=\; 64\cdot(\sqrt{2}-1)\ \mathrm{cm}^3.$$

Obrázek 2.16:



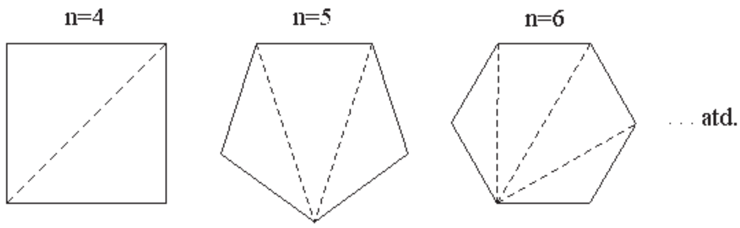
7. Text úlohy. Dokažte, že součet všech vnitřních úhlů všech stěn konvexního mnohostěnu je dvakrát větší než součet vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníka se stejným počtem vrcholů jako má mnohostěn.

   Řešení úlohy. Každý konvexní mnohostěn má s stěn, v vrcholů a h hran. Pro tyto počty platí Eulerova věta

$$v + s = h + 2.$$

Stěny jsou obecně konvexní n-úhelníky ($n \geq 3$). Pro $n \geq 4$ můžeme tyto stěny $(n-3)$-mi úhlopříčkami vedenými z jednoho vrcholu stěny rozdělit na $(n-2)$ trojúhelníků. Zahrneme-li dodatečně tyto stěnové úhlopříčky mezi hrany mnohostěnu, bude mít toto těleso h' hran ($h' > h$), s' pouze trojúhelníkových stěn ($s' > s$) a stejný počet vrcholů ($v' = v$). Na obr. 2.17 můžeme vidět dělení stěny na trojúhelníky.

Obrázek 2.17:



Protože se opět jedná o konvexní útvar, platí Eulerova věta i pro tyto počty v', s', h':

$$v' + s' = h' + 2 \tag{2.12}$$

$$v' = v \tag{2.13}$$

$$3s' = 2h' \tag{2.14}$$

(Trojúhelníková stěna má 3 hrany, každá hrana je průnikem 2 stěn.)

Z (2.14) dostaneme:

$$h' = \frac{3s'}{2} \tag{2.15}$$

a poté (2.15) dosadíme do (2.12):

$$v' + s' = \frac{3s'}{2} + 2,$$

$$v' = v = \frac{s'}{2} + 2. \tag{2.16}$$

Nyní můžeme vyjádřit a porovnat zadané součty úhlů v zadání úlohy:

$x \ldots$ součet všech vnitřních úhlů všech stěn mnohostěnu = součet všech vnitřních úhlů s' trojúhelníkových stěn.

$$x = s' \cdot 180°$$

$y \ldots$ součet všech vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku, který má v vrcholů ($v = s'/2 + 2$).

$$y = (v-2) \cdot 180° = (\frac{s'}{2} + 2 - 2) \cdot 180° = \frac{s'}{2} \cdot 180° = \frac{s' \cdot 180°}{2} = \frac{x}{2}$$

Z toho tedy plyne $x = 2y$.

Závěr. Součet všech vnitřních úhlů všech stěn konvexního mnohostěnu je dvakrát větší než součet vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku se stejným počtem vrcholů.

Kapitola 3

Ročník 1994/95

3.1 1. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Zadání

1. (jen pro první ročník)
   Kolik je třeba vzít sčítanců řady $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$, aby se součet rovnal trojcifernému číslu zapsanému třemi stejnými číslicemi?

2. Rozhodněte, zda v některém řádku Pascalova trojúhelníku lze najít (bezprostředně za sebou) tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

3. Pro důležité datum (den d v měsíci m) platí: $12d + 31m = 581$. Určete toto datum!

4. Určete všechny trojice celých nezáporných čísel x, y, z, pro která platí: $x! + y! = z!$.

5. Určete všechny trojice celých nezáporných čísel x, y, z, pro která platí: $x! \cdot y! = z!$.

6. Určete všechny trojice celých čísel x, y, z, pro která platí: $x+y+z = xyz$.

7. Určete všechny trojice celých čísel x, y, z, pro která platí: $2^x + 1 = y^z$.

   Poznámka: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \qquad 0! = 1$

Řešení

1. Text úlohy. Kolik je třeba vzít sčítanců řady $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$, aby se součet rovnal trojcifernému číslu zapsanému třemi stejnými číslicemi?

   Řešení úlohy. Sečtením vztahů
   $$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & = & s, \\ n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 & = & s \end{array}$$
   obdržíme
   $$n \cdot (n+1) = 2s$$
   a odtud vzorec pro součet prvních n přirozených čísel
   $$s = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$
   Potom
   $$2s = n \cdot (n+1) = 2 \cdot 111c, \qquad \text{kde } c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$
   Odtud 111 dělí $n \cdot (n+1)$, ale $111 = 3 \cdot 37$, kde 37 je prvočíslo. Z toho vyplývá, že n nebo $n+1$ je násobek 37. Vyzkoušíme tedy možnosti
   $$\frac{36 \cdot 37}{2} = 666 \quad \text{a} \quad \frac{37 \cdot 38}{2} = 703$$
   (ostatní součiny jsou už příliš vysoké). Získali jsme tedy jediné řešení $n = 36$. Po sečtení 36 sčítanců dané řady dostaneme součet 666.

2. Text úlohy. Rozhodněte, zda v některém řádku Pascalova trojúhelníku lze najít (bezprostředně za sebou) tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

   Řešení úlohy. Vzhledem k tomu, že jde o existenční výrok, stačí pro kladnou odpověď najít jediný příklad trojčlenné posloupnosti typu $a - d, a, a + d$. V osmém řádku Pascalova trojúhelníku lze po jeho vypsání najít (vzhledem k symetrii řádku) hned dvě: 7, 21, 35 a 35, 21, 7, jak vidíme z obr. 3.1.

   Obrázek 3.1:
   $$\begin{array}{ccccccccccccccc}
    & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
    & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
    & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
    & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
    & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
    & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
    & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
   1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
   \end{array}$$

Úplné řešení vede k rovnici

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k},$$

kterou upravíme na tvar

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k-1}.$$

Čísla v trojici musí růst nebo klesat, řádek tedy musí mít nejméně 5 čísel a tak rovnici řešíme pro $n \geq 4$. Kombinaci čísla vyjádříme pomocí faktoriálů

$$\frac{2n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

a vhodným krácením dostaneme rovnici

$$2(k+1)(n-k+1)) = (n-k)(n-k+1) + k(k+1),$$

která je, jak vidíme po úpravě, kvadratická

$$4k^2 - 4nk + (n^2 - n - 2) = 0.$$

Ta je pro přirozená n řešitelná, protože $D = 16n^2 - 16(n^2 - n - 2) = 16(n+2)$ je kladné,

$$k_1 = \frac{n + \sqrt{n+2}}{2}, \ k_2 = \frac{n - \sqrt{n+2}}{2}.$$

Úloha má nekonečně mnoho řešení. Dvě řešení k_1, k_2 získáme pro každé celé $t \geq 3$, zvolíme-li $n = t^2 - 2$.

Tedy pro tato celá t lze v (t^2-1)-ním řádku najít dvě symetricky položené trojice dané vlastnosti. Pro $n = 3$ jsou to právě trojice $7,\ 21,\ 35$ a $35,\ 21,\ 7$ v osmém řádku. Dalšími řešeními jsou trojice $1001,\ 2002,\ 3003$ a opačná trojice $3003,\ 2002,\ 1001$ v patnáctém řádku. Další řešení jsou například ve 24., 35., 48.řádku.

3. Text úlohy. Pro důležité datum (den d v měsíci m) platí: $12d + 31m = 581$. Určete toto datum!

Řešení úlohy.

První způsob.

Vzhledem k tomu, že m může nabýt jen dvanácti hodnot, lze postupně dosazovat a řešit jednotlivé rovnice. Vylučujeme ta řešení, která nemohou být datem. Výsledek je 20.11. Výpočet lze zkrátit, poznáme-li, že m musí být liché.

Druhý způsob (rychlejší).

581 je číslo, které při dělení dvanácti dává zbytek 5. Podle textu úlohy lze proto číslo $12d + 31m - (12d + 24m) = 7m$ vyjádřit zápisem $12k + 5$, kde k je celé. Vzhledem k podmínce $1 \leq m \leq 12$ platí $7 \leq 7m = 12k + 5 \leq 84$.

$7m \in \{17, 29, 41, 53, 65, 77\}$ a tedy $7m = 77 \quad \Rightarrow \quad m = 11$
a $d = (581 - 31 \cdot 11)/12 = 20$. Hledané datum je 20.11.

Třetí způsob (řešíme jako diofantovskou rovnici substituční metodou).

Z rovnice $12d + 31m = 581$ vyjádříme d

$$d = 48 - 2m + \frac{5 - 7m}{12}.$$

Po substituci $(5 - 7m)/12 = t$ dostaneme

$$d = 48 - 2m + t. \tag{3.1}$$

Protože $t = d + 2m - 48$ a čísla d, $2m$, 48 jsou celá (dokonce přirozená), musí být i t celé číslo. Navíc ze substitučního vztahu $t = (5 - 7m)/12$ lze vyjádřit $m = (5 - 12t)/7$, neboli

$$m = -t + r, \tag{3.2}$$

kde $r = (5 - 5t)/7$ je opět celé číslo ($r = m + t$, kde m, t jsou celá čísla).
Z (3.2) vyjádříme

$$t = 1 - r - s, \tag{3.3}$$

kde $s = 2r/5$, tedy $2r = 5s$.

Z posledního vztahu je vidět, že s musí být sudé celé číslo, tedy $s = 2u$ a $r = 5s/2 = 5u$. Dosazením do (4.7) zjistíme $t = 1 - 7u$, dále dosazením do vztahů (4.6) a (3.2) dostáváme:

$$m = -1 + 7u + 5u = -1 + 12u, \qquad d = 48 - 2m + t = 51 - 31u.$$

Vidíme, že celočíselná řešení rovnice $12d + 31m = 581$ jsou
$m = -1 + 12$,
$d = 51 - 31u$, kde $u \in \mathcal{Z}$.

Podmínce $m \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ vyhovuje jen situace, kdy $u = 1$.
Tedy $m = 11$ a $d = 51 - 31 = 20$. Datum bylo 20.11.

4. Text úlohy. Určete všechny trojice celých nezáporných čísel x, y, z, pro která platí: $x! + y! = z!$.

Řešení úlohy. Zřejmě platí, že z je největší z hledaných čísel a musí být nejméně 2.

Pro $z = 2$ platí $x! + y! = 2 \;\Rightarrow\; x! = y! = 1$ a tedy dostáváme čtyři řešení:

x	y	z
0	0	2
1	0	2
0	1	2
1	1	2

Ukážeme ještě, že jiná řešení daná rovnice nemá. Předpokládejme, že $z > 2$ a $x \leq y < z$.

Potom $z! = x! + y! \leq 2y!$, ale $z! \geq (y+1)!$, musí tedy být $2y! \geq (y+1)!$, což nastane jedině když $2y! = (y+1)y!$, tzn. když $y = 1$ a $z = 2$ a to je spor.

5. Text úlohy. Určete všechny trojice celých nezáporných čísel x, y, z, pro která platí: $x! \cdot y! = z!$.

Řešení úlohy.

(a) Hledejme nejprve řešení pro $x! = y! = 1$. Pak $z! = 1$ a řešení jsou:
$[0;\ 0;\ 0]$, $[0;\ 0;\ 1]$, $[0;\ 1;\ 0]$, $[1;\ 0;\ 0]$,
$[0;\ 1;\ 1]$, $[1;\ 0;\ 1]$, $[1;\ 1;\ 0]$, $[1;\ 1;\ 1]$.

(b) $x! = 1$ ale $y! > 1$ nebo naopak. Pak $y! = z!$ a řešeními jsou pro libovolné přirozené n všechny trojice typu $[0;\ n;\ n]$, $[1;\ n;\ n]$, respektive $[n;\ 0;\ n]$, $[n;\ 1;\ n]$.

(c) $1 < x \leq y$ (obdobně pro $1 < y \leq x$).
Snadno najdeme jeden typ řešení:
Položme $x! = n$, pak $z! = n \cdot y!$ a stačí požadovat $n = y + 1$.
Odtud $z = x!$, $y = x! - 1$ a obdržíme trojici $[x;\ x! - 1;\ x!]$, pro každé celé $x > 1$.
Zkouška: $L(x) = x! \cdot (x! - 1)! = (x!)!$, $P(x) = (x!)!$
Obdobně obdržíme trojici $[y! - 1;\ y;\ y!]$ pro každé celé $y > 1$.

Zkoumejme ještě situaci $x! = (y+1) \cdot (y+2) \cdot (y+3) \cdots z$, kdy lze některý z faktoriálů vyjádřit jako součin po sobě jdoucích čísel, z nichž nejmenší je větší nebo rovno 3.

$$4! = 24 \text{ nelze}, \quad 5! = 120 = 4 \cdot 5 \cdot 6, \quad 6! = 720 = 8 \cdot 9 \cdot 10,$$

$$7! = 5040 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10, \quad 8! = 40320 \text{ nelze atd.}$$

Obdržíme řešení $5! \cdot 3! = 6!$, $6! \cdot 7! = 10!$, $7! \cdot 6! = 10!$, některá z nich jsou nová. Tato řešení neumím obecně zapsat.

Rovnice má nekonečně mnoho řešení viz. (b) a (c) a osm triviálních řešení vypsaných v (a).

6. Text úlohy. Určete všechny trojice celých čísel x, y, z, pro která platí: $x + y + z = xyz$.

Řešení úlohy.

(a) Některé z čísel je 0, například:
$x = 0$ pak $y + z = 0$ tedy y a z jsou opačná celá čísla.
Vyhovují všechny trojice čísel $[0;\ n;\ -n]$, $[0;\ -n;\ n]$, $[n;\ 0;\ -n]$, $[-n;\ 0;\ n]$, $[n;\ -n;\ 0]$, $[-n;\ n;\ 0]$, pro každé nezáporné celé n.

(b) Předpokládejme, že x, y, z jsou nenulová a nemají stejná znaménka.
Pokud se omezíme na případ $x \le y \le z$ dostáváme jen dvě možnosti.
$x < 0,\ y > 0,\ z > 0$ potom

$$-|x| < -|x| + y + z \;=\; x + y + z \;=\; xyz \;=\; -|x|\,yz \;\le\; -|x| \quad \text{spor}$$

nebo $x < 0,\ y < 0,\ z > 0$ potom

$$z > -|x| - |y| + z \;=\; xyz \;=\; |xy|\,z \;\ge\; z \quad \text{spor.}$$

Závěr. x, y, z mají stejné znaménko.

Hledejme nejprve kladná $x \le y \le z$:
$x = y = z$ nevyhovuje, protože $3x = x^3$ nemá celé řešení, potom $3z > x + y + z = xyz$ a tedy $3 > xy$, odtud

$$\text{pro } x = 1,\ y = 1 \text{ je } 2 + z = z, \quad z \text{ neexistuje}$$

$$\text{a pro } x = 1,\ y = 2 \text{ dostaneme } 3 + z = 2z \ \text{ a } z = 3.$$

Získáváme řešení $[1;\ 2;\ 3]$ a dalších pět řešení získáme záměnou pořadí: $[1;\ 3;\ 2]$, $[2;\ 1;\ 3]$, $[3;\ 1;\ 2]$, $[2;\ 3;\ 1]$, $[3;\ 2;\ 1]$.

Jsou-li x, y, z záporná, platí pro jejich absolutní hodnoty a, b, c $a + b + c = abc$, a, b, c jsou kladná a dle předchozího jsou to právě čísla 1, 2, 3 v libovolném pořadí.

Řešení.
$[-1;\ -2;\ -3]$, $[-1;\ -3;\ -2]$, $[-2;\ -1;\ -3]$,
$[-3;\ -1;\ -2]$, $[-2;\ -3;\ -1]$, $[-3;\ -2;\ -1]$.

Úloha má nekonečně mnoho řešení. Seřadíme-li čísla x, y, z podle velikosti, vyhovují trojice $[-n;\ 0;\ n]$, $[1;\ 2;\ 3]$, $[-3;\ -2;\ -1]$.

7. Text úlohy. Určete všechny trojice celých čísel x, y, z, pro která platí: $2^x + 1 = y^z$.

Řešení úlohy. Zřejmě y je různé od 0.

(a) Předpokládejme, že y je kladné:
Pokud položíme $z = 0$, $2^x + 1 = 1$ nevyhovuje.

Pro $z = 1$ je $2^x + 1 = y$, po úpravě $2^x = y - 1$, dostáváme tedy

$$\text{pro} \begin{cases} x = 0 & , \quad y = 2 \\ x = n & , \quad y = 2^n + 1, \text{ kde } n \in \mathcal{N} \\ x = -n & , \quad y \text{ není celé, nevyhovuje.} \end{cases}$$

Zvolme $z > 1$, potom pro
$x = 0$, $2 = y^z$ nevyhovují žádná celá y, z, kde $z > 1$.

Pokud $x > 0$, $2^x + 1 = y^z$ z toho $2^x = y^z - 1 =$

$$= (y-1)(y^{z-1} + y^{z-2} + \cdots + y + 1).$$

Odtud: $y - 1$ je mocnina dvou (1 nebo sudé číslo), $y = 2$ nevyhovuje a proto $y = 2^n + 1$ $n \in \mathcal{N}$.

Tedy y je liché a proto musí z být sudé (ve druhé závorce sčítáme právě z lichých čísel a musíme dostat sudý výsledek).

Položme $z = 2n$, dostaneme $2^x = y^{2n} - 1 = (y^n - 1)(y^n + 1)$. Potom $y^n - 1 = 2$ (jinak by číslo o 2 větší nemohlo být také mocninou dvou):

$$y^n = 3 \quad \text{z toho} \quad y = 3,\ n = 1 \quad \text{a odtud} \quad x = 3,\ y = 3,\ z = 2.$$

(b) Protože $2^x + 1$ je kladné, může být y záporné pouze pro sudé z. K řešením $[0;\ 2;\ 1]$, $[n;\ 2^n{+}1;\ 1]$, $[3;\ 3;\ 2]$ dostáváme ještě $[3;\ -3;\ 2]$.

3.2 2. série

Sérii sestavil Petr Sokol

Zadání

1. (pouze pro první ročníky)
   Jednou před dovolenou si paní Makosová postěžovala svému muži: "Na podzim jsem zhubla o 25%, v zimě jsem přibrala na váze o 20%, na jaře zhubla o 10% a v létě opět přibrala na váze 20%." Poraďte panu Makosovi co má odpovědět své ženě. Zhubla nebo přibrala na váze? (Pokuste se najít co nejjednodušší zápis řešení.)

2. Matematik Makos si každý rok velmi pečlivě zapisoval své měsíční příjmy a vydání. Zjistil, že každých pět měsíců jdoucích za sebou výdaje převyšují příjmy. Když však sečetl příjmy a výdaje za celý rok oddychl si, protože zjistil, že příjmy jsou vyšší než výdaje. Je to možné?

3. Jako každá praktická žena si přibalila paní Makosová na dovolenou několik potřebných věcí a přitom zjistila, že lehátko váží stejně jako brašna a obraz dohromady a rovněž stejně jako kufr a krabice dohromady. Kufr, krabice a koš jsou stejně těžké, přičemž každá z věcí je těžší než pes. Při vykládání zavazadel paní tvrdila, že pes společně s brašnou i pes společně s obrazem je těžší než lehátko. Rozhodněte, zda tvrzení paní Makosové je správné.

4. Jednou šel náš matematik domů proti proudu potoka rychlostí o polovinu větší než rychlost proudu. V jedné ruce držel šálu, ve druhé klacek. Protože byl roztržitý, místo klacku zahodil do potoka šálu. Brzy zjistil svůj omyl, hodil do potoka klacek a běžel nazpět rychlostí dvakrát větší než šel původně. Když dohnal šálu, okamžitě ji vylovil, otočil se a šel svou původní rychlostí domu. Za 40 sekund od doby, kdy vylovil šálu minul klacek, který plaval proti němu. O kolik sekund dříve by přišel domů, kdyby se takto nezdržel?

5. Jednou, když se slovutný Makos díval na hodiny, napadla ho zajímavá myšlenka. Můžeme rozmístit všech dvanáct čísel ciferníku po obvodě tak, aby pro libovolná tři čísla a, b, c jdoucí za sebou platilo, že číslo $b^2 - ac$ je dělitelné 13?

6. Je dán obdélník $ABCD$. V něm zvolíme libovolný bod M a jím vedeme dvě přímky rovnoběžně s jeho stranami. Ty rozdělí obdélník na čtyři menší obdélníky. Ukažte, že alespoň jeden z obdélníků, jehož vrcholy obsahují buď body A, M nebo body C, M, nemá plochu větší než $1/4$ plochy celého obdélníka.

7. Je známo, že čísla a, b, c, d, e, jsou nezáporná čísla a platí pro ně rovnost $a + b + c + d + e = 1$. Najděte největší hodnotu výrazu $ab + bc + cd + de$.

Řešení

1. Text úlohy. Jednou před dovolenou si paní Makosová postěžovala svému muži: "Na podzim jsem zhubla o 25%, v zimě jsem přibrala na váze o 20%, na jaře zhubla o 10% a v létě opět přibrala na váze 20%." Poraďte panu Makosovi co má odpovědět své ženě. Zhubla nebo přibrala na váze? (Pokuste se najít co nejjednodušší zápis řešení.)

   Řešení úlohy. Označme původní hmotnost m. Potom platí pro jednotlivá období:
   $$m \ \cdot \ 0,75 \ \cdot \ 1,2 \ \cdot \ 0,9 \ \cdot \ 1,2 \ = \ 0,972\, m.$$
   Paní Makosovou můžeme tedy potěšit, protože zhubla.

2. Text úlohy. Matematik Makos si každý rok velmi pečlivě zapisoval své měsíční příjmy a vydání. Zjistil, že každých pět měsíců jdoucích za sebou výdaje převyšují příjmy. Když však sečetl příjmy a výdaje za celý rok oddychl si, protože zjistil, že příjmy jsou vyšší než výdaje. Je to možné?

   Řešení úlohy. Zvolme si nějakou jednotku, např. tisíce Kč. Potom součty příjmů a výdajů v jednotlivých měsících roku mohou tvořit např. tuto posloupnost:
   $$2;\ \ 2;\ \ 2;\ \ 2;\ -9;\ \ 2;\ \ 2;\ \ 2;\ \ 2;\ -9;\ \ 2;\ \ 2.$$
   Odtud vidíme, že součet příjmů a výdajů za celý rok je
   $$s \ = \ 2+2+2+2-9+2+2+2+2-9+2+2 \ = \ 2.$$
   Profesor Makos by tedy v tomto případě měl za rok zisk 2000 Kč, a tak je možné, aby za každých pět po sobě jdoucích měsíců výdaje převyšovaly příjmy.

3. Text úlohy. Jako každá praktická žena si přibalila paní Makosová na dovolenou několik potřebných věcí a přitom zjistila, že lehátko váží stejně jako brašna a obraz dohromady a rovněž stejně jako kufr a krabice dohromady. Kufr, krabice a koš jsou stejně těžké, přičemž každá z věcí je těžší než pes. Při vykládání zavazadel paní tvrdila, že pes společně s brašnou i pes společně s obrazem je těžší než lehátko. Rozhodněte, zda tvrzení paní Makosové je správné.

   Řešení úlohy. Písmenem L označme lehátko, písmenem B brašnu, O obraz, P psa a K kufr, krabici i koš.
   Z textu plyne, že platí
   $$L = B + O = 2K, \quad K > P.$$

Paní tvrdí, že platí

$$P + B > L \quad \wedge \quad P + O > L.$$

Sečtením posledních dvou nerovností dostaneme

$$2P + B + O > 2L \quad \text{z toho} \quad 2P > L,$$

potom lze psát

$$2K = B + O = L < 2P < 2K$$

a to je spor. Paní Makosová nemá pravdu.

4. Text úlohy. Jednou šel náš matematik domů proti proudu potoka rychlostí o polovinu větší než rychlost proudu. V jedné ruce držel šálu, ve druhé klacek. Protože byl roztržitý, místo klacku zahodil do potoka šálu. Brzy zjistil svůj omyl, hodil do potoka klacek a běžel nazpět rychlostí dvakrát větší než šel původně. Když dohnal šálu, okamžitě ji vylovil, otočil se a šel svou původní rychlostí domu. Za 40 sekund od doby, kdy vylovil šálu minul klacek, který plaval proti němu. O kolik sekund dříve by přišel domů, kdyby se takto nezdržel?

   Řešení úlohy. Označme rychlost proudu v, pak dostaneme pro rychlost chůze $1,5v$ a pro rychlost běhu $3v$. Nechť matematik běžel zpět t sekund, klacek plaval $(40 + t)$ s. Vzdálenost, kterou běžel nazpět je stejná jako vzdálenost, kterou urazil klacek do setkání s ním plus vzdálenost, kterou mu šel naproti. Potom lze sestavit tuto rovnici:

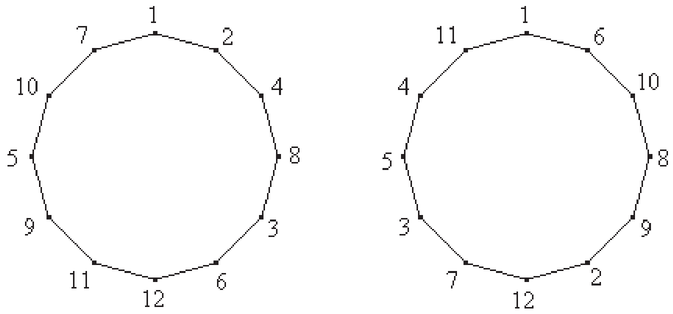
$$3vt = 1,5v \cdot 40 + v(t + 40).$$

   Odtud $t = 50$ s. Dobu, kterou Makos ztratil, když běžel zpět je 50 s, po přičtení času, který potřeboval k překonání stejné vzdálenosti rychostí dvakrát menší, dostaneme celkem 150 s. Kdyby se matematik nezdržel, přišel by domů o 150 s dříve.

5. Text úlohy. Jednou, když se slovutný Makos díval na hodiny, napadla ho zajímavá myšlenka. Můžeme rozmístit všech dvanáct čísel ciferníku po obvodě tak, aby pro libovolná tři čísla a, b, c jdoucí za sebou platilo, že číslo $b^2 - ac$ je dělitelné 13?

   Řešení úlohy. Odpověď je ano. Na obrázku 3.2 jsou dva příklady takového rozmístění čísel.

Obrázek 3.2:

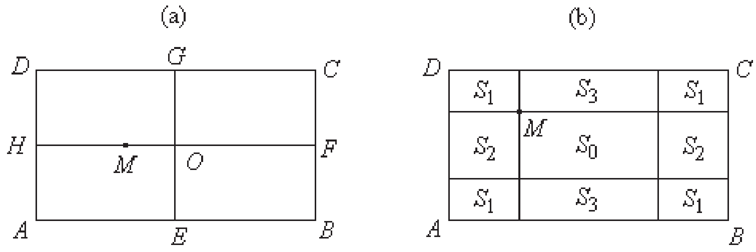


6. Text úlohy. Je dán obdélník $ABCD$. V něm zvolíme libovolný bod M a jím vedeme dvě přímky rovnoběžně s jeho stranami. Ty rozdělí obdélník na čtyři menší obdélníky. Ukažte, že alespoň jeden z obdélníků, jehož vrcholy obsahují buď body A, M nebo body C, M, nemá plochu větší než $1/4$ plochy celého obdélníka.

   Řešení úlohy. Středem O obdélníka vedeme přímky rovnoběžné s jeho stranami. Vzniknou čtyři shodné obdélníky $AEOH$, $EBFO$, $OFCG$ a $HOGD$ (obr. 3.3 (a)) s obsahem $1/4\ S$, kde S je obsah daného obdélníka. Leží-li bod M uvnitř některé z úseček HF a EG nebo uvnitř některého z obdélníků $AEOH$ a $OFCH$, je tvrzení zřejmé.

   Je-li uvnitř obdélníka $HOGD$ nebo $EBFO$, vedeme jím dvě rovnoběžky se

Obrázek 3.3:



stranami obdélníka a další dvě souměrné dle středu O obdélníka $ABCD$. Dostaneme celkem devět obdélníků (obr. 3.3 (b)). Čtyři mají plochu S_1, dva S_2, dva S_3 a jeden plochu S_0. Musíme ukázat, že S_1+S_2 nebo S_1+S_3 je menší nebo rovno $S/4$. Platí:

$$4S_1 + 2S_2 + 2S_3 = S - S_0 < S \quad \text{a odtud} \quad 2S_1 + S_2 + S_3 < S/2.$$

Poslední vztah upravíme na tvar

$$(S_1 + S_2) + (S_1 + S_3) < S/2,$$

v němž součet uvnitř jedné ze závorek musí být nutně menší než $S/4$. Tím je důkaz proveden.

7. Text úlohy. Je známo, že čísla a, b, c, d, e, jsou nezáporná čísla a platí pro ně rovnost $a + b + c + d + e = 1$. Najděte největší hodnotu výrazu $ab + bc + cd + de$.

Řešení úlohy. Největší hodnota je $1/4$ např. pro $a = b = 1/2$, $c = d = e = 0$.

$$ab + bc + cd + de \leq (a + c + e)(b + d),$$

označme $a + c + e = u$, $b + d = v$. Ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostaneme:

$$ab + bc + cd + de \leq (a + c + e)(b + d) = uv \leq \frac{(u + v)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Rovnost nastává, právě když $u = v$, to znamená když

$$a + c + e = b + d = \frac{1}{2}.$$

Výše uvedená volba této podmínce vyhovuje.

3.3 3. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (jen pro první ročníky)
   Jednou se matematik Makos vypravil na Matějskou pouť do Prahy. Když se povozil na ruském kole a na střelnici si vystřelil pěknou opičku, upoutal jeho pozornost muž, který vyzýval kolemjdoucí ke hře. Stál před malým stolečkem, jehož deska měla tvar čtverce a vyvolával: ”Položím na tento stolek desetikorunovou minci. Pak vy položíte svoji desetikorunu, po vás položím další desetikorunu já, pak opět vy atd. Mince se nesmí klást na sebe, ani přes sebe. Prohrává ten, komu již nezbude místo na položení další mince. Výherce bere všechny mince na stolku.”
   ”To ovšem není poctivá hra”, zvolal rozhořčeně Makos.
   ”Když budete dodržovat jistou strategii, nemá šanci váš spoluhráč vyhrát!”
   Popište postup, který zajišťuje tomuto pouťovému podnikateli výhru.

2. O kus dál objevil Makos muže pod cedulí s nápisem MISTER FAIR. Pan Fair lákal lidi ke hře a právě je seznamoval s pravidly: ”Můžete vyhrát až 200 korun, ale prohrát nejvýš 20. Budeme střídavě pokládat na očíslovaná políčka (obr. 3.4) po jedné minci. Já budu klást padesátikorunové mince, vy pětikoruny. Na žádném políčku nesmí být více než jedna mince. Vyhrává ten, který svými mincemi jako první obsadí tři políčka se součtem 15. Výherce získává všechny mince, které byly položeny. V případě remízy si každý vezme zpět svoje mince. Jak vidíte, při této hře se nedá švindlovat. S pokládáním mincí začnete vy. Tím, že jste první na tahu, máte větší šanci na výhru!”
   Makos hru chvíli pozoroval. Všiml si, že občas někdo vyhraje 100 korun, pak ale několik desítek dalších hráčů prohrávalo po 20 korunách. Po chvilce přemýšlení dospěl k názoru, že pan Fair může vyhrát, kdykoli se mu zachce. Pokud bude první na tahu na začátku hry. Objevíte i vy vítěznou strategii pana Fair?

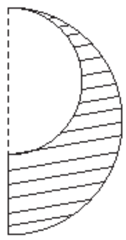
Obrázek 3.4:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

3. Když si Makos prohlížel obrázky na maringotkách pojízdného zvěřince, uviděl na jednom z nich zvíře, jehož jeden roh, byl ohraničen dvěma půlkružnicemi (obr. 3.5).
   ”Je zajímavé, že plocha tohoto obrazce je dána jen délkou tětivy většího

půlkruhu, která je rovnoběžná se společným průměrem kružnic a je tečnou k menší kružnici", pomyslel si Makos. Určete vyšrafovanou plochu na obrázku 3.5, je-li délka zmíněné tětivy d.

Obrázek 3.5:



4. Z pouti jel pan Makos metrem do středu města. Při výstupu ze stanice použil eskalátoru (pohyblivých schodů). Eskalátor se pohyboval rovnoměrně vzhůru a Makos během tohoto pohybu vyšlapal nahoru celkem 20 schodů. Tam spatřil revizora a uvědomil si, že jízdenku z roztržitosti vyhodil dole na nástupišti do koše. Obrátil se a utíkal po eskalátoru dolů proti pohybu schodů. Uběhl celkem 140 schodů, ale trvalo mu to dvakrát déle než cesta nahoru. Lístek z koše šťastně vylovil a když se chtěl vrátit zjistil, že se mezitím eskalátor porouchal. Kolik schodů musel Makos vystoupat po nepohyblivém porouchaném eskalátoru?

   Po příhodě s metrem se Makos prošel historickou částí Prahy a nakonec jel domů vlakem. Ve vlaku potkal svého přítele Kokose, rovněž matematika. Chvíli si oba přátelé povídali a pak si pro ukrácení dlouhé chvíle vymýšleli úlohy z elementární geometrie a řešili je.

5. Kokosova úloha:
   V trojúhelníku ABC jsou umístěny 3 shodné kružnice tak, že všechny tři mají společný jediný vnitřní bod trojúhelníka a navíc se první kružnice dotýká stran AB, AC, druhá kružnice se dotýká stran AB, BC a třetí stran AC, BC. Dokažte, že průměr každé z těchto kružnic je harmonickým průměrem poloměrů kružnice opsané a vepsané trojúhelníku ABC.
   Poznámka: Harmonický průměr čísel x, y je číslo $2xy/(x+y)$.

6. Makosova úloha:
   Dokažte, že pro libovolný bod M trojúhelníka ABC platí:

$$a|AM| + b|BM| + c|CM| \geq 4S,$$

   kde S je obsah trojúhelníka, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

7. Podstavou trojbokého jehlanu $ABCV$ je rovnostranný trojúhelník ABC, boční hrany jehlanu jsou stejně dlouhé. Uvnitř hrany AV je zvolen bod M tak, že $|AM| : |VM| = 3 : 4$. Bodem M vedeme takovou rovinu, aby průnikem jehlanu s touto rovinou byl rovnostranný trojúhelník KLM.

   Určete obsah trojúhelníka KLM, znáte-li vzdálenost v vrcholu V od roviny podstavy a vzdálenost h vrcholu V od hrany BC.

   Řešení by mělo obsahovat i vaše vyjádření ke sporu obou matematiků:

   Makos i Kokos shodně tvrdili, že úloze vyhovují dva obsahy. První vyšel oběma stejně, kdežto druhý měl podle Kokose hodnotu

$$S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{784} \frac{(4h^2 - 3v^2)^2}{h^2 - v^2}$$

   a podle Makose hodnotu

$$S_2 = \frac{48\sqrt{3}}{49}(h^2 - v^2)\frac{(4h^2 - 3v^2)^2}{(9v^2 - 8h^2)^2}.$$

   Málem se kvůli tomu rozešli ve zlém. Každý z nich tvrdil, že ve svém výpočtu nenalézá chybu. Nakonec se přece jen dohodli a ještě chvilku počítali.

   Určete, jak je to s obsahem S_2.

Řešení

1. Text úlohy. Jednou se matematik Makos vypravil na Matějskou pouť do Prahy. Když se povozil na ruském kole a na střelnici si vystřelil pěknou opičku, upoutal jeho pozornost muž, který vyzýval kolemjdoucí ke hře. Stál před malým stolečkem, jehož deska měla tvar čtverce a vyvolával: "Položím na tento stolek desetikorunovou minci. Pak vy položíte svoji desetikorunu, po vás položím další desetikorunu já, pak opět vy atd. Mince se nesmí klást na sebe, ani přes sebe. Prohrává ten, komu již nezbude místo na položení další mince. Výherce bere všechny mince na stolku."
   "To ovšem není poctivá hra", zvolal rozhořčeně Makos.
   "Když budete dodržovat jistou strategii, nemá šanci váš spoluhráč vyhrát!"
   Popište postup, který zajišťuje tomuto pouťovému podnikateli výhru.

   Řešení úlohy. Vítězná strategie využívá středové souměrnosti. Muž položí při prvním tahu svou minci přesně do středu čtvercové desky stolku, pak klade další mince do míst středově souměrných k polohám mincí položených protihráčem. Má-li protihráč volné místo k položení mince, musí existovat i středově souměrné neobsazené místo. Nemá-li protihráč žádné volné místo, prohrává.

2. Text úlohy. O kus dál objevil Makos muže pod cedulí s nápisem MISTER FAIR. Pan Fair lákal lidi ke hře a právě je seznamoval s pravidly: "Můžete vyhrát až 200 korun, ale prohrát nejvýš 20. Budeme střídavě pokládat na očíslovaná políčka (obr.3.4) po jedné minci. Já budu klást padesátikorunové mince, vy pětikoruny. Na žádném políčku nesmí být více než jedna mince. Vyhrává ten, který svými mincemi jako první obsadí tři políčka se součtem 15. Výherce získává všechny mince, které byly položeny. V případě remízy si každý vezme zpět svoje mince. Jak vidíte, při této hře se nedá švindlovat. S pokládáním mincí začnete vy. Tím, že jste první na tahu, máte větší šanci na výhru!"
   Makos hru chvíli pozoroval. Všiml si, že občas někdo vyhraje 100 korun, pak ale několik desítek dalších hráčů prohrávalo po 20 korunách. Po chvilce přemýšlení dospěl k názoru, že pan Fair může vyhrát, kdykoli se mu zachce, pokud bude první na tahu na začátku hry. Objevíte i vy vítěznou strategii pana Fair?

   Řešení úlohy. Mister Fair si ve své mysli představuje čísla uspořádaná do magického čtverce podle obr. 3.6 a). Uspořádání má tu vlastnost, že součty ve všech řádcích, sloupcích a na úhlopříčkách jsou stejné a jsou rovny číslu 15. Fair se tedy snažil obsadit svými mincemi řádek, sloupec nebo úhlopříčku čtverce. Je zřejmé, že vítězná strategie staví na obsazování rohových políček, ve kterých se setkává řádek, sloupec i úhlopříčka.

   Fair byl opravdu velkorysý, když nechával svým protihráčům možnost prvního tahu. Jen jejich neznalost strategie mu umožňovala poměrně často nad nimi vyhrát. Pokud jej někdo porazil a chtěl s ním hrát znovu, vyhrazoval si Fair právo prvního tahu, neboť jen za této podmínky měl naprostou jistotu, že svého protivníka porazí.

Předpokládejme tedy, že Fair je první na tahu a ukažme si jeho vítěznou strategii. Protože se jedná v podstatě o obsazení řádku, sloupce nebo úhlopříčky Fairovými mincemi, znázorníme si průběh hry vždy na čtverci $3\ x\ 3$, který má na počátku prázdná políčka a do nějž budeme znázorňovat jednotlivé tahy. Fairovy tahy číslicemi $(1,\ 2,\ldots)$ označujícími pořadí jeho tahů a protihráčovy tahy obdobně malými písmeny abecedy.

Fair vždy začíná v nějakém rohu. Bez újmy na obecnosti budeme jeho první tah zapisovat do levého horního rohu, neboť ostatní možnosti dostaneme otáčením čtverce kolem jeho středu o $90°$.

Na obr. 3.6 b) je situace, kdy protihráč pokládá svou první minci do sousedního rohu (druhá možnost je osově souměrná podle úhlopříčky). Uvědomte si, že další průběh hry již nemůže vypadat jinak a ať položí protihráč svou minci c kamkoliv, Fair vyhraje. Další obrázky představují zbývající situace. Přesvěčte se, že tím jsou všechny možnosti vyčerpány.

Obrázek 3.6:

a)

2	9	4
7	5	3
6	1	8

b)

1		a
	b	
3		2

1		3
	b	
2		a

1	a	
b	3	
2		

1	b	2
	3	a

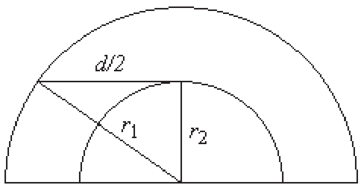
1		3
	a	
b		2

3. Text úlohy. Když si Makos prohlížel obrázky na maringotkách pojízdného zvěřince, uviděl na jednom z nich zvíře, jehož jeden roh, byl ohraničen dvěma půlkružnicemi (obr. 3.5).
"Je zajímavé, že plocha tohoto obrazce je dána jen délkou tětivy většího půlkruhu, která je rovnoběžná se společným průměrem kružnic a je tečnou k menší kružnici", pomyslel si Makos. Určete vyšrafovanou plochu na obrázku 3.5, je-li délka zmíněné tětivy d.

Řešení úlohy. Plocha obrazce, ani délka d dané tětivy se nezmění, posunemeli menší půlkruh tak, aby oba půlkruhy byly soustředné. Podle obr. 3.7 pak platí:

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot (r_1^2 - r_2^2) = \frac{\pi}{8} \cdot d^2.$$

Obrázek 3.7:



4. Text úlohy. Z pouti jel pan Makos metrem do středu města. Při výstupu ze stanice použil eskalátoru (pohyblivých schodů). Eskalátor se pohyboval rovnoměrně vzhůru a Makos během tohoto pohybu vyšlapal nahoru celkem 20 schodů. Tam spatřil revizora a uvědomil si, že jízdenku z roztržitosti vyhodil dole na nástupišti do koše. Obrátil se a utíkal po eskalátoru dolů proti pohybu schodů. Uběhl celkem 140 schodů, ale trvalo mu to dvakrát déle než cesta nahoru. Lístek z koše šťastně vylovil a když se chtěl vrátit zjistil, že se mezitím eskalátor porouchal. Kolik schodů musel Makos vystoupat po nepohyblivém porouchaném eskalátoru?

   Řešení úlohy. Nahoru vyšlapal Makos 20 schodů a eskalátor se v tomtéž směru posunul o n schodů. Dolů ušel Makos 140 schodů a eskalátor se posunul v opačném směru o $2n$ schodů, neboť pohyb trval dvakrát déle. Celkový počet schodů (stojícího eskalátoru) je tedy

$$x = 20 + n = 140 - 2n.$$

   Odtud $n = 40$ a $x = 60$. Makos musel vystoupat 60 schodů.

5. Text úlohy. V trojúhelníku ABC jsou umístěny 3 shodné kružnice tak, že všechny tři mají společný jediný vnitřní bod trojúhelníka a navíc se první kružnice dotýká stran AB, AC, druhá kružnice se dotýká stran AB, BC a třetí stran AC, BC. Dokažte, že průměr každé z těchto kružnic je harmonickým průměrem poloměrů kružnice opsané a vepsané trojúhelníku ABC.
   Poznámka: Harmonický průměr čísel x, y je číslo $2xy/(x+y)$.

   Řešení úlohy. Středy kružnic označíme A_1, B_1, C_1 v tom pořadí, jak jsou jmenovány v zadání úlohy. Velikost jejich poloměru nechť je x. Poloměry kružnice opsané a vepsané trojúhelníku ABC označíme po řadě R a r.

Přímky A_1B_1 a AB jsou rovnoběžné a jejich vzdálenost je x. Totéž platí pro dvojice přímek B_1C_1, BC a A_1C_1, AC. Navíc se přímky AA_1, BB_1 a CC_1 protínají ve středu S kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a ABC jsou tedy stejnolehlé (střed stejnolehlosti je bod S) a podíl poloměrů kružnic jim vepsaných je stejný jako podíl poloměrů kružnic jim opsaných:

$$\frac{r-x}{r} = \frac{x}{R},$$

odtud zjistíme:

$$2x = \frac{2rR}{r+R}.$$

6. Text úlohy. Dokažte, že pro libovolný bod M trojúhelníka ABC platí:

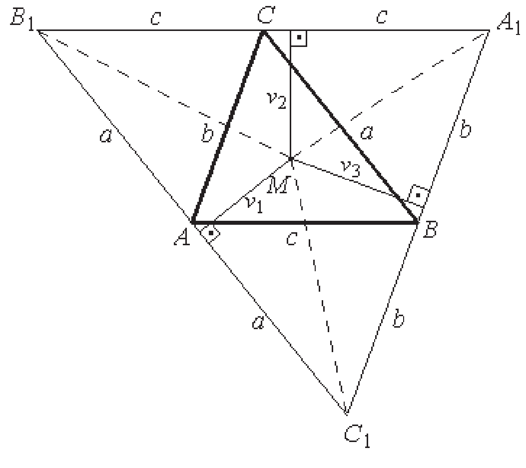
$$a|AM| + b|BM| + c|CM| \geq 4S,$$

kde S je obsah trojúhelníka, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Řešení úlohy. Rovnoběžky vedené body A, B, C a protějšími stranami trojúhelníka, vytvářejí trojúhelník $A_1B_1C_1$, který je podobný trojúhelníku ABC a má dvojnásobné rozměry (obr. 3.8). Označme pořadě v_1, v_2, v_3 vzdálenosti bodu M od stran B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Pro obsahy S, S_1 trojúhelníků ABC, $A_1B_1C_1$ platí:

$$\begin{aligned} 4S &= S_1 = S_{B_1C_1M} + S_{C_1A_1M} + S_{A_1B_1M} = \\ &= av_1 + bv_2 + cv_3 \leq a\cdot|AM| + b\cdot|BM| + c\cdot|CM|\,. \end{aligned}$$

Obrázek 3.8:



7. Text úlohy. Podstavou trojbokého jehlanu $ABCV$ je rovnostranný trojúhelník ABC, boční hrany jehlanu jsou stejně dlouhé. Uvnitř hrany AV je zvolen bod M tak, že $|AM| : |VM| = 3 : 4$. Bodem M vedeme takovou rovinu, aby průnikem jehlanu s touto rovinou byl rovnostranný trojúhelník KLM.
Určete obsah trojúhelníka KLM, znáte-li vzdálenost v vrcholu V od roviny podstavy a vzdálenost h vrcholu V od hrany BC.
Řešení by mělo obsahovat i vaše vyjádření ke sporu obou matematiků: Makos i Kokos shodně tvrdili, že úloze vyhovují dva obsahy. První vyšel oběma stejně, kdežto druhý měl podle Kokose hodnotu

$$S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{784} \frac{(4h^2 - 3v^2)^2}{h^2 - v^2}$$

a podle Makose hodnotu

$$S_2 = \frac{48\sqrt{3}}{49}(h^2 - v^2)\frac{(4h^2 - 3v^2)^2}{(9v^2 - 8h^2)^2}.$$

Málem se kvůli tomu rozešli ve zlém. Každý z nich tvrdil, že ve svém výpočtu nenalézá chybu. Nakonec se přece jen dohodli a ještě chvilku počítali.
Určete, jak je to s obsahem S_2.

Řešení úlohy. Nechť N je střed hrany BC a Q je těžiště trojúhelníka ABC (a zároveň pata výšky jehlanu). První řešení dostáváme, je-li rovina $\rho = KLM$ rovnoběžná s podstavou ABC (obr. 3.9).

Jehlany $MKLV$, $ABCV$ jsou podobné a koeficient jejich podobnosti je $|MV| : |AV| = 4/7$. Označme obsahy jejich podstav S_1 a S_0, $|AB| = a$. Platí

$$S_1 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot S_0.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků ABN, VNQ na obr. 3.9 dále zjistíme

$$3x = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \sqrt{(h^2 - v^2)}$$

a

$$S_0 = a \cdot \frac{3x}{2} = 3\sqrt{3} \cdot (h^2 - v^2). \tag{3.4}$$

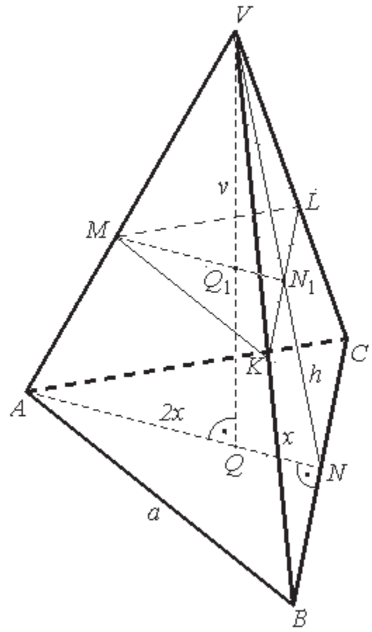
Je tedy

$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} \cdot (h^2 - v^2)$$

a v tom se Makos i Kokos shodovali.

Při hledání dalšího řešení, je třeba si uvědomit, že rovnostranný trojúhelník K_2L_2M vznikne také pootočením roviny ρ z předchozí situace kolem přímky jdoucí bodem M kolmo na rovinu ANV do polohy ρ_2, ve které je

Obrázek 3.9:



úhel přímky AV s rovinou ρ i ρ_2 stejný. Přitom mohou nastat dvě různé situace znázorněné na obrázcích 3.10 (a) a 3.10 (b). Zabývejme se nejdříve situací na obr. 3.10 (a) a zaveďme délky

$$z = |AV| = \sqrt{(4x^2 + v^2)} = \sqrt{(4h^2 - 3v^2)}, \quad t = |N_2M| = \frac{3z^2}{28x}.$$

(Poslední vztah byl zjištěn z podobnosti trojúhelníků AVQ, MN_2R, kde R je střed úsečky AM.)

Obsahy rovnostranných trojůhelníků K_2L_2M, ABC jsou v poměru druhých mocnin jejich výšek. Proto je

$$S_2 = \left(\frac{t}{3} \cdot x\right)^2 \cdot S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{h^2 - v^2} \cdot \frac{(4h^2 - 3v^2)^2}{784}. \qquad (3.5)$$

Při vyšetřování případu z obr. 3.10 (b) postupujeme obdobně, jen místo trojúhelníku MNR použijeme trojúhelník MDR, kde R je opět střed úsečky AM a D je průsečík přímek MN_2 a AN. Zjistíme

$$S_2 = \frac{48\sqrt{3}}{49} \cdot (h^2 - v^2) \cdot \frac{(4h^2 - 3v^2)^2}{(9v^2 - 8h^2)^2}. \qquad (3.6)$$

Případy z obou obrázků 3.10 (a) i 3.10 (b) splynou v jediný, když rovina ρ_2 bude procházet bodem N. Pak z podobosti trojúhelníků MNR, AVQ

vyplývá pro tento případ po úpravě podmínka $24h^2 = 25v^2$. Je-li tedy

$$\frac{v}{h} < \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

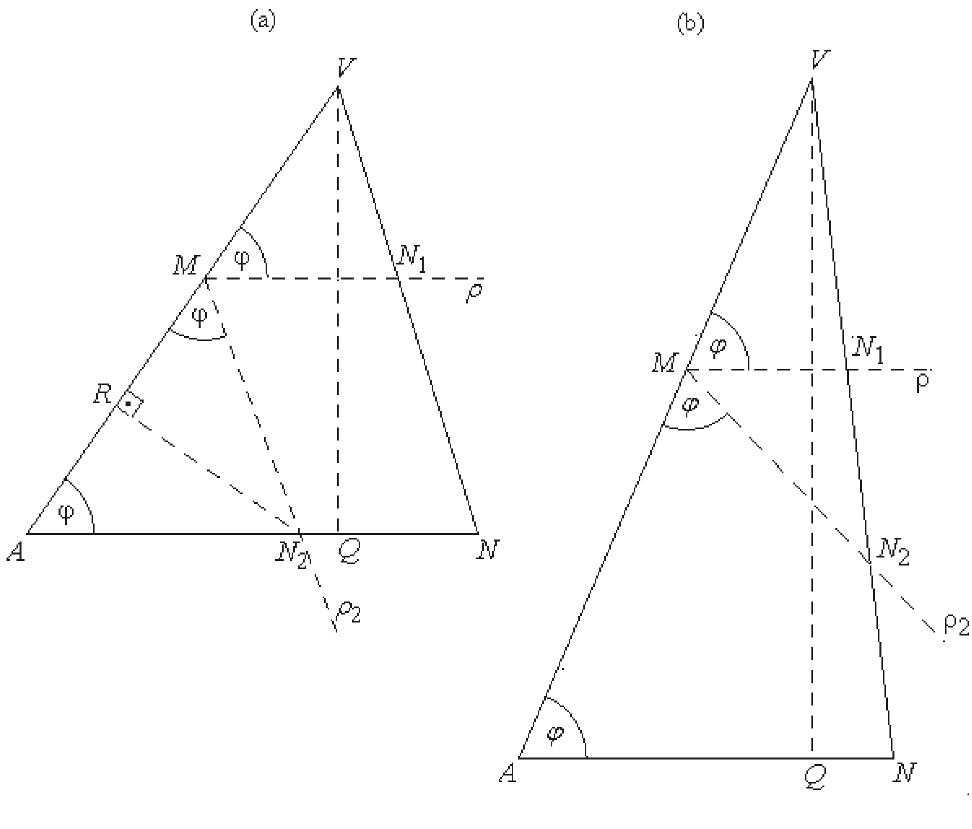
nastává situace z obr. 3.10 (a) a platí (3.5), při opačném znaménku nerovnosti jde o situaci z obr. 3.10 (b) a platí (3.6). Jestliže je

$$\frac{v}{h} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

nabývá (3.5) i (3.6) tvar

$$S_2 = \frac{729\sqrt{3}}{6272}\, v^2.$$

Obrázek 3.10:



Kapitola 4

Ročník 1995/96

4.1 1. série

Sérii sestavil Pavel Leischner

Zadání

1. (pouze pro první ročníky)
   Jestliže u daného trojciferného přirozeného čísla (napsaného dekadickým zápisem) přehodíme poslední dvě cifry, zvětší se o 45. Jestliže u původního daného čísla přehodíme první dvě cifry, zmenší se o 270. Jak se změní původní číslo, přehodíme-li jeho krajní dvě cifry?

2. Když od přirozeného čísla, jehož dekadický zápis tvoří $2n$ ($n \in N$) za sebou zapsaných jedniček odečteme podobné číslo složené z n za sebou zapsaných dvojek, dostaneme vždy druhou mocninu nějakého celého čísla. Dokažte.

3. Dekadický zápis nějakého víceciferného přirozeného čísla nekončí číslicí 0. Jestliže v tomto zápisu škrtneme jednu cifru, vznikne číslo, které je dělitelem čísla původního. Určete, na kolikátém místě mohla být cifra, kterou jsme škrtli.

4. Do dané kružnice $k(S, r = 5 \text{ cm})$ vepište tři shodné kružnice tak, aby se každá z nich dotýkala zbývajících dvou a měla vnitřní dotyk s danou kružnicí.

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany 6 cm. Na stranách AC, BC sestrojte po řadě body K, N a na straně AB body L, M tak, aby pětiúhelník $CKLMN$ byl souměrný podle osy úsečky AB a měl všechny strany stejně dlouhé.

6. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označíme středy stran AB, BC, CD a DA po řadě písmeny K, L, M, N. Nalezněte takový bod X uvnitř

čtyřúhelníka $ABCD$, aby měly čtyřúhelníky $NAKX$, $KBLX$, $LCMX$ a $MDNX$ stejné obsahy.

7. Najděte nejmenší hodnotu výrazu $S = xy/z + yz/x + zx/y$ za podmínky, že čísla x, y, z jsou kladná a součet jejich druhých mocnin je roven jedné. Kdy nastane rovnost?

Řešení

1. Text úlohy. Jestliže u daného trojciferného přirozeného čísla (napsaného dekadickým zápisem) přehodíme poslední dvě cifry, zvětší se o 45. Jestliže u původního daného čísla přehodíme první dvě cifry, zmenší se o 270. Jak se změní původní číslo, přehodíme-li jeho krajní dvě cifry?

   Řešení úlohy. Dané číslo $a = \overline{xyz}$ s ciframi x, y, z můžeme zapsat ve tvaru $a = 100x + 10y + z$. Z první podmínky

   $$(100x + 10z + y) - (100x + 10y + z) = 45$$

   zjistíme

   $$z - y = 5, \tag{4.1}$$

   z druhé podmínky

   $$(100x + 10y + z) - (100y + 10x + z) = 270$$

   pak plyne $x - y = 3$. Jestiže tuto rovnici odečteme od vztahu (4.1), dostaneme

   $$z - x = 2. \tag{4.2}$$

   Přehozením krajních cifer čísla a vznikne číslo

   $$b = 100z + 10y + x.$$

   Abychom zjistili, o kolik se toto číslo liší od a, vytvoříme rozdíl $b - a$ a upravíme jej pomocí (4.2):

   $$b - a = (100z + 10y + x) - (100x + 10y + z) = 99(z - x) = 198.$$

   Uvažované číslo je tedy jedno z čísel

   $$a = 100(3 + y) + 10y + (5 + y), \quad \textit{kde } y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

   a záměnou krajních cifer se zvětší o 198.

2. Text úlohy. Když od přirozeného čísla, jehož dekadický zápis tvoří $2n$ $(n \in N)$ za sebou zapsaných jedniček odečteme podobné číslo složené z n za sebou zapsaných dvojek, dostaneme vždy druhou mocninu nějakého celého čísla. Dokažte.

Řešení úlohy. Přirozené číslo x, jehož zápis se skládá z m jedniček, můžeme zapsat takto:

$$x = \underbrace{11\ldots1}_{m} = \frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{m} = \frac{1}{9}(10^m - 1).$$

Pak pomocí tohoto označení upravíme rozdíl ze zadání následovně:

$$d = \underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n} = \frac{1}{9}\,(10^{2n}-1) - \frac{1}{9}\cdot 2(10^n - 1) =$$

$$= \frac{1}{9}\,(10^{2n} - 1 - 2\cdot 10^n + 2) = \frac{1}{9}\,(10^{2n} - 2\cdot 10^n + 1) = \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2$$

$$d = (\underbrace{33\ldots3}_{n})^2.$$

3. Text úlohy. Dekadický zápis nějakého víceciferného přirozeného čísla nekončí číslicí 0. Jestliže v tomto zápisu škrtneme jednu cifru, vznikne číslo, které je dělitelem čísla původního. Určete, na kolikátém místě mohla být cifra, kterou jsme škrtli.

Řešení úlohy. Existují čísla, u kterých lze škrtnout buď první nebo druhou cifru zleva (například číslo 22). Na žádném jiném místě však cifru škrtnout nelze, ať je číslo jakékoli (přirozené, nekončící nulou). Dokážeme sporem. Nechť číslu m škrtneme cifru b:

$$m = a\cdot 10^{s+1} + b\cdot 10^s + c \qquad (a,\ b,\ c,\ s\ \in N_0),$$

číslo a je aspoň dvojciferné, tedy nenulové, b je cifra, $c < 10^s$).

Dostaneme číslo $n = a\cdot 10^s + c$. Platí:

$$-n < -9\cdot 10^s < -9c \le b\cdot 10^s - 9c = m - 10n \le b\cdot 10^s \le 9\cdot 10^s < n.$$

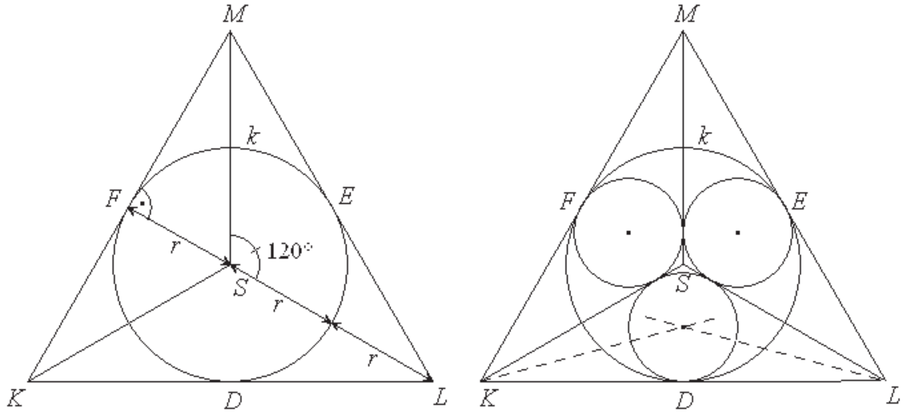
Odtud $|m - 10n| < n$ a tedy $9n < m < 11n$, tj. je-li n dělitelem čísla m, pak jedině $m = 10n$. To je však spor s tím, že číslo m je zakončeno nenulovou cifrou.

4. Text úlohy. Do dané kružnice $k(S, r = 5\text{ cm})$ vepište tři shodné kružnice tak, aby se každá z nich dotýkala zbývajících dvou a měla vnitřní dotyk s danou kružnicí.

Řešení úlohy. Z řady různých řešení uvedeme dvě:

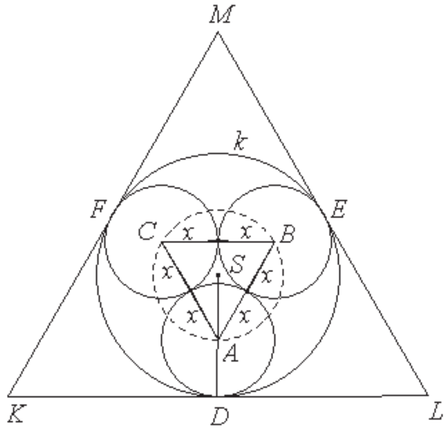
(a) (Geometrické řešení) Opíšeme dané kružnici k podle obr. 4.1 rovnostranný trojúhelník KLM a body dotyku jeho stran s kružnicí k označíme D, E, F, přičemž úhly DSE, ESF a FSD stejně jako úhly KSL, LSM a MSK mají velikost 120°. Hledané kružnice jsou pak vepsané trojúhelníkům KLS, LMS, MKS.

Obrázek 4.1:



(b) (Řešení na základě výpočtu) Označme x poloměr každé z hledaných kružnic.

Obrázek 4.2:



Z obr. 4.2 vidíme, že

$$r = |SD| = |SA| + |AD| = \frac{2x}{\sqrt{3}} + x,$$

neboť $|SA|$ je poloměr kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC a ten je roven dvěma třetinám jeho výšky. Z poslední rovnice po úpravě dostaneme $x = (-3 + 2\sqrt{3})r$. Známe-li x, je další konstrukce snadná.

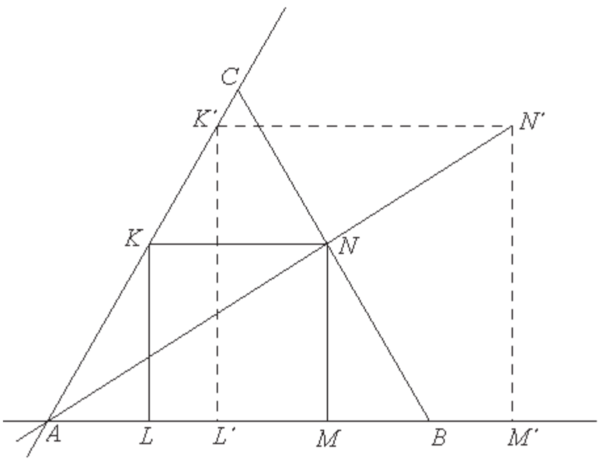
5. Text úlohy. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany 6 cm. Na stranách AC, BC sestrojte po řadě body K, N a na straně AB body L, M tak, aby pětiúhelník $CKLMN$ byl souměrný podle osy úsečky AB a měl všechny strany stejně dlouhé.

   Řešení úlohy. Trojúhelník KNC je rovnoramenný s úhlem velkosti 60° při hlavním vrcholu C. Je to tedy trojúhelník rovnostranný a proto je

$$|KC| = |CN| = |KN| = |KL| = |LM| = |MN|$$

   a čtyřúhelník $LMNK$ je buď kosočtverec nebo čtverec. Vzhledem k požadavku symetrie podle osy o úsečky AB však není jiná možnost, než že se jedná o čtverec. Tento čtverec vepsaný trojúhelníku ABC se dá sestrojit různými způsoby pomocí stejnolehlosti. Jedna z možností využívá stejnolehlost se středem A (obr. 4.3):

Obrázek 4.3:

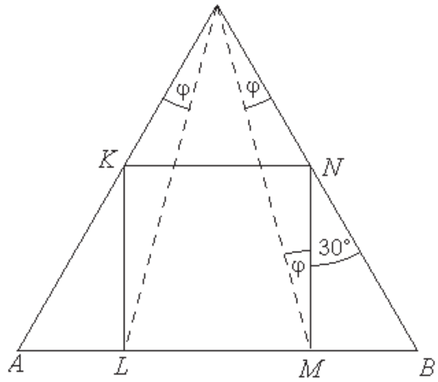


   Na straně AC zvolíme libovolně bod K', patou kolmice z tohoto bodu na stranu AB označíme L' a úsečku $K'L'$ doplníme podle obrázku na čtverec $K'L'M'N'$. K němu pak v uvažované stejnolehlosti sesrojíme vzor - čtverec $KLMN$.

   Jiný způsob je, že určíme podle obr. 4.4 velikost φ úhlů BCM a LCA. Zřejmě je $2\varphi = 30°$ (vnější úhel rovnoramenného trojúhelníka CMN se rovná součtu protilehlých vnitřních úhlů). Stačí tedy sestrojit v bodě C přímky p, q tak, aby svíraly s přímkami CA, CB úhel $\varphi = 15°$.

Tyto přímky protnou stranu AB v bodech L, M a další konstrukce je již zřejmá.

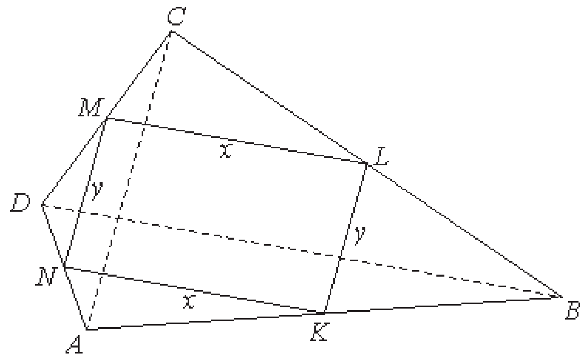
Obrázek 4.4:



6. Text úlohy. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označíme středy stran AB, BC, CD a DA po řadě písmeny K, L, M, N. Nalezněte takový bod X uvnitř čtyřúhelníka $ABCD$, aby měly čtyřúhelníky $NAKX$, $KBLX$, $LCMX$ a $MDNX$ stejné obsahy.

   Řešení úlohy. Jak vidíme na obrázku 4.5 je úsečka KL střední příčkou

Obrázek 4.5:



trojúhelníku ABC a úsečka MN střední příčkou trojúhelníku CDA. Je tedy

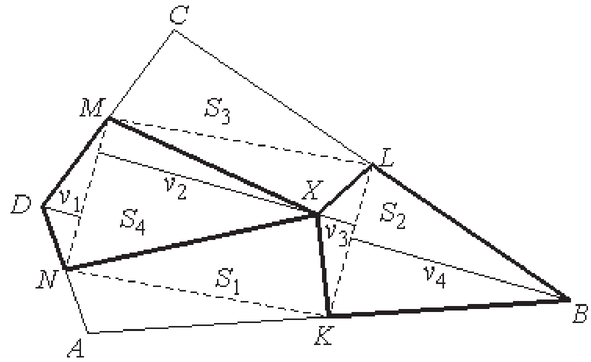
$$KL \parallel AC \parallel MN \quad \text{a} \quad |KL| = |MN| = \frac{|AC|}{2} = x.$$

Analogicky platí:

$$KN \parallel BD \parallel LM \quad \text{a} \quad |KN| = |LM| = \frac{|BD|}{2} = y,$$

tj. čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžníkem. (Jedná se o tzv. Varigonův rovnoběžník.) Podívejme se nyní na obr. 4.6 a zkoumejme obsahy čtyřúhelníků $S_2 = S_{KBLX}$ a $S_4 = S_{MDNX}$.

Obrázek 4.6:



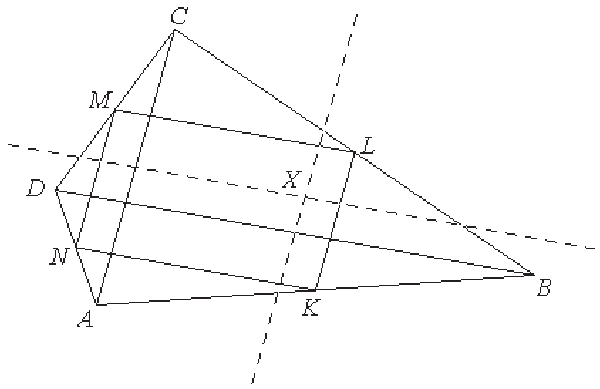
Platí:

$$S_2 = S_{KLX} + S_{KLB} = \frac{x(v_3 + v_4)}{2},$$

$$S_4 = S_{MNX} + S_{MND} = \frac{x(v_2 + v_1)}{2}.$$

Podle podmínek úlohy je ale $S_2 = S_4$, tj. $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$.

Obrázek 4.7:



Geometricky to znamená, že bod X leží na přímce rovnoběžné s úhlopříčkou AC, přičemž tato přímka prochází středem úhlopříčky BD. Analogicky bod X leží na přímce rovnoběžné s úhlopříčkou BD, procházející středem úhlopříčky AC. Bod X je tak určen jako průsečík těchto dvou přímek (obr. 4.7).

7. Text úlohy. Najděte nejmenší hodnotu výrazu $S = xy/z + yz/x + zx/y$ za podmínky, že čísla x, y, z jsou kladná a součet jejich druhých mocnin je roven jedné. Kdy nastane rovnost?

Řešení úlohy. Fukce $f(S) = S^2$ je rostoucí na intervalu $(0,\ \infty)$ a proto je S minimální právě tehdy, když je S^2 minimální. Budeme tedy vyšetřovat minimum výrazu S^2. Platí

$$S^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2\,\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x} + 2\,\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y} + 2\,\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}.$$

Vztah upravíme na tvar

$$S^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{zx}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2\right) + 2(x^2 + y^2 + z^2),$$

z nějž při využití známé nerovnosti

$$\frac{1}{2}\,(a^2 + b^2) \geq ab \quad \text{a podmínky} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

dostaneme $S^2 \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3$.
Platí tedy $S \geq \sqrt{3}$, přičemž rovnost nastane, právě když

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y},$$

což je ekvivalentní s podmínkou $x = y = z$.
Závěr.

$$S_{\min} = \sqrt{3} \quad \text{pro} \quad x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4.2 2. série

Sérii sestavila Michaela Koblížková

Tato série byla sestavena ze starých maturitních úloh u příležitosti výročí 400 let od založení gymnázia v Jindřichově Hradci. Ponechala jsem je v původním znění.

Zadání

1. (jen pro první ročníky)
   Poloměr kruhu $r = 4$ cm byl prodloužen o 1 cm a z koncového bodu vedena sečna, jejíž úsek uvnitř kruhu jest dvakráte větší než úsek zevnější. Jaký úhel svírá sečna s poloměrem?

2. Dána kružnice $k(S, 5)$ a na ní bod M. Na polopřímce $\overrightarrow{SM}$ zvolte vně k bod R tak, aby $|RM| = 1$. Z bodu R jsou vedeny sečny kružnice k tak, že pro délky příslušných tětiv platí $|A_nB_n| = n|RA_n|$. Čtverce délek $d_n = |RA_n|$ tvoří prvních devět členů nekonečné posloupnosti $(k_n) = (d_n^2)$. Pokud z této posloupnosti uberete 1. člen získáte posloupnost (b_n) takovou, že existuje posloupnost (c_n) tak, aby platilo $b_n = k_nc_n$. Určete všechny tři posloupnosti.

3. Pokud jste blíže zkoumali posloupnost (k_n) z příkladu 2, jistě jste si všimli, že úzce souvisí s posloupností $(1/n)$ kmenových zlomků. Označme posloupnost kmenových zlomků (a_n) a vytvořte nové posloupnosti:
   $x_n = a_n - a_{n+1}$
   $y_n = a_n \cdot a_{n+1}$
   (a) Dokažte, že se posloupnosti (x_n), (y_n) rovnají.
   (b) Pro které další posloupnosti (z_n) platí, že posloupnost $(z_n - z_{n+1})$ se rovná posloupnosti $(z_n \cdot z_{n+1})$?

4. (a) Tři po sobě jdoucí členy řady geometrické mají součet 42. Zmenšíme-li třetí člen o 6, máme řadu aritmetickou. Najděte obě řady.
   (b) Příklad obměníme tak, že známe součet s tří po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti a víme, že z nich vzniknou členy posloupnosti aritmetické zvětšením třetího členu o 6. Pro které největší s má úloha řešení a jaké?

5. Ke kruhu o rovnici $K \equiv x^2+y^2 = r^2$ jest vedena tečna, jejíž úsek na kladné ose Y jest n-kráte větší, než úsek na kladné ose X. Najděte její rovnici. Naším úkolem tentokrát bude najít několik myšlenkově odlišných postupů, jak úlohu řešit.

6. Určete, které hodnoty veličin x a y vyhovují rovnicím:
$$\begin{aligned} y^{\operatorname{tg} x} &= 64, \\ y^{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}} &= 16. \end{aligned}$$

7. Pro které nejmenší $n \in \mathcal{N}$ má soustava

$$\begin{aligned} y^{\operatorname{cotg} x} &= 2^n \\ y^{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}} &= 16 \end{aligned}$$

řešení a jaké?

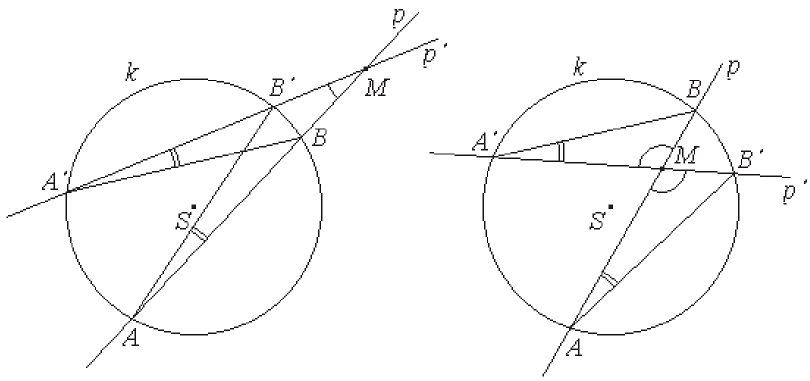
Řešení

1. Text úlohy. Poloměr kruhu $r = 4$ cm byl prodloužen o 1 cm a z koncového bodu vedena sečna, jejíž úsek uvnitř kruhu jest dvakráte větší než úsek zevnější. Jaký úhel svírá sečna s poloměrem?

   Řešení úlohy. Připomeňme si nejprve větu o mocnosti bodu ke kružnici.

   Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a bod M, který na ní neleží. Nechť p a p' jsou dvě libovolné sečny kružnice k, které procházejí bodem M a protínají kružnici v bodech A, B a A' a B' (obr. 4.8).

Obrázek 4.8:



Potom platí

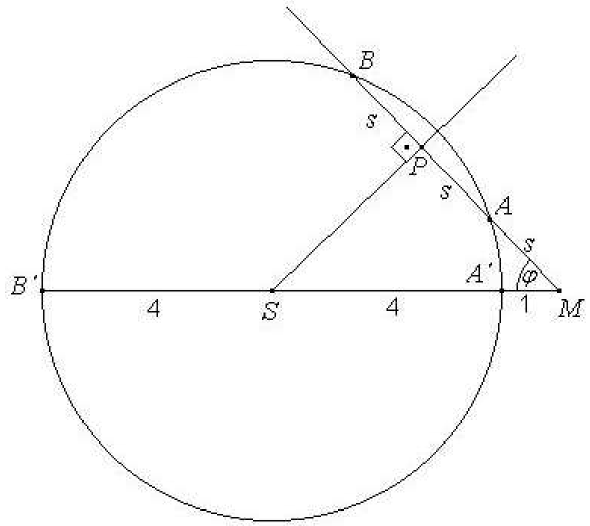
$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| = d, \quad \text{kde } d \text{ je konstantní čílo } (d > 0).$$

Důkaz vyplývá z podobnosti trojúhelníků $A'MB$ a AMB'.

Náš příklad je znázorněn na obr. 4.9. Velikost $|MA|$ jsme označili s. Dle mocnosti bodu ke kružnici platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|.$$

Obrázek 4.9:



Ze zadání vyplývá

$$s \cdot 3s = 1 \cdot 9,$$

tedy

$$3s^2 = 9 \qquad \text{a odtud} \qquad s = \sqrt{3}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku MSP již nyní snadno dopočítáme úhel φ:

$$cos\varphi = \frac{|MP|}{|MS|} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

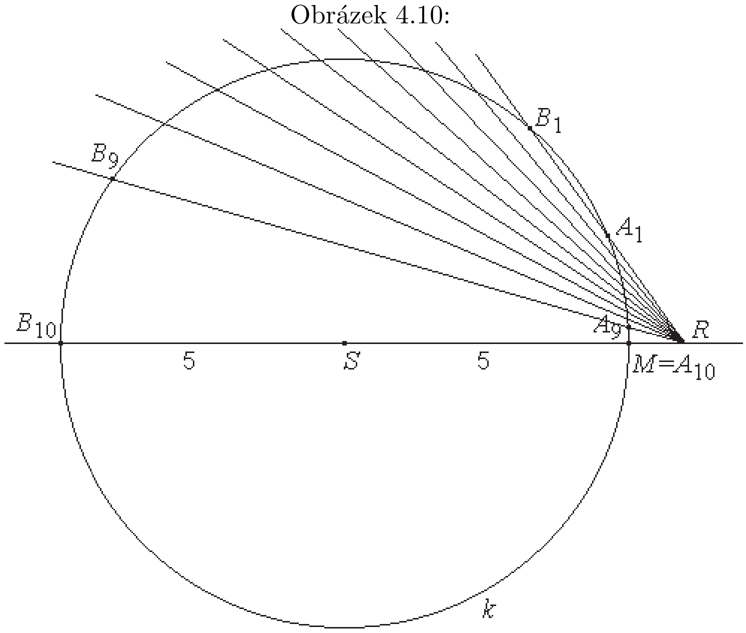
a po zaokrouhlení dostáváme

$$\varphi = 46°9'.$$

2. Text úlohy. Dána kružnice $k(S, 5)$ a na ní bod M. Na polopřímce $\overrightarrow{SM}$ zvolte vně k bod R tak, aby $|RM| = 1$. Z bodu R jsou vedeny sečny kružnice k tak, že pro délky příslušných tětiv platí $|A_nB_n| = n|RA_n|$. Čtverce délek $d_n = |RA_n|$ tvoří prvních devět členů nekonečné posloupnosti $(k_n) = (d_n^2)$. Pokud z této posloupnosti uberete 1. člen získáte posloupnost (b_n) takovou, že existuje posloupnost (c_n) tak, aby platilo $b_n = k_nc_n$. Určete všechny tři posloupnosti.

Řešení úlohy. Pro názornost si nakreslíme obrázek (obr. 4.10) a označíme $|RA_n| = d_n$.

Obrázek 4.10:



Pak podle věty o mocnosti bodu ke kružnosti platí:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 11 &= d_1 \cdot 2d_1 \\ 1 \cdot 11 &= d_2 \cdot 3d_2 \\ 1 \cdot 11 &= d_3 \cdot 4d_3 \\ &\vdots \\ 1 \cdot 11 &= d_n \cdot (n+1)d_n. \end{aligned}$$

Ze zápisu posloupnosti nyní dostáváme:

$$k_n = d_n^2 = \frac{11}{n+1}.$$

Posloupnost (b_n) získáme ubráním prvního členu z (k_n):

$$b_n = \frac{11}{n+2}.$$

Má platit $b_n = c_n \cdot k_n$, po dosazení tedy

$$\frac{11}{n+2} = c_n \cdot \frac{11}{n+1} \quad \text{a z toho} \quad c_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

Šlo vlastně o hledání rekurentního předpisu posloupnosti (k_n).

3. Text úlohy. Pokud jste blíže zkoumali posloupnost (k_n) z příkladu 2, jistě jste si všimli, že úzce souvisí s posloupností $(1/n)$ kmenových zlomků. Označme posloupnost kmenových zlomků (a_n) a vytvořte nové posloupnosti:
$x_n = a_n - a_{n+1}$
$y_n = a_n \cdot a_{n+1}$

   (a) Dokažte, že se posloupnosti (x_n), (y_n) rovnají.

   (b) Pro které další posloupnosti (z_n) platí, že posloupnost $(z_n - z_{n+1})$ se rovná posloupnosti $(z_n \cdot z_{n+1})$?

   Řešení úlohy.

   (a) Dokáže se snadno propočítáním x_n, y_n, tedy: $a_n - a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+1}$ a po dosazení
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$
   Odtud je zřejmé, že vztah $a_n - a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+1}$ platí pro všechna přirozená čísla n.

   (b) Platí-li $z_n - z_{n+1} = z_n \cdot z_{n+1}$, pak pro z_n různé od -1 je
$$z_{n+1} = \frac{z_n}{z_n + 1},$$
   což je tedy rekurentní předpis všech hledaných posloupností.

   z_1 je libovolné reálné číslo kromě -1, ale pro $z_1 = -(1/k)$, kde k je přirozené číslo platí $z_k = -1$. Z toho plyne, že nalezená posloupnost by byla konečná o k členech.

   Ukázky:

   $0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

   $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n$

   $2, 2/3, 2/5, 2/7, \ldots, 2/(2n-1)$

   $-3, 3/2, 3/5, 3/8, \ldots, 3/(3n-4)$

4. Text úlohy.

   (a) Tři po sobě jdoucí členy řady geometrické mají součet 42. Zmenšíme-li třetí člen o 6, máme řadu aritmetickou. Najděte obě řady[1].

[1] Správně by měl být termín "řada" nahrazen slovem "posloupnost". Autorka série patrně citovala původní text z doby, kdy se tyto dva názvy nerozlišovaly.

(b) Příklad obměníme tak, že známe součet s tří po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti a víme, že z nich vzniknou členy posloupnosti aritmetické zvětšením třetího členu o 6. Pro které největší s má úloha řešení a jaké?

Řešení úlohy.

(a) Jde o běžný příklad oblíbený i v současných matematických sbírkách. Označíme-li první člen b a kvocient q, pak platí:

$$bq^2 + bq + b = 42. \tag{4.3}$$

Pro tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti platí

$$\frac{a_3 + a_1}{2} = a_2$$

tedy

$$\frac{bq^2 - 6 + b}{2} = bq. \tag{4.4}$$

Z (4.3) a (4.4) dostaneme soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} bq^2 + bq + b &= 42 \\ bq^2 - 2bq + b &= 6 \end{aligned}$$

odečteme je a dostaneme $3bq = 36$ tedy $bg = 12$, což je prostřední člen obou posloupností.

Dopočítáme q dosazením např. do rovnice (4.3)

$$12q + 12 + \frac{12}{q} = 42.$$

Po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

a dvě řešení $q_1 = 2$ a $q_2 = 1/2$.

Závěr. Geometrická posloupnost má členy $6,\ 12,\ 24$ nebo $24,\ 12,\ 6$ a aritmetická posloupnost $6,\ 12,\ 18$ nebo $24,\ 12,\ 0$.

(b) Opět označíme první člen b, kvocient q a analogicky jako v (a) dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} bq^2 + bq + b &= s \\ bq^2 - 2bq + b &= -6 \end{aligned}$$

po odečtení $3bq = s + 6$ a z toho je prostřední člen

$$bq = \frac{s+6}{3}.$$

Dosadíme do $bq^2 + bq + b = s$

$$\frac{(s+6)q}{3} + \frac{s+6}{3} + \frac{s+6}{3q} = s$$

a rovnici upravíme na tvar

$$(s+6)q^2 - 2(s-3)q + (s+6) = 0.$$

Pokud s je různé od -6, pak jde o kvadratickou rovnici, jejíž diskriminant je

$$D = 4(s-3)^2 - 4(s+6)^2.$$

Rovnice má reálná řešení pouze platí-li:

$$\begin{aligned} 4(s-3)^2 - 4(s+6)^2 &\geq 0 \\ 4(s^2 - 6s + 9 - s^2 - 12s - 36) &\geq 0 \\ -18s - 27 &\geq 0 \\ s &\leq -1,5 \end{aligned}$$

Pro $s = -1,5$ je $q = -1$, potom je geometrická posloupnost: $-1,5,\ 1,5,\ -1,5$ a aritmetická posloupnost: $-1,5,\ 1,5,\ 4,5$. Vyloučená hodnota -6 je menší než $-1,5$.

Závěr. Největší s, kdy má úloha řešení, je $-1,5$.

5. Text úlohy. Ke kruhu o rovnici $K \equiv x^2 + y^2 = r^2$ jest vedena tečna, jejíž úsek na kladné ose Y jest n-kráte větší, než úsek na kladné ose X. Najděte její rovnici.
   Naším úkolem tentokrát bude najít několik myšlenkově odlišných postupů, jak úlohu řešit.

   Řešení úlohy.

   První řešení.

   Využijme vzorce pro vzdálenost d bodu $M = [m_1,\ m_2]$ od přímky

$$p:\ ax + by + c = 0, \tag{4.5}$$

   podle nějž platí

$$d = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{4.6}$$

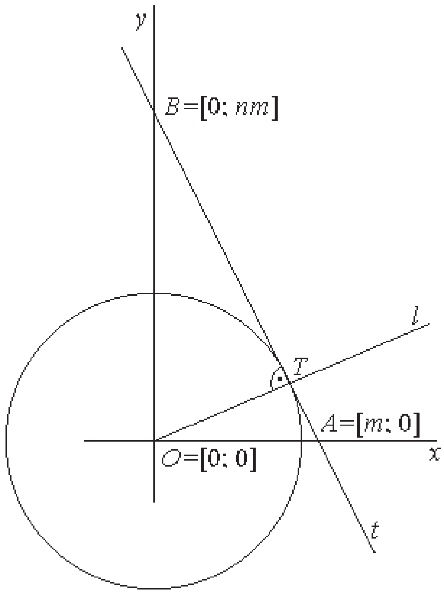
   Protože přímka t není rovnoběžná s osou y, můžeme v obecném zápisu (4.5) položit $b = 1$. Pak platí

$$t:\ ax + y + c = 0.$$

   Z podmínky $B \in t$ a při označení podle obr. 4.11 zjistíme $c = -mn$ a po dosazení souřadnic bodu A do rovnice

$$ax + y - mn = 0$$

Obrázek 4.11:



určíme $a = n$. Ve vyjádření

$$t: \; mx + y - mn = 0 \tag{4.7}$$

je číslo n dáno zadáním úlohy, a tak zbývá najít m. Z podmínky, že vzdálenost počátku O od přímky t je r (viz. obr. 4.11) a vztahu (4.6) dostáváme

$$\frac{|-mn|}{\sqrt{1+n^2}} = r.$$

Čísla m, n jsou kladná, proto z této rovnice zjistíme, že

$$m = \frac{r\sqrt{1+n^2}}{n}.$$

Závěr. Tečna má rovnici $nx + y - r\sqrt{1+n^2} = 0$.

Druhé řešení.

Stejně jako v předchozím případě nalezneme rovnici (4.7) a budeme hledat společné body kružnice

$$K: \; x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{a přímky} \quad t: \; mx + y - mn = 0.$$

Z poslední rovnice vyjádříme y a dosadíme do předposlední:

$$x^2 + (mn - nx)^2 = r^2.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem m:

$$(n^2+1)x^2 - 2mn^2x + m^2n^2 - r^2 = 0.$$

Přímka t je tečnou k dané kružnici, právě když je diskriminant této rovnice roven nule:

$$4m^2n^4 - 4(m^2n^2 - r^2)(n^2+1) = 0.$$

Odtud zjistíme

$$m = \frac{r\sqrt{1+n^2}}{n} \qquad \text{a} \qquad t:\ nx + y - r\sqrt{1+n^2} = 0.$$

Třetí řešení.

Normálový vektor přímky l na obrázku 4.11 je roven směrovému vektoru přímky t. Vzhledem ke (4.7) tedy platí

$$\vec{n_l} = (1, -n)$$

a přímka l má rovnici

$$x - ny = 0,$$

neboť prochází počátkem. Odtud dosadíme $x = ny$ do rovnice kružnice, abychom zjistili souřadnice bodu T:

$$n^2y^2 + y^2 = r^2,$$

záporný kořen rovnice neuvažujeme, takže

$$y = \frac{r}{\sqrt{1+n^2}} \qquad \text{a} \qquad x = \frac{nr}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Dosazením těchto hodnot do (4.7) dostáváme

$$\frac{n^2r}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{r}{\sqrt{1+n^2}} - mn = 0$$

a odtud

$$m = \frac{r\sqrt{1+n^2}}{n}.$$

Zbytek dořešíme stejně, jako v předchozích postupech.

Čtvrté řešení.

Aplikací Pythagorovy věty na trojúhelník ABO (obr. 4.11) zjistíme

$$|AB| = m\sqrt{1+m^2}.$$

Obsah trojúhelníka ABO lze vyjádřit dvojím způsobem

$$\frac{1}{2}\,|OA|\cdot|OB| = \frac{1}{2}\,|AB|\cdot|OT|.$$

Odtud
$$m \cdot nm = m\sqrt{1+m^2} \cdot r.$$
Je tedy
$$m = \frac{r\sqrt{1+n^2}}{n}.$$
Přímka t je dána body $A = [r\sqrt{1+n^2}/n;\ 0]$, $B = [0;\ r\sqrt{1+n^2}]$ a odtud snadno určíme její parametrické vyjádření nebo přímo rovnici (4.7).

Páté řešení.

Podle Eukleidovy věty o odvěsně pro pravoúhlý trojúhelník ABO (obr. 4.11) platí
$$m^2 = |AT| \cdot |AB|, \quad \text{neboli} \quad m^2 = \sqrt{m^2 - r^2} \cdot m\sqrt{1+n^2}.$$
Odtud určíme m a dále postupujeme jako v předchozím řešení.

6. Text úlohy. Určete, které hodnoty veličin x a y vyhovují rovnicím:
$$\begin{aligned} y^{\operatorname{tg} x} &= 64, \\ y^{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}} &= 16. \end{aligned}$$
Řešení úlohy. První rovnici umocníme na druhou a druhou rovnici na třetí, abychom získali na pravých stranách stejné hodnoty:
$$\begin{aligned} y^{2\operatorname{tg} x} &= 4^6, \\ y^{3 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}} &= 4^6. \end{aligned}$$
Nyní porovnáme levé strany rovnic:

pro kladné y : $\quad 2\operatorname{tg} x = 3 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$,

pro záporné y : $\quad 2\operatorname{tg} x = 3 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ musí být celé sudé číslo.

Zlomek na pravé straně rozšíříme výrazem $1/\cos x$ a rovnici upravíme na tvar
$$2\operatorname{tg} x = \frac{3(\operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg} x - 1}.$$
Dále zavedeme substituci $\operatorname{tg} x = s$. Kvadratická rovnice $2s^2 - 5s - 3 = 0$ má řešení $s_1 = 3$ a $s_2 = -0,5$.

Z toho:

$\operatorname{tg} x = 3$ t.j. $x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi$ a dopočítáme y: $y^3 = 4^3$ tedy $y = 4$

nebo

$\operatorname{tg} x = -0,5$ t.j. $x = \operatorname{arctg}(-0,5) + k\pi$ a y: $y^{-0,5} = 4^3$ tedy $y = 4^{-6}$.

Řešením jsou všechny uspořádané dvojice:
$$[\operatorname{arctg} 3 + k\pi\ ;\ 4]\ ,\ \left[\operatorname{arctg}(-0,5) + k\pi\ ;\ 4^{-6}\right],\ \text{kde } k \text{ je celé číslo.}$$

7. Text úlohy. Pro které nejmenší $n \in \mathcal{N}$ má soustava

$$\begin{aligned} y^{\operatorname{cotg} x} &= 2^n \\ y^{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}} &= 16 \end{aligned}$$

řešení a jaké?

Řešení úlohy. Obdobně jako v předchozím příkladě první rovnici umocníme na čtvrtou, druhou rovnici na n, porovnáme levé strany rovnic a obdržíme

$$4 \operatorname{cotg} x = n \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$4 \operatorname{cotg} x = n \cdot \frac{1 + \operatorname{cotg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$$

a zavedeme substituci $\operatorname{cotg} x = t$. Diskriminant D vzniklé kvadratické rovnice $4t^2 + (n-4)t + n$ musí být nezáporný:

$$D = n^2 - 24n + 16 \geq 0$$

Nejmenší vhodné přirozené číslo n je 24.

Vypočítáme $t_1 = -2$, $t_2 = -3$ tedy $\operatorname{cotg} x = -2$ nebo $\operatorname{cotg} x = -3$ a již snadno určíme všechna řešení rovnice jako v příkladě 6.

Těmito řešeními jsou všechny uspořádané dvojice :

$\left[\operatorname{arccotg}(-3) + k\pi \ ; \ 2^{-8}\right]$, $\left[\operatorname{arccotg}(-2) + k\pi \ ; \ 2^{-12}\right]$, kde k je celé číslo.

Nejmenší n, pro které má soustava řešení je 24.

4.3 3. série

Sérii sestavil Petr Sokol

Zadání

1. (jen pro první ročníky)
Autobus je přeplněný, je-li v něm více než 50 cestujících. Dva inspektoři dopravních podniků kontrolují vytíženost dopravy. První inspektor spočítal procento přeplněných autobusů. Druhý spočítal procento pasažérů jedoucích v přeplněných autobusech. Který z nich má více procent?

2. (ještě jednou mince)
Máme jedenáct sáčků s dostatečným počtem mincí a rovnoramenné váhy. Je známo, že v jednom sáčku jsou falešné mince, které mají jinou hmotnost než pravé mince. Určete nejmenší počet vážení, které potřebujeme ke zjištění sáčku s falešnými mincemi.

3. V rovině je dána čtvercová síť o rozměrech $n \times n$. Na tuto síť pokládáme černé a bílé krychle. (Stěna je shodná se čtvercem v síti.) První vrstvu jsme položili libovolně. Dodatečně jsme zjistili, že při kladení musí být splněny následující podmínky. Každá černá krychle musí sousedit se sudým počtem bílých krychlí a každá bílá s lichým počtem černých. Druhou vrstvu klademe tak, aby byla splněna tato podmínka pro krychle první vrstvy. Jestliže je splněna i pro druhou vrstvu, končíme. Když ne, tak pokračujeme třetí vrstvou, aby byla podmínka splněna pro krychle druhé vrstvy, obdobně s další vrstvou atd. Zjistěte, zda existuje takové rozmístění krychlí první vrstvy, aby tento proces nikdy nekončil.

4. Najděte reálné kořeny rovnice
$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} \qquad (0 < a < \frac{1}{4}).$$

5. Dokažte, že pro každé celé $n \geq 2$ a každé reálné $|x| < 1$ platí nerovnost $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$.

6. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x > \sqrt{2}$ a $y > \sqrt{2}$ je splněna nerovnost $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2$.

7. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n, větší než jedna platí, že alespoň jedno z čísel $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ není větší než $\sqrt[3]{3}$.

Řešení

1. Text úlohy. Autobus je přeplněný, je-li v něm více než 50 cestujících. Dva inspektoři dopravních podniků kontrolují vytíženost dopravy. První inspektor spočítal procento přeplněných autobusů. Druhý spočítal procento pasažérů jedou-cích v přeplněných autobusech. Který z nich má více procent?

   Řešení úlohy. Označme k počet přeplněných autobusů, l počet nepřeplněných autobusů, A počet lidí v přeplněných autobudech a B počet lidí v nepřeplněných autobusech. Potom platí $A > 50k$, $B \leq 50l$ a odtud lze odvodit:

   $$\frac{B}{A} < \frac{l}{k} \quad \text{a následně} \quad \frac{B+A}{A} < \frac{l+k}{k},$$

   $$\text{odtud je pak už zřejmé, že} \qquad \frac{A}{A+B} \cdot 100\% > \frac{k}{l+k} \cdot 100\%.$$

   Více procent tedy má druhý inspektor, který měřil procento pasažérů jedoucích v přeplněných autobusech.

2. Text úlohy. Máme jedenáct sáčků s dostatečným počtem mincí a rovnoramenné váhy. Je známo, že v jednom sáčku jsou falešné mince, které mají jinou hmotnost než pravé mince. Určete nejmenší počet vážení, které potřebujeme ke zjištění sáčku s falešnými mincemi.

   Řešení úlohy. První případ (lze odečítat velikost výchylky):

   K odpovědi potom stačí jen dvě vážení:

   1. vážení – na první misku dáme po jedné minci z prvních deseti měšců a na druhou misku deset mincí z posledního sáčku.
   (Zjistíme odchylku o_1. Rozdíl hmotnosti jedné falešné mince je tedy o_1, pokud jsou nepravé mince v některém z prvních deseti měšců a $o_1/10$ pokud jsou v jedenáctém sáčku.)

   2. vážení – na první misku dáme jednu minci z prvního sáčku, dvě mince z druhého, tři ze třetího atd. až do desátého. Na druhou misku dáme 55 mincí z jedenáctého sáčku.
   (Změříme novou odchylku o_2. n-tý sáček s falešnými mincemi najdeme dle vzorce: $o_2 = n \cdot o_1$, pokud n nevyjde celé číslo, resp. $n = 5,5$, jsou nepravé mince v jedenáctém sáčku.)

   Druhý případ (nelze odečítat velikost výchylky):

   (a) Mince z jednotlivých sáčků předem označíme. Stačí pouze tři vážení, postup je naznačen kvůli přehlednosti v tabulce:

1. vážení	2. vážení		3. vážení	
$(1,2,3) \times (4,5,6)$	$-$rovno:	$(1,2,3) \times (7,8,9)$	$-$rovno: $-$různo:	$(10) \times (1)$ $(7) \times (8)$
$(1,2,3) \times (4,5,6)$	$-$různo:	$(1,2,4,5) \times (7,8,9,10)$	$-$rovno: $-$různo:	$(3) \times (7)$ $(1) \times (7)$ nebo $(4) \times (7)$

(b) Předpokládejme, že označovámí je zakázáno a řešíme pouze jednu z těchto úloh:

b1) Z každého sáčku vezmeme jednu minci a mezi vybranými mincemi máme najít falešnou.
b2) Každý sáček obsahuje stejný počet mincí, sáčky nejsou označené a hledáme falešný sáček.

Zde musíme vážit celkem čtyřikrát, protože nevíme, zda je hledaná mince těžší nebo lehčí.

Z každého sáčku vezmeme jednu minci. Mince rozdělíme do čtyř skupin takto: 3, 3, 3 a 2 mince. Budeme uvažovat nejméně vhodnou situaci. Dáme na misky vah první dvě skupiny. Předpokládejme rovnováhu, potom je falešná mince ve zbývajících dvou skupinách. Poslední skupinu doplníme na tři jednou mincí z prvních skupin. Vezmeme tři dobré mince z prvního vážení a porovnáme s jednou skupinou, která je na vahách, předpokládejme rovnováhu, falešná mince je tedy v poslední skupině, kterou porovnáme opět s mincemi z prvního vážení a zjistíme, zda je nepravá mince lehčí či těžší než mince pravá. V trojici s falešnou mincí pak již stačí jen jedno vážení.

3. Text úlohy. V rovině je dána čtvercová síť o rozměrech $n \times n$. Na tuto síť pokládáme černé a bílé krychle. (Stěna je shodná se čtvercem v síti.) První vrstvu jsme položili libovolně. Dodatečně jsme zjistili, že při kladení musí být splněny následující podmínky. Každá černá krychle musí sousedit se sudým počtem bílých krychlí a každá bílá s lichým počtem černých. Druhou vrstvu klademe tak, aby byla splněna tato podmínka pro krychle první vrstvy. Jestliže je splněna i pro druhou vrstvu, končíme. Když ne, tak pokračujeme třetí vrstvou, aby byla podmínka splněna pro krychle druhé vrstvy, obdobně s další vrstvou atd. Zjistěte, zda existuje takové rozmístění krychlí první vrstvy, aby tento proces nikdy nekončil.

Řešení úlohy. Předpokládejme, že je tento proces nekonečný. Protože máme jen konečný počet rozložení krychlí ve vrstvě, musí existovat dvě vrstvy se shodným rozložením. Označme je i a j a předpokládejme, že $i < j$. Potom musí být vrstva $i - 1$ shodná s vrstvou $j - 1$, $i - 2$ shodná s $j - 2$ atd.

Pak je ale druhá vrstva shodná s $j-i+2$, první vrstva s $j-i+1$. To znamená, že proces jsme mohli ukončit na $(j-i)$-té vrstvě, tudíž je tento proces konečný.

4. Text úlohy. Najděte reálné kořeny rovnice

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} \qquad (0 < a < \frac{1}{4}). \tag{4.8}$$

Řešení úlohy. Položme

$$y = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

Tento výraz upravíme na tvar

$$x = y^2 + 2ay + \frac{1}{16}. \tag{4.9}$$

Podle (4.8) současně platí

$$y = x^2 + 2ax + \frac{1}{16}. \tag{4.10}$$

Hledáme tedy společné body relací f, g, kde f je daná rovnicí (4.10), g je daná rovnicí (4.9) a přitom $g = f^{-1}$. Grafy obou relací jsou paraboly souměrné podle přímky $y = x$. Průsečíky obou grafů jsou tedy body typu $[x, x]$, a tak stačí vyřešit rovnici

$$x = x^2 + 2ax + \frac{1}{16},$$

kterou snadno upravíme na tvar

$$x^2 + (2a-1)x + \frac{1}{16} = 0.$$

Rovnice má za daných podmínek pro a vždy dva reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2a-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

5. Text úlohy. Dokažte, že pro každé celé $n \geq 2$ a každé reálné $|x| < 1$ platí nerovnost $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$.

Řešení úlohy. Dokážeme pomocí matematické indukce:
1. Pro $n = 2$ nerovnost platí: $2 + 2x^2 < 4$.
2. Předpokládáme, že platí: $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$, potom

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} < ((1-x)^n + (1+x)^n)((1-x)+(1+x)) < 2^n \cdot 2 < 2^{n+1},$$

což jsme chtěli dokázat.

6. Text úlohy. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x > \sqrt{2}$ a $y > \sqrt{2}$ je splněna nerovnost $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2$.

   Řešení úlohy. Podle vzorce pro rozklad dvojčlenu a^n+b^n na součin pro liché n:

   $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^n)$ vidíme, že levá část nerovnosti je rovna výrazu $\dfrac{x^5+y^5}{x+y}$, pro $x > \sqrt{2}$ a $y > \sqrt{2}$ platí nerovnost $x^5 + y^5 > 2(x^3 + y^3)$ (pro mezní hodnotu $x = y = \sqrt{2}$ platí rovnost).
   Je tedy

$$\frac{x^5+y^5}{x+y} \ > \ \frac{2x^3+y^3}{x+y} \ = \ 2(x^2 - xy + y^2) \ \geq \ x^2 + y^2.$$

7. Text úlohy. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n, větší než jedna platí, že alespoň jedno z čísel $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ není větší než $\sqrt[3]{3}$.

   Řešení úlohy. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$m \geq n \geq 2.$$

   Potom platí $\sqrt[m]{n} \leq \sqrt[n]{n}$ a stačí dokázat $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$.
   Pro $n = 2$ nerovnost platí, pro ostatní n obě strany zlogaritmujeme a obdržíme nerovnost $\dfrac{\ln n}{n} \leq \dfrac{\ln 3}{3}$. Funkce $\dfrac{\ln x}{x}$ je klesající pro $x > e$, proto výše uvedená nerovnost platí.

Kapitola 5

Závěr

Matematika se v současné době netěší všeobecné oblibě a většina studentů ji považuje za příliš složitou a nezajímavou. Doufám, že toto období pomine i za pomoci podobných soutěží jako byl Jihočeský matematický korespondenční seminář a že se o tuto nádhernou vědu začne veřejnost opět zajímat, ne se jí obávat.

Z časového hlediska svou diplomovou prací, ve které jsem zpracovala ročníky 1993 – 1996, navazuji na práce Ilony Malechové (1980 – 1984), Šárky Hánlové (1984 – 1988) a Michaely Raabové (1988 – 1993).

Hlavním cílem bylo didaktické zpracování soutěžních úloh. Vzhledem k tomu, že uvedená soutěž již neprobíhá, může tato diplomová práce zároveň sloužit i jako archivní materiál.

Domnívám se, že po obsahové stránce by mohla být námětem, inspirací pro středoškolské učitele k zpestření výuky netypickými příklady. Stejně tak může být i zajímavým studijním materiálem pro zájemce z řad studentů.

Literatura

[1] Bartsch, H.-J.: *Matematické vzorce.* Praha, SNTL, 1987

[2] Kuřina, F.: *10 geometrických transformací.* Praha, Prometheus, 2002

[3] Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice.* Praha, SPN, 1990

[4] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Praha, Prometheus, 1998

[5] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* Praha, Prometheus, 1995

[6] *Originály tiskopisů zadání jednotlivých serií semináře*