Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Funkční myšlení studentů matematiky na počátku jejich studia na pedagogických fakultách v ČR

DIZERTAČNÍ PRÁCE

Zpracovala: Mgr. Leona Salvetová

Školitel: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Olomouc 2015

Autor: Mgr. Leona Salvetová

Název: **Funkční myšlení studentů matematiky na počátku jejich studia na pedagogických fakultách v ČR**

Studijní obor: Pedagogika

Školitel: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Oponenti: prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.

doc. PaedDr. Katarína Žilková, CSc.

Místo obhajoby a vystavení práce: Pedagogická fakulta UP Olomouc

Žižkovo nám. 5, 771 40 Olomouc

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem dizertační práci zpracovala samostatně a použila jen prameny uvedené v seznamu literatury. Souhlasím, aby má práce byla po úspěšné obhajobě uložena na Univerzitě Palackého v Olomouci v knihovně Pedagogické fakulty a byla zpřístupněna ke studijním účelům.

V Bojkovicích 4. 5. 2015 Leona Salvetová

Poděkování

Ráda bych poděkovala své školitelce doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za podporu, důvěru a podněty, které mi během zpracování mé dizertační práce poskytovala.

Za konzultace ke statistickému zpracování dat děkuji doc. PhDr. Miroslavu Chráskovi, Ph.D. Za poskytnutí konzultace ke zpracování teorie myšlení děkuji doc. PhDr. Ireně Plevové, Ph.D. Také chci poděkovat prof. PhDr. Heleně Grecmanové, Ph.D. za konzultace, přínosné rady a připomínky k dizertační práci.

Děkuji taky všem zúčastněným vysokým školám, které mi vyšly vstříc při realizaci výzkumu, a také všem studentům a pedagogům, kteří na výzkumu participovali.

Zvláštní poděkování patří mé rodině, mým přátelům za podporu a povzbuzení.

Obsah

Teoretická část

1 Úvod

Myšlení se zkoumá z hlediska jeho hlavních funkcí. Je to formování pojmů, rozpoznávání a nacházení vztahů, vyvozování závěrů z výchozích předpokladů (usuzování), řešení problémů a vytváření něčeho nového (Plháková, 2004).

Funkční myšlení řadíme mezi kognitivní neboli poznávací procesy specifické pro člověka. Jak sám název zdůrazňuje, jde o procesy zúčastněné v poznávání skutečnosti. Je to činnost mozku, při kterém dochází ke zpracování informací. Umožňuje především analyzovat a syntetizovat vlastnosti, vztahy mezi předměty, jevy a řešit teoretické i praktické problémy.

Pro funkční myšlení je důležitý smysl pro kauzalitu (příčinnost jevů), cit pro závislosti. Chápání vztahu mezi příčinou a následkem je schopnost, která se vyvíjí v závislosti na stádiu ontogenetického vývoje pod vlivem osobních zkušeností (podnětnost výchovného prostředí) a dispozic (kognitivní styl, úroveň rozumových schopností). Klade požadavky na logickou přesnost usuzování, je charakteristické aktivností, pružností a cílevědomostí, pohotovostí paměti, hloubkou a šířkou myšlení.

Zahrnuje vnímání závislostí v běžném životě, jejich sledování a chápání i schopnost postihnout jejich charakter, souvisí se schopností vidět vztahy mezi určitými objekty. Vychází z předpokladu, že v přirozeném i umělém světě existuje mezi objekty a podmínkami celá řada dočasných i trvalých vztahů, přičemž ke změnám dochází uvnitř systémů spolu souvisejících objektů nebo v podmínkách, při nichž se navzájem ovlivňují různé objekty. V mnoha případech se změny projevují v průběhu času nebo změna v jednom objektu nebo veličině souvisí se změnou v jiném objektu či veličině (Blažková, 2007).

Funkční myšlení využívá člověk v praktickém životě každý den. Člověk se v životě dostává do různých situací. V některých situacích si vystačí na základě vnímání a představivosti. Jsou ale i situace, kdy si nevystačí jen s těmito procesy ani se svou zkušeností. Tím je člověk nucen pronikat i do jiných situací, poznávat, chápat vzájemné vztahy a souvislosti.

Chceme-li se vypořádat s těmito situacemi či problémy, samo vědění nepostačuje, rozhodující způsobilostí jsou jeho aplikace v praxi, které pedagogové označují jako dovednosti. Největší podíl na konstruování poznatků a dovedností má proces učení. Výchova a vzdělávání ve školách vedou žáka k rozvíjení vyjadřování (postupné chápání jazyka, pěstování neverbálního a symbolického vyjadřování), k rozvíjení poznávacích schopností (řešení úloh, tvorba pojmů, rozvoj myšlení, pěstování aplikací) a pěstování postojů žáka (rozvíjení představivosti, formulace vlastních myšlenek apod.). Výchova a vzdělávání tak přispívají pozitivně ke zvýšení úrovně i kvality myšlení a inteligence jedince a jeho úroveň ovlivňuje postoj k veškeré poznávané skutečnosti.

Každý člověk se narodí s určitými vrozenými dispozicemi intelektových schopností. Do jisté míry lze na rozvoji intelektových schopností zapracovat. Lidský mozek se rád učí a rozvíjí, jen je třeba ho přinutit k aktivní činnosti. Zásadní náplní každé výchovy a vzdělání, jak uvádí současné učebnice pedagogiky, je především výchova myšlení. Jestliže ve vzdělávání chybí tendence rozvíjet schopnost myšlení, projeví se tento nedostatek ve zdůrazňování snadnějších výukových metod.

Největší péči o rozvoj funkčního myšlení v kurikulárních dokumentech (RVP ZV, RVP G, Standardy matematiky) spatřujeme ve vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* konkrétně ve vzdělávacím obsahu *Závislosti, vztahy a práce s daty* (RVP ZV) a *Závislosti a vztahy* (RVP G), kde jsou uvedeny konkrétní požadavky na rozvoj funkčního myšlení žáka. Tyto okruhy rozpracovávají změny a závislosti, které jsou projevem běžných jevů reálného života, seznamují s jejich různými reprezentacemi. Vedou žáky k uvědomění si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu.

Teoretická část dizertační práce je zaměřena především na objasnění a pochopení pojmu funkčního myšlení a jeho charakteristiky. Vycházíme z informací o myšlení v obecné rovině z pohledu psychologického (pojem myšlení a jeho vlastnosti, formy a druhy myšlení, myšlenkové operace) a dalších psychických procesů úzce souvisejících s myšlením (představivost a vnímání). Dále se zabýváme matematickým myšlením jako nadřazeným termínem k funkčnímu myšlení ve vztahu k inteligenci, nabízíme možnosti rozvoje funkčního myšlení ve vyučování matematiky atd. Nedílnou součástí je kapitola s názvem Současný stav řešené problematiky, která obsahuje vybraná česká a zahraniční výzkumná šetření vztahující se k funkčnímu myšlení, dále se zabýváme rozvojem funkčního myšlení jako výukového cíle a možnými faktory ovlivňujícími úroveň funkčního myšlení.

Empirická část zjišťuje funkční myšlení studentů matematiky na pedagogických fakultách v ČR na počátku jejich vysokoškolského studia v roce 2012. Dále zkoumá vliv pohlaví studenta a faktorů, vztahujících se k jeho předchozímu studiu na střední škole, popř. na vysoké škole, na funkčního myšlení jedince. Nástrojem výzkumu jsme zvolili nestandardizovaný didaktický test, u něhož popisujeme i jeho vlastnosti (reliabilita, citlivost a obtížnost testových úloh). Tato část práce prezentuje průběh celého výzkumu (pilotáž, předvýzkum, výzkum), projekt výzkumu, provádí rozbor testových úloh, charakterizuje výzkumný vzorek, stanovuje a ověřuje zformulované hypotézy.

Závěrečná kapitola nabízí shrnutí závěrů ze statistického zpracování dat a výsledků statistik a dává doporučení pro realizaci v praxi a další rozvoj vědy.

2 Výzkumné problémy, cíle práce a její metodologie

Pokud se vyučující spokojí u žáků pouze se znalostí faktů a bude opomíjet aplikaci, srovnání, souvislosti, řešení netypických úloh a problémových situací a náčrty, rozvoj myšlení a nejen funkčního omezí. Zejména u studentů fakult připravujících učitele bychom měli věnovat značnou pozornost rozvoji funkčního myšlení, které budou rozvíjet u svých žáků.

2.1 Výzkumné problémy

Z důvodu nedostatků ve funkčním myšlení studentů při řešení úloh s funkčním obsahem, problémů a v učivu funkcí v hodinách povinných přednášek a seminářů v předmětu matematická analýza, vedlo k formulování následujících výzkumných problémů.

P1: České i zahraniční výzkumy poukazují zejména na nedostatečně rozvinuté funkční myšlení žáků základních a středních škol. Projevují se tyto nedostatky i u studentů prvního ročníku matematiky na pedagogických fakultách v ČR?

P2: Ovlivňuje typ střední školy funkční myšlení studenta?

P3: Jaké další faktory mohou ovlivnit funkční myšlení budoucích učitelů matematiky na počátku jejich studia?

2.2 Cíle a struktura dizertační práce

Dizertační prací chceme zachytit situaci na katedrách matematiky pedagogických fakult v ČR. Hlavním cílem zamýšlené dizertační práce je **zjistit a posoudit funkční myšlení studentů matematiky na pedagogických fakultách v ČR na počátku jejich vysokoškolského studia v roce 2012.**

K dosažení stanoveného cíle dizertační práce bylo studium relevantních teoretických podkladů, jejichž hlavní myšlenky jsou shrnuty v první – **teoretické části** práce.

Dílčí cíle **teoretické části** dizertační práce jsou stanoveny následovně:

- *popsat* současný stav zkoumané problematiky;
- *vymezit* a *charakterizovat* základní pojmy – myšlení, matematické myšlení, funkční myšlení, inteligence;
- *navrhnout* způsoby rozvoje funkčního myšlení ve výuce matematiky;
- *vymezit a charakterizovat* požadavky na rozvoj funkčního myšlení ve školním kurikulu;
- *poukázat* na *psychologické a jiné faktory* jako předpoklady poklesu úrovně funkčního myšlení.

Empirická část je druhou částí dizertační práce a klade si cíle:

- *zjistit a posoudit* funkční myšlení studentů matematiky v prvním ročníku na počátku jejich bakalářského studia na všech pedagogických fakultách v ČR;
- *stanovit* míru úspěšnosti řešení jednotlivých úloh;
- *zjistit* nedostatky studentů ve funkčním myšlení vzhledem ke školnímu kurikulu;
- *navrhnout* vhodná opatření ke zvýšení úrovně funkčního myšlení;
- *zjistit*, zda je a jak funkční myšlení studentů ovlivněno pohlavím a jejich předchozím studiem na střední popř. vysoké škole.

2.3 Metodologie dizertační práce

K dosažení stanovených cílů byl navržen kvantitativní výzkum. Jako nástroj měření výzkumu jsme zvolili nestandardizovaný didaktický test z matematiky. Pro ověřování hypotéz byly zvoleny statistické metody – Studentův t-test a metoda analýzy rozptylu.

3 Funkční myšlení

3.1 Myšlení

Myšlení řadíme mezi intelektuální (rozumové) poznání. Je to nejvyšší forma poznávání a projev inteligence.

3.1.1 Definice myšlení

Dosud neexistuje konkrétní teorie, která by integrovala poznatky o myšlení, ba ani jednotná definice myšlení jako psychologického jevu. Pojem myšlení bývá spojován s prací s informacemi a jejich využitím při řešení problémů.

Na ukázku uvádíme vymezení pojmu myšlení dle Nakonečného (2011, s. 297), který chápe myšlení jako „*proces, který z daných informací vytváří informace nové nebo původní informace přetváří za účelem jejich použití při řešení problémů*". Podobně avšak stručněji charakterizuje myšlení Plháková (2004, s. 262) jako „*proces zpracování a využívání informací*".

Podle našeho názoru v takových pojetích myšlení spatřujeme nedostatečně kladený důraz na nejdůležitější funkci myšlení, a to je rozpoznávání a nacházení vztahů a souvislostí mezi informacemi. Domníváme se dokonce, že tato funkce myšlení je v dnešním světě pro každého člověka, jež je denně zahlcen velkým množstvím informací v různých podobách, nejdůležitější. Na základě správného pochopení podstaty informací a jejich analýzy, spojením informací do souvislostí a vztahů vytváříme novou informaci, je nám umožněno řešit teoretické i praktické problémy.

V naší dizertační práci se ztotožňujeme s charakteristikou pojmu myšlení u Vágnerové (2000, s. 94). Její definování pojmu myšlení je proti výše zmíněným výstižnější a konkrétnější. Zachycuje podstatu a funkce myšlení. Většina lidí si pod pojmem informace představí slovo nebo pojem. Vágnerová (2000, s. 94) ve své definici myšlení spojuje pojem informace i s kognitivními prvky, které s myšlením úzce souvisí. Konkrétně popisuje myšlení jako „*mentální manipulaci s různými informacemi* *(tj. s kognitivními prvky, vesměs prezentovanými v symbolické podobě: vjemy, představami, symboly nebo znaky), která slouží k porozumění jejich podstaty a k analýze různých souvislostí a vztahů, na jejichž základě odvozuje jedinec určité závěry*“ (Vágnerová, 2000, s. 94).

3.1.2 Myšlenkové operace

Při myšlení provádíme myšlenkové operace s různými mentálními reprezentacemi, k nimž patří vjemy, představy, pojmy, abstraktní znaky a elementární myšlenky, které vedou k objevování a využívání strukturních, funkčních, resp. kauzálních a účelových vztahů mezi objekty a jejich vlastnostmi (Plháková, 2004). Myšlenková operace jako stavební jednotka řízeného myšlení je prostředkem dosahování cíle, funkčním útvarem, formací, která přetrvává jako dovednost osvojená na určité úrovni vývoje myšlení a umožňuje jedinci realizovat určitým způsobem činnost. Myšlenkové operace nevystupují samostatně, ale jako soustava vzájemně souvisejících funkčních složek činnosti (Paulík, 2004). Myšlenková činnost nastává v okamžiku, když před člověka vyvstane určitá otázka, úkol. Pokud je úkol správně formulován, člověk je schopen nalézt odpověď bez přemýšlení pomocí slov, ale třeba i s pomocí symbolů.

Rozlišujeme následující typy myšlenkových operací (Paulík, 2004):

- **komparace –** všeobecná operace myšlení, která vyúsťuje ze zjištění, zda jsou dva předměty nebo jevy totožné, podobné nebo odlišné;
- **analýza –** pomocí myšlení uskutečňovaný rozklad předmětu nebo jevu na jednotlivé části;
- **syntéza –** spojení jednotlivých prvků předmětů nebo jevů do smysluplného celku;
- **indukce –** usuzování z vlastností nebo zákonitostí, které platí pro jednotlivé prvky, zákonitosti, které platí pro nějakou třídu nebo skupinu případů;
- **dedukce –** usuzování z vlastností nebo zákonitostí, které platí pro nějakou třídu jevů. Jde o operaci myšlení, která směřuje od konkrétního případu k obecné poučce;
- **abstrakce –** koncentrace myšlení na zachycení podstatných a odhalení nepodstatných znaků a vlastností předmětů, jevů a událostí;

- **konkretizace –** koncentrace na konkrétní, názorné, vnímatelné vlastnosti a znaky pomocí smyslových orgánů;
- **generalizace –** dochází ke tvorbě myšlenky nebo hodnocení, aplikovatelné na celou třídu jevů nebo událostí. Jde o podřízení jednotlivých jevů nějakému všeobecnému principu;
- **specifikace –** utváří myšlenky nebo hodnocení, týkající se jevu jako odlišného od všech příbuzných či podobných jevů, podobá se konkretizaci.

3.1.3 Formy myšlení

Vývojově nejvyšší a specificky lidskou formou myšlení je pojmově logické myšlení, které se opírá o operace s pojmy. Baron (1998, s. 246-247) vymezuje pojem jako „*mentální kategorii, do které zařazujeme předměty, události, zkušenosti nebo ideje, které jsou si v jednom nebo více aspektech podobné*“.

Člověk si osvojuje pojmy v procesu pojmového učení (zjištění a poznání podstatných znaků a jejich významů pro člověka, možnost užití v různém smyslu). Pojmy jsou výsledkem vývoje myšlení a řeči. V myšlení člověka se běžně pojem určitým způsobem váže k představě, která pomáhá jeho aktualizaci a dodává mu individuálně zabarvený obsah (Paulík, 2004).

Při utváření pojmů hraje hlavní roli bezprostřední osobní zkušenost a slova, která mají díky společenské podmíněnosti důležitou úlohu v procesech zobecňování a abstrakce. Vygotskij (1970) rozlišuje tři stupně tvorby pojmů: shrnutí konkrétních znaků na základě jejich příbuznosti, zobecnění vztahů a souvislostí, abstrahování a izolování prvků skrytých v konkrétních věcech.

Má-li jedinec utvořený pojem, znamená to, že rozumí reálným vlastnostem, vztahům a souvislostem ve třídě předmětů nebo jevů souhrnně označovaných určitým slovem. Nakonečný (2011) rozlišuje pojmy konkrétní, abstraktní, jedinečné a obecné.

Soudem rozumíme uvedení dvou pojmů do vzájemného vztahu. Postihované vztahy se vyznačují různou složitostí a odlišností pochopení. Relativně snadno chápeme vztahy mezi konkrétními předměty postižitelné ve smyslu (větší – menší, silnější – slabší apod.).

Vztahy mezi abstraktními pojmy jsou na pochopení obtížnější. Velmi obtížné bývá správné pochopení a interpretace kauzálních vztahů (co je příčinou a co následkem jevů) (Paulík, 2004). Výsledkem vyvozování jedněch soudů z druhých je *úsudek* (Petrová, Plevová, 2006).

3.1.4 Druhy myšlení

Myšlení dělíme podle závislosti na tom, z jakých aspektů ho analyzujeme. V řadě knih obecné psychologie (např. Homola, 1992) se setkáváme s dělením myšlení na tři základní druhy, přičemž rozlišovacím kritériem jsou psychické obsahy (mentální reprezentace), s nimiž provádíme myšlenkové operace. Mezi ně řadíme *konkrétní*, *abstraktní* a *názorné* myšlení.

Konkrétní myšlení spočívá ve smysluplné manipulaci s předměty, vjemy nebo jejich představami. *Abstraktní myšlení*, uskutečňované na úrovni pojmů a konceptů, které se reprezentují obyčejně ve verbální podobě a jsou produktem vyšších forem zevšeobecňování a abstrakce. *Názorné myšlení* se vyznačuje operací nejčastěji s vizuálními představami v mysli (Plháková, 2003).

Souhlasíme s názorem Košče (1986), že výše uvedené dělení je poněkud zjednodušující. Člověk totiž zpravidla aplikuje na danou problémovou situaci komplexní kognitivní schéma, model či rámec, které výrazně ovlivňují následné zpracování informací. Proto se dále podrobněji budeme zabývat dalšími druhy myšlení z různých hledisek, které považujeme stejně jako Košč (1986) za důležité a úzce související s řešením problémů a zpracováním informací. V naší dizertační práci se přikláníme k jeho klasifikaci myšlení.

Košč (1986) *podle charakteru zadaného problému a podle způsobu jeho řešení* rozlišuje konvergentní a divergentní myšlení. *Konvergentní myšlení* vede k jednomu řešení problému, k jedné správné odpovědi. U *divergentního myšlení* jde o mnohostranné myšlení. Je charakteristické velkým množstvím odpovědí nebo řešení, při čemž se vytváří něco nového – nový pojem, metoda řešení.

Z hlediska uvědomění myšlení dělí myšlení na diskursivní a intuitivní. *Diskursivní myšlení* postupuje ve formě vyhraněného logicky usměrňovaného výběru řetězců asociací. Celý proces myšlení je uvědomován. Naopak *intuitivní myšlení* probíhá pod prahem vědomí. Vyznačuje se náhlým vynořením řešení, jako nápad, vhled či intuice (Košč, 1986).

Podle podnětů k myšlení dělí myšlení na reaktivní a spontánní. *Reaktivní myšlení* navazuje na nějaký podnět z vnějšího prostředí. Je ve formě rychlého, účelného a efektivního hledání nejvhodnější reakce na podnět. *Spontánní myšlení* je podmíněné a regulované z vnitra organismu. Vnitřní podnět bývá často spontánní a vůlí vyvolaný nedořešený problém (Košč, 1986).

Na základě sledování určitého záměru či cíle rozlišuje myšlení záměrné a nezáměrné. U *záměrného myšlení* jde o vůlí navozené a usměrňované myšlení. Záměrné na rozpamatování se na správné řešení nějakého problému, když se už jednou takové řešení našlo nebo na nalezení nového řešení. *Nezáměrné myšlení* se vyznačuje vynořením myšlenek bez toho, aby se myslící o to snažil a zaměřil se na nějaký cíl (Košč, 1986).

Domníváme se, že většina jiných autorů ve své klasifikaci myšlení zohledňují některá hlediska stejná jako Košč (1986), shodují se v dělení a charakteristice některých druhů myšlení. Na ukázku uvádíme klasifikaci myšlení Nakonečného (2011), který taktéž analyzuje myšlení podle charakteru zadaného problému a podle způsobu jeho řešení na *konvergentní* a *divergentní myšlení*. Z hlediska uvědomění myšlení rozlišuje myšlení na *diskursivní* a *intuitivní*. Za důležité rozlišovací kritérium myšlení považuje také psychické obsahy (mentální reprezentace), s nimiž provádíme myšlenkové operace. Na základě tohoto kritéria rozlišuje dva druhy myšlení *obrazově názorné (vizuální)* a *pojmově logické*. Podle charakteristiky obrazově názorné myšlení (Nakonečný, 2011) můžeme konstatovat, že zahrnuje vlastnosti myšlení konkrétního a názorného. Neboť obrazově názorné myšlení je charakteristické operací s vjemy, představami a uplatňuje se převážně při řešení konkrétních praktických úkolů. Stejně tak pojmově logické myšlení úzce souvisí s myšlením abstraktním. Spočívá v operacích s pojmy a uplatňuje se při řešení abstraktních problémů.

Existují však i autoři, kteří ve své klasifikaci myšlení přikládají větší váhu jinému aspektu, podle něhož myšlení dělí. Klasifikaci myšlení se zřetelem k odlišným vývojovým úrovním uvádí Vygotskij (1956).

3.1.5 Vlastnosti myšlení

Úroveň myšlení zaručují jeho vlastnosti, které charakterizují určitého jedince, jsou to *šířka myšlení,* která udává rozsah otázek, které je myšlení schopno postihnout. *Hloubka myšlení* umožňuje pronikat k podstatě jevů. *Samostatnost myšlení* se uplatňuje ve schopnosti samostatně zpracovat data, zkušenosti, nalézat v nich smysluplné vztahy a souvislosti. *Tvořivost myšlení* souvisí se samostatností a spočívá ve schopnosti nově zpracovávat informace a řešit problémy doposud neznámými způsoby. *Pružnost myšlení* opouští navyklá schémata, plasticky se přizpůsobuje změnám podmínek, hledá více možností navázaných na obvyklé postupy. *Důslednost* se projevuje schopností směřovat k vytyčenému cíli, dodržovat logický sled operací. *Kritičnost a sebekritičnost* spočívá ve střízlivém a objektivním posuzování vlastních a cizích myšlenek vzhledem k praxi (Paulík, 2002).

3.1.6 Psychické procesy úzce související s myšlením

Myšlení souvisí s vnímáním a představivostí, které mu dávají živost a jsou jeho základem. Na druhé straně je podmíněno sociálně, spojuje se s řečí. Velmi obecně lze říct, že podstata myšlení spočívá v operacích s vjemy, představami a vnitřní řečí.

3.1.6.1 Představivost

Představivost charakterizujeme jako „*psychický poznávací proces tvorby představ*". Tvoří přechod mezi poznáváním smyslovým (názorným) a abstraktním (rozumovým). Představivost vede k vytváření představ (Švingalová, 1991, s. 62).

Linhartová (2000) rozumí pojmu představy jako názorné obrazy předmětů a jevů, které v daném okamžiku zkoumáme nebo které jsme v takové podobě vnímali. Jsou výsledkem představivosti. Jsou nevyhnutelnou složkou jakékoliv lidské činnosti.

Vytváření představ je jedním z nejdůležitějších projevů psychiky, zakládá samostatnost individuálního psychického života a zajišťuje kontinuitu psychického dění

(Linhart, Sedláková, 1983). Nutnou podmínkou vzniku představy je schopnost mozkové kůry uchovat vjemové obrazy modalit vnějšího světa.

Schopnost vytvářet a vybavovat přesné představy se rozvíjí v činnosti, zejména v cílevědomé práci – závisí na učení a výchově. Ve velké řadě případů se setkáváme se sepětím představivosti a předmětné činnosti, jenž umožňují hlouběji objasnit vznik plánů řešení úloh, které v sobě obsahují senzoriální i představové a myšlenkové prvky. Všechny tyto prvky se projevují ve formování strategie řešení problémových situací, v reflexi úkolu a uvědomování dosaženého stupně při řešení úlohy. Toto sepětí umožňuje objasnit úlohu významu a znaku (symbolu, slova) pro rozvoj představivosti. Znaky (např. slova) kódují a fixují jednotlivé výsledky představivosti, čímž umožňují jejich rychlejší zapamatování a věrnější reprodukování (Linhart, Sedláková, 1983).

Rozlišujeme představy (Eysenck, Keane, 2008):

a) **podle způsobu vzniku**

- *paměťové představy* – jsou to obrazy, které reprodukují něco, co je nám známé.
- *fantazijní představy* – vznikají v procesu fantazie, na podkladě paměťových stop. Dělení:
    - *reprodukující* – navozují se slovním popisem nebo nákresem (grafické nebo symbolické zobrazení) – např. schémata, matematické symboly apod.;
    - *tvůrčí* – utvářejí se nové, originální obrazy, které dosud neexistovaly, jsou součástí tvořivého procesu.

b) **podle podílu konkrétnosti a abstraktnosti**

- *jedinečné* – jsou to představy určitého konkrétního předmětu, jevu apod., zahrnují určitý stupeň zobecnění a abstrakce, neboť vystupují do popředí charakteristické rysy a znaky;
- *obecné* – jsou ve smyslu schematické, chybějí v nich znaky, svým abstraktním a obecným charakterem tvoří přechod k pojmovému myšlení.

3.1.6.2 Vnímání

Vnímání je názorné poznávání skutečnosti pomocí smyslových orgánů. Je to základní psychický poznávací proces, nižší stupeň poznávání. Umožňuje přijímat a podle předem připraveného programu vybírat informace (Švingalová, 1991).

Vnímání se uskutečňuje analyticko-syntetickou činností mozkové kůry. Nejprve dochází k analýze vnímaného předmětu na jednotlivé složky a ty se potom spojují v celek - vjem (Hartl, 1993).

Hartl (1993) charakterizuje vjem jako výsledek vnímání s prožitkem a uchovaný v paměti a zkušenostech člověka.

Mezi vlastnosti lidského vnímání řadíme *kauzalitu* (vztah následku a příčiny), *předmětnost* – každý vjem i jeho obsah je odrazem určitého předmětu a prostřednictvím činnosti se k němu vztahuje. Mezi další vlastnosti vnímání řadíme *kontinuitu a diskontinuitu, konstantnost* (Linhart, Sedláková, 1983).

3.2 Matematické myšlení a inteligence

Matematické myšlení plně odpovídá charakteristice, která přísluší myšlení obecně, ovšem má také své zvláštnosti způsobené předmětem a metodami matematického vědění. Jde o zvláštnosti projevující se v *obsahu* a *rozsahu* (proces abstrakce a složky matematického myšlení), *činnostech* (matematické operace), *prostředcích* a *formách* (pojmotvorný proces, logický základ, styl matematického myšlení) a v *subjektivních rysech* (morálně volní vlastnosti). Jednotlivé prvky matematického myšlení nevznikají a nepůsobí izolovaně (Luhan, 1990).

Straková (2002) považuje *matematické myšlení* za konkrétní intelektuální dovednost, která se používá při řešení matematických úloh. Na stejném názoru se shodují i Švec a Trna (1998) ve své klasifikaci dovedností ve výuce matematiky.

Každou intelektovou činnost jako i matematické myšlení lze plně charakterizovat jako organizované řešení úloh, opírající se o logický program navzájem spjatých operací, který se uskutečňuje s jistým cílem, sleduje jistou otázku, řeší jistou úlohu, na kterou není možné odpovědět bezprostředně. Postupuje se s určitým cílem, který představuje determinující tendenci celého myšlenkového procesu a spočívá v odpovědi na otázku, na kterou je možné odpovědět jen postupným řešením a vyřešením úlohy (Lurija, Cvetkova, 1966).

Hlavním rysem matematického myšlení je abstrakce. *Abstrakcí* tedy rozumíme *„myšlenkovou činnost, při níž pomocí analýzy jistých pojmů, jevů docházíme k obecným poznatků, teoriím, k vědění*“ (Luhan, 1990, s. 29). Matematické abstrakce poskytují vysoce jednostranný obraz skutečnosti a vyznačují se operativností a stupňovitostí. Matematika abstrahuje od všech konkrétních určení, jevů a procesů, např. pojmy číslo, sčítání, funkce, násobení apod.

Mezi *složky matematického myšlení* řadíme *konkrétní* a *abstraktní* myšlení, *funkční* a *algoritmické* myšlení, *strukturní* a *prostorové* myšlení (Luhan, 1990).

Za základ matematického myšlení považujeme inteligenci. Gardner (1993, s. 15) definuje inteligenci jako *„schopnost řešit problémy nebo vytvářet produkty, které jsou pro konkrétní kulturu nebo komunitu důležité*“. Je nutno rozlišovat různé druhy inteligence, které se uplatňují v řešení problémů různého druhu. Významnou teorii rozmanitých inteligencí je teorie Gardnera (1999). K funkčnímu myšlení stejně tak jako k nadřazenému termínu matematické myšlení se z těchto dílčích inteligencí váže *logicko-matematická inteligence*, *prostorová* a *jazyková inteligence*. V kontaktu s matematickou úlohou, kterou žák řeší, se projevují i další druhy inteligence.

Logicko-matematická inteligence vzniká, když se člověk učí chápat logické a matematické operace a vztahy. Člověk s dobře rozvinutou matematicko-logickou inteligencí je schopen myslit koncepčně a abstraktně a je způsobilý rozlišovat logické nebo matematické závislosti, chápe příčinu a důsledek, preferuje úlohy typu řešení úkolů, potřebuje uspořádání: tabulky, diagramy; rád věci porovnává či dává do kontrastu. Díky ní může počítat, zvažovat, provádět matematické a logické operace. Pomáhá při induktivním i deduktivním myšlenkovém procesu (Plháková, 1999).

Tento typ inteligence je pod kontrolou dvou mozkových zón. Schopnost číst a vytvářet matematické znaky patří mezi funkce levé hemisféry, zatímco porozumění vztahům mezi čísly a číselnými pojmy předpokládá zapojení pravé hemisféry (Gardner, 1993).

Schopnost rozeznat a zapamatovat si obrazce, vnímat a rozlišovat barvy, tvary, velikosti a vzdálenost mezi předměty určuje *prostorová inteligence*. Lidé s prostorovou inteligencí mají třídimenzionální představivost a výborně se orientují v prostoru. Jádrem této inteligence jsou schopnosti, které zajišťují přesné vnímání vizuálního světa, umožňují transformovat a modifikovat původní vjemy a vytvářejí z vlastní vizuální zkušenosti myšlenkové představy. Jádro vnímání prostoru je nejspíše v pravé hemisféře. Oproti matematicko-logické inteligenci, která směřuje více k abstraktnímu myšlení, se prostorová inteligence snaží zůstat u konkrétního myšlení a zůstává spojena s konkrétním, jasným světem okolo nás (Gardner, 1999).

V řadě matematických problémů je třeba pracovat s jazykovými prostředky a představovat si věci v prostoru a orientovat se v něm. Jak dobře umí jedinec zacházet s jazykem a vyjadřovat se v něm ústně i písemně ukazuje *jazyková inteligence* (Helus, 2009).

Z rozdělení inteligence podle Sternberga (1977) se při řešení matematických problémů uplatňuje *abstraktní inteligence*, *konkrétní inteligence* a *praktická inteligence*. *Abstraktní inteligence* je schopnost chápat abstraktní problémy a operovat s verbálními a matematickými symboly. *Konkrétní inteligence* je schopnost chápat konkrétní problémy a operovat s objekty a *praktická inteligence* je schopnost založená na řešení praktických problémů a vyjadřuje způsobilost učit se ve smyslu praktického uplatňování zkušeností.

Cattel (1971) předpokládal, že všeobecná inteligence má dvě části, *fluidní* a *krystalizovanou*. *Fluidní inteligence* se vyznačuje schopnost vnímat vztahy nezávisle na školním vzdělávání, představuje potencionální schopnost řešit problémy. Zatím co *krystalizovaná inteligence* je mentální schopností odvozenou od předcházejících zkušeností.

Thurstone (1938) dospěl k několika různým faktorům inteligence. Jsou to: verbální chápání, verbální plynulost (schopnost pohotového slovního vyjadřování), numerický faktor (elementární matematické operace), percepční rychlost, prostorová představivost, paměť a induktivní usuzování. Mezi znaky inteligentního chování řadí Eysenck (1953):

- dobrá orientace a myšlení, přesné vyjadřování;

- ostré vnímání a dobrá paměť, tj. pohotové a přesné vybavení informací z paměti;
- koncentrované zaměření na daný objekt činnosti s pružným, rychlým a správným myšlením.

3.3 Pojem funkční myšlení

Termín funkční myšlení použil nejprve německý matematik Felix Klein, který společně s německými přírodovědci a matematiky v roce 1905 v Meranu uznávali význam matematiky pro formální vzdělávání a žádali rozvíjení schopnosti chápání matematických vztahů ve světě (Mikulčák, 1984). Důležitost rozvoje a návyku funkčního myšlení bylo jedním z požadavků meranského programu, který zdůrazňoval potřebu rozvoje matematického myšlení ve vyučování matematice.

Dosud neexistuje jednotná *definice pojmu funkční myšlení*. Někteří autoři spojují pojem funkční myšlení s pojmem funkce. Na ukázku uvádíme následující definice.

Američan Smith (2003, in Blanton, Kaput, 2004, s. 135) definuje funkční myšlení jako „*názorné myšlení, které se zaměřuje na vztah mezi dvěma (nebo více) proměnnými a pro které funkce znamenají názorný systém objevený nebo osvojený dětmi, který reprezentuje zobecnění vztahu mezi veličinami*“.

Mateljovi a Svetlík (2011) popisují funkční myšlení jako mentální schopnost, důležitou při učení o funkcích a pro úspěšné použití funkcí při řešení problémů.

Vollrath (1989, s. 15) definuje funkční myšlení jako „*typický způsob, jak myslet při práci s funkcemi*“.

S výše uvedenými názory na funkční myšlení se neztotožňujeme, neboť jsou silně spjaty s pojmem funkce. Podle nás se funkční myšlení začíná vyvíjet již mnohem dříve, než je pojem funkce ve školské matematice zaveden. Učivo funkcí považujeme za jednu z možností rozvoje funkčního myšlení. Souhlasíme s myšlenkou Divíška a kol. (1989), kteří chápou funkční myšlení jako schopnost uvědomovat si tyto závislosti (změna jedné veličiny vyvolává jednoznačnou změnu i druhé veličiny) mezi jevy reálného světa, chápat souvislosti probíhajících změn i jejich kauzální podmíněnost, popřípadě umět tyto změny matematicky vyjadřovat a v matematice i v praxi využívat.

Domníváme se, že teprve po pochopení a zkoumání těchto závislostí můžeme směřovat k pochopení pojmu funkce.

Jiní autoři se s názorem Divíška a kol. (1989) k dané problematice vyjadřují podobně.

Beathy a Bruce (2012) chápou funkční myšlení jako analyzování vzorů (numerických a geometrických) k určení změny a rozpoznání vztahů mezi dvěma sadami čísel. Tento přístup zahrnuje zkoumání, jak se určitá množství vztahují nebo se změní na jiná množství.

Pejsar (1990, s. 124) chápe funkční myšlení jako „*schopnost představivosti proměnlivosti veličin ve vzájemné spojitosti a podmíněnosti*“.

Blanton et al. (2011, s. 47) charakterizují funkční myšlení jako „*zobecnění vztahů mezi veličinami, vyjádření těchto vztahů slovy, symboly, tabulkami nebo grafy a uvažování s těmito různými reprezentacemi při analýze funkčního chování*“.

Za důležitou charakteristiku funkčního myšlení považujeme pochopení závislostí probíhajících změn a příčin, vztahu mezi dvěma různými veličinami a uměním je popsat slovně i matematicky (symboly, tabulkou, diagramy a grafy), uvažovat s těmito reprezentacemi při analýze funkčního chování. V naší dizertační práci se přikláníme a vycházíme z definování pojmu funkční myšlení dle Blantona et al. (2011, s. 47), neboť tuto charakteristiku funkčního myšlení nejvýstižněji reflektují.

Luhan (1990) mezi hlavní *rysy funkčního myšlení* řadí dynamický, operativní přístup k matematickým jevům a jejich příčinné postižení různými vztahy, představu matematických objektů v pohybu, změně, snahu po obsahových interpretacích matematických jevů, pozornost aplikacím matematiky, převádění výrazů s čísly a proměnnými v jiné výrazy, převádění grafů a číselných údajů do výkresů a obráceně.

Funkční myšlení klade požadavky na *logickou přesnost usuzování*, je charakteristické *aktivností*, *pružností* a *cílevědomostí*, *pohotovostí paměti*, *hloubkou* a *šířkou* myšlení. Opírá se o matematickou a logickou terminologii, frazeologii a symboliku, utváří *morálně volní vlastnosti*. Rozvíjí smysl pro *kritičnost*, *sebekritičnost*, *efektivnost* úvah. Navyká žáky na *pravidelnou* a *poctivou* práci, vede k *zodpovědnosti* za správné řešení, vede k *překonávání překážek* úsilím vyřešit úkol v plnosti. Při tom učí *skromnosti*, *pečlivosti* a *pořádku organizace řešení*, *členitosti myšlení* a *grafickému projevu* (Luhan, 1990).

3.4 Ontogeneze funkčního myšlení

Vývoj funkčního myšlení prochází jednotlivými fázemi, které na sebe vzájemně navazují. Každá fáze znamená objevení nových schopností, která umožňuje reorganizaci dětského myšlení.

Pro myšlení dítěte **předškolního věku (4–6 let),** často nazvané prekauzální myšlení, je typické spojení jevů ve vnímání dítěte do kauzálních vztahů. Vyskytují se zárodky kauzality (*„Co se musí stát, aby...?“*), kdy si dítě na základě životních zkušeností tvoří představu kvantitativních vazeb kauzálních jevů, např. *posun páčky hlasitosti mění intenzitu zvuku televize*, *kohoutkem na vodovodu se reguluje proud vody* atd. (Hejný, 1989).

Oproti předškolnímu dítěti nabývá **myšlení školáků (7–11 let)** díky dosaženým kvalitám konkrétního myšlení schopnost řešit problémy stále pružněji. V této etapě přibývá řada schopností zvyšující operativnost myšlení. Dítě je schopno operací diferenciace předmětů podle různých kritérií, zvratného neboli reverzibilního myšlení a decentrace, což znamená nahlížení na určitý jev z různých pozic (Helus, 2009).

Od 7. roku věku dítěte se již vyskytuje přegrupování prvků v představě založené na "vnitřním mentálním jednání". Rozumové poznávání se začíná opírat o analýzu tvořící základ přesnějšího odrážení tvarů, názorných obrazů a dějů, postihování jejich podobností i rozdílů atd. (Piaget, 1953). Řazení podle pravidla zahrnujícího více kritérií. Základem je pochopení pravidla např. *Řaď malé a světlé kuličky na začátku a větší a tmavé na konci.* Určování relačních vztahů a tvoření uspořádaných dvojic při porovnávání počtu prvků množin, například *každé kočce přiřaď klubíčko vlny na hraní. Čeho je víc?* Logické operace s větším počtem kritérií tedy napomáhají k poněkud "realističtějšímu" chápání skutečnosti.

Sedmileté děti začínají ve svých úvahách již běžně uplatňovat argumenty vyplývající z následujících tří typů konkrétních myšlenkových operací (Piaget, 1953):

- *kompenzace* (hladina vody ve vysoké nádobě je vyšší, ale nádoba je užší);
- *reverzibilita* (vylijeme-li vodu zpět do původní nádoby, dosáhneme původní hladiny);
- *identita* (žádná voda nebyla přidána, ani ubrána, musí jí být tedy stejně).

Souhrnně se tyto operace nazývají "*grupování*" a vzájemně se doplňují. Jejich prostřednictvím dítě začíná chápat stabilitu i kontinuitu vnější reality a dynamickou rovnováhu jejich struktur (Piaget, 1953).

V této etapě taky dochází k formování matematického myšlení. Pro manipulaci s matematickými symboly shledává Kratochvíl (2006) zvláště podstatné osvojení:

- *kvantifikace vztahů* (větší, menší, stejný) – děti si všechny tyto aspekty osvojují v rámci názorných operací, východiskem utváření "pojmu čísla" je tak "řazení" (pořadí představuje zároveň počet);
- *klasifikace* (schopnost třídění podle určitých "klíčů") a *inkluze* (zahrnutí do podmnožin);
- *konzervace (*zachování množství při změně vnější formy).

Období 8–9 let je tedy již optimální pro efektivní chápání míry, váhy, objemu, včetně osvojování účinné strategie řešení, zobecňování apod. Zachycení vztahů mezi jevy a objekty, k pozorování speciálních relací (ekvivalence, uspořádání, zobrazení) jako předpokladu k pochopení pojmu zobrazení. Procvičováním násobilky a sčítáním při doplňování tabulek se utváří dostatečný návyk na pochopení uspořádané dvojice čísel.

Piaget (1970) zjistil, že do 11 let je pro děti obtížné přetvořit prostorové vztahy v představách (určit změnu vlastní pozice při otočení mapy atp.). To již vyžaduje obecnější a tím i pružnější nahlížení vztahů. Teprve 11leté a starší děti jsou např. *schopné předvídat tvar a velikost stínu v závislosti na poloze předmětu vůči zdroji světla*.

V **období dospívání (12–17 let)** se výkonnost poznávacích procesů, tedy i myšlení dovršuje. Myšlení dospívajících spočívá v racionálně logickém odhalování vztahů (struktur álních, funkčních, účelových, aj.) s cílem nalézat fakta k řešení problémů. Vývoj myšlení postupuje od názorných operací s konkrétními jevy či jejich označením v dětství k formálním operacím s abstraktními verbálními či neverbálními symboly, od postupů empiricko induktivních k hypoteticko-deduktivnímu usuzování, od myšlení konvergentního k divergentnímu atd. Piaget (1970) toto stadium vývoje nazývá formální operace, jejíž základem je proces abstrakce.

Abstrakce umožňuje vyvozování nových souvislostí operacemi se vztahy mezi zástupnými znaky. Myslet formálně tedy znamená myslet až nezávisle na konkrétních jevech. Pubescenti (13–14 let) zpravidla nedokážou ještě uskutečňovat formální operace bez opory názornosti (nákres, model), teprve adolescenti (16–17 let) myslí spolehlivě na úrovni formálních operací. Formální operace spočívají v transponování logických operací z úrovně konkrétních a názorných manipulací do roviny pouhých „operací se vztahy“ bez přímé vazby na názornost (Piaget, 2006).

3.5 Funkční myšlení a řeč

Největší úspěchy lidského druhu pramení z jeho schopnosti vytvářet složité myšlenky a sdělovat je druhým. Souhlasíme s názorem Hejného a Kuřiny (2001), kteří se domnívají, že dobře realizované vyučování vede k rozvíjení vyjadřování žáka (postupné chápání jazyka matematiky, pěstování neverbálního a symbolického vyjadřování), k rozvíjení poznávacích schopností (řešení úloh, tvorba pojmů, rozvoj myšlení, pěstování aplikací matematiky) a pěstování postojů žáka (rozvíjení představivosti, formulace vlastních myšlenek apod.).

Řeč je nástroj myšlení a forma dorozumívání, *jazyk* představuje prostředek dorozumívání (Linhartová, 2008). Jedinec řečí zachycuje, vyjadřuje a sděluje výsledky svého myšlení, kterých dosáhl vykonáním myšlenkových operací. V průběhu vývoje se mění, slovní zásoba se obohacuje a vznikají nová slova pro vyjádření potřebných sdělení. Jazyk zvyšuje rychlost a výkonnost myšlení.

Melichar (2003, s. 147) uvádí, že „*myšlení a jazyk jsou vzájemně spjaté jevy, kdy myšlení jako nejvyšší forma odrazu skutečnosti se vyjadřuje a realizuje pomocí jazyka. Myšlení je spojeno s jazykem, fyziologicky je myšlení i jazyk podmíněno druhou signální soustavou a slouží k poznávání světa a komunikaci mezi lidmi. Jazyk je způsobem existence myšlení, jako fyzickým nositelem*“. Stejného názoru je i Krejčí (1925). Myšlení chápe jako složitější činnost duševní, konaná prostřednictvím řeči za účelem poznání.

Ve Vygotského (1970) koncepci má důležitý fenomén tzv. *vnitřní řeč*. Termínem vnitřní řeč rozumí nezvučnou řeč, která probíhá tehdy, když člověk o něčem přemýšlí, řeší potichu nějaký problém, vytváří si v duchu nějaké plány, vzpomíná, učí se z textu apod. Z hlediska psycholingvistiky je vnitřní řeč charakterizována jako fáze generování výpovědi, která předchází vnější řeči a tvoří mezistupeň mezi komunikativní intencí mluvčího a její realizací ve výpovědi. Mnozí psychologové dokonce vnitřní řeč a myšlení ztotožňují. Jedním z představitelů této teorie je Watson (1919).

Vygotskij (1970) byl k zájmu vnitřní řeči veden Piagetem (1970), který zkoumal zejména myšlení dítěte a rozpracoval teorii kognitivního vývoje, která vysvětluje růst dětské inteligence jako zdokonalování struktur myšlení. Vygotskij (1970) se Piagetovými názory (1970) výrazně inspiroval, ale současně s některými polemizoval. Podle Piageta (1970) existuje mezi vývojem řeči vnější a vnitřní přechodný stupeň tzv. *egocentrická řeč*, tj. způsob užívání jazyka v raném stadiu ontogeneze, při němž dítě hovoří převážně jen samo pro sebe, jeho řeč není sociálně zaměřená, neplní komunikativní funkci. Postupně však odumírá a ztrácí se na prahu školního věku. Podle Piageta (1970) dítě ve věku 6-7 let myslí a mluví egocentricky a teprve po tomto období vzniká řeč socializovaná.

Řeč, kterou člověk vyjadřuje své myšlenky navenek, ať už v podobě písemné nebo zvukové nazýváme *vnější řeč*. Při verbální řeči hraje hlavní roli obsahová a formální stránka projevu. Při výuce matematiky se klade důraz na striktnost vyjadřování, poněvadž odráží přesnost myšlení (Vygotskij, 2004).

K typicky školnímu vyjádření poznatků a představ dochází při zkoušení žáka, nejčastěji formou písemného řešení úlohy. Žák věci promýšlí, aktualizuje některé své znalosti, vytváří si příslušnou představu a artikuluje ji. Dělá tedy dvě různé činnosti – první je ryze matematická – řešení úlohy, druhá je komunikační – vyjádření myšlenek, které proběhly nebo právě probíhají v hlavě žáka.

Ke zkonkrétnění různých pojmů a myšlenek, které jsou jen ve slovní formulaci často obtížně pochopitelné, pomáhá vizualizace. Pojmem *vizualizace* rozumíme operaci transformující určitý jev, jeho strukturu, systémotvorné vazby a charakteristické vlastnosti do podoby umožňující jeho zrakové vnímání. Vizualizace myšlenek a abstraktních poznatků se stává v současnosti velmi důležitou výbavou každého člověka. Není pochyb, že by měla ve výuce na všech stupních školského systému zaujmout čestné místo (Spousta, 2007).

Vizuální gramotnost se chápe buď jako dovednost nebo jako schopnost. Bývá vymezena jako schopnost porozumět („*číst*") a používat („*vytvářet*") obrazy, myslet a učit se v termínech obrazů (Hortin, 1980, s. 43).

Psaná řeč je zvláštní jazyková funkce, která vyžaduje pro svůj alespoň minimální vývoj vysoký stupeň abstrakce. Je to řeč v myšlení, v představách, ale zbavená materiálního zvuku. Psaná řeč nutí jednat intelektuálněji, vyjádření myšlenek musí být přesnější. Proto je tato řeč pro jedince psychicky náročnější (Linhartová, 2008). Naprosto jednoznačné a srozumitelné je matematické vyjádření, při kterém používáme znaky a symboly (matematická znaménka). S jejich pomocí se informace sděluje rychle a nezávisle na tom, zda ten, ke komu se obracíme, ovládá jazyk, ve kterém se vyjadřujeme, jednotlivým jevům ze skutečnosti přiřazujeme pojmy (slovní pojmenování) a s nimi pak při myšlení pracujeme.

Matematické symboly umožňují vizuálně vnímat a graficky realizovat, a to bez prostředních vztahů k mluvené či psané řeči. Každý symbol má charakter zprávy, signálu nebo informačního kódu. Všechny komunikační a symbolické funkce se asociují centrálně v mozku. Navenek se projevují dvěma způsoby. Na vstupní straně formou identifikací, porozumění přijímaných informací a na výstupní straně formou formulace a automatické produkci odevzdávané informace. Obsahy informací se projevují ve velmi široké škále od těch nejjednodušších (písmeno, číslice, hláska,…) až po velmi složité a komplexní (matematické vzorce,…) (Košč, 1987).

Psaná řeč může mít v matematice i formu projevu grafického. Graf má obvykle podobu názorného schematického nákresu. Jeho význam spočívá v jeho názornosti, ve výraznosti prezentovaných informací, ve snadné a rychlé „čitelnosti" sdělovaného obsahu, v jednoduchosti sdělení. Graf prohlubuje, doplňuje a obohacuje verbální sdělení.

Pěstováním kultury grafického projevu může žák jasněji pochopit vztahy v matematických úlohách. Ke zvládnutí málo příjemného učiva je třeba, aby si žák nakreslil grafické znázornění a obrázek. Grafické řešení úlohy vyžaduje kromě teoreticky zvládnutého základu učiva i jistou úroveň prostorové představivosti.

3.6 Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky

Funkční myšlení a chápání vztahů mezi jevy spolu s rozvinutou prostorovou představivostí jsou důležitými předpoklady uvědomělého řešení úloh z praxe. Rozlišujeme dvě metody rozvíjení funkčního myšlení, je to *metoda přímá*, pro kterou je typická práce s funkcemi a studium jejich vlastností a *metoda nepřímá*, která spočívá v řešení matematických problémů a úloh s funkčním obsahem (Luhan, 1990).

3.6.1 Nepřímá metoda rozvoje funkčního myšlení

V této kapitole věnujeme pozornost nepřímé metodě rozvoje funkčního myšlení. Nejprve se zabýváme metodou řešení úloh s funkčním obsahem, neboť pro správné pochopení funkčního myšlení je potřeba naučit se nejprve řešit úlohy tohoto typu, a teprve pak plynule přejít k řešení praktických problémů.

3.6.1.1 Řešení úloh s funkčním obsahem

Dostatečně rozvinuté funkční myšlení u jedince se projevuje uvědoměním si závislosti (změna jedné veličiny vyvolává jednoznačnou změnu i druhé veličiny) mezi jevy reálného světa, pochopením závislostí probíhajících změn i jejich kauzální podmíněnosti. Na základě pochopení těchto závislostí je schopen je matematicky vyjádřit a umí je v praxi využít.

K posilování funkčního myšlení žáka dochází již na prvním stupni základní školy. Na prvním stupni základní školy se funkční myšlení rozvíjí především řešením úloh s funkčním obsahem. Pedagogický slovník nabízí vymezení učební úlohy jako každou pedagogickou situaci, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle (Průcha a kol., 2001).

V současné době v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání ve vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* v tematickém okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* jsou formulovány cíle vedoucí k rozvoji funkčního myšlení žáka. Tento vzdělávací okruh vede žáky k tomu, aby vyhledávali, vyhodnocovali a zpracovávali data jako dovednost typickou pro zdravé myšlení každého jedince, uměli soubory dat porovnávat, rozpoznali určité typy změn a závislostí, které se běžně projevují u jevů reálného světa a aby se seznámili s jejich reprezentacemi. Závislosti se učí analyzovat s tabulek, diagramů a grafů, tím se u žáka formuje dovednost číst a užívat jednoduché statistické tabulky a diagramy. Učí se závislosti sestrojovat a vyjadřovat je matematickým předpisem. Právě zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.

Tyto uvedené cíle, vedoucí k rozvoji funkčního myšlení na základní škole, naplňujeme ve školním vyučování tak, že nevyužíváme pojmy funkce a proměnná, ale využíváme jejich vlastnosti a takové výukové metody a postupy, které tyto pojmy poskytují. Například při provádění operací s čísly sledujeme, jak se mění výsledek operace v závislosti na změnách čísel vstupujících. Při řešení konstrukčních úloh sledujeme, jak se mění výsledek úlohy na změnách zadaných údajů. Sledujeme, zda mezi změnami veličin existuje určitý vztah, který je možno matematicky popsat a pokud existuje, snažíme se jej odhalit atd. Uplatňujeme tedy funkční přístup.

Úlohy s funkčním obsahem rozvíjí schopnost chápat závislost mezi jevy reálného světa, rozvíjí představivost matematických objektů v pohybu a změně a jsou zaměřeny na aplikaci matematiky v praxi. Vedou k pochopení a vyjádření funkční závislosti různými matematickými reprezentacemi a přecházením mezi nimi.

Poněvadž je pojem funkce zaváděn až v 9. třídě základní školy, nahrazujeme dosud pojem funkce pojmem přiřazení (prvku z jedné množiny přiřadím prvek druhé množiny). Přiřazování vede k vytvoření intuitivní představy o závislosti dvou (nebo více) proměnných, kterou lze popsat pomocí přiřazení.

Zadáním učební úlohy s funkčním obsahem je žák vystaven situaci, kdy musí volit vhodné postupy řešení, musí logicky uvažovat a přemýšlet nad možnostmi, které jsou jeho řešením, musí využívat složité myšlenkové operace k hledání správného řešení.

Úlohy s funkčním obsahem jsou složené ze tří momentů (Luhan, 1990):

- ve sledovaném problému najdeme měnící se matematické objekty, určíme hlavní vazby;
- hlavní vazby spojíme s příslušnými matematickými objekty, přejdeme od slovního spojení k matematickým vyjádřením, sestavíme potřebné matematické vztahy, tabulky, diagramy, grafy;
- získané matematické vztahy studujeme již známými matematickými prostředky, výsledky interpretujeme v jazyce studovaného problému.

Stehlíková (2007, s. 260) se zabývá úlohami, k jejichž řešení využíváme funkční přístup a podporují tak rozvoj funkčního myšlení:

- **Pozorování přírodních jevů** – zahrnuje úlohy, v nichž mají žáci pozorovat a měřit přírodní jevy, např. teplotu, vytvořit z údajů tabulku a vynést je do grafu. Příklad: *Zaznamenejte tabulkou a grafem věk všech žáků ve třídě a jejich výšku. Vytvořte „průměrného" žáka třídy. Vyšetřujte percentilové grafy.*
- **Plánování výletu** – tematický okruh, v němž jsou žákům zadány údaje a ti je mají interpretovat. Příklad: *Čtěte grafy změn teploty a vyberte určitý týden, který splňuje nějaké podmínky. Kombinujte podmínky.*
- **Úlohy ze života** – úkoly se týkají skutečných grafů funkcí jevů z reálného života. Příklad: *Interpretujte jízdní grafy, popište situaci z reálného života, kterou představují, sestrojte vlastní jízdní grafy.*

Řešení úloh s funkčním obsahem probíhá v následujících krocích. První krok řešení této úlohy vyžaduje nalezení měnících se veličin a vazeb mezi nimi. Dalším krok nazýváme matematizace, jehož obsahem je označení proměnných a nalezení matematických vztahů mezi nimi (Luhan, 1990).

Řešení úloh s funkčním obsahem přispívá k rozvoji funkčního myšlení jedince, má pozitivní vliv na rozvoje jeho intelektu a utváření morálně volních vlastností, zpřesňuje matematickou a logickou terminologii.

3.6.1.2. Řešení problémových úloh

S funkčním myšlením je spojován *problém*, tj. situace, v níž je dán cíl a hledají se cesty k jeho dosažení (Nakonečný, 1997).

Všechny problémy mají společné to, že vytvářejí nežádoucí situaci, která má být změněna. Prostředky změny nežádoucí situace v žádoucí jsou nástroje řešení problémů, tj. „*reálné nebo symbolické nástroje čili operátory*“ (Wendt, 1989, s. 245). Belkin a Willig (1990) omezují operátory na symboly, pojmy a představy.

V problémových situacích se v každodenním životě každý z nás ocitá neustále. Efektivita vyučování a učení ve škole spočívá v přiblížení co nejvíce praktickému životu (Kličková, 1989). Řeší-li člověk každodenně ve svém životě problémové situace, měly by se využívat ve škole k usnadnění osvojení vědomostí a dovedností a k rozvíjení myšlení (Pasch a kol. 1998).

Problémové situace ve vyučování matematiky navozujeme pomocí problémů, které jsou předkládány žákům v podobě problémových úloh. Problémová úloha má také význam pro motivaci žáků, odstraňuje pasivitu žáků. Učí žáky samostatně myslet, formulovat a vyjadřovat své myšlenky, povzbuzuje odpovědnost žáků za správné řešení. Řešením problémových úloh jsou osvojené vědomosti a dovednosti trvalejší a lépe je dovedou využívat (Kličková, 1989). Problémové úlohy musí vycházet z reálné životní situace nebo na ně navazovat. Problémová úloha by měla žáka podněcovat k uvažování, hledání, zkoumání.

Řešení těchto úloh rozvíjí schopnost žáků řešit situace, v nichž se prolínají prvky a pojmy z různých oborů, různé způsoby znázornění a různé postupy řešení, anebo situace běžného života.

Při řešení problémových úloh využíváme složitější myšlenkové operace, dochází ke změnám ve vlastnostech myšlení jedince, zvyšuje se úroveň jeho myšlení. Každou problémovou situaci je nutno analyzovat, zdůvodnit jednotlivé postupy řešení problémů.

Žáci by měli umět formulovat problém matematicky, umět matematizovat reálnou situaci. Aby problémové úlohy plnily svou vzdělávací a rozvíjející funkci, musí být přiměřeně náročné, musí využívat důvtipu žáků, musí je učit taktice a rozvaze.

Řešení problémových úloh má pozitivní vliv na rozvoj samostatnosti myšlení při zpracování informací a nalézat v nich smysluplní vztahy, řešením problémů dosud neznámými způsoby se rozvíjí tvořivost myšlení, hloubka a šířka myšlení, kritičnost a důslednost a hlavně pružnost myšlení jedince. Navyká k překonávání překážek úsilím plně vyřešit úkol.

Podle Nakonečného (2011) se přemýšlení opírá o vědění, tj. více či méně systematicky větší či menší množství poznatků, které jsou pro řešení problému relevantní. Chceme-li se vypořádat s problémy, samo vědění nepostačuje, rozhodující způsobilostí jsou jeho aplikace v praxi, které pedagogové označují jako dovednosti. Dovednosti jsou předpoklady úspěšného vykonávání konkrétní činnosti, člověk je může získat zafixováním určitých operací, procvičováním a učením (Paulík, 2002). Vzájemné propojení znalostí a dovedností velmi pozitivně ovlivňují schopnost řešit problémy.

Při řešení problémů jedinec pracuje s mentální (kognitivní) reprezentací problému. Americký psycholog Bruner (Hejný, M., Kuřina, F., 2001, s. 93) rozlišuje tři *typy reprezentací*:

- *enaktivní reprezentace* - například enaktivní reprezentace čísla tři jsou vykonané tři kroky dítěte, vybrání tří kuliček do košíku;
- *ikonické reprezentace* – využívají různé znázornění obrázků a schémat, například ikonickou reprezentací čísla tři je množinový diagram sjednocení disjunktních množin;
- *symbolické reprezentace* – popisují jevy v jistém jazyce, pro matematiku to bývá jazyk zavedených znaků.

Za základní porozumění problému rozumíme vytvoření jeho přesné mentální reprezentace. U verbálně vymezených problémů je třeba nejprve pochopit význam všech pojmů a jejich vzájemné vztahy. Ke správnému porozumění problému pomáhá uspořádání pojmů či symbolů, grafy a vizuální představy. Z neúplného nebo nesprávného pochopení problémové situace vyplývají těžkosti a omyly (Langer, 2004).

Taplin (2010) rozlišuje problémové úlohy:

- *slovní úlohy* – obsahují pojmy zasazené do běžné situace, a tak připravují žáka na úlohy ze života;
- *neobvyklé úlohy* – vyžadují vyšší úroveň interpretace a organizaci informací;
- *reálné úlohy* – zaměřené na zkoumání, které nemusí mít vždy řešení a matematika je v nich nástrojem na nalezení řešení;
- *úlohy s údaji navíc* – jejich cílem je, aby žáci vybrali vhodné a relevantní údaje.

Každá problémová úloha by měla splňovat tyto zásady (Pecina, 2008), měla by:

- být stanovena v logické návaznosti s dosavadními poznatky žáků;
- být přiměřená věku, vědomostem a dovednostem žáků;
- mít problémový obsah, který má povahu nového poznatku;
- žáky upoutat a vzbudit v nich zájem a chuť poznávat.

Košč (1972) *proces řešení problémů* rozděluje do šesti hierarchicky uspořádaných fází, jejichž dodržení zaručuje úspěch při řešení problémové úlohy:

- **definování problému** – na této úrovni si uvědomíme, že úloha, kterou máme před sebou, je pro nás problém, musíme si uvědomit, v čem spočívá zadání, co je v něm zadané a čeho se týká otázka, na kterou musí dát naše řešení odpověď;
- **zhodnocení definice problému** – kontroluje se správnost pochopení podstaty problému, správné pochopení zadání úlohy;
- **registrace podmínek problému** – spočívá v cíleném zapamatování nebo formě přehledného grafického záznamu tak, aby bylo možné kdykoliv se k němu vrátit;
- **pátrání po hypotézách** – uplatňují se zkušenosti s řešením podobných problémů v minulosti a uplatňování logiky a mediačních seskupení, aby se našly pravděpodobné alternativy řešení problému;
- **rozhodnutí pro jednu (nejvhodnější) hypotézu** – stává se předmětem ověřování správnosti, např. při řešení matematických úloh existuje většinou jen jeden správný výsledek;
- **zhodnocení výběru vhodné hypotézy, týkající se postupu řešení problémů** – jejíž výsledkem je vypracování jistého schématu postupů.

Jedním z předpokladů správného řešení problému je projevování dostatečné intenzity a účelné poznávací aktivity ve fázi seznamování s úkolem. Často vyplývají chyby z toho, že člověk zvyklý na nedbalou práci se příliš nenamáhá, aby dobře pochopil podmínky úkolu. Je fakt, že schopní žáci vynakládají na pochopení matematického úkolu často větší úsilí než žáci neschopní. Mnozí slabí žáci tyto úkoly čtou nepozorně pouze jednou, někteří si nepovšimnou čárek ve větě, což může vést k nesrozumitelnosti úkolu. Naopak schopní žáci čtou text několikrát za sebou a zamýšlejí se nad každým slovem a nad každým číselným údajem (Pietrasinski, 1965).

3.6.2 Přímá metoda rozvoje funkčního myšlení - učivo o funkcích

Správné pochopení funkčního myšlení vede ke správnému pochopení i užívání pojmu funkce a jejich vlastností.

Hlavním cílem učiva o funkcích je rozvinout funkční myšlení u žáků. Vytváření pojmu funkce je dlouhodobý proces, který by měl následovat podle posloupnosti vytváření myšlení, postupovat od myšlení předpojmového přes myšlení názorné, přes konkrétní prezentace až k formálním operacím, k plnému pochopení pojmu (Piaget, 2006).

Samostatný pojem funkce je definován až v 9. ročníku základní školy. Jádrem učiva o funkcích je pochopení vztahu závislosti – hodnota jedné proměnné je závislá na hodnotě druhé proměnné. Tato skutečnost spolu s použitím proměnné veličiny umožňuje žákovi pohybovat se na vyšším stupni abstrakce. Jak uvádí Pejsar (1990), učivo funkcí rozvíjí pochopení vztahu závislosti a pochopení funkce jako matematické vyjádření (názorný systém) pohybu a změn reálného světa. Výstavba pojmu funkce navazuje a využívá žákovy již existující vědomosti a dovednosti z tematického celku Závislosti, vztahy a práce s daty, získané z předchozích let ve výuce matematiky.

Stejně tak jako funkční myšlení je dovednost myšlení, která je charakteristická spojením školské matematiky s praktickým životem, tak i s funkcemi se setkáváme v každodenním životě. Na základě této skutečnosti bychom měli vycházet při výuce učiva funkcí, která pomáhá k vytvoření přesnějších představ a zároveň je důkazem toho, že je potřeba se problematice funkcí věnovat na každém stupni vzdělávání. Formulování matematických úloh, které se vztahují ke konkrétnímu problému, kterou si žák jednoduše představí. Tím se u žáka vytváří dovednost vnímat závislosti kvantitativních jevů v přírodě a ve společnosti.

Na úlohách s reálným kontextem, se skutečnými daty pochopí jedinec funkční závislosti, které následně matematizuje. Na těchto příkladech lze žákům ukázat, že se hodnota jedné veličiny y mění v závislosti na druhé veličině x a následně lze odvodit pravidlo, že vždy jednomu x odpovídá právě jedno y. Naučí se tuto závislost vyjádřit různými reprezentacemi – tabulkou, rovnicí a grafem a naopak rozhodnou, zda závislost mezi dvěma veličinami daná tabulkou, grafickým znázorněním nebo předpisem je funkční závislost. Rozvíjí se logická přesnost usuzování a kognitivní struktura žáka. Správné pochopení funkční závislosti a pojmu funkce na základní škole je prvotním předpokladem k úspěšnému studiu funkcí na střední škole.

S učivem funkcí je spojena řada nových matematických termínů, které s funkcemi úzce souvisí. Budování těchto termínů musí být předávány uspořádaně. Před znázorněním funkční závislosti grafem je potřeba seznámit žáky s pojmy jako je pravoúhlá soustava souřadnic, souřadnice bodu v pravoúhlé soustavě souřadnic, definiční obor funkce a obor hodnot funkce, závisle proměnná, nezávisle proměnná, co je to graf funkce atd. a dále tyto matematické pojmy ovládat. K osvojení těchto pojmů se v matematice nejčastěji používá metoda indukce. Rozvíjí se matematická terminologie, dochází k zpřesnění a rozvoji matematické symboliky.

Při práci s různými reprezentacemi vyjadřujícími funkční závislost pracuje žák s proměnnou a rozlišuje, která proměnná je závislou a nezávislou, chápe její význam. Nejčastější vyjádření funkční závislosti je graf funkce. Při čtení grafu funkce rozhodne, zda je funkce rostoucí nebo klesající a zároveň si uvědomuje znázornění změny jedné veličiny vyvolané změnou druhé veličiny. Žákovo rozhodnutí ho vede k zodpovědnosti za správné řešení.

Správné pochopení a používání funkcí vyžaduje především logickou přesnost usuzování, ovlivňuje vlastnosti myšlení. Výukou funkcí dochází ke kultivaci mentálních funkcí člověka. Má pozitivní vliv na šířku myšlení jedince, na jeho hloubku myšlení, tvořivost, důslednost, pružnost, samostatnost i kritičnost jeho myšlení. Pochopení učiva o funkcích se opírá o matematickou a logickou terminologii, symboliku a utváří u jedince morálně volní vlastnosti. Řešení úloh s obsahem funkcí navyká žáka k zodpovědnosti za správné řešení a kritičnosti vlastního řešení, k systematičnosti, vytrvalosti, na poctivou práci a k překonávání překážek úsilím vyřešit úkol v plnosti.

Po pochopení pojmu funkce se žáci seznamují s konkrétními typy funkcí. Na základní škole se žák učí rozeznat funkci lineární, přímou a nepřímou úměrnost, kvadratickou a goniometrické funkce ve všech jejich reprezentacích. Práce s konkrétními funkcemi označujeme jako přímý rozvoj funkčního myšlení. Na různých typech funkcí se prohlubují znalosti a dovednosti vztahující se k učivu o funkcích, které si žák odnáší z výuky matematiky na základní škole. Dále se žákům střední školy rozšiřuje obzor nad různorodostí funkcí a jejich vlastností.

Cíle vzdělávání učiva funkcí na středních školách jsou zahrnuty ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v tematickém celku Závislosti a funkční vztahy. Tento tematický celek prohlubuje pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní gramotnost žáků a schopnost geometrického vhledu. Rozvíjí pochopení vztahu závislosti hodnoty jedné proměnné na hodnotě druhé. Osvojují se matematické pojmy, které souvisí s funkcemi. Žáci o funkcích přemýšlí více abstraktně. Opět se tyto funkční závislosti dají znázorňovat různými reprezentacemi. Žáci se učí u dané funkce přecházet mezi různými reprezentacemi. Značná část učiva funkcí je na střední škole věnována vlastnostem funkcí. Ke znázornění těchto vlastností se využívá především grafické znázornění funkce, neboť graf je nositelem funkce a všech jeho vlastností. Znázorněním funkce do grafu se rozvíjí symbolické i prostorové porozumění. Řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích, modelují závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí.

Učivo funkcí nejen že rozvíjí funkční myšlení jedince, ale směřuje také k systematičnosti myšlení, učí pořádku organizace řešení a zpřesňuje jeho grafický projev, rozvíjí matematický aparát a elementy matematického myšlení. Pochopením kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní gramotnost žáků a schopnost geometrického vhledu. Dále se rozvíjí vnější řeč, která v učivu funkcí zaujímá důležitou roli, neboť vnější řečí, konkrétně psanou řečí, která je psychicky náročnější, se vyjadřují myšlenky jedince, jeho úvahy. Učivem funkcí se rozvíjí logicko-matematická, jazyková i prostorová inteligence.

Učivo funkcí využívá operativní přístup k matematickým jevům, zabývá se příčinou a důsledkem změny. Funkce reprezentuje představu matematických objektů v pohybu a změně. Věnuje pozornost práci s čísly a proměnnými a zároveň jejich převádění do grafů a obráceně.

Správné řešení úloh s obsahem funkcí a problémů vyžaduje dostatečně rozvinuté funkční myšlení, neboť řešení těchto úloh spočívá v nalezení měnících se veličin a vazeb mezi nimi a dovednost zpracování informací. Následně se měnící se veličiny označují jako proměnné a matematicky se vyjadřuje vztah mezi nimi a výsledky interpretují v podobě matematických reprezentací.

Funkce jako pojem představuje souhrn obecných a podstatných vlastností, vzniká jako produkt myšlenkových operací. Při práci s funkcemi provádíme myšlenkové operace zejména s představami, vjemy, pojmy, abstraktními znaky vedoucí k objevení funkčních, kauzálních vztahů mezi veličinami. Základní myšlenkové procesy podílející se na utváření pojmů v učivu funkcí podle Košče (1986) dělení druhů myšlení se nejprve uplatňuje myšlení konkrétní, později vyžaduje velké nároky na abstraktní a názorné myšlení. Pří řešení úloh s obsahem funkcí se formuje konvergentní myšlení vedoucí k jednomu správnému řešení či vyřešení problému.

Při užívání pojmů učiva o funkcích rozvíjíme a prohlubujeme proces konkretizace například při záměně konstanty za proměnnou, zároveň zapojujeme základní myšlenkové operace jako je syntéza a analýza při řešení úloh s obsahem funkcí. Z porovnávání jednotlivých vlastností funkcí se rozvíjí i operace komparace a nezastupitelnou úlohu v učivu funkcí hraje abstrakce, která umožňuje zachytit podstatné i nepodstatné vlastnosti jevů ve vzájemné podmíněnosti a změnách.

Při osvojování učiva funkcí se neoperuje pouze s jednotlivými abstraktními pojmy, ale pojmy uvádějí do vzájemného vztahu. Pochopení vztahů mezi abstraktními pojmy je psychicky náročnější proces. Velmi obtížné bývá právě pochopení a interpretace kauzálních vztahů, které jsou předpokladem k úspěšnému pochopení pojmu funkce.

4 Současný stav zkoumané problematiky

4.1 Přehled výzkumů funkčního myšlení

V této kapitole se pokoušíme o vytvoření přehledu vybraných výzkumů, které se vztahují k tématu naší práce. Hledání výzkumů zabývajících se funkčním myšlením nebylo příliš jednoduché, protože v naší republice neexistuje velký počet výzkumníků, kteří by se tímto tématem zabývali. Proto jsme hledali především oporu v zahraničních výzkumech.

Řada zahraničních výzkumníků spojuje funkční myšlení s algebraickým myšlením. Považují funkční myšlení jako důležitou složku k výstavbě správného algebraického myšlení jedince, které se skládá ze dvou základních hledisek: (1) tvoření a vyjádření zobecnění ve stále formálním a konvenčním symbolickém systému a (2) uvažování se symbolickými formami a zavádění manipulace s těmito symbolickými formami (Kaput, 2008).

Nejčastějším tématem zahraničních výzkumů je problematika funkčního myšlení žáků různé věkové kategorie. Například australští vědci Cooper a Waren (2005) se zabývali zavedením funkčního myšlení u žáků ve věku šest až sedm let. Konkrétně vysvětlují, že i malé děti jsou schopny zobecnění, poskytují příklady vztahů a funkcí, dokážou popsat inverzní vztahy a najít pádné důvody pro to, jak inverzní vztah našli. Umí určit inverzní změny prostřednictvím aktivit s atributy jinými než s čísly. Přesto, že děti měly zkušenost se sčítáním a odčítáním čísel, žádná z těchto zkušeností se neobjevila při rozvoji funkčního chápání.

Jiný výzkum Blantona a Kaputa (2004) ukazuje, že funkční myšlení žáků lze úspěšně budovat a dokonce i s funkcemi pracovat, aniž by byl pojem funkce definován. Zkoumali vývoj funkčních vztahů mezi veličinami u dětí ve věku pět až jedenáct let při určování libovolného množství psů a jemu odpovídající celkový počet očí a ocasů. Na základě provedeného výzkumu dospěli k závěru, že se už u *dětí předškolního věku* tvoří základ pro budoucí abstraktní myšlení, které je k pochopení funkcí nejdůležitější. Říkáme, že se u dětí objevil předstupeň funkčního myšlení. *Žáci druhé třídy* zaznamenávali data do tabulky pro 1–10 psů a byli schopni dát multiplikativní vztah pomocí přirozeného jazyka ("*Musíte zdvojnásobením počtu psů získat počet očí*"). *Žáci třetí třídy* používali tabulkové grafy plynule, vyjádřili multiplikativní pravidlo, které byli schopni popisovat slovy a symboly. Předvídali počet očí nebo očí a ocasů pro 100 psů pomocí jejich pravidla. V počítání počtu očí žáci uvedli, že "*Nezáleží na tom, kolik psů máte, stačí je vynásobit 2*". Studenti byli schopni popsat tento vztah jako "*n x 2*" a „*2 x n* ". *Žáci čtvrté a páté třídy* pracovali obdobným způsobem jako žáci třetí třídy, ale potřebovali podstatně méně dat (do tří psů) k tomu, aby vytvořili funkci. Výzkumníci na závěr konstatují, že už i velmi mladé děti jsou schopny funkčního myšlení a navrhují, jak myšlení postupuje od předškolního věku k závěru prvního stupně povinné školní docházky, zvláště posunem, kdy žáci byli schopni použít reprezentační formu jako je tabulkový graf, formulovat a symbolizovat vzorce od přirozeného jazyka popisu vztahu k symbolické reprezentaci multiplikativních vztahů.

Další výzkum provedli také Martinez a Brizuela (2006), kteří zjistili, že žáci třetí třídy můžou úspěšně pracovat s lineárně funkční tabulkou, ale někdy bojují s určením obecného funkčního pravidla.

Další výzkumník, který zkoumal schopnost funkčního myšlení u žáků prvního stupně je Isler (2012) ze státu Massachusetts. Respondenty výzkumu zvolil žáky třetí až páté třídy. Porovnával funkční myšlení žáků ze tříd, které byly ve výuce matematiky celoročně zaměřeny na rozvoj algebraického a funkčního myšlení (experimentální skupina) se třídami žáků, které měly více tradičně aritmeticky založené zkušenosti. Po provedeném šetření dospěl k závěru, že žáci s celoročním zaměřením výuky na rozvoj jejich funkčního myšlení prokázali značné zlepšení jejich schopností vytvořit funkční tabulky (ve třetí a čtvrté třídě), určit vzory nebo vztahy v tabulkách (ve třetí třídě) a představit funkční pravidlo ústně (ve třetí a čtvrté třídě) a symbolicky (ve všech stupních).

McEldoon a Rittle-Johnson (2010) zjišťovali u žáků druhé a třetí třídy schopnost najít pravidlo psaní v tabulce funkční závislosti a identifikovali klíčové dovednosti, které jsou důležité pro základní úroveň funkčního myšlení s důrazem na problematiku funkční tabulky.

Spousta dalších výzkumných šetření se orientovala na zjištění nedostatků funkčního myšlení u žáků. U nás se tímto problémem zabývají Eisenmann a Kopáčková (2006). Z výsledků provedeného šetření dospěli k následujícím nedostatkům ve funkčním myšlení. Konkrétně se jedná o schopnost volby vhodného měřítka, při hledání grafu měli silnou tendenci ke stereotypu a snažili se opírat o již známé modely funkcí. Mnozí žáci ani neporozuměli formulacím v zadání úloh a měli potíže i s běžnými českými slovy, jako je např. „včetně“, problémy se schopností číst z grafu funkce, se schopností grafického řešení úlohy, problémy při práci s reálnými daty.

Hoffkamph (2009) považuje za největší obtížnosti a nedorozumění u funkčního myšlení žáků interpretaci funkční závislosti v různých situacích a její transfer do grafické reprezentace a naopak. Grafy jsou často reprezentovány jako fotografické obrazy reálných situací. Domnívá se, že tato skutečnost spočívá v neschopnosti interpretovat funkční závislosti dynamicky. Ke stejnému názoru se ze svých studií přiklání i Janvier (1978), Müller-Philipp (1994) a Swan (1985). Studie Janviera (1978) a Swana (1985) popisují hlavní problémy a nedorozumění ve funkčním myšlení žáků.

Pro zlepšení uvedené situace navrhuje Hoffkamph (2009) použití počítače, neboť podle jeho provedeného výzkumu má počítač pozitivní vliv na žákovu motivaci při interpretaci funkční závislosti, její transfer do grafické reprezentace a naopak. Toto bylo způsobeno mnoha faktory: např. žáci ocenili pracovat samostatně podle svého tempa, jsou si vědomi, že počítač za ně převezme zodpovědnost jak v kreslení, tak ve výpočtech.

V České republice ale i v zahraničí existuje řada výzkumů, které dokazují nedostatky v pojmotvorném procesu u žáků a studentů všech typů škol, nedostatečně osvojené znalosti a matematické dovednosti v učivu funkcí. Nejčastěji mají žáci i studenti problémy s pochopením pojmu funkce a pochopením závislosti mezi dvěma proměnnými.

Kopáčková (2002) ve svém výzkumu soustřeďovala pozornost na to, zda po probírání definice jsou schopni žáci vytvořit si univerzální model reprezentace pojmu funkce nebo zda zůstávají ve svých reprezentacích ve stadiu separovaných modelů. Dále zjišťovala, jak žáci rozumí školské definici funkce, jaký význam jí přikládají, jak funkci vnímají graficky, zda jsou schopni závislost rozpoznat ze slovního zadání a jak reagují na méně standardní úlohy o funkcích. Z výsledků provedeného výzkumu došla k závěrům, že žáci vnímají definici pojmu funkce jako formalitu, chápou funkci jako soubor konkrétních příkladů než obecnou kategorii, za funkci považují speciální případy konkrétních případů např. *u grafu lineární funkce je preferována přímka s kladnou směrnicí procházející počátkem souřadnicového systému*. Při rozhodování žáka, zda daný graf je či není grafem hraje důležitou roli známost či podobnost modelu ať už ze školy či učebnice. Velké rozdíly ve výsledcích úloh, kde byly popsány vztahy pomocí slov nebo znázorněny graficky, svědčily o nerovnováze mezi auditivními a vizuálními schopnostmi některých žáků.

Výsledky výzkumu Budínové (2010) dokazují nedostatečné vědomosti a dovednosti učiva funkcí žáků základní školy, střední školy a studentů, budoucích učitelů matematiky.

Ježková (2001) se ve svém výzkumu zabývá ověřením dovedností studentů pracovat s grafy funkcí. Dovednost rozumět grafům je pro praxi důležitá, neboť grafy znázorňují závislost veličin nebo průběh děje. Žáci dosáhli 73,15 % úspěšnosti v didaktickém testu a autorka v závěru konstatovala, že i přesto, že znalost interpretace grafů závislostí patří k základním dovednostem žáka gymnázia, není tento výsledek až tak uspokojivý.

Nejen v českých školách se potýkáme s nedostatky v pojmotvorném procesu a ve vědomostech a dovednostech učiva funkcí u žáků a studentů. Americký výzkum Carlsona a Oehrtmana (2005) reflektuje konkrétně tyto nedostatky.

- Problémy s interpretací předpisu funkce, konstantní funkci nepovažují za funkci, protože jsou zvyklí, že funkce obsahuje symbol *x*. Objevují se problémy s označením závisle a nezávisle proměnné.
- Znalost pouze lineární a kvadratické funkce. Studenti se domnívají, že jiné funkce neexistují. Následně se objevují problémy s použitím funkcí v nových situacích.
- Problémy s porozuměním grafu funkce. Bylo prokázáno, že studenti považují za graf funkce určitou fyzikální situaci, kde graf je její obraz. Nepovažují funkci za zobrazení množiny hodnot nezávisle proměnné do množiny hodnot závisle proměnné.

Jiné výzkumy se zaměřily na podporu a rozvoj funkčního myšlení, hledaly nové možnosti a náměty k úspěšnému vybudování funkčního myšlení u žáků ve vyučování matematiky. Miková (2007) se zaměřuje na vlastnosti funkcí, zabývá se přístupy vedoucí k lepšímu osvojení učiva funkcí. Také Dubinsky a Harel (1992) věnují pozornost didaktickým přístupům zavádění pojmu funkce, preferují akční a procesuální přístup. Kubínová a Stehlíková (2007) preferují genetický a strukturální přístup zavádění pojmu funkce.

Dále z českých vědců vzpomeneme například Tichou a Komana (1995). Představují náměty, jak lze vést žáky k porozumění závislostí a k postupnému rozvíjení představy o funkcích. Vycházeli z přesvědčení, že uplatňování funkčního přístupu je ústředním tématem matematického vzdělávání. Charakterizovali tento přístup jako aktivitu zaměřenou na provádění různých činností, v nichž si žáci mohou všímat závislostí a uvědomovat si závislost mezi jevy v reálném světě, postupně se je učit zaznamenávat, matematicky vyjadřovat a uplatňovat je v matematice i v praxi.

Dále Eisenmann a Kopáčková (2006) nabízí úlohy a podněty vedoucí k rozvoji funkčního myšlení žáků devátých tříd. Vytvořili tak studijní materiál k projektu nazvanému *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*.

Ze zahraničních výzkumů uvádíme Markworth (2010), který se zabýval rozvojem funkčního myšlení geometricky rostoucími modely. Geometricky rostoucí modely mají vlastnosti, které je činí jedinečnými a ideálními pro rozvoj funkčního myšlení žáků. Poskytují pro žáky příležitosti analyzovat konkrétní reprezentace modelů, zobecnit tyto modely, vyšetřit násobek reprezentace vztahů a prozkoumat různé typy funkčních vztahů. Navrhla tři matematické postupy, které vedou a podporují rozvoj žákova funkčního myšlení pomocí geometricky rostoucích modelů:

- identifikování a formulován růstu v geometricky rostoucích modelech použitím figurálního uvažování;
- přeložení figurální úvahy do numerické úvahy;
- identifikování a formulování vztahů mezi fází čísla a vyčíslitelným aspektem geometricky rostoucím modelem.

Blanton a Kaput (2011) se zabývali tím, jak děti přemýšlí o funkcích a jaké materiály a školní aktivity mohou vést k podpoře funkčního myšlení žáků. Při svém výzkumu vycházejí ze zásad a standardů, které tvrdí, čeho by měli být žáci schopni. Konkrétně: a) porozumění vzorcům, vztahům a funkcím; b) reprezentace a analýza matematických situací a struktur použití algebraických symbolů; c) použití matematických modelů k reprezentaci a porozumění kvantitativních vztahů; d) analýza změny v různých kontextech. Navrhují, aby existoval nácvik tohoto typu žákova myšlení ve výuce matematiky. Domnívají se, že třídy, ve kterých může prospívat nácvik funkčního myšlení jsou ty, v nichž učitelé založili sociometrické normy domýšlení, odhadování a zobecnění určitými způsoby, kde jsou argumenty brány studenty vážně k interakci s komplexními matematickými představami ke sjednávání nových systémů, používání reprezentací a nástrojů jako objektů pro matematické usuzování. Tímto vyžadují, aby učitel respektoval i podpořil tyto procesy jako standardní v hodinách matematiky ne jako příležitostní obohacení od běžného učení a procvičování.

Nejúspěšnější cestou rozvoje funkčního myšlení je řešení problémů. Výsledky videostudie výuky matematiky TIMSS z roku 1999 v sedmi zemích světa dokumentují, že ve všech zemích se matematika vyučuje cestou řešení problémů, analyzují různé typy matematických problémů a jejich proporční zastoupení ve výuce v jednotlivých zemích. Odlišnost mezi zeměmi spočívá v koncipování učební úlohy, liší se co do koherence vztahu k běžnému životu a co do komplexity. Ukazuje se, že kromě Japonska se v dalších ze šesti zemí, např. v České republice, Austrálii, Nizozemí atd. ve vyučování matematiky zařazují opakované krátké rutinní úlohy. V Japonsku se pracuje s menším počtem, avšak náročnějším a komornějším souborem úloh. Nizozemští žáci stráví v průměru více času samostatnou prací a řeší více úlohy s bezprostředním vztahem k životu než v jiných zemích. Převaha matematických problémů zaměřených na opakování a procvičování se ukázala v České republice. Dalším zjištěním je skutečnost, že čeští učitelé na počátku hodiny matematiky veřejně zkouší žáky a hodnotí jejich výkon. V českých hodinách převažuje „veřejná interakce“ s celou třídou, relativně málo však pracují žáci samostatně či ve skupinách (Janík, 2012).

Šetření PISA 2003 analyzovalo schopnost žáků v matematice v oblasti řešení problémů. Konkrétně testovalo schopnosti „*porozumět problémové situaci, určit relevantní informace, představit si možné alternativy řešení, zvolit strategii řešení, vyřešit problém a prověřit řešení*“. Nejvyšších výsledků dosáhli žáci z Belgie (36 %) a ve Finsku (30 %). V zemích Evropské unie v průměru 18 % žáků dosáhlo nejvyšší úrovně řešení problémů a bylo schopno formulovat vlastní pojetí problémů a následně je řešit (OECD, 2004a, s. 46).

Kličková (1989) se pokoušela zjistit, zda žáci umí řešit problémové úlohy. Cílem výzkumu bylo diferencovat žáky podle přístupu k řešení problémových úloh, vyčlenit obtížné myšlenkové kroky při řešení problémů. Z výsledků výzkumu vyplývá, že v kontrolní skupině nebylo schopno 63,55 % žáků vyřešit úlohy ani po poskytnutí návodní otázky. V experimentální skupince tento nedostatek se projevil ve 49,59 % žáků.

Dále identifikovala příčiny chybného řešení jako izolovanost a formálnost vědomostí žáků, chybějící znalosti, nízkou sebekontrolu v průběhu řešení a nedostatečný rozbor úlohy.

Kde není myšlení, není často ani porozumění a příčinu těchto nedostatků hledáme v metodách a postupech používaných při výuce matematiky ve školách. Mohou mít obrovský vliv na to, kolik se toho žák naučí, na kvalitu učení. Vhodné vyučovací metody mohou zlepšit úroveň porozumění a rozvíjet funkční myšlení. Roční výzkumná studie, která zkoumala nejefektivnější metody při výuce matematiky, je Národní středisko pro zjišťování nejvyšší kvality ve výuce matematiky (NCETM) v Anglii, jejíž cílem bylo určit efektivní prvky výuky matematiky. Účastníci výzkumu dospěli k závěru, že nelze určit jednu metodu, ale že existují různé typy učení, které by měly být v metodách uplatňovány. Nejvýše lze ocenit tyto typy učení: zběhlost vybavování poznatků a uplatňování nabytých dovedností, porozumění pojmům a interpretace matematických reprezentací, oceňování významu matematiky ve společnosti. Mezi vhodné metody řadí používání otázek vyššího řádu, vybízení k uvažování atd. (Swan a kol. 2008, s. 4).

V současnosti ve školách převládá transmisivní pojetí výuky. Z výzkumu TIMSS z roku 2003 vyplývá, že české učitele úzké zaměření cílů z oblasti vědomostí nenutí používat modernější vyučovací metody, protože jejich stanovené cíle lze snadno naplnit výkladem nebo prací s učebnicí. Považují moderní vyučovací metody jako příliš náročné, neefektivní. Používají je jen ke zpestření výuky (EACEA P9, 2011).

Kubínová (2005) zdůrazňuje důležitost zavádění projektové metody výuky a používání konstruktivistických přístupů ve výuce funkcí. Také nedostatečné uvádění matematiky do souvislostí s každodenním životem může způsobit přiklonění žáka ke strategii pamětního učení, protože nevidí pravý smysl a využití matematiky v praxi.

Vztah matematických činností ke každodennímu životu může být zjevnější nebo jasnější učitelům více než žákům. U evropských žáků osmých ročníků byla menší pravděpodobnost než u jejich učitelů, že by u svých učitelů pozorovali, že uvádějí do souvislostí hodiny matematiky s každodenními životy žáků (uvedlo to v průměru 39 % žáků ve srovnání s 53 % učitelů). Z výsledku výzkumu vyplývá, že učitelé neposkytují jasná vysvětlení žákům, jak matematika souvisí s každodenním životem (EACEA P9, 2011).

4.2 Rozvoj funkčního myšlení jako výukového cíle

Pod termínem **výukový cíl** rozumíme „*představu o kvalitativních a kvantitativních změnách u jednotlivých žáků v oblasti kognitivní, afektivní a psychomotorické, kterých má být dosaženo ve stanoveném čase v procesu učení*“ (Obst, 2006, s. 48). Cíle dávají výuce řád a pomáhají zvolit přiměřené metody vyučování. Vhodně formulované výukové cíle významně ovlivňují učební činnost žáka. Lépe se učí, pokud zná konkrétní cíle a ztotožní se s požadavky na výkony.

4.2.1 Taxonomie výukových cílů

Taxonomie výukových cílů je nástroj, který umožňuje odpoutat pozornost od pouhého zapamatování a reprodukce učiva a naopak vzít v úvahu schopnost myslet, aplikovat vědomosti, provádět analýzu, syntézu a řešit problémy atd. Je to uspořádaný systém kategorií, které jsou uspořádány vzestupně podle náročnosti a komplexnosti kognitivních procesů. Systém začíná procesy nejméně náročnými na myšlení (pamětní zvládnutí učiva) až po nejnáročnější procesy, vyžadující složité myšlenkové postupy.

V *Bloomově pojetí taxonomie výukových cílů* má myšlení šest na sebe navazujících základních stupňů, kdy osvojení dovedností myšlení vyšších řádů je podmíněno zvládnutím dovedností řádů nižších v tomto pořadí (Kalhous, Obst, 2009):

Na úrovni **znalosti (zapamatování)** se od žáka vyžaduje jen znovu poznání informace nebo znovu vybavení poznatků a jejich reprodukce, nikoli přímé užití. Žádoucí činnosti žáků vyjadřujeme slovesy typu: *definuj, doplň, napiš, opakuj, pojmenuj, přiřaď, seřaď, reprodukuj* apod.

Na úrovni **porozumění** má žák prokázat pochopení a schopnost užití znalosti. Typická slovesa pro stanovení cílových činností žáka jsou: *dokaž, jinak formuluj, uveď příklad, interpretuj, objasni, odhadni, oprav, vyjádři jinak, vypočítej* apod.

Při **aplikaci** již dochází k transferu učení do situací pro jedince nových (problémových). Činnost žáka na úrovni aplikace typicky vyjadřují slovesa: *aplikuj, navrhni, použij, řeš, vyzkoušej, uspořádej, diskutuj* apod.

U **analýzy** jde o schopnost rozložit sdělení na prvky nebo části tak, aby byly objasněny jak vztahy prvků nebo částí, tak celkové uspořádání myšlenek obsažených ve sdělení. Žák má být schopen rozlišit fakta od hypotéz, zdůvodňující argumenty od závěru, významné údaje od méně významných či nevýznamných atd. Typická slovesa jsou: *analyzuj, proveď rozbor, rozhodni, specifikuj* apod.

Syntéza znamená schopnost žáka skládat prvky a části v celek. Kombinací prvků a částí se vytváří struktura, jež předtím neexistovala. Při syntéze je také třeba umět hledat prvky z různých pramenů či odvětví a skládat je do nových útvarů. Typická slovesa jsou*: kategorizuj, syntetizuj, vyvoď obecný závěr, napiš sdělení* apod.

U kategorie **hodnotícího posouzení (hodnocení)** jde o žákovu schopnost i potřebu posouzení hodnoty myšlenek, dokumentů, výtvorů, metod, způsobů řešení apod. z hlediska nějakého účelu co do přesnosti, přiléhavosti, adekvátnosti, efektivnosti, hospodárnosti. Typická slovesa jsou: *argumentuj, obhaj, srovnej s normou, vyber, vyvrať, zdůvodni, zhodnoť, prověř, posuď* apod.

V 90. letech 20. století došlo k revizi původní taxonomie, kterou Bloomova taxonomie získala dvojdimenzionální charakter:

- *dimenze poznatků*: a–faktické; b–konceptuální; c–procedurální; d–metakognitivní;
- *dimenze kognitivních procesů*: 1. zapamatovat si; 2. porozumět; 3. aplikovat; 4. analyzovat; 5. hodnotit; 6. tvořit.

Bloomova taxonomie nás vede k přemýšlení o tom, co to vlastně znamená, že žák/student má „umět“. Požadovaná úroveň by měla být zcela uvědoměle stanovena (Kalhous, Obst, 2009).

4.2.2 Rozvoj funkčního myšlení v kurikulu základního vzdělávání

V **Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání** je vzdělávací oblast Matematika a její aplikace rozčleněna na čtyři tematické okruhy, z nichž jeden je *Závislosti, vztahy a práce s daty*, kde *„žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být* *růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů*“ (RVP ZV, 2013, s. 26). Tento okruh rozpracovává změny a závislosti, které jsou projevem běžných jevů reálného života a souvisí s rozvojem funkčního myšlení. Jsou zde formulovány očekávané výstupy pro první a druhé období pro žáky na prvním stupni základní školy a potom na ně navazují očekávané výstupy ve stejně jmenované vzdělávací oblasti pro žáky 2. stupně. Prvnímu období odpovídá 1.–3. třída a druhému období odpovídá 4.–5. třída (RVP ZV, 2013, s. 31). S náznaky funkčního myšlení se můžeme již setkat na prvním stupni základní školy.

Pro žáky 1. stupně

Očekávané výstupy pro 1. období:

- žák se orientuje v čase, provádí jednoduché převody jednotek času;
- žák popisuje jednoduché závislosti z praktického života;
- žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel.

Očekávané výstupy pro 2. období:

- žák vyhledává, sbírá a třídí data;
- žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy.

V učivu:

- závislosti a jejich vlastnosti;
- diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády.

Pro žáky 2. stupně

Očekávané výstupy:

- žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data;
- žák porovnává soubory dat;
- žák určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti;
- žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem;

- žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů.

V učivu:

- *závislosti a data* – příklady závislostí z praktického života a jejich vlastnosti, nákresy, schémata, diagramy, grafy, tabulky; četnost znaku, aritmetický průměr;
- *funkce* – pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce.

Snahou vzdělávacího **programu Základní škola** je to, aby žáci v průběhu devítileté školní docházky získali základy moderního všeobecného vzdělání. V návaznosti na obecné cíle základního vzdělávání jsou dále formulovány specifické vzdělávací cíle předmětu matematika, k nimž vyučovací proces směřuje (MŠMT, 1996, s. 5):

- provádět početní výkony s přirozenými čísly, desetinnými čísly, zlomky, a to pamětně i písemně, při řešení složitějších úloh užívat racionálně kapesní kalkulátor;
- řešit úlohy z praxe s užitím početních výkonů, včetně užití procentového počtu a jednoduchého úrokování;
- provádět odhady výsledků řešení a posuzovat jejich reálnost, provádět potřebné zaokrouhlení;
- číst a užívat jednoduché statistické tabulky a diagramy;
- užívat proměnnou, chápat její význam;
- zapsat a graficky znázornit závislosti kvantitativních jevů v přírodě a ve společnosti a pracovat s některými konkrétními funkcemi při řešení úloh z praxe;
- řešit metrické geometrické úlohy, vypočítat obvody a obsahy rovinných obrazců, povrchy a objemy těles, užívat základní vztahy mezi rovinnými obrazci (shodnost, podobnost);
- užívat soustavu souřadnic.

Ve vzdělávacím programu **Základní škola** je učivo rozděleno do jednotlivých ročníků. Každé téma obsahuje probírané učivo a vymezuje to, co by měl žák po jeho probrání umět. Učivo o funkcích je probíráno v 9. ročníku. Konkrétně se vyučuje: *lineární funkce*; *přímá úměrnost*; *kvadratická funkce*; *nepřímá úměrnost*; *funkce sinus* a *tangens v pravoúhlém trojúhelníku*.

Ve **Standardu základního vzdělávání** z roku 1995 jsou vymezeny následující specifické cíle, jichž má žák v matematickém vzdělávání získat, aby došlo u žáka k rozvoji funkčního myšlení (MŠMT, 1995):

- chápali funkční vztahy a další souvislosti mezi kvantitativně měřitelnými jevy;
- chápali kvantitativní vztahy v přírodních a společenských procesech;
- byli schopni aplikovat získané vědomosti a dovednosti při řešení úloh z praxe;
- dovedli řešit přiměřeně obtížné úlohy problémového charakteru;
- dovedli ověřovat reálnost získaného výsledku řešení úlohy;
- dovedli třídit informace, číst a chápat údaje sestavené do tabulek a grafů a interpretovat je v praxi.

Učivo je rozděleno do okruhů kmenového učiva: *aritmetika*, *geometrie*, *algebra*, *užití matematiky a základy statistiky*. Učivo o funkcích a funkční závislosti spadá do učiva algebry. Konkrétně: *funkční závislosti*; *příklady funkcí*; *lineární funkce*; *kvadratická funkce* $y=ax^2$ (a se nesmí rovnat 0); *nepřímá úměrnost – graf*, *užití*; *goniometrické funkce ostrého úhlu*.

Ve **Standardu základního vzdělávání** jsou vymezeny vědomosti a dovednosti, které má žák v učivu o funkcích získat (Fuchs, Hrubý, 2000, s. 22-27):

Soustava souřadnic:

- zvolit vhodnou soustavu souřadnic v rovině;
- zobrazit bod v dané soustavě souřadnic;
- určit souřadnice bodu zobrazeného v soustavě souřadnic.

Funkce:

- rozhodnout, zda závislost mezi dvěma veličinami daná tabulkou, grafickým znázorněním nebo předpisem je funkcí;
- rozhodnout, zda číslo patří do definičního oboru dané funkce;
- určit definiční obor funkce z předpisu nebo tabulky;
- pro daný prvek definičního oboru určit hodnotu funkce;
- rozhodnout, zda dané body náleží grafu zadané funkce;
- rozhodnout, zda daná množina bodů v rovině je grafem nějaké funkce;

- z grafu funkce rozhodnout, zda je funkce rostoucí nebo klesající ve svém definičním oboru.

Přímá úměrnost:

- ze zadaných závislostí vybrat funkce, které jsou přímými úměrnostmi;
- určit koeficienty přímé úměrnosti;
- sestrojit graf přímé úměrnosti.

Nepřímá úměrnost:

- ze zadaných závislostí vybrat funkce, které jsou nepřímými úměrnostmi;
- určit koeficienty nepřímé úměrnosti;
- sestrojit graf nepřímé úměrnosti.

Lineární funkce:

- ze zadaných závislostí vybrat funkce, které jsou lineární;
- sestrojit graf lineární funkce.

Kvadratická funkce:

- ze zadaných závislostí vybrat kvadratické funkce typu $y=ax^2$, $y=ax^2+b$;
- načrtnout graf kvadratické funkce.

Goniometrické funkce:

- definovat tangens, sinus, kosinus ostrého úhlu;
- chápat tangens, sinus, kosinus jako závislosti;
- určit hodnoty goniometrických funkcí pomocí tabulek a kalkulačky;
- určit velikosti úhlu α ze znalosti hodnot $\cos\alpha$, $tg\alpha$ pomocí tabulek a kalkulaček;
- užívat goniometrických funkcí k řešení úloh.

4.2.3 Rozvoj funkčního myšlení v kurikulu gymnázia

Dne 14. 6. 2000 byl Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy schválený dokument učební osnova předmětu Matematika SOŠ a SOU, v němž učivo obsahově odpovídá učivu v Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (RVP G). Považovali jsme RVP G za univerzální dokument pro všechny tři typy středních škol (gymnázia, SOŠ a SOU).

V **Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia** je vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* rozdělena do pěti tematických okruhů, z nichž jeden se jmenuje *Závislosti a funkční vztahy,* kde jsou pro žáky formulovány následující očekávané výstupy, které vedou žáka k utváření znalostí a dovedností vedoucí k rozvoji jeho funkčního myšlení (RVP G, 2007, s. 24).

Žák:

- načrtne grafy požadovaných funkcí (zadaných jednoduchým funkčním předpisem) a určí jejich vlastnosti;
- formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí a posloupností;
- využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, při určování kvantitativních vztahů;
- aplikuje vztahy mezi hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi;
- modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí;
- řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích a posloupnostech;
- interpretuje z funkčního hlediska složené úrokování, aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost ve finanční matematice.

V učivu:

- *obecné poznatky o funkcích* – pojem funkce, definiční obor a obor hodnot, graf funkce, vlastnosti funkcí;
- *funkce* – lineární, kvadratická, absolutní hodnota, lineární lomená, mocninná, druhá odmocnina, exponenciální, logaritmická a goniometrická funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi;

- *posloupnost* – určení a vlastnosti posloupností, aritmetická a geometrická posloupnost.

Standard vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu navazuje ve svém obsahu na standard základního vzdělávání. Vyjadřuje představu o společensky žádoucí podobě úplného středního vzdělávání poskytovaného čtyřletým gymnáziem – o cílech, k jejichž naplnění toto vzdělávání směřuje a o vzdělávacím obsahu, který je poskytován všem žákům v průběhu studia (MŠMT, 1999).

Pro oblast matematiky jsou stanoveny specifické cíle, vedoucí k rozvoji funkčního myšlení. Proces vzdělávání směřuje k tomu, aby žáci:

- získali vědomosti zejména z tematických celků v kmenovém učivu;
- naučili se samostatně analyzovat texty úloh a řešit je;
- ovládli jazyk matematiky a matematickou symboliku, naučili se přesně vyjadřovat a zdokonalili si svůj grafický projev;
- porozuměli vzájemným vztahům mezi jednotlivými tematickými celky, uměli matematizovat reálné situace, řešit problémy komplexního charakteru a aplikovat své znalosti a dovednosti i mimo matematiku (fyzika, chemie, společenské vědy, finančnictví);
- pochopili roli induktivních a deduktivních postupů, pochopili a uměli užít logickou stavbu matematiky, osvojili si některé metody vědeckého myšlení;
- pochopili matematiku jako součást kultury.

Učivo je taktéž rozděleno do okruhů kmenového učiva: *základní poznatky o množinách a výrocích*; *jazyk a stavba matematiky*; *aritmetika*; *algebra*; *planimetrie*; *funkce*; *goniometrie a trigonometrie*; *stereometrie*; *kombinatorika, teorie pravděpodobnosti a statistika*; *analytická geometrie*.

Kmenové učivo *funkce* obsahuje:

- definiční obor, obor hodnot, graf a vlastnosti funkce (funkce monotónní, omezená, periodická, prostá);
- lineární a kvadratická, lineární lomená, mocninná, exponenciální a logaritmická;

- logaritmus, funkce inverzní, funkce s absolutní hodnotou, exponenciální a logaritmické rovnice;
- posloupnost a její vlastnosti, aritmetická a geometrická posloupnost;

Kmenovém učivo *goniometrie a trigonometrie* obsahuje*:*

- goniometrické funkce, jejich základní vlastnosti a grafy.

Uvádíme přehled požadovaných znalostí a dovedností v učivu o funkcích ve **Standardu vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu** (Fuchs, Kubát, 1998, s. 21–28).

Funkce

Základní pojmy:

- chápat pojem funkce, umět užívat pojmy předpis, definiční obor, obor hodnot, argument, funkční hodnota, graf;
- ovládat pojmy popisující monotónnost funkce (rostoucí, klesající, konstantní), extrémy funkce (maximum, minimum), paritu funkce (sudost, lichost) a umět rozhodnout, zda je funkce prostá, omezená, periodická;
- chápat princip vytvoření inverzní funkce k funkci;
- na základě znalosti grafu funkce $y = f(x)$ umět sestrojit grafy funkcí $y = -f(x)$, $y = |f(x)|$, $y - n = f(x - m)$, chápat rovnost funkcí, ovládat pojem složená funkce, rozumět pojmu asymptota grafu funkce, na základě znalosti grafu funkce $y = f(x)$ umět sestrojit i graf funkce $y = af(bx + c) + d$;
- umět sestrojit graf funkce s absolutní hodnotou.

Racionální funkce

Lineární funkce:

- znát předpis, definiční obor a obor hodnot, graf, geometrický význam parametrů *a*, *b* v předpisu $y = ax + b$;

- ovládat vzájemné přiřazování argumentů a funkčních hodnot;
- nalézt předpis pro funkci, jsou-li dány některé její body, její graf nebo je zadána slovní úlohou;
- umět sestrojit grafy lineárních funkcí s absolutními hodnotami.

Kvadratická funkce:

- ovládat definici a vzájemné přiřazování argumentů a funkčních hodnot;
- z předpisu $y = ax^2 + bx + c$ nebo $y - n = a(x - m)^2$ umět určit souřadnice vrcholu příslušné paraboly, která je grafem funkce, a pomocí dalších vhodných bodů graf načrtnout, chápat význam konstanty a průběh funkce, znát vzájemnou souvislost způsobů zadání;
- podle načrtnutého grafu umět určit obor hodnot a popsat další základní vlastnosti funkce;
- umět sestrojit graf funkce s absolutní hodnotou.

Lineární lomená funkce:

- ovládat definici, chápat vztah mezi lineární lomenou funkcí a nepřímou úměrností;
- ovládat vzájemné přiřazování argumentů a funkčních hodnot;
- umět načrtnout graf a podle něj popsat základní vlastnosti funkce pro zadání ve tvaru $y - n = \dfrac{k}{x - m}$ nebo $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, chápat význam konstanty *k* pro průběh funkce.

Mocninná funkce:

- ovládat vzájemné přiřazování argumentů a funkčních hodnot;
- umět rozlišovat vlastnosti funkce $y=x^n$, *n* náleží Z pro:

a) sudé a liché *n*

b) kladné a záporné *n,* znát mocninnou funkci $y=x^r$, kde *r* je racionální číslo.

Exponenciální a logaritmická funkce:

- ovládat definici, obory a vzájemné přiřazování argumentů a funkčních hodnot, chápat vzájemnou souvislost funkcí $y=a^x$ a $y=log_a x$ jako funkcí navzájem inverzních;
- chápat souvislost průběhu funkce s hodnotou základu *a*, umět pomocí význačných bodů pro daný základ načrtnout grafy obou funkcí a využít je ke znázornění kořenů základních rovnic a nerovnic;
- ovládat definici logaritmu a pravidla pro logaritmování součinu, podílu a mocniny, umět je aplikovat při logaritmování i odlogaritmování výrazů;
- umět řešit exponenciální a logaritmické rovnice, umět řešit exponenciální a logaritmické nerovnice a soustavy exponenciálních a logaritmických rovnic.

Goniometrie:

- znát a umět využívat definice goniometrických funkcí v *R* a základní vlastnosti z nich vyplývající (obory, sudost, lichost, souvislost funkčních hodnot v jednotlivých kvadrantech, extrémy a nulové hodnoty).

5 Možné faktory ovlivňující úroveň funkčního myšlení

České i zahraniční výzkumy u žáků poukazují na nedostatky ve funkčním myšlení a na nedostatečný rozvoj tohoto typu myšlení vzhledem ke školnímu kurikulu. Diagnostika příčiny těchto skutečností je však velmi obtížná, proto faktory popsané v této kapitole považujeme za předpoklady poklesu úrovně funkčního myšlení. Přestože v tomto textu mluvíme především o faktorech ovlivňující funkční myšlení žáků základních a středních škol, považujeme zmíněné faktory za ovlivňující i funkční myšlení studentů vysokých škol.

Z obecné psychologie a pedagogiky víme, že důležitými faktory psychického vývoje je význam **dědičnosti, prostředí a výchovy.** Nejnovější poznatky však ukazují, že inteligence je tvořena přibližně 80 % dědičností a 20 % prostředím (Hartl, 1993). Přesto bychom neměli přikládat vlivu dědičnosti osudový význam, neboť i životní podmínky a výchova mají v životě člověka nezaměnitelnou úlohu. Neméně důležitou roli hraje vrozená inteligence, která je charakterizována mnoha způsoby – úroveň rozumových schopností, nadání, mentální úroveň, schopnost řešit nové úkoly (Hartl, 1993). Na úroveň funkčního myšlení jedince má vliv i další psychické faktory jako je pozornost, vnímání, řeč, představivost, temperament a schopnosti.

Dalším důležitým faktorem, který může ovlivnit vzdělávací výsledky žáků, je **motivace**. Fyans-Maehr (1987) potvrdil, že motivace učit se má pozitivní vliv na studijní výsledky žáků. Pokud bude žákovi předkládán význam funkčního myšlení pro život, bude se žák o rozvoj funkčního myšlení více zajímat a s radostí bude přistupovat k řešení úloh, které vedou k rozvoji právě tohoto typu myšlení. Navíc motivace učit se kvůli využití nabytých poznatků a dovedností v budoucím zaměstnání má další pozitivní dopad na žáka, uvědomuje si propojení školy s jeho budoucí prací. Abbeduto a Elliott (1998) vidí význam motivace ve škole v zaměření žáka k určitému cíli, tedy k učení, aktivizování energie a stimulaci jednání, zvyšování pravděpodobnosti žákova úspěšného překonávání překážek a podpoře rozvoje uznávaných procesů.

Každý jedinec má různé individuální schopnosti, které je potřeba výchovou, vzděláváním záměrně, soustavně a cílevědomě dále rozvíjet.

Za důležitý faktor, který může ovlivnit úroveň funkčního myšlení jedince, považujeme **vliv rodinných faktorů**. Také Straková (2010) poukazuje na velký vliv rodinného zázemí na úroveň vzdělání žáka. Zabývá se následujícími proměnnými: sociálně ekonomický status, majetkové zázemí rodiny, kulturní úroveň rodiny a vzdělání matky. Mezi dalšími také uvádí podmínky výuky, materiální a personální vybavení školy, chování a pracovní morálka pedagogického sboru a další. Vlivu rodiny a rodinného zázemí na výsledky žáků se věnoval také Hansen (1997).

Basl a Mouralová (2011) konstatují, že výsledky vzdělávání žáků jsou ovlivňovány řadou **faktorů** na několika úrovních, **od ryze individuálních vlastností** každého žáka a jeho zázemí, motivace přes působení a zkušenosti na skupinové úrovni (vzdělávání v konkrétní třídě a škole) **až po vlivy na úrovni celospolečenské** (nastavení vzdělávacího systému a klimatu ve společnosti). Různé úrovně znázorňují ve schématu.

Individuální úroveň	schopnosti, nadání, dispozice, temperament, motivace, zájem, rodinné zázemí, očekávané okolí, zkušenosti
Úroveň třídy	osoba učitele, jeho kompetence a motivace, metody výuky, klima ve třídě
Úroveň školy	obsah vzdělávání – ŠVP, organizace výuky, řízení školy, motivace, zkušenosti, podpora a vzdělávání učitelů, materiální podmínky
Regionální úroveň	zřizování škol – typy škol, velikost škol, vnější diferenciace, konkurence škol, regionální nastavení financování a hodnocení
Národní úroveň	obsah vzdělávání – RVP, hodnocení, standardy, vzdělávací systém, stupně vzdělávání a přechod mezi nimi, příprava a další vzdělávání učitelů, financování školství
Globální úroveň	hodnoty a priority, demografický vývoj, ekonomika

Tabulka č. 1: Vliv faktorů na výsledky vzdělávání žáků

Také Šupíková (2012) považuje za nejdůležitější faktor, který může ovlivnit matematickou gramotnost, vliv rodinných faktorů a školního prostředí. Následující tabulka uvádí, jak rodinné faktory mohou mít vliv na úroveň matematické gramotnosti žáků.

Faktory vysoké úrovně gramotnosti	Faktory nízké úrovně gramotnosti
Rodina má vyšší sociální a ekonomický status. Rodiče získali kvalitnější vzdělání vyššího stupně. Mají zaměstnání, v němž využívají psanou kulturu (gramotnost).	Rodina má nižší sociální a ekonomický status. Rodiče získali jen nižší vzdělání nebo nedokončili školní docházku. Mají zaměstnání, v němž nevyužívají psanou kulturu (gramotnost), příp. jsou nezaměstnaní.
Rodina patří etnicky do většinové společnosti, její členové ovládají výukový jazyk.	Rodina patří do etnické minority, jejíž členové neovládají výukový jazyk, nebo jde o marginální rodinu (kromě jiného s nízkou jazykovou úrovní).
Kulturní zájmy, potřeby a tradice rodiny se týkají literatury a vzdělávání, rodiče disponují vysokou jazykovou kulturou.	Rodina nemá výrazné kulturní potřeby, je bez kulturních zájmů. Rodiče disponují nízkou úrovní jazykové kultury.
Hodnotová a zájmová orientace rodiny je zaměřena na vzdělávání. Jednou z priorit rodiny je umožnit dětem co nejlepší vzdělání (proto dbají na kvalitní školní docházku v „dobré“ škole).	V hodnotové a zájmové orientaci rodiny chybí využívání psané kultury. Rodiče nedoceňují vzdělání, mnohdy si neuvědomují vlastní nedostatky v gramotnosti.
Rodiče umí poradit dětem s přípravou do školy.	Rodiče neumí poradit se školním vzděláváním, s přípravou do školy.

Tabulka č. 2: Vliv rodinných faktorů na úroveň gramotnosti

Za další možný faktor ovlivňující funkční myšlení jedince považujeme jeho **pohlaví**. Z výsledků mezinárodního výzkumu PISA 2003-2012 vyplývá, že mezi dívkami a chlapci existují statisticky významné rozdíly ve výsledcích testování z matematiky. Chlapci dosahují vyšší průměrný počet bodů v testu z matematiky než dívky. Ryana a Pintricha (1997) zkoumali vliv pohlaví na úspěšnost řešení matematických úloh. Jejich studie dokládá vyšší míru úspěšnosti při řešení úloh u chlapců než u dívek.

Vedle vlivu rodinného zázemí a pohlaví je třeba brát v úvahu faktory vztahující se ke vzdělávání žáka. Jako první faktor uvádíme **druh střední školy**. Tento faktor považujeme za velmi důležitý, neboť každá střední škola má jinou hodinovou dotaci předmětu matematika a každá z nich jistě klade na žáka jiné požadavky na úroveň jeho funkčního myšlení. Na žáka čtyřletého gymnázia jsou na funkční myšlení jistě kladeny větší nároky než na žáka jiného typu střední školy a středního odborného učiliště.

Mezinárodní výzkum PISA v letech 2003-2012 dospěl k závěru, že ve zkoumané vzdělávací oblasti nazvaný Změna a vztahy, který je zaměřený na funkční myšlení, došlo u českých žáků ke snížení průměrného počtu bodů v testu z matematiky. Ovšem úspěšnost v testu výzkumu je u žáků čtyřletého gymnázia stále vyšší než u žáků jiných středních škol. Úroveň způsobilosti ve vzdělávací oblasti Změna a vztahy je relativně vyšší u žáků středních škol, v nichž je studium zakončeno maturitní zkouškou než u nematuritních oborů.

Dalším možným předpokladem, který může mít vliv na úroveň funkčního myšlení je **maturita z matematiky**. Požadavky stanovené státní maturitní zkouškou jsou spíše minimem, které by žák střední školy měl zvládnout. Přesto považujeme maturitní zkoušku z matematiky za určitý přínos a donucení části žákovské obce ke shrnutí a upevnění matematických kompetencí na základní úrovni. Matematika posiluje systematické a logické myšlení žáka v souvislostech. Nutí jedince uvažovat o věcech. Matematika není jen o výpočtech, ale o způsobu myšlení.

V roce 2012 si žáci střední školy mohli vybrat ze dvou **úrovní maturitní zkoušky z matematiky**. Základní úroveň obtížnosti maturitní zkoušky z matematiky byla určena pro všechny maturitní obory, tzn., že v této úrovni by zkoušku měli zvládnout jak žáci gymnázií, tak žáci středních odborných škol. Vyšší úroveň státní maturitní zkoušky je úroveň výběrová a proto nelze očekávat, že na složení této zkoušky své žáky připraví každá škola v každém oboru vzdělávání. Úspěšné absolvování testu z matematiky vyšší úrovně obtížnosti předpokládá vyšší úroveň znalostí a dovedností, funkčního i logického myšlení než v základní úrovni obtížnosti.

Dalším předpokládaným faktorem, který by mohl mít vliv na funkční myšlení žáků je **rok** skládání **maturitní zkoušky**. Domníváme se, že dnešní maturanti disponují slabšími znalostmi a dovednostmi ve všech oblastech vzdělávání, než tomu bylo v minulosti. V porovnání komplexnosti a náročnosti maturitní zkoušky a současnou maturitní zkouškou musím konstatovat, že po zvládnutí staršího typu zkoušky byly garantovány vyšší vzdělávací kompetence. Zavedení státní maturitní zkoušky vede k tomu, že úroveň maturity musí být nutně nízká, aby ji byli schopni naplnit i žáci maturitního oboru na středním odborném učilišti.

Řada studentů v prvním ročníku jejich vysokoškolského studia zjistí, že požadavky na ně kladené ze strany pedagogů jsou co do splnění příliš obtížné. Zjistí, že na vybraný obor studia nestačí. Ve většině případů, by nejraději studovali ten samý obor, ale na jiné vysoké škole, a tak se rozhodnou pro přechod na jinou vysokou školu, domníváme se, že nejčastěji na pedagogickou fakultu. Na základě toho považujeme **předchozí studium na jiné vysoké škole** za možný faktor, který by mohl mít vliv na funkční myšlení studentů. Neboť předmět matematika na vysokých školách je zaměřen ve větší míře na funkce a učivo spojené s funkcemi, tím by u studentů mělo docházet k rozvoji jejich funkčního myšlení. A tak studenti, kteří už jednou studovali na vysoké škole, kde se vyučoval předmět matematika, by měli mít více rozvinuté funkční myšlení než ti studenti, kteří před nástupem na pedagogickou fakultu nestudovali na žádné jiné vysoké škole.

Simpson a Oliver (1990) konstatovali, že na zájem o přírodní vědy má významný vliv to, jaká je výuka přírodních věd na základní škole. Proto **klima třídy** považujeme za velmi důležitý faktor ovlivňující funkční myšlení. Klima třídy je sociální a emocionální naladění žáků ve třídě. Společně ho tvoří a zároveň prožívají žáci i pedagogové (Lašek, 2001). Úspěšnost jejich výsledků výuky ovlivňuje učitel svým postojem, stylem výchovného působení a očekáváním. Šikulová, R. a kol. (2005) popisují, že školní klima je vnímáno velmi subjektivně každým z nás podle charakteru. Někdo může vnímat školní klima pozitivně, někdo jiný ho může vnímat negativně. Největší roli ve vnímání školního klimatu mají naše zkušenosti, prožitky a postoje, neboť školní třída představuje malou skupinu, ve které probíhají vztahy mezi žáky, mezi žákem a učitelem. Právě povaha a kvalita těchto vztahů může ovlivňovat vzdělávání a jeho úspěšnost.

Také **počet strávených hodin studiem a psaním domácích úkolů** pozitivně ovlivňuje výsledky žáka v matematice. Betts (1997) uvádí, že množství domácích úkolů zadaných učiteli má pozitivní vliv na výsledky žáků. Tomuto názoru však odporují studie Hilla (1991) a Rau-Durana (2000). PISA (2003) hlásí, že čím více se žák věnuje domácím úkolům z matematiky, tím horšího výsledku dosahuje v testu matematické gramotnosti. Tento výsledek interpretují tak, že horší žáci musí věnovat domácím úkolům více času než lepší žáci.

Dalším možným faktorem, který je potřeba zmínit, je masové **rozšíření počítačů do výuky**. Díky použití vhodného počítačového programu žák pozoruje a rozpoznává projevy jevů, jejich změny a závislosti jako projevy praktického života, dochází k pochopení vzájemných vztahů. Obsah učiva realizovaný pomocí příslušných výukových programů na počítači umožňuje žákovi k názornějšímu a snazšímu pochopení jádra funkčního myšlení.

V předkládané práci jsme se zaměřili na zkoumání vlivu pohlaví a vybraných faktorů, vztahující se k předchozímu studiu studenta na střední popř. na vysoké škole. Tyto nezávisle proměnné (pohlaví, rok maturity, maturita z matematiky, úroveň maturitní zkoušky, předchozí studium na jiné vysoké škole, druh střední školy) považujeme za důležité při stanovování profilu studenta při jeho nástupu ke studiu.

Empirická část

Empirická část charakterizuje průběh celého výzkumu, popisuje projekt výzkumu a použité metody měření. Prezentuje rozbor testových úloh, stanovuje a ověřuje zformulované hypotézy a zabývá se otázkou chyb při měření.

V empirické části práce se často objevují slova žák/student. Je to z toho důvodu, že respondenty výzkumu jsou studenti vysoké školy na počátku jejich studia, ovšem zkoumáme jejich funkční myšlení po ukončení studia na střední škole.

6 Přípravné fáze výzkumu

6.1 Pilotáž

Výzkumům předcházela pilotážní část výzkumu, kde šlo o zjištění předběžného stavu zkoumané problematiky. Při navrhování úloh didaktického testu pro pilotáž jsme vycházeli z výsledků výzkumů Eisenmanna a Kopáčkové (2006) a Budínové (2010), které poukazují na nedostatky ve funkčním myšlení žáků základní a střední školy. Zajímalo nás, zda tyto nedostatky přetrvávají i u studentů prvního ročníku bakalářského studia oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání na katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci v roce 2011 a s jakou mírou úspěšnosti vyřeší studenti jednotlivé matematické úlohy. Pilotáže se celkem zúčastnilo 37 studentů, kterým byl zadán didaktický test složený z 8 testových úloh. Tematicky testové úlohy odpovídají evaluačním standardům z matematiky základní a střední školy. Při zpracování dat byla použita deskriptivní statistika, za pomoci které byly zjištěny četnosti bodových hodnocení jednotlivých úloh v didaktickém testu.

Tematicky byl test složen z učiva:

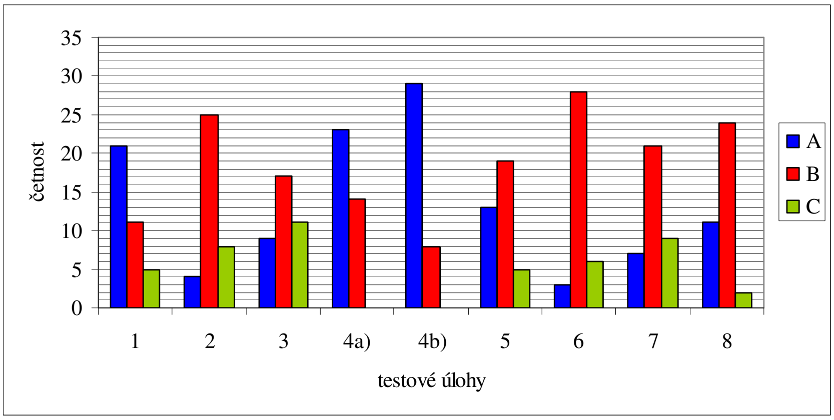
- lineární a konstantní funkce;
- kvadratická funkce a goniometrické funkce;
- nepřímá úměrnost

Grafy č. 1 vyjadřuje výsledky testu, úspěšnost řešení jednotlivých úloh v testu. Řešení jsou rozdělena do tří skupin.

A = zcela správné řešení

B = částečné či neúplné řešení

C = nesprávné řešení či neřešeno



Graf č.1: Celkové výsledky studentů v testu pilotáže

Z grafu č.1 je zřejmé, že úspěšnost studentů při řešení matematických úloh z učiva funkcí je nízká. Studenti byli řešitelsky neúspěšní v úlohách s číslem 2, 3, 5, 6, 7 a 8. Nejlépe si studenti vedli v úlohách č. 1, 4. Graf tak ukazuje na nedostatky studentů ve funkčním myšlení při řešení úloh s funkčním obsahem a problémů:

- vyjádřit funkční závislost dvou proměnných rovnicí a grafem (graf nepřímé úměrnosti, goniometrické funkce);
- práce s grafem, grafické vnímání;
- zaměňování obou proměnných při evidování závislosti s využitím souřadného systému souřadnic;
- práce se symboly.

Toto zjištění nás vedlo k zamyšlení se nad tím, zda i studenti matematiky na počátku prvního ročníku bakalářského studia mají nedostatky ve funkčním myšlení při řešení aplikačních úloh. Poněvadž tito studenti budou jednou vzdělávat a vychovávat své žáky v oblasti matematiky, a pokud oni sami nebudou mít dostatečně rozvinuté funkční myšlení, nemají tak budoucí učitelé dostatečný předpoklad k vykonávání učitelské profese.

6.2 Předvýzkum

Za finanční podpory projektu IGA na Univerzitě Palackého v Olomouci pro rok 2012 pod názvem „*Úroveň funkčního myšlení studentů učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ*“, jehož jsem byla hlavním řešitelem, proběhl předvýzkum a výzkum na univerzitách připravující učitele v České republice, který jsem prováděla v rámci své dizertační práce.

Výsledky testu z pilotážní části výzkumu a z výzkumu Eisenmanna a Kopáčkové (2006) vedly k zaměření dizertační práce na funkční myšlení studentů matematiky na pedagogických fakultách v ČR na počátku jejich vysokoškolského studia.

Protože studenti nebyli dostatečně úspěšní při řešení úloh v testu pilotáže, bylo potřeba sestavit nový didaktický test. Test celkem obsahoval 14 úloh a tematicky úlohy spadaly do tematických okruhů *Závislosti, vztahy a práce s daty* v RVP ZV a *Závislosti a funkční vztahy* v RVP G. Úlohy byly inspirovány mezinárodním projektem TIMSS, PISA, projektem Eisenmanna a Kopáčkové (2006). V roce 2012 proběhl předvýzkum na dvou univerzitách v České republice. Cílovou skupinou bylo 160 studentů matematiky v prvním ročníku bakalářského studijního programu:

- Matematika se zaměřením na vzdělávání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci;
- Matematika se zaměřením na vzdělávání na Univerzitě Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem.

Z důvodu navýšení počtu respondentů ve výzkumném vzorku byli do výzkumu zapojeni i studenti, kteří musí ve svém studiu absolvovat předmět matematika, konkrétně studenti oboru Učitelství pro 1. stupeň základní školy na obou výše zmíněných fakultách.

Tabulka vyjadřuje vyhodnocení výsledků podle následující stupnice:

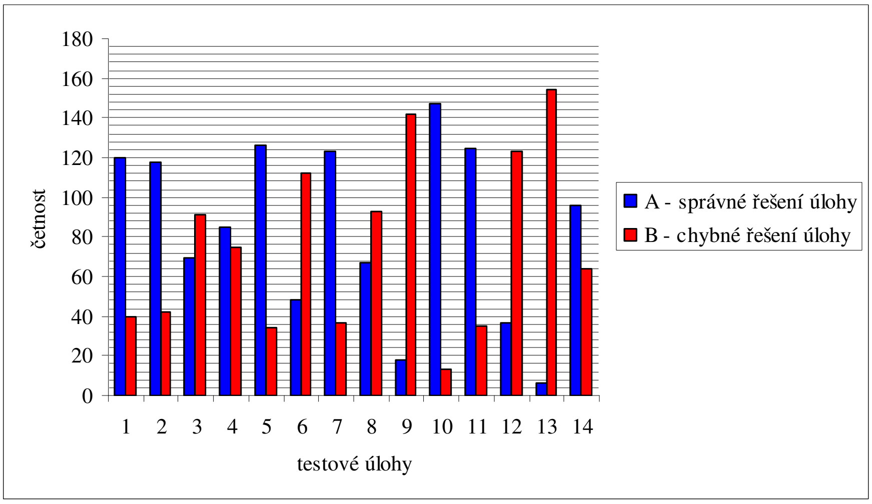
A – úloha zcela správně řešena (1 bod)

B – úloha řešena nesprávně nebo neřešená úloha (0 bodů)

Číslo úlohy	**A**	**B**
1	**120**	**40**
2	**118**	**42**
3	**69**	**91**
4	**85**	**75**
5	**126**	**34**
6	**48**	**112**
7	**123**	**37**
8	**67**	**93**
9	**18**	**142**
10	**147**	**13**
11	**125**	**35**
12	**37**	**123**
13	**6**	**154**
14	**96**	**64**

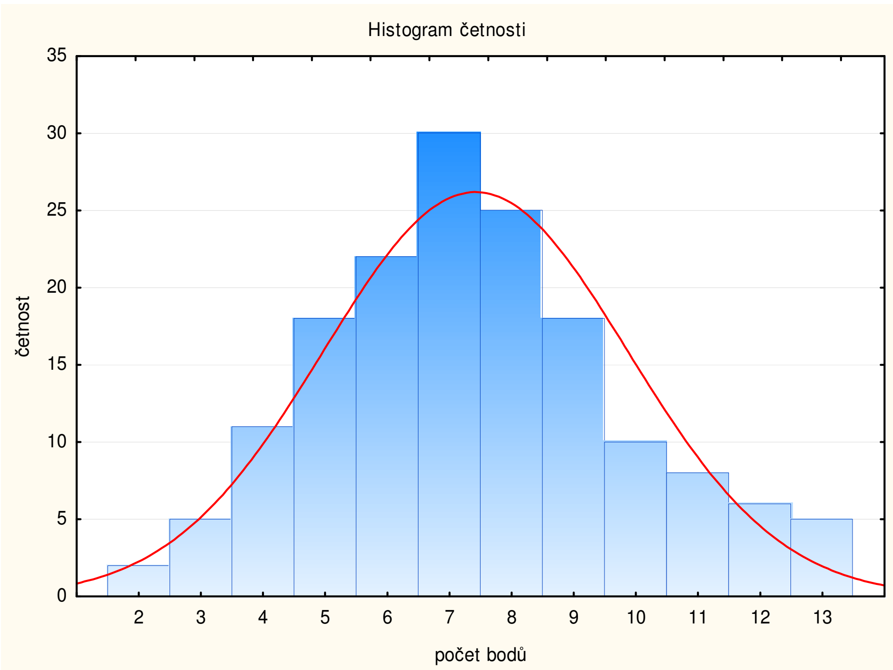
Tabulka č. 3: Výsledky předvýzkumu

Následující graf č. 2 znázorňuje celkové výsledky studentů v didaktickém testu předvýzkumu.



Graf č. 2: Celkové výsledky studentů v testu předvýzkumu

Graf č. 3 je histogram četností celkových výsledků studentů v testu předvýzkumu.



Graf č. 3: Histogram četností celkových výsledků testu předvýzkumu

6.2.1 Vlastnosti předvýzkumného didaktického testu

1) Reliabilita

Reliabilita je vlastnost, která se překládá jako spolehlivost a přesnost testu (Hališka, 1999). Pro výpočet byl použitý *Kuder-Richardsonův vzorec*:

$$r_{kr} = \frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k} pq}{s^2}\right)$$

Pro předvýzkumný test byly zjištěny tyto hodnoty:

$k = 14$ počet úloh v testu

p - podíl žáků /studentů ve vzorku, kteří řešili určitou úlohu v testu správně

$q = 1 - p$, q - podíl žáků /studentů ve vzorku, kteří řešili určitou úlohu v testu nesprávně

$s^2 = 6{,}204$– směrodatná odchylka byla vypočítána pomocí vzorce $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2$,

kde n je celková četnost všech hodnot, pro nás je $n = 160$, n_i je četnost hodnoty x_i, x_i je určitá naměřená hodnota a $\bar{x}$ je aritmetický průměr všech hodnot, pro náš případ je $\bar{x} = 7{,}388$ (Chráska, 2007). Pro uvedená data byl vypočítán koeficient spolehlivosti, který je roven **0,648**. U testů s malým počtem úloh (např. deset nebo méně), dosahuje koeficient spolehlivosti maximální hodnoty kolem 0,6 (Horák, Chráska, 1989).

2) Citlivost testových úloh

Citlivost testových úloh byla pro výzkumný test zjišťována pomocí koeficientu ULI. Jeho hodnotu d vypočítáme pomocí vzorce $d = \frac{n_L - n_H}{0{,}5N}$, kde n_L je počet studentů z lepší skupiny, kteří danou úlohu zodpověděli správně, n_H je počet studentů z horší skupiny, kteří úlohu řešili správně a N je celkový počet studentů.

U koeficientu citlivosti ULI se požaduje, aby v případě úloh s hodnotami obtížnosti Q: 30–70 bylo d alespoň 0,25 a u úloh s hodnotami obtížnosti Q: 20–30 a 70–80 alespoň 0,15 (Chráska, 1999).

Pro výpočet je třeba sestavit tzv. čtyřpolní (tetrachorickou) tabulku, která uvádí počty žáků ze skupin L (lepších) a H (horších), kteří v dané jednotlivé úloze odpověděli správně (+) nebo nesprávně (-). Obvykle se volí za skupinu lepších L a volí 50 % nejlepších studentů, za skupinu horších H se volí 50 % nejhorších studentů (Chráska, 1999).

Tabulka č. 4 zaznamenává hodnoty citlivosti jednotlivých úloh v testu předvýzkumu.

Úloha	n_L	n_H	$n_L - n_H$	***d***
1	76	44	32	0,40
2	71	47	24	0,30
3	53	16	37	0,46
4	64	23	41	0,51
5	75	51	24	0,30
6	37	11	26	0,33
7	77	46	31	0,39
8	52	15	37	0,46
9	17	1	16	0,20
10	75	72	3	0,04
11	79	46	33	0,41
12	28	9	19	0,24
13	6	0	6	0,08
14	66	30	36	0,45

Tabulka č. 4: Hodnoty citlivosti úloh předvýzkumného testu

3) Obtížnost testových úloh

Při analýze testových úloh byl vypočítán k jednotlivým úlohám index obtížnosti Q, který vyjadřuje, kolik procent testovaných úlohu chybně vyřešilo. Použili jsme vzorec $Q = 100\frac{n_n}{N}$, kde n_n je počet studentů, kteří odpověděli v dané úloze nesprávně a $\boldsymbol{N}$ je celkový počet testovaných jedinců.

Tabulka č. 5 popisuje hodnoty obtížnosti jednotlivých úloh předvýzkumného testu.

Číslo úlohy	n_n	**Index Q (%)**
1	40	25,00
2	42	26,25
3	91	56,88
4	75	46,88
5	34	21,25
6	112	70,00
7	37	23,13
8	93	58,13
9	142	88,75
10	13	8,13
11	35	21,88
12	123	76,88
13	154	96,25
14	64	40,00

Tabulka č. 5: Obtížnost úloh předvýzkumného testu

Podle Chrásky (2007) úlohy s hodnotou obtížnosti Q vyšší než 80 jsou považovány za extrémně obtížné a jejich užití lze připustit jen zcela výjimečně. Úlohy s hodnotami Q nižší než 20 jsou naopak extrémně snadné a jsou v testu ponechány taky pouze výjimečně (Horák, Chráska, 1989).

Úlohy č. 9 a č. 13 vykazují hodnotu Q vyšší než 80, jedná se o extrémně obtížné úlohy. Dále úloha č. 10 nabývá hodnoty indexu obtížnosti nižší než 20, je považována za extrémně snadnou. Jak vyplývá z teorie, v konečné verzi výzkumu je potřeba testové úlohy pozměnit nebo nahradit úlohami jinými.

Shrnutí

Výsledky a zkušenosti z pilotáže i předvýzkumné části výzkumu nás vedly k vypracování a sestavení konečné verze výzkumného nástroje nestandardizovaného didaktického testu.

7 Výzkum funkčního myšlení studentů matematiky na pedagogických fakultách v ČR

Při studiu relevantní literatury problematiky funkčního myšlení jsme se setkali s výzkumy, které se zabývaly schopností rozumět pojmu funkce a její definici, správně vnímat funkci zadanou graficky (Kopáčková, 2002). Eisenmann a Kopáčková (2006) věnovali pozornost funkčnímu myšlení žáků a vytvořili soubor úloh na podporu funkčního myšlení. Ježková (2000, 2001) se zabývala ověřením dovedností studentů, jak pracovali s grafy funkcí atd.

Cílem našeho výzkumu je zjistit a posoudit funkční myšlení studentů matematiky na počátku jejich bakalářského studia na pedagogických fakultách v ČR.

Přestože výzkumy byly prováděny na vysokých školách, vztahují se k problematice funkčního myšlení na úrovni základní a střední školy, tak jak ho od matematického vzdělávání očekávají kurikulární dokumenty. Funkční myšlení budoucích učitelů matematiky poukazují na to, jak budou své žáky v budoucnu vzdělávat, jakou kvalitu vzdělávání jim poskytnou.

7.1 Cíle výzkumu a jeho průběh

Hlavním cílem výzkumu je zjistit a posoudit funkční myšlení studentů bakalářského studijního programu Matematika se zaměřením na vzdělávání na počátku jejich vysokoškolského studia (na PdF Západočeské univerzity se jedná o bakalářský studijní obor Matematická studia a na PdF Masarykovy univerzity v Brně jde o bakalářský studijní obor Pedagogické asistentství) na pedagogických fakultách v ČR.

Dílčími cíli práce bylo:

- *zjistit* funkční myšlení studentů matematiky v prvním ročníku na počátku jejich bakalářského studia na všech pedagogických fakultách v ČR;
- *stanovit* míru úspěšnosti řešení jednotlivých úloh;
- *zjistit* nedostatky studentů ve funkčním myšlení vzhledem ke školnímu kurikulu;
- *navrhnout* vhodná opatření ke zvýšení úrovně funkčního myšlení;
- *zjistit*, zda je a jak funkční myšlení studentů ovlivněno pohlavím a jejich předchozím studiem na střední popř. vysoké škole.

V roce 2011 začalo projektování výzkumného šetření na základě studia relevantní odborné literatury. Projekt samostatného výzkumu trval delší dobu a sběr dat probíhal v období od září do prosince v roce 2012. Níže uvádíme tabulku, která popisuje proces projektování od září 2011 do prosince 2012 včetně pilotáže a předvýzkumu.

Časový interval	únor 2011 – prosinec 2011											leden 2012 – prosinec 2012											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Stanovení výzkumného problému	x	x	x	x																			
Příprava výzkumu		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				
Realizace pilotáže				x																			
Realizace předvýzkumu								x	x														
Sběr dat výzkumu																				x	x	x	x

Tabulka č. 6: Časový harmonogram etap výzkumu

7.2 Metodologie výzkumu

Na základě získaných zkušeností z pilotážního a předvýzkumného šetření výzkumu byly formulovány výzkumné otázky a k nim příslušné statistické hypotézy. Dále definujeme proměnné příslušné k výzkumným otázkám, charakterizujeme strukturu výzkumného vzorku a objasníme způsob zpracování získaných dat.

7.2.1 Proměnné ve výzkumném šetření

Při formulaci výzkumných otázek a hypotéz jsme proměnné výzkumného šetření operacionalizovali následovně:

Závisle proměnná:

Míra úspěšnosti řešení úloh v matematice: celkový počet (maximální počet) bodů z didaktického testu při řešení aplikačních úloh z matematiky je 14 bodů.

Nezávisle proměnné

Pedagogické fakulty: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8.

Typ absolvované střední školy: gymnázium; střední odborná škola a střední odborné učiliště.

Pohlaví: chlapci a dívky**.**

Úroveň maturitní zkoušky z matematiky u studentů, kteří absolvovali maturitní zkoušku v roce 2011–2012: nižší; vyšší úroveň maturity**.**

Časový odstup mezi rokem maturitní zkoušky a nástupem do studia na VŠ: maturitní zkouška absolvovaná v roce 2012; 2011; 2010; 2009 a starší.

Maturita z matematiky: ano; ne.

Předchozí studium na jiné vysoké škole: ano; ne.

7.2.2 Výzkumná otázka a její hypotézy

1. Jaká je míra úspěšnosti řešení úloh v testu u studentů matematiky v prvním ročníku na počátku jejich bakalářského studia na pedagogických fakultách v České republice?

$H1_0$ Míra úspěšnosti řešení úloh z matematiky obsažených v didaktickém testu je stejná na všech pedagogických fakultách v ČR.

$H1_A$ Míra úspěšnosti řešení úloh z matematiky obsažených v didaktickém testu je na pedagogických fakultách v ČR různá.

2. Jaká je míra úspěšnosti řešení jednotlivých aplikačních úloh?

2.1 *Ve které úloze, obsažené v didaktickém testu, byli studenti řešitelsky nejúspěšnější*?

2.2 *Ve které úloze, obsažené v didaktickém testu, byli studenti řešitelsky nejméně úspěšní?*

2.3 Jaké jsou příčiny neúspěchu při řešení jednotlivých úloh v testu?

3. Jak jsou ovlivněny výsledky testu pohlavím respondenta?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh v didaktickém testu u mužů a žen?

$H3_0$ Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu dosaženým ve skupině žen a průměrným počtem bodů dosaženým ve skupině mužů není statisticky významný rozdíl.

$H3_A$ Mezi dosaženými průměry v obou srovnávaných skupinách je statisticky významný rozdíl.

4. Jak ovlivňuje druh absolvované střední školy výsledek v testu?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u absolventů gymnázia (G) a středních odborných škol (SOŠ a SOU)?

$H4_0$ Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu dosaženým ve skupině absolventů G a průměrným počtem bodů dosaženým ve skupině absolventů SOŠ a SOU není statisticky významný rozdíl.

$H4_A$ Mezi dosaženými průměry v obou srovnávaných skupinách je statisticky významný rozdíl.

5. Jak ovlivňuje výsledek testu respondenta časový odstup mezi rokem jeho absolvování maturitní zkoušky a počátkem studia na VŠ?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u studentů, kteří absolvovali maturitní zkoušku v letech 2012, 2011, 2010, 2009 a starší?

$H5_0$ Mezi dosaženými průměry ve všech srovnávaných skupinách není statisticky významný rozdíl.

$H5_A$ Mezi dosaženými průměry ve všech srovnávaných skupinách je statisticky významný rozdíl.

6. Jak maturitní zkouška z matematiky ovlivňuje výsledek testu respondenta?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u respondentů, kteří absolvovali maturitní zkoušku z matematiky a kteří neabsolvovali maturitní zkoušku z matematiky?

$H6_0$ Průměrný počet bodů v didaktickém testu u absolventů maturitní zkoušky z matematiky a absolventů, kteří nematurovali z matematiky, je stejný.

$H6_A$ Průměrný počet bodů v didaktickém testu u absolventů maturitní zkoušky z matematiky a absolventů, kteří nematurovali z matematiky, se liší.

7. Jak ovlivňuje výsledek testu respondenta úroveň absolvované státní maturitní zkoušky z matematiky?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u studentů, kteří absolvovali vyšší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky a nižší úrovní státní maturitní zkoušky z matematiky v letech 2011–2012?

$H7_0$ Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu u absolventů vyšší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky a průměrným počtem bodů v testu u absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky není statisticky významný rozdíl.

$H7_A$ Mezi dosaženými průměry v obou skupinách je statisticky významný rozdíl.

8. Jak ovlivňuje výsledek testu respondenta předchozí studium na jiné vysoké škole?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u studentů, kteří studovali na jiné vysoké škole před nástupem na pedagogickou fakultu a u studentů, kteří nestudovali na jiné vysoké škole.

$H8_0$ Průměrný počet bodů v testu u studentů, kteří před nástupem na pedagogickou fakultu navštěvovali jinou vysokou školu a kteří nenavštěvovali jinou vysokou školu před nástupem na pedagogickou fakultu, je stejný.

$H8_A$ Průměrný počet bodů v testu u studentů, kteří před nástupem na pedagogickou fakultu navštěvovali jinou vysokou školu a kteří nenavštěvovali jinou vysokou školu před nástupem na pedagogickou fakultu, se liší.

7.2.3 Výzkumné techniky

K dosažení stanovených cílů byl navržen *kvantitativní výzkum*. Během výzkumného šetření byla použita výzkumná metoda testování pomocí nestandardizovaného didaktického testu.

- *Nestandardizovaný didaktický test* zjišťoval aktuální stav funkčního myšlení žáků/studentů. Ačkoliv test obsahoval úlohy odpovídající náročnosti učiva základní a střední školy, byl zadán studentům matematiky na počátku studia v prvním ročníku bakalářského studia na pedagogických fakultách v České republice. Didaktický test byl sestaven autorkou dizertační práce, inspiraci pro úlohy našla autorka testu v mezinárodních výzkumech TIMSS, PISA a navržených úlohách projektu Eisenmanna a Kopáčkové (2006). Test obsahoval 14 úloh, z toho 5 úloh bylo uzavřených (úlohy s výběrem dopovědí) a zbylých 9 úloh bylo otevřených.

Předtím, než byl didaktický test použitý pro výzkumné účely, byla provedena *pilotáž*. Pilotáže se celkem zúčastnilo 37 studentů, kterým byl zadán didaktický test složený z 8 testových úloh. Tematicky testové úlohy odpovídají evaluačním standardům z matematiky základní a střední školy. Na základě pilotáže jsme zjistili konkrétní nedostatky studentů ve funkčním myšlení:

- vyjádřit funkční závislost dvou proměnných rovnicí a grafem (graf nepřímé úměrnosti, goniometrické funkce);
- práce s grafem, grafické vnímání;
- zaměňování obou proměnných při evidování závislosti s využitím souřadného systému souřadnic;
- práce se symboly.

Po pilotáži následoval *předvýzkum.* Protože studenti nebyli dostatečně úspěšní při řešení úloh v testu pilotáže, bylo potřeba sestavit nový didaktický test. Testové úlohy odpovídaly náročnosti učiva základní a střední školy a test celkem obsahoval 14 úloh. Tematicky úlohy spadaly do tematických okruhů *Závislosti, vztahy a práce s daty* v RVP ZV a *Závislosti a funkční vztahy* v RVP G. Úlohy byly inspirovány mezinárodním projektem TIMSS, PISA, projektem Eisenmanna a Kopáčkové (2006). V roce 2012 proběhl předvýzkum na dvou univerzitách v České republice. Cílovou skupinou bylo 160 studentů matematiky v prvním ročníku bakalářského studia. Z důvodu navýšení počtu respondentů ve výzkumném vzorku byli do výzkumu zapojeni i studenti, kteří musí ve svém studiu absolvovat předmět matematika, konkrétně studenti oboru Učitelství pro 1. stupeň základní školy na obou výše zmíněných fakultách. Na základě výsledků těchto studentů byly zjištěny vlastnosti předvýzkumného nástroje (obtížnost úloh, citlivost úloh a reliabilita).

Vlastnosti didaktického testu

1) Reliabilita

Reliabilita výzkumného nástroje byla vypočítána pomocí Kuder-Richardsonova vzorce. Pro získaná data byly vypočítány následující hodnoty: r_{kr} = **0,712**.

2) Citlivost testových úloh

Citlivost testových úloh byla pro výzkumný test zjišťována pomocí koeficientu ULI. Jeho hodnotu d vypočítáme pomocí vzorce:

$d = \frac{n_L - n_H}{0{,}5N}$, kde n_L je počet studentů z lepší skupiny, kteří danou úlohu zodpověděli správně, n_H je počet studentů z horší skupiny, kteří úlohu řešili správně a N je celkový počet studentů. U koeficientu citlivosti ULI se požaduje, aby v případě úloh s hodnotami obtížnosti Q: 30 – 70 bylo d alespoň 0,25 a u úloh s hodnotami obtížnosti Q: 20–30 a 70–80 alespoň 0,15 (Chráska, 1999).

Úloha	n_L	n_H	$n_L - n_H$	d
1	152	142	10	0,07
2	138	97	41	0,27
3	125	67	58	0,38
4	99	26	73	0,48
5	148	101	47	0,31
6	62	27	35	0,23
7	133	103	30	0,20
8	104	65	39	0,26
9	39	5	34	0,24

10	144	95	49	0,32
11	131	94	37	0,24
12	71	2	69	0,45
13	22	0	22	0,14
14	135	84	51	0,36

Tabulka č. 7: Hodnoty citlivosti úloh výzkumného testu

Z hodnot v tabulce lze vyčíst, že nejlépe mezi respondenty s lepšími vědomostmi a respondenty s horšími vědomostmi rozlišují úlohy číslo 4 a 12, nejmenší rozlišovací schopnost mezi oběma skupinami respondentů mají úlohy číslo 1 a 7.

3) Obtížnost testových úloh

Číslo úlohy	n_n	**Index *Q* (%)**
1	10	3,29
2	69	22,70
3	112	36,84
4	179	58,88
5	55	81,64
6	215	70,72
7	68	22,37
8	135	44,41
9	260	85,53
10	65	21,38
11	79	25,99
12	231	75,99
13	282	92,76
14	85	27,96

Tabulka č. 8: Obtížnost úloh výzkumného testu

Z výpočtu obtížnosti úloh plyne, že úloha číslo 1 je extrémně snadná, protože její index obtížnosti nabývá hodnoty nižší než 20. Je vhodné tuto úlohu ponechat jako úvodní úlohu k motivaci respondentů.

7.2.4 Výzkumný soubor

Pro výzkumné šetření jsme zvolili všechny studenty bakalářského studijního programu Matematika se zaměřením na vzdělávání (resp. Matematická studia na Západočeské univerzitě v Plzni a Pedagogické asistenství matematiky na Masarykově univerzitě v Brně).

Základní soubor tvořilo **8 pedagogických fakult v České republice**:

1. Masarykova univerzita v Brně
2. Ostravská univerzita v Ostravě
3. Univerzita Palackého v Olomouci
4. Západočeská univerzita v Plzni
5. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
6. Univerzita Hradec Králové
7. Karlova univerzita v Praze
8. Technická univerzita v Liberci

Výzkumný vzorek zahrnoval **305 studentů** bakalářských studijních oborů. S provedením výzkumného šetření byli seznámeni vedoucí kateder matematiky na zúčastněných pedagogických fakultách.

Charakteristika výzkumného souboru

a) Pohlaví

Výzkumného šetření se účastnilo 187 (61,3 %) žen a 118 (38,7 %) mužů.

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ženy	187	61,3	61,3	61,3
	Muži	118	38,7	38,7	100,0
	Total	305	100,0	100,0	

Tabulka č. 9: Pohlaví

b) Absolvovaná střední škola

Výzkumného šetření se zúčastnilo celkem 145 (47,5 %) absolventů gymnázia a 160 (52,5 %) absolventů střední odborné školy (SOŠ) a středního odborného učiliště (SOU).

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Gymnázium	145	47,5	47,5	47,5
	SOŠ a SOU	160	52,5	52,5	100,0
	Total	305	100,0	100,0	

Tabulka č. 10: Typ střední školy

c) Rok úspěšně vykonané maturitní zkoušky

Celkem se výzkumného šetření zúčastnilo 18 (5,9 %) respondentů, kteří úspěšně vykonali maturitní zkoušku v letech 2005–2009, 25 (8,2 %) respondentů, kteří úspěšně vykonali maturitní zkoušku v roce 2010 a 262 (85,9 %) respondentů, kteří úspěšně složili státní maturitní zkoušku v letech 2011–2012.

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2005-2009	18	5,9	5,9	5,9
	2010	25	8,2	8,2	14,1
	2011-2012	262	85,9	85,9	100,0
	Total	305	100,0	100,0	

Tabulka č. 11: Rok absolvování maturitní zkoušky

d) Maturita z matematiky

Výzkumného šetření se celkem zúčastnilo 218 (71,5 %) respondentů, kteří skládali maturitní zkoušku z matematiky a 87 (28,5 %) respondentů, kteří nematurovali z matematiky.

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ano	218	71,5	71,5	71,5
	Ne	87	28,5	28,5	100,0
	Total	305	100,0	100,0	

Tabulka č. 12: Maturita z matematiky

e) Úroveň vykonání státní maturitní zkoušky

Celkem se výzkumného šetření zúčastnilo 191 respondentů, kteří úspěšně vykonali státní maturitní zkoušku z matematiky v letech 2011–2012. Z toho počtu se zúčastnilo 126 (66,0 %) respondentů nižší úrovně státní maturitní zkoušky, 65 (34,0 %) respondentů vyšší úrovně státní maturitní zkoušky.

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Nižší	126	66,0	66,0	66,0
	Vyšší	65	34,0	34,0	100,0
	Total	191	100,0	100,0	

Tabulka č. 13: Úroveň státní maturitní zkoušky z matematiky

f) Předchozí studium na jiné vysoké škole

Celkem se výzkumného šetření zúčastnilo 305. Z celkového počti respondentů se zúčastnilo 53 (17,4 %) studentů, kteří před nástupem na pedagogickou fakultu studovali na jiné vysoké škole a 252 (82,6 %) respondentů, kteří nestudovali na jiné vysoké škole před nástupem na pedagogickou fakultu.

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ano	53	17,4	17,4	17,4
	Ne	252	82,6	82,6	100,0
	Total	305	100,0	100,0	

Tabulka č. 14: Předchozí studium na jiné vysoké škole

7.2.5 Způsob zpracování dat

Při zpracování dat byla použita deskriptivní statistika ke zjišťování četností bodových hodnocení jednotlivých úloh, relativních četností, aritmetických průměrů a charakteristik rozptýlení (rozptyl a směrodatná odchylka). Byl proveden podrobný rozbor výsledků jednotlivých úloh, ve kterém bylo analyzováno funkční myšlení studentů. Dále byla pro zjišťování vztahů mezi proměnnými použita statistika induktivní. K ověření normality rozdělení četností byl použitý *Chí-kvadrát*, popřípadě *Lilieforsův test*. Homogenita rozptylů byla ověřována pomocí *Leveneova, případně Fischerova-Snedecorova F-testu.* V případě, že rozložení dat bylo normální a byl splněn požadavek homogenity rozptylu v obou srovnávaných skupinách dat, použili jsme na testování hypotézy *Studentův t-test*. Protože jsme při ověřování dvou hypotéz pracovali s více než dvěma srovnávanými skupinami, použili jsme metodu analýzy rozptylu. Protože se v obou případech nepotvrdila normalita rozdělení četností, použili jsme neparametrickou podobu analýzy rozptylu – *Kruskal-Wallisův test.*

Ke grafickému znázornění výsledků byly použity histogramy, krabicové a sloupcové grafy, vytvářené ve statistického programu Statistica 10 a programu Microsoft Office Excel 2007.

Pro získané výsledky byla použita hladina významnosti $p < 0,05$, což je standardně používaná hodnota v pedagogické metodologii. Znamená to, že riziko chybného přijetí nebo zamítnutí nulové hypotézy je 5 %.

7.3 Výsledky výzkumného šetření

Ke znázornění četností **celkové míry úspěšnosti řešení úloh** používáme popisnou statistiku. **U ověření normality rozdělení četností značíme statistické hypotézy s indexem *x*, statistické hypotézy u ověřování homogenity rozptylu značíme s indexem *y*.** Tabulky ověření normality rozdělení četností uvádíme v příloze č. 5.

1. Jaká je míra úspěšnosti řešení úloh v testu u studentů matematiky v prvním ročníku na počátku jejich bakalářského studia na pedagogických fakultách v České republice?

<u>**Statistické hypotézy**</u>:

$H1_0$	*Míra úspěšnosti řešení úloh z matematiky obsažených v didaktickém testu je stejná na všech pedagogických fakultách v ČR.*
$H1_A$	*Míra úspěšnosti řešení úloh z matematiky obsažených v didaktickém testu je na pedagogických fakultách v ČR různá.*

K ověření následujících statistických hypotéz byla zvolena metoda analýzy rozptylu. Tuto metodu odvodil R. A. Fisher před několika desítkami let a je považována za moderní statistickou metodu, která v našich výzkumech zatím příliš nezdomácněla, přitom může v pedagogickém výzkumu přinášet pozoruhodné spolehlivé výsledky.

Před použitím analýzy rozptylu musí být splněny následující předpoklady o výběru (Chráska, 2007):

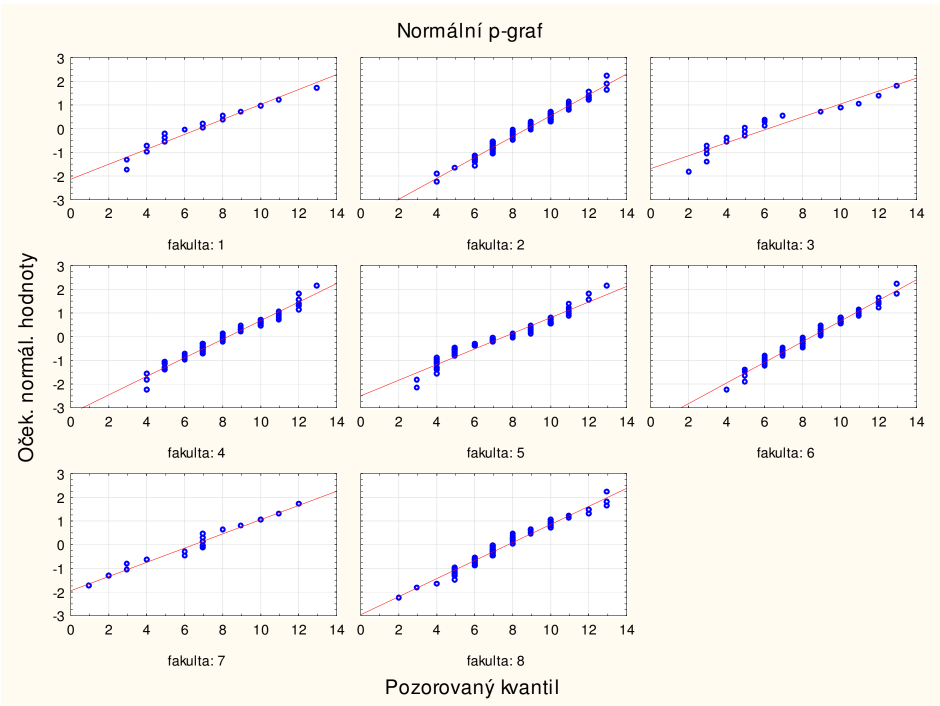
1. data mají normální rozdělení;
2. rozptyl v jednotlivých porovnávaných skupinách je stejný (homoskedasticita);
3. jednotlivé skupiny jsou nezávislé.

Z důvodu dodržení anonymity výsledků studentů v didaktickém testu na jednotlivých pedagogických fakultách, neodpovídají čísla 1-8 pořadí pedagogických fakult uvedeném v charakteristice výzkumného souboru.

Předpoklady před použitím analýzy rozptylu

a) Ověření normality testu

Použitím Lilieforsova testu normality i dle znázornění normálních *p*-grafů jsme dospěli k závěru, že existuje alespoň jedna třída, v níž data nelze považovat za náhodný výběr z normálního rozdělení.



Graf č. 4: Normální pravděpodobnostní graf – pedagogické fakulty

b) Ověření homogenity rozptylu

Jelikož nebyla splněna podmínka normality testu, použili jsme k testování homogenity rozptylu Leveneův test. Byly stanoveny následující statistické hypotézy:

$H1_{y0}$ *Každá dvojice rozptylů je stejná.*

$H1_{yA}$ *Alespoň jedna dvojice rozptylů se liší.*

Ověřování hypotézy probíhalo na hladině významnosti α =0,05.

	Leveneův test homogenity rozptylů Efekt: pedagogická fakulta			
	PČ Efekt	PČ Chyba	F	p
body	3,957	2,059	1,922	0,066

Tabulka č. 15: Leveneův test homogenity rozptylů – efekt: pedagogická fakulta

Protože *p*-hodnota je větší než stanovená hladina významnosti, přijímáme nulovou hypotézu o homoskedasticitě.

c) Ověření nezávislosti výběrů

Ze zadání je zřejmé, že jednotlivé náhodné výběry jsou nezávislé.

Z výsledků ověřování podmínek metody analýzy rozptylu jsme zvolili neparametrickou podobu ANOVy – tzv. Kruskal-Wallisův test. Ověření statistických hypotéz probíhalo na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

H_0 *Mediány ve všech třídách dat jsou stejné.*

H_A *Alespoň jedna dvojice mediánů se liší.*

Závislá: body	Kruskal-Wallisova ANOVA Kruskal-Wallisův test: H (7, N= 305) =24,35627 p =,0010			
	Kód	Počet platných	Součet pořadí	Prům. Pořadí
1	1	16	1829,500	114,344
2	2	58	10499,50(	181,026
3	3	19	1857,000	97,737
4	4	47	7710,500	164,053
5	5	45	6437,500	143,056
6	6	53	9114,000	171,962
7	7	17	1910,000	112,353
8	8	50	7307,000	146,140

Tabulka č. 16: Kruskal-Wallisova ANOVA – efekt: pedagogická fakulta

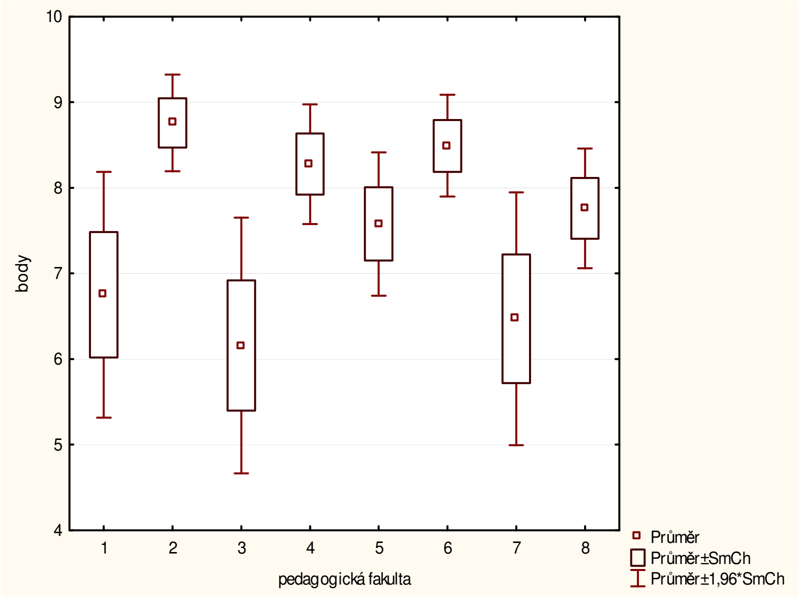
Z analýzy rozptylu vyvstává další otázka. Studenti jaké pedagogické fakulty mají statisticky významně lepší (resp. horší) šanci na lepší výsledek? K bližšímu určení rozdílů mezi jednotlivými třídami nám pomůže metoda post hoc analýza – Tukeyho metoda HSD.

	Tukeyův HSD test Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000							
	{1} M=6,750	{2} M=8,758	{3} M=6,157	{4} M=8,276	{5} M=7,577	{6} M=8,490	{7} M=6,470	{8} M=7,760
1 {1}		0,102	0,998	0,445	0,955	0,253	1,000	0,871
2 {2}	0,102		0,003	0,980	0,285	0,999	0,027	0,471
3 {3}	0,998	0,003		0,049	0,467	0,016	1,000	0,285
4 {4}	0,445	0,980	0,049		0,897	1,000	0,201	0,976
5 {5}	0,955	0,285	0,467	0,897		0,651	0,800	1,000
6 {6}	0,253	0,999	0,016	1,000	0,651		0,089	0,837
7 {7}	1,000	0,027	1,000	0,201	0,800	0,089		0,628
8 {8}	0,871	0,471	0,285	0,976	1,000	0,837	0,628	

Tabulka č. 17: Tukeyův HSD test

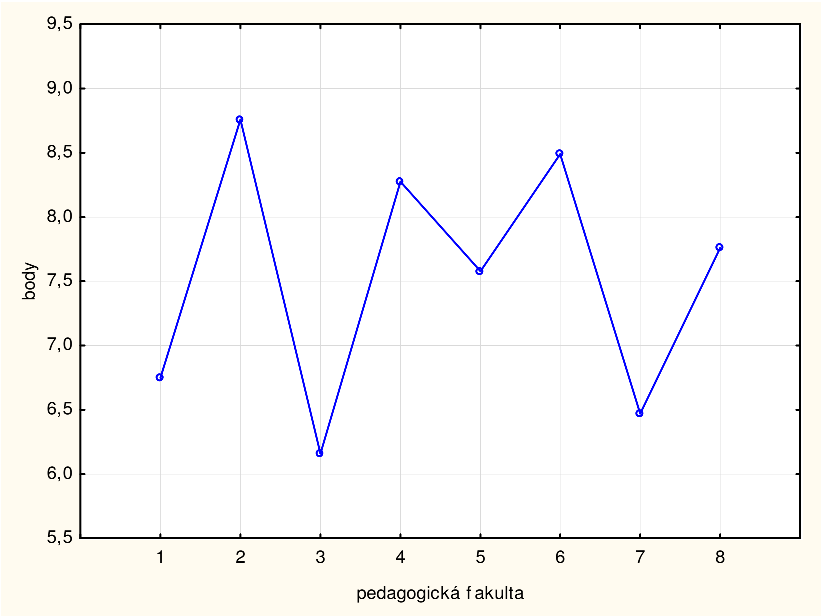
Závěr: *Protože p-hodnota je menší než stanovená hladina významnosti, zamítáme nulovou hypotézu a přijímáme hypotézu alternativní.* Existuje alespoň jedna dvojice mediánů, která se liší. Statisticky významné rozdíly v průměrech mezi fakultami jsou v tabulce č. 17 označeny červeně. Například mezi průměrným počtem bodů z didaktického testu u studentů fakult označené číslem 2 a 3 jsou statisticky významné rozdíly. Úspěšnost řešení úloh v testu u studentů matematiky v prvním ročníku na počátku jejich bakalářského studia na jednotlivých pedagogických fakultách v České republice není stejná.

Graf č. 5 znázorňuje průměrné výsledky v didaktickém testu jednotlivých fakult.



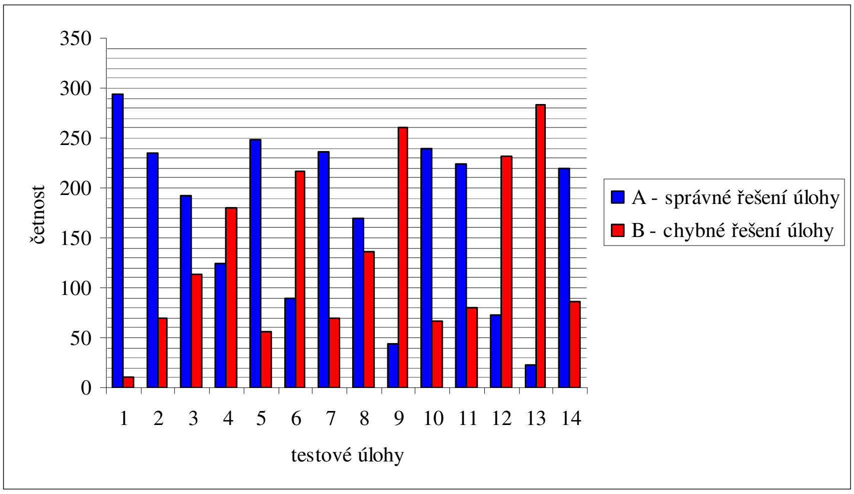
Graf č. 5: Krabicový graf -průměrné výsledky v testu jednotlivých fakult

Graf č. 6 vyjadřuje průměrný počet bodů v didaktickém testu jednotlivých pedagogických fakult v ČR.



Graf č. 6: Průměrný počet bodů v testu jednotlivých pedagogických fakult

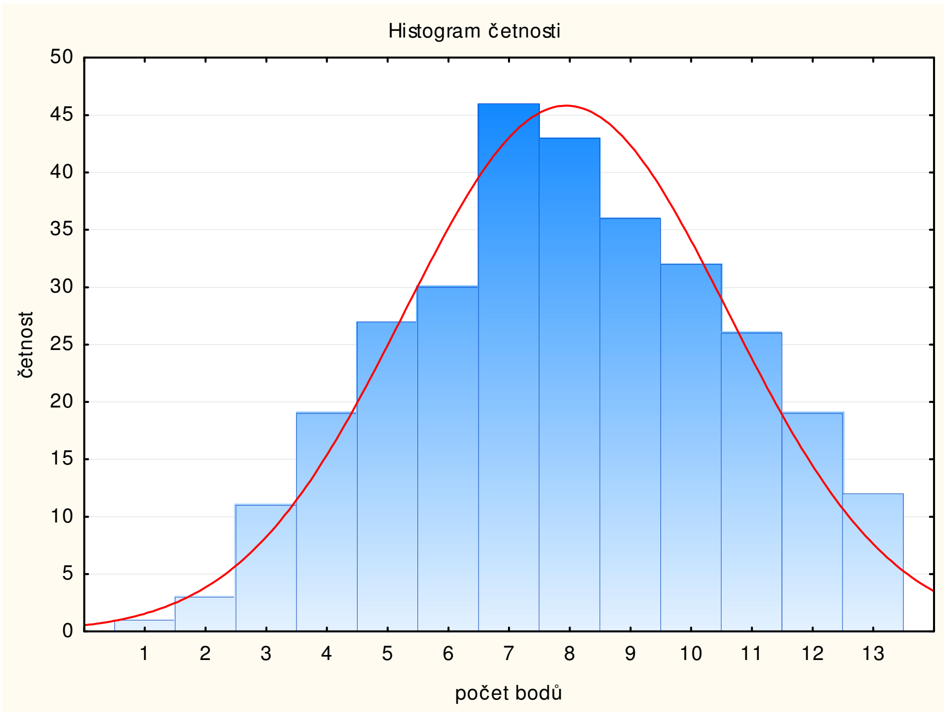
Graf číslo 7 prezentuje celkové výsledky studentů v testu.



Graf č. 7: Celkové výsledky studentů v testu výzkumu

Z grafu č. 7 vyplývá, že celková úspěšnost řešení matematických úloh v didaktickém testu, který byl zadán studentům prvního ročníku na počátku jejich bakalářského studijního programu Matematika se zaměřením na vzdělávání (resp. Matematická studia na Západočeské univerzitě v Plzni a Pedagogické asistenství matematiky na Masarykově univerzitě v Brně), dosahovala průměrné hodnoty (aritmetický průměr) 7,905 bodů z celkového počtu 14, $\bar{x} = 7{,}905$, proto žáci/studenti mohou mít s řešením matematických úloh problémy.

Následující graf č. 8 znázorňuje histogram četností výsledků didaktického testu výzkumu testovaných studentů a tabulka číslo 18 prezentuje četnosti získaných bodů v didaktickém testu výzkumu daných respondentů.



Graf č. 8: Histogram četnosti výsledků studentů v testu

Tabulka četností				
Počet bodů	**Četnost**	**Kumulativní – četnost**	**Rel.četnost**	**Kumulativní - rel.četnost**
1	1	1	0,32787	0,3279
2	3	4	0,98361	1,3115
3	11	15	3,60656	4,9180
4	19	34	6,22951	11,1475
5	27	61	8,85246	20,0000
6	30	91	9,83607	29,8361
7	46	137	15,08197	44,9180
8	43	180	14,09836	59,0164
9	36	216	11,80328	70,8197
10	32	248	10,49180	81,3115
11	26	274	8,52459	89,8361
12	19	293	6,22951	96,0656
13	12	305	3,93443	100,0000
14	0	305	0,00000	100,0000

Tabulka č. 18: Tabulka četností výsledků testu výzkumu

2. Jaká je míra úspěšnosti řešení jednotlivých aplikačních úloh?

2.1 *Ve které úloze, obsažené v didaktickém testu, byli studenti řešitelsky nejúspěšnější?*

2.2 *Ve které úloze, obsažené v didaktickém testu, byli studenti řešitelsky nejméně úspěšní?*

2.3 *Jaké jsou příčiny neúspěchu při řešení jednotlivých úloh v testu?*

Uvedená tabulka představuje míru úspěšnosti řešení jednotlivých aplikačních úloh z matematiky tak, jak byly seřazeny v didaktickém testu.

číslo úlohy	**vyřešeno**	**četnost**	**četnost v %**
1	správně	294	96,4
	chybně	11	3,6
2	správně	235	77
	chybně	70	23
3	správně	192	63
	chybně	113	37
4	správně	125	41
	chybně	180	59
5	správně	249	81,6
	chybně	56	18,4
6	správně	89	29,2
	chybně	216	70,8
7	správně	236	77,4
	chybně	69	22,6
8	správně	169	55,4
	chybně	136	44,6
9	správně	44	14,4
	chybně	261	85,6
10	správně	239	78,4
	chybně	66	21,6
11	správně	225	73,8
	chybně	80	26,2
12	správně	73	24
	chybně	232	76
13	správně	22	7,2
	chybně	283	92,8
14	správně	219	71,8
	chybně	86	28,2

Tabulka č. 19: Míra úspěšnosti řešení jednotlivých úloh

Studenti prvního ročníku bakalářského studia byli řešitelsky nejúspěšnější v úloze č. 1. Nejméně úspěšní byli studenti bakalářského studia v řešení úlohy č. 13. Méně řešitelsky úspěšní (pod 50 %) byli studenti prvního ročníku bakalářského studia v úlohách č. 4, 6, 9, 12 a 13. Poněvadž jsme nesprávné a částečné odpovědi považovali za neúspěšné, můžeme říct, že úspěšnost řešení u studentů je nízká.

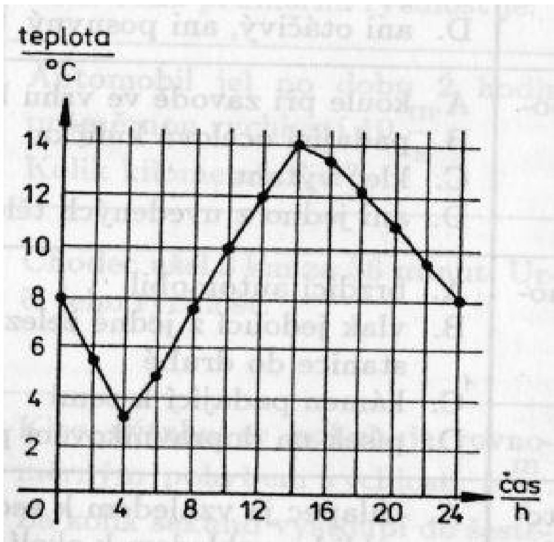
Nejčastější chyby při řešení úloh

Úloha č. 1

Zadání: Graf znázorňuje závislost teploty na čase. Interpretujte závislost popsanou grafem.

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….



Obrázek č. 1: Graf závislosti teploty na čase

Vlastnosti úlohy: $d = 0{,}05$; $P = 96{,}4\ \%$.

Diskuse k řešení: Úloha nebyla pro studenty problematická. Pouze 3,6 % studentů z celkového počtu 305 bylo neúspěšných. Domníváme se, že hlavní příčinou chybné odpovědi je nepozornost respondenta při čtení grafu funkce, nepovšimnutí si různých jednotek na osách *x* a *y*.

Nedostatek ve funkčním myšlení: U neúspěšných studentů se projevil nedostatek v obsahové interpretaci matematického jevu. Především problémy s analýzou funkční závislosti a jejím vyjádřením pomocí slov, s orientací v grafu funkční závislosti, vizuální gramotností a vnímáním.

Úloha č. 2

<u>*Zadání:*</u> V tabulce jsou uvedeny teploty naměřené v různých hodinách jednoho dne. Převeďte funkční závislost vyjádřenou tabulkou do grafu.

Čas *(h)*	06:00	09:00	12:00	15:00	18:00
Teplota *(°C)*	12	17	14	18	15

Tabulka č. 20: Teploty naměřené v různých hodinách

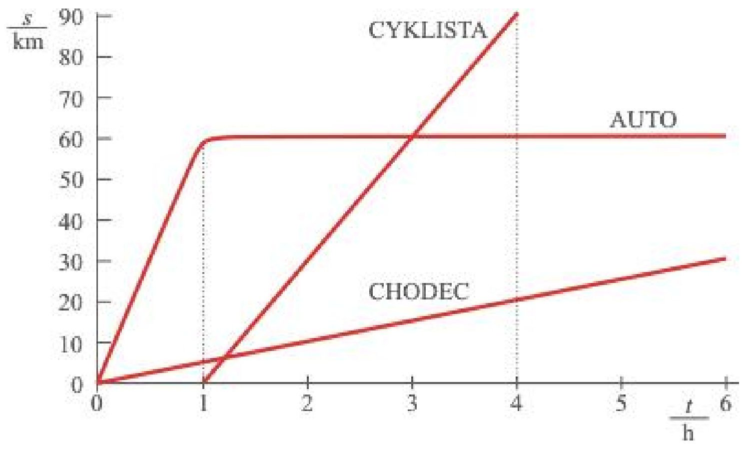
<u>*Vlastnosti úlohy:*</u> d = 0,27; P = 77 %.

<u>*Diskuse k řešení:*</u> Nejčastěji dělali studenti chybu ve správném označení proměnných (času a teploty) na ose x a ose y, často tyto osy zaměňovali. Také studenti častěji tuto funkční závislost znázorňovali tak, že jejím grafem byly izolované body místo spojitého grafu funkce. Tuto úlohu vyřešilo neúspěšně 23 % respondentů.

<u>*Nedostatek ve funkčním myšlení:*</u> 23 % studentů není schopno převádět číselné údaje do grafu funkce, neuvědomují si závislost mezi jevy reálného světa vyjádřenou tabulkou a mají nedostatečně osvojený grafický projev. Na tyto nedostatky se dále váže problém ve schopnosti představit si proměnlivost veličin a v prostorové představivosti.

Úloha č. 3

<u>*Zadání:*</u> Auto, chodec a cyklista se pohybují po stejné silnici. Na obrázku je graf závislosti jejich drah na čase. Určete, který z nich má během jejich prvních tří hodin pohybu nejvyšší průměrnou rychlost.



Obrázek č. 2: Graf závislosti dráhy na čase

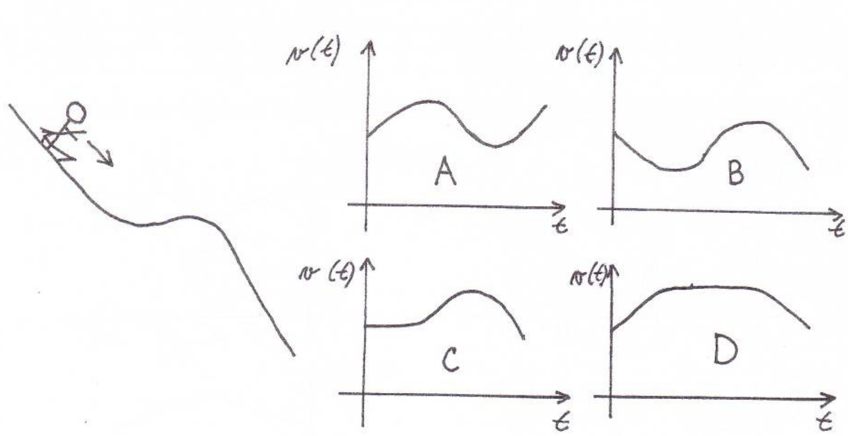
<u>*Vlastnosti úlohy:*</u> $d = 0{,}38$; $P = 63$ %.

<u>*Diskuse k řešení:*</u> Nejčastější chybnou odpovědí respondentů bylo auto. Odpověď respondentů zřejmě vychází z reálného života, že auto může dosáhnout vyšší rychlosti než cyklista. Dle obrázku má nejvyšší průměrnou rychlost cyklista. Úlohu neúspěšně vyřešilo 37 % respondentů.

<u>*Nedostatek ve funkčním myšlení:*</u> Neúspěšní studenti mají nedostatky v orientaci funkční závislosti vyjádřené grafem funkce a v logické přesnosti usuzování. Na tuto skutečnost navozuje problém s vizuální gramotností i s vnímáním a analýzou funkční závislosti vyjádřenou grafem.

Úloha č. 4

<u>*Zadání:*</u> Na obrázku vlevo je zachycen lyžař, jak sjíždí svah. Grafy vyjadřují závislost rychlosti lyžaře *v(t)* na čase *t*. Určete, který z grafů odpovídá dané závislosti.



Obrázek č. 3: Grafy závislosti rychlosti lyžaře na čase

Vlastnosti úlohy: d = 0,48; P = 41 %.

Diskuse k řešení: Tato úloha se stala pro studenty problematická. Studenti se nejčastěji dopouštěli chybné úvahy, kdy si neuvědomili, že podle uvedeného tvaru kopce nejprve lyžař svoji rychlost zvyšuje, potom pomalu před kopečkem rychlost klesá a následně se rychlost lyžaře zvyšuje. Na základě tohoto nedostatku 59 % respondentů volilo variantu *B*, která je zásadně chybná. Podle varianty *B* nejprve rychlost lyžaře klesá, potom se rychlost zvyšuje a následně opět rychlost klesá. Volba varianty *B* může být také způsobena podobností grafu závislosti rychlosti na čase s obrázkem (tvarem kopce).

Nedostatek ve funkčním myšlení: Řešitelská neúspěšnost této úlohy spočívá v nedostatcích funkčního myšlení studentů. U neúspěšných studentů je nedostatek v jejich praktické inteligenci a logické přesnosti usuzování. Problémy s postihnutím zobecnění vztahu mezi veličinami, vyjádřením tohoto vztahu grafem a schopností představit si proměnlivost veličin ve spojitosti se zadaným obrázkem zkoumané situace a vnímáním. Při řešení úlohy si neúspěšní studenti vytvořili špatný úsudek na základě něj volili špatnou variantu řešení a obtížná se pro ně zdála interpretace kauzálních vztahů.

Úloha č. 5

Zadání: Graf znázorňuje vlhkost vzduchu v místnosti naměřenou během odpoledne. Popište, jak se měnila vlhkost vzduchu od 6 hodin do 12 hodin.

Obrázek č. 4: Graf závislosti vlhkosti vzduchu na čase

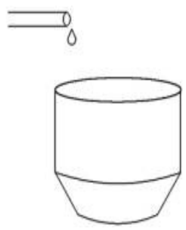
Vlastnosti úlohy: d = 0,31; P = 81,6 %.

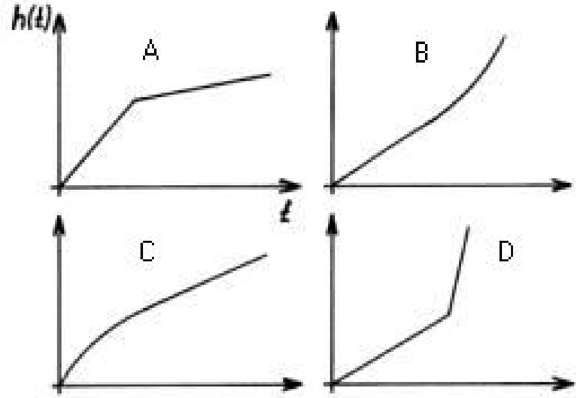
Diskuse k řešení: U 18,4 % respondentů z celkového počtu 305 se prokázala nedostatečná orientace v grafu funkce s volbou různých jednotek na osách *x* a *y*. Úspěšně úlohu vyřešilo 81,6 % respondentů.

Nedostatek ve funkčním myšlení: Problém špatného řešení úlohy u neúspěšných studentů je spojen s nedostatečnou schopností analyzovat funkční závislost jevu vyjádřenou grafem funkce a její interpretací slovy. Dále je u těchto studentů omezená vizuální gramotnost a vnímání. Řešitelsky neúspěšní studenti mají nedostatečně osvojenou dovednost interpretovat funkční závislost vyjádřenou grafem pomocí slov.

Úloha č. 6

Zadání: Prázdný dřevěný sud se v čase t=0 začne plnit stálým přítokem vody. Zakroužkujte, který graf vyjadřuje závislost výšky hladiny $h(t)$ vody v sudu tvaru uvedeného níže na čase t.





Obrázek č. 5: Zadání úlohy č. 6

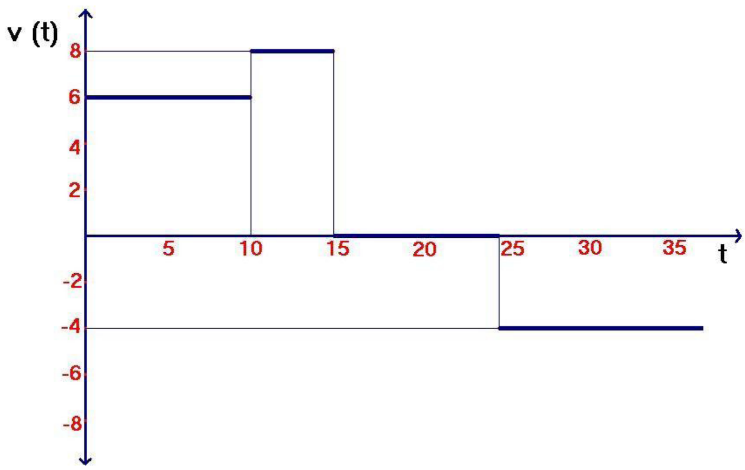
Vlastnosti úlohy: $d = 0{,}23$; $P = 29{,}2$ % .

Diskuse k řešení: Nejčastější chybnou odpovědí byla varianta A. Studenti do testu poznačili, že správně je varianta A, protože bod zlomu lineární funkce znázorňuje přechod změny tvaru nádoby. Jeden student do testu připsal, že správně je buď varianta A nebo C, záleží prý na přechodu změny tvaru nádoby, která není z obrázku příliš vidět. Chybná odpověď spočívá v neuvědomění si hladkého průběhu děje, a že hladina stoupá v první části nádoby stále pomaleji, poté nabývá ve válcové části nádoby své výšky lineárně.

Nedostatek ve funkčním myšlení: U řešitelsky neúspěšných studentů se projevil nedostatek v jejich rozvoji praktické inteligence a logické přesnosti usuzování. Při volbě řešení si neúspěšní studenti vytvořili špatný úsudek o funkční závislosti zadané situace. Omezení funkčního myšlení studentů spatřujeme také v postihnutí zobecněného vztahu mezi veličinami a vyjádřením tohoto vztahu grafem. Nedostatečné úvahy vedly studenta ke špatné interpretaci kauzálních vztahů a špatné představivosti proměnlivosti veličin ve spojitosti se zadaným obrázkem zkoumané situace a vnímáním.

Úloha č. 7

Zadání: Graf funkce na obrázku vyjadřuje závislost rychlosti přítoku vody $v(t)$ do vany na čase t. V čase t = 0 byla vana prázdná. Čas je uveden v minutách, rychlost přítoku v litrech za minutu. Jak se změnil objem vody ve vaně mezi 10 až 15 minutou?



Obrázek č. 6: Graf přítoku vody do vany na čase

Vlastnosti úlohy: $d = 0{,}20$; $P = 77{,}4$ % .

Diskuse k řešení: V této úloze bylo 77,4 % respondentů řešitelsky úspěšných. U zbývajících respondentů byla nejčastější chybná odpověď, že se objem vody ve vaně změnil ze 6 litrů na 8 litrů. Domníváme se, že příčinou chybné odpovědi je nedostatečná orientace v grafu funkce (problémy se čtením grafu funkce).

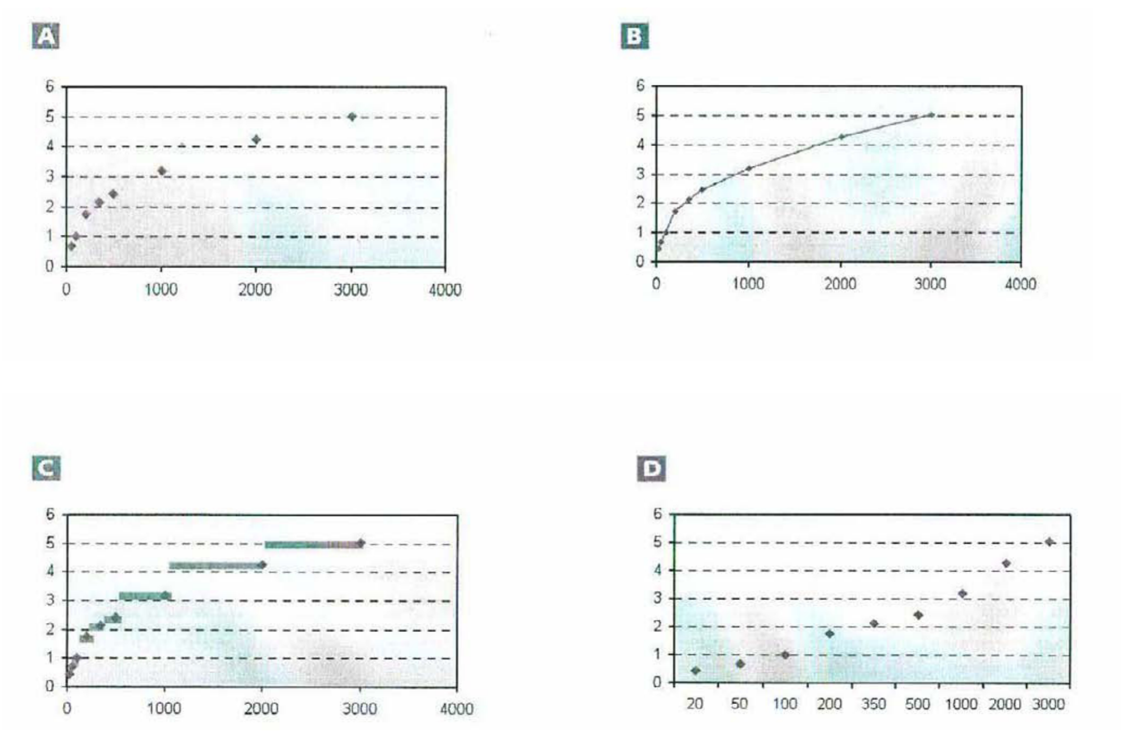
Nedostatek ve funkčním myšlení: Problém špatného řešení úlohy u neúspěšných studentů je spojen s nedostatečnou schopností analyzovat funkční závislost jevu vyjádřenou grafem funkce a převedením číselných údajů z grafu do slov. Se špatnou úvahou při hledání řešení je spojen problém v pochopení vztahu mezi dvěma různými veličinami. Dále je u těchto studentů omezená vizuální gramotnost a vnímání.

Úloha č. 8

Zadání: Poštovní poplatky na Zélandu jsou odvozené od hmotnosti zásilky (při zaokrouhlení na gramy), jak je zachyceno v následující tabulce. Který z následujících grafů nejlépe zobrazuje poštovní poplatky na Zélandu? Graf zachycuje závislost poplatků v zedech na hmotnosti zásilky v gramech. Zakroužkujte správnou odpověď.

Poštovní poplatky na Zélandu jsou odvozené od hmotnosti zásilky (při zaokrouhlení na gramy)	Poplatek
Do 20 g	0,46 zedu
21 g – 50 g	0,69 zedu
51 g – 100 g	1,02 zedu
101 g – 200 g	1,75 zedu
201 g – 350 g	2,13 zedu
351 g – 500 g	2,44 zedu
501 g – 1 000 g	3,20 zedu
1 001 g – 2 000 g	4,27 zedu
2 001 g – 3 000 g	5,03 zedu

Tabulka č. 21: Poštovní poplatky na Zélandu



Obrázek č. 7: Graf závislosti poplatků na hmotnosti zásilky

Vlastnosti úlohy: $d = 0{,}26; P = 55{,}4$ %.

Diskuse k řešení: Tato úloha z matematiky se jevila pro studenty jako středně obtížná. Nejčastější nesprávnou odpovědí byla varianta *B*. Správná úvaha studentů byla v tom, že daná závislost je rostoucí, ovšem správné znázornění dané závislosti skrývá varianta *C*. 44,6 % respondentů bylo v této úloze řešitelsky neúspěšných.

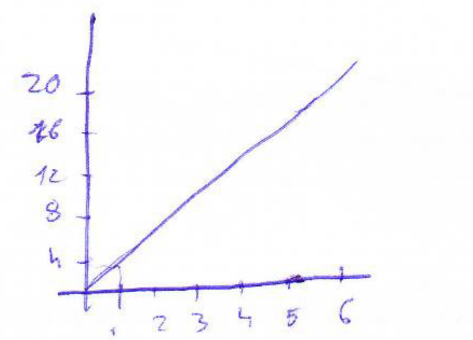
Nedostatek ve funkčním myšlení: U studentů se špatnou volbou odpovědi je nedostatečně vytvořená představa o závislosti probíhajících změn a příčin a jejich úsudky nevytváří správnou souvislost jevů. Projevují se u nich chyby v logické přesnosti usuzování a systematičnosti myšlení, které vedou k vytváření špatných úsudků. Problém taky spatřujeme v převedení číselných údajů z tabulky do grafické podoby. Funkční myšlení je omezeno v rozpoznání vztahů mezi dvěma veličinami.

Úloha č. 9

Zadání: Znázorni graf závislosti ceny žvýkaček na jejich množství, jestliže jedna žvýkačka stojí $4\,Kč$.

Vlastnosti úlohy: $d = 0{,}24; P = 14{,}4$ %.

Diskuse k řešení: Nejčastější chyba, která se objevila u studentů obou skupin respondentů, bylo znázornění dané závislosti grafem funkce, která měla podobu spojité funkce. Ovšem daný děj není spojitý, ale grafem funkce této závislosti dvou proměnných jsou izolované body. Automaticky studenti graficky znázorňovali lineární závislost graficky jako přímku. Alarmující je skutečnost, že toto učivo se probírá ve vyučování matematiky na základních školách.

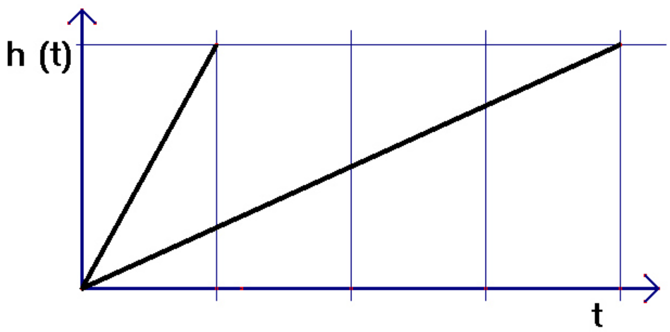


Obrázek č. 8: Graf závislosti ceny žvýkaček na jejich množství

Nedostatek ve funkčním myšlení: U studentů, kteří vyřešili úlohu nesprávně, nejsou problémy s pochopením závislosti mezi veličinami, ale pouze si neuvědomují danou situaci, jak probíhá v reálném životě. Chybí jim propojení školské matematiky a praxe. Špatné řešení úlohy ukazuje také na nedostatečný grafický projev studenta a na jeho chyby v logickém usuzování (spojitý nebo nespojitý děj), s nimiž je spojena nedostatečná schopnost vyvodit vztah mezi dvěma veličinami.

Úloha č. 10

Zadání: Grafy funkcí vyjadřující závislost výšky hladiny *h(t)* na čase *t* pro dva stejně vysoké válce. První válec (v_1) má poloměr *r*, druhý válec (v_2) má poloměr *2r*. Vyznač, který z grafů odpovídá závislost výšky hladiny *h*(*t*) na čase *t* válce v_1 a v_2.



Obrázek č. 9: Graf závislosti výšky hladiny *h(t)* na čase *t*

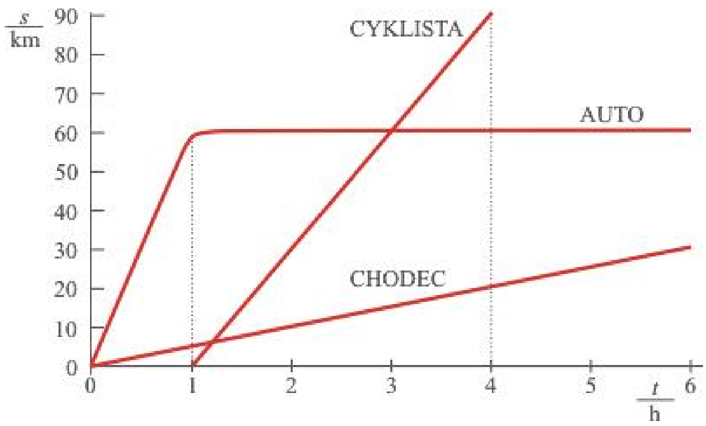
Vlastnosti úlohy: $d = 0{,}32$; $P = 78{,}4$ %.

Diskuse k řešení: Z celkového počtu 305 respondentů bylo pouze 21,6 % respondentů řešitelsky neúspěšných. Studenti špatně označili graf závislosti výšky hladiny na čase pro válec v_1 a v_2. Domníváme se, že tato chyba byla způsobena nedostatečně pochopenou závislostí výšky hladiny na změně poloměru válce.

Nedostatky ve funkčním myšlení: Volba špatného řešení úlohy vedla studenty na základě chybného uvažování o závislosti mezi dvěma veličinami a o závislosti probíhajících změn. Studenti mají nedostatky v rozvoji abstraktního myšlení a při provádění myšlenkové operace komparace. Mají obtíže s vyvozením kauzálních vztahů a následně je vyvozen špatný myšlenkový úsudek.

Úloha č. 11

Zadání: Auto, chodec a cyklista se pohybují po stejné silnici. Na obrázku je graf závislosti jejich drah na čase. Určete, po jaké době se potkal cyklista s autem.



Obrázek č. 2: Graf závislosti dráhy na čase

Vlastnosti úlohy: d =0,24, P = 73,8 %.

Diskuse k řešení: Tato úloha v sobě skrývala dvě možná řešení. Jedním z řešení je, že se auto a cyklista potkají za dvě hodiny od výjezdu cyklisty, druhé řešení je, že se potkají za tři hodiny od výjezdu auta. Obě řešení našlo 73,8 % respondentů a nejčastější špatnou odpovědí bylo, že se potkají za 1,5 hodiny bez udání výjezdu auta nebo cyklisty. Dokonce jeden student odpověděl, že se cyklista s autem nepotká nikdy.

Nedostatky ve funkčním myšlení: Studenti se špatnou volbou odpovědi mají nedostatečně osvojenou dovednost číst z grafu funkce, s tím je spojena nedostatečná vizuální gramotnost studenta a problémy s jeho vnímáním. Špatná odpověď studentů odráží chybné uvažování při analýze funkčního chování vyjádřené grafem a pochopením číselných údajů zadaných grafem funkce.

Úloha č. 12

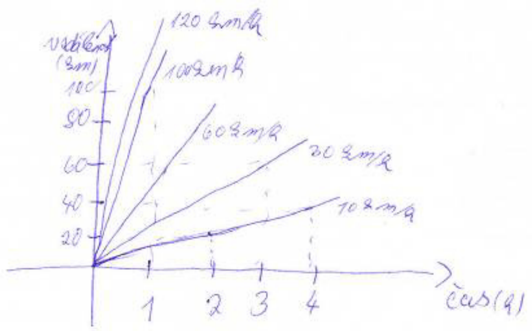
Zadání: Vzdálenost mezi dvěma městy je $120\,km$. V jakých časech překonají tuto vzdálenost dopravní prostředky, které se pohybují průměrnými rychlostmi uvedenými v tabulce? Doplňte tabulku a závislost průměrné rychlosti dopravního prostředku (v rozmezí $10\,km/h - 120\,km/h$) na čase vyjádřete grafem.

Rychlost *(km/h)*	10	30	60	100	120
Čas *(h)*					

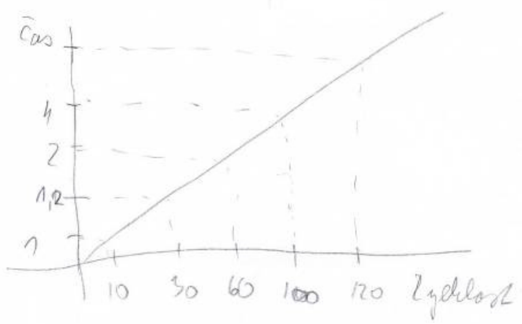
Tabulka č. 22: Závislost průměrné rychlosti na čase

<u>*Vlastnosti úlohy:*</u> *d* = 0,45; *P* = 23,9 %.

<u>*Diskuse k řešení:*</u> Přestože tato úloha zkouší dovednost znázornit graf nepřímé úměrnosti, která se učí na základní škole, s politováním musíme konstatovat, že pouze 23,9 % respondentů vyřešilo tuto úlohu úspěšně. V této úloze se velmi často objevoval graf přímé úměrnosti – jako řešení úlohy, které vede k úvaze, že průměrná rychlost dopravního prostředku přímo úměrně roste s časem. Někdy došlo ke znázornění závislosti – ne grafem. Řada studentů se ani nepokusila načrtnout požadovanou závislost a doplnila pouze údaje do tabulky, často i chybně. V této úloze se prokazují u studentů nedostatečné osvojení učiva nepřímé úměrnosti probírané na základní škole.



Obrázek č. 10: Špatné řešení úlohy 12

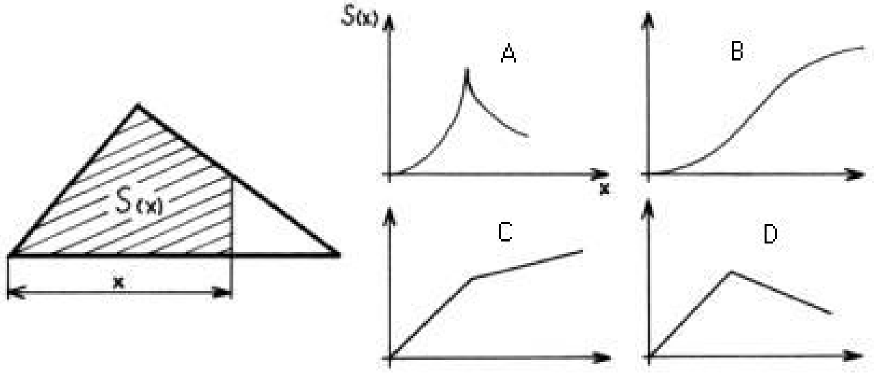


Obrázek č. 11: Špatné řešení úlohy 11-přímá úměrnost

Nedostatky ve funkčním myšlení: Pokud se v řešení úlohy objevila chybně doplněná tabulka funkční závislosti, značí tato skutečnost nepochopení závislosti mezi dvěma uvedenými veličinami. Studenti, kteří správně doplnili tabulku, ale nenačrtli graf funkce, domníváme se, že mají problémy s vyjádřením funkčního vztahu do grafu funkce a také neumí převádět číselné údaje z tabulky do grafu, nemají dostatečně osvojenou dovednost přecházet mezi různými reprezentacemi vyjadřující funkční závislost. Důvodem špatného řešení jsou také obtíže s grafickým projevem, představivostí, prostorovou představivostí. Záměna nepřímé úměrnosti za přímou úměrnost může mít příčinu ve špatném logickém usuzování a nedostatečném pochopení změny.

Úloha č. 13

Zadání: Grafy vpravo vyjadřují závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku $S(x)$ na vzdálenosti x. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



Obrázek č. 12: Zadání úlohy č. 13

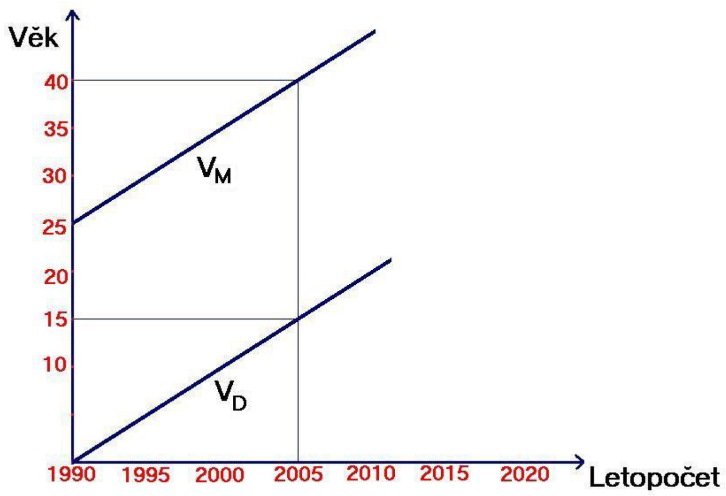
Vlastnosti úlohy: $d = 0{,}14$; $P = 7{,}2$ %.

Diskuse k řešení: Tato úloha se jevila jako nejvíce problematická. Nejčastější chybnou odpovědí u studentů byla odpověď *D*. Tato varianta je zásadně špatná, protože závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku na vzdálenosti je rostoucí. Podle chybné odpovědi však obsah zvětšující se části trojúhelníku ubývá. Důvodem špatné odpovědi je zřejmě podobnost grafu závislosti s obrázkem, který znázorňuje tuto situaci.

Nedostatky ve funkčním myšlení: U řešitelsky neúspěšných studentů se projevil nedostatek v jejich logické přesnosti usuzování. Při volbě řešení si neúspěšní studenti vytvořili špatný úsudek o funkční závislosti zadané situace. Omezení funkčního myšlení studentů spatřujeme také v postihnutí zobecněného vztahu mezi veličinami. Nedostatečné úvahy vedly studenta ke špatné interpretaci kauzálních vztahů a špatné představivosti proměnlivosti veličin ve spojitosti se zadaným obrázkem zkoumané situace.

Úloha č. 14

<u>*Zadání:*</u> Graf vyjadřuje závislost věku na letopočtu. Zkratka V_M představuje věk matky, V_D je zkratka pro věk dítěte. Nakresli graf závislosti rozdílu věku dítěte a maminčina věku na letopočtu.



Obrázek č. 13: Graf závislosti věku na letopočtu

<u>*Vlastnosti úlohy:*</u> $d = 0{,}36$; $P = 71{,}8$ %.

<u>*Diskuse k řešení:*</u> Ve většině případů studenti z grafu uměli přečíst rozdíl věku matky a dítěte, ovšem neuvědomili si, že tento rozdíl je konstantní, nemění se. Znázorňovali graf závislosti rozdílu věku dítěte a maminčina věku jako lineární funkci.

<u>*Nedostatky ve funkčním myšlení:*</u> Studenti, kteří špatně určili rozdíl věku matky a věku dítěte, mají problémy s orientací v grafickém vyjádření funkční závislosti, se čtením v grafu funkce. Nedostatečně pochopili závislost dvou veličin vyjádřenou grafem, obtíže mají i s vizuální gramotností. Nedostatečné je také uvažování při analýze funkčního chování vyjádřené grafem.

Pokud studenti zakreslili závislost rozdílu věku matky a věku dítěte jako lineární závislost, neuvědomili si, že rozdíl obou věků je konstantní. Můžeme říct, že studenti mají mezery v přesnosti logického usuzování, s pochopením a rozpoznáním vztahu mezi veličinami.

3. Jak jsou ovlivněny výsledky testu pohlavím respondenta?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh v didaktickém testu u mužů a žen?

Sledujeme vliv pohlaví na výsledek didaktického testu z matematiky.

Statistické hypotézy:

H3$_0$ *Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu dosaženým ve skupině žen a průměrným počtem bodů dosaženým ve skupině mužů není statisticky významný rozdíl.*

H3$_A$ *Mezi dosaženými průměry v obou srovnávaných skupinách je statisticky významný rozdíl.*

Pomocí Studentova t-testu bylo zjišťováno, zda mezi průměrnými výsledky skupiny chlapců a dívek jsou statisticky významné rozdíly. Průměrný počet bodů v testu ve skupině mužů byl $\bar{x}_1 = 8{,}381$ a u žen $\bar{x}_2 = 7{,}604$. Máme rozhodnout, zda průměrný počet bodů v testu u mužů je skutečně větší než průměrný počet bodů v testu u žen.

Aby bylo možné použít Studentův t-test, musí být splněny následující požadavky:

- měření navzájem nezávislá;
- data metrická (intervalová nebo poměrová);
- normální rozdělení v základním souboru;
- požadavek homogenity rozptylu v obou srovnávaných skupinách (rozptyl má být v obou skupinách přibližně stejný).

Splnění prvních dvou požadavků vychází z povahy výzkumu. Další požadavky jsou ověřovány následujícím způsobem:

a) Ověření normality rozdělení četností

Použitím testu dobré shody chí-kvadrát ověřujeme normalitu rozdělení četností v obou skupinách respondentů. Tedy zda dosažené výsledky didaktického testu odpovídají normálnímu rozdělení.

1. Byly zvoleny statistické hypotézy – skupina **muži – označení (M)**:

$H3_{x(M)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 8,381 a standardní odchylkou s=2,588.*

$H3_{x(M)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Testování u obou skupin respondentů probíhalo na hladině významnosti $\alpha = 0,05$. Ve výběrovém souboru studentů matematiky bylo 187 žen a 118 mužů. Ze získaných dat byl vypočítán průměrný počet bodů v testu u mužů $\bar{x}_1 = 8,381$ a žen $\bar{x}_2 = 7,604$.

Protože získána hodnota testového kritéria **χ^2=10,805** v porovnání s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. **$\chi^2_{0,05}(11)$=19,675** je menší, **přijímáme nulovou hypotézu**, a tedy **výsledky testování mají normální rozdělení**.

2. Byly zvoleny statistické hypotézy – skupina **ženy – označení (Ž)**:

$H3_{x(Ž)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 7,604 a standardní odchylkou s=2,661.*

$H3_{x(Ž)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Protože získaná hodnota testového kritéria **χ^2 =13,071** v porovnání s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. **$\chi^2_{0,05}(11)$=19,675** je menší, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Výsledky testování mají normální rozdělení.**

b) Ověření homogenity rozptylu

Homogenita rozptylu je požadavek, aby rozptyly v obou srovnávaných skupinách byly zhruba stejné. Podmínka byla ověřována pomocí Fischerova-Snedecorova F-testu. Byly formulovány následující statistické hypotézy:

$H3_{y0}$ *Mezi rozptyly v obou srovnávaných skupinách není významný rozdíl.*

$H3_{yA}$ *Mezi rozptyly v obou skupinách je významný rozdíl.*

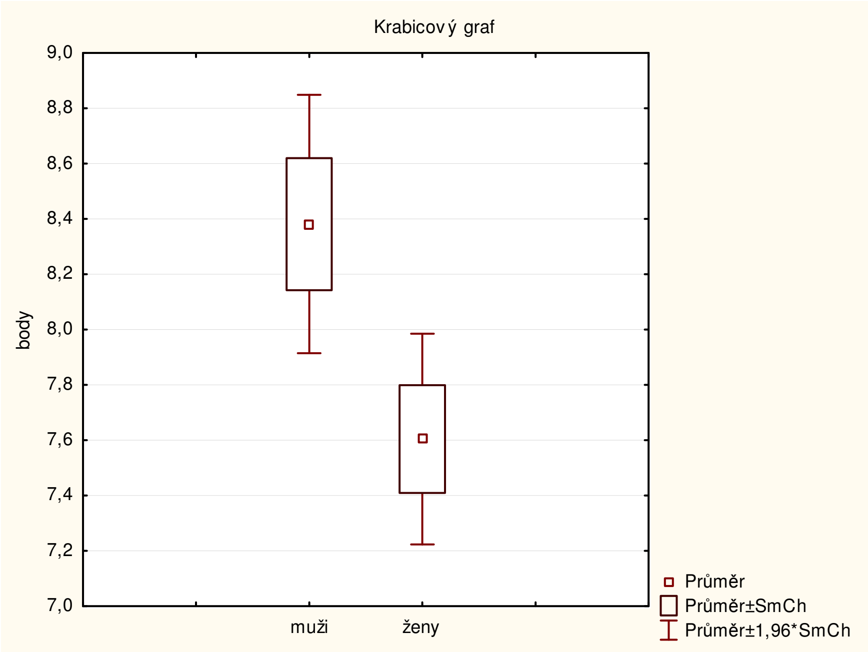
O platnosti nulové hypotézy rozhodneme výpočtem testového kritéria F, ze vztahu $F = \frac{s_1^{\,2}}{s_2^{\,2}}$, kde $s_1^{\,2}$ je rozptyl v první skupině, $s_2^{\,2}$ je rozptyl v druhé skupině. Pro naše hodnoty byla vypočítána hodnota $F =$ **1,057**. Počet stupňů volnosti $f_1 = 118, f_2 = 187$. Ve statistických tabulkách nalezneme pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pro nejblíže tabelované hodnoty kritickou hodnotu $F_{0{,}05} =$ **1,254**. Protože vypočítaná hodnota F je menší než hodnota kritická, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Mezi výsledky v obou srovnávaných skupinách není statisticky významný rozdíl a použití Studentova t-testu je tedy oprávněné.**

c) Ověření hypotéz Studentovým t-testem

Nulovou hypotézu Studentova t-testu testujeme pomocí kritéria *t,* které se počítá ze vztahu

$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$, kde $\bar{x}_1$ je průměr jedné skupiny (chlapci), $\bar{x}_2$ je průměr druhé skupiny (děvčata), n_1, n_2 četnosti obou skupin a s je směrodatná odchylka. Počet stupňů volnosti se určí podle vztahu $f = n_1 + n_2 - 2$, kde f je počet stupňů volnosti, n_1 je četnost jedné skupiny a n_2 je četnost druhé skupiny respondentů (Chráska, 2007, s. 123). Hodnota testového kritéria odpovídá ***t* = 2,510**. Kritická hodnota pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 303$ je nejblíže $\mathbf{t_{0,05}(400)=1{,}966}$.

__Závěr:__ *Protože vypočítaná hodnota testového kritéria je větší než hodnota kritická, přijímáme alternativní hypotézu.* Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu z matematiky ve skupině mužů a průměrným počtem bodů v testu z matematiky ve skupině žen je statisticky významný rozdíl. Zjištěné rozdíly není možno připsat na vrub náhody. Statisticky významný rozdíl mezi výsledky skupin je možno připsat na vrub pohlaví.



Graf č 9: Krabicový graf – průměrný počet bodů v testu u žen a mužů

4. Jak ovlivňuje druh absolvované střední školy výsledek v testu? *Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u absolventů gymnázia (G) a středních odborných škol (SOŠ a SOU)?*

Sledujeme vliv absolvované střední školy na výsledek testu. Ověřujeme, zda mezi průměrnými výsledky obou skupin (skupina absolventů G a skupina absolventů SOŠ a SOU) jsou statisticky významné rozdíly.

<u>Statistické hypotézy:</u>

$H4_0$	*Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu dosaženým ve skupině absolventů G a průměrným počtem bodů dosaženým ve skupině absolventů SOŠ a SOU není statisticky významný rozdíl.*
$H4_A$	*Mezi dosaženými průměry v obou srovnávaných skupinách je statisticky významný rozdíl.*

Absolventi gymnázia dosahovali průměrně 8,338 bodů v testu a průměrný počet bodů v testu u absolventů SOŠ a SOU byl vypočítán 7,513 bodů. Studentovým t-testem zjišťujeme, zda mezi průměrnými výsledky skupiny absolventů gymnázia a skupinou absolventů střední odborné školy jsou statisticky významné rozdíly. Zda zjištěné rozdíly v průměrném počtu bodů v testu z matematiky je možno připsat na vrub náhody či nikoli. Abychom mohli použít Studentův t-test, bylo potřeba ověřit podmínky viz s. 108. První dva požadavky k použití Studentova t-testu jsou splněny, ověření zbývajících požadavků je následující:

a) Ověření normality rozdělení četností

1. Byly zvoleny statistické hypotézy – **absolventi gymnázia – označení (G)**

H4$_{x(G)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 8,338 a standardní odchylkou s=2,609.*

H4$_{x(G)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Výpočet hodnoty testového kritéria je χ^2 **=9,744**. Tuto hodnotu porovnáme s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počtem stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}$**(11)=19,675.** Zjistíme, že vypočítaná hodnota testového kritéria je menší než kritická hodnota uvedená ve statistických tabulkách, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Výsledky testování mají normální rozdělení.**

2. Byly zvoleny statistické hypotézy – **absolventi SOŠ a SOU – označení (SOŠ, SOU)**

H4x$_{(SOŠ, SOU)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 7,513 a standardní odchylkou s=2,645.*

H4x$_{(SOŠ, SOU)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Protože získaná hodnota testového kritéria χ^2**=9,824** v porovnání s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}$**(11)=19,675,** je větší, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Výsledky testování mají normální rozdělení.**

b) Ověření homogenity rozptylu

$H4_{y0}$ *Mezi rozptyly v obou srovnávaných skupinách není významný rozdíl.*
$H4_{yA}$ *Mezi rozptyly v obou skupinách je významný rozdíl.*

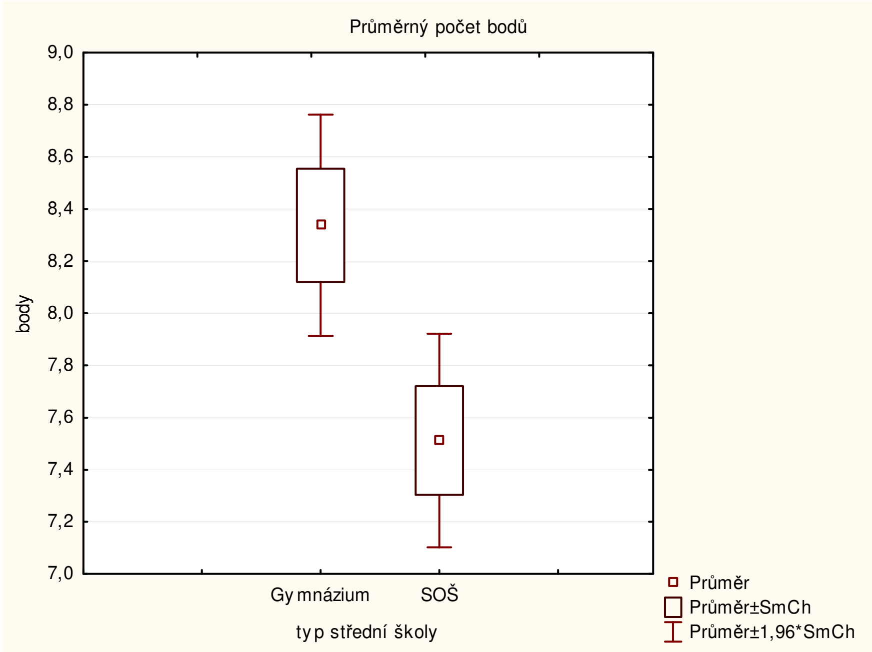
O platnosti nulové hypotézy rozhodneme výpočtem testového kritéria F ze vztahu $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Pro naše hodnoty byla vypočítána hodnota $F =$ **1,028**. Počet stupňů volnosti $f_1 = 145, f_2 = 160$. Ve statistických tabulkách nalezneme pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pro nejblíže tabelované hodnoty kritickou hodnotu $F_{0{,}05} =$ **1,350**. Protože vypočítaná hodnota F je menší než hodnota kritická, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Mezi rozptyly v obou srovnávaných skupinách není statisticky významný rozdíl a použití Studentova t-testu je tedy oprávněné.**

c) Ověření hypotéz Studentovým t-testem

Nulovou hypotézu Studentova t-testu testujeme pomocí kritéria *t,* které se počítá ze vztahu

$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$. Hodnota testového kritéria odpovídá $t = 2{,}740$. Kritická hodnota pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 303$ je nejblíže **$t_{0,05}$(400)=1,966**. Vypočítaná hodnota je větší než hodnota kritická, proto byla přijata alternativní hypotéza.

__**Závěr:**__ *Protože hodnota testového kritéria je vyšší než hodnota kritická, přijali jsme hypotézu alternativní.* Mezi dosaženými průměry v didaktickém testu ve skupině absolventů gymnázia a ve skupině absolventů střední odborné školy a středního odborného učiliště (SOŠ a SOU) jsou statisticky významné rozdíly. Zjištěné rozdíly v průměrném počtu bodů z testu není možné připsat na vrub náhody. Konstatujeme, že průměrný počet bodů v didaktické testu ve skupině absolventů gymnázia je skutečně větší než průměrný počet bodů v testu z matematiky u absolventů střední odborné školy a středního odborného učiliště. Statisticky významný rozdíl mezi výsledky skupin je možno připsat na vrub typu absolvované střední školy.



Graf č. 10: Krabicový graf – závislost průměrného počtu bodů v testu na typu střední školy

5. Jak ovlivňuje výsledek testu respondenta časový odstup mezi rokem jeho absolvování maturitní zkoušky a počátkem studia na VŠ? *Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u studentů, kteří absolvovali maturitní zkoušku v letech 2012, 2011, 2010, 2009 a starší?*

K ověření následujících statistických hypotéz byla zvolena metoda analýzy rozptylu.

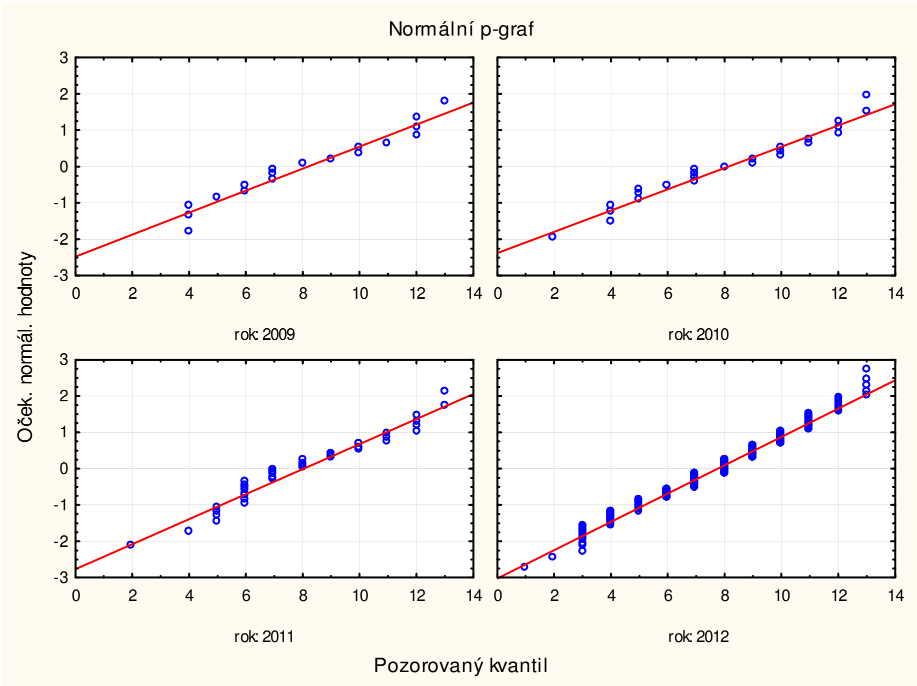
<u>Statistické hypotézy:</u>

$H5_0$	*Mezi dosaženými průměry ve všech srovnávaných skupinách není statisticky významný rozdíl.*
$H5_A$	*Mezi dosaženými průměry ve všech srovnávaných skupinách je statisticky významný rozdíl.*

K použití metody analýzy rozptylu je potřeba ověřit podmínky.

a) Ověření normálního rozdělení četností

K ověření normality testu byl použitý Lilieforsův test a normální pravděpodobnostní *p*-graf. U ověření normality testu jsme dospěli k závěru, že existuje alespoň jedna třída dat, které nelze považovat za náhodný výběr z normálního rozdělení.



Graf č. 11: Normální pravděpodobnostní graf – efekt: rok maturity

b) Ověření homogenity rozptylů

Ověření homogenity rozptylů pomocí Levenova testu. Ověřování homoskedasticity probíhalo na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. Byly stanoveny následující statistické hypotézy:

H5$_{y0}$ *Každá dvojice rozptylů je stejná.*

H5$_{yA}$ *Alespoň jedna dvojice rozptylů se liší.*

	Leveneův test homogenity rozptylů Efekt: rok			
	PČ Efekt	PČ Chyba	F	p
body	5,713	2,193	2,605	0,052

Tabulka č. 23: Leveneův test homogenity rozptylů – efekt: rok

Protože *p*-hodnota Levenova testu je 0,052, tedy větší než stanovená hladina významnosti, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Každá dvojice rozptylů je stejná.**

c) Ověření nezávislosti dat jednotlivých skupin

Podmínka nezávislosti dat jednotlivých skupin je patrná ze zadání.

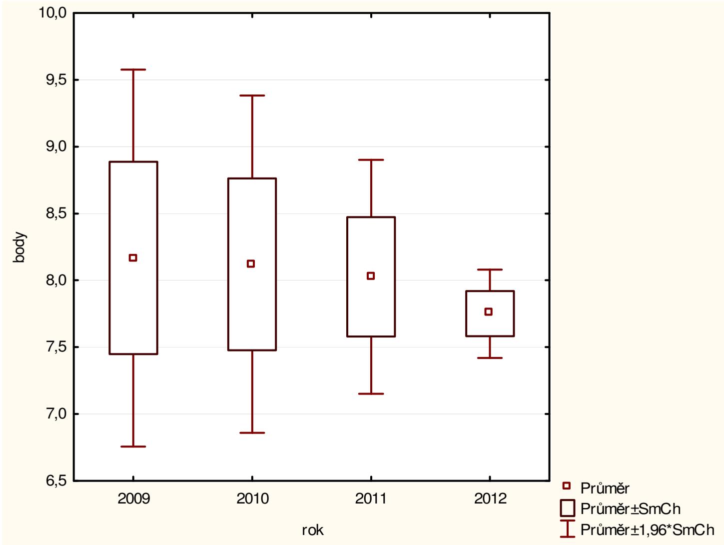
Protože není splněna podmínka normality testu, zvolili jsme neparametrickou podobu analýzy rozptylu – **Kruskal-Wallisův test**. Ověření statistických hypotéz probíhalo na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

H_0 *Mediány ve všech třídách dat jsou stejné.*
H_A *Alespoň jedna dvojice mediánů se liší.*

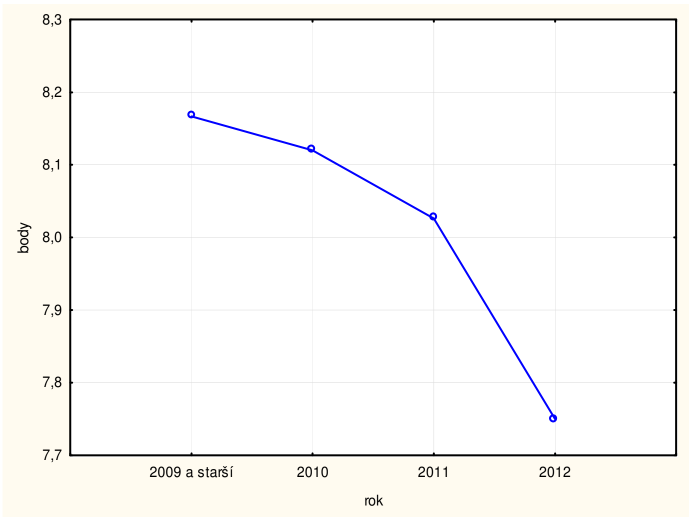
	Kruskal-Wallisova ANOVA Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 305) =,5252618 p =,9133			
Závislá: body	Kód	Počet platných	Součet pořadí	Prům. Pořadí
2009	2009	18	2890,000	160,556
2010	2010	25	4032,000	161,280
2011	2011	38	5930,000	156,053
2012	2012	224	33813,000	150,951

Tabulka č. 24: Kruskal-Wallisova ANOVA – efekt: rok

Závěr: *Protože p-hodnota je větší než stanovená hladina významnosti, přijímáme nulovou hypotézu o rovnosti mediánů.* Mediány ve všech třídách dat jsou stejné. Mezi výsledky skupin studentů nejsou statisticky významné rozdíly. Rok absolvované střední školy nemá vliv na míru úspěšnosti řešení didaktického testu.



Graf č. 12: Krabicový graf – průměrný počet bodů studentů v testu v závislosti na roku absolvování maturitní zkoušky



Graf č. 13: Průměrný počet bodů studentů v testu v závislosti na roku absolvování maturitní zkoušky

6. Jak maturitní zkouška z matematiky ovlivňuje výsledek testu respondenta?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u respondentů, kteří absolvovali maturitní zkoušku z matematiky a kteří neabsolvovali maturitní zkoušku z matematiky?

Sledujeme vliv maturitní zkoušky z matematiky na výsledek didaktického testu.

Statistické hypotézy:

H6$_0$ *Průměrný počet bodů v didaktickém testu u absolventů maturitní zkoušky z matematiky a absolventů, kteří nematurovali z matematiky, je stejný.*

H6$_A$ *Průměrný počet bodů v didaktickém testu u absolventů maturitní zkoušky z matematiky a absolventů, kteří nematurovali z matematiky, se liší.*

Absolventi maturitní zkoušky z matematiky dosáhli průměrně 8,206 bodů v didaktickém testu a studenti, kteří neskládali maturitní zkoušku z matematiky dosáhli průměrně 7,149 bodů v testu. K ověření hypotéz jsme použili Studentův t-test. První dva požadavky (viz s. 108) k použití Studentova t-testu jsou splněny, ověření zbývajících požadavků je následující:

a) Ověření normality rozdělení četností

1. Byly zvoleny statistické hypotézy – **absolventi maturitní zkoušky z matematiky – označení (AM)**

H6x$_{(AM)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 8,206 a standardní odchylkou s=2,655.*

H6x$_{(AM)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Zjistili jsme, že získaná hodnota testového kritéria χ^2 **=17,714.** Porovnáme-li hodnotu testového kritéria s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}(11)=19{,}675$, je menší, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Výsledky testování mají normální rozdělení.**

2. Byly zvoleny <u>statistické hypotézy</u> **– studenti, kteří neskládali maturitní zkoušku z matematiky – označení (NM)**

H6$_{x(NM)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 7,149 a standardní odchylkou s=2,518.*

H6$_{x(NM)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Ve srovnání hodnoty testového kritéria χ^2 **= 3,720** s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}$**(11)=19,675**, je hodnota testového kritéria menší, a proto **přijímáme nulovou hypotézu**. **Výsledky testování mají normální rozdělení.**

b) Ověření homogenity rozptylu

H6$_{y0}$ *Každá dvojice rozptylů je stejná.*

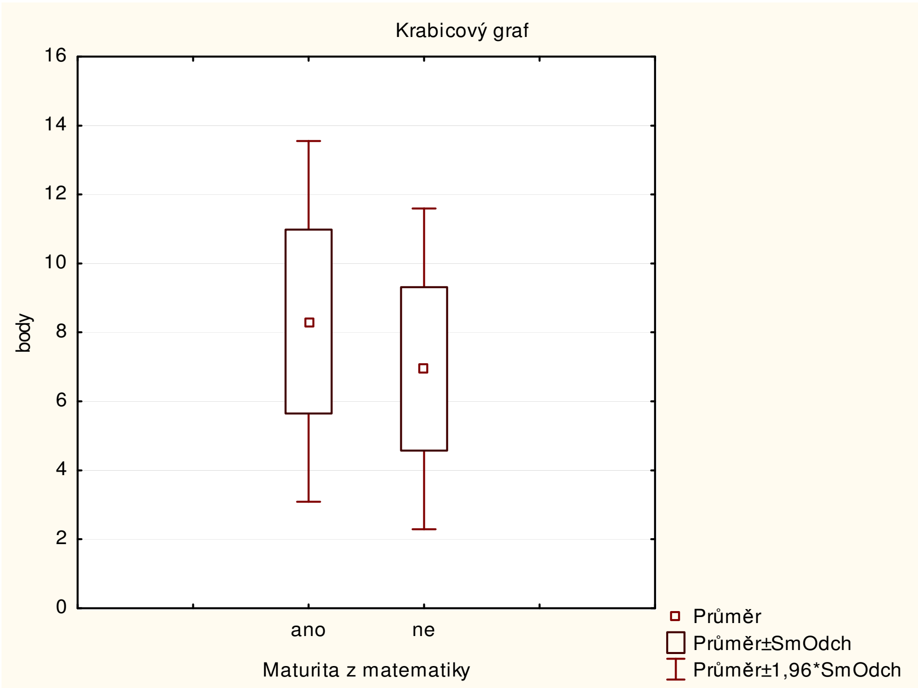
H6$_{yA}$ *Alespoň jedna dvojice rozptylů se liší.*

O platnosti nulové hypotézy rozhodneme výpočtem testového kritéria F ze vztahu $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Pro naše hodnoty byla vypočítána hodnota F **=1,112**. Počet stupňů volnosti $f_1 = 218, f_2 = 87$. Ve statistických tabulkách nalezneme pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pro nejblíže tabelované hodnoty kritickou hodnotu $F_{0,05} =$ **1,389**. Protože vypočítaná hodnota F je menší než hodnota kritická, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Mezi rozptyly v obou srovnávaných skupinách není statisticky významný rozdíl a použití Studentova t-testu je tedy oprávněné.**

c) Ověření hypotéz Studentovým t-testem

Nulovou hypotézu Studentova t-testu testujeme pomocí kritéria *t*. Hodnota testového kritéria odpovídá pro náš případ $t = 3{,}185$. Kritická hodnota pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 303$ je nejblíže **t$_{0,05}$(400)=1,966**.

<u>Závěr:</u> *Vypočítaná hodnota testového kritéria je větší než hodnota kritická, proto byla přijata alternativní hypotéza.* Průměrný počet bodů v testu z matematiky u absolventů maturitní zkoušky z matematiky je skutečně větší než průměrný počet bodů v testu u studentů, kteří neskládali maturitní zkoušku z matematiky. Statisticky významné rozdíly mezi výsledky skupin je možno připsat na vrub absolvování maturitní zkoušky z matematiky.



Graf č. 14: Krabicový graf – průměrný počet bodů studentů v testu v závislosti na maturitě z matematiky

7. Jak ovlivňuje výsledek testu respondenta úroveň absolvované státní maturitní zkoušky z matematiky?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u studentů, kteří absolvovali vyšší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky a nižší úrovní státní maturitní zkoušky z matematiky v letech 2011–2012?

Sledujeme vliv úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky na výsledek didaktického testu.

Statistické hypotézy:

H7$_0$ *Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu u absolventů vyšší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky a průměrným počtem bodů v testu u absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky není rozdíl.*

H7$_A$ *Mezi dosaženými průměry v obou skupinách je statisticky významný rozdíl.*

Pomocí Studentova t-testu bylo zjištěno, zda mezi průměrnými výsledky skupiny absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky a skupiny absolventů vyšší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky jsou statisticky významné rozdíly. Pro skupinu absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky z matematiky byl vypočítán průměrný počet bodů $\bar{x}_1 = 8{,}381$ a pro skupinu absolventů vyšší úrovně státní maturitní zkoušky $\bar{x}_2 = 8{,}631$. První dva požadavky (viz s. 108) k použití Studentova t-testu jsou splněny, ověření zbývajících požadavků je následující:

a) Ověření normality rozdělení četností

1. Byly zvoleny statistické hypotézy – **vyšší úroveň státní maturity z matematiky – označení (VÚ)**

H7$_{x(VÚ)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 8,631 a standardní odchylkou s=2,329.*

H7$_{x(VÚ)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Jelikož získaná hodnota testového kritéria χ^2**=5,981** v porovnání s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}$**(11)=19,675** je menší, **přijímáme nulovou hypotézu**.

2. Byly zvoleny statistické hypotézy – **nižší úroveň státní maturitní zkoušky z matematiky – označení (NÚ)**

H7$_{x(NÚ)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 7,738 a standardní odchylkou s=2,666.*

H7$_{x(NÚ)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Protože získaná hodnota testového kritéria χ^2**=12,320** v porovnání s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}$**(11)=19,675** je menší, **přijímáme nulovou hypotézu**.

b) Ověření homogenity rozptylu

H7$_{y0}$ *Každá dvojice rozptylů je stejná.*

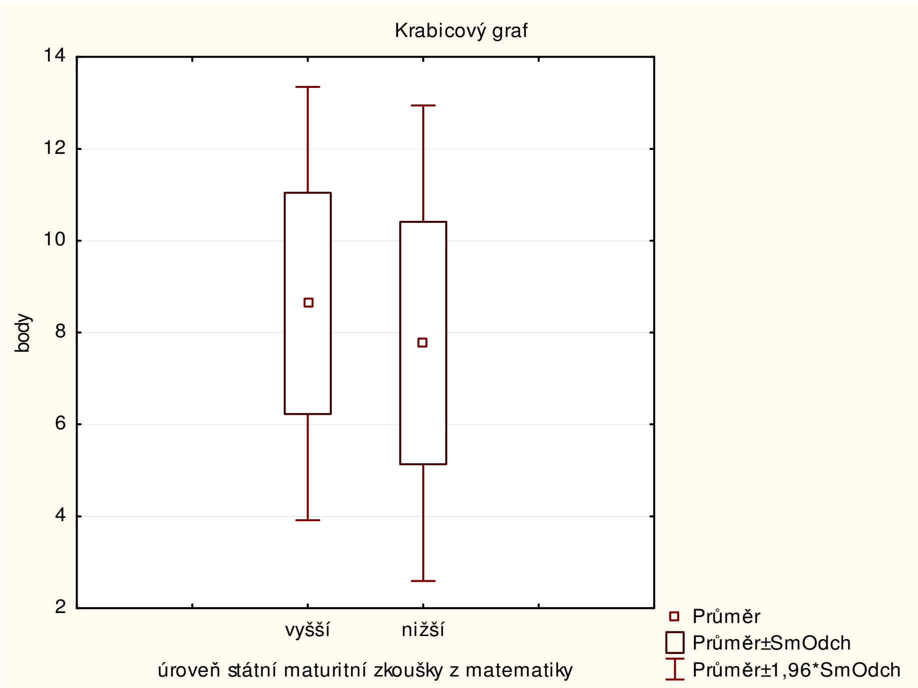
H7$_{yA}$ *Alespoň jedna dvojice rozptylů se liší.*

O platnosti nulové hypotézy rozhodneme výpočtem testového kritéria F ze vztahu $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Pro naše hodnoty byla vypočítána hodnota F **=1,310**. Počet stupňů volnosti $f_1 = 126, f_2 = 65$. Ve statistických tabulkách nalezneme pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pro nejblíže tabelované hodnoty kritickou hodnotu $F_{0,05}$ **=1,467**. **Protože vypočítaná hodnota F je menší než hodnota kritická, přijímáme nulovou hypotézu. Použití Studentova t-testu je tedy oprávněné.**

c) Ověření hypotéz Studentovým t-testem

Nulovou hypotézu Studentova t-testu testujeme pomocí kritéria *t*. Vypočítaná hodnota testového kritéria je $t = 2{,}286$. Kritická hodnota pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 303$ je nejblíže $\mathbf{t_{0,05}(400)=1{,}966}$. V porovnání je vypočítaná hodnota větší než hodnota kritická, proto přijímáme alternativní hypotézu.

<u>**Závěr:**</u> *Protože vypočítaná hodnota je větší než hodnota kritická, zamítáme nulovou hypotézu a přijímáme alternativní hypotézu.* Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu u skupiny absolventů vyšší úrovně maturitní zkoušky z matematiky a průměrným počtem bodů v testu absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky jsou statisticky významné rozdíly. Zjištěné rozdíly nelze považovat za vrub náhody. Průměrný počet bodů v testu u absolventů vyšší úrovně státní maturitní zkoušky je skutečně vyšší než u absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky.



Graf č. 15: Krabicový graf – závislost průměrného počtu bodů v testu na úrovni státní maturitní zkoušky z matematiky

8. Jak ovlivňuje výsledek testu respondenta předchozí studium na jiné vysoké škole?

Jak se liší míra úspěšnosti řešení matematických úloh u studentů, kteří studovali na jiné vysoké škole před nástupem na pedagogickou fakultu a u studentů, kteří nestudovali na jiné vysoké škole.

Sledujeme vliv předchozího studia na jiné vysoké škole na výsledek testu.

Statistické hypotézy:

$H8_0$ *Průměrný počet bodů v testu u studentů, kteří před nástupem na pedagogickou fakultu navštěvovali jinou vysokou školu a kteří nenavštěvovali jinou vysokou školu před nástupem na pedagogickou fakultu, je stejný.*

$H8_A$ *Průměrný počet bodů v testu u studentů, kteří před nástupem na pedagogickou fakultu navštěvovali jinou vysokou školu a kteří nenavštěvovali jinou vysokou školu před nástupem na pedagogickou fakultu, se liší.*

Studentovým t-testem bylo zjišťováno, zda mezi průměrnými výsledky skupiny studentů, kteří studovali před vstupem na pedagogickou fakultu na jiné vysoké škole a mezi skupinou studentů, kteří nenavštěvovali jinou vysokou školu, jsou statisticky významné rozdíly. Studenti, kteří před nástupem na pedagogickou fakultu navštěvovali jinou vysokou školu dosahovali průměrně 8,057 bodů v testu. Studenti, kteří nestudovali na jiné vysoké škole před nástupem na pedagogickou fakultu získali průměrně 7,873 bodů v didaktickém testu.

První dva požadavky (viz s. 108) k použití Studentova t-testu jsou splněny, ověření zbývajících požadavků je následující:

a) Ověření normality rozdělení četností

1. Byly zvoleny statistické hypotézy **– absolventi jiné vysoké školy – označení (AV)**

$H8_{x(AV)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 8,057 a standardní odchylkou s=2,405.*

$H8_{x(AV)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Hodnota testového kritéria je χ^2 **=5,885**. Protože získaná hodnota testového kritéria χ^2=5,885 v porovnání s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}$**(11)=19,675** je menší, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Výsledky testování mají normální rozdělení.**

2. Byly zvoleny statistické hypotézy – **studenti, kteří nestudovali jinou vysokou školu před nástupem na pedagogickou fakultu – označení (NV)**

H8$_{x(NV)0}$ *Výsledek testování má normální rozdělení s průměrem 7,873 a standardní odchylkou s=2,709.*

H8$_{x(NV)A}$ *Výsledek didaktického testu nevykazuje normální rozdělení četností.*

Poněvadž získaná hodnota testového kritéria χ^2 **=11,171** v porovnání s kritickou hodnotou testového kritéria chí-kvadrát pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 11$, tj. $\chi^2_{0,05}$**(11)=19,675**, je menší, **přijímáme nulovou hypotézu**. **Výsledky testování mají normální rozdělení.**

b) Ověření homogenity rozptylu

H8$_{y0}$ *Každá dvojice rozptylů je stejná.*

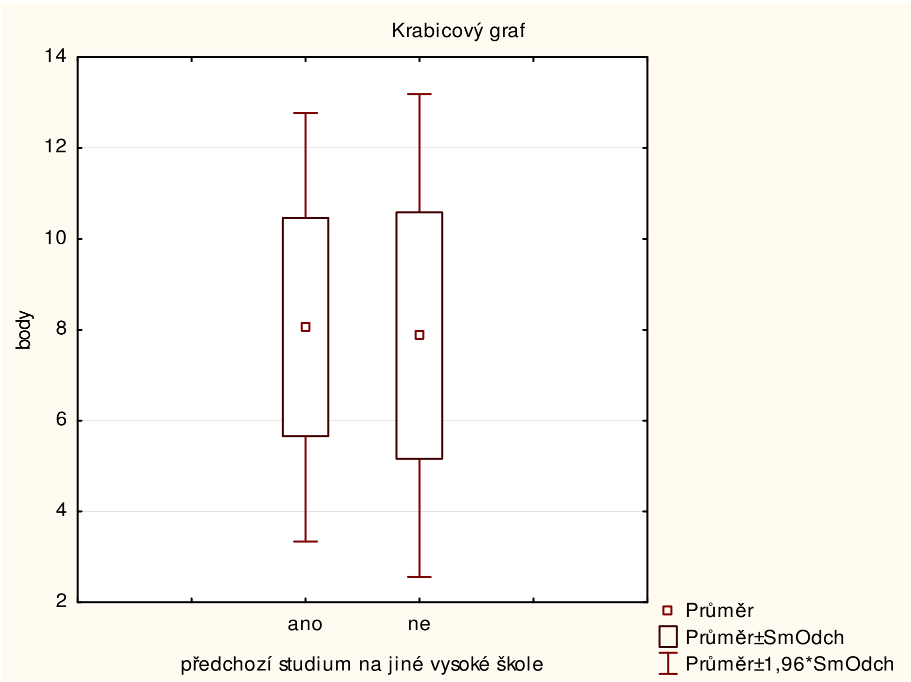
H8$_{yA}$ *Alespoň jedna dvojice rozptylů se liší.*

O platnosti nulové hypotézy rozhodneme výpočtem testového kritéria F ze vztahu $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$. Pro naše hodnoty byla vypočítána hodnota F =1,268. Počet stupňů volnosti $f_1 = 53, f_2 = 252$. Ve statistických tabulkách nalezneme pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pro nejblíže tabelované hodnoty kritickou hodnotu $F_{0,05}$ =1,389. Protože vypočítaná hodnota F je menší než hodnota kritická, přijímáme nulovou hypotézu. Mezi rozptyly v obou srovnávaných skupinách není statisticky významný rozdíl a použití Studentova t-testu je tedy oprávněné.

c) Ověření hypotéz Studentovým t-testem

Nulovou hypotézu testujeme pomocí kritéria Studentova *t*-testu. Byla vypočítaná hodnota testového kritéria $t = 0{,}457$. Pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $f = 303$ odpovídá ve statistických tabulkách kritická hodnota nejblíže $\mathbf{t_{0,05}(400) = 1{,}966}$.

Závěr: *Poněvadž hodnota testového kritéria je menší než hodnota kritická, přijímáme nulovou hypotézu.* Zjištěné rozdíly v průměrném počtu bodů v testu u obou zkoumaných skupin lze připsat na vrub náhody. Výsledky v obou skupinách studentů pocházejí ze stejného základního souboru.



Graf č. 16: Krabicový graf – průměrný počet bodů studentů v testu v závislosti na předchozím studiu na jiné vysoké škole

8 Závěry a doporučení pro realizaci v praxi a další rozvoj vědy

Výzkumné šetření se zabývá funkčním myšlením studentů matematiky na počátku jejich studia na pedagogických fakultách v České republice. Tato problematika byla zkoumána v podobě počtu bodů dosažených studenty v didaktickém testu. Smyslem šetření bylo zjistit a posoudit funkční myšlení výše zmíněných studentů. Konstatujeme, že by funkční myšlení studentů mělo být rozvinuto na takové úrovni, aby je dokázali aplikovat na řešení aplikačních úloh, neboť s takovými úlohami se budou v dalším studiu i v běžném životě setkávat a také aby byli schopni správně rozvíjet funkční myšlení u svých žáků.

K realizaci výzkumu bylo potřeba vytvořit relevantní teoretické zázemí, stanovit míru úspěšnosti řešení úloh v didaktickém testu. Dále zjistit, zda je a jak funkční myšlení ovlivněno pohlavím studenta a jeho předchozím studiem na střední popř. vysoké škole.

Teoretická část předložené práce:

- seznamuje čtenáře s aktuálním stavem zkoumané problematiky – udává přehled českých i zahraničních výzkumů zabývajících se funkčním myšlení žáků a studentů, charakterizuje požadavky na rozvoj funkčního myšlení ve školním kurikulu;
- vymezuje a charakterizuje klíčové pojmy dizertační práce, mezi něž patří myšlení, matematické myšlení, funkční myšlení, inteligence;
- zabývá se možnostmi rozvoje funkčního myšlení ve výuce matematiky;
- poukazuje na faktory z oblasti psychologie, studia na střední škole a na faktor pohlaví jako na předpoklady poklesu úrovně funkčního myšlení.

Empirická část předložené práce si klade za cíl:

- *zjistit a posoudit* funkční myšlení studentů matematiky v prvním ročníku na počátku jejich bakalářského studia na všech pedagogických fakultách v ČR;
- *stanovit* míru úspěšnosti řešení jednotlivých úloh;
- *zjistit* nedostatky studentů ve funkčním myšlení vzhledem ke školnímu kurikulu;
- *navrhnout* vhodná opatření ke zvýšení úrovně funkčního myšlení;
- *zjistit*, zda je a jak funkční myšlení studentů ovlivněno pohlavím a jejich předchozím studiem na střední popř. vysoké škole.

Ke sběru dat byl zvolen nestandardizovaný didaktický test z matematiky. Při rozboru řešení úloh testu byly využity prvky kvantitativní (tabulky četností, grafy) a kvalitativní (analýza chyb a jejich možných příčin, důsledky pro funkční myšlení).

Při ověřování stanovených hypotéz byly použity metody kvantitativního výzkumu – Studentův t-test a analýza rozptylu. Všechny hypotézy byly testovány na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

8.1 Závěry ze statistického zpracování dat

Přinášíme závěrečný přehled výsledků výzkumu, kterých jsme docílili zkoumáním jednotlivých problémů a k nimž se vztahovaly stanovené hypotézy. Výsledky všech kol testování (pilotáž, předvýzkum, výzkum) poukazují na nedostatky ve funkčním myšlení respondentů. Celkem se výzkumu zúčastnilo 305 respondentů. Poněvadž jsme spolupracovali se všemi pedagogickými fakultami v České republice, zaručilo nám získat maximálně možný počet respondentů.

Nestandardizovaný didaktický test jako nástroj výzkumu byl složený ze 14 úloh. Respondenti mohli získat maximálně 14 bodů z testu, přičemž průměrný počet bodů byl 7,9 bodů, což je více než střední hodnota.

Lze říci, že výsledky úloh ve více případech poukazovaly na formální přístup při jejich řešení. Pozorované skutečnosti lze shrnout takto:

Studenti:

- často důsledně nepřemýšleli nad správným řešením a volili variantu řešení (graf funkce), která podobností odpovídala zadané grafické situaci;
- si neuvědomovali, v jaké situaci je řešením závislosti spojitý graf funkce a kdy jsou naopak grafem funkce izolované body, kdy úloha popisuje spojitý děj a kdy nikoli;
- měli problémy s grafickým projevem - často při znázornění soustavy souřadnic zaměňovali zavedení proměnných na ose x a ose y;
- při čtení údajů ze zadaného grafu funkce spoléhali na stejné měřítko na ose x a na ose y;
- prokázali nedostatek při ověření dovednosti určit, zda se jedná o přímou anebo nepřímou úměrnost a následně tuto závislost načrtnout graficky, často studenti zaměňovali nepřímou úměrnost s přímou úměrností;
- prokázali nedostatečně osvojenou dovednost určit funkční hodnoty z grafu funkce;
- nepochopili funkční závislosti mezi dvěma veličinami;
- neorientovali se v grafu funkce;
- měli problém s doplněním funkční tabulky nepřímé úměrnosti.

Z výsledků testů je prokazatelné, ve kterých oblastech kurikula mají studenti největší problémy. Úlohy jsou seřazeny od nejméně úspěšné po nejúspěšnější.

1) Nejméně byli respondenti úspěšní v úloze č. 13. Úspěšně tuto úlohu vyřešilo pouze 7,2 % respondentů. Lze usuzovat, že studenti nepřemýšlí nad řešením úlohy, nerozumí funkční závislosti mezi dvěma uvedenými proměnnými a závislosti probíhající změny. Zřejmě důvodem špatně zvolené varianty řešení je podobnost grafu závislosti s obrázkem, který znázorňuje tuto situaci.

2) 3,9 % dosáhli studenti při řešení úlohy čísla 9. Tuto úlohu vyřešilo pouze 14,4 % respondentů. Domníváme se, že příčinou neúspěchu řešení této úlohy je neuvědomění si, že závislost ceny žvýkaček na jejich množství není spojitý děj, tudíž grafem funkce jsou izolované body.

3) 23,9 % respondentů bylo řešitelsky úspěšných v úloze č. 12. Studenti špatně doplňovali tabulku funkční závislosti, neuvědomili si, že vztah mezi dvěma proměnnými je nepřímá úměrnost, proto doplnili údaje v tabulce, které odpovídali přímé úměrnosti. Tyto potíže vedly studenta k chybnému vyjádření funkční závislosti pomocí grafu. Místo grafu nepřímé úměrnosti znázorňovali graf přímé úměrnosti.

4) Nízká úspěšnost respondentů se také prokázala v úloze číslo 6. Pouze 29,2 % respondentů bylo v této úloze řešitelsky úspěšných. V tomto případě studenti nejsou zvyklí řešit problémové úlohy, řešení úlohy hledali ve známých elementárních funkcích. Nedokážou použít nabyté znalosti o elementárních funkcích při řešení aplikační úlohy vyžadující kombinaci těchto znalostí a uvědomit si, že tvar nádoby má vliv na to, jak rychle se bude zvyšovat hladina vody v sudu.

5) Méně jak polovina respondentů (41 % respondentů) byla úspěšná v úloze s číslem 4. Při volbě řešení dávali studenti přednost variantě, která odpovídá podobnosti zadání (tvaru kopce). Studenti si neuvědomili, že tvar kopce ovlivňuje rychlost lyžaře (vztah příčiny a následku).

6) Průměrně úspěšní v řešení (55,4 %) byli studenti v úloze číslo 8. Studenti nepoznají, kdy zadaná situace daná slovní úlohou je spojitý děj a kdy ne. Kdy je grafem závislosti spojitý graf (plná čára) a kdy jsou grafem intervaly.

7) 63 % respondentů vyřešilo úlohu číslo 3. Při hledání odpovědi respondenti vycházeli z reálného života, aniž by se zaměřili na graf, který to znázorňuje. Někteří studenti neznají matematický vztah pro výpočet rychlosti.

8) Nadprůměrný počet (71 % –73,8 %) respondentů odpovědělo na otázky číslo 14 a 11. V případě neúspěšných řešení v úloze číslo 11 měli studenti problém orientovat se v grafu funkce. V úloze č. 14 většina respondentů umělo vyčíst z grafu požadovanou informaci, ale neuměla vyjádřit vztah závislosti mezi proměnnými grafem. I částečně správné řešení úlohy jsme považovali za chybné.

9) Další nadprůměrný počet respondentů (77 % – 78,4 %) odpověděl na otázky čísla 2, 7 a 10. Studenti, kteří úlohu číslo 2 řešili neúspěšně, se dopouštěli chyby, protože neuměli znázornit funkční závislost zadanou tabulkou hodnot do grafu funkce. Často zaměňovali proměnné na ose x a na ose y. V úloze číslo 10 chyběla studentům správná úvaha o závislosti změny jedné veličiny na druhou veličinu. Chybná odpověď v úloze číslo 10 měla příčinu v nedostatečné orientaci studentů v grafu funkce. Řešitelsky neúspěšní studenti v úloze číslo 7 se dopouštěli chyby při orientaci v grafu.

10) 81,6 % respondentů bylo úspěšných v řešení úloh číslo 5. Studenti často chybovali při řešení úlohy z důvodu špatné orientace v grafu funkce nebo neporozumění funkční závislosti vyjádřené grafem.

11) Nejvíce byli studenti úspěšní v úloze číslo 1. 96,4 % respondentů tuto úlohu vyřešilo správně. Jednalo se o úvodní úlohu, která měla studenty vhodně motivovat k řešení didaktického testu.

8.2 Nedostatky ve funkčním myšlení studentů

Z výsledků provedeného výzkumu, které uvádíme v předchozí kapitole, můžeme shrnout následující závěry, které vyplývají pro funkční myšlení studentů, budoucích učitelů matematiky na základní škole. Chybná řešení úloh v didaktickém testu prokázala nedostatky ve funkčním myšlení studentů. Považujeme za důležité věnovat tomuto tématu matematiky zvýšenou pozornost na všech stupních vzdělávání, neboť již výše zmíněné nedostatky studentů ve funkčním myšlení nevznikají až na střední nebo vysoké škole, ale začínají se utvářet už na základní škole a s těmito nedostatečně osvojenými dovednostmi a chybami ve funkčním myšlení přicházejí do dalšího vzdělávání.

Všechny problémy, které se výzkumem prokázaly, mají za následek to, že úroveň funkčního myšlení studentů je pouze průměrná, efektivnost úvah studentů je nízká. Studenti nejsou naučeni pořádku v organizaci řešení a nevykazují správně rozvinuté myšlenkové procesy. Jejich úvahy o správném řešení úlohy vycházejí z formálních znalostí.

Aplikace funkčního myšlení při řešení úloh se významně podílí na formování intelektuálních schopností člověka, především na rozvoji logického myšlení, vytváření prostorové představivosti, schopnosti abstraktního myšlení. Vytváří prostor pro závislosti mezi reálnými veličinami. Poněvadž výsledky studentů v didaktickém testu prokázaly nedostatky ve funkčním myšlení studentů, konstatujeme, že u studentů dochází k omezení v jejich myšlenkových operacích a k nižší inteligenci, které s funkčním myšlením úzce souvisí.

U studentů, budoucích učitelů matematiky, se projevilo nedostatečné pochopení závislosti jako vztahu mezi dvěma proměnnými či veličinami. Základním stavebním kamenem funkčního myšlení je pochopení smyslu kauzality (vztah následku a příčiny). Funkční myšlení studentů je omezené pouze na paměť a na operace s vjemy jako poznatky, uchovanými v paměti. Při řešení úlohy, kde studenti měli načrtnout graf funkční závislosti nebo vybrat z nabízených grafů funkční závislosti správnou odpověď, měli studenti silnou tendenci ke stereotypu a snažili se opírat o jim známé modely funkcí, se kterými se setkali na základní nebo střední škole. Nepřemýšleli nad tím, jaká je skutečná závislost mezi proměnnými. Funkční myšlení studentů bylo omezené pouze na práci s konkrétními a známými funkcemi, nejvíce na lineární funkci.

S pochopením funkční závislosti souvisí i schopnost porozumět tomu, zda závislost mezi dvěma proměnnými představuje spojitý děj nebo nikoli. Tato skutečnost se odráží při znázornění grafu funkce, neboť pokud se jedná o nespojitý děj, grafem jsou izolované body. Naopak spojité děje znázorňujeme plnou čarou. Nesprávná úvaha o spojitosti či nespojitosti děje spočívá ve špatném porozumění definičního oboru funkce a oboru hodnot, tedy jedné hodnotě proměnné přiřazujeme právě jednu hodnotu druhé proměnné. Spojitost děje lze také určit na základě podobnosti zadané úlohy se situací z reálného života. Dá se říct, že studenti neumí vnímat závislost v běžném životě, postihnout její charakter a propojit tuto skutečnost se situací zadanou v matematické úloze.

V úlohách zaměřených na vyjádření funkční závislosti mezi dvěma proměnnými grafem se potvrdilo nedostatečné pochopení funkční závislosti vyjádřené slovy a funkční tabulkou. Následně pak studenti nebyli schopni tuto závislost vyjádřit grafem. Pokud respondent neměl popsanou funkční závislost s užitím grafu, ukázal tak na jazykové neporozumění a zaměňování nezávisle a závisle proměnné. Na základě toho je u studentů omezené i uvažování o přechodu mezi těmito reprezentacemi. Problémy měli s pochopením závislosti probíhajících změn a matematickým popisem této změny. V důsledku toho dělají chyby v logickém usuzování při řešení úloh a tím nejsou schopni vyřešit úkol správně a v plnosti.

Rozdíly ve výsledcích úloh, kde byly relace popsány pouze slovy anebo naopak znázorněny pouze graficky, svědčily o nerovnováze mezi auditivními a vizuálními schopnostmi některých studentů.

Všechny zadané úlohy v didaktickém testu jsou zadávány tak, že jejich kontext i zadaná data jsou reálná. Se všemi zadanými situacemi se studenti v praxi již setkali. Přesto řada studentů neumí tyto zkušenosti z praxe využít při řešení matematické úlohy. Nejsou dostatečně zvyklí na aplikaci matematiky v reálném životě. Schopnost založená na řešení praktických problémů a způsobilosti uplatňovat zkušenosti z praxe nazýváme podle Sternberga (1977) praktickou inteligencí.

Dovednost číst a orientovat se v grafu funkce je u studentů také málo osvojená a je také příčinou snížení úrovně funkčního myšlení. Chybná práce se zobecněným vztahem mezi dvěma veličinami vyjádřeným grafem spočívá v chybném osvojení myšlenkových operací, konkrétně nejvíce v analýze funkční závislosti a syntéze. Chybné odpovědi v úlohách, které zjišťovaly orientaci v grafu funkce, prokázaly nedostatečný rozvoj vizuální gramotnosti a názorného (vizuálního) myšlení. Dovednost zpracovávat a vyhodnocovat data ať už zadané grafem funkce nebo tabulkou, jsou základní dovednosti pro správné a zdravé myšlení každého jedince.

Při konstrukci grafu se projevuje nedostatek v grafickém projevu studenta, mají problémy s určením závisle a nezávisle proměnné, studenti často pletli a také zaměňovali souřadné osy. Domníváme se, že i zde jde o formalismus a nedostatečné porozumění kartézské soustavě souřadnic jako nástroji umožňujícímu znázornit funkční závislost. S problémem správně sestrojeného grafu funkce souvisí také úroveň abstraktního a logického myšlení. S dovedností zkonstruovat graf v pravoúhlé soustavě souřadnic souvisí prostorová inteligence a schopnost vytvářet vizuální myšlenkové představy.

Špatně řešené úlohy nebo neřešené úlohy u studentů dokazovaly nesystematičnost jejich myšlení, o nedostatečně rozvinutém matematickém aparátu, neschopnosti geometrického vhledu. Z výsledků studentů v testu se prokázalo, že při práci s funkcemi špatně operují s představami a pojmy, abstraktními znaky.

Schopnost nevnímat závislosti jako vztahu mezi dvěma veličinami a postihnutím tohoto charakteru s vyvozováním vztahu mezi veličinami, kvantitativním vyjádřením závislostí a jejich zachycení různými matematickými reprezentacemi mají za následek sníženou úroveň matematické gramotnosti studenta. Snížená úroveň funkčního myšlení studenta ovlivňuje i jeho úroveň logicko-matematické inteligence.

Špatně řešené úlohy, které byly zaměřeny na popis funkční závislosti vyjádřené grafem funkce pomocí slov, prokázaly u studentů nedostatečně osvojenou dovednost orientovat se v grafu funkce a orientovat se ve dvoudimenzionálním prostoru. Požadavek, aby každé hodnotě nezávisle proměnné byla přiřazena právě jedna hodnota závisle proměnné, je osvojen často bez jakékoliv představy a v mysli žáka je deformován. U slovního vyjádření funkční závislosti se u studentů projevil nedostatek ve vyjadřovacích schopnostech. Studenti měli obtíže s porozuměním matematického jazyka a symboliky. Studenti, budoucí učitelé matematiky, neumí zacházet s jazykem a vyjadřovat se v něm v písemné formě, často neporozuměli zadanému grafickému projevu.

Na základě nepochopením vztahu závislosti mezi dvěma veličinami a nepochopení proměnných se student nemůže pohybovat na vyšším stupni abstrakce, nemůže pochopit a pracovat s pojmem funkce. Tím, že student neumí používat proměnné veličiny, nemůže být jeho myšlení na úrovni konkrétních operací a nemůže ani volně přejít do stádia formálních operací, pro něž je typická myšlenková operace abstrakce.

Pokud studenti mají nedostatečně rozvinuté funkční myšlení, projevují se tyto nedostatky jako chyby v logické přesnosti usuzování, jejich myšlení není systematicky uspořádáno a na základě toho si vytvářejí špatné soudy a z nich potom chybné myšlenkové úsudky.

V úloze č. 10, když jsme změnili dvojnásobně poloměr válce při jeho stejné výšce. Tato úloha ke správnému řešení vyžadovala hlavně myšlenkovou operaci komparaci, na základě které se zjišťuje, zda jsou dva jevy podobné nebo odlišné. Pokud změníme poloměr válce při jeho konstantní výšce, co se stane s hladinou, zda bude rychleji nebo pomaleji stoupat. Výsledky didaktického testu svědčí také o špatném uvažování studenta při uvědomění si závislosti probíhající změny.

Nedostatky studentů, budoucích učitelů matematiky, ve funkčním myšlení můžou mít za následek to, že své chyby budou jednou předávat ve výuce matematiky svým žákům na základní škole nebo se budou vyhýbat efektivnímu rozvoji funkčního myšlení u svých žáků. Pokud této skutečnosti chceme zabránit, je potřeba odstranit formalismus a chyby v poznávacím procesu studenta a vést ho ke správnému rozvoji funkčního myšlení.

8.3 Shrnutí výsledků statistik

1. Předpokládali jsme, že funkční myšlení studentů matematiky na pedagogických fakultách v České republice na počátku jejich vysokoškolského studia neodpovídá úrovni podle standardů základního a středního vzdělávání. Naše očekávání se potvrdilo. Lze tedy konstatovat, **že funkční myšlení respondentů neodpovídá očekávané úrovni dle standardů pro základní a střední vzdělávání.**

2. Domnívali jsme se, že výsledky studentů v didaktickém testu z matematiky budou na jednotlivých pedagogických fakultách v České republice odpovídat střední hodnotě. Avšak tento předpoklad se nepotvrdil, naopak konstatujeme, **že míra úspěšnosti řešení úloh v didaktickém testu u respondentů je na pedagogických fakultách různá. Mezi zkoumanými skupinami respondentů existuje alespoň jedna skupina, jejíž míra úspěšnosti řešení úloh v didaktickém testu (medián) je statisticky významně odlišná s jinou zkoumanou skupinou.**

Slabě průměrné výsledky nás vedly k zamyšlení se nad **faktory**, **které by mohly být příčinou snižující úrovně funkčního myšlení absolventů střední školy**.

3. Předpokládali jsme, že **pohlaví** respondenta nemá vliv na jeho funkčního myšlení. Naše domněnka se nepotvrdila a museli jsme přijat alternativní hypotézu, **že míra úspěšnosti řešení úloh v didaktickém testu je rozdílná u mužů a žen. Muži dosahují v testu vyššího průměrného počtu bodů než ženy. Konstatujeme, že pohlaví respondenta má vliv na úspěšnost řešení matematických úloh s funkčním obsahem.** Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu z matematiky ve skupině mužů a průměrným počtem bodů v testu z matematiky ve skupině žen je statisticky významný rozdíl. Zjištěné rozdíly není možno připsat na vrub náhody.

4. Předpokládali jsme, že na funkční myšlení respondentů má vliv **druh absolvované střední školy**. Konkrétně: absolventi gymnázia budou v testu řešitelsky úspěšnější než absolventi střední odborné školy a středního odborného učiliště (SOŠ a SOU). **Na základě provedeného výzkumu se prokázalo, že mezi dosaženými průměry v didaktickém testu ve skupině absolventů gymnázia a ve skupině**

absolventů střední odborné školy (SOŠ a SOU) jsou statisticky významné rozdíly. Z výsledků výzkumu vyplývá, že druh absolvované střední školy má vliv na úspěšnost řešení úloh v testu. Zjištěné rozdíly v průměrném počtu bodů z testu není možné připsat na vrub náhody. Konstatujeme, že průměrný počet bodů v didaktickém testu ve skupině absolventů gymnázia je skutečně větší než průměrný počet bodů v testu z matematiky u absolventů střední odborné školy (SOŠ a SOU).

5. Jako další faktor, který jsme zohledňovali ve výzkumu, byla **maturita z matematiky**. Předpokládali jsme, že studenti, kteří absolvovali maturitní zkoušku z matematiky, budou v didaktickém testu z matematiky dosahovat lepších výsledků než studenti, kteří neskládali maturitní zkoušku z matematiky. Podle výsledku provedeného výzkumu se naše domněnka potvrdila, přijali jsme alternativní hypotézu. **Mezi dosaženými průměry v didaktickém testu ve skupině absolventů gymnázia a ve skupině absolventů střední odborné školy (SOŠ a SOU) jsou statisticky významné rozdíly. Zjištěné rozdíly v průměrném počtu bodů z testu není možné připsat na vrub náhody.** Konstatujeme, že průměrný počet bodů v didaktické testu ve skupině absolventů gymnázia je skutečně větší než průměrný počet bodů v testu z matematiky u absolventů střední odborné školy a středního odborného učiliště. Na **míru úspěšnosti řešení matematických úloh v didaktickém testu má vliv absolvování maturitní zkoušky z matematiky.**

6. Předpokládali jsme také, že míra úspěšnosti řešení v didaktickém testu má statisticky významnou souvislost s odstupem od maturitní zkoušky. Mezi výsledky skupin studentů v didaktickém testu z matematiky nejsou statisticky významné rozdíly. Rok absolvované střední školy nemá vliv na míru úspěšnosti řešení didaktického testu.

7. Očekávali jsme, že na výsledek testu respondenta má vliv to, zda již před nástupem na pedagogickou fakultu **absolvoval jinou vysokou školu**. Tato skutečnost se nepotvrdila. Zjištěné rozdíly v průměrném počtu bodů v testu u obou zkoumaných skupin lze připsat na vrub náhody. Výsledky v obou skupinách studentů pocházejí ze stejného základního souboru. To, zda respondent již před nástupem na pedagogickou fakultu **absolvoval jinou vysokou školu, nemá vliv na úspěšnost řešení úloh v didaktickém testu z matematiky.**

8. Posledním faktorem, který jsme zohlednili v našem výzkumu, je **úroveň státní maturitní zkoušky z matematiky v letech 2011–2012**. Předpokládali jsme, že úroveň státní maturitní zkoušky má vliv na výsledek testu respondenta. **Mezi průměrným počtem bodů v didaktickém testu u skupiny absolventů vyšší úrovně maturitní zkoušky z matematiky a průměrným počtem bodů v testu absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky jsou statisticky významné rozdíly. Zjištěné rozdíly nelze považovat za vrub náhody.** Průměrný počet bodů v testu u absolventů vyšší úrovně státní maturitní zkoušky je skutečně vyšší než u absolventů nižší úrovně státní maturitní zkoušky. **Úroveň absolvované státní maturitní zkoušky na střední škole má vliv na úspěšnost řešení úloh z matematiky v didaktickém testu.**

Jako hlavní cíl dizertační práce jsme si kladli zjistit a posoudit funkční myšlení studentů matematiky na počátku jejich studia na pedagogických fakultách v České republice. Na základě našeho provedeného výzkumu jsme dospěli k závěru, že úroveň funkčního myšlení respondentů je pouze průměrná. Zjistili jsme, že studenti mají nedostatky ve funkčním myšlení, což často vykazují chybnými úvahami a myšlenkovými operacemi. Funkční myšlení žáků/studentů neodpovídá očekávané úrovni podle Rámcových vzdělávacích programů a standardů z matematiky pro základní a střední vzdělávání. Obecně se výzkumným šetřením ukázalo, že studenti výrazně preferují statický přístup před dynamickým, což se projevuje v různých nepřesnostech a chybách při řešení úloh.

Kromě hlavního cíle dizertační práce jsme zjišťovali, zda je úroveň funkčního myšlení studentů, budoucích učitelů matematiky, na všech pedagogických fakultách v České republice stejná. Přesto, že ideální je, aby na všechny pedagogické školy přicházeli studenti s přibližně stejnou úrovní funkčního myšlení, tato myšlenka se naším šetřením vyvrátila. Z důvodu dodržení anonymity neuvádíme konkrétní pedagogickou fakultu, která vzdělává studenty s vyšší úrovní funkčního myšlení, než jak je to na ostatních pedagogických fakultách v České republice. Můžeme ovšem konstatovat, že studenti z fakulty s nejúspěšnějším výsledkem v didaktickém testu prokázali systematičtější logické myšlení a správnost usuzování, méně chybovali v úlohách zaměřených na vyjádřené funkční závislosti mezi proměnnými než studenti ostatních pedagogických fakult.

Dalším cílem výzkumného šetření bylo zjistit, zda zvolené faktory ovlivňují funkční myšlení studentů, budoucích učitelů matematiky. V této kapitole věnujeme pozornost faktorům, jejichž vliv na funkční myšlení se výzkumem potvrdil a podrobněji popisujeme, jak tyto faktory působí na funkční myšlení studenta, jaké největší rozdíly ve funkčním myšlení srovnávaných skupin způsobují.

Nejprve jsme zkoumali vliv faktoru pohlaví na funkční myšlení studentů. Naším výzkumem se potvrdilo, že muži dosahovali vyššího průměrného počtu bodů v didaktickém testu než ženy. Muži byly řešitelsky úspěšnější v aplikačních úlohách a lépe se v zadání úloh orientovali než ženy. Jejich vyšší úroveň názorného myšlení než u žen jim umožňovala lépe se zaměřovat na vztah mezi dvěma proměnnými, snadněji vyjadřovali vztah mezi dvěma veličinami pomocí tabulky a grafů a také častěji správně uvažovali při analýze funkčního chování vyjádřené různými reprezentacemi (tabulkou, grafem). Grafický projev mužů byl uspořádanější a přesnější než u žen. Muži také méně chybovali při převádění číselných údajů z jednoho grafu do druhého. V důsledku toho dělali muži menší počet chyb v logickém usuzování při řešení úloh a tím byli schopni vyřešit úkol správně a v plnosti častěji než ženy. Avšak ve slovním vyjádření funkční závislosti byli úspěšnější více ženy než muži.

Ženy byly schopnější porozumět tomu, zda závislost mezi dvěma proměnnými představuje spojitý děj nebo nikoli. Častěji než muži při určení spojitosti děje vycházely na základě podobnosti zadané úlohy ze situací z reálného života. Je zřejmé, že ženy umí lépe vnímat závislost v běžném životě a postihnout její charakter, propojit tuto skutečnost se situací zadanou v matematické úloze.

Dalším faktorem, jehož vliv na funkční myšlení studentů jsme výzkumem zkoumali a zároveň se jeho vliv na úroveň toho typu myšlení potvrdil, je druh absolvované střední školy. Absolventi gymnázia jsou v testu řešitelsky úspěšnější než absolventi střední odborné školy a středního odborného učiliště (SOŠ a SOU). Myšlení absolventů gymnázia v řešení úloh didaktického testu korespondovalo s logickou přesností více než u absolventů jiného druhu střední školy, pečlivěji řešili zadané úlohy, snadněji manipulovali a využívali matematickou symboliku. V řešení úloh absolventů gymnázia se projevila větší schopnost pochopit a vnímat závislosti probíhajících změn a následně tuto změnu matematicky popsat a vyjádřit grafem funkce. Na této skutečnosti a pochopením smyslu proměnných se mohl absolvent gymnázia pohybovat na vyšším stupni abstrakce než srovnávaná skupina respondentů.

Funkční myšlení absolventů jiné střední školy než gymnázia je více zaměřené pouze na práci s konkrétními a známými funkcemi, konkrétně na lineární funkci, než u absolventů gymnázia. Domníváme se, že tato skutečnost spočívá v tom, že výuka funkcí na gymnáziu je věnována různorodým funkcím a také řešením většího počtu aplikačních úloh, které nevyžadují pouze znalost základních elementárních funkcí. Absolventi gymnázia častěji vyřešili úlohu zaměřenou na dovednost určit přímou nebo nepřímou úměrnost a následně tuto závislost zachytit grafem.

Dalším zohledňovaným faktorem, jehož vliv na funkční myšlení respondenta jsme zkoumali, je maturita z matematiky. Studenti, kteří maturovali na střední škole z matematiky, vykazovali logické uvažování u úloh a častěji vyřešili úlohy s funkčním obsahem než studenti, kteří na střední škole nematurovali z matematiky. U této skupiny studentů se prokázala větší systematičnost a kultivace způsobu řešení úloh a vyšší úroveň rozvoje funkčního myšlení než u studentů, kteří z matematiky nematurovali. Z výsledků absolventů maturitní zkoušky z matematiky se testem prokázalo, že při práci s funkcemi lépe operují s představami a pojmy, abstraktními znaky než studenti, kteří z matematiky neskládali maturitní zkoušku na střední škole. Schopnost vnímat závislosti vztahu mezi dvěma veličinami a postihnout jeho charakter s vyvozováním vztahu mezi veličinami, kvantitativním vyjádřením závislostí a jejich zachycení různými matematickými reprezentacemi měli menší problém absolventi maturitní zkoušky z matematiky než studenti, kteří maturitní zkoušku z matematiky neskládali.

Studenti, kteří nematurovali z matematiky, často zaměňovali závisle a nezávisle proměnnou a osy souřadnic, měli obtíže se sestrojením grafu funkce. Jejich grafický projev je na nižší úrovni než u porovnávané skupiny respondentů. S tímto problémem je spojená snížená úroveň prostorové inteligence a schopnost vytvářet vizuální myšlenky. Studenti také častěji chybovali v doplnění funkční závislosti danou tabulkou.

Posledním zkoumaným faktorem ovlivňující funkčního myšlení je úroveň maturitní zkoušky z matematiky. Absolventi vyšší úrovně maturitní zkoušky z matematiky dosahovali v didaktickém testu vyšší průměrný počet bodů než studenti, kteří skládali nižší úroveň maturitní zkoušky z matematiky. Na základě provedeného výzkumu jsme dospěli k závěru, že u absolventů vyšší úrovně maturitní zkoušky z matematiky se při řešení úloh v didaktickém testu projevila větší přesnost v logickém uvažování. Tito studenti měli menší problém s pochopením závislosti jako funkčního vztahu mezi dvěma veličinami a následně tuto závislost vyjádřit grafem funkce. Snadněji chápali závislosti probíhajících změn. Jejich úroveň názorného a vizuálního myšlení je vyšší než u druhé srovnávané skupiny studentů a také lépe chápou kauzální vztah. Na základě toho vytváří správné soudy a z nich potom myšlenkové úsudky. Správně zachází s myšlenkovými operacemi a dodržují jejich logický sled a jednodušeji nalézají mezi daty smysluplné vztahy.

Student s nižší úrovní maturitní zkoušky z matematiky měli větší tendence při řešení úloh opírat se o jim známé modely funkcí, aniž by se více zamysleli nad řešením.

8.4 Nedostatky studentů ve funkčním myšlení vzhledem ke školnímu kurikulu

V tematických okruzích *Závislosti, vztahy a práce s daty* (viz str. 50-51) a *Závislosti a funkční vztahy* (viz str. 54-55) ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní a střední vzdělávání a ve standardech matematiky (viz str. 52-53, 55-58) jsou formulovány konkrétní požadavky na rozvoj funkčního myšlení žáka.

Považujeme za důležité, aby měl vyučující přehled o tom, co se od něj ve vzdělávací činnosti očekává a jakých vzdělávacích cílů má ve svém předmětu u svých žáků dosahovat. Se zaváděním rámcových vzdělávacích programů jsou na metodickou i odbornou připravenost učitele kladeny větší požadavky. Proto jsme se v našem výzkumu zabývali funkčním myšlením studentů, budoucích učitelů matematiky. Zajímalo nás, do jaké míry jsou u těchto studentů naplněny očekávané cíle vedoucí k rozvoji funkčního myšlení, tak jak uvádí kurikulární dokumenty pro předmět matematika pro základní a střední vzdělávání, neboť oni sami budou jednou funkční myšlení rozvíjet u svých žáků, budou se muset snažit u svých žáků naplnit tyto vzdělávací cíle v předmětu matematika také.

Poněvadž školní kurikulum obsahuje široké spektrum vzdělávacích cílů, o nichž se zmiňujeme v kapitole nazvané *Rozvoj funkčního myšlení jako výukového cíle*, bylo by zcela nereálné zjišťovat je všechny. Proto jsme se zaměřili na ty očekávané cíle, které považujeme za nejpodstatnější pro správné pochopení a rozvíjení funkčního myšlení. Jedná se o tyto cíle:

Žák:

- Popisuje jednoduché závislosti z praktického života;
- Vyjádří funkční vztah tabulkou, grafem;
- Umí přecházet mezi reprezentacemi tabulka, graf;
- Pracuje s konkrétními funkcemi při řešení úloh z praxe;
- Užívá soustavu souřadnic;
- Užívá proměnnou, rozlišuje závisle a nezávisle proměnnou;
- Čte a chápe údaje sestavené do tabulky a grafů;
- Dovede řešit přiměřeně obtížné úlohy problémového charakteru.

Mezi vzdělávacími cíli existuje návaznost a vzájemné propojení, kdy jeden cíl využívá ke svému naplnění již dosažený cíl. Některé nedostatečně osvojené vzdělávací cíle podmiňují vznik chyb, nepřesností, nebo absenci v naplnění jiných cílů.

Dalo by se předpokládat, že budoucí učitelé matematiky budou perfektně ovládat dovednosti podporující rozvoj funkčního myšlení. Výsledky testu však potvrdily skutečnost, že studenti jako budoucí učitelé matematiky nedosahují vytýčených cílů vedoucích k rozvoji funkčního myšlení, tak jak je formulují a očekávají kurikulární dokumenty, mnohdy i úlohy určené žákům základní školy byly pro studenty velmi problematické.

Provedený výzkum také odkryl problém v nerovnoměrnosti úrovně dovedností vysokoškolských studentů. Některé dovednosti si studenti osvojili na základní nebo střední škole (např. číst z grafu funkce, popisovat jednoduché závislost) na průměrné úrovni. Ale dovednosti, se kterými se možná nikdy podrobně nesetkali, jim dělají neustále potíže. U složitějších aplikačních úloh jsme se setkávali s tím, že se student ani nepokusil o řešení, raději řešení úlohy vynechal. Propojení s reálným světem u studentů nefunguje dokonale, dostanou-li se při řešení praktického problému do světa matematiky, na praktický svět zapomenou a na výzvu ze světa matematiky se snaží často reagovat podle stereotypu naučeného v hodině matematiky.

Jako nejméně osvojená dovednost u studentů se výzkumem potvrdila dovednost vyjádřit funkční vztah grafem a to zejména při řešení úloh problémového charakteru. Často studenti nad řešením úlohy nepřemýšleli a volili graf vyjadřující závislost podobný příslušnému obrázku znázorňujícímu danou situaci. Domníváme se, že tato dovednost nebývá na základních a středních školách příliš rozvíjena. Vyučující dávají v hodinách matematiky přednost úlohám, které vyžadují naučený algoritmus řešení a zadávání problémových úloh se vyhýbají.

S dovedností vyjádřit funkční vztah grafem je silně spjato pochopení vztahu závislosti mezi dvěma proměnnými. Příčinou tohoto nedostatku je obtížné správné pochopení a interpretace kauzálních vztahů, vytváření soudů a myšlenkových úsudků při řešení praktických problémů. Nepochopení závislosti probíhajících změn i příčin. Studentům chybí logická přesnost v usuzování a efektivnost úvah. Díky tomu často vynechávají matematické úlohy a neřeší je, protože vědí, že úkol nevyřeší správně a v plnosti. Neřešené úlohy u studentů svědčily o nesystematičnosti jejich myšlení.

Se špatným pochopením závislosti mezi dvěma veličinami souvisí další problém studentů, kdy špatnou úvahou docházejí často k závěru, že všechny závislosti musí být jen přímá úměrnost, tj. kolikrát se zvětší jedna veličina, tolikrát se zvětší druhá veličina. V testu výzkumu byla však zadána úloha i na nepřímou úměrnost. Nejprve měli studenti doplnit tabulku závislosti nepřímé úměrnosti a potom tuto závislost vyjádřit grafem funkce. Pokud student nerozeznal vztah nepřímé úměrnosti mezi dvěma proměnnými, s chybnou myšlenkou pracoval dále i při sestavení grafu. Ve většině případů studenti špatně určili vztah funkční závislosti, následně špatně doplnili údaje do funkční tabulky. Pokud některý respondent správně doplnil tabulku nepřímé úměrnosti, málokdo dovedl údaje z tabulky převést do grafu funkce. Studenti mají potíže přecházet mezi reprezentacemi tabulka a graf. Důvodem může být nedostatečné chápání údajů sestavených do tabulky nebo nedostatečně osvojená dovednost při konstrukci grafu funkce.

Tato úloha měla povahu aplikačního charakteru nepřímé úměrnosti, zadání úlohy vycházelo s praxe, a přesto studentům činila potíže. Je docela k zamyšlení se, že dovednost rozeznat nepřímou úměrnost, vyjádřit tuto závislost grafem je vyučováno již na základní škole a dále se s ní setkáváme v matematice i na střední škole, a přesto byla pro studenty značně obtížná.

Dovednost studentů pracovat a využívat vlastnosti již známých funkcí při řešení úloh z praxe je nejvíce osvojena dovednost v oblasti lineární funkce, než v jiné oblasti, avšak i tak studentům dělá potíže uvědomit si spojitost děje při lineární závislosti. Mají tendence zaměňovat ostatní funkce za lineární funkci.

Při znázornění funkční závislosti grafem funkce studenti často zaměňovali nezávisle a závisle proměnnou. Z řešení úloh vyžadující znázornění funkční závislosti grafem se prokázala skutečnost, že někteří studenti nemají vyjasněný rozdíl mezi proměnnými. S tímto nedostatkem souvisí i nedostatečně osvojený vzdělávací cíl zaměřený na užívání soustavy souřadnic. K sestrojení grafu funkce využíváme zejména abstraktní a logické myšlení. S grafickým projevem souvisí prostorová inteligence a schopnost vytvářet si vizuální myšlenkové představy. Grafickým řešením úlohy se rozvíjí vnější řeč, která je psychicky náročnější než vnitřní řeč, vyjadřují se jí myšlenky jedince, jeho úvahy.

Orientace v grafu funkce se využívá i při popisování jednoduchých jednotlivých závislostí z praktického života, se kterou je úzce spjata jazyková inteligence respondenta. Pokud studenti měli za úkol popsat závislost dvou proměnných v grafu pomocí slov, ve většině případů byli v takové úloze úspěšní. Tento cíl se provedeným výzkumem oproti ostatním cílům jevil jako průměrně dosažený u respondentů. Chybné odpovědi v úlohách, které zjišťovaly orientaci v grafu funkce, prokázaly nedostatečný rozvoj vizuální gramotnosti a názorného (vizuálního) myšlení. Dovednost zpracovávat a vyhodnocovat data zadané grafem funkce, patří mezi základní dovednosti praktického života pro každého jedince.

Nedostatečně osvojené a naplněné vzdělávací cíle nevedou ke správnému rozvoji funkčního myšlení, způsobují snížení jeho úrovně a tvorbu chyb. Díky tomu mají studenti nedostatky ve funkčním myšlení a také negativně působí na utváření matematické gramotnosti studenta, což se v našem výzkumu projevilo chybami při řešení úloh s funkčním obsahem. Tím se neomezuje jen funkční myšlení studenta, ale působí negativně i na rozvoj názorného myšlení, abstraktního myšlení a utváření inteligence studenta.

Na základě provedeného výzkumného šetření jsme dospěli k závěru, že dosažení výše zmíněných očekávaných vzdělávacích cílů u žáků/studentů, tak jak požadují kurikulární dokumenty, není dostatečné a samozřejmé. Tato skutečnost vede k zamyšlení, neboť tito studenti, budoucí učitelé matematiky, budou jednou vzdělávat a rozvíjet funkční myšlení u svých žáků. Navrhujeme klást větší důraz na oborově matematickou průpravu u studentů, budoucích učitelů matematiky, na vysoké škole.

8.5 Doporučení pro další rozvoj vědy

Náš výzkum o analýze funkčního myšlení studentů matematiky na počátku jejich vysokoškolského studia může sloužit k obohacení vysokoškolské pedagogiky, která by mohla využít toho zdroje ke zpřesnění vstupních požadavků na studenta vysoké školy.

Lze také předpokládat, že pedagogové na vysokých školách se budou stále potýkat s nedostatky ve funkčním myšlení u studentů prvního ročníku, a proto je potřeba do výuky v prvním ročníku zavést předmět, ve kterém by se opakovalo učivo stanovené v RVP ZV ve vzdělávacím obsahu *Závislosti, vztahy a práce s daty* a v RVP G ve vzdělávacím obsahu *Závislosti a funkční vztahy*. Přičemž zavádět zejména řešení problémových úloh, které odstraňují formalismus a naopak podněcují myšlenkovou činnost studenta.

Náš pokus zjišťoval diagnostické hodnoty úloh v testu, který může sloužit jako inspirace úloh k vytvoření testu studijních předpokladů a využití nestandardizovaného didaktického testu jako nástroje měření funkčního myšlení studentů na počátku studia.

Poněvadž mimo náš výzkumný záměr zůstali studenti kombinované formy studia, lze předpokládat, že faktory, které neměly vliv na výsledek studentů prezenční formy studia nebo jen částečný vliv, např. časový odstup od maturitní zkoušky, předchozí studium na jiné vysoké škole, by se do výsledků studentů kombinované formy studia intervenovaly více. Tento předpoklad by však bylo potřeba ověřit v novém výzkumu.

Výsledky výzkumného šetření může čerpat didaktika matematiky. Značný faktografický materiál, který výzkum přinesl, můžeme využít k posouzení kvality absolventů různého typu středních škol.

Doporučení pro další praxi ve výuce matematiky

Na základě získaných dat jsme konstatovali, že studenti řešili úlohy často bez zamyšlení a často jejich řešení vycházelo z podobnosti známé funkce, u které si pamatovali, jak vypadá její graf. Volba jejich řešení vycházela z formálních vědomostí základní a střední školy.

Doporučujeme správné kladení otázek ze strany učitele podle Bloomovy taxonomie hierarchicky uspořádaného systému vzdělávacích cílů ve vztahu k úrovni myšlenkových procesů. Postupně přecházet od otázek nižšího řádu, vyžadující pouhou paměť k otázkám vyššího řádu, které vyžadují k formulování správné odpovědi posouzení, hodnocení a analýzu.

Také při utváření matematických pojmů klást důraz na získávání dostatečného počtu separovaných modelů a postupně plynulým přechodem vést studenty ke generickému modelu až k abstraktnímu.

V současném světě se často setkáváme s překážkami, které vyžadují matematické zpracování. Je tedy nutné klást velký důraz na porozumění. Posilovat u studentů učitelství schopnost čtení textu v českém jazyce i v hodinách matematiky tak, aby porozuměli zadání úkolu a uměli se správně vyjadřovat, tím lépe předávat své vědomosti a dovednosti svým žákům.

Přínos výzkumu pro katedru matematiky

Výsledky z provedeného výzkumu mohou katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci poskytnout informace o našich studentech a výzkumný test může sloužit jako nástroj pro ověření, zda dochází ke zlepšení situace v dalších letech. Také tímto didaktickým testem můžeme zjišťovat, zda studium matematiky na vysoké škole má pozitivní vliv na zvýšení úrovně funkčního myšlení tak, že zjistíme, jak velkému zlepšení v jednotlivých ročnících dochází.

Doporučujeme v hodinách matematiky na pedagogických fakultách zavádět úlohy na rozvoj funkčního myšlení u budoucích učitelů, poněvadž tento typ úloh běžně v hodinách matematiky nebývá zařazen. Jedině to je zárukou, že budoucí učitelé matematiky budou ve své praxi funkční myšlení rozvíjet i u svých žáků.

Přínos dizertační práce pro pedagogickou praxi

Přínos pro tuto oblast spatřujeme zejména ve zpracování tématu funkčního myšlení na úrovni vysoké školy. Dosud neexistují výzkumy ani studie, které by se výhradně věnovaly funkčnímu myšlení u studentů vysoké školy. Často bývají respondenty výzkumu žáci základních a středních škol.

Funkční myšlení vychovává člověka k přesnosti, seznamuje ho s logikou, vede k odvyknutí si bezmyšlenkovitých tvrzení, odstraňuje formalismus ve znalostech, rozvíjí kritické myšlení, žákovu iniciativu, tvořivost a aktivitu.

Domníváme se, že některé poznatky a zkušenosti vztahující se k aktuálnímu funkčnímu myšlení absolventů středních škol mají obecnější platnost a lze je využít i v jiných předmětech. Také výsledky našeho šetření mohou být podnětem pro realizaci podobných výzkumů.

Popsané nedostatky funkčního myšlení studentů v dizertační práci vedou k zamyšlení se nad tím, jak danou situaci zlepšit.

8.6 Vhodná opatření ke zvýšení úrovně funkčního myšlení

Nácvik funkčního myšlení a propedeutika pojmu funkce prostupuje celou školní docházkou. Tím, že pedagog rozvíjí funkční myšlení u svých žáků/studentů, poskytuje jim nejen vědomosti a dovednosti, které jsou potřebné v praktickém životě (výběr vhodného mobilního operátora, platba elektrické energie atd.), ale přispívá k rozvoji osobnosti jedince, jeho inteligenci, logickému uvažování, prostorové představivosti a vnímání.

Poněvadž funkční myšlení každý jedinec využívá v každodenním životě, je potřeba ve vyučování matematice navozovat takové situace, které vycházejí z reálného života. Úlohy zadané v hodinách matematiky by měly být zaměřeny na závislosti, které obsahují reálný a aktuální kontext, reálná data. Ukazovat tak smysl a použití funkčního myšlení v praxi, aby ho žáci/studenti uměli použít pro vlastní potřebu v životě. Právě zdůrazněním a ukázkou využití funkčního myšlení v praxi může vyučující i své žáky/studenty vhodně motivovat, což je důležitý předpoklad v procesu učení, neboť vytváří kladný vztah k dané problematice, aktivizuje žáka/studenta a pobízí ho k myšlenkové činnosti.

Řešením závislostí, které jsou reprezentovány různými způsoby (tabulka, graf, slovní vyjádření, vzorec) a uměním přecházet mezi těmito reprezentacemi, si žák/student uvědomuje různé typy vyjádření závislostí, rozvíjí se jeho matematický jazyk a symbolika. Žák/student se zaměřuje na vztah mezi dvěma nebo více různými veličinami a představuje si proměnlivost těchto veličin ve vzájemné spojitosti. Dochází k pochopení, že změnou může být růst i pokles, ale i nulová hodnota. Důležitou součástí je porozumět různým typům textu závislostí a jejich znázornění. Reagovat na jejich porozumění.

Klást důraz na propojení matematiky s ostatními vyučovacími předměty v rámci vytváření mezipředmětových vztahů. Ukazovat přirozené propojení závislostí a funkcí s ostatními partiemi matematiky a především jejich mnohočetné využití a propojení s ostatními předměty jako je např. fyzika, zeměpis, chemie, občanská výchova atd. Sledovat, zda mezi změnami veličin existuje určitý vztah, který lze matematicky vyjádřit a pokud existuje, tak se jej snažit odhalit.

Doporučujeme v hodinách matematiky klást důraz na řešení problémových úloh a úloh s funkčním obsahem, jejichž řešením v různé náročnosti se naplňuje kompetence komunikativní a k řešení problémů tím, že žáci/studenti vyhledávají potřebné informace k volbě správného řešení, využívají své dosavadní znalosti a dovednosti, myšlenkové operace a přemýšlí nad správností řešení, které následně ověřují a kriticky hodnotí své řešení i řešení spolužáků (Blažková, Vaňurová, 2012).

Vyhledávání, zpracování a čtení statistických dat vede k rozvíjení myšlenkových operací, zejména analýze a syntéze. U jedince utváří a fixuje dovednost určovat funkční hodnoty a dovednost orientovat se v grafu funkční závislosti.

Znázornění statistických dat do různých reprezentací (graf, tabulka) napomáhá k lepšímu pochopení funkční závislosti jako vztahu mezi dvěma veličinami a podílí se na upřesnění grafického projevu. Práce s těmito reprezentacemi a přecházení mezi nimi má pozitivní vliv na uvažování s těmito reprezentacemi zejména při analýze funkčního chování a pochopení významu proměnné.

Předkládat množiny bodů v rovině a určit, zda se jedná o graf funkce. Modelovat závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí třeba i s využitím vhodného počítačového softwaru nebo grafického kalkulátoru. Tímto se formuje uvědomění si závislosti mezi jevy reálného světa a snadnější pochopení probíhající změny a její příčiny.

V učivu funkcí pracovat s konkrétními funkcemi při řešení úloh z praxe, tím se utváří praktická inteligence člověka a schopnost aplikace matematiky v reálném životě. Dochází také k uvědomění si smyslu a významu funkčního myšlení pro život.

Předpokládáme, že práce s konkrétními příklady funkcí je jedinou cestou k vytváření správných představ o pojmu funkce a k podpoře funkčního myšlení žáků/studentů všech věkových skupin. V učivu funkcí předkládat a seznamovat žáka/studenta s funkcemi různorodými, také méně typickými. Domníváme se, že by tak u žáků/studentů nedocházelo k omezení se pouze na lineární funkci a přímou úměrnost při řešení úloh a problémů, ale byli by seznámeni i s jinými závislostmi více, jako je třeba nepřímá úměrnost a další.

Při práci s těmito úlohami využívat všechny reprezentace matematických závislostí (tabulka, graf, slovní vyjádření, vzorec) a posilovat tak efektivně funkční myšlení žáků/studentů. Sami žáci a studenti mohou být vyzýváni, aby podobné reálné situace aktivně hledali a úlohy formulovali.

Při práci s funkcemi upřednostňujeme dynamické postupy, ty, které využívají funkční myšlení, zatímco statické postupy nahrazují funkční myšlení jinými výpočtovými metodami. Například při zakreslování grafu lineární funkce může žák postupovat tak, že získá souřadnice bodů dosazením několika diskrétních hodnot za proměnnou x (statický postup), nebo že chápe význam symbolů ve formuli y=ax+b a graf zakreslí bez dosazování konkrétních hodnot (dynamický postup) (Budínová, 2010, s. 26).

Málo pozornosti se ve vyučování matematiky věnuje konstrukci protipříkladů při učení závislosti mezi dvěma proměnnými a také k pochopení pojmu funkce. Definuje-li se jakýkoliv objekt či jev pomocí jistých vlastností, nemělo by se ale zapomínat na hledání takových objektů a jevů, které některé z těchto vlastností nemají. Dochází tak k rozvíjení smyslu pro kritičnost, efektivnost úvah a učí pořádku organizace řešení. Hlavně žáka/studenta přiměje k zamyšlení se nad správnou odpovědí.

Konstruováním protipříkladů si žák/student ověřuje, jestli správně pochopil závislost mezi dvěma veličinami, jeho myšlenky a úvah o závislostech se upřesňují. Tím se dá také lépe pochopit spojitost a nespojitost dějů a jejich znázornění do grafické podoby.

Nedílnou součástí je potřeba změnit dosavadní přístup ve výuce matematiky, přechod od transmisivního stylu vyučování ke konstruktivistickému, pro něž je charakteristická tvořivá činnost, konstruování nových poznatků a diskuze.

9 Seznam použitých zdrojů

ABBEDUTO, L., ELLIOTT, S. N. *Guide to human development for future educators*. Boston, MA: McGraw-Hill, 1998.

BARON, J. *Thinking and Deciding*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN 978-0-521-86207-3.

BASL, J., MOURALOVÁ M. *Zhoršující se výsledky českých žáků v mezinárodních šetřeních: přehled trendů, možné příčiny a řešení.* Praha: Evropský sociální fond Praha a EU, 2011.

BEATTY, R., BRUCE, D. C. *From patterns to Algebra*. Toronto: Nelson, 2012. ISBN 978-0-17-653996-2.

BELKIN G. S., WILLIG, A. F. *Introduction to Psychology*. New York: 1990.

BETTS, J. *The role of homework in improving school quality*. California: University of California at San Diego, 1997.

BLANTON, M. L. et al. *Developing essential understandings of algebraic thinking, Grades 3-5.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

BLANTON, M. L., KAPUT, J. J. Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th PME International Conference. Dartmouth: University of Massachusetts*, 2004.

BLANTON, M. L., KAPUT, J. J. Functional thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In *International Reviews on Mathematical Education*. vol. 37, no. 1, 34–42, 2011.

BLAŽKOVÁ, R. Matematická gramotnost absolventů základní školy. In *Absolvent základní školy*. Brno: Pedagogická fakulta MU, 2007. s. 140-146. ISBN 978-80-210-4402-9.

BLAŽKOVÁ, R., VAŇUROVÁ, M. Kompetence k řešení problémů – zkušenosti z testování. In *Matematika 5. Specifika matematické edukace v prostředí primární školy*. Olomouc: Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-244-3048-5.

BUDÍNOVÁ, I. *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů*. Brno: Masarykova univerzita, 2010. Vedoucí dizertační práce Josef Trna.

CARLSON, M., OEHRTMAN, M. Key Aspect of Knowing and Learning the Concept of Function. In *The Mathematical Association of America* [online]. Amerika, 2005. Dostupné na WWW: http://maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler.html

CATTEL, R. B. *The Scientific Analysis of Personality*. Harmondswort: Penguin Books, 1970.

COOPER, T., WARREN, E. Introducing Functional Thinking in Year 2. In *Contemporary Issues in Early Childhood*, vol. 5, no. 2, 2005.

DIVÍŠEK, J. a kol. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně*. Praha: SPN, 1989. ISBN 80- 04-2043-33.

DUBINSKY, E., HAREL G. The nature of the proces conception of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Amerika: MAA Notes, 1992.

EACEA P9. *Education, Audiovisual and Culture Executive Agency*. Brusel: Eurydice, 2011.

EISENMANN, P., KOPÁČKOVÁ, A. *Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole*. Praha: JČMF, 2006. ISBN 80-7044-817-2.

EYSENCK, J. H. *Personality*. London: Methuen, 1953.

EYSENCK, M. W., KEANE, M. T. *Kognitivní psychologie.* Praha: Academia, 2008. ISBN 978-80-200-1559-4.

FUCHS, E., HRUBÝ, D. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-169-8.

FUCHS, E., KUBÁT, J. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80–7196–095–0.

FYANS, L. J., MAEHRM L. *Sources of Student Achievement*: Student Motivation, School Context and Family Background. Oregon: Eric, 1987.

GARDNER, H. *Dimenze myšlení: teorie rozmanitých inteligencí*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3.

GARDNER, H. *Multiple intelligences: the theory in practice*. New York: Basic Books, 1993. ISBN 978-0465-024339.

GRECMANOVÁ, H. a kol. *Obecná pedagogika I*. Olomouc: HANEX, 2002. ISBN 80-85783-20-7.

HALIŠKA, J. *Jak testy sestavit a pracovat s nimi*. Brno: Středisko služeb školám, 1999.

HANSEN, M. N. Social and Economic Inequality in the Educational Career: Do the Effects of Social Background Characteristics Decline?. *European Sociological Review*. 1997, vol. 13, no. 3, 305-321.

HARTL, P. *Psychologický slovník*. Praha: Jiří Budka, 1993. ISBN 80-901549-0-5.

HEJNÝ, M. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989.

HOFFKAMP, A. *Enhancing Functional Thinking Using the Computer for Representational Transfer* [online]. Berlín, 2009. Dostupné na WWW: http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~hoffkamp/HoffkampCERME2009end.pdf

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola, matematika.* Praha: Portál, 2001. ISBN 978-80-7367-397-0.

HELUS, Z. *Osobnost a její vývoj*. Praha: Univerzita Karlova, 2009. ISBN 978-80-7290-396-2.

HILL, L. Effort and Reward in Colledge: Replication of Some Puzzling Findings. In *Replication Research in the Social Science*. Newbury Park, CA: Sage, 1991, s. 139-156.

HOMOLA, M. *Základy obecné psychologie*. Olomouc: Univerzita Palackého, 1992. ISBN 80-7067-101-7.

HORÁK, F., CHRÁSKA, M. *Úvod do metodologie pedagogického výzkumu*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.

HORTIN, J. A. Visual Literacy and Visual Thinking. *Proceeding of the 12th Annual Conference on Visual Literacy*. Maryland: University of Maryland, 1980.

CHRÁSKA, M. *Didaktické testy*: *příručka pro učitele a studenty učitelství*. Brno: Paido, 1999. ISBN 80-85931-68-0.

CHRÁSKA, M. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.

ISLER, I. *From Recursive Pattern to Correspondence Rule: Developing Student´s Abilities to Engage in Functional Thinking* [online]. Dostupné na WWW: http://algebra.wceruw.org/documents/PMENA_2012.pdf

JANÍK, T. Kultura školního vyučování a učení: pohledy (z) mezinárodně srovnávacích studií. In *Matematika 5. Specifika matematické edukace v prostředí primární školy*. Olomouc: Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-244-3048-5.

JANVIER, C. *The Interpretation of Complex Cartesian Graphs Representing Situations*. Nottingham: University of Nottingham, 1978.

JEŽKOVÁ, Z. Testovanie znalostí študentov při interpretácii grafov fyzikálních závislostí z elektriny. In *Matematika – fyzika – informatika*. 2000/2001, č. 10, 482 – 488.

KALHOUS, Z., OBST, O. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-571-4.

KAPUT, J. J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum, 2008. ISBN 978-987-1540-07-5.

KLIČKOVÁ, M. *Problémové vyučování ve školní praxi*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989.

KOPÁČKOVÁ, A. Nejen žákovské představy o funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 2002, č. 47, 149-161. ISSN 0032-2423.

KOŠČ, L. *Myslenie a inteligencia*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelství, 1986.

KOŠČ, L. *Patopsychológia učenia a jej neuropsychologické základy.* Bratislava: SPN, 1987.

KOŠČ, L. *Psychológia matematických schopností.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1972.

KREJČÍ, F. *Psychologie*. Praha: Portál, 1925.

KUBÍNOVÁ, M. *Klíč k matematice aneb Přijdu na to sám!*. Praha: Albatros, 2005. ISBN 80-00-01591-9.

KUBÍNOVÁ, M., STEHLÍKOVÁ, N. Závislosti a funkce. In *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, 2007, 257-262. ISBN 978-80-7290-342-9.

KRATOCHVÍL, M. *Jean Piaget – filosof a psycholog: uvedení do genetické epistemologie*. Praha: Triton, 2006. ISBN 80-7254-852-2.

LANGER, S. *Algoritmy v myšlení a možnosti jejich rozvíjení*. Hradec Králové: Kotva, 2004. ISBN 80-902210-3-3.

LAŠEK, J. *Sociálně psychologické klima školních tříd a školy*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001. ISBN 80-7041-088-4.

LINHARTOVÁ, D. *Psychologie pro učitele*. Brno: Mendelova univerzita, 2000. ISBN 80-7157-476-7.

LINHARTOVÁ, D. *Vysokoškolská psychologie*. Brno: Mendelova univerzita, 2008. ISBN 978-80-7375-172-2.

LINHART, J., SEDLÁKOVÁ, M. *Poznávací procesy*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha: 1983.

LUHAN, E. *Didaktika matematiky I*. České Budějovice: Pedagogická fakulta, 1990. ISBN 80-7040-036-6.

LURIJA, A. R., CVETKOVA, L. S. *Nejropsichologičeskij analiz rešenija zada*č. Moskva: APN SSSR, 1966.

MARKWORTH, A. K. *Growing and growing: Promoting Functional thinking with geometric growing patterns.* North Carolina: University of North Carolina, Hill, 2010.

MARTINEZ, M., BRIZUELA M. B. A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*. 2006, vol. 25, no. 4, 285-298. ISSN 0732-3123.

MATELJOVI, M., SVETLÍK, M. A. Contribution to the Development of Functional Thinking Related to Convexity. *The Teaching of Mathematics*. 2011, vol. 27., no. 1., 87-96. ISSN 1451-4966.

McELDOON, L. K., RITTLE-JOHNSON, B. *Assessing Elementary Student´s Functional Thinking Skills: The Case of Function Tables* [online]. Vanderbit: 2010. Dostupné na WWW:http://peabody.vanderbilt.edu/docs/pdf/PRO/ATME_McEldoonandRittle-JohnsonPME-NApaper_2010.pdf

MELICHAR, J. *Rozvoj matematického myšlení*. Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem. 2003. ISBN 80-7044-512-5.

MIKOVÁ, M. Vlastnosti funkcí. In *Učitel matematiky*. roč. 15, č. 2, 2007. ISSN 12-10-9037.

MIKULČÁK, J. *Didaktika matematiky 1*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984.

MŠMT. *Standard základního vzdělávání*. Praha: Fortuna, 1995.

MŠMT. *Standard vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu*. Praha: Fortuna, 1999.

MŠMT. *Vzdělávací program Základní škola*. Praha: Fortuna, 1996.

MÜLLER-PHILIPP, S. *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht*. New York: Waxmann Verlag GmbH, 1994.

NAKONEČNÝ, M. *Psychologie: přehled základních oborů*. Praha: Triton, 2011. ISBN 978-80-7387-443-8.

NAKONEČNÝ, M. *Základy psychologie*. Praha: Academia, 1997. ISBN 80-200-0689-3.

OBST, O. *Didaktika sekundárního vzdělávání*. Olomouc: Pedagogická fakulta, 2006. ISBN 80-244-1360-4.

OECD Programme for International Student Assessment (PISA) 2003. *The PISA International Database* . Dostupné na WWW: http://pisa2003.acer.edu.au/downloads.php

OECD, 2004a. *Problem Solving for Tomorrow's World – First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003*, Paris: OECD Publishing.

PASCH, M. a kol. *Od vzdělávacího programu k vyučovací hodině*. Praha: Portál, 1998. ISBN ISBN 80–7178-127–4.

PAULÍK, K. *Obecná psychologie*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 2002. ISBN 80-7042-201-7.

PAULÍK, K. *Psychologie osobnosti*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 2004. ISBN 80-7042-687-X.

PECINA, P. *Tvořivost ve vzdělávání žáků.* Brno: Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.

PEJSAR, Z. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1*. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta, 1990. ISBN 80-7044-022-8.

PIAGET, J. *Logic and Psychology*. Manchester: Manchester University Press, 1953.

PIAGET, J. *Psychologie inteligence.* Praha: Portál, 2006. ISBN 80-7178-309-9.

PIAGET, J. *Psychologie dítěte.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970.

PIETRASINSKI, Z. *Psychologie správného myšlení*. Praha: Orbis, 1965.

PETROVÁ, I., PLEVOVÁ, A. *Kapitoly z obecné psychologie I.* Olomouc : Univerzita Palackého, 2006. ISBN 80-244-07069-8.

PLHÁKOVÁ, A. *Přístupy ke studiu inteligence*. Olomouc: Vydavatelství UP, 1999. ISBN 80-244-0020-0.

PLHÁKOVÁ, A. *Učebnice obecné psychologie*. Praha: Academia, 2004. ISBN 978-80-200-1499-3.

PRŮCHA, J. a kol. *Pedagogický slovník.* Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-579-2.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: VÚP, 2013.

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Praha: VÚP, 2007. ISBN 978-80-87000-11-3.

RAU, W., DURAN, A. The Academic Ethic and Colledge Grades: Does Hard Work Help Students to 'Make the Grade'?. *Sociology of Education*. 2000, vol. 73, 19-38.

RYAN, A. M., PINTRICH, P. R. „Should I Ask for Help?“ The Role of Motivation and Attitudes in Adolescents´ Help Seeking in Math Class. In *Journal of Educational Psychology.* 1997, Vol. 89, No. 2, p. 329-341.

SIMPSON, R. D., OLIVER, J. S. A summary of major influences on attitude toward and achievement in science among adolescent students. *Science Education*. 1990, vol. 74, 1-18.

SMITH, E. Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. In *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

SPOUSTA, V. *Vizualizace gnostický a komunikační prostředek edukologických fenoménů.* Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4420-3.

STEHLÍKOVÁ, N. *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2007. ISBN 978-80-7290-342-9 .

STERNBERG, R. J. *Intelligence, information processing,and analogical reasoning: The componential analysis of human abilities*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1977.

STRAKOVÁ, J. *Přidaná hodnota studia na víceletých gymnáziích ve světle dostupných datových zdrojů*. Sociologický ústav AV ČR, 2010.

STRAKOVÁ, J. *Vědomosti a dovednosti pro život*. Praha: ÚIV, 2002. ISBN 80-211-0411-2.

STRAKOVÁ, J. Vývoj diferenciace vzdělání a výsledky na úrovni povinného vzdělávání. In *Nerovnosti ve vzdělání. Od měření k řešení*. Praha: Slon, 2010. ISBN:978-80-7419-032-2.

SWAN, M. et al. *Mathematics Matters: Final Report* [online]. Nottingham, 2008. (cit. 1. 3. 2010). Dostupné na WWW: https://www.ncetm.org.uk/public/files/309231/Mathematics+Matters+Final+Report.pdf

SWAN, M. *The Language of Functions and Graphs*. Nottingham: Shell Centre & Joint Matriculation Board, 1985.

ŠIKULOVÁ, R. a kol. Osobnostní a sociální výchova v pregraduální přípravě učitelů. In *Příprava učitelů a aktuální proměny v základním vzdělávání.* České Budějovice: PedF JU, 2005. ISBN 80-7040-789-1.

ŠUPÍKOVÁ, K. *Matematická gramotnost budoucích učitelů matematiky na počátku studia.* Olomouc: Pedagogická fakulta, 2012. Vedoucí dizertační práce Bohumil Novák.

ŠVEC, V. *Klíčové dovednosti ve vyučování a výcviku*. Brno: Masarykova univerzita, 1998. ISB 80-210-1937-9.

ŠVINGALOVÁ, D. *Základy psychologie*. Liberec: Technická univerzita, 1991. ISBN 80-7083-317-3.

TAPLIN, M. *Teaching Values Through A Problem Solving Approach to Mathematics* [online]. (cit. 8. 10. 2010). Dostupné na WWW: http://www.mathgoodies.com/articles/teaching_values.html.

THURSTONE, L. L. *Primary Mental Abilities*. Chicago: University of Chicago Press, 1938.

TICHÁ, M., KOMAN, M. Jak s matematikou na obecné škole? In *Nové přístupy k vyučování na 1. stupni ZŠ ze vzdělávacího programu INICIATIVA.* Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 1995.

TRNA, J. *Diagnostika dovedností žáků ve výuce fyziky*. Brno: MU, 1998. Vedoucí habilitační práce

VÁGNEROVÁ, M. *Vývojová psychologie*. Praha: Portál, 2000. ISBN 978-80-246-2209-5.

VOLLRATH, J. Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*. 1989, vol. 10, no. 1, 3-37.

VYGOTSKIJ, S. L. *Myšlení a řeč*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970.

VYGOTSKIJ, S. L. *Psychologie myšlení a řeči*. Praha: Portál, 2004. ISBN 80-7178-943-7.

VYGOTSKIJ, L. S. *Mind in Society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1956.

WATSON, J. B. *Psychology from the standpoint of a behaviorist*. Philadelphia: Lippincott, 1919.

WENDT, D. *Allgemeine psychologie*. Stuttgart: Eine Einfuhrung, 1989.

10 Přehled odborných aktivit a publikačních činností

SALVETOVÁ, L. K problematice funkčního myšlení žáků a studentů. In *Sapere Aude 2011 Evropské a české vzdělávání. Recenzovaný sborník příspěvků vědecké konference s mezinárodní účastí.* 1. vyd. Hradec Králové: Magnanimitas, 2011. s. 246 - 250. ISBN 978-80-904877-2-7.

SALVETOVÁ, L. Problematika funkčního myšlení studentů učitelství matematiky. In *XXIX. mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu. Sborník abstraktů a elektronických verzí recenzovaných příspěvků na CD-ROMu.* 1. vyd. Brno: Univerzita obrany, 2011. ISBN 978-80-7231-779-0.

SALVETOVÁ, L. Žáci s dyskalkulií a jejich funkční myšlení. In *Evropské pedagogické fórum 2011*. 1. vyd. Hradec Králové: Magnanimitas, 2011. ISBN 978-80-904877-6-5.

SALVETOVÁ, L. O funkčním myšlení studentů. In *Aktuální problémy pedagogiky ve výzkumech studentů doktorských studijních programů IX.* Univerzita Palackého v Olomouci, 2011. ISBN 978-80-87533-03-1.

SALVETOVÁ, L. „Využití didaktických testů v matematice“. In *MAKOS 2010. Sborník materiálů z podzimní péče o talenty.* Malá Skála u Turnova, 2010. ISBN 978-80-7290-508-9.

SALVETOVÁ, L. K funkčnímu myšlení žáků a studentů. In *Aktuální problémy pedagogiky ve výzkumech studentů doktorských studijních programů VIII.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2815-4.

SALVETOVÁ, L. K aspektům funkčního myšlení. In *Acta Univerzitatis Palackianal Olomoucensis Facultas Paedagogica 2012*. Olomouc, 2012. ISBN 978-80-244-3048-5.

SALVETOVÁ, L., LAITOCHOVÁ, J. A contribution to functional thinking. In *Česko-Poľsko-Slovenskej matematickej konferencie.* Spišská kapitula, 2012. ISBN 978-80-8084-955-9.

SALVETOVÁ, L. *Matematiko, jsi to ty?*

Recenze publikace PAENZA, A. *Matematiko, jsi to ty?* Zlín: Kniha Zlín, 2010. 215 s. ISBN 978-80-87162-42-2. *Sborník MAKOS* (přijato k publikování)

SALVETOVÁ, L. *Matematika a porozumění světu.*

Recenze publikace KUŘINA, F. a kolektiv. *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia, 2009. 332 s. ISBN 978-80-200-1743-7. *Sborník MAKOS* (přijato k publikování)

Další odborné aktivity

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2011 – projekt „Heuristika ve vyučování matematice“, reg. č. PdF_2011_032. Hlavní řešitelka: Mgr. Alena Šťastná

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2011 – projekt „Učební pomůcka ve vyučování matematice“, reg. č. PdF_2011_029. Hlavní řešitelka: Mgr. Magdalena Janků

Hlavní řešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2012 – projekt „Úroveň funkčního myšlení studentů učitelství matematiky 2. stupně základní školy“, reg. č. PdF_2012_020.

Účast v projektu FRVŠ „Inovace předmětu Ekonomická a finanční matematika“ reg. č. 274/2012/F5/a. Hlavní řešitel: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Člen komise katedrálního kola Studentské vědecké odborné a umělecké činnosti 2012 na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci – katedra matematiky.

Pracovní cesty – Londýn (listopad 2012)

11 Seznam tabulek

12 Seznam grafů

13 Seznam obrázků

14 Seznam příloh

Příloha č. 1 Zadání úloh v didaktickém testu pilotážního výzkumného šetření

Úloha č. 1

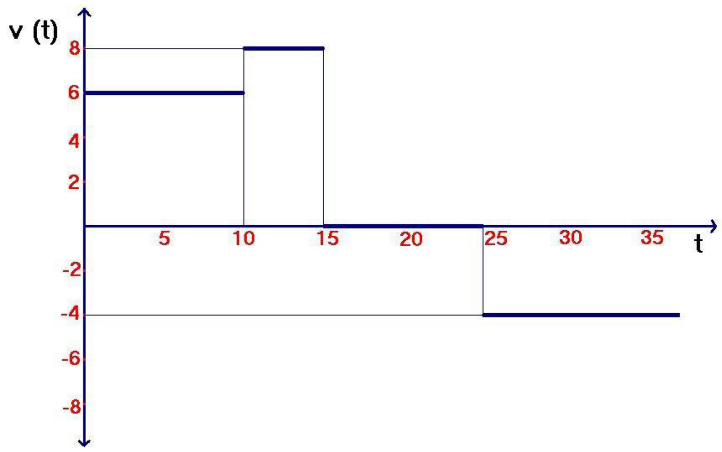
Zadání: Jsou dány funkce $y = \frac{10}{x}$ a $y = \frac{6}{x}$. Načrtněte grafy těchto funkcí a zjistěte graficky i početně, zda se tyto grafy protínají.

Úloha č. 2

Zadání: Napětí v elektrickém obvodu rovnoměrně klesá s časem t. Na počátku pokusu bylo toto napětí $U_1 = 12V$, na konci pokusu, který trval 8 s, bylo napětí $U_2 = 6{,}4V$. Vyjádřete tuto závislost napětí na čase rovnicí a znázorněte závislost graficky.

Úloha č. 3

Zadání: Interpretujte závislost popsanou obrázkem grafu funkce na obr. 6. Popište děj, který graf vystihuje a určete, kolik bylo vody ve vaně maximálně.



Úloha č. 4

Zadání: Nakresli grafy následujících funkcí:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = -3x + 2$

Úloha č. 5

<u>*Zadání:*</u> V jakém zorném úhlu se jeví předmět $70m$ dlouhý pozorovateli, který je od jednoho jeho konce vzdálen $50m$ a od druhého konce $80m$?

Úloha č. 6

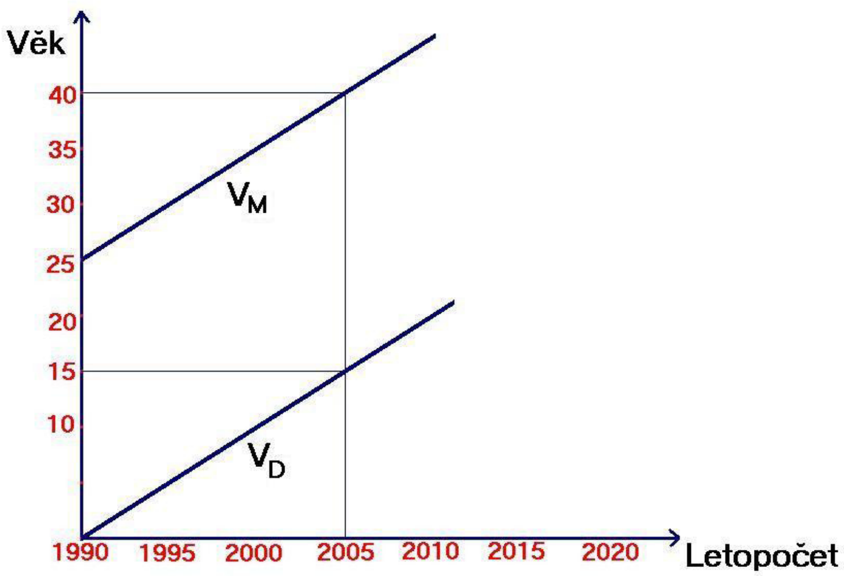
<u>*Zadání:*</u> Určete, kolik je $\sin 185^\circ$, jestliže $\sin 175^\circ$ je přibližně 0,087.

Úloha č. 7

<u>*Zadání:*</u> Automobil jede průměrnou rychlostí $80 km/h$. Napište vzorec pro výpočet ujeté dráhy auta v závislosti na čase a sestrojte graf závislosti ujeté dráhy *s* na čase *t*.

Úloha č. 8

<u>*Zadání:*</u> Graf vyjadřuje závislost věku na letopočtu. Jaký je rozdíl Tvého a maminčina věku? Mění se v závislosti na čase?



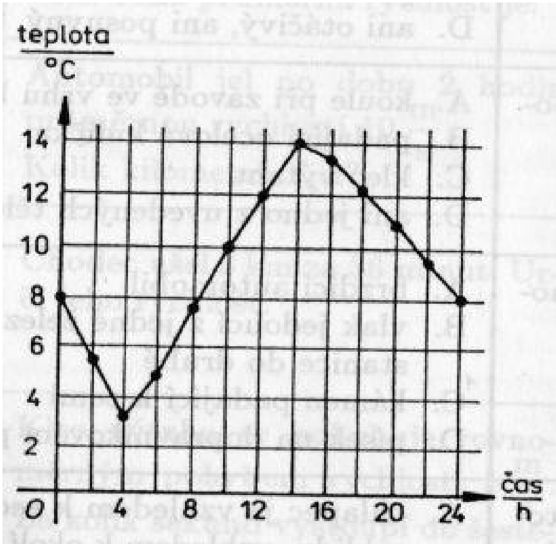
Příloha č. 2 Zadání testových úloh obsažených v didaktickém testu určeného pro předvýzkumné šetření

Úloha č. 1

<u>Zadání:</u> Graf znázorňuje závislost teploty na čase. Interpretujte závislost popsanou grafem.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………



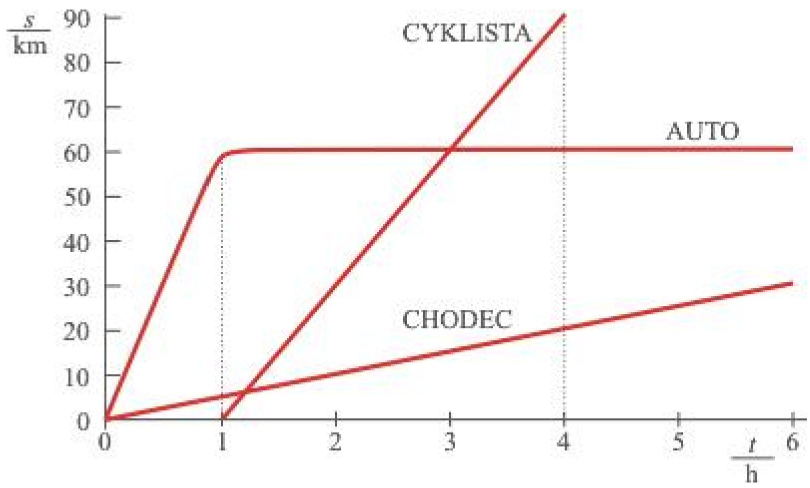
Úloha č. 2

<u>Zadání:</u> V tabulce jsou uvedeny teploty naměřené v různých hodinách jednoho dne. Převeďte funkční závislost vyjádřenou tabulkou do grafu.

Čas *(h)*	06:00	09:00	12:00	15:00	18:00
Teplota *(°C)*	12	17	14	18	15

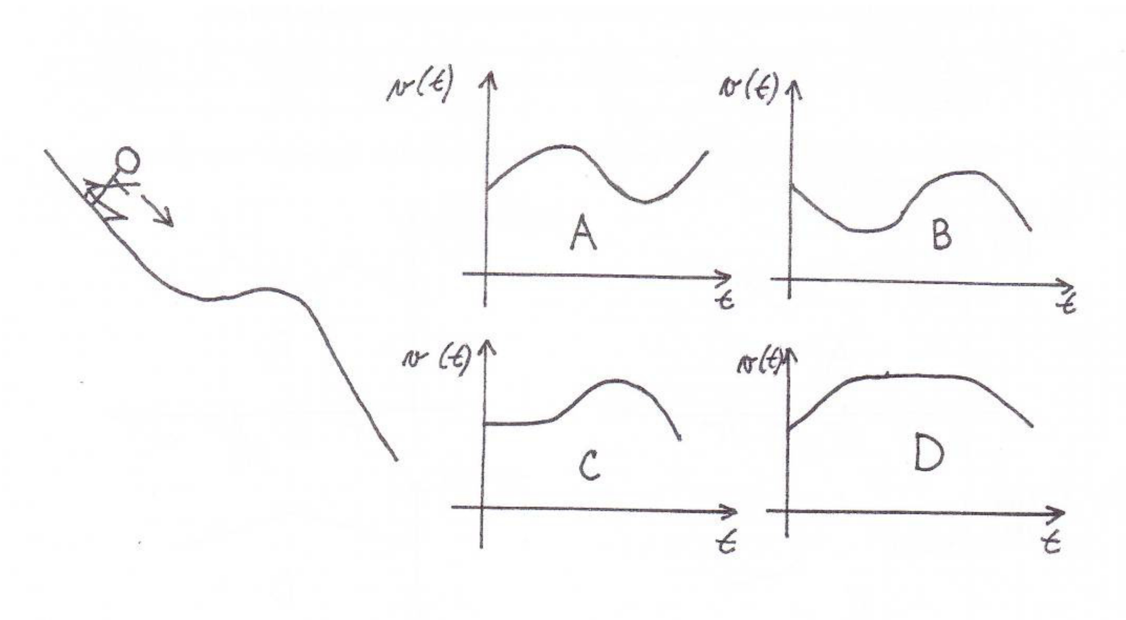
Úloha č. 3

<u>Zadání:</u> Auto, chodec a cyklista se pohybují po stejné silnici. Na obrázku je graf závislosti jejich drah na čase. Určete, který z nich má během prvních tří hodin pohybu nejvyšší průměrnou rychlost.



Úloha č. 4

<u>Zadání:</u> Na obrázku vlevo je zachycen lyžař, jak sjíždí svah. Grafy vyjadřují závislost rychlosti lyžaře *v(t)* na čase *t*. Určete, který z grafů odpovídá dané závislosti.

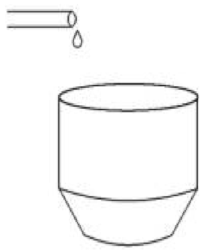


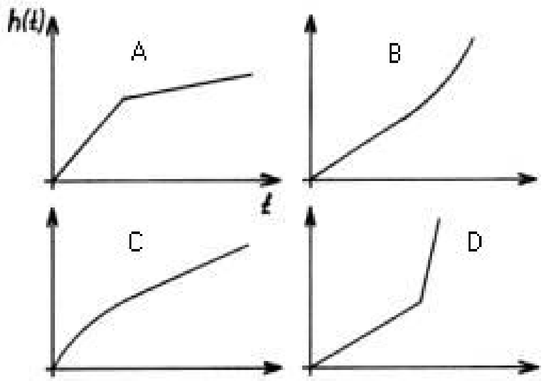
Úloha č. 5

<u>Zadání:</u> Graf znázorňuje vlhkost vzduchu v místnosti naměřenou během odpoledne. Popište, jak se měnila vlhkost vzduchu od 6 hodin do 12 hodin.

Úloha č. 6

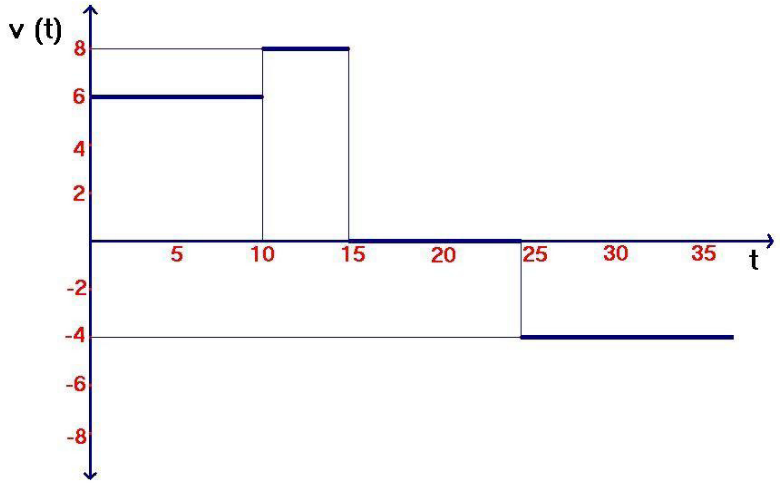
<u>Zadání:</u> Prázdný dřevěný sud se v čase $t = 0$ začne plnit stálým přítokem vody. Zakroužkujte, který graf vyjadřuje závislost výšky hladiny *h(t)* vody v sudu tvaru uvedeného níže na čase *t*.





Úloha č. 7

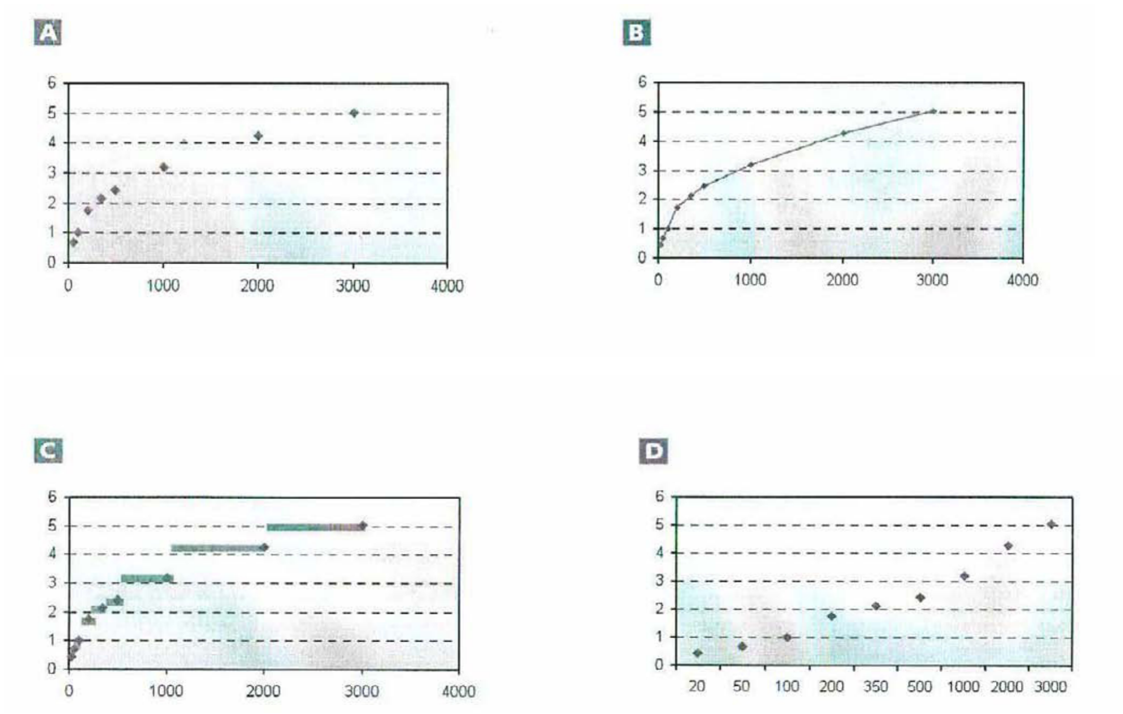
<u>*Zadání:*</u> Graf funkce na obrázku vyjadřuje závislost rychlosti přítoku vody $v(t)$ do vany na čase t. V čase $t = 0$ byla vana prázdná. Čas je uveden v minutách, rychlost přítoku v litrech za minutu. Jak se změnil objem vody ve vaně mezi 10 až 15 minutou?



Úloha č. 8

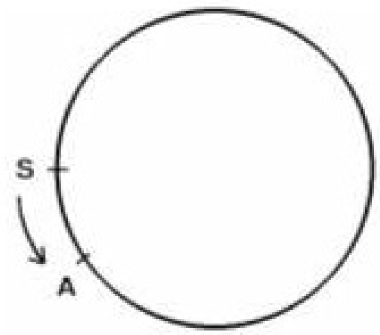
<u>*Zadání:*</u> Poštovní poplatky na Zélandu jsou odvozené od hmotnosti zásilky (při zaokrouhlení na gramy), jak je zachyceno v následující tabulce. Který z následujících grafů nejlépe zobrazuje poštovní poplatky na Zélandu? Graf zachycuje závislost poplatků v zedech na hmotnosti zásilky v gramech. Zakroužkujte správnou odpověď.

Poštovní poplatky na Zélandu jsou odvozené od hmotnosti zásilky (při zaokrouhlení na gramy)	Poplatek
Do 20 g	0,46 zedu
21 g – 50 g	0,69 zedu
51 g – 100 g	1,02 zedu
101 g – 200 g	1,75 zedu
201 g – 350 g	2,13 zedu
351 g – 500 g	2,44 zedu
501 g – 1 000 g	3,20 zedu
1 001 g – 2 000 g	4,27 zedu
2 001 g – 3 000 g	5,03 zedu



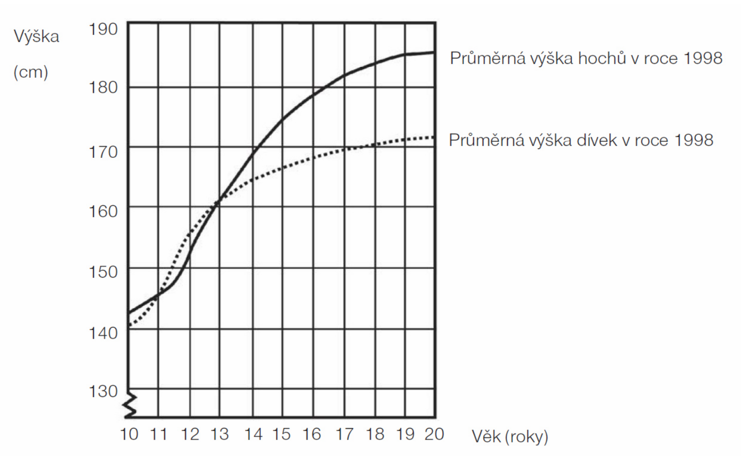
Úloha č. 9

Zadání: Na obrázku je znázorněn závodní okruh, který má tvar kružnice. Start je v bodě S. Nakreslete graf závislosti rychlosti vozu na čase při průjezdu prvním kolem.



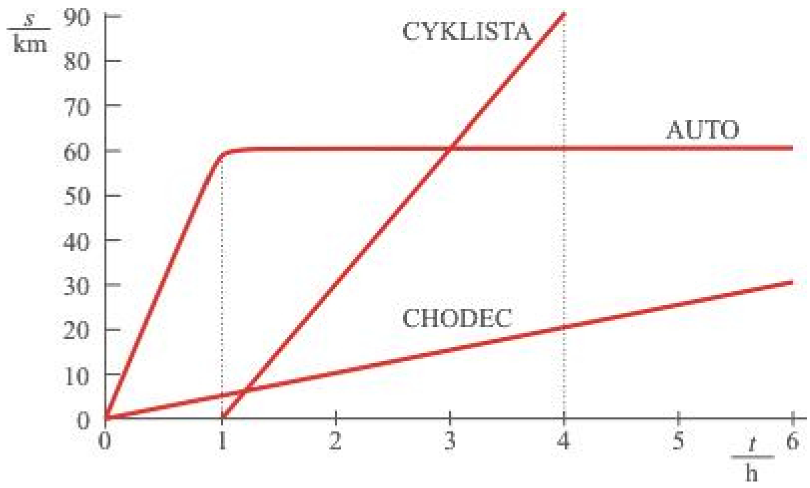
Úloha č. 10

Zadání: V grafu je zaznamenána průměrná výška mladých hochů a dívek v Nizozemsku v roce 1998. Urči pomocí grafu, ve kterém věkovém období jsou dívky v průměru vyšší než stejně staří chlapci.



Úloha č. 11

<u>*Zadání:*</u> Auto, chodec a cyklista se pohybují po stejné silnici. Na obrázku je graf závislosti jejich drah na čase. Určete, po jaké době se potkal cyklista s autem.



Úloha č. 12

<u>*Zadání:*</u> Vzdálenost mezi dvěma městy je $120\,km$. V jakých časech překonají tuto vzdálenost dopravní prostředky, které se pohybují průměrnými rychlostmi uvedenými v tabulce? Doplňte tabulku a závislost průměrné rychlosti dopravního prostředku (v rozmezí $10\,km/h - 120\,km/h$) na čase vyjádřete grafem.

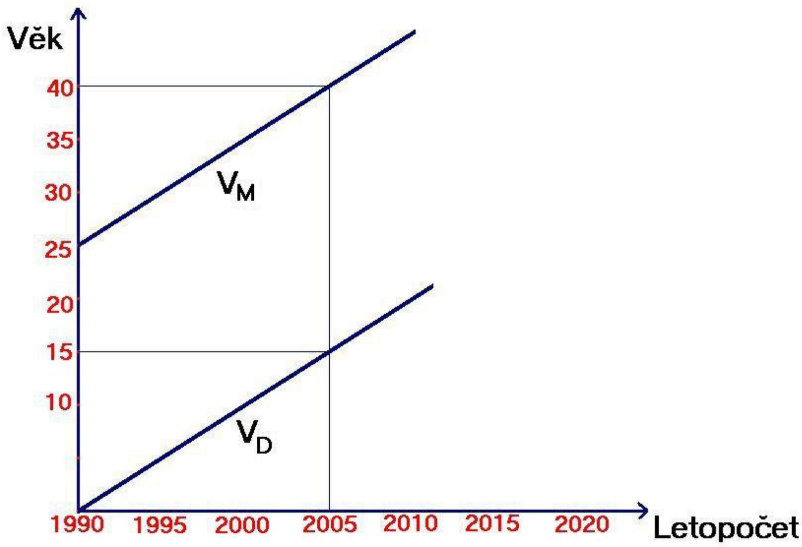
Rychlost *(km/h)*	10	30	60	100	120
Čas *(h)*					

Úloha č. 13

<u>Zadání:</u> Poskytovatel elektrické energie dodává do domácností energii za následujících podmínek. V každém měsíci se platí paušální platba 100 *Kč* a pak se platí za prvních 200 *kWh* 3 *Kč* za jednu odebranou *kWh*. Přesáhne-li uživatel 200 *kWh*, počítá mu poskytovatel energie 4 *Kč* za každou jednu odebranou *kWh* přesahující 200 *kWh*, přesáhne-li spotřeba 300 *kWh*, počítá se 6 *Kč* za každou jednu odebranou *kWh* nad limit 300 *kWh*. Sestrojte graf závislosti ceny elektrické energie v závislosti na jejím odebraném množství.

Úloha č. 14

<u>Zadání:</u> Graf vyjadřuje závislost věku na letopočtu. Zkratka V_M představuje věk matky, V_D je zkratka pro věk dítěte. Nakresli graf závislosti rozdílu věku dítěte a maminčina věku na letopočtu.



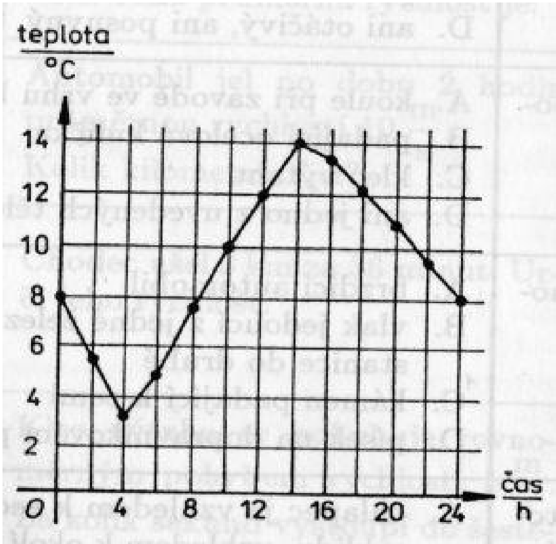
Příloha č. 3 Zadání testových úloh nestandardizovaného didaktického testu výzkumu

Úloha č. 1

<u>Zadání:</u> Graf znázorňuje závislost teploty na čase. Interpretujte závislost popsanou grafem.

…………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………….



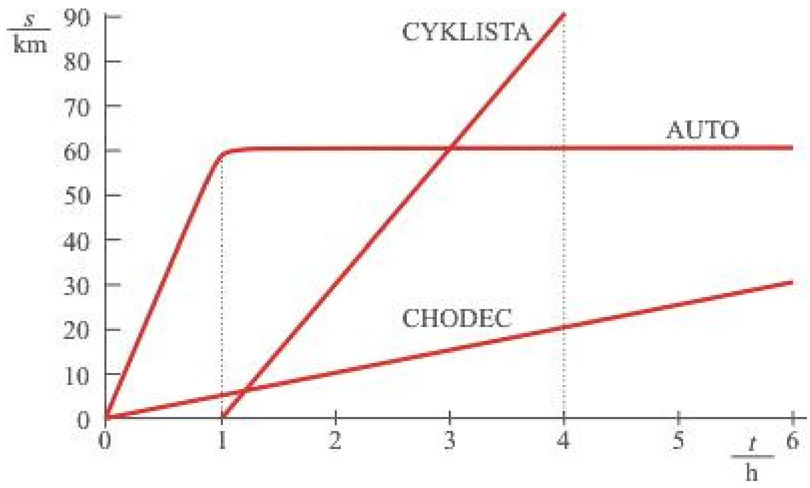
Úloha č. 2

<u>Zadání:</u> V tabulce jsou uvedeny teploty naměřené v různých hodinách jednoho dne. Převeďte funkční závislost vyjádřenou tabulkou do grafu.

Čas *(h)*	06:00	09:00	12:00	15:00	18:00
Teplota *(°C)*	12	17	14	18	15

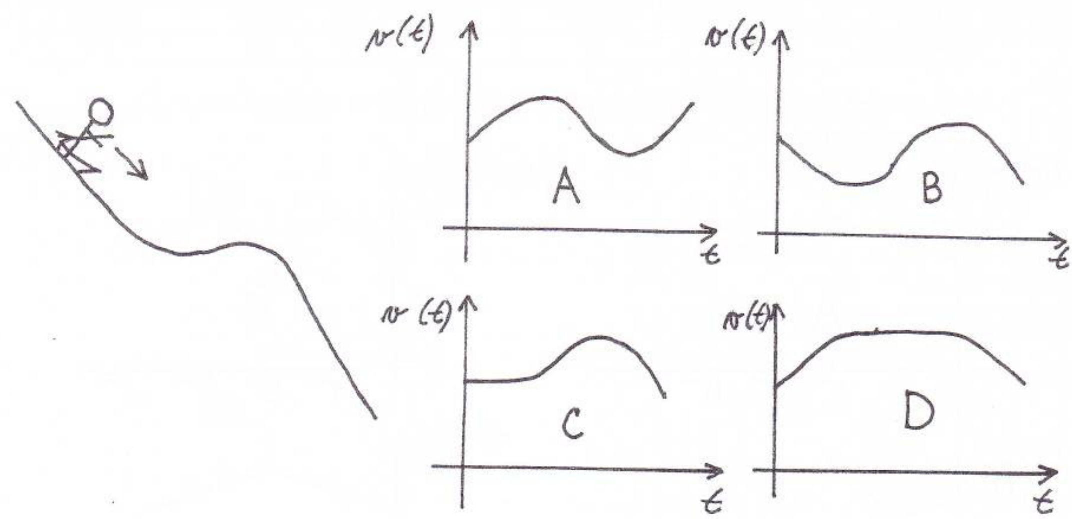
Úloha č. 3

<u>Zadání:</u> Auto, chodec a cyklista se pohybují po stejné silnici. Na obrázku je graf závislosti jejich drah na čase. Určete, který z nich má během prvních tří hodin pohybu nejvyšší průměrnou rychlost.



Úloha č. 4

<u>*Zadání:*</u> Na obrázku vlevo je zachycen lyžař, jak sjíždí svah. Grafy vyjadřují závislost rychlosti lyžaře *v(t)* na čase *t*. Určete, který z grafů odpovídá dané závislosti.

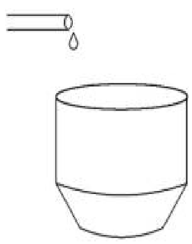


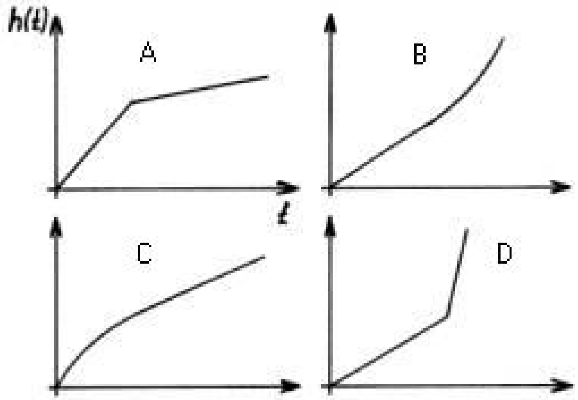
Úloha č. 5

Zadání: Graf znázorňuje vlhkost vzduchu v místnosti naměřenou během odpoledne. Popište, jak se měnila vlhkost vzduchu od 6 hodin do 12 hodin.

Úloha č. 6

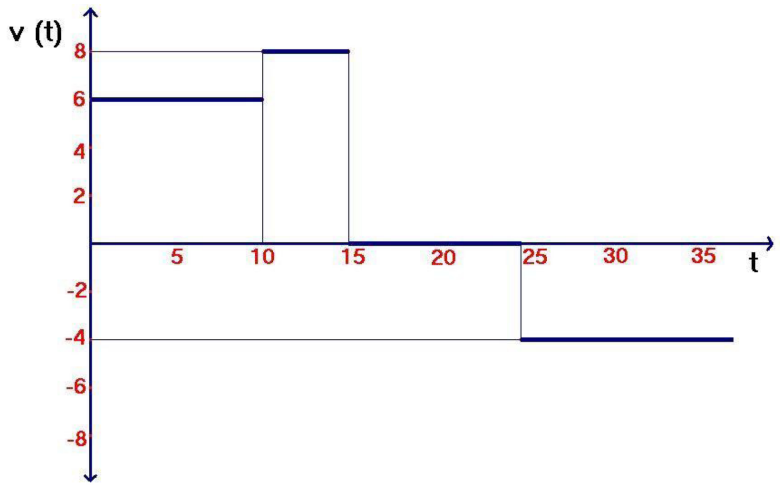
Zadání: Prázdný dřevěný sud se v čase $t = 0$ začne plnit stálým přítokem vody. Zakroužkujte, který graf vyjadřuje závislost výšky hladiny *h(t)* vody v sudu tvaru uvedeného níže na čase *t*.





Úloha č. 7

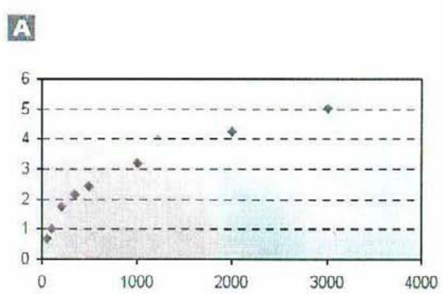
Zadání: Graf funkce na obrázku vyjadřuje závislost rychlosti přítoku vody $v(t)$ do vany na čase t. V čase $t = 0$ byla vana prázdná. Čas je uveden v minutách, rychlost přítoku v litrech za minutu. Jak se změnil objem vody ve vaně mezi 10 až 15 minutou?

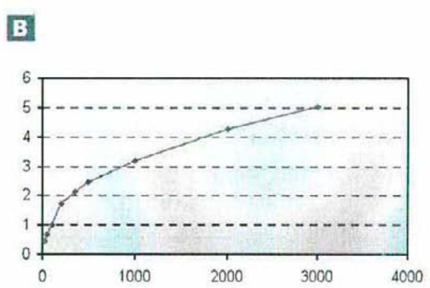


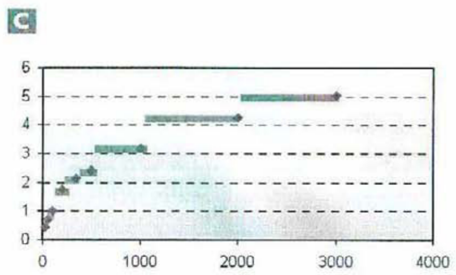
Úloha č. 8

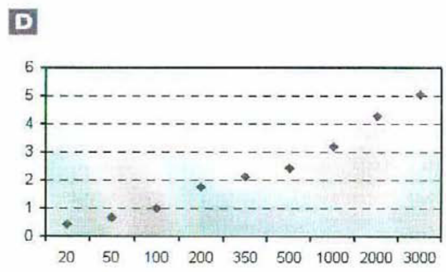
<u>*Zadání:*</u> Poštovní poplatky na Zélandu jsou odvozené od hmotnosti zásilky (při zaokrouhlení na gramy), jak je zachyceno v následující tabulce. Který z následujících grafů nejlépe zobrazuje poštovní poplatky na Zélandu? Graf zachycuje závislost poplatků v zedech na hmotnosti zásilky v gramech. Zakroužkujte správnou odpověď.

Poštovní poplatky na Zélandu jsou odvozené od hmotnosti zásilky (při zaokrouhlení na gramy)	Poplatek
Do 20 g	0,46 zedu
21 g – 50 g	0,69 zedu
51 g – 100 g	1,02 zedu
101 g – 200 g	1,75 zedu
201 g – 350 g	2,13 zedu
351 g – 500 g	2,44 zedu
501 g – 1 000 g	3,20 zedu
1 001 g – 2 000 g	4,27 zedu
2 001 g – 3 000 g	5,03 zedu







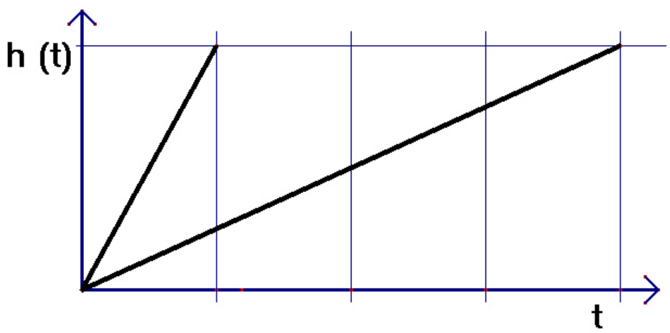


Úloha č. 9

<u>*Zadání:*</u> Znázorni graf závislosti ceny žvýkaček na jejich množství, jestliže jedna žvýkačka stojí $4\,Kč$.

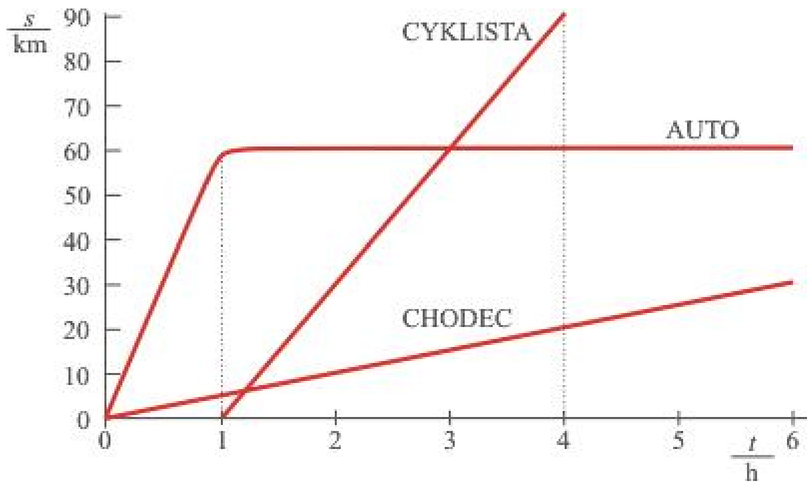
Úloha č. 10

<u>*Zadání:*</u> Grafy funkcí vyjadřující závislost výšky hladiny *h(t)* na čase *t* pro dva stejně vysoké válce. První válec (v_1) má poloměr *r*, druhý válec (v_2) má poloměr *2r*. Vyznač, který z grafů odpovídá závislost výšky hladiny *h*(*t*) na čase *t* válce v_1 a v_2.



Úloha č. 11

<u>*Zadání:*</u> Auto, chodec a cyklista se pohybují po stejné silnici. Na obrázku je graf závislosti jejich drah na čase. Určete po jaké době se potkal cyklista s autem.



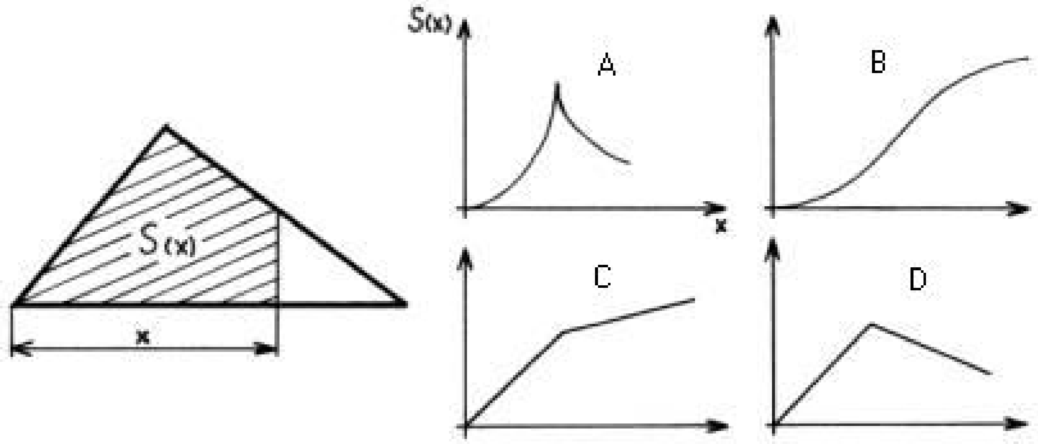
Úloha č. 12

Zadání: Vzdálenost mezi dvěma městy je $120\,km$. V jakých časech překonají tuto vzdálenost dopravní prostředky, které se pohybují průměrnými rychlostmi uvedenými v tabulce? Doplňte tabulku a závislost průměrné rychlosti dopravního prostředku (v rozmezí $10\,km/h - 120\,km/h$) na čase vyjádřete grafem.

Rychlost *(km/h)*	10	30	60	100	120
Čas *(h)*					

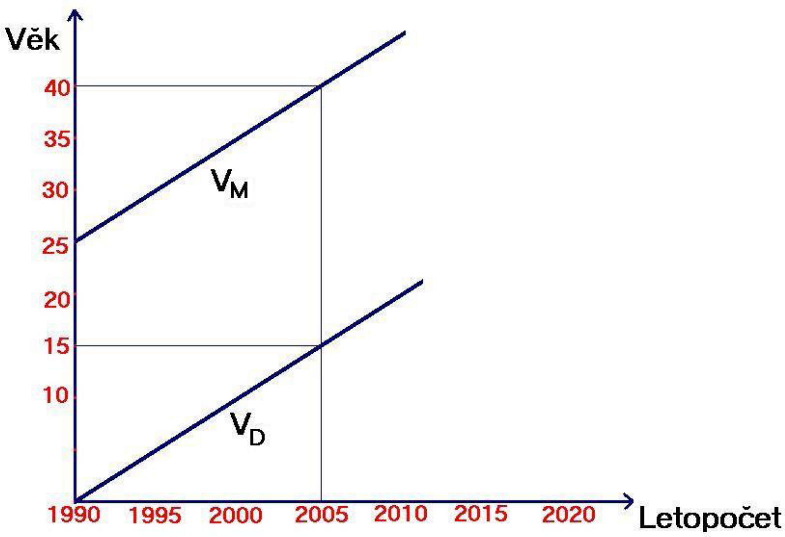
Úloha č. 13

Zadání: Grafy vpravo vyjadřují závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku $S(x)$ na vzdálenosti x. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



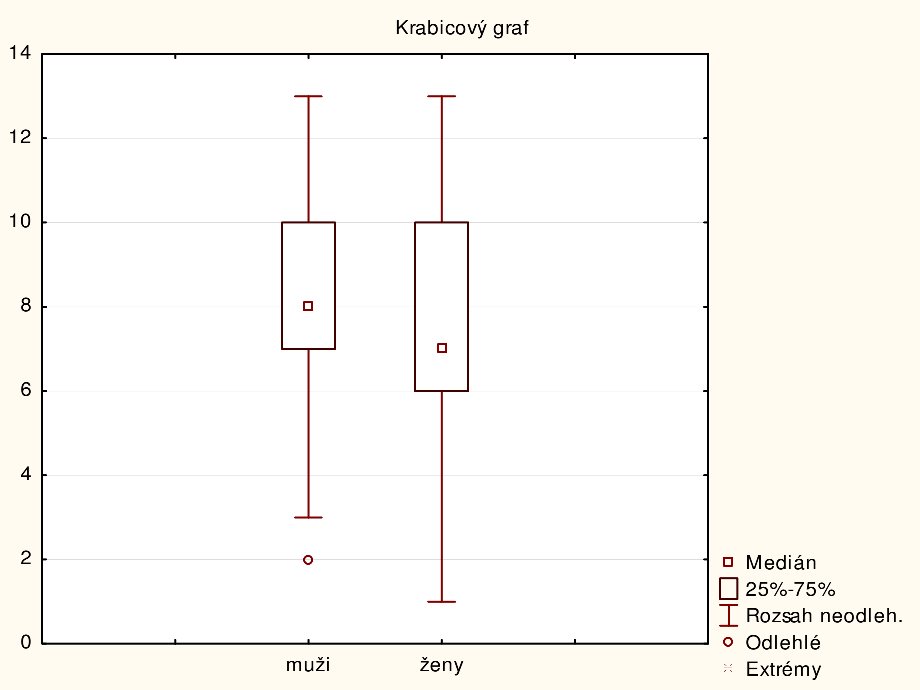
Úloha č. 14

<u>*Zadání:*</u> Graf vyjadřuje závislost věku na letopočtu. Zkratka V_M představuje věk matky, V_D je zkratka pro věk dítěte. Nakresli graf závislosti rozdílu věku dítěte a maminčina věku na letopočtu.



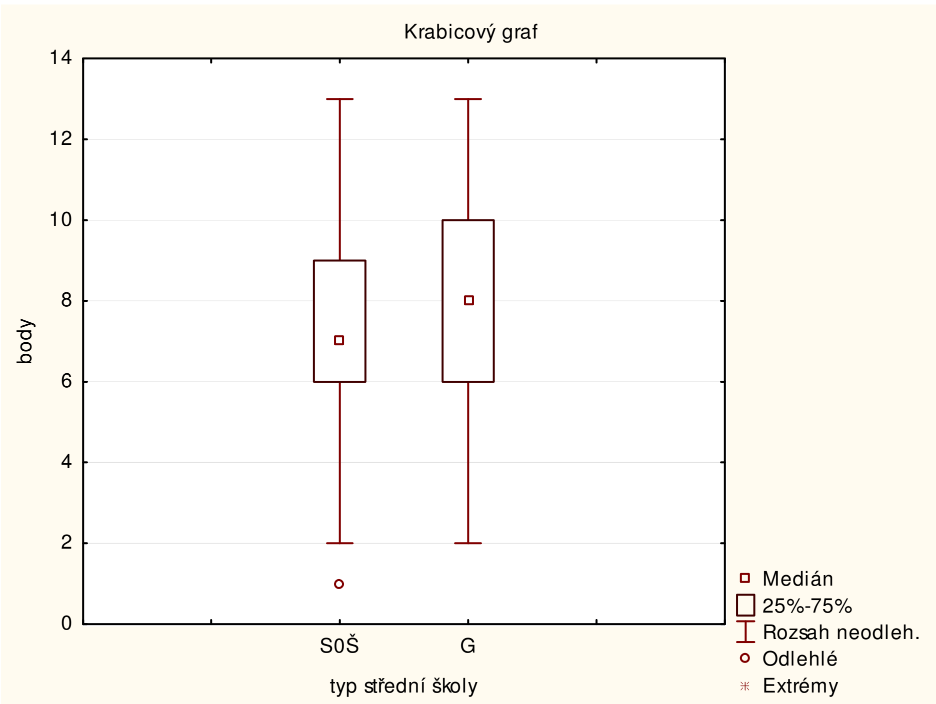
Příloha č. 4 Výsledkové tabulky

Pohlaví					
muži	Počet bodů	četnost	ženy	počet bodů	Četnost
	0	0		0	0
	1	0		1	1
	2	1		2	2
	3	4		3	7
	4	6		4	13
	5	6		5	21
	6	9		6	21
	7	13		7	33
	8	21		8	22
	9	18		9	18
	10	16		10	16
	11	9		11	17
	12	8		12	11
	13	7		13	5
	14	0		14	0



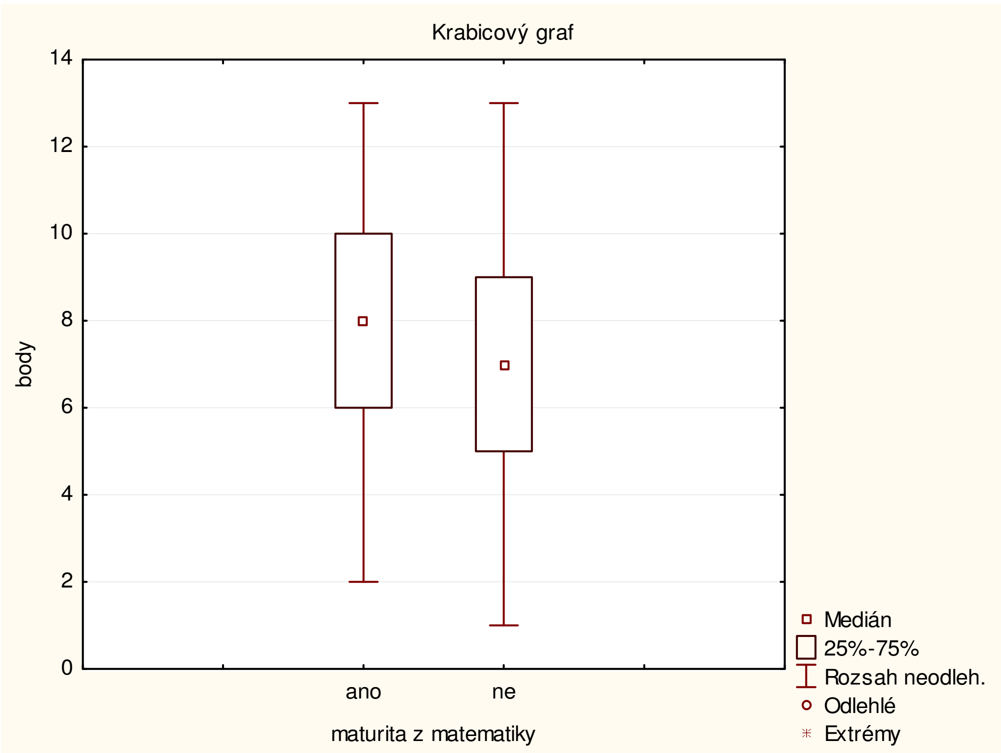
Graf č. 17: Krabicový graf – pohlaví

Typ střední školy					
Gymnázium	počet bodů	četnost	SOŠ a SOU	počet bodů	Četnost
	0	0		0	0
	1	0		1	1
	2	1		2	2
	3	3		3	8
	4	8		4	11
	5	12		5	15
	6	13		6	17
	7	16		7	30
	8	22		8	21
	9	19		9	17
	10	17		10	15
	11	16		11	10
	12	11		12	8
	13	7		13	5
	14	0		14	0



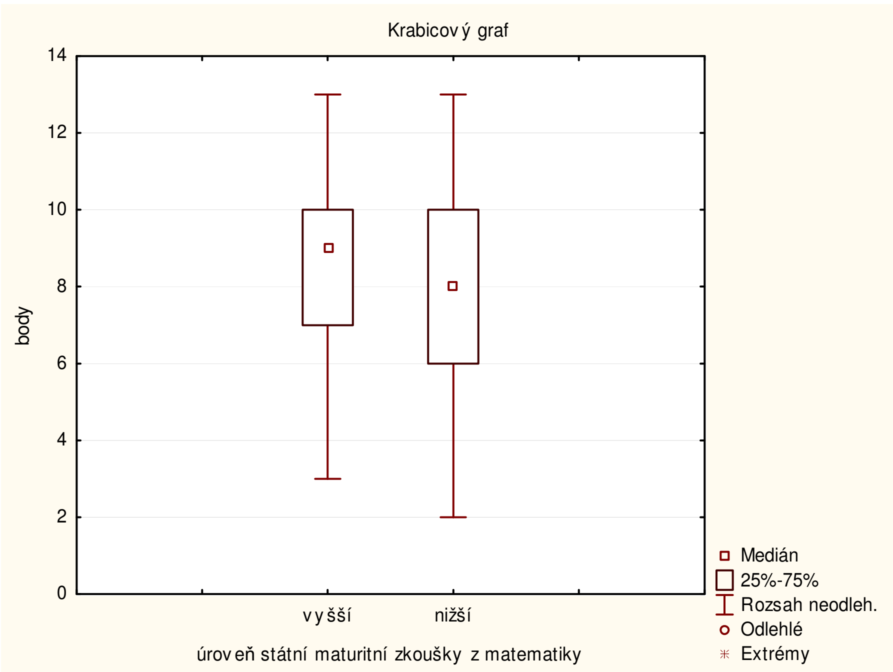
Graf č. 18: Krabicový graf – typ střední školy

Maturita z matematiky					
Ano	počet bodů	četnost	Ne	počet bodů	Četnost
	0	0		0	0
	1	0		1	1
	2	1		2	2
	3	8		3	3
	4	14		4	5
	5	16		5	11
	6	17		6	13
	7	31		7	15
	8	29		8	14
	9	28		9	8
	10	26		10	6
	11	22		11	4
	12	16		12	3
	13	10		13	2
	14	0		14	0



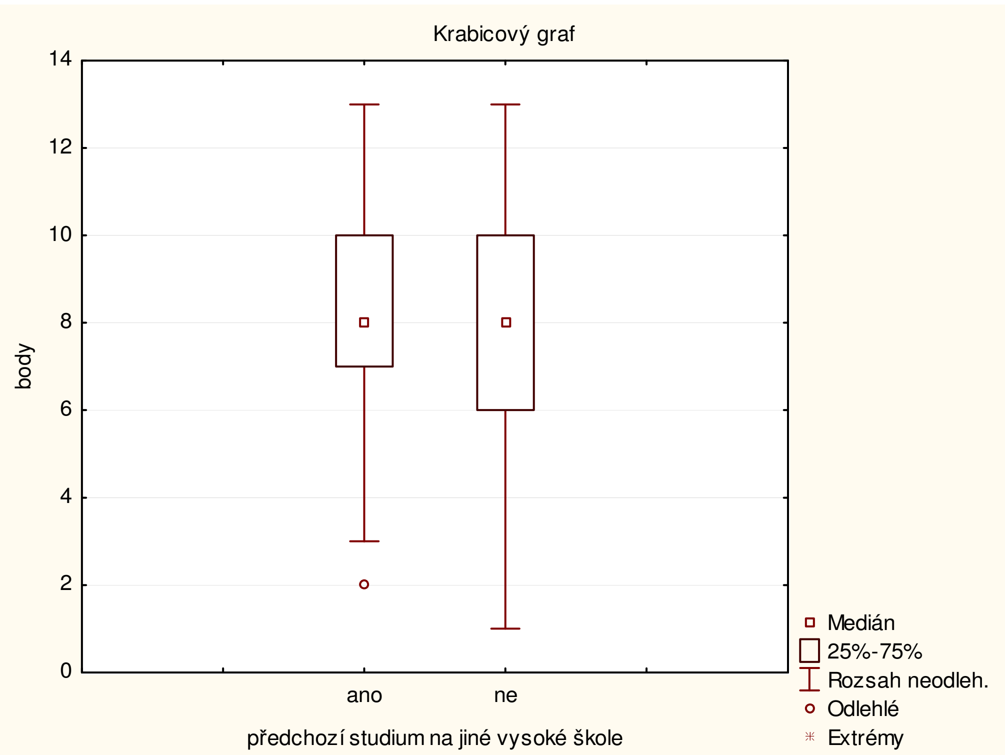
Graf č. 19: Krabicový graf – maturita z matematiky

Úroveň státní maturity z matematiky					
Vyšší	**počet bodů**	**četnost**	**Nižší**	**počet bodů**	**Četnost**
	0	0		0	0
	1	0		1	0
	2	0		2	1
	3	1		3	6
	4	2		4	10
	5	3		5	12
	6	5		6	11
	7	8		7	22
	8	13		8	14
	9	11		9	14
	10	8		10	13
	11	6		11	12
	12	4		12	8
	13	4		13	3
	14	0		14	0



Graf č. 20: Krabicový graf – úroveň státní maturitní zkoušky z matematiky

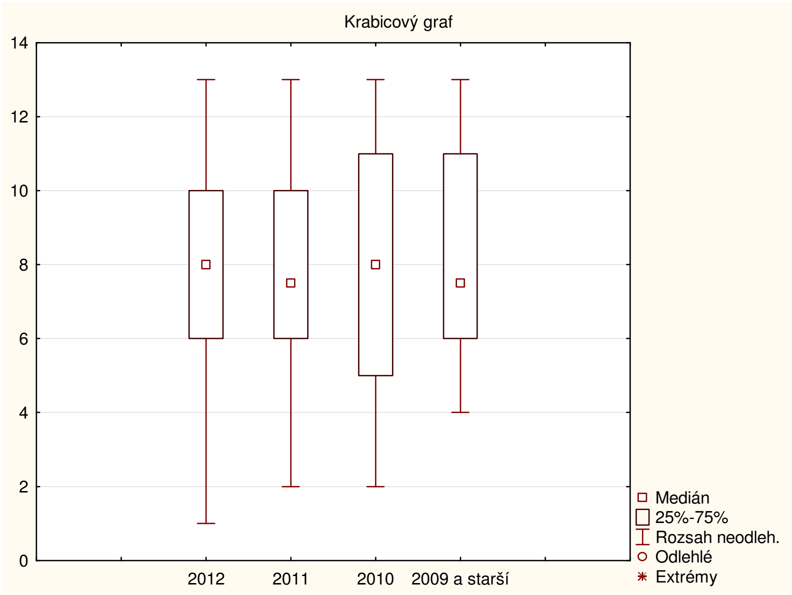
Předchozí studium na jiné vysoké škole					
Ano	**počet bodů**	**četnost**	**ne**	**počet bodů**	**Četnost**
	0	0		0	0
	1	0		1	1
	2	1		2	2
	3	1		3	10
	4	2		4	17
	5	4		5	23
	6	4		6	26
	7	7		7	39
	8	13		8	30
	9	7		9	29
	10	6		10	26
	11	4		11	22
	12	2		12	17
	13	2		13	10
	14	0		14	0



Graf č. 21: Krabicový graf – předchozí studium na jiné vysoké škole

Rok maturity					
2009 a starší	počet bodů	četnost	2010	počet bodů	Četnost
	0	0		0	0
	1	0		1	0
	2	0		2	1
	3	0		3	0
	4	3		4	3
	5	1		5	3
	6	2		6	1
	7	3		7	4
	8	1		8	1
	9	1		9	2
	10	2		10	3
	11	1		11	2
	12	3		12	3
	13	1		13	2
	14	0		14	0

Rok maturity					
2011	počet bodů	četnost	2012	počet bodů	Četnost
	0	0		0	0
	1	0		1	1
	2	1		2	1
	3	0		3	11
	4	1		4	14
	5	4		5	19
	6	8		6	19
	7	5		7	34
	8	4		8	37
	9	3		9	31
	10	3		10	24
	11	3		11	19
	12	4		12	9
	13	2		13	5
	14	0		14	0



Graf č. 22: Krabicový graf – rok maturitní zkoušky

Příloha č. 5 Tabulky normality rozdělení četností – muži

Počet bodů	Četnost P	Hranice intervalů	u	Φ	p	Četnost O	$\frac{(P-O)^2}{O}$
				0,0000			
1	0				0,0040	0,4720	0,4720
		1,5	-2,66	0,0039			
2	1				0,0077	0,9086	0,0092
		2,5	-2,27	0,0116			
3	4				0,0178	2,1004	1,7180
		3,5	-1,89	0,0294			
4	6				0,0394	4,6492	0,3925
		4,5	-1,50	0,0688			
5	6				0,0647	7,6346	0,3500
		5,5	-1,11	0,1335			
6	9				0,0992	11,7056	0,6254
		6,5	-0,73	0,2327			
7	13				0,1342	15,8356	0,5078
		7,5	-0,34	0,3669			
8	21				0,1530	18,0540	0,4807
		8,5	0,05	0,5199			
9	18				0,1465	17,2870	0,0294
		9,5	0,43	0,6664			
10	16				0,1275	15,0450	0,0606
		10,5	0,82	0,7939			
11	9				0,0930	10,9740	0,3551
		11,5	1,21	0,8869			
12	8				0,0572	6,7496	0,2316
		12,5	1,59	0,9441			
13	7				0,0320	3,7760	2,7527
		13,5	1,98	0,9761			
14	0				0,0239	2,8202	2,8202
				1,000			
	Σ 118						**Σ 10,805**

ženy

Počet bodů	Četnost P	Hranice intervalů	u	Φ	p	Četnost O	$\frac{(P - O)^2}{O}$
				0,0000			
1	1				0,0110	2,0570	0,5431
		1,5	-2,29	0,0110			
2	2				0,0164	3,0668	0,3711
		2,5	-1,92	0,0274			
3	9				0,0344	6,4328	1,0245
		3,5	-1,54	0,0618			
4	15				0,0592	11,0704	1,3949
		4,5	-1,17	0,1210			
5	20				0,0938	17,5406	0,3448
		5,5	-0,79	0,2148			
6	21				0,1261	23,5807	0,2824
		6,5	-0,41	0,3409			
7	33				0,1431	26,7597	1,4552
		7,5	-0,04	0,4840			
8	22				0,1491	27,8817	1,2408
		8,5	0,34	0,6331			
9	18				0,1280	23,9360	1,4721
		9,5	0,71	0,7611			
10	16				0,1010	18,8870	0,4413
		10,5	1,09	0,8621			
11	15				0,0658	12,3046	0,5904
		11,5	1,46	0,9279			
12	10				0,0392	7,3304	0,9722
		12,5	1,84	0,9671			
13	5				0,0197	3,6839	0,4702
		13,5	2,22	0,9868			
14	0				0,0132	2,4684	2,4684
				1,000			
	Σ 187						**Σ 13,071**

absolventi gymnázia

Počet bodů	**Četnost P**	**Hranice intervalů**	**u**	**Φ**	**p**	**Četnost O**	**(P – O)² / O**
				0,0000			
1	0				0,0044	0,6380	0,6380
		1,5	-2,62	0,0044			
2	1				0,0081	1,1745	0,0259
		2,5	-2,24	0,0125			
3	3				0,0197	2,8565	0,0072
		3,5	-1,85	0,0322			
4	8				0,0386	5,597	1,0317
		4,5	-1,47	0,0708			
5	12				0,0671	9,7295	0,5298
		5,5	-1,09	0,1379			
6	13				0,1041	15,0945	0,2906
		6,5	-0,70	0,2420			
7	16				0,1325	19,2125	0,5372
		7,5	-0,32	0,3745			
8	22				0,1494	21,6630	0,0052
		8,5	0,06	0,5239			
9	19				0,1497	21,7065	0,3375
		9,5	0,45	0,6736			
10	17				0,1231	17,8495	0,0404
		10,5	0,83	0,7967			
11	16				0,0902	13,0790	0,6524
		11,5	1,21	0,8869			
12	11				0,0583	8,4535	0,7671
		12,5	1,60	0,9452			
13	7				0,0309	4,4805	1,4168
		13,5	1,98	0,9761			
14	0				0,0239	3,4655	3,4655
				1,000			
	Σ 145						**Σ 9,744**

absolventi SOŠ a SOU

Počet bodů	**Četnost P**	**Hranice intervalů**	**u**	**Φ**	**P**	**Četnost O**	$\frac{(P-O)^2}{O}$
				0,0000			
1	1				0,0116	1,856	0,3948
		1,5	-2,27	0,0116			
2	2				0,0171	2,736	0,1980
		2,5	-1,90	0,0287			
3	8				0,0356	5,696	0,9320
		3,5	-1,52	0,0643			
4	11				0,0628	10,048	0,0902
		4,5	-1,14	0,1271			
5	15				0,0965	15,44	0,0125
		5,5	-0,76	0,2236			
6	17				0,1284	20,544	0,6114
		6,5	-0,38	0,3520			
7	30				0,1440	23,040	2,1025
		7,5	-0,01	0,4960			
8	21				0,1483	23,728	0,3136
		8,5	0,37	0,6443			
9	17				0,1291	20,656	0,6471
		9,5	0,75	0,7734			
10	15				0,0974	15,584	0,0219
		10,5	1,13	0,8708			
11	10				0,0646	10,336	0,0109
		11,5	1,51	0,9345			
12	8				0,0361	5,776	0,8563
		12,5	1,89	0,9706			
13	5				0,0175	2,800	1,7286
		13,5	2,26	0,9881			
14	0				0,0119	1,904	1,904
				1,000			
	Σ 160						**Σ 9,824**

maturita z matematiky – ano

Počet bodů	Četnost P	Hranice intervalů	u	Φ	P	Četnost O	$\frac{(P - O)^2}{O}$
				0,0000			
1	0				0,0057	1,243	1,2430
		1,5	-2,53	0,0057			
2	1				0,0101	2,202	0,6561
		2,5	-2,15	0,0158			
3	8				0,0226	4,927	1,9166
		3,5	-1,77	0,0384			
4	14				0,0424	9,243	2,4482
		4,5	-1,40	0,0808			
5	16				0,0731	15,936	0,0003
		5,5	-1,02	0,1539			
6	17				0,1072	23,370	1,7363
		6,5	-0,64	0,2611			
7	31				0,1325	28,885	0,1549
		7,5	-0,27	0,3936			
8	29				0,1502	32,744	0,4281
		8,5	0,11	0,5438			
9	28				0,1441	31,414	0,1855
		9,5	0,49	0,6879			
10	26				0,1172	25,550	0,0080
		10,5	0,86	0,8051			
11	22				0,0874	19,053	0,4558
		11,5	1,24	0,8925			
12	16				0,0549	11,968	1,3584
		12,5	1,62	0,9474			
13	10				0,0293	6,387	2,0438
		13,5	1,99	0,9767			
14	0				0,0233	5,079	5,0790
				1,0000			
	Σ 218						**Σ 17,714**

maturita z matematiky – ne

Počet bodů	Četnost P	Hranice intervalů	u	Φ	P	Četnost O	$\frac{(P-O)^2}{O}$
				0,0000			
1	1				0,0125	1,0875	0,0070
		1,5	-2,24	0,0125			
2	2				0,0197	1,7139	0,0478
		2,5	-1,85	0,0322			
3	3				0,0413	3,5931	0,0979
		3,5	-1,45	0,0735			
4	5				0,0734	6,3858	0,3007
		4,5	-1,05	0,1469			
5	11				0,1109	9,6483	0,1894
		5,5	-0,65	0,2578			
6	13				0,1396	12,1452	0,0602
		6,5	-0,26	0,3974			
7	15				0,1584	13,7808	0,1079
		7,5	0,14	0,5558			
8	14				0,1496	13,0152	0,0745
		8,5	0,54	0,7054			
9	8				0,1184	10,3008	0,5139
		9,5	0,93	0,8238			
10	6				0,0844	7,3428	0,2456
		10,5	1,33	0,9082			
11	4				0,0500	4,3500	0,0282
		11,5	1,73	0,9582			
12	3				0,0252	2,1924	0,2975
		12,5	2,13	0,9834			
13	2				0,0107	0,9309	1,2278
		13,5	2,52	0,9941			
14	0				0,0006	0,522	0,5220
				1,0000			
	Σ 87						**Σ 3,720**

vyšší úroveň státní maturity z matematiky

Počet bodů	Četnost P	Hranice intervalů	u	Φ	P	Četnost O	$\frac{(P-O)^2}{O}$
				0,0000			
1	0				0,0011	0,0715	0,0715
		1,5	-3,06	0,0011			
2	0				0,0032	0,2080	0,2080
		2,5	- 2,63	0,0043			
3	1				0,0096	0,6240	0,2266
		3,5	-2,20	0,0139			
4	2				0,0245	1,5925	0,2644
		4,5	-1,77	0,0384			
5	3				0,0517	3,3605	0,0387
		5,5	-1,34	0,0901			
6	5				0,0861	5,5965	0,0636
		6,5	-0,93	0,1762			
7	8				0,1359	8,8335	0,0786
		7,5	-0,49	0,3121			
8	13				0,1640	10,6600	0,5137
		8,5	-0,06	0,4761			
9	11				0,1682	10,9330	0,0004
		9,5	0,37	0,6443			
10	8				0,1438	9,3470	0,1941
		10,5	0,80	0,7881			
11	6				0,1063	6,9095	0,1197
		11,5	1,25	0,8944			
12	4				0,0608	3,952	0,0006
		12,5	1,66	0,9552			
13	4				0,0265	1,7225	3,0113
		13,5	2,09	0,9817			
14	0				0,0183	1,1895	1,1895
				1,0000			
	Σ 65						**Σ 5,981**

nižší úroveň státní maturity z matematiky

Počet bodů	**Četnost P**	**Hranice intervalů**	**u**	**Φ**	**p**	**Četnost O**	**$\frac{(P-O)^2}{O}$**
				0,0000			
1	0				0,0096	1,2096	1,2096
		1,5	-2,34	0,0096			
2	1				0,0154	1,9404	0,4558
		2,5	- 1,96	0,0250			
3	6				0,0309	3,8934	1,1398
		3,5	-1,59	0,0559			
4	10				0,0572	7,2072	1,0822
		4,5	-1,21	0,1131			
5	12				0,0874	11,0124	0,0886
		5,5	-0,84	0,2005			
6	11				0,1223	15,4098	1,2619
		6,5	-0,46	0,3228			
7	22				0,1413	17,8038	0,9890
		7,5	-0,09	0,4641			
8	14				0,1500	18,9000	1,2704
		8,5	0,29	0,6141			
9	14				0,1313	16,5438	0,3911
		9,5	0,66	0,7454			
10	13				0,1054	13,2804	0,0059
		10,5	1,04	0,8508			
11	12				0,0699	8,8074	1,1573
		11,5	1,41	0,9207			
12	8				0,0426	5,3676	1,2910
		12,5	1,79	0,9633			
13	3				0,0213	2,6838	0,0373
		13,5	2,16	0,9846			
14	0				0,0154	1,9404	1,9404
				1,0000			
	Σ 126						**Σ 12,320**

předchozí studium na jiné vysoké škole – ano

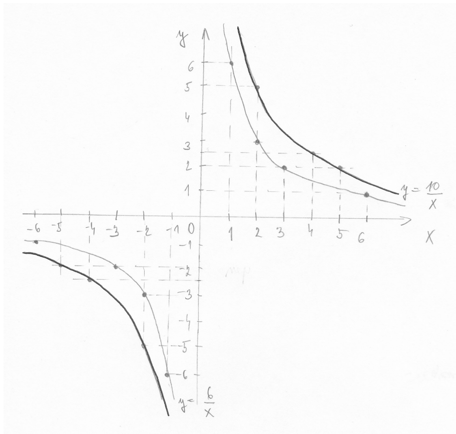
Počet bodů	Četnost P	Hranice intervalů	u	Φ	p	Četnost O	$\frac{(P-O)^2}{O}$
				0,0000			
1	0				0,0032	0,1696	0,1696
		1,5	-2,73	0,0032			
2	1				0,0072	0,3816	1,0021
		2,5	- 2,31	0,0104			
3	1				0,0190	1,0070	0,00005
		3,5	-1,89	0,0294			
4	2				0,0400	2,1200	0,0068
		4,5	-1,48	0,0694			
5	4				0,0752	3,9856	0,00005
		5,5	-1,06	0,1446			
6	4				0,1132	5,9996	0,6664
		6,5	-0,65	0,2578			
7	7				0,1512	8,0136	0,1282
		7,5	-0,23	0,4090			
8	13				0,1624	8,6072	2,2419
		8,5	0,18	0,5714			
9	7				0,1543	8,1779	0,1697
		9,5	0,60	0,7257			
10	6				0,1204	6,3812	0,0228
		10,5	1,02	0,8461			
11	4				0,0775	4,1075	0,0028
		11,5	1,43	0,9236			
12	2				0,0442	2,3426	0,0501
		12,5	1,85	0,9678			
13	2				0,0203	1,0759	0,7937
		13,5	2,26	0,9881			
14	0				0,0119	0,6307	0,6307
				1,0000			
	Σ 53						**Σ 5,885**

předchozí studium na jiné vysoké škole – ne

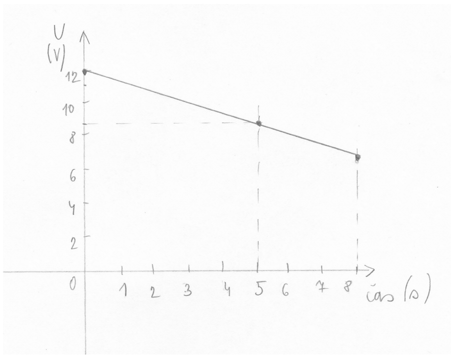
Počet bodů	Četnost P	Hranice intervalů	u	Φ	p	Četnost O	$\frac{(P - O)^2}{O}$
				0,0000			
1	1				0,0094	2,3688	0,7910
		1,5	-2,35	0,0094			
2	2				0,0145	3,6540	0,7487
		2,5	-1,98	0,0239			
3	10				0,0298	7,5096	0,8259
		3,5	-1,61	0,0537			
4	17				0,0520	13,1040	1,1583
		4,5	-1,25	0,1057			
5	23				0,0837	21,0924	0,1725
		5,5	-0,88	0,1894			
6	26				0,1156	29,1312	0,3366
		6,5	-0,51	0,3050			
7	39				0,1383	34,8516	0,4938
		7,5	-0,14	0,4433			
8	30				0,1477	37,2204	1,4007
		8,5	0,23	0,5910			
9	29				0,1347	33,9444	0,7202
		9,5	0,60	0,7257			
10	26				0,1083	27,2916	0,0611
		10,5	0,97	0,8340			
11	22				0,0670	16,8840	1,5502
		11,5	1,34	0,9010			
12	17				0,0554	13,9608	0,6616
		12,5	1,71	0,9564			
13	10				0,0248	6,2496	2,2506
		13,5	2,08	0,9812			
14	0				0,0188	4,7376	4,7376
				1,0000			
	Σ 252						**Σ 11,171**

Příloha č. 6 Řešení úloh z testu pilotáže

Úloha č. 1: grafy se neprotínají



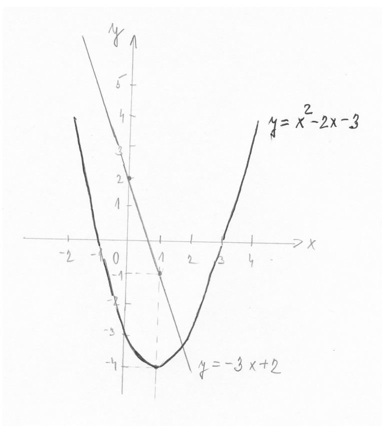
Úloha č. 2: $y = 12 - 0{,}7x$



Úloha č. 3:

Graf funkce na obrázku č. 6 vyjadřuje závislost rychlosti přítoku vody $v(t)$ do vany na čase t. V čase $t = 0$ byla vana prázdná. Čas je uveden v minutách, rychlost přítoku v litrech za minutu. Ve vaně bylo maximálně 100 litrů vody. Bylo to mezi 15. a 25. minutou.

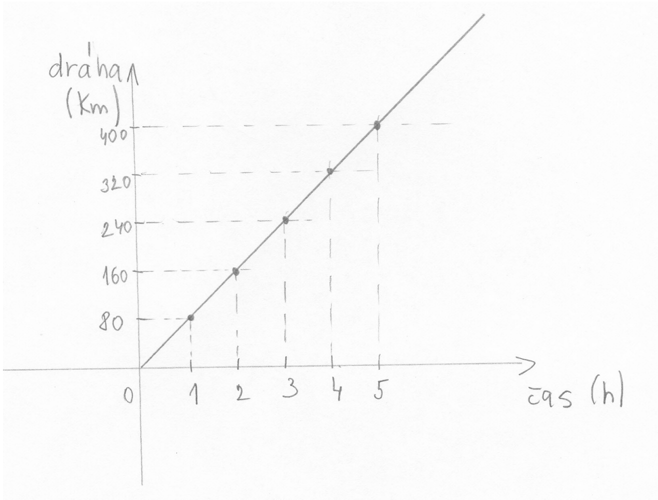
Úloha č. 4:



Úloha č. 5: $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Úloha č. 6: $-0{,}087$

Úloha č. 7: $s = 80 \cdot t$,

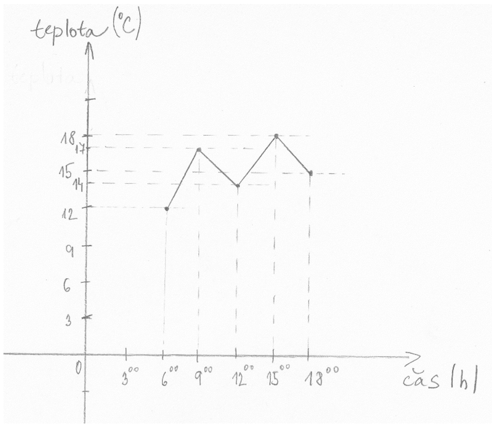


Úloha č. 8: rozdíl je 25 let, rozdíl věků se nemění

Příloha č. 7 Řešení úloh z testu předvýzkumu

Úloha č. 1: Od půlnoci do 4 h klesala teplota z 8°C pod 4°C. Od 4 h do 14 h se zvyšovala, teplota až dosáhla maxima 14 °C, od 14 h do půlnoci klesala teplota ze 14°C na 8°C.

Úloha č. 2:



Úloha č. 3: cyklista

Úloha č. 4: A

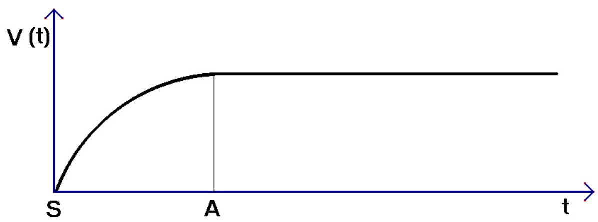
Úloha č. 5: Od 6 h do 8 h se vlhkost vzduchu zvyšovala až na maximum, tj. na 40 % vlhkost vzduchu, potom do půl jedenácté vlhkost vzduchu klesala (vlhkost vzduchu o půl jedenácté 15 °C), od této doby se vlhkost vzduchu zvyšovala.

Úloha č. 6: C

Úloha č. 7: V době od 10 minut do 15 minut se zvětšil objem vody ve vaně o 40 l.

Úloha č. 8: C

Úloha č. 9:



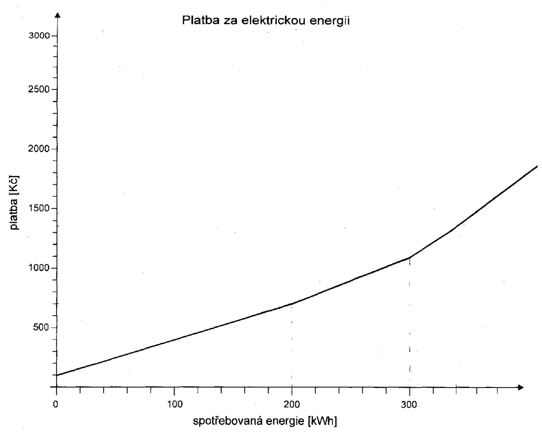
Úloha č. 10: od 11 let do 13 let

Úloha č. 11: Po dvou hodinách od výjezdu cyklisty nebo za tři hodiny od výjezdu auta.

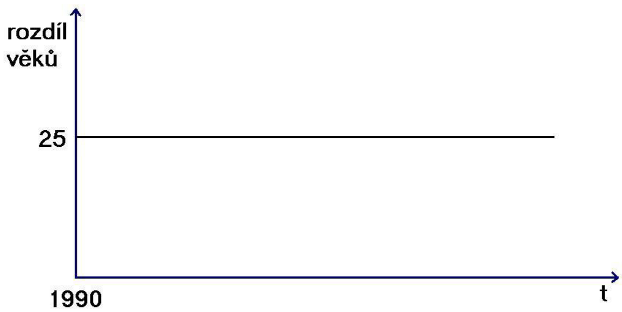
Rychlost *(km/h)*	10	30	60	100	120
Čas *(h)*	12	4	2	1,2	1

Znázorněním dané závislosti je graf nepřímé úměrnosti.

Úloha č. 13:



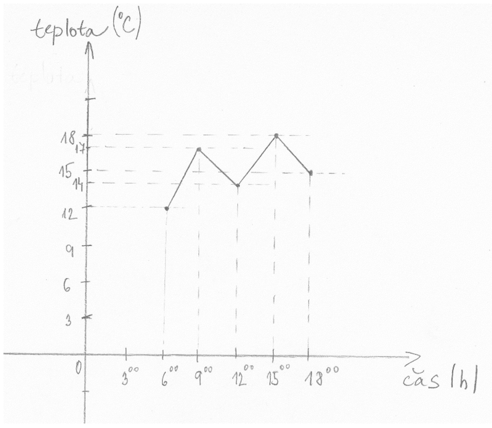
Úloha č. 14:



Příloha č. 8 Řešení úloh z testu výzkumu

Úloha č. 1: Od půlnoci do 4 h klesala teplota z 8°C pod 4°C. Od 4 h do 14 h se zvyšovala, teplota až dosáhla maxima 14 °C, od 14 h do půlnoci klesala teplota ze 14°C na 8°C.

Úloha č. 2:



Úloha č. 3: cyklista

Úloha č. 4: A

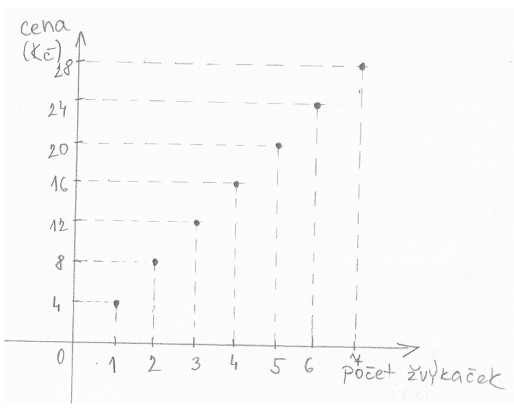
Úloha č. 5: Od 6 h do 8 h se vlhkost vzduchu zvyšovala až na maximum, tj. na 40 % vlhkost vzduchu, potom do půl jedenácté vlhkost vzduchu klesala (vlhkost vzduchu o půl jedenácté 15 °C), od této doby se vlhkost vzduchu zvyšovala.

Úloha č. 6: C

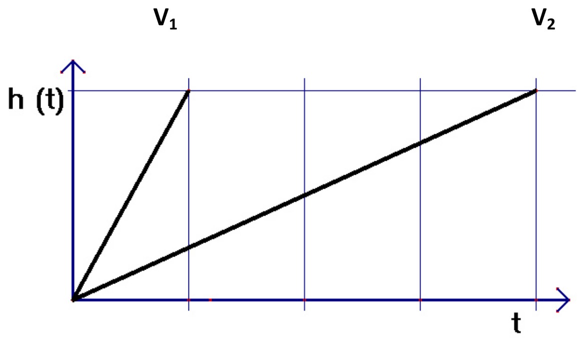
Úloha č. 7: V době od 10 minut do 15 minut se zvětšil objem vody ve vaně o 40 l.

Úloha č. 8: C

Úloha č. 9:



Úloha č. 10:



Úloha č. 11: Po dvou hodinách od výjezdu cyklisty nebo za tři hodiny od výjezdu auta.

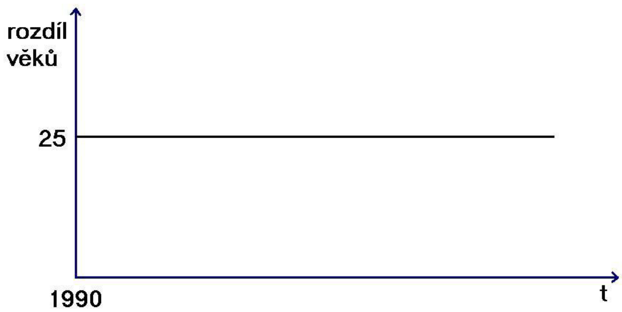
Úloha č. 12:

Rychlost *(km/h)*	10	30	60	100	120
Čas *(h)*	12	4	2	1,2	1

Znázorněním dané závislosti je graf nepřímé úměrnosti.

Úloha č. 13: B

Úloha č. 14:



15 Anotace, abstrakt

Název:	Funkční myšlení studentů matematiky na počátku jejich studia na pedagogických fakultách v ČR
Autor:	Mgr. Leona Salvetová
Obor:	Pedagogika
Školitel:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Počet stran:	208
Počet příloh:	39
Rok obhajoby	2015
Klíčová slova:	myšlení, matematické myšlení, funkční myšlení, inteligence, Rámcový vzdělávací program,

Abstrakt:

Disertační práce se zabývá problematikou funkčního myšlení studentů matematiky na počátku jejich studia na pedagogických fakultách v České republice v roce 2012.

Prezentuje české i zahraniční výzkumy zabývající se funkčním myšlením žáků základních a středních škol. Definuje a charakterizuje základní pojmy zkoumané problematiky. Vymezuje požadavky na rozvoj funkčního myšlení ve školním kurikulu. Zamýšlí se nad možnými faktory jako předpoklady, které mohou mít vliv na nedostatky ve funkčním myšlení žáků/studentů. Nabízí možnosti rozvoje funkčního myšlení ve výuce matematiky.

Na základě teoretického podkladu zkoumané problematiky je postaven empirický výzkum, ve kterém je kvantitativní analýzou popisováno funkční myšlení žáků/studentů matematiky. Výzkum ověřuje vybrané faktory, které by mohly mít vliv na výsledek testu. Zároveň se zabývá problematikou řešení úloh podporujících rozvoj funkčního myšlení a upozorňuje na nejčastější chyby při jejich řešení. Podává přehled nedostatků ve funkčním myšlení žáků/studentů vzhledem ke školnímu kurikulu a nabízí vhodná opatření ke zvýšení úrovně jejich funkčního myšlení.

Annotation, abstract

Title:	Functional thinking in mathematics students at the beginning of their studies at the pedagogical faculties in the Czech Republic
Author:	Mgr. Leona Salvetová
Study field:	Education
Supervisor:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Number of pages:	208
Number of appendices:	39
Year of defence:	2015
Keywords:	thinking, mathematical thinking**,** functional thinking, intelligence, Education Programme Framework.

Abstract:

The dissertation thesis deals with the functional thinking in the university students of mathematics who have been newly enrolled in pedagogical faculties in the Czech Republic. The data was collected in 2012.

The thesis presents both Czech and international results of research dedicated to functional thinking in primary school pupils and secondary school students. The thesis defines and characterizes basic concepts of the researched problematic. The thesis delimits requirements necessary to develop functional thinking into the school curriculum. The thesis discusses factors assumed to have the potential to influence the deficiency of functional thinking in pupils/students. It also lists possible ways to develop functional thinking in teaching mathematics.

Based on the theoretical background empirical research has been built using quantitative analysis to describe the functional thinking of pupils/students in the field of mathematics. The research aims to verify selected factors that may influence the test results.

Last but not least, the thesis discusses the issue of solving problem tasks designed to develop functional thinking, calling attention to the most frequently occurring mistakes.

The thesis also provides a list of functional thinking deficiencies attested in the population of pupils/students, the list is further analysed with respect to school curriculum, consequently, suitable procedures aimed to increase their the level of functional thinking.