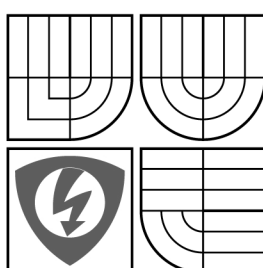


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A  
KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND  
COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

## NÁVRH REGULÁTORU PRO MIMO SYSTÉM

CONTROLLER DESIGN FOR MIMO SYSTEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

PAVEL NEVÍDAL

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Prof.Ing. PETR VAVŘÍN, DrSc.

BRNO 2008

# Bakalářská práce

bakalářský studijní obor  
**Automatizační a měřicí technika**

**Student:** Nevídal Pavel

**Ročník:** 3

**ID:** 74869

**Akademický rok:** 2007/08

## NÁZEV TÉMATU:

### Návrh regulátoru pro MIMO systém

#### POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Pro dvourozměrovou stabilní soustavu navrhnete diskrétní PSD regulátor tak, aby byla zajištěna autonomnost, statická invariantnost a optimální dynamické vlastnosti systému. Předpokládejte stejnou velikost periody vzorkování v obou obvodech

#### DOPORUČENÁ LITERATURA:

Vavřín, Zelina: Automatické řízení počítačem, SNTL, Praha, 1978  
Štecha J.: Moderní teorie řízení, Skriptum ČVUT Praha.

**Termín zadání:** 1.2.2008

**Termín odevzdání:** 2.6.2008

**Vedoucí projektu:** prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

prof. Ing. Pavel Jura, CSc.  
předseda oborové rady



#### UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

## **P r o h l á š e n í**

„Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma "Návrh regulátoru pro MIMO systém" jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.“

V Brně dne :

Podpis:

## **P o d ě k o v á n í**

Děkuji tímto Prof. Ing. Petru Vavřínovi, DrSc za cenné připomínky a rady při vypracování bakalářské práce.

Vysoké Učení Technické v Brně  
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií  
Ústav automatizace a měřicí techniky

## Návrh regulátoru pro MIMO systém

Autor: Pavel Nevídal  
Vedoucí práce: Prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

### **Abstrakt:**

Cílem bakalářské práce je seznámit čtenáře s problematikou vícerozměrových regulačních obvodů a ukázat jeden z možných způsobů návrhů regulátorů pro tyto obvody. Vlastní práce je rozdělena do dvou kapitol.

V první části jsou vysvětleny základní pojmy z problematiky vícerozměrových systémů a odvozeny matice přenosů řízení a poruch.

Druhá obsáhlejší část se věnuje návrhu matice diskrétních regulátorů typu PSD. Je zde vysvětlen význam požadavků na řízení (autonomnost a statiská invariantnost) a odvozeny podmínky z nich plynoucí. Na závěr je demonstrována kvalita regulačního děje pomocí přechodových charakteristik.

**Klíčová slova:** vícerozměrové systémy, návrh regulátoru, PSD regulátor

**Brno University of Technology**  
**Faculty of Electrical Engineering and Communication**  
**Department of Control and Instrumentation**

## **Controller design for MIMO system**

Author: Pavel Nevídal  
Supervisor: Prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

**Abstract:**

Objective of the bachelor thesis is to acquaint readers with issue of multiple input and output regulation systems and show one of available methods of controller design for these systems. Thesis is separated into two chapters.

In the first part there are explained basic terms from issue multiple input and output regulation systems and deduced matrices of transfers of control and breakdown.

Second more extensive part attends to design of matrices of discrete controllers PSD. The meaning of requests for control (autonomicity and static invariantness) and deduced conditionals which follows on these requests is explained here. The quality of regulation via transient characteristics is demonstrated at the end.

**Keywords:** multiple input multiple output systems, controller design, PSD controller

## OBSAH

<b>OBSAH</b> .....	<b>5</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ</b> .....	<b>6</b>
<b>SEZNAM TABULEK</b> .....	<b>7</b>
<b>ÚVOD</b> .....	<b>8</b>
<b>1. ÚVOD DO VÍCEROZMĚROVÝCH REG. OBVODŮ</b> .....	<b>9</b>
1.1 VÝPOČET MATICE PŘENOSŮ ŘÍZENÍ.....	11
1.2 VÝPOČET MATICE PŘENOSŮ PORUCH.....	11
1.2.1 Poruchy působící na vstupu soustavy .....	11
1.2.2 Poruchy působící na výstupu soustavy .....	12
<b>2. NÁVRH MATICE REGULÁTORŮ</b> .....	<b>13</b>
2.1 AUTONOMNOST .....	13
2.2 STATICKÁ INVARIANTNOST .....	15
2.3 REALIZOVATELNOST REGULÁTORŮ $R_{12}$ A $R_{21}$ .....	15
2.3.1 I regulátor .....	15
2.3.2 PI regulátor.....	16
2.4 OVĚŘENÍ INVARIANTNOSTI .....	17
2.5 NÁVRH OPTIMÁLNÍCH PARAMETRŮ REGULÁTORŮ .....	20
2.5.1 Regulátor $R_{11}$ .....	23
2.5.2 Regulátor $R_{22}$ .....	31
2.5.3 Výpočet přenosů regulátorů $R_{12}$ a $R_{21}$ .....	34
2.5.4 Zhodnocení kvality regulace .....	35
<b>3. ZÁVĚR</b> .....	<b>40</b>
<b>LITERATURA</b> .....	<b>41</b>

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1.1: Vícerozměrová soustava .....	9
Obr. 1.2: Blokové schéma vícerozměrového regulačního obvodu .....	10
Obr. 2.1: Přechodová char. PSD regulátoru $D_0=2$ , $D_1=0,5$ , $D_2=10$ , $T_{vz}=1s$ .....	22
Obr. 2.2: Frekvenční charakteristika soustavy v log. souřadnicích .....	24
Obr. 2.3: Frekvenční char. soustavy v log. souřadnicích s dopravním zpoždění .....	25
Obr. 2.4: Frekvenční charakteristika otevřené smyčky se zesílením $K=1$ .....	26
Obr. 2.5: Odezva reg. veličiny na skokovou změnu žádané hodnoty získaná pomocí integrálního kritéria kvality ITAE .....	27
Obr. 2.6: Vývojový diagram programu na výpočet integrálního kritéria .....	28
Obr. 2.7: Závislost hodnoty kritériální funkce na zesílení .....	29
Obr. 2.8: Přechodová charakteristika regulátoru $R_{11}$ .....	30
Obr. 2.9: Frekvenční charakteristika otevřené smyčky se zesílením $K=1$ .....	32
Obr. 2.10: Závislost hodnoty kritériální funkce na zesílení .....	32
Obr. 2.11: Přechodová charakteristika regulátoru $R_{22}$ .....	34
Obr. 2.12: Odezvy regulovaných veličin na skokové změny žádaných hodnot .....	36
Obr. 2.13: Odezvy reg. veličin na skokové změny poruchových signálů působících na výstupu soustavy .....	37
Obr. 2.14: Odezvy reg. veličin na skokové změny poruchových signálů působících na vstupu soustavy .....	38
Obr. 2.15: Akční zásah regulátoru $R_{11}$ při skokové změně žádané hodnoty .....	39
Obr. 2.16: Akční zásah regulátoru $R_{22}$ při skokové změně žádané hodnoty .....	39

## **SEZNAM TABULEK**

Tabulka 2.3.1: Vyšetření realizovatelnosti regulátoru $R_{12}$ .....	15
Tabulka 2.3.2: Vyšetření realizovatelnosti regulátoru $R_{12}$ .....	16



## ÚVOD

Tato semestrální práce se věnuje problematice vícerozměrových systémů a návrhu vícerozměrového regulátoru. V technické praxi se běžně setkáváme s technologickými zařízeními, které mají více vstupních a výstupních veličin. Každá ze vstupních veličin může ovlivňovat současně více výstupních veličin. Mezi vstupními a výstupními existují dynamické vazby. Návrh vícerozměrového regulátoru spočívá v získání kontroly nad těmito vazbami.

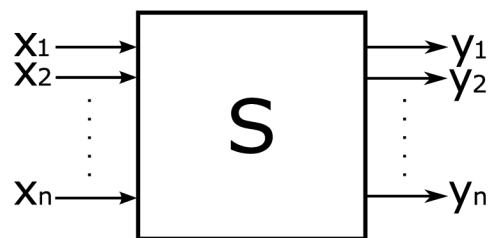
První část práce seznamuje čtenáře se základními pojmy vícerozměrových systémů a objasňuje význam jednotlivých přenosů v maticích. Dále jsou odvozeny přenosové matice řízení a poruch.

Druhá a rozsáhlejší část se zabývá návrhem přenosové matice regulátorů. Je zde vysvětlen význam požadavků na řízení vícerozměrového systému (autonomnosti a statické invariantnosti). Dále jsou odvozeny podmínky na přenosy regulátorů, jednak z požadavku autonomnosti, tak i z požadavku statické invariantnosti. Při dodržení podmínek je ukázáno, že oba požadavky jsou splněny. Na konec je řešena jedna z možných metod návrhu parametrů vybraného typu regulátoru na optimální dynamické vlastnosti.

## 1. ÚVOD DO VÍCEROZMĚROVÝCH REG. OBVODŮ

V klasické regulační smyčce vystupují jednotlivé signály (žádaná hodnota, odchylka, porucha, akční a regulovaná veličina) jako skaláry a tudíž se jedná o jednorozměrový regulační obvod. Naproti tomu vícerozměrový (MIMO-Multiple Input Multiple Output) regulační obvod může obsahovat libovolné množství těchto signálů. Například je třeba regulovat více vstupních veličin, čímž musí na soustavu působit více akčních veličin, které jsou různými vazbami svázány s výstupy ze soustavy.

Na obrázku 1.1 je blokově znázorněna vícerozměrová soustava, na jejím vstupu působí  $n$  akčních veličin, na výstupu  $n$  regulovaných veličin. Stejný počet vstupních i výstupních veličin neubírá na obecnosti, neboť do počtu  $n$  mohou být veličiny doplněny nulami.



**Obr. 1.1: Vícerozměrová soustava**

Pro tuto soustavu platí následující rovnice:

$$\begin{aligned} Y_1(p) &= S_{11}(p)X_1(p) + S_{12}(p)X_2(p) + \dots + S_{1n}(p)X_n(p) \\ Y_2(p) &= S_{21}(p)X_1(p) + S_{22}(p)X_2(p) + \dots + S_{2n}(p)X_n(p) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$Y_n(p) = S_{n1}(p)X_1(p) + S_{n2}(p)X_2(p) + \dots + S_{nn}(p)X_n(p)$$

Rovnice se mohou přepsat do maticového tvaru

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{S}(p)\mathbf{X}(p) \quad (1.2)$$

kde  $\mathbf{Y}(p)$  a  $\mathbf{X}(p)$  jsou vektory obrazů akčních a regulovaných veličin a  $\mathbf{S}(p)$  je čtvercová matice přenosů soustavy.

$$\mathbf{S}(p) = \begin{pmatrix} S_{11}(p) & \cdots & S_{1n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n1}(p) & \cdots & S_{nm}(p) \end{pmatrix}$$

Prvek  $S_{ij}(p)$  této matice je definován vztahem

$$S_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{X_j(p)} \quad (1.3)$$

a představuje přenos j-té akční veličiny na i-tou regulovanou veličinu.

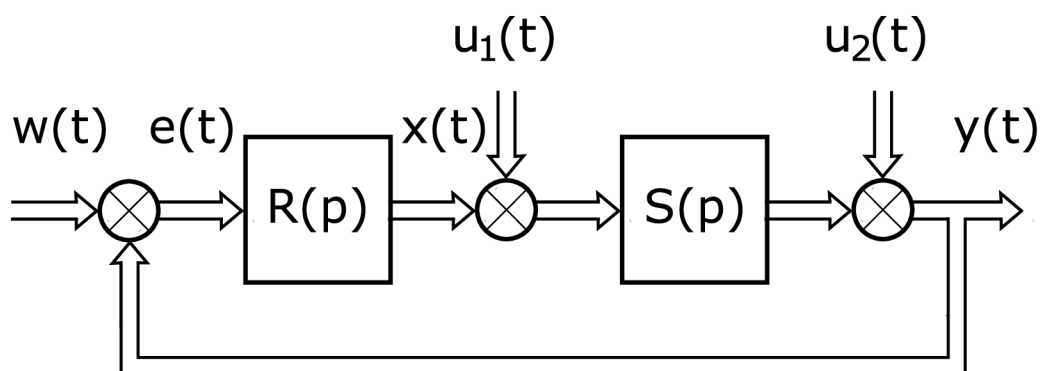
Podobně je definována matice přenosů regulátorů,

$$\mathbf{R}(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) & \cdots & R_{1n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{n1}(p) & \cdots & R_{nm}(p) \end{pmatrix}$$

kde regulátor  $R_{ij}(p)$  představuje přenos j-té regulační odchylky na i-tou akční veličinu.

$$R_{ij}(p) = \frac{X_i(p)}{E_j(p)} \quad (1.4)$$

Tímto je vysvětlena struktura matic regulátorů a přenosů soustavy i jakou úlohu hrají jednotlivé dílčí přenosy. Zbývá objasnit výpočet matice přenosů řízení a matice přenosů poruch.



**Obr. 1.2: Blokové schéma vícerozměrového regulačního obvodu**

Bude se vycházet z obecného vícerozměrového regulačního schématu na obrázku 1.2, kde  $w(t)$  jsou požadované hodnoty regulovaných veličin  $y(t)$ . Do matice regulátorů vstupují reg. odchylky  $e(t)$  a vystupují akční veličiny  $x(t)$ .

Při výpočtu je nutné dbát na tu skutečnost, že násobení matic je nekomutativní operace a tudíž musíme zohledňovat pozice matic.

### 1.1 VÝPOČET MATICE PŘENOSŮ ŘÍZENÍ

Předpokládá se, že poruchové signály jsou nulové a tedy že platí  $U_1(p) = U_2(p) = 0$ . Přenosová matice řízení má následující tvar:

$$Fw(p) = Y(p) W(p)^{-1} \quad (1.1.1)$$

Pro vektor obrazů regulovaných veličin při postupu zprava doleva platí

$$Y(p) = S(p) X(p) = S(p) R(p) E(p) = S(p) R(p) [ W(p) - Y(p) ]$$

$$Y(p) [ I + S(p) R(p) ] = S(p) R(p) W(p)$$

Po dosazení do rovnice (1.1.1) získáme

$$Fw(p) = S(p) R(p) [ I + S(p) R(p) ]^{-1} \quad (1.1.2)$$

### 1.2 VÝPOČET MATICE PŘENOSŮ PORUCH

Jelikož se uvažují poruchy působící na vstupu i výstupu regulované soustavy, řešení se rozdělí na dvě části.

#### 1.2.1 Poruchy působící na vstupu soustavy

Při výpočtu se uvažuje  $W(p) = U_2(p) = 0$ . Přenosová matice poruch má následující tvar:

$$Fu_1(p) = Y(p) U_1(p)^{-1} \quad (1.2.1)$$

Pro vektor obrazů regulovaných veličin platí

$$Y(p) = S(p) [ X(p) + U_1(p) ] = S(p) [ -R(p) Y(p) + U_1(p) ]$$

$$Y(p) [ I + S(p) R(p) ] = S(p) U_1(p)$$

Po dosazení do rovnice (1.2.1) se dostane

$$Fu_1(p) = S(p) [ I + S(p) R(p) ]^{-1} \quad (1.2.2)$$

### 1.2.2 Poruchy působící na výstupu soustavy

Při výpočtu se uvažuje  $W(p) = U_1(p) = 0$ . Přenosová matice poruch má následující tvar:

$$\mathbf{F}u_2(p) = \mathbf{Y}(p) \mathbf{U}_2(p)^{-1} \quad (1.2.3)$$

Pro vektor obrazů regulovaných veličin platí

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{S}(p) \mathbf{X}(p) + \mathbf{U}_2(p) = \mathbf{S}(p) \mathbf{R}(p) [ -\mathbf{Y}(p) ] + \mathbf{U}_2(p)$$

$$\mathbf{Y}(p) [ \mathbf{I} + \mathbf{S}(p) \mathbf{R}(p) ] = \mathbf{U}_2(p)$$

Po dosazení do rovnice (1.2.3) vychází

$$\mathbf{F}u_2(p) = [ \mathbf{I} + \mathbf{S}(p) \mathbf{R}(p) ]^{-1} \quad (1.2.4)$$

Tímto je ukončen teoretický úvod do problematiky vícerozměrových systémů, bylo vysvětleno, čím se vícerozměrové systémy odlišují od jednoparametrových a odvozeny tvary základních přenosových matic. V následující kapitole bude ukázán možný způsob návrhu matice regulátorů, při zadaných požadavcích na řízení.

## 2. NÁVRH MATICE REGULÁTORŮ

Při návrhu regulátorů pro víceparametrové obvody se může využít znalostí z návrhu obvodů jednoparametrových, ovšem návrh je patřičně složitější. U jednorozměrových obvodů se reguluje pouze na jednu vstupní (požadovanou) veličinu pomocí akčního zásahu jedné přenosové funkce regulátoru. Jak už bylo řečeno, MIMO systémy se vyznačují více vstupními a výstupními signály. Složitost návrhu spočívá v tom, že jedna akční veličina ovlivňuje více výstupních veličin díky překříženým vazbám ze vstupu na výstup.

U vícerozměrových systémů navíc vznikají další požadavky, které klademe na řídicí smyčku. Zejména se jedná o autonomnost a statickou invariantnost. V následujících kapitolách budou jednotlivé požadavky vysvětleny a odvozeny podmínkové rovnice z nich plynoucí.

### 2.1 AUTONOMNOST

Aby byl splněn požadavek autonomnosti, tzn. aby změna  $i$ -té řídicí veličiny ovlivnila pouze  $j$ -tou výstupní veličinu, musí platit

$$F_{w_{ij}} = 0 \text{ pro všechna } i \neq j$$

To znamená, že matice přenosů řízení  $\mathbf{Fw}(p)$  musí být diagonální. Při pohledu na rovnici (1.1.2) je vidět, že postačující podmínka autonomnosti systému je, aby součin matic  $\mathbf{S}(p)\mathbf{R}(p)$  byl diagonální. Důkaz spočívá v konstatování, že součet jednotkové s diagonální maticí je opět matice diagonální, podobně jako součin dvou diagonálních matic či inverzní matice k diagonální matici.

Dále dojde k rozepsání součin matic  $\mathbf{S}(p)\mathbf{R}(p)$

$$\begin{aligned} \mathbf{Fo}(p) = \mathbf{S}(p) \mathbf{R}(p) &= \begin{pmatrix} S_{11}(p) & S_{12}(p) \\ S_{21}(p) & S_{22}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{11}(p) & R_{12}(p) \\ R_{21}(p) & R_{22}(p) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} S_{11}(p)R_{11}(p) + S_{12}(p)R_{21}(p) & S_{11}(p)R_{12}(p) + S_{12}(p)R_{22}(p) \\ S_{21}(p)R_{11}(p) + S_{22}(p)R_{21}(p) & S_{21}(p)R_{12}(p) + S_{22}(p)R_{22}(p) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Pro diagonalitu musí platit

$$Fo_{12}(p) = S_{11}(p)R_{12}(p) + S_{12}(p)R_{22}(p) = 0 \quad (2.1.2)$$

$$Fo_{21}(p) = S_{21}(p)R_{11}(p) + S_{22}(p)R_{21}(p) = 0 \quad (2.1.3)$$

Z rovnic (2.1.1) a (2.1.2) vyplývají přípustné tvary přenosových funkcí regulátorů  $R_{12}(p)$  a  $R_{21}(p)$ .

$$R_{12}(p) = -\frac{S_{12}(p)}{S_{11}(p)}R_{22}(p) \quad (2.1.4)$$

$$R_{21}(p) = -\frac{S_{21}(p)}{S_{22}(p)}R_{11}(p) \quad (2.1.5)$$

Pro kontrolu se dosadí rovnice (2.1.4) a (2.1.5) do rovnice (2.1.1) a tím bude dokázána diagonalita matice otevřených smyček  $\mathbf{Fo}(p)$ .

$\mathbf{Fo}(p) =$

$$= \begin{pmatrix} S_{11}(p)R_{11}(p) - \frac{S_{12}(p)S_{21}(p)}{S_{22}(p)}R_{11}(p) & 0 \\ 0 & S_{22}(p)R_{22}(p) - \frac{S_{21}(p)S_{12}(p)}{S_{11}(p)}R_{22}(p) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R_{11}(p) \frac{S_{11}(p)S_{22}(p) - S_{12}(p)S_{21}(p)}{S_{22}(p)} & 0 \\ 0 & R_{22}(p) \frac{S_{11}(p)S_{22}(p) - S_{12}(p)S_{21}(p)}{S_{11}(p)} \end{pmatrix}$$

Z upravené matice přenosů otevřených smyček lze vypožorovat, že diagonalita je při splnění podmínek (2.1.4) a (2.1.5) splněna a také, že vlastní řízení obstarávají regulátory  $R_{11}$  a  $R_{22}$ . Regulátory  $R_{12}$  a  $R_{21}$  zajišťují splnění požadavku autonomnosti a jsou dopočítány na základě přenosu regulátorů  $R_{11}$  a  $R_{22}$ .

## 2.2 STATICKÁ INVARIANTNOST

Invariantnost je odolnost proti poruchám, neboli nezávislost výstupních veličin na poruchovém signálu. Statická invariantnost znamená invariantnost v ustáleném stavu. Z návrhu jednorozměrných systému je známo, že pro odstranění poruchy působící na vstupu i výstupu soustavy je nutné, aby regulátor obsahoval astatismus. V našem případě musí být regulátory  $R_{11}$  a  $R_{22}$  typu I, PI nebo PID.

## 2.3 REALIZOVATELNOST REGULÁTORŮ $R_{12}$ A $R_{21}$

Jelikož se tyto regulátory dopočítávají, může při určité regulované soustavě a nevhodném typu regulátorů  $R_{11}$  a  $R_{22}$  dojít k problému s realizovatelností přenosů  $R_{12}(p)$  a  $R_{21}(p)$ . Proto se musí vyšetřit všechny možnosti a určit kdy je možné použít jednotlivé typy regulátorů.

### 2.3.1 I regulátor

Předpokládá se regulátor ve tvaru  $R(p) = \frac{r}{p}$

Pro regulátory z rovnic (2.1.4) a (2.1.5) platí

$$R_{12}(p) = -\frac{S_{12}(p) r_{22}}{S_{11}(p) p} \quad R_{21}(p) = -\frac{S_{21}(p) r_{11}}{S_{22}(p) p} \quad (2.3.1)$$

Vyšetření realizovatelnosti regulátoru  $R_{12}$  v závislosti na řádu statických soustav  $S_{12}$  a  $S_{11}$  je v tabulce 2.3.1

**Tabulka 2.3.1: Vyšetření realizovatelnosti regulátoru  $R_{12}$**

Řád soustavy	$S_{11}(p)$	1	2	3
	$S_{12}(p)$	1	1	1
Řád čitatele	$R_{12}(p)$	1	2	3
Řád jmenovatele		2	2	2



Tabulka ukazuje, že regulátor  $R_{12}$  bude realizovatelný, jestliže soustava  $S_{11}$  nebude o více než jeden řád větší než soustava  $S_{12}$ . Pro realizovatelnost  $R_{12}$  tedy platí

$$\text{řád}(S_{11}) \leq \text{řád}(S_{12}) + 1 \quad (2.3.2)$$

Totéž platí pro regulátor  $R_{21}$  v souvislosti se soustavami  $S_{22}$  a  $S_{21}$

$$\text{řád}(S_{22}) \leq \text{řád}(S_{21}) + 1 \quad (2.3.3)$$

### 2.3.2 PI regulátor

Vychází se z regulátoru ve tvaru  $R(p) = \frac{r(Tp + 1)}{p}$

Pro regulátory z rovnic (2.1.4) a (2.1.5) platí

$$R_{12}(p) = -\frac{S_{12}(p)}{S_{11}(p)} \frac{r_{22}(T_{22}p + 1)}{p} \quad R_{21}(p) = -\frac{S_{21}(p)}{S_{22}(p)} \frac{r_{11}(T_{11}p + 1)}{p} \quad (2.3.4)$$

Vyšetření realizovatelnosti regulátoru  $R_{12}$  v závislosti na řádu statických soustav  $S_{12}$  a  $S_{11}$  je v tabulce 2.3.2

**Tabulka 2.3.2: Vyšetření realizovatelnosti regulátoru  $R_{12}$**

Řád soustavy	$S_{11}(p)$	1	2	3
	$S_{12}(p)$	1	1	1
Řád čitatele	$R_{12}(p)$	2	3	4
Řád jmenovatele		2	2	2

Tabulka ukazuje, že regulátor  $R_{12}$  bude realizovatelný, jestliže soustava  $S_{11}$  nebude většího řádu než soustava  $S_{12}$ . Pro realizovatelnost  $R_{12}$  tedy platí

$$\text{řád}(S_{11}) \leq \text{řád}(S_{12}) \quad (2.3.5)$$

Totéž platí pro regulátor  $R_{21}$  v souvislosti se soustavami  $S_{22}$  a  $S_{21}$

$$\text{řád}(S_{22}) \leq \text{řád}(S_{21}) \quad (2.3.6)$$

PID regulátor se nemusí vyšetřovat, neboť má obdobně jako PI reg. stejný řád polynomu v čitateli i ve jmenovateli. Tudíž pro něj platí stejné závěry, jako pro PI reg.

## 2.4 OVĚŘENÍ INVARIANTNOSTI

Obdobně, jak byl ověřen požadavek autonomnosti, bude nyní ověřen požadavek na statickou invariantnost. Bude uvažována porucha působící na vstupu regulované soustavy a pro jednoduchost použity přenosy soustavy prvního řádu. Toto omezení neubírá na obecné platnosti, což bude ukázáno dále. Pro matici přenosů poruch působících na vstupu soustavy platí

$$\mathbf{F}u(p) = \mathbf{S}(p) [\mathbf{I} + \mathbf{S}(p) \mathbf{R}(p)]^{-1}$$

Pro ověření invariantnosti se musí vyjádřit obraz výstupního signálu

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}u(p) \mathbf{U}(p) \quad (2.4.1)$$

kde  $\mathbf{Y}(p) = [Y_1(p) \ Y_2(p)]^T$  je vektor obrazů výstupních veličin

$\mathbf{U}(p) = [U_1(p) \ U_2(p)]^T$  je vektor obrazů poruch

I přes určité zjednodušení je výpočet stále velmi náročný, proto se bude předpokládat působení pouze jednoho poruchového signálu  $U_1$ . I v případě tohoto zjednodušení se zachovává obecně platný postup, neboť obrazy výstupu  $\mathbf{Y}(p)$  obsahují jednu strukturu namísto součtu dvou stejných. To je dáno stejným typem přenosových funkcí v matici přenosů otevřených smyček. Pro názornost bude rozepsána rovnice (2.4.1)

$$\begin{pmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(p) & S_{12}(p) \\ S_{21}(p) & S_{22}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + Fo_{11}(p) & 0 \\ 0 & 1 + Fo_{22}(p) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{pmatrix}$$

K výpočtu inverzní matice je použit vztah  $A^{-1} = \frac{adjA}{\det(A)}$

$$\begin{pmatrix} 1 + Fo_{11}(p) & 0 \\ 0 & 1 + Fo_{22}(p) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + Fo_{22}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} & 0 \\ 0 & \frac{1 + Fo_{11}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} \end{pmatrix}$$

Vynásobením matice přenosů soustavy s výše vypočtenou inverzní maticí se dostává

$$\begin{pmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(p) \frac{1 + Fo_{22}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} & S_{12}(p) \frac{1 + Fo_{11}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} \\ S_{21}(p) \frac{1 + Fo_{22}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} & S_{22}(p) \frac{1 + Fo_{11}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(p) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé obrazy výstupů vypadají následovně

$$Y_1(p) = S_{11}(p) \frac{1 + Fo_{22}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} \cdot U_1(p) \quad (2.4.2)$$

$$Y_2(p) = S_{21}(p) \frac{1 + Fo_{22}(p)}{[1 + Fo_{22}(p)] \cdot [1 + Fo_{11}(p)]} \cdot U_1(p) \quad (2.4.3)$$

Invariantnost bude ověřena na výstupu  $Y_1$ , z důvodu úspory místa nebude u obrazů veličin uváděn operátor  $p$ .

$$Y_1 = \frac{S_{11} \frac{S_{11} + R_{22}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})}{S_{11}}}{\frac{S_{11} + R_{22}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})}{S_{11}} \cdot \frac{S_{22} + R_{11}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})}{S_{22}}} \cdot U_1$$

$$Y_1 = \frac{S_{11} \frac{S_{11} + R_{22}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})}{S_{11}}}{\frac{S_{11}S_{22} + (S_{11}R_{11} + S_{22}R_{22})(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) + (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})^2 R_{11}R_{22}}{S_{11}S_{22}}} \cdot U_1$$

Pro výpočet výstupní veličiny ze soustavy v ustáleném stavu se použije vzorec o konečné hodnotě funkce

$$y_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Y_1(p)$$

S uvážením, že jsou předpokládány statické soustavy, mohou být závorky typu  $(1+Tp)$  jednoduše vynechány. Výstupní signál statické soustavy po odeznění

přechodového děje je roven vstupnímu signálu násobenému zesílení soustavy. Odstranění závorek se dá odůvodnit také tím, že jestliže platí  $p \rightarrow 0$ , závorka konverguje k 1. Tím je tudíž odůvodněno i to, že nezáleží na počtu časových konstant v regulátoru. Za předpokladu skokové změny poruchy platí

$$y_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{u_1}{p}$$

$$\frac{Ks_{11} + \frac{Kr_{22}}{p}(Ks_{11}Ks_{22} - Ks_{12}Ks_{21})}{Ks_{11}} \cdot \frac{Ks_{11}Ks_{22} + \left(\frac{Ks_{11}Kr_{11} + Ks_{22}Kr_{22}}{p}\right)(Ks_{11}Ks_{22} - Ks_{12}Ks_{21}) + (Ks_{11}Ks_{22} - Ks_{12}Ks_{21})^2 \frac{Kr_{11}Kr_{22}}{p^2}}{Ks_{11}Ks_{22}}$$

Pro přehlednost bude zavedena substituce  $A = (Ks_{11}Ks_{22} - Ks_{12}Ks_{21})$

$$\begin{aligned} y_1(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} u_1 \cdot \frac{Ks_{11} + \frac{Kr_{22}}{p}A}{Ks_{11}Ks_{22} + \left(\frac{Ks_{11}Kr_{11} + Ks_{22}Kr_{22}}{p}\right)A + A^2 \frac{Kr_{11}Kr_{22}}{p^2}} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} u_1 \cdot \frac{Ks_{11}p + Kr_{22}A}{p} \cdot \frac{Ks_{11}Ks_{22}p^2}{Ks_{11}Ks_{22}p^2 + (Ks_{11}Kr_{11} + Ks_{22}Kr_{22})Ap + Kr_{11}Kr_{22}A^2} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} u_1 \cdot \frac{Ks_{11}p + Kr_{22}A}{1} \cdot \frac{Ks_{11}Ks_{22}p}{Ks_{11}Ks_{22}p^2 + (Ks_{11}Kr_{11} + Ks_{22}Kr_{22})Ap + Kr_{11}Kr_{22}A^2} = \\ &= \frac{0}{Kr_{11}Kr_{22}A^2} = 0 \end{aligned}$$

Tím je dokázána statická invariantnost systému, v případě  $Y_2(p)$  by se došlo ke stejnému výsledku.

## 2.5 NÁVRH OPTIMÁLNÍCH PARAMETRŮ REGULÁTORŮ

Z kapitoly 2.1 je známo, že kvalitu regulace ovlivňují regulátory  $R_{11}$  a  $R_{22}$ . Proto tyto přenosy budou předmětem návrhu. Z požadavku na statickou invariantnost vyplývá, že mohou být použity pouze regulátory, které obsahují integrační složku. To jsou I, PI a PID. Výběr určitého typu regulátoru by záležel na matici přenosů soustav, viz. kapitola 2.3, i na požadované kvalitě regulace.

Cílem této práce je navrhnout optimální diskretní obdobu PID regulátoru, čili PSD regulátor. Návrh PID regulátoru bude probíhat metodou frekvenčních charakteristik, která využívá při návrhu přenos otevřené smyčky. Navíc zohledňuje přidání fiktivního dopravního zpoždění o velikosti poloviny periody vzorkování do přenosu soustavy. Důvodem použití dopravního zpoždění je to, že průběh signálu z D/A převodníku (schody) je časovými konstantami soustavy vyhlazen a tudíž se jeví jako posunutý o polovinu periody vzorkování. Takto navržený PID regulátor bude pomocí převodních vztahů (viz dále) přepočítán na diskretní PSD regulátor.

Jak už bylo dříve řečeno, tato kapitola pojednává o návrhu optimálního regulátoru, nebo chcete-li o návrhu na optimální dynamické chování regulační smyčky. Bylo by dobré se pozastavit u pojmu optimální. Optimálně navržený regulátor pro řízení jedné soustavy nemusí být optimální pro soustavu jinou. Někde je požadováno rychlé vyregulování odchylky, kdy nevadí i větší překmit, jindy zase není povolen překmit na úkor rychlosti. Proto musí být vždy uvedeno hledisko, podle kterého se optimalita vyhodnocuje. Matematicky je možné takové hledisko popsat tzv. kritériální funkcí.

Jako kritériální funkce, podle které se bude posuzovat optimalita nastavení regulátorů, je vybráno integrační ITAE kritérium (Integral of Time multiplied by Absolute value of Error). Toto kritérium hodnotí kvalitu nastavení řídicích členů z průběhu regulační odchylky v časové oblasti, který se získá jako odezva na skokovou změnu žádané veličiny. Matematicky je v [4] formulováno takto

$$J = \int_0^{\infty} |e(t) - e(\infty)| \cdot t \cdot dt \quad (2.5.1)$$

kde  $e(\infty)$  je trvalá ustálená odchylka. V případě nulové ustálené odchylky se vztah zjednoduší na

$$J = \int_0^{\infty} |e(t)| \cdot t \cdot dt \quad (2.5.2)$$

Integrální kritérium je použito z důvodu kvantitativního vyjádření kvality regulace. Tato hodnota sama o sobě nic neříká, pouze vyjadřuje míru zlepšení či zhoršení kvality regulace s předchozími variantami.

Metodou frekvenčních charakteristik otevřené smyčky je navrhován spojitý PID regulátor ve tvaru

$$Fr(p) = \frac{K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(\varepsilon p + 1)} \quad (2.5.3)$$

kde  $T_1, T_2$  jsou časové konstanty,  $K$  zesílení a  $\varepsilon$  je realizační konstanta regulátoru.

Pro převod na diskrétní obdobu regulátoru je vhodný jiný tvar PID regulátoru

$$Fr(p) = Kr \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{\varepsilon p + 1} \right) \quad (2.5.4)$$

kde  $Kr$  je zesílení (jiná hodnota než  $K$ ),  $T_i$  je integrační a  $T_d$  derivační konstanta regulátoru. Je proto nutné převést jeden tvar na druhý. Nyní budou odvozeny převodní vztahy. Vychází se z návrhového tvaru, který bude modifikován na tvar požadovaný. Nejprve dojde k rozdělení na parciální zlomky.

$$Fr(p) = \frac{K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(\varepsilon p + 1)} = K \frac{(T_1 T_2) p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}{p(\varepsilon p + 1)} \quad (2.5.5)$$

$$Fr(p) = \frac{K(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(\varepsilon p + 1)} = K \left( A + \frac{B}{p} + \frac{C p}{\varepsilon p + 1} \right) = K \frac{(A \varepsilon + C) p^2 + (A + B \varepsilon) p + B}{p(\varepsilon p + 1)}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnín operátoru  $p$  se získává

$$\begin{aligned} B &= 1 \\ A &= T_1 + T_2 - \varepsilon \\ C &= T_1 T_2 - (T_1 + T_2 - \varepsilon) \varepsilon \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Zavedením substituce  $T_i = T_1 + T_2 - \varepsilon$  a dosazením vychází

$$Fr(p) = K \left( T_i + \frac{1}{p} + \frac{(T_1 T_2 - T_i \varepsilon) p}{\varepsilon p + 1} \right) = K \cdot T_i \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{\left( \frac{T_1 T_2}{T_i} - \varepsilon \right) p}{\varepsilon p + 1} \right) \quad (2.5.7)$$

Porovnáním vztahů (2.5.4) a (2.5.7) jsou získány převodní vztahy

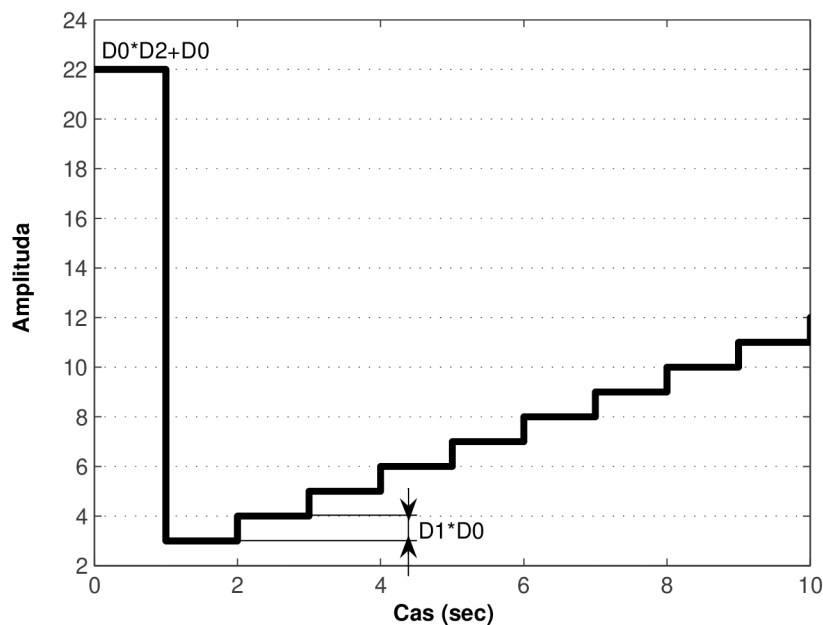
$$\begin{aligned} Kr &= Ti \cdot K \\ Ti &= T_1 + T_2 - \varepsilon \\ Td &= \frac{T_1 T_2}{Ti} - \varepsilon \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Rovnice

$$Fr(z) = D_0 \left( 1 + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} D_1 + (1 - z^{-1}) D_2 \right) \quad (2.5.9)$$

znázorňuje jeden z tvarů PSD regulátoru, kde  $D_0$  je zesílení,  $D_1$  je sumační krok a  $D_2$  diferenční konstanta. Při přepočtu je nutné respektovat periodu vzorkování.

$$\begin{aligned} D_0 &= Kr \\ D_1 &= \frac{T_v z}{Ti} \\ D_2 &= \frac{Td}{T_v z} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$



Obr. 2.1: Přejchodová char. PSD regulátoru  $D_0=2$ ,  $D_1=0,5$ ,  $D_2=10$ ,  $T_v z=1s$

Obrázek 2.1 ukazuje význam jednotlivých konstant PSD regulátoru.

V tuto chvíli jsou známi všechny potřebné vztahy pro přepočítání spojitěho na diskretní regulátor a může se přistoupit na návrh PID regulátoru. Matice přenosů soustavy je dvourozměrová, obsahující přenosy 3.řádu s astatismem 1. řádu.

$$F_S(p) = \begin{pmatrix} \frac{2}{p(p+1)(5p+1)} & \frac{1}{p(p+1)^2} \\ \frac{3}{p(5p+1)(10p+1)} & \frac{6}{p(p+1)(10p+1)} \end{pmatrix} \quad (2.5.11)$$

Matice přenosů otevřených smyček

$$F_O(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) \left( S_{11}(p) - \frac{S_{12}(p)S_{21}(p)}{S_{22}(p)} \right) & 0 \\ 0 & R_{22}(p) \left( S_{22}(p) - \frac{S_{21}(p)S_{12}(p)}{S_{11}(p)} \right) \end{pmatrix} \quad (2.5.12)$$

je diagonální, proto je možné navrhovat regulátory  $R_{11}$  a  $R_{22}$  odděleně, jako kdyby byl každý součástí jednorozměrového systému.

### 2.5.1 Regulátor $R_{11}$

Nejprve je potřeba si určit přenos soustavy, na který se bude regulátor navrhovat. Jednotlivé přenosy soustavy (2.5.11) dosadíme do (2.5.12) a dostáváme

$$F_{S_1}(p) = \frac{2}{p(p+1)(5p+1)} - \frac{1}{p(p+1)^2} \cdot \frac{3}{p(5p+1)(10p+1)} = \frac{1,5}{p(p+1)(5p+1)} \quad (2.5.13)$$

Otevřená smyčka s uvážením regulátoru typu PID bude mít tvar

$$F_{O_1}(p) = \frac{K \cdot 1,5(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p^2(p+1)(5p+1)(\epsilon p + 1)} \quad (2.5.14)$$

Na začátku kapitoly bylo zmíněno, že spojitý regulátor se navrhuje na soustavu s dopravním zpožděním o velikosti poloviny vzorkovací periody. Proro je na místě se již zde zabývat otázkou na hodnotu periody vzorkování. Obecně

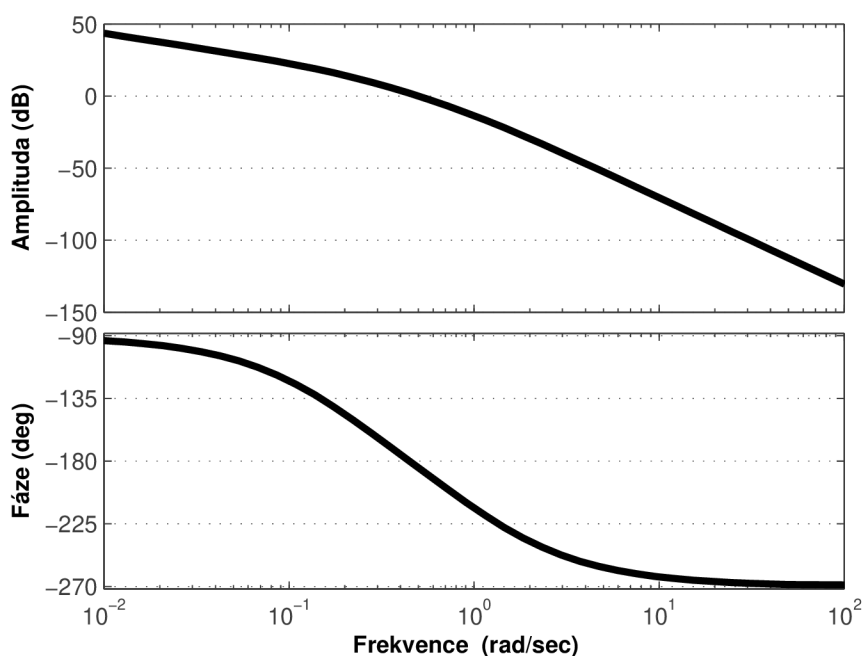


se doporučuje volit vzorkovací periodu  $1/3$  až  $1/30$  největší časové konstanty v soustavě. Vztah (2.5.14) ukazuje, že přenos otevřené smyčky obsahuje astatismus 2. řádu. Je známo, že astatismus zaručuje nulovou ustálenou odchylku a pokud je obsažen v regulátoru, tak i vyregulování poruchy. Tím ovšem přináší i zhoršení stability regulačního obvodu a zpomalení regulačního děje. S přihlédnutím k těmto skutečnostem se jeví jako vhodná perioda vzorkování 1,5s. Do soustavy tudíž musí být přidáno dopravní zpoždění o velikosti 0,75s.

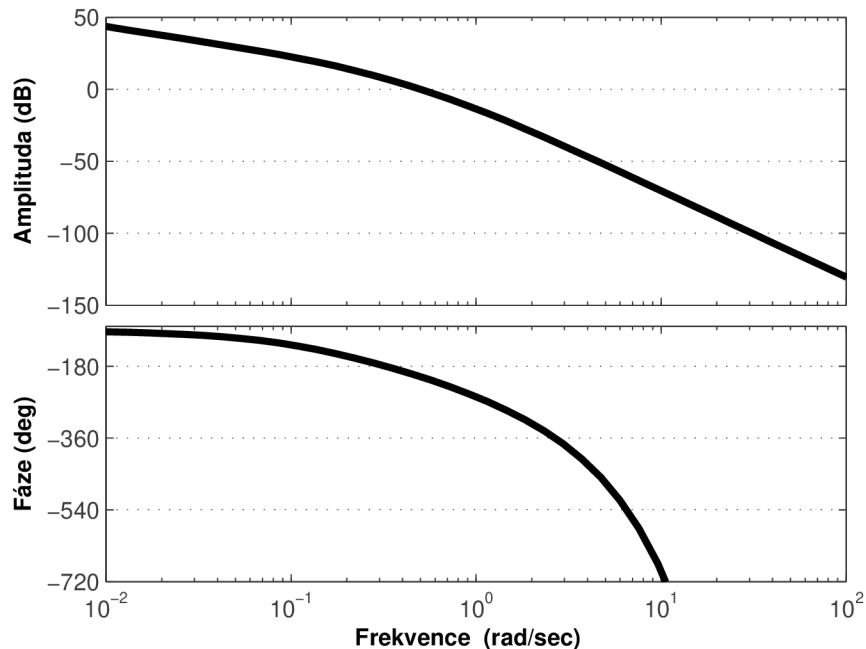
Otevřená smyčka s respektováním dopravního zpoždění v soustavě

$$F_{O_1}(p) = \frac{K \cdot 1,5(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p^2 (p + 1)(5p + 1)(\varepsilon p + 1)} e^{-0,75 p} \quad (2.5.15)$$

Na obrázcích (2.2) a (2.3) jsou k porovnání amplitudová a fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích soustavy bez dopravního zpoždění a s přidáním dopravního zpoždění 0,75s.



Obr. 2.2: Frekvenční charakteristika soustavy v log. souřadnicích



**Obr. 2.3: Frekvenční char. soustavy v log. souřadnicích s dopravním zpoždění**

Dopravní zpoždění nemá vliv na amplitudovou frekvenční charakteristiku, zatímco fázové charakteristice přidává záporný příspěvek o velikosti  $-\omega T_d$ . Tím destabilizuje systém na vyšších frekvencích a ztěžuje návrh regulátoru.

Prvním krokem návrhu PID regulátoru je stanovení časových konstant  $T_1$ ,  $T_2$  a realizační konstanty  $\varepsilon$ . Realizační konstanta se obecně volí o dekádu menší než nejmenší časová konstanta v soustavě. To proto, aby zlom amplitudové frekvenční charakteristiky způsobený touto konstantou byl umístěn do vysokých frekvencích, ve kterých regulační systém nepracuje. Tím realizační konstanta nezhoršuje regulační vlastnosti obvodu. Pro tento regulátor byla zvolena o velikosti 0,05s.

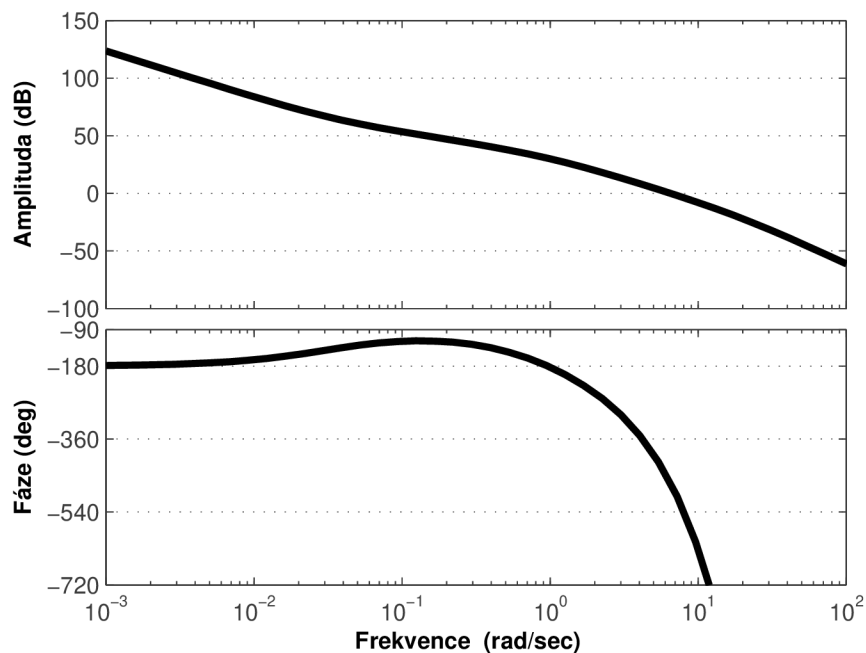
Podstatně složitější je stanovení časových konstant (nul přenosu otevřené smyčky), které se podílí na regulačních schopnostech regulátoru i celého obvodu. Cílem je vytvořit úsek na amplitudové charakteristice se sklonem  $-20\text{dB/dek}$  a protínat jím osu  $0\text{dB}$  v co nejvyšší frekvenci. Je nutné si uvědomit, že amplitudová charakteristika začíná díky astatismu 2.řádu již sklonem  $-40\text{dB}$  na dekádu. Tento fakt nutí umístění nuly regulátoru na frekvenci nižší než je frekvence prvního zlomu o

dalších  $-20\text{dB/dek}$  ( $0,2\text{rad/s}$ ). Tím se dosáhne změny skonu amplitudové charakteristiky z  $-40\text{dB/dek}$  na  $-20\text{dB/dek}$  v oblasti nízkých frekvencí a pokračování charakteristiky se sklonem  $-20\text{dB/dek}$  do středních kmitočtů. Časová konstanta zaručující úsek s tímto sklonem je  $T_1=30\text{s}$ . Druhá nula regulátoru se použije na vytvoření co nejdelšího úseku se sklonem  $-20\text{dB/dek}$  a proto je volena na  $T_2=5\text{s}$ .

Díky tomu úsek se sklonem  $-20\text{dB/dek}$  pokračuje do  $1\text{rad/s}$ , kde již dochází ke zlomu na sklon  $-40\text{dB/dek}$ . Přenos otevřené smyčky má tedy tvar

$$F_{O_1}(p) = \frac{K \cdot 1,5 \cdot (30p + 1)}{p^2 (p + 1)(0,05p + 1)} e^{-0,75p} \quad (2.5.16)$$

Obrázek 2.5.3 zobrazuje amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku otevřené smyčky v logaritmických souřadnicích se zesílením regulátoru  $K=1$ .

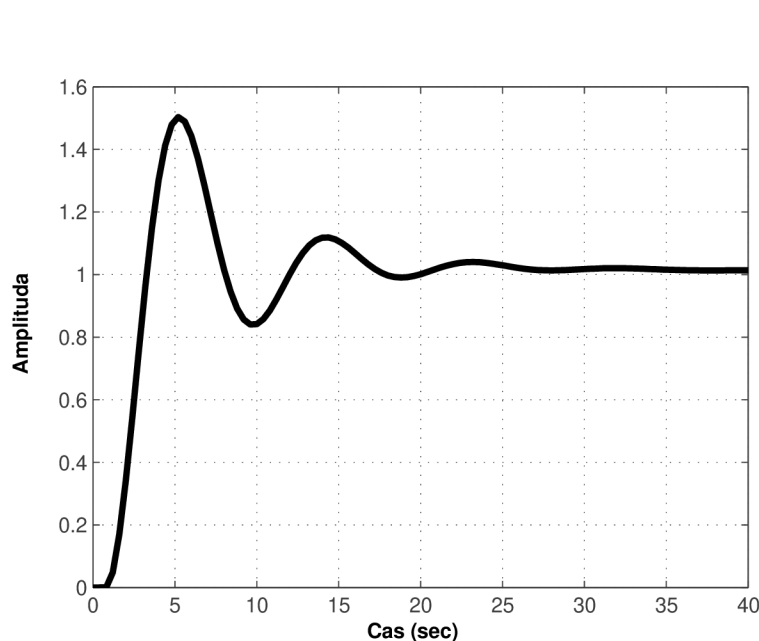


**Obr. 2.4: Frekvenční charakteristika otevřené smyčky se zesílením  $K=1$**

Posledním parametrem který zbývá určit je zesílení regulátoru  $K$ . Pomocí tohoto parametru se budou nastavovat optimální dynamické vlastnosti podle integrálního kritéria ITAE. Protože analytický výpočet je velmi pracný (vztahy

(2.5.1) a (2.5.2) ), použije se simulace pomocí počítačového programu. Tento program iteruje přes možná zesílení a ukládá hodnoty ITEA kritéria. Na konci svého provádění zobrazí průběh závislosti hodnoty kritéria na zesílení. Dále vyhledá nejlepší řešení a to vytiskne. Vývojový diagram programu je na obrázku 2.6.

Přestože je ITAE kritérium považováno za kritérium, díky němuž bývá maximální překmit odezvy regulované veličiny na skokovou změnu žádané hodnoty do 30%, v tomto případě tomu tak není. Jak je vidět z obrázku 2.5, překmit



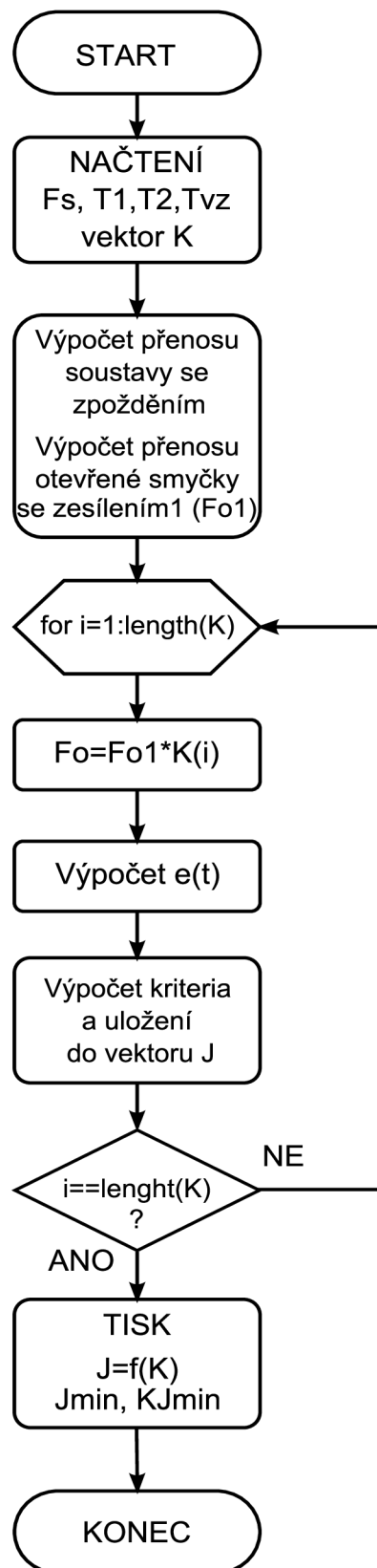
přechodové charakteristiky je 50%. Tento nežádoucí efekt způsobuje astatismus 2.řádu, díky kterému při snižování zesílení dochází

**Obr. 2.5: Odezva reg. veličiny na skokovou změnu žádané hodnoty získaná pomocí integrálního kritéria kvality ITAE**

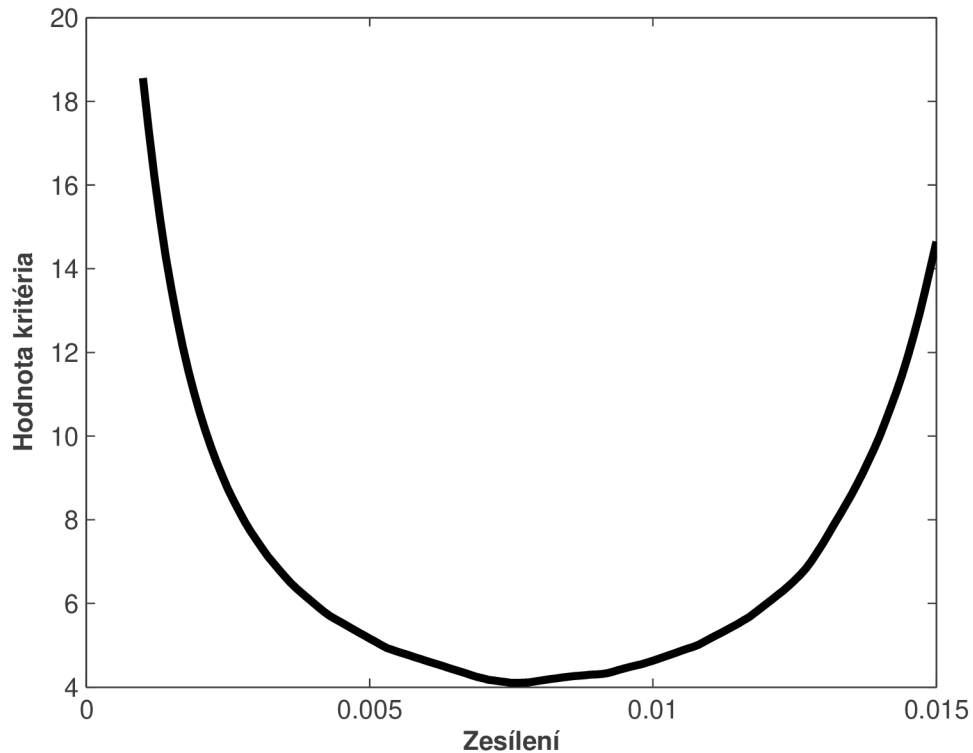
k velkému zpomalení přechodného děje. Proto ITAE kritérium vykazuje vyšší hodnoty zesílení a zde není vhodné. Ovšem k tomu, aby bylo dosaženo optimální regulace, musí existovat nějaké kritérium. Menší maximální překmit by mělo zajišťovat modifikované ITAE kritérium, definované následovně

$$J_m = \int_0^{\infty} |e(t)| \cdot t \cdot e^{-(t-1)} \cdot dt \quad (2.5.17)$$

Díky této modifikaci klesá význam odchylek s rostoucím časem.



Obr. 2.6: Vývojový diagram programu na výpočet integrálního kritéria



**Obr. 2.7: Závislost hodnoty kritériální funkce na zesílení**

S pomocí modifikované kritériální funkce ITAE byl určen koeficient zesílení  $K=0.0075$  (viz obr.2.7), při kterém vykazuje funkce nejmenší hodnotu. Navržený PID regulátor má tedy tvar

$$Fr_1(p) = \frac{0,0075(30p + 1)(5p + 1)}{p(0,05p + 1)} \quad (2.5.18)$$

Nyní je potřeba přepočítat spojitý PID regulátor na diskrétní PSD pomocí převodních vztahů.

$$Ti = T_1 + T_2 - \varepsilon = 30 + 5 - 0,05 = 34,95$$

$$Td = \frac{T_1 T_2}{Ti} - \varepsilon = \frac{30 \cdot 5}{34,95} - 0,05 = 4,242 \quad (2.5.19)$$

$$Kr = Ti \cdot K = 34,95 \cdot 0,0075 = 0,262$$

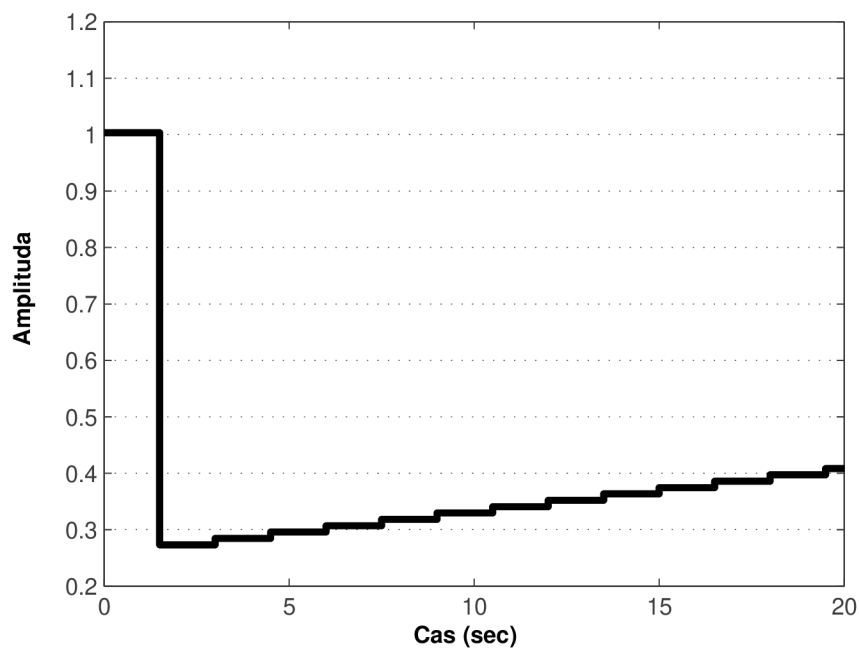
$$D_0 = Kr = 0,262$$

$$D_1 = \frac{T_{vz}}{T_i} = \frac{1,5}{34,95} = 0,0429 \quad (2.5.20)$$

$$D_2 = \frac{Td}{T_{vz}} = \frac{4,242}{1,5} = 2,828$$

PSD regulátor bude mít tvar

$$\begin{aligned} R_{11}(z) &= D_0 \left( 1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} D_1 + (1-z^{-1}) D_2 \right) = 0,262 \left( 1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} 0,0429 + (1-z^{-1}) 2,828 \right) = \\ &= \frac{z^2 - 1,73z + 0,741}{z^2 - z} \end{aligned}$$



Obr. 2.8: Přejchodová charakteristika regulátoru  $R_{11}$

### 2.5.2 Regulátor $R_{22}$

Opět je potřeba si určit přenos soustavy, na který se bude regulátor navrhovat. Jednotlivé přenosy soustavy (2.5.11) dosadíme do (2.5.12) a dostáváme

$$F_{S_2}(p) = \frac{6}{p(5p+1)(10p+1)} - \frac{\frac{1}{p(p+1)^2} \cdot \frac{3}{p(5p+1)(10p+1)}}{\frac{2}{p(p+1)(5p+1)}} = \frac{4,5}{p(p+1)(10p+1)} \quad (2.5.21)$$

Přenos otevřené smyčky s PID regulátorem bude mít tvar

$$F_{O_2}(p) = \frac{K \cdot 4,5(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p^2(p+1)(5p+1)(\varepsilon p + 1)} e^{-\frac{T_{vz}}{2} p} \quad (2.5.22)$$

Perioda vzorkování bude stejná jako v případě regulátoru  $R_{11}$ , tedy 1,5s. Měnit se nebude ani realizační konstanta. Časové konstanty  $T_1$  a  $T_2$  budou navrhnuty opět metodou frekvenčních charakteristik.

Dedukce bude podobná jako při návrhu časových konstant prvního regulátoru. Amplitudová charakteristika začíná se sklonem -40dB/dek a proto musí být první nula regulátoru umístěna na frekvenci nižší, než na které je umístěna větší časová konstanta soustavy (0,1rad/s). Tomu vyhovuje hodnota větší časové konstanty prvního regulátoru a proto je tato hodnota ponechána  $T_1=30s$ . Druhá nula regulátoru opět prodlouží část charakteristiky se sklonem -20dB/dek a její velikost je  $T_2=10s$ .

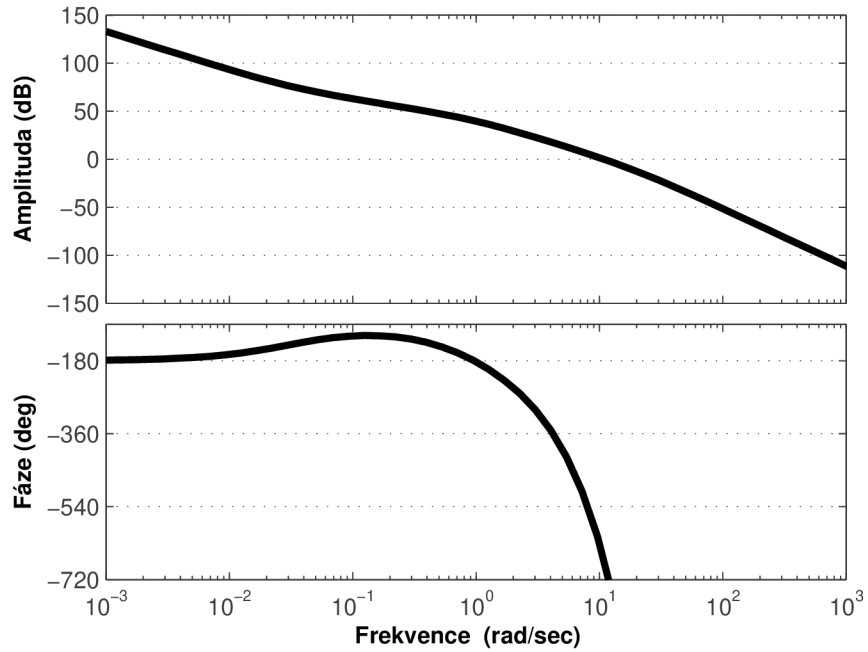
Po tomto návrhu má otevřená smyčka tvar

$$F_{O_1}(p) = \frac{K \cdot 4,5 \cdot (30p + 1)}{p^2(p+1)(0,05p + 1)} e^{-0,75p} \quad (2.5.23)$$

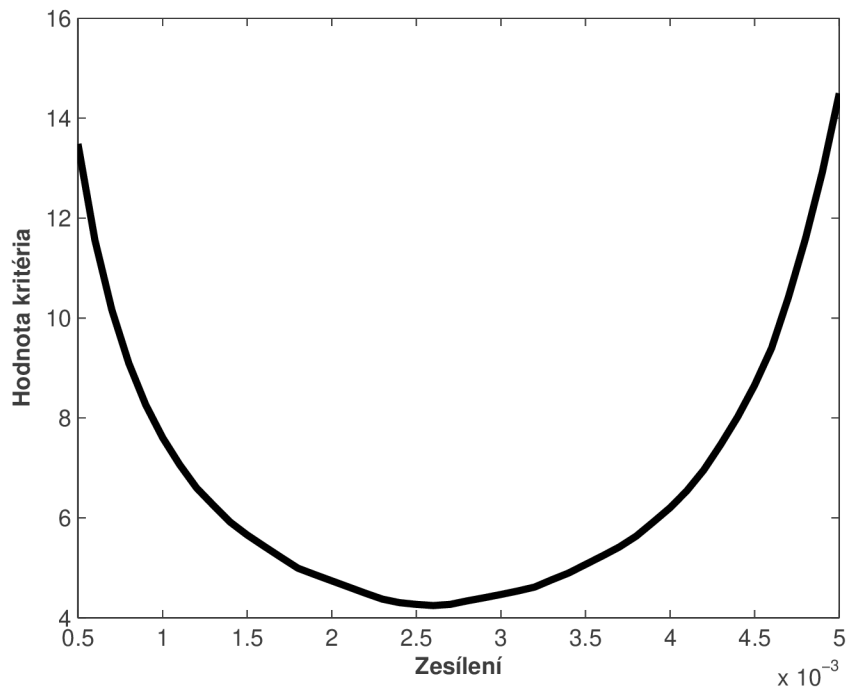
Na obrázku 2.9 je znázorněna amplitudová a fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích se zesílením regulátoru  $K=1$ .

Zesílení regulátoru  $K$  se opět použije jako parametr do kriteriální funkce, pomocí jejíž hodnot dojde k optimálnímu nastavení. Zase se použije modifikované ITAE kritérium.





Obr. 2.9: Frekvenční charakteristika otevřené smyčky se zesílením  $K=1$



Obr. 2.10: Závislost hodnoty kritériální funkce na zesílení

Graf na obrázku 2.10 naznačuje vhodné zesílení regulátoru  $R_{22}$ . Přesně je tato hodnota rovna  $K=0,0026$ . Spojitý PID regulátor má tvar

$$Fr_2(p) = \frac{0,0026(30p+1)(10p+1)}{p(0,05p+1)} \quad (2.5.24)$$

Přepoččet na PSD regulátor

$$Ti = T_1 + T_2 - \varepsilon = 30 + 10 - 0,05 = 39,95$$

$$Td = \frac{T_1 T_2}{Ti} - \varepsilon = \frac{30 \cdot 10}{39,95} - 0,05 = 7,459 \quad (2.5.25)$$

$$Kr = Ti \cdot K = 39,95 \cdot 0,0075 = 0,104$$

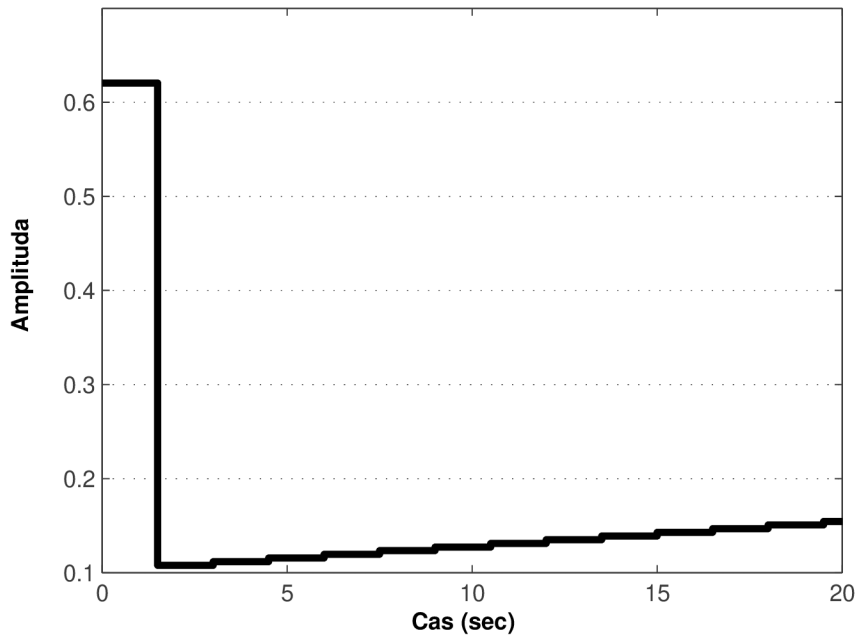
$$D_0 = Kr = 0,104$$

$$D_1 = \frac{T_v z}{Ti} = \frac{1,5}{39,95} = 0,03755 \quad (2.5.26)$$

$$D_2 = \frac{Td}{T_v z} = \frac{7,459}{1,5} = 4,973$$

Výsledný PSD regulátor

$$\begin{aligned} R_{22}(z) &= D_0 \left( 1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} D_1 + (1-z^{-1}) D_2 \right) = 0,104 \left( 1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} 0,03755 + (1-z^{-1}) 4,973 \right) = \\ &= \frac{0,62z^2 - 1,13z + 0,52}{z^2 - z} \end{aligned}$$



Obr. 2.11: Přechodová charakteristika regulátoru  $R_{22}$

### 2.5.3 Výpočet přenosů regulátorů $R_{12}$ a $R_{21}$

Podle vzorců 2.1.4 a 2.1.5 v diskrétní podobě vypočítáme potřebné přenosy

$$R_{12}(z) = -\frac{S_{12}(z)}{S_{11}(z)} R_{22}(z)$$

$$R_{21}(z) = -\frac{S_{21}(z)}{S_{22}(z)} R_{11}(z)$$

$$R_{12}(z) = \frac{-1.172z^5 + 0.666z^4 + 3.193z^3 - 3.728z^2 + 0.8739z + 0.1614}{z^5 + 1.431z^4 - 2.615z^3 + 0.09235z^2 + 0.0912z} \quad (2.5.27)$$

$$R_{12}(z) = \frac{-0.1308z^5 - 0.213z^4 + 0.6617z^3 - 0.301z^2 - 0.04022z + 0.01721}{z^5 + 1.02z^4 - 3.624z^3 + 1.278z^2 + 0.3267z} \quad (2.5.28)$$

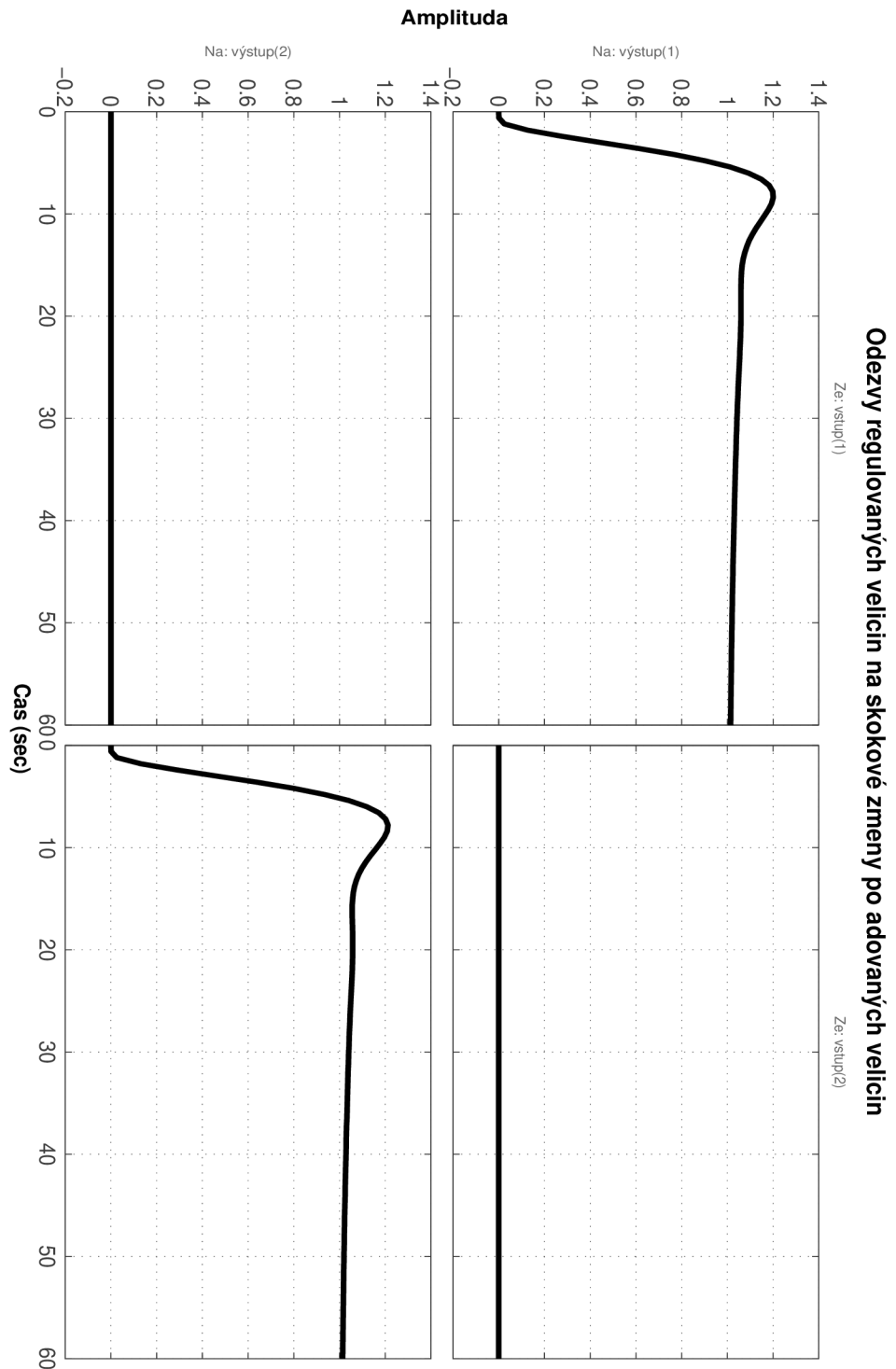
#### 2.5.4 Zhodnocení kvality regulace

Tato kapitola nemá za úkol hodnotit kvalitu navrženého regulačního obvodu, neboť v předchozích kapitolách bylo ukázáno, že regulátory jsou nastaveny na optimum podle vybraného kritéria. Kapitola spíše demonstruje chování regulačního obvodu na různé vstupní signály.

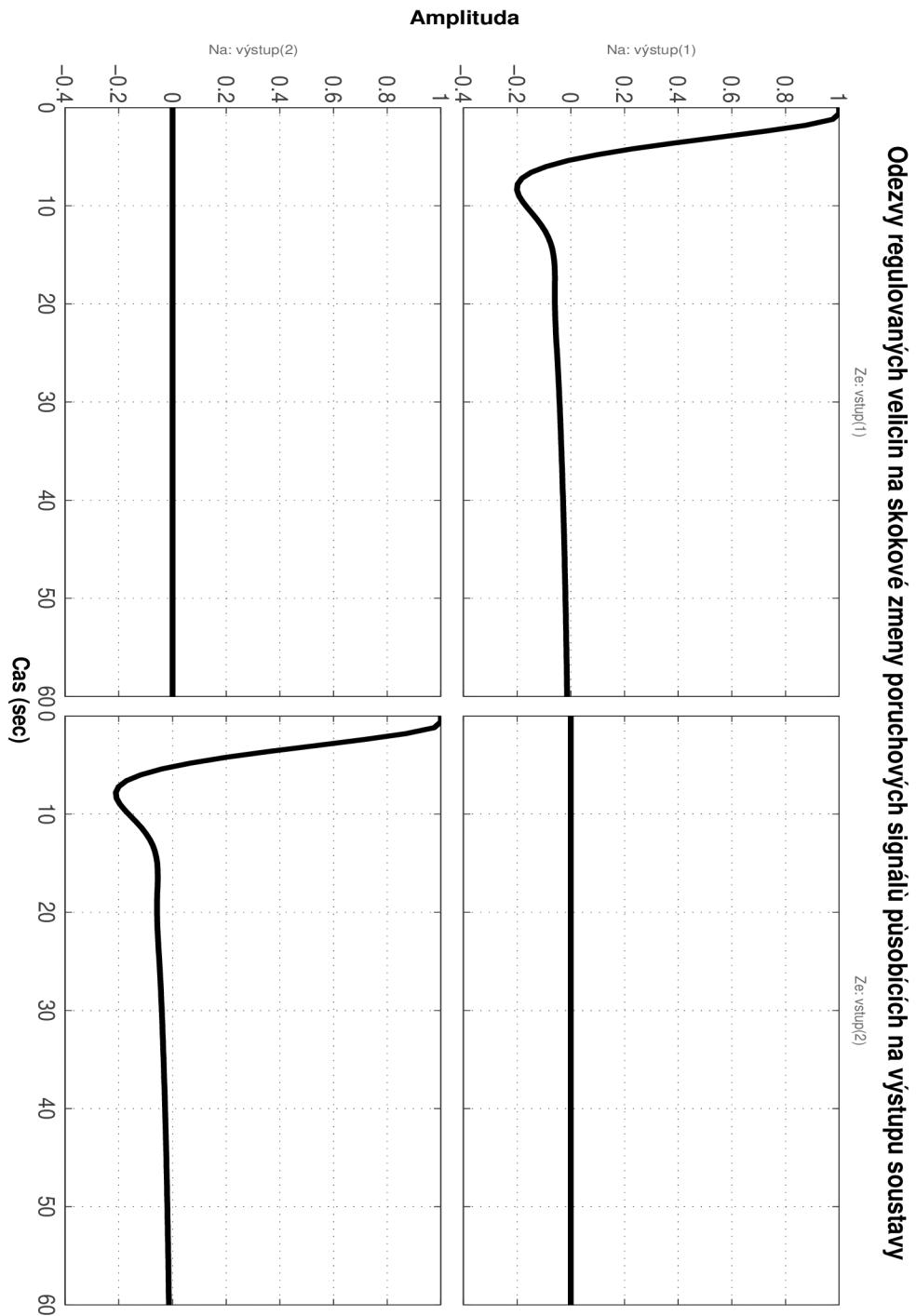
Na Obrázku 2.12 jsou vykresleny průběhy odezev regulovaných veličin na skokové změny požadovaných hodnot. Jak výstup 2 při skokové změně na vstupu 1, tak výstup 1 při skokové změně na vstupu 2 nereaguje, čímž je dokázána autonomnost systému.

Odezvy na skokové změny poruchových signálů působících na výstupech soustavy jsou znázorněny na obrázku 2.13, odezvy na poruchové signály působící na vstupech soustavy na obrázku 2.14. Poruchy na vstupech soustavy jsou mnohem hůře vyregulovány, než poruchy na výstupech.

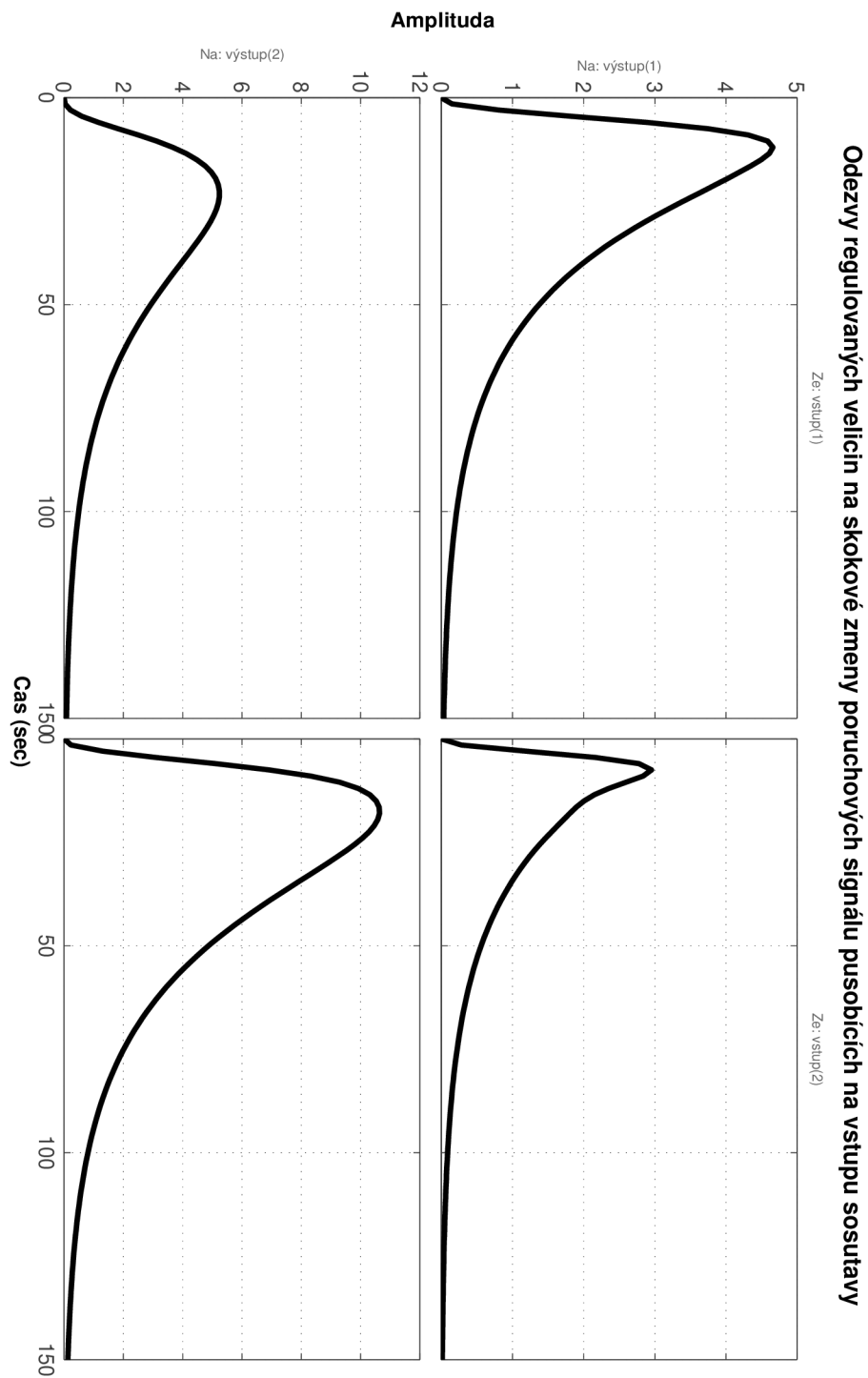
na obrázcích 2.15 a 2.16 jsou zobrazeny akční zásahy regulátorů  $R_{11}$  a  $R_{22}$ .



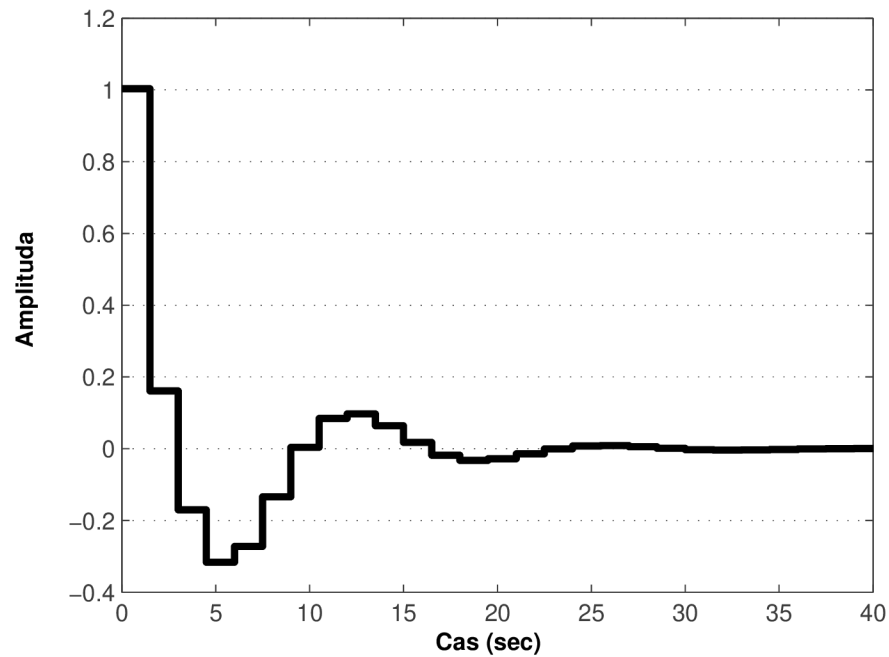
Obr. 2.12: Odezvy regulovaných veličin na skokové změny žádaných hodnot



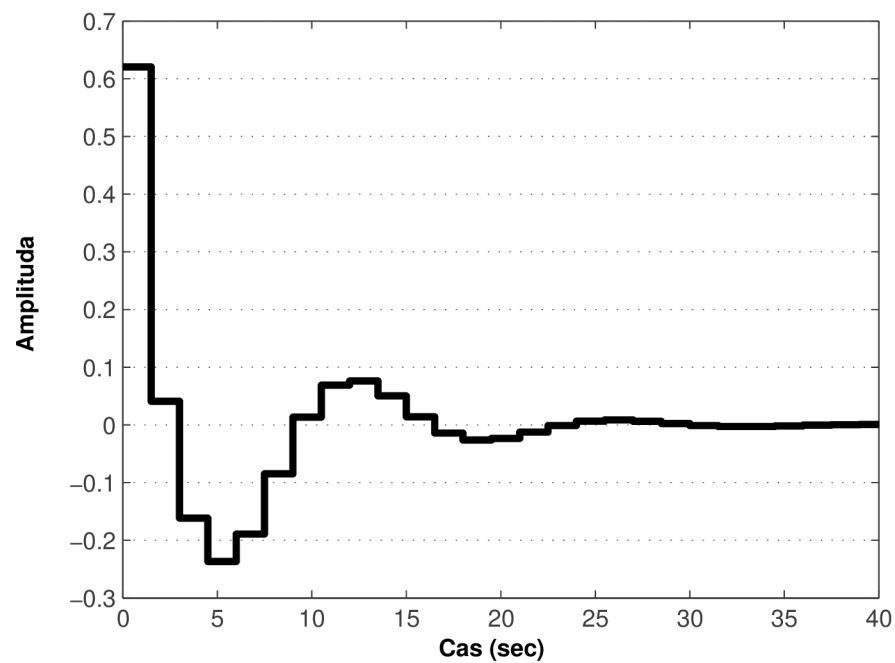
**Obr. 2.13: Odezvy reg. velicin na skokove zmeny poruchovych signalu působících na výstupu soustavy**



**Obr. 2.14:** Odezvy reg. veličin na skokové změny poruchových signálů působících na vstupu soustavy



Obr. 2.15: Akční zásah regulátoru  $R_{11}$  při skokové změně žádané hodnoty



Obr. 2.16: Akční zásah regulátoru  $R_{22}$  při skokové změně žádané hodnoty



### 3. ZÁVĚR

Bylo dosaženo návrhu matice regulátorů při splnění autonomnosti a invariantnosti systému. Návrh byl optimalizován na modifikované integrální kritérium ITEA. Způsob návrhu, který demonstruje tato práce, není jediný možný. Například autonomní regulaci je možno zajistit diagonální maticí regulátorů spolu s maticí filtrů v přímé větvi.

Myslím si, že výše popsany návrh je názorný a věcný a poslouží všem, kteří mají o tuto problematiku zájem.

## LITERATURA

- [1] VAVŘÍN, P., ZELINA, F. *Automatické řízení počítače*. SNTL, Praha, 1977
- [2] KUČERA, V. *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*. London, 1991
- [3] HAVLENA, V., ŠTECHA, J. *Moderní teorie řízení*. ČVUT, 1994
- [4] BLAHA, P., VAVŘÍN, P. *Řízení a regulace 1*. VUT, Brno, 2004, E-text