

Česká zemědělská univerzita v Praze

Fakulta lesnická a dřevařská

Katedra zpracování dřeva a biomateriálů



**Návrh využití bukového dřeva v nosných panelových
konstrukcích dřevostaveb**

Bakalářská práce

Autor: Václav Valášek

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Petr Horáček

2019

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

Fakulta lesnická a dřevařská

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Václav Valášek

Dřevařství

Název práce

Návrh využití bukového dřeva v nosných panelových konstrukcích dřevostaveb.

Název anglicky

Design of constructional wood-based panels made of beech wood.

Cíle práce

Analyzujte možnosti náhrady jehličnatého (smrkového) dřeva dřevem buku v dřevěných panelech pro nosné konstrukční účely. Zaměřte se zejména na křížem vrstvené masivní panely vyráběné z lamel skládaných do vrstev. Při předpokládaném využití dřevěných panelů jak ve svislých tak i vodorovných konstrukcích je nutno ověřit (navrhnout) způsob posuzování mechanické stability při kombinování tlakového a ohybového namáhání. Cílem práce je navrhnout teoretický výpočetní model vycházející zejména z numerického řešení. Výpočetní model bude založen na teorii lineární pružnosti. Model bude umožňovat dimenzovat stěnové a/nebo stropní konstrukce s/bez stavebních otvorů při různých okrajových podmínkách a zátěžových stavech. Verifikace modelu proběhne srovnáním vypočtených napětí, průhybů a efektivní tuhosti se známými hodnotami u dřevěných smrkových panelů konstrukčního systému Novatop. Validace modelu proběhne porovnáním výsledků numerického výpočtu s experimentálním ověřením mechanického chování vzorku vybraného dřevěného panelu. Výsledkem práce bude vedle samotného numerického modelu zejména podklad pro předběžné dimenzování zahrnující stálá a užitná zatížení, geometrii a konstrukci panelu, a okrajové podmínky.

Metodika

1. Navrhněte obecný výpočetní model vycházející z lineární pružnosti pro kombinované tlakové a ohybové namáhání (boulení desek).
2. Model aplikujte nejprve na standardní smrkové panely (CLT, Novatop), poté navrhněte a vypočítejte mezní stavy u panelů bukových. Modelově posuďte různé okrajové podmínky (podepření, vetknutí), geometrie panelu (rozměry, konstrukce) a materiálové vlastnosti bukového dřeva.
3. Modelové výpočty (např. průhyb, efektivní tuhost) porovnejte s experimentálním stanovením mechanického chování reálných vzorků vybraného dřevěného panelu.
4. Na základě modelu sestavte podklad pro předběžné dimenzování zahrnující stálá a užitná zatížení, geometrii a konstrukci panelu, a okrajové podmínky.
5. Práci čleňte do standardních kapitol – úvod, literární přehled, cíl práce, materiál a metodika, výsledky, diskuze, závěr, použitá literatura a souhrn.

Doporučený rozsah práce

50 stran

Klíčová slova

buk, masivní dřevěný panel, dřevostavba, mechanická stabilita

Doporučené zdroje informací

BODIG, J. – JAYNE, B A. *Mechanics of wood and wood composites*. Malabar: Krieger Publishing Company, 1993. ISBN 0-89464-777-6.

FRANKE, S. Mechanical properties of beech CLT. In: WCTE 2016 Proceedings, 22.-25.8. 2016 Vienna, 7 pp.

JOŠČÁK, P. *Pevnostné navrhovanie nábytku*. Zvolen: TECHNICKÁ UNIVERZITA, 1999. ISBN 80-228-0921-7.

KOLEKTIV. *Wood Handbook: Wood as an engineering material*. Washington: US Dep. of Agriculture, 1974.

NETTLES, AT Basic Mechanics of Laminated Composite Plates. NASA, Alabama, 1995. NASA RP-1351

Předběžný termín obhajoby

2018/19 LS – FLD

Vedoucí práce

prof. Dr. Ing. Petr Horáček

Garantující pracoviště

Katedra zpracování dřeva a biomateriálů

Elektronicky schváleno dne 20. 3. 2019

doc. Ing. Milan Gaff, PhD.

Vedoucí ústavu

Elektronicky schváleno dne 26. 3. 2019

prof. Ing. Marek Turčáni, PhD.

Děkan

V Praze dne 18. 04. 2019

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Návrh využití bukového dřeva v nosných panelových konstrukcích dřevostaveb vypracoval samostatně pod vedením prof. Dr. Ing. Petra Horáčka a použil jen prameny, které uvádím v seznamu použitých zdrojů.

Jsem si vědom že zveřejněním bakalářské práce souhlasím s jejím zveřejněním dle zákon č. 111/1998 Sb. o vysokých školách v platném znění, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Praze, dne

Podpis:

Poděkování:

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu bakalářské práce prof. Dr. Ing. Petrovi Horáčkovi za jeho vstřícný přístup, odborné vedení, cenné rady a připomínky, které velkou měrou napomohly vzniku této bakalářské práce.

Poděkování patří také mé rodině, přítelkyni a přátelům za jejich vytrvalou podporu a pomoc při mém studiu.

VÁCLAV VALÁŠEK

Návrh využití bukového dřeva v nosných panelových konstrukcích dřevostaveb

Design of constructional wood-based panels made of beech wood

Abstrakt:

Bakalářská práce se zabývá využitím bukového dřeva v panelových nosných konstrukcích dřevostaveb. Na základě teorie lineární pružnosti a laminační teorie byl vytvořen výpočetní model pro výpočet únosnosti nosné panelové konstrukce. Zjištěná únosnost smrkového panelu byla porovnána s panelem Novatop Static o stejných rozměrech. Dále byla vypočítána únosnost bukového panelu o různých tloušťkách vrstev. Výsledky únosnosti smrkového panelu a bukových panelů byly vzájemně porovnány.

Klíčová slova: buk, masivní dřevěný panel, dřevostavba, mechanická stabilita, NOVATOP

Abstract:

The bachelor thesis deals with the use of beech wood in panel supporting structures of wood buildings. Based on the theory of linear elasticity and lamination theory, was created a computational model for the load-bearing capacity of a load-bearing panel structure. The found capacity of the spruce panel was compared with the Novatop Static panel of the same dimensions. Furthermore, the bearing capacity of the beech panel with different layer thicknesses was calculated. The load-bearing capacity of the spruce and beech panels was compared with each other.

Keywords: beech, solid wooden panel, wooden construction, mechanical stability, NOVATOP.

Obsah

| | |
|---|----|
| 1. Úvod | 11 |
| 2. Cíl práce..... | 12 |
| 3. Literární přehled | 13 |
| 3.1. Mechanické vlastnosti dřeva | 13 |
| 3.2. Napětí | 13 |
| 3.3. Deformace | 14 |
| 3.4. Pružnost..... | 16 |
| 3.4.1. Modul pružnosti | 16 |
| 3.4.2. Poissonova čísla..... | 17 |
| 3.4.3. Mez úměrnosti | 18 |
| 3.4.4. Hookeův zákon..... | 18 |
| 3.4.4.1. Obecný ortotropní materiál..... | 18 |
| 3.4.4.2. Rovinný ortotropní materiál | 19 |
| 3.4.5. Transformace souřadnic | 21 |
| 3.4.5.1. Transformace napětí a deformace | 21 |
| 3.5. Ohyb | 22 |
| 3.5.1. Ohyb nosníku | 22 |
| 3.5.1.1. Normálové napětí při ohybu | 23 |
| 3.5.2. Ohybová napětí | 25 |
| 3.5.3. Diferenciální rovnice ohybové čáry | 27 |
| 3.6. Ohyb desky..... | 29 |
| 3.6.1. Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek..... | 29 |
| 3.6.2. Neznámé veličiny na desce | 30 |
| 3.6.3. Okrajové podmínky..... | 31 |
| 3.6.4. Desková rovnice | 32 |
| 3.7. Laminační teorie..... | 33 |
| 3.8. Použité dřevo | 36 |
| 3.8.1. Porovnání vlastností použitých dřev | 37 |

| | |
|---|----|
| 3.9. Systém Novatop..... | 37 |
| 4. Metodika | 39 |
| 4.1. Program FlexPDE | 39 |
| 4.1.1. Tvorba skriptu..... | 40 |
| 4.1.1.1. Definitions (definice)..... | 40 |
| 4.1.1.2. Okrajové podmínky a zobrazení..... | 42 |
| 4.1.2. Použití laminační teorie | 42 |
| 5. Výsledky..... | 44 |
| 5.1. Únosnost smrkového panelu..... | 44 |
| 5.2. Porovnání smrkového panelu s panelem Novatop Static..... | 45 |
| 5.3. Únosnost bukového panelu..... | 47 |
| 5.4. Porovnání smrkového a bukového panelu..... | 48 |
| 5.4.1. Rozložení napětí v panelu | 48 |
| 5.4.1.1. Smrkový panel | 48 |
| 5.4.1.2. Bukový panel | 51 |
| 5.5. Panely o různých tloušťkách vrstev | 54 |
| 6. Diskuze | 57 |
| 7. Závěr..... | 61 |
| 8. Použitá literatura | 62 |
| 9. Přílohy..... | 64 |

Seznam obrázků, grafů a tabulek

Seznam obrázků

| | |
|---|----|
| Obrázek 1.: Složky napětí na kostce dřeva v pravouhlém systému (Požgaj et al., 1997) | 14 |
| Obrázek 2: Změna tvaru tělesa při tahu (Požgaj et al., 1997) | 15 |
| Obrázek 3: Diagram napětí-deformace (Požgaj et al., 1997) | 17 |
| Obrázek 4: Rotace ortotropních os se zřetelem na příčnou rovinu dřeva (Požgaj et al., 1997) | 21 |
| Obrázek 5.: Symetricky zatížení prostý nosník (Krejša, [online]) | 23 |
| Obrázek 6.: Deformace ohýbaného nosníku [Krejša, [online]] | 24 |
| Obrázek 7.: Znaménková úmluva pro vnitřní silové účinky (Plánička, online) | 25 |
| Obrázek 8.: Nosník zatížený obecným spojitým zatížením (Plánička, [online]) | 26 |
| Obrázek 9.: Průběh deformací a normálového napětí při ohybu (Plánička, [online]) | 27 |
| Obrázek 10.: Ohybová čára nosníku (Šmiřák, 2000) | 27 |
| Obrázek 11: Deska-předpoklad o normálách (Brožovský, 2012) | 29 |
| Obrázek 12: Napětí a vnitřní síly na desce (Brožovský, 2012) | 30 |
| Obrázek 13.: Vnitřní síly na elementu desky (Brožovský, 2012) | 32 |
| Obrázek 14: Panel Novatop Static (www.novatop-system.cz) | 37 |
| Obrázek 15: Rozložení vrstev v panelu Novatop Static o tloušťce 45 mm (www.novatop-system.cz) | 38 |
| Obrázek 16: Metoda ČTVEREC | 41 |
| Obrázek 17: Metoda OBDÉLNÍK | 41 |
| Obrázek 18: Schéma vzdálenosti vrstev laminátu od neutrální osy (Nettles, 1994) | 43 |

Seznam grafů

| | |
|---|----|
| Graf 1: Únosnost panelu Novatop Static (www.novatop-system.cz) | 38 |
| Graf 2: Výsledek únosnosti smrkového panelu-metoda ČTVEREC | 44 |
| Graf 3: Výsledek únosnosti smrkového panelu-metoda OBDÉLNÍK | 44 |
| Graf 4: Porovnání panelu NOVATOP STATIC a výpočtu-metoda ČTVEREC | 46 |
| Graf 5: Porovnání panelu NOVATOP STATIC a výpočtu-metoda OBDÉLNÍK | 46 |
| Graf 6: Únosnost bukového panelu | 47 |
| Graf 7: Porovnání panelů ze smrku a buku | 48 |
| Graf 8: Rozložení napětí podél vláken na řezu smrkového panelu | 49 |
| Graf 9: Rozložení napětí kolmo na vlákna na řezu smrkového panelu | 50 |
| Graf 10: Rozložení smykového napětí na řezu smrkového panelu | 51 |
| Graf 11: Rozložení napětí podél vláken na řezu bukového panelu | 52 |

| | |
|--|----|
| Graf 12: Rozložení napětí kolmo na vlákna na řezu bukového panelu | 53 |
| Graf 13: Rozložení smykového napětí na bukovém panelu | 54 |
| Graf 14: Porovnání smrkového a bukového panelu při různých tloušťkách vrstev | 55 |
| Graf 15: Únosnost melaminového lepidla používaného u panelů Novatop Static | 57 |
| Graf 16: Porovnání únosnosti melaminového lepidla, smrkové a bukového panelu..... | 58 |
| Graf 17: Srovnání mechanických vlastností CLT panelu z buku a ze smrku (Franke, 2016)..... | 59 |

Seznam tabulek

| | |
|--|----|
| Tabulka 1: Přehled diferenciálních závislostí (čárkami nad w je označena derivace průhybu podle x) (Šmiřák, 2000) | 28 |
| Tabulka 2: Porovnání elastických koeficientů smrku a buku (Hearmon, 1948) | 37 |
| Tabulka 3: Porovnání Poissonových čísel smrku a buku (Hearmon, 1948) | 37 |
| Tabulka 4: Porovnání mezí pevnosti smrku a buku (Zeidler, 2016) | 37 |
| Tabulka 5: Dvouvýběrový t-test metody ČTVEREC..... | 45 |
| Tabulka 6: Dvouvýběrový t-test metody OBDÉLNÍK..... | 45 |
| Tabulka 7: Porovnání únosnosti a úspory na materiálu bukových panelů..... | 56 |

1. Úvod

Dřevo je obnovitelný materiál, který můžeme na Zemi najít prakticky všude, a který na rozdíl od ostatních stavebních materiálů dosahuje vysokých elastických hodnot. Mezi jeho další velké výhody patří vysoká pevnost a tuhost v porovnání k jeho hmotnosti, dobrá ekologická odbouratelnost a recyklovatelnost. Díky těmto vlastnostem je hojně využíváno ve výrobě nábytku, interiérových doplňků, obalů, a v neposlední řadě stále ve větší míře ve stavebnictví.

Velikost výrobků z masivního dřeva je omezena rozměry rostlého kmene, z tohoto důvodu je dřevo dále zpracováváno různými pracovními postupy, během kterých může docházet k jeho rozřezání, roztřískování, krájení, loupání, atd. Dále může být dřevo hydrotermicky a chemicky upravováno, lepeno a lisováno. Cílem těchto postupů je snížit negativní vlastnosti dřeva a získat výrobek požadovaných vlastností a rozměrů.

Stavební prvky ze dřeva mají dlouholetou tradici. Ve srovnání s betonovými prvky dokáží přenést stejně velké zatížení při nižším zatížení vlastní tíhou. Dřevěné prvky umožňují rychlou montáž bez nutných technologických přestávek, bez kterých se neobejde stavba z klasických nedřevěných stavebních materiálů. Dřevo má také skvělé estetické vlastnosti a pozitivní vliv na kvalitu vnitřního prostředí. Dřevo patří mezi obnovitelný zdroj, výrobky ze dřeva lze také poměrně dobře recyklovat nebo použít jako zdroj energie. Z těchto důvodů je dřevo čím dál více využíváno jako materiál ve stavebnictví.

Buk patří mezi jednu z nejdůležitějších dřevin, která má předpoklady se stát velmi důležitým materiálem pro oblast stavebnictví. V současné době se v zahraničí setkáváme se stále větším využitím buku ve stavebnictví, a tím pádem i nárůstem jeho používání v panelových konstrukcích. U nás lze z důvodů klimatické změny očekávat postupnou změnu ve výsadbě smrkové monokultury, díky čemuž by buk měl mít mnohem větší zastoupení ve výsadbě, a tím pádem i větší zastoupení v dřevozpracujícím a stavebním průmyslu, stejně tak, jak je tomu v zahraničí. Dřevo buku má velmi dobré materiálové vlastnosti, díky kterým je pouze otázkou času, kdy se jeho potenciál začne naplno využívat.

Má práce se zabývá analýzou a návrhem využití bukového dřeva v nosných panelových konstrukcích. Využití panelových konstrukcí ve stavebnictví stále narůstá, a to hlavně díky dobrým mechanickým vlastnostem, nižší ekologické náročnosti a rychlé výstavbě. Výše zmíněné důvody vedou k tomu, že se zejména v západní Evropě, USA a Kanadě stále používají na stavbu vícepatrových budov.

2. Cíl práce

Cílem mé bakalářské práce je analyzovat možnost náhrady jehličnatého (smrkového) dřeva dřevem buku pro výrobu dřevěných panelů určených k nosným konstrukčním účelům a vytvořit výpočetní model pro navrhování dřevěných panelových konstrukcí. Zaměřil jsem se na křížem lepené masivní panely vyráběné z lamel skládaných do vrstev. K vytvoření této analýzy je potřeba navrhnout teoretický výpočetní model vycházející zejména z numerického řešení. Výpočetní model je založen na teorii lineární pružnosti a umožňuje dimenzování stropních panelů bez stavebních otvorů. Verifikace modelu proběhla srovnáním zjištěných únosností se známými hodnotami u smrkových panelů konstrukčního systému Novatop, konkrétně u panelů Novatop Static, používaných u přesahů střech.

Dílčí cíle bakalářské práce:

- a) první část práce byla zaměřena na sestavení výpočetního modelu pro dimenzování panelových nosných konstrukcí a výpočtu únosnosti smrkového panelu stejných rozměrů, jaké má panel Novatop Static,
- b) druhá část je zaměřena na porovnání výsledků únosnosti smrkového panelu s únosností panelu Novatop Static a jejich verifikace pro další postup,
- c) třetí část je zaměřena na výpočet únosnosti bukového panelu za pomoci výpočetního modelu,
- d) čtvrtá část je zaměřena na porovnání výsledků únosnosti smrkového a bukového panelu,
- e) pátá část je zaměřena na výpočet únosnosti bukového panelu o menších tloušťkách vrstev a následné porovnání jak s původním smrkovým, tak bukovým panelem.

3. Literární přehled

3.1. Mechanické vlastnosti dřeva

Dřevo má své nenahraditelné vlastnosti, které ho zařazují mezi materiály se širokým uplatněním v praxi. Mezi tyto vlastnosti patří mimo jiné mechanické vlastnosti, zejména pružnost a pevnost. (Požgaj et al., 1997)

Dřevěné konstrukční prvky jsou vhodné zejména pro přenos tahových, tlakových a ohybových namáhání. Dřevo se vzhledem k jeho vysokému poměru pevnosti k hmotnosti často používá jako konstrukční materiál pro střechy a pro lávky pro chodce a cyklisty. Modul pružnosti dřeva je v porovnání s modulem pružnosti oceli nebo betonu nízký. Na druhou stranu má dřevo při relativně malé hmotnosti dobrou pevnost a výhodný vzájemný poměr těchto vlastností činí ze dřeva, z konstrukčního hlediska, jeden z nejhodnějších materiálů. (Horáček, 2010)

3.2. Napětí

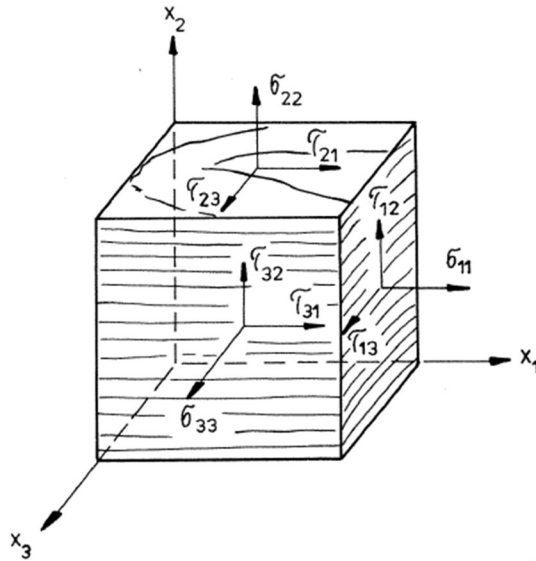
Napětí ve dřevě představuje míru vnitřních sil, které se v tělese objevují jako odpověď na působení vnějších mechanických sil. Napětí (σ) definujeme jako velikost vnitřní síly, která je vztažena na jednotku plochy tělesa podle vztahu

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (\text{Pa}) \quad (3.1)$$

Jestliže síly působí kolmo na průřezovou plochu tělesa, jedná se o normálové napětí (σ), například napětí v tahu nebo tlaku. Působí-li síly v rovině průřezu, vzniká tangenciální (smykové) napětí (τ), například napětí ve smyku. Kombinaci normálového a tangenciálního napětí představuje ohyb. (Horáček, 2010)

Vektory napětí mohou být na každé ploše rozloženy do tří složek. Při označování napětí první index značí plochu, na kterou napětí účinkuje, a druhý index označuje směr složky napětí. Devět složek napětí je dostatečných na specifikování kompletního stavu napětí elementární kostky. Uvažujeme s podmínkou rovnováhy

$$\sigma_{11} = -\sigma_{11}; \quad \sigma_{22} = -\sigma_{22}; \quad \sigma_{33} = -\sigma_{33}; \quad T_{21} = -T_{12}; \quad T_{31} = -T_{13}; \quad T_{32} = -T_{23}$$



Obrázek 1.: Složky napětí na kostce dřeva v pravoúhlém systému (Požgaj et al., 1997)

Normálové napětí působící na opačných plochách jsou vždy stejné, na základě toho můžeme napsat rovnici

$$\sigma_{ii} = \sigma'_{ii} \quad (3.2)$$

Takto dostáváme devět složek napětí σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , τ_{12} , τ_{13} , τ_{21} , τ_{23} , τ_{31} , τ_{32} .

Složky σ_{11} , σ_{22} a σ_{33} představují normálové napětí. Ostatní složky působí na plochu tangenciálně a jsou označené jako smykové napětí. Stav napětí v bodě můžeme vyjádřit pomocí maticového zápisu

$$\sigma = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{\Delta F_1}{\Delta S_1} & \frac{\Delta F_2}{\Delta S_1} & \frac{\Delta F_3}{\Delta S_1} \\ \frac{\Delta F_1}{\Delta S_2} & \frac{\Delta F_2}{\Delta S_2} & \frac{\Delta F_3}{\Delta S_2} \\ \frac{\Delta F_1}{\Delta S_3} & \frac{\Delta F_2}{\Delta S_3} & \frac{\Delta F_3}{\Delta S_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

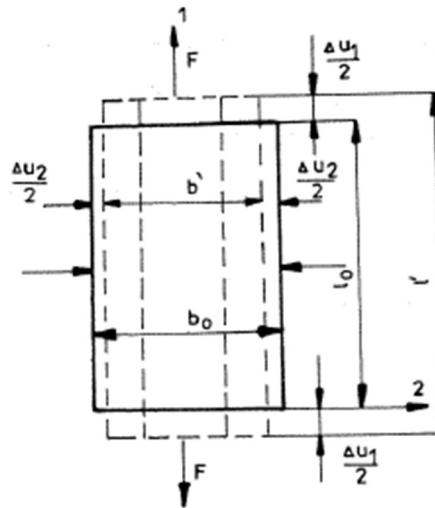
(Požgaj et al., 1997)

3.3. Deformace

Působením mechanických sil dochází ke změně tvarů a rozměrů dřeva, což nazýváme deformací. Kromě jednoduchého prodloužení nebo zkrácení se pravoúhlý průřez dřeva může zkroutit do kosodélníkového tvaru. Prodloužení a zkrácení rozměrů jsou charakteristická pro normálová napětí a nazýváme je normálovými deformacemi ϵ . Kroucení tělesa vzniká při tangenciálních napětí a nazýváme jej smykovou (tangenciální) deformací γ . (Horáček, 2010).

Deformace můžeme rozdělit na pružné deformace, deformace pružné v čase a na plastické deformace. Pružná deformace je návratná změna dřeva po odstranění působení vnějších sil. Když je dřevo namáhané napětím, které vyvolává jen pružné deformace, nachází se ve stavu napjatosti v pružné oblasti. Pružná deformace v čas je návratná změna tvarů dřeva po uvolnění vnějších sil, které nenastává okamžitě, ale za určitý čas. Trvalá deformace je nenávratná změna tvaru dřeva, která po odstranění působení vnějších mechanických sil zůstává (nemizí) a těleso dostává nový tvar a rozměry. (Požgaj et al., 1997)

Působícímu napětí těleso odporuje příslušnou změnou svého tvaru, tedy se deformuje. Mezi působícím napětím a vnitřním odporem materiálu proti deformaci vzniká rovnováha.



Obrázek 2: Změna tvaru tělesa při tahu (Požgaj et al., 1997)

Vlivem působení vnější síly se prodlouží a šířka tělesa se zúží o absolutní deformace Δu_1 a Δu_2 .

Poměrná pružná deformace ve směru působící síly se vypočítá

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u_1}{l_0} \quad (3.4)$$

a poměrné příčné zkrácení

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta u_2}{b_0} \quad (3.5)$$

V tělese také mimo deformace vzniklé normálovým napětím, vznikají deformace smykové γ . Smyková deformace vzniká posunutím dvou sousedních přířezů, ve kterých působí napětí τ . Při tangenciálním napětí se mění pravoúhlost hran, což je zásadní rozdíl mezi deformací vzniklou normálovým a tangenciálním napětím.

Stav deformace v bodě můžeme vyjádřit pomocí maticového zápisu

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_3} + \frac{\Delta u_3}{\Delta x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} + \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} \right) & \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x_3} + \frac{\Delta u_3}{\Delta x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_3}{\Delta x_1} + \frac{\Delta u_1}{\Delta x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_3}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_3} \right) & \frac{\Delta u_3}{\Delta x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

(Požgaj et al., 1997)

3.4. Pružnost

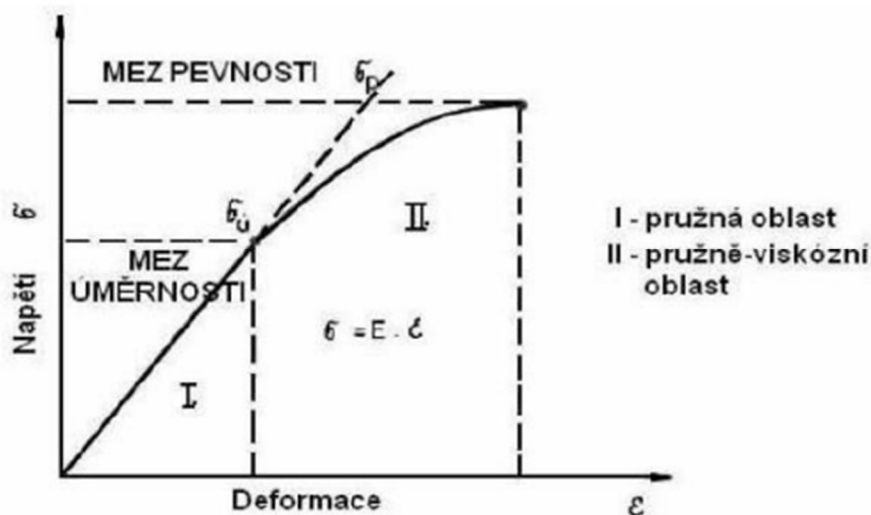
Pružnost dřeva se všeobecně definuje jako schopnost dosáhnout původní tvar (rozměry) po uvolnění vnějších sil. Vycházejíc z digramu napětí-deformace můžeme pružnost kvantifikovat těmito charakteristikami:

- Modul pružnosti (E)
- Poissonovými čísly (μ)
- mezí úměrnosti ($\sigma_{\dot{u}}$)
- energií pružné deformace

3.4.1. Modul pružnosti

Modul pružnosti vyjadřuje vnitřní odpor materiálu proti pružné deformaci. Čím je modul pružnosti větší, tím větší napětí je potřebné na vyvolání deformace. Rozlišujeme moduly pružnosti E při normálovém namáhání (tah, tlak, ohyb) a moduly G při tangenciálním namáhání (krut, smyk). (Požgaj et al, 1997)

Diagram napětí-deformace můžeme rozdělit na dvě části, a to na lineární část po mez úměrnosti $\sigma_{\dot{u}}$ a nelineární část nad mezí úměrnosti po mez pevnosti σ_p . Mez úměrnosti je definována jako takové napětí, do kterého v tělese vznikají pouze deformace pružné, případně pružné v čase, a napětí je v tělese rovnoměrně rozděleno. Po ukončení silového působení tyto deformace zcela zanikají a těleso se vrací do původního stavu (Horáček, 2010).



Obrázek 3: Diagram napětí-deformace (Požgaj et al., 1997)

Z průběhů diagramu napětí-deformace vyplývá, že po mez úměrnosti jsou vztahy lineární a příslušná rovnice přímky má tvar $y = k \cdot x$. Pokud tento vztah převedeme na souřadnice deformace a napětí, tak rovnice přímky má tvar Hookova zákona a směrnice přímky svůj fyzikální význam. Je to vlastně modul pružnosti materiálu, v našem případě modul pružnosti dřeva E . Všeobecně můžeme napsat:

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (4.1)$$

(Požgaj et al., 1997)

3.4.2. Poissonova čísla

Poissonova čísla jsou důležitými charakteristikami pružnosti dřeva a využívají se především při objemových změnách dřeva způsobených vlivem mechanického zatížení. Pokud hranol dřeva namáháme tlakem nebo tahem, vznikají v něm kromě deformací ve směru působení síly (zkrácení a prodloužení), také deformace kolmé na směr síly. Nazýváme je příčnými deformacemi (neměli by se zaměřovat s deformacemi kolmo na vlákna. Poissonovo číslo vyjadřuje poměr příčné deformace k podélné deformaci.

Poměr obou deformací je Poissonovo číslo

$$\mu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (4.2)$$

(Požgaj et al., 1997)

3.4.3. Mez úměrnosti

Pokud napětí dřeva překročí mez úměrnosti, lineární úsek diagramu se odklání a pozvolně přechází do nelineárního průběhu (viz obr. 3). Napětí, které odpovídá bodu odklonu od lineární části, nazýváme mezí úměrnosti $\sigma_{\dot{u}}$. Tuto hranici možno definovat jako nejvyšší napětí ve dřevě, při kterém ještě nevznikají plastické deformace a deformace pružné v čase. (Požgaj et al., 1997))

3.4.4. Hookeův zákon

Na základě zákonitosti, že při jednoosém namáhání se dřevo chová po mez úměrnosti jako lineárně pružný materiál, předpokládáme, že je mezi ostatními složkami napětí a deformací lineární vztah a mají tvar Hookeova zákona. (Požgaj et al., 1997)

3.4.4.1. Obecný ortotropní materiál

Hookeův zákon obecného ortotropního materiálu v hlavním ortotropním souřadnicovém systému odvodíme z Hookeova zákona obecného anizotropního materiálu s uvažováním charakteristiky hlavních ortotropních os

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

S uvažováním symetrie obsahuje matice tuhosti [C] u obecného ortotropního materiálu celkem 9 nezávislých materiálových konstant.

Obdobně úpravou Hookeova zákona v inverzním tvaru pro obecný anizotropní materiál obdržíme Hookeův zákon obecného ortotropního materiálu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Rovněž matice poddajnosti obecného ortotropního materiálu obsahuje 9 nezávislých materiálových konstant.

Jednotlivé prvky matice poddajnosti S_{ij} je možné rovněž stanovit pomocí fyzikálních charakteristik, které mají jasný fyzikální či geometrický význam. Do této skupiny patří modul pružnosti E, modul pružnosti ve smyku G a Poissonovo číslo μ .

V případě ortotropního materiálu mají tyto veličiny navíc směrové indexy v souladu s hlavním ortotropním souřadnicovým systémem 1, 2 a 3. Fyzikální charakteristiky jsou pochopitelně v různých ortotropních směrech různé.

Pro poměrné přetvoření a zksoy v hlavních ortotropních směrech dostáváme

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{21} * \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{31} * \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_2 = -\mu_{21} * \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{32} * \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_3 = -\mu_{13} * \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{23} * \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (4.7)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}}; \gamma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{31}}; \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (4.8)$$

Předchozí složkové rovnice napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

A následně symbolicky

$$[\sigma] = [C] * [\varepsilon] \quad (4.10)$$

$$[\varepsilon] = [S] * [\sigma] \quad (4.11)$$

Matice obsahuje celkem 12 technických materiálových parametrů. Z podmínky symetrie pro matici materiálové poddajnosti [S] vyplývá velice důležitá vazba mezi technickými materiálovými parametry zapsané obecně

$$\frac{\mu_{ij}}{E_i} = \frac{\mu_{ji}}{E_j}; i, j = 1, 2, 3 \quad (4.12)$$

Porovnáním matic můžeme vyjádřit jednotlivé prvky matice poddajnosti pomocí technických materiálových charakteristik. (Vrbka, 2008)

3.4.4.2. Rovinný ortotropní materiál

Zvláštním případem prostorového ortotropního materiálu je rovinný ortotropní materiál, který se používá jako výpočtový model tenké vrstvy kompozitu-laminy.

Předpokládáme, že element leží v hlavní souřadnicové rovině 1, 2 a v ní je také zatěžován. Jde tedy o rovinnou napjatost a následující napětí jsou nulová

$$\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{32} = 0 \quad (4.13)$$

V tomto případě se maticová relace platící pro obecný prostorový ortotropní materiál zredukuje následovně

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Matice tuhosti [C] rovinného ortotropního materiálu tedy obsahuje čtyři nezávislé materiálové konstanty. Inverzní tvar Hookeova zákona vypadá následovně

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Rovněž matice poddajnosti má ve sledovaném případě 4 nezávislé prvky.

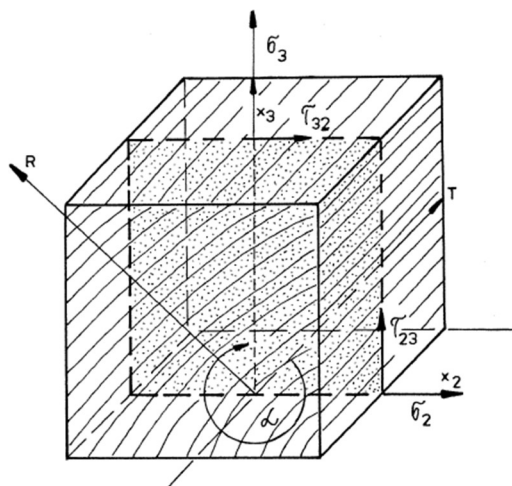
Pokud použijeme inženýrských materiálových konstant, potom má inverzní Hookeův zákon pro rovinný případ následující tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

opět se čtyřmi nezávislými inženýrskými materiálovými konstantami. (Vrbka, 2008)

3.4.5. Transformace souřadnic

Při opisování rovinného stavu napjatosti třeba často přejít od jedné souřadnice systému (L, T, R – anatomické směry) k druhému libovolnému systému X_1, X_2, X_3 . V tomto případě je nevyhnutelné najít složky napětí, deformace a deformační konstanty, když znám složky napětí v příslušných anatomických směrech dřeva a přecházíme k novému systému souřadnicových os.



Obrázek 4: Rotace ortotropních os se zřetelem na příčnou rovinu dřeva (Požgaj et al., 1997)

3.4.5.1. Transformace napětí a deformace

Pro transformaci napětí můžeme použít maticový zápis, který ve zkrácené formě má tvar

$$\sigma' = T * \sigma \quad (4.17)$$

Inverzní matice T^{-1} pro napětí má následující tvar

$$T_{\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 * \sin \alpha * \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 * \sin \alpha * \cos \alpha \\ -\sin \alpha * \cos \alpha & \sin \alpha * \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Zkrácená forma deformační matice má tvar

$$\varepsilon' = T * \varepsilon \quad (4.19)$$

Inverzní matice T^{-1} pro deformace má následující tvar

$$T_{\varepsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha * \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha * \cos \alpha \\ -2 * \sin \alpha * \cos \alpha & 2 * \sin \alpha * \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Zkrácená forma matice koeficientů tuhosti má následující tvar

$$C' = T_{\varepsilon} * C * T_{\sigma}^{-1} \quad (4.21)$$

(Požgaj et al., 1997)

Jednotlivé koeficienty tuhosti mají následující tvar

$$C'_{11} = C_{11} * \cos \alpha^4 + C_{22} * \sin \alpha^4 + 2 * (C_{12} + 2 * C_{66}) * \sin \alpha^2 * \cos \alpha^2 \quad (4.22)$$

$$C'_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) * \sin \alpha^2 * \cos \alpha^2 + C_{12} * (\sin \alpha^4 + \cos \alpha^4) \quad (4.23)$$

$$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) * \sin \alpha * \cos \alpha^3 + (C_{12} - C_{22} + 2 * C_{66}) * \sin \alpha^3 + \cos \alpha \quad (4.24)$$

$$C'_{22} = C_{11} * \sin \alpha^4 + C_{22} * \cos \alpha^4 + 2 * (C_{12} + 2 * C_{66}) * \sin \alpha^2 * \cos \alpha^2 \quad (4.25)$$

$$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) * \sin \alpha^3 + \cos \alpha + (C_{12} - C_{22} + 2 * C_{66}) * \sin \alpha * \cos \alpha^3 \quad (4.26)$$

$$C'_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2 * (C_{12} + C_{66})) * \sin \alpha^2 * \cos \alpha^2 + C_{66}(\sin \alpha^4 + \cos \alpha^4) \quad (4.27)$$

(Vrbka, 2008)

Zkrácená forma matice koeficientů deformace má následující tvar

$$S' = T_{\sigma} * S * T_{\varepsilon}^{-1} \quad (4.28)$$

(Požgaj et al., 1997)

3.5. Ohyb

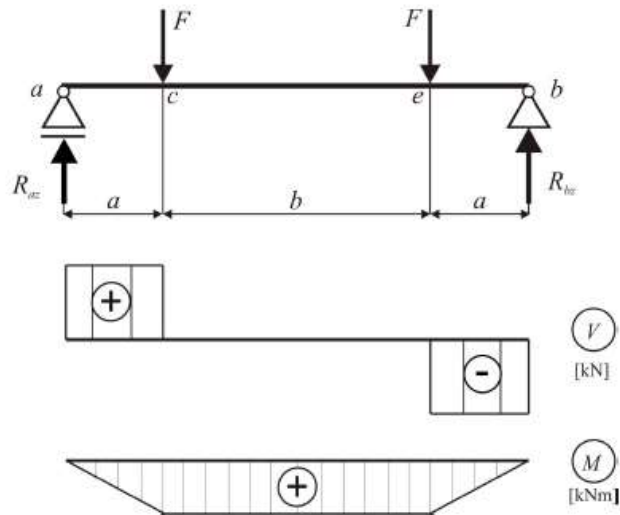
3.5.1. Ohyb nosníku

Při ohybu nosníku (prutu) vznikají v jeho průřezech ohybové momenty a posouvající síly. Původně přímá osa prutu se změní v rovinnou křivku.

Pro rovinný ohyb v rovině xz platí:

$$N_x = 0, \quad V_y = 0, \quad M_x = 0, \quad M_z = 0, \quad V_z \neq 0, \quad M_y \neq 0$$

Prostý nosník symetrického průřezu ve svislé rovině s rozpětím L dle obr. je symetricky zatížen dvěma osamělými silami F . Z průřezu vnitřních sil vidíme, že na úseku $|ce|$ je nulová posouvající síla a jedinou vnitřní silou v této části je konstantní (kladný) ohybový moment o velikosti $M = F * a$ [MPa]. Jedná se o základní, nejjednodušší případ ohybu, tzv. prostý ohyb a vznikají zde pouze normálová napětí. Na úsecích $|ac|$ a $|eb|$ pak působí ohybový moment i posouvající síla. Vedle normálových napětí působí také smyková. (Krejsa, [online]; Havířová, 2003))

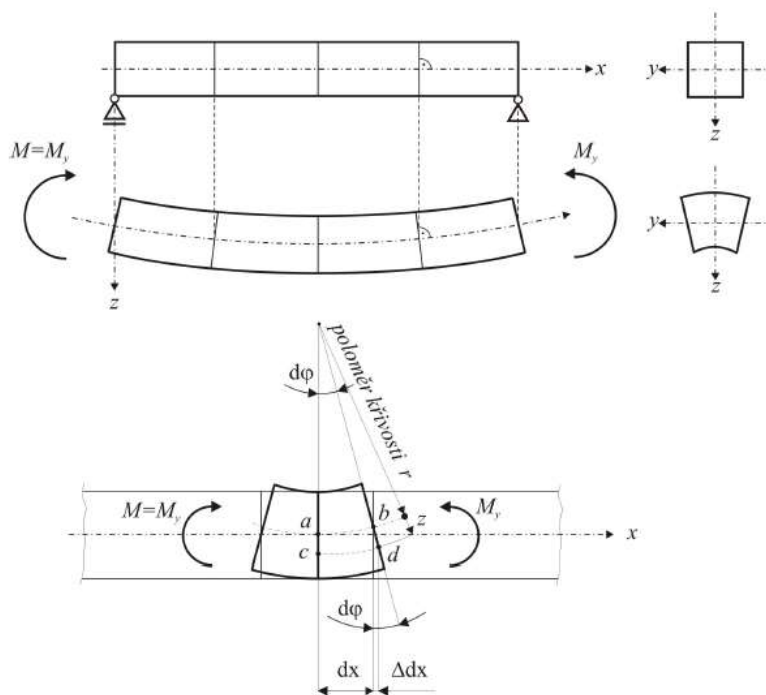


Obrázek 5.: Symetricky zatížení prostý nosník (Krejsa, [online])

3.5.1.1. Normálové napětí při ohybu

Budu popisovat vztahy při prostém ohybu, kdy zatížení nepřekročí mez kluzu, pohybuje se v pružné oblasti, a tudíž pro něj platí Hookeův zákon. U prostého ohybu jsou ohybové momenty shodné ve všech průřezech. Při odvození vztahu pro normálové napětí σ_x vycházíme ze dvou základních předpokladů:

- Průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstanou rovinnými a kolmými k deformované ose
- Podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí



Obrázek 6.: Deformace ohýbaného nosníku [Krejsa, [online]]

Na základě prvního předpokladu a obr. 6 se dají odvodit vztahy mezi protažením (případně zkrácením) jednotlivých vláken prutu. Uvažujme nyní elementární úsek prutu dx na obr. 6. Vlivem ohybu se průřezy vzájemně pootočí o úhel $d\varphi$. Tím, že byly původní délky shodné, pro absolutní i relativní změnu délky vlákna cd platí:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d_x}{d_x} = \frac{z \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{z}{r} \quad (5.1)$$

Z této rovnice je zřejmé, že poměrná změna délky vlákna je opravdu přímo úměrná jeho vzdálenosti od osy prutu. Dosazením do Hookeova zákona potom dostaneme:

$$\delta_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E}{r} \cdot z \quad (5.2)$$

Z této rovnice vyplývá, že normálové napětí se při tomto namáhání mění lineárně po výšce průřezu. Také dává důkaz, že vlákna leží v rovině xy a procházejí osou prutu ($z=0$) jsou nezatížena normálovým napětím $\sigma_x=0$. Tuto rovinu nazýváme neutrální rovina nosníku a její průsečnici s rovinou průřezu yz neutrální osa průřezu. (Krejsa, [online]; Havířová, 2003)

Díky znalostem statické podmínky ekvivalence vnitřních sil v průřezu prutu můžeme napsat vztah

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (5.3)$$

Tato rovnice definuje deformace ohýbaného pružného prutu vyvozené ohybovými momenty a je výchozím vztahem pro určování přetvoření prutu. Následně obdržíme následující vztah

$$\sigma = \frac{M}{I} * z \quad (5.4)$$

Normálová napětí v průřezu tedy probíhají lineárně po výšce nosníku a extrémní hodnoty vznikají v krajních bodech. (Šmiřák,2000; Havířová, 2003)

3.5.2. Ohybová napětí

Uvažujme nosník zatížený silovými účinky v rovině procházející jeho osou. Účinek těchto vnějších sil a momentů lze obecně v každém přímém průřezu nahradit:

1. Normálovou silou $N(x)$, která je rovna součtu všech sil a složek všech sil ve směru osy nosníku po jedné straně řezu.
2. Posouvající (smykovou) silou $V(x)$, která je rovna součtu všech sil a složek sil kolmých n osu nosníku po jedné straně řezu.
3. Ohybovým momentem $M(x)$, který je roven součtu momentů všech sil a momentů působících po jedné straně řezu.

Při zjišťování uvedených vnitřních účinků $N(x)$, $V(x)$ a $M(x)$ je účelné dodržovat znaménkovou úmluvu (viz. obrázek 7)



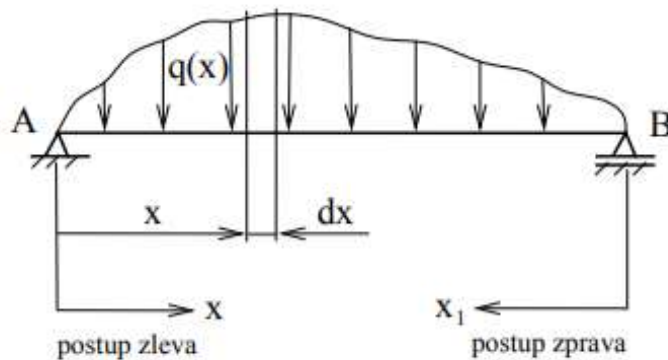
Obrázek 7.: Znaménková úmluva pro vnitřní silové účinky (Plánička, online)

Závislosti mezi spojitým zatížením $q(x)$, posouvající silou $V(x)$ a ohybovým momentem $M(x)$ vyjadřuje tzv. Schwedlerova věta. V případě volby nezávisle proměnné x zleva platí

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x), \quad \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (5.5)$$

Tento vztah lze použít pro zjištění průběhu posouvajících sil a ohybových momentů, ale také poslouží pro kontrolu správnosti vyšetření jejich průběhů, neboť z těchto vztahů vyplývá:

- Je-li $q(x) = 0$, je posouvající síla konstantní a ohybový moment se mění lineárně
- Je-li $q(x) = \text{konstantní}$, mění se posouvající síla lineárně a ohybový moment má parabolický průběh
- Jestliže se v nějakém řezu mění $q(x)$ skokem, je v průběhu posouvající síly v tomto místě zlom
- v intervalu, kde je $V(x) > 0$, ohybový moment roste, při $V(x) < 0$ ohybový moment klesá
- v průřezu, kde je $V(x) = 0$, dosahuje ohybový moment lokální extrémní hodnoty.

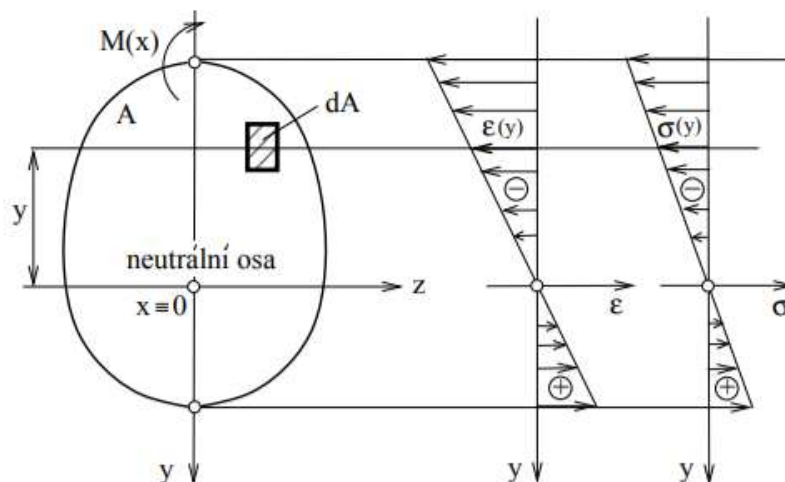


Obrázek 8.: Nosník zatížený obecným spojitým zatížením (Plánička, [online])

Předpoklady pro napětí pro zjištění deformace při ohybu nosníku jsou následující:

- Nosník je namáhán prostým ohybem nebo je dostatečně dlouhý, takže lze zanedbat vliv posouvající síly.
- Řezy kolmé na osu zůstávají při deformaci ohybem rovinně a pouze se natáčejí kolem tzv. neutrální osy. Tyto osy v jednotlivých průřezech vyplní tzv. neutrální rovinu.
- Platí Hookeův zákon.
- Materiál je homogenní a izotropní.

Uvažujme obecný řez s ohybovým momentem $M(x)$. Je zřejmé, že vlivem natočení řezu při ohybu vzniká v každém řezu pouze normálová složka napětí $\sigma_x(y)$ (smykové napětí je nulové, neboť jsme zanedbali vliv posouvající síly $V(x)$), takže se jedná o jednoosou napjatost.

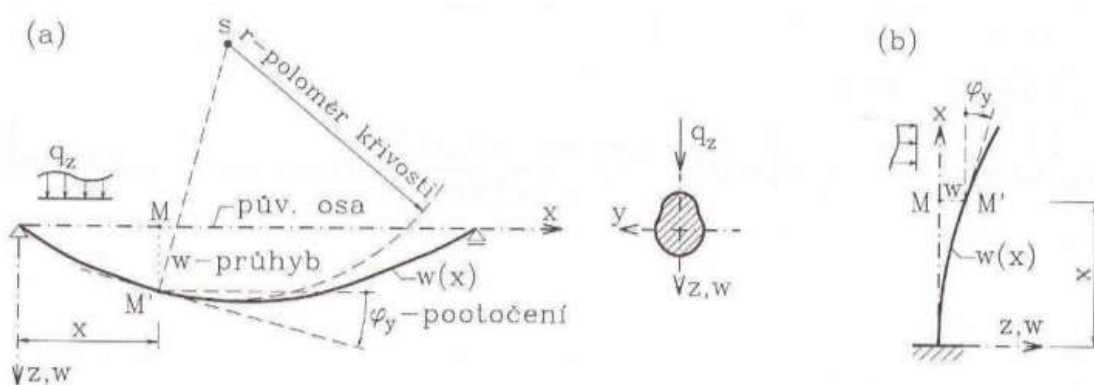


Obrázek 9.: Průběh deformací a normálového napětí při ohybu (Plánička, [online])

Z výše uvedeného je zřejmé, že deformace i napětí závisí lineárně na vzdálenosti y od neutrální osy. Neutrální osa rozdělí průřez na část přenášející tahová napětí (znaménko $+$) a na část přenášející napětí tlaková (znaménko $-$). (Plánička, [online])

3.5.3. Diferenciální rovnice ohybové čáry

Je-li nosník (prut) dostatečně štíhlý, je jeho deformační stav určen tvarem ohybové čáry, tj. křivky, v níž přejde původně přímá osa nosníku vlivem zatížení. Omezíme se na rovinný případ, kdy zatížení i podepření je symetrické ke svislé rovině xz , přičemž osa z je hlavní osou setrvačnosti průřezu. Na obrázku 10 je vyznačena ohybová čára $w(x)$, jejíž jednotlivé pořadnice označujeme jako průhyb nosníku v daném místě; kladný je průhyb, směřuje-li dolů.



Obrázek 10.: Ohybová čára nosníku (Šmiřák, 2000)

Pootočení $\varphi = \varphi_y$, tj. úhel, který svírá tečna k ohybové čáře s osu x , budeme pokládat za kladné po smyslu chodu hodinových ručiček. V teorii malých deformací je $\varphi \ll 1$, takže platí

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{dw}{dx} \quad (5.6)$$

Z matematiky je znám výraz pro křivost rovinné čáry

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.7)$$

Zanedbáme-li vliv smyku na tvar ohybové čáry, tedy přisoudíme-li deformační účinky jen ohybovým momentům, pak vyjde po úpravě následující vztah

$$M = EI \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.8)$$



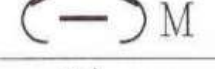
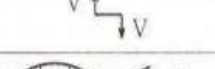
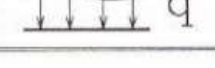
$$M = D * \kappa \quad (5.9)$$

což je diferenciální rovnice ohybové čáry 2. řádu. Druhá derivace ohybové čáry je tedy přímo úměrná ohybovému momentu M v daném místě a nepřímo úměrná ohybové tuhosti EI (E – modul pružnosti, I – moment setrvačnosti)

Je-li ohybová tuhost nosníku konstantní (EI = konst.), pak dvojnásobným derivováním a využitím Schwedlerových vět obdržíme

$$q = EI \frac{d^4w}{dx^4} \quad (5.10)$$

což představuje diferenciální rovnici 4. řádu: čtvrtá derivace průhybu je tedy úměrná příčnému spojitému zatížení (Šmiřák, 2000; Havířová, 2003)

| Označení a kladný smysl | Veličina | Diferenciální závislost | |
|---|-----------------|-------------------------|------------------|
| | | obecný případ | pro EI = konst.. |
|  | průhyb | w | |
|  | pootočení | $\varphi = w'$ | |
|  | ohybový moment | $M = -EIw''$ | |
|  | posouv. síla | $V = -(EIw''')$ | $V = -EIw'''$ |
|  | příčné zatížení | $q = (EIw''')''$ | $q = EIw^{IV}$ |

Tabulka 1: Přehled diferenciálních závislostí (čárkami nad w je označena derivace průhybu podle x) (Šmiřák, 2000)

3.6. Ohyb desky

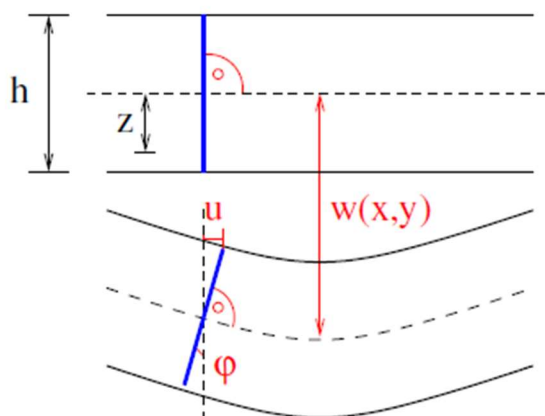
V technické praxi se často vyskytují plošné konstrukce, které jsou převážně zatěžovány ohybovými účinky (podobně jako ohýbané nosníky). Jsou jimi například stropní desky a panely nebo mostovky. Jako desky počítáme plošné konstrukce, které jsou zatíženy a podepřeny výhradně kolmo ke svojí střednicové rovině.

U desek je jeden rozměr (tloušťka) podstatně (5 a více krát) menší než rozměry ostatní. Je-li tloušťka 10 a více krát menší, pak desky označujeme jako tenké a můžeme k jejich analýze použít Kirchhoffovy teorie pro tenké desky, v opačném případě desky označujeme jako tlusté a měli bychom použít výstižnější Mindlinovy teorie. (Brožovský, 2012)

3.6.1. Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek

Předpoklady Kirchhoffovy teorie je možné shrnout do několika bodů:

- Jednotlivé vrstvy desky na sebe netlačí,
- Normálová napětí ve střednicové vrstvě jsou nulová,
- Body ve střednicové rovině se mohou přemisťovat pouze ve směru osy z ,
- Normály střednicové roviny zůstávají i po deformaci přímé a kolmé k této rovině.



Obrázek 11: Deska-předpoklad o normálách (Brožovský, 2012)

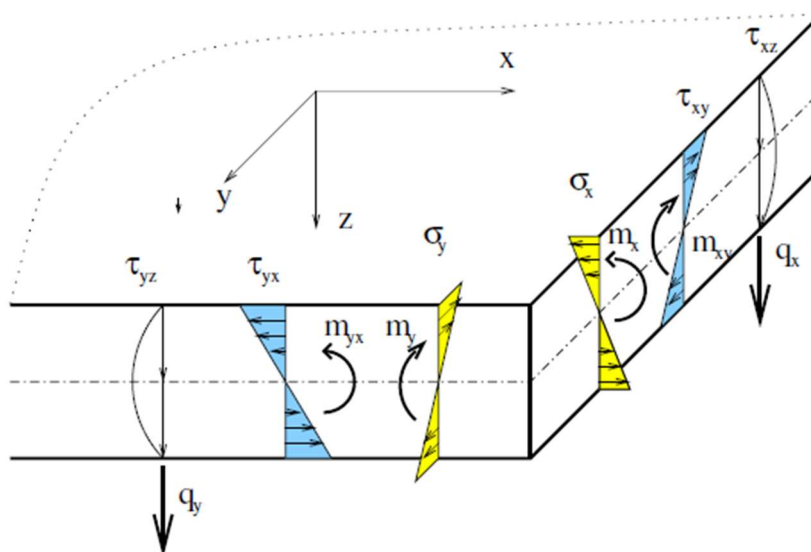
Předpoklad o kolmosti normál je ilustrován na obr. 11. Tento předpoklad stejně jako u ohýbaných nosníků způsobuje lineární změnu normálových poměrných deformací ϵ a normálových napětí σ po tloušťce desky. Tedy prodloužení u (ve druhém směru pak v) lineárně roste se zvětšující se vzdáleností z od střednicové roviny. (Brožovský, 2012)

3.6.2. Neznámé veličiny na desce

Jak vyplývá z předpokladů Kirchhoffovy teorie, body ve střednicové rovině se mohou pohybovat jen ve svislém směru w (tedy směru kolmém k nezdeformované střednicové ploše). Obdobně jako na nosnicích můžeme pracovat s pootočeními φ zdeformované střednicové plochy:

$$\varphi_x = \frac{dw}{dx} \quad (6.1)$$

$$\varphi_y = \frac{dw}{dy} \quad (6.2)$$



Obrázek 12: Napětí a vnitřní síly na desce (Brožovský, 2012)

Ve střednicové ploše desky je nenulové pouze posunutí w ve směru osy z systému souřadnic. Jak je ovšem vidět na obr. 12, mimo střednicovou plochu jsou zbývající dvě (vodorovná) posunutí u a v obecně nenulová. Budeme-li předpokládat, že přibližně platí $\tan(\varphi) = \varphi$, pak můžeme v souladu s obr. 12 psát:

$$u = -z\kappa_x = -z \frac{dw}{dx}; \quad (6.3)$$

$$v = -z\kappa_y = -z \frac{dw}{dy} \quad (6.4)$$

K získání výrazu pro poměrné deformace využijeme geometricko-deformačních vztahů teorie pružnosti a dosadíme do nich za u a v výrazy podle rovnice:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = -z \frac{d^2w}{dy^2} \quad (6.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -2z \frac{d^2w}{dx*dy} \quad (6.7)$$

které můžeme zjednodušit do tvaru

$$\varepsilon = z * \kappa \quad (6.8)$$

kde

$$\kappa_x = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (6.9)$$

$$\kappa_y = \frac{d^2w}{dy^2} \quad (6.10)$$

$$\kappa_{xy} = 2 \frac{d^2w}{dx*dy} \quad (6.11)$$

Díky tomuto můžeme napsat vztah pro celkovou deformaci

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa \quad (6.12)$$

Stále budeme uvažovat materiál pro který platí Hookeův zákon. Můžeme tedy vyjít ze základních vztahů platných pro pružné těleso a do nich dosadit výraz pro celkovou deformaci

$$\delta = C \varepsilon_0 + C \kappa \quad (6.13)$$

(Brožovský, 2012)

3.6.3. Okrajové podmínky

Jestliže vnější zatížení konstrukce není v rovnováze, způsobí její pohyb, kterému bráníme podepřením, respektive uložením konstrukce. Pohyb hmotného objektu může být posuvný (translační) nebo otáčivý (rotační) a počet možností pohybu udávají tzv. stupně volnosti. Tuhé těleso má v prostoru 6 stupňů volnosti, tj. má možnost celkem šesti pohybů: tří pohybů translačních ve směru souřadnicových os x, y a z a tří pohybů rotačních kolem těchto os. Volnost pohybu hmotného objektu omezují nebo znemožňují tzv. vazby, tzn, že ruší nebo odebírají stupně volnosti objektu. (Havířová, 2003)

Vazeb může být obecně v prostoru větší počet, pro potřeby této práce budou stačit následující:

- Volná deska
 - umožňuje veškeré průhyby po ose x i y

$$\int \int w \, dx \, dy = 0 \quad (6.14)$$

- Podepřená deska (podepřený okraj desky)

- znemožňuje průhyb

$$w = 0 \quad (6.15)$$

- může se otáčet, nemůže se ovšem kroutit

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2w}{dy^2} = 0 \quad (6.16)$$

- Vetknutá deska

- vetknutí znemožňuje průhyb $w=0$

$$w = 0 \quad (6.17)$$

- nemůže se otáčet $dw/dx = dw/dy = 0$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} = 0 \quad (6.18)$$

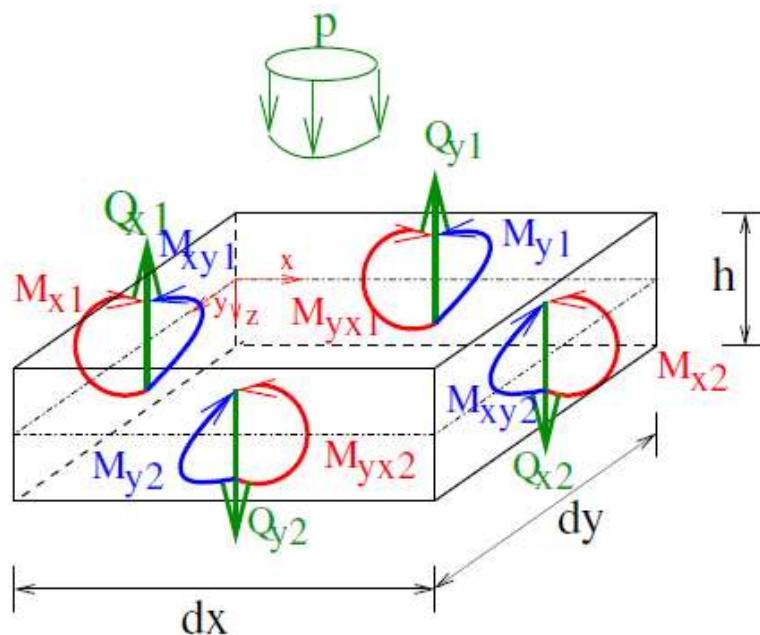
(Brdička, 2011)

3.6.4. Desková rovnice

Deskovou rovnici je možné získat z podmínek rovnováhy na diferenciálním elementu desky, přičemž musíme mít stále na paměti, že dále uvedený výsledek bude platný jen pro desku z izotropního a lineárně pružného materiálu.

$$x: \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_{xy}}{dy} = V_{xy} \quad (6.19)$$

$$y: \frac{dM_{xy}}{dx} + \frac{dM_y}{dy} = V_{yz} \quad (6.20)$$



Obrázek 13.: Vnitřní síly na elementu desky (Brožovský, 2012)

Díky znalosti podoby vztahu pro distribuci spojitého zatížení můžeme napsat vztah

$$\frac{dV_{xz}}{dx} + \frac{dV_{yz}}{dy} = q \quad (6.21)$$

Díky znalosti podoby diferenciální rovnici 4. řádu derivace průhybu můžeme napsat konečnou podobu deskové rovnice

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 2 \frac{d^4w}{dx^2dy^2} + \frac{d^4w}{dy^4} = \frac{q}{D} \quad (6.22)$$

(Brožovský, 2012)

Pokud bychom chtěl tuto deskovou rovnici rozepsat pro obecně ortotropní materiál, museli bychom využít koeficienty ohybové tuhosti. Výsledná rovnice desky by vypadala následovně:

$$D_{11} \frac{d^4w}{dx^4} + 2(D_{11} + 2D_{66}) \frac{d^4w}{dx^2dy^2} + 4D_{16} \frac{d^4w}{dx^3dy} + 4D_{26} \frac{d^4w}{dx dy^3} + D_{22} \frac{d^4w}{dy^4} = q \quad (6.23)$$

(Brdička, 2011)

3.7. Laminační teorie

Použitím klasické laminační teorie lze odvodit tuhost výsledného kompozitního laminátu z jeho jednotlivých vrstev (Baumruk, [online]). Klasická laminační teorie je založena na Love-Kirchhoffově teorii "tenké skořápky" (rovné přímky, kolmé ke středové vrstvě zůstávají po deformaci rovnými, jsou stále ke středové vrstvě kolmé; tloušťka desky se při deformaci nemění) (Calard, 2011).

Předpoklady klasické laminátové teorie jsou:

- Deska je složena z libovolného počtu vrstev ortotropních plátů slepených dohromady (ortotropní osy vrstev nemusí souhlasit s osami x, y desky)
- Deska je tenká-tloušťka h je mnohem menší než ostatní rozměry
- Posunutí u, v, w jsou malá ve vztahu k tloušťce desky
- Vlastnosti desky jsou definovány referenční rovinou, KLT je tedy použitelná především na symetrické lamináty
- Napětí v ploše σ_x , σ_y a σ_{xy} , jsou malá vzhledem k celku
- Příčná smyková napětí σ_{xx} a σ_{yz} jsou zanedbatelná
- Tangenciální posunutí u a v jsou lineárními funkcemi osy z
- Příčné normálové napětí σ_z je zanedbatelné

- Pro každou vrstvu platí Hookeův zákon
- Deska má konstantní tloušťku

Síly působící na malou plochu laminátu mohou být popsány šesti složkami - 3 silami v rovině a 3 momenty. Síly jsou značeny N_i ($i=1,2,6$) pro všechny stavy napětí ve směru i . Momenty zapisujeme M_i ($i=1,2,6$) ve směru i . M_{xy} je kroutící moment způsobený gradientem smykového napětí při ohybu laminátu (Calard, 2011). Tyto síly v maticovém tvaru zapisujeme jako:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_6^0 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Tato matice 6x6 je známa v kompozitových konstrukčních analýzách jako matice ABD, a rovnice jako závislost ABD nebo zobecněný „Hookeův zákon“ pro lamináty (Baumruk, [online])

Tuto matici lze zapsat ve zjednodušeném zápisu jako

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa^0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

což se může upravit na tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} N \\ \kappa^0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

kde,

$$[A^*] = [A^{-1}], \quad (7.4)$$

$$[B^*] = -[A]^{-1} * [B] \quad (7.5)$$

$$[C^*] = [B] * [A]^{-1} \quad (7.6)$$

$$[D^*] = [D] - [B][A]^{-1} * [B] \quad (7.7)$$

plně převrácená matice má následující podobu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_6^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} & B'_{11} & B'_{12} & B'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} & B'_{12} & B'_{22} & B'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} & B'_{16} & B'_{26} & B'_{66} \\ C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} & D'_{11} & D'_{12} & D'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} & D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{66} & D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

kde,

$$[A'] = [A^*] - [B^*] * [D^*]^{-1} [C^*], \quad (7.9)$$

$$[B'] = [B^*] - [D^*]^{-1} \quad (7.10)$$

$$[C'] = -[D^*]^{-1} [C^*] \quad (7.11)$$

$$[D'] = [D^*]^{-1} \quad (7.12)$$

Plně převrácená podoba matice se nejčastěji používá ve formě laminátových konstitutivních rovnic (Nettles, 1994).

Člen matice A_{ij} popisuje tahovou tuhost v rovině laminátu a má tvar:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k * (h_k - h_{k-1}) \quad (7.13)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Člen matice B_{ij} popisuje kombinaci podélné a ohybové tuhosti a má tvar:

$$B_{ij} = \frac{1}{2} * \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k * (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (7.15)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Člen matice D_{ij} popisuje ohybovou tuhost a má tvar:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} * \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k * (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (7.17)$$

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Výslednice sil a momentu závisí na všech deformacích a zakřivení vztažného povrchu. Pokud jsou prvky D_{16} a D_{26} nenulové, způsobují ohybové momenty M_x, M_y , křivost κ_{xy} a krouticí moment M_{xy} vytváří zakřivení κ_x a κ_y . Je-li nenulový prvek D_{12} ,

ohybový moment M_x působí zakřivení k_y a ohybový moment M_y zakřivení k_x . (Marek,2018)

Pokud je laminát symetrický kolem střednicové plochy, vyvarujeme se problémům kroucení při procesu výroby (působením tepla a tlaku), které by nastaly, kdyby tato symetrie neexistovala. V matici ABD je tedy člen B_{ij} nulový a matice má následující tvar

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_3^0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

(Baumruk, [online])

3.8. Použité dřevo

Dřevo smrku patří mezi naše nejvýznamnější hospodářská dřeva. Používá se na výrobu řeziva, dých, překližkových materiálů, aglomerovaných materiálů (dřevotřískové a dřevovláknité desky) a stavební dříví. Dále se používá na výrobu nábytku, stavebně truhlářských výrobků (okna, dveře, podlahy, obklad) hraček, drobných předmětů pro domácnost. Smrkové dřevo s úzkými letokruhy, pravidelnou stavbou bez vad bývá označováno jako dřevo rezonanční a používá se při výrobě rezonančních desek hudebních nástrojů. Nachází také uplatnění v celulózo-papírenském průmyslu (výroba buničiny a papíru) i chemickém průmyslu. Z technologického hlediska se dřevo dobře opracovává, suší, ovšem hůře se impregnuje.

Bukové dřevo pro svou barvu a vlastnosti patří mezi nejvýznamnější hospodářská dřeva. Bukové dřevo se používá na výrobu loupaných i krájených dých, překližkových a aglomerovaných materiálů, železničních pražců (je nutné provést impregnaci dřeva), podlaha a k chemickému zpracování. Pro svou barvu je dřevo hojně používáno v nábytkářství a pro svoji dobrou ohýbatelnost na výrobu ohýbaného nábytku – židle, křesla a věšáky. Dřevo buku je velmi dobře měřitelné, proto je dřevo používáno jako náhražka za jiná cennější tropická dřeva. Zvláštním znakem bukového dřeva je častý výskyt nepravého jádra u starých stromů. Z technologického hlediska se dřevo dobře opracovává, moří, leští, paří a impregnuje, ale špatně se suší (dochází k tvorbě výsušných trhlin). (Gandelová, 2002)

3.8.1. Porovnání vlastností použitých dřev

| Dřevo | Hustota [kg/m ³] | E ₁ [10 ⁸ N/m ²] | E ₂ [10 ⁸ N/m ²] | E ₃ [10 ⁸ N/m ²] | G ₄₄ [10 ⁸ N/m ²] | G ₅₅ [10 ⁸ N/m ²] | G ₆₆ [10 ⁸ N/m ²] |
|-------|------------------------------|--|--|--|---|---|---|
| Smrk | 440 | 159 | 6.9 | 3.9 | 0.36 | 7.7 | 7.5 |
| Buk | 750 | 137 | 22.4 | 11.4 | 4.6 | 10.6 | 16.1 |

Tabulka 2: Porovnání elastických koeficientů smrku a buku (Hearmon, 1948)

| Dřevo | μ ₁₂ | μ ₂₁ | μ ₁₃ | μ ₃₁ | μ ₂₃ | μ ₃₂ |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Smrk | 0.44 | 0.03 | 0.38 | 0.01 | 0.47 | 0.25 |
| Buk | 0.45 | 0.07 | 0.51 | 0.04 | 0.75 | 0.36 |

Tabulka 3: Porovnání Poissonových čísel smrku a buku (Hearmon, 1948)

| Dřevo | Tah [MPa] | | Tlak [MPa] | | Smyk [MPa] |
|-------|-----------|-----|------------|-----|------------|
| | | ⊥ | | ⊥ | |
| Smrk | 84 | 1.5 | 40 | 4.1 | 5.8 |
| Buk | 130 | 3.5 | 62 | 7.9 | 12.3 |

Tabulka 4: Porovnání mezí pevnosti smrku a buku (Zeidler, 2016)

3.9. Systém Novatop

Novatop je ucelený konstrukční systém z velkoformátových desek, které se vyrábějí z křížem lepeného masivního dřeva (CLT – cross laminated timber).



Obrázek 14: Panel Novatop Static (www.novatop-system.cz)

Výrobky Novatop se vyrábějí ze smrkových lamel, které se skládají do vrstev, jednotlivé vrstvy jsou k sobě otočená o 90°. Počet vrstev se může měnit a určuje celkovou tloušťku panelu. Dřevo se vysušuje na vlhkost přibližně 8 %, což zajišťuje vysokou stabilitu a zabraňuje vzniku trhlin. Jednotlivé lamely se mezi sebou lepí, při výrobě se používá nejčastěji polyuretanová nebo melaminová lepidla.

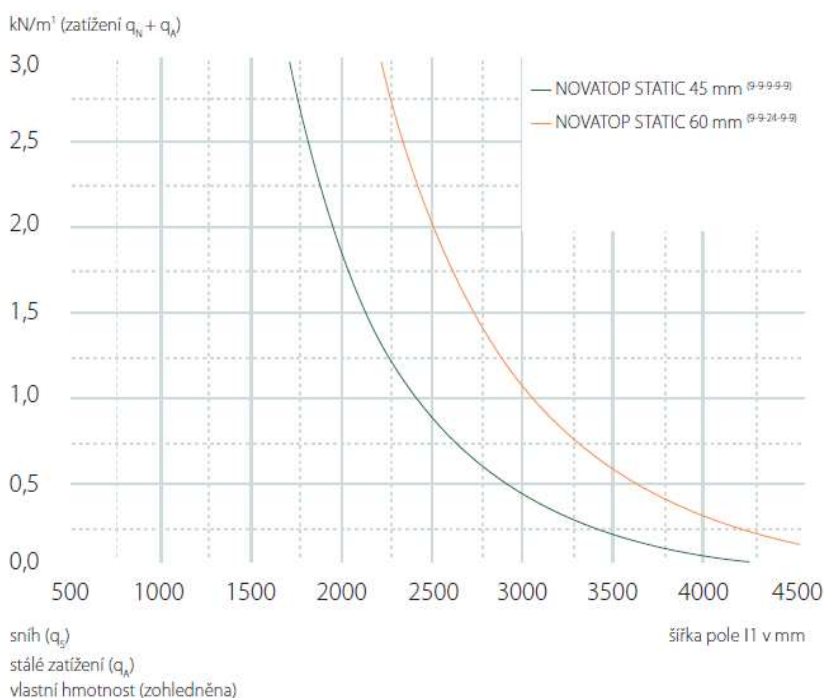
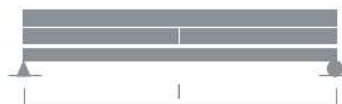
45 mm
(9p-9p-9q-9p-9p)



Obrázek 15: Rozložení vrstev v panelu Novatop Static o tloušťce 45 mm (www.novatop-system.cz)

Deska Novatop Static byla vyvinuta speciálně pro použití při realizaci střešních přesahu a překlenutí velkých rozpon, má vysokou stabilitu při namáhání tlakem a tahem a mimořádnou statickou únosnost. Tento druh panelu se vyrábí se dvěma rovnoběžnými svrchními vrstvami z každé strany a středová vrstva s kolmým průběhem vláken k průběhu svrchních vrstev. Celá deska se skládá ze smrkových lamel o tloušťce vrstvy 9 mm, což dává celkovou tloušťku panelu 45 mm. (www.novatop-system.cz)

Předběžné dimenzování 1 pole I/300



Graf 1: Únosnost panelu Novatop Static (www.novatop-system.cz)

4. Metodika

Pro zjištění možnosti náhrady smrkového dřeva dřevem buku bylo potřeba vytvořit numerický výpočetní model, vycházející zejména z numerického řešení. K vyřešení těchto rovnic jsem použil plnou verzi program FlexPDE 7 (www.pdesolutions.com).

Cílem tohoto numerického řešení bylo zjistit, při jakém zatížení přesáhne napětí, vznikající působícím plošným zatížením, meze úměrnosti daného dřeva. Z toho důvodu bylo vždy potřeba zjistit maximální únosnost daného rozměru panelu. Postup celkového výpočtu by se dal shrnout do čtyř základních kroků:

1. na základě znalosti lineární elasticity určíme z plošného zatížení maximální momenty na desce
2. díky znalosti laminační teorie určíme ze zjištěných maximálních momentů průhyb po délce desky
3. z tohoto průhybu můžeme dále určit deformace
4. z deformace pak zjistíme napětí v jednotlivých vrstvách

Jednotlivé kroky a dílčí postupy výpočtu budou vysvětleny a popsány v následujících kapitolách.

4.1. Program FlexPDE

Program FlexPDE může vyřešit diferenciální rovnice prvního a druhého řádu, v případě použití sustituce i rovnice třetího a čtvrtého řádu, v jednorozměrné, dvourozměrné nebo třírozměrné kartézské soustavě souřadnic, v jednorozměrné sférické nebo válcové geometrii nebo v axiálně symetrické dvourozměrné geometrii. Systém může být jak v rovnovážném stavu, tak v závislosti na čase. Je tak možné vyřešit libovolný počet současných rovnic, kdy jediným limitem je výkon používaného počítače. Rovnice mohou být jak lineární, tak nelineární, a zároveň může být definováno libovolné množství oblastí s různými vlastnostmi materiálu.

K požadovanému výsledku potřebujeme nejdříve správně vytvořit textový soubor, tzv. „skript“. Obsah tohoto souboru se skládá z několika částí, z nichž každý má identický nadpis. Základní části skriptu jsou následující:

- TITLE popisný popis výstupu
- SELECT uživatelné ovládací prvky, které přepisují výchozí chování programu FlexPDE
- VARIABLES zde jsou pojmenovány závislé proměnné

- DEFINITIONS zde jsou definovány užitečné parametry, vztahy nebo funkce
- EQUATIONS každá proměnná je zde spojena s parciální diferenciální rovnicí
- BOUNDARIES popis geometrie objektu
- MONITORS AND PLOTS definován požadovaný grafický výstup
- END konec skriptu

K těmto základním částem skriptu patří také několik dalších volitelných částí pro popis zvláštních aspektů problému.

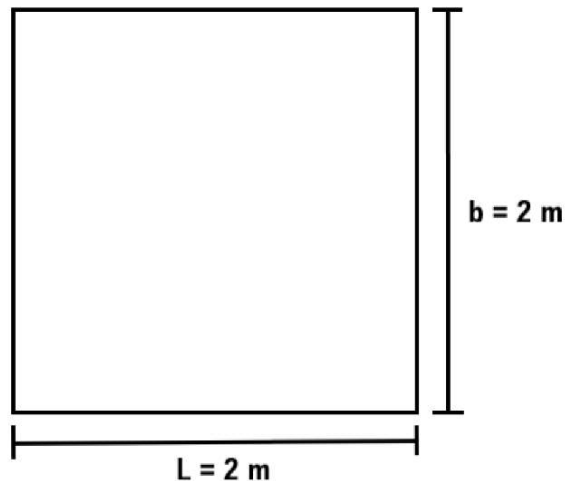
4.1.1. Tvorba skriptu

V následujícím odstavci popíši postup, jakým vznikl skript (v celém znění viz. Příloha 1.), díky kterému jsem byl schopen provést výpočetní část práce. Skript byl vytvořen pro pětivrstvou desku, která měla stejnou orientaci a tloušťku jednotlivých vrstev, jako má panel Novatop Static. Výsledkem skriptu byly vždy maximální momenty (M_1 , M_2 a M_6) pro různé rozměry desky a při různém plošném zatížení. Jednotlivé vrstvy byly uvažovány jako celistvá plocha, vrstva tím pádem nebyla rozdělena do jednotlivých lamel, ze kterých se panel vyrábí. Do skriptu také nebyly započítány vrstvy lepidla. Z výše uvedených důvodů nemůže být výsledek naprosto identický jako při reálné zkoušce, a měl by tedy hodnoty úměrnosti panelu Novatop mírně přesáhnout.

4.1.1.1. Definitions (definice)

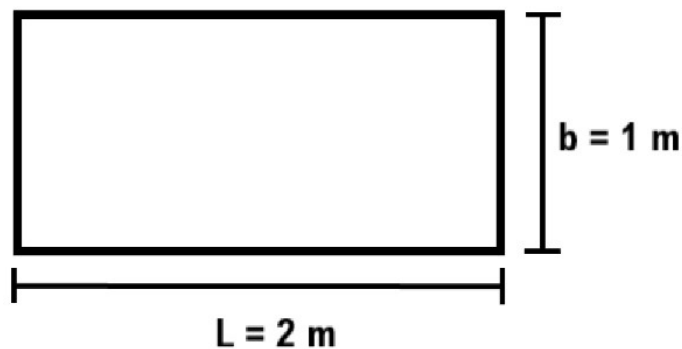
Tvoříme model panelu, kde jednotlivé vrstvy mají tloušťku 9 mm ($h_1, h_2, \dots, h_5 = 0,009$). Rozměry L a b vkládám podle dvou metod.

- “metoda ČTVEREC“
 - L i b je stejné,
 - zatížení bude mít jednotku $[\text{kN}/\text{m}^2]$



Obrázek 16: Metoda ČTVEREC

- „metoda OBDÉLNÍK“
 - b je vždy 1 metr, L se mění podle požadovaných rozměrů
 - zatížení bude mít jednotku $[\text{kN/m}^1]$



Obrázek 17: Metoda OBDÉLNÍK

Jednotlivé vrstvy byly orientovány následovně: vrstva 1 = 0° , vrstva 2 = 0° , vrstva 3 = 90° , vrstva 4 = 0° , vrstva 5 = 0° . Materiálové konstanty a hustota byly vybrány vždy pro dané dřevo (smrk nebo buk). Následně definujeme materiálové konstanty tuhosti pomocí vztahů 4.22 až 4.27 pro všech pět vrstev. Velikosti průhybu k_1 , k_2 a k_6 definujeme podle vztahů 6.9 až 6.11. Díky znalosti vztahů 5.1, 5.7 a 6.8 můžeme definovat celkovou deformaci. K definici ohybové tuhosti využijeme vztah 7.17 a definujeme ohybovou tuhost každé vrstvy zvlášť. Pro výpočet ohybového momentu využijeme vztah 5.9. Dále můžeme podle rovnice 4.10 napsat rovnice pro σ_1 , σ_2 a σ_6 jak pro geometrické, tak pro anatomické směry. Abychom byli schopni správně vytvořit rovnice napětí pro anatomické směry musíme využít transformační matici 4.18. K výpočtu zatížení vlastní vahou využijeme hustotu daného dřeva a velikost tíhového zrychlení. Následují hodnoty pro spojité zatížení, které působí kolmo na plochu desky a pro posouvající síly. Velikosti

posouvajících sil budou u všech měření nulové, bude se vždy měnit velikost spojitého zatížení.

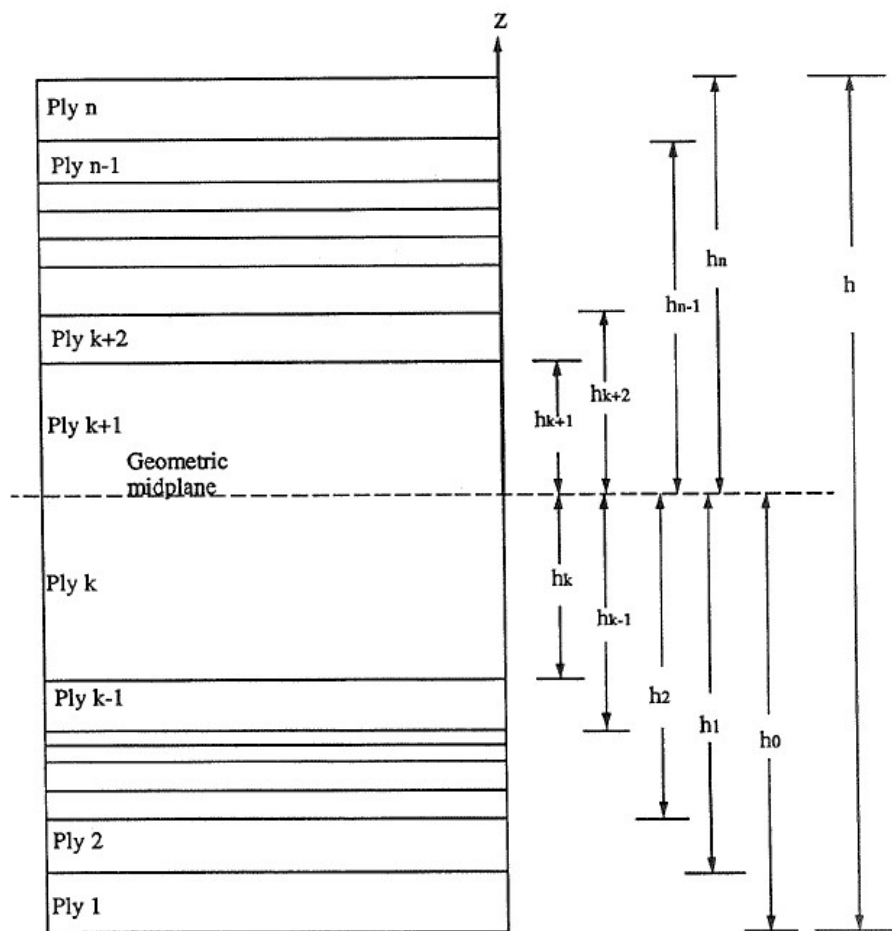
4.1.1.2. Okrajové podmínky a zobrazení

Okrajové podmínky nadefinujeme tak, aby se shodovaly s okrajovými podmínkami porovnávaného panelu Novatop Static (viz graf 1). K jejich definici se využije vztahů 6.14 až 6.18.

V odstavci „Plots“ nadefinujeme výstupy a zobrazení výsledků výpočtu. Ohybové momenty M_1 , M_2 a M_6 exportujeme do zvláštního textového dokumentu, ve kterém jsou zapsány ohybové momenty M_1 , M_2 a M_6 po celé délce panelu, díky čemuž lze v tomto textovém dokumentu najít maximální hodnoty ohybových momentů. S těmito maximálními hodnotami budeme pracovat v další fázi výpočtu.

4.1.2. Použití laminační teorie

V následující části numerického řešení bude potřeba použít laminační teorii (viz. kapitola 3.7). Podobně jako při psaní skriptu se nadefinují materiálové konstanty tuhosti podle vztahů 4.22 až 4.27. Podle postupu, který je rozepsán v kapitole 3.7 se vytvoří matice 7.8. Nyní se využijí vypočtené maximální ohybové momenty M_1 , M_2 a M_6 , které byly získány ve výstupu ze skriptu. Ty se dosadí do matice 7.8 a vypočítá se velikost průhybu k_1 , k_2 a k_6 . Díky vztahu 6.13 je možné vypočítat napětí σ_1 , σ_2 a σ_6 v jednotlivých vrstvách, kde z označuje vzdálenost vrstvy od neutrální osy (viz. obrázek 18). Pro každou vrstvu se bude počítat napětí na horní hraně i spodní hraně, jelikož podle vztahu 5.2 se napětí mění podle vzdálenosti od neutrální osy. Vypočtené hodnoty σ_1 , σ_2 a σ_6 v každé vrstvě je třeba porovnat s hodnotami meze úměrnosti, které činí 70 % meze pevnosti u buku a 60 % meze pevnosti u smrku. Hodnoty meze pevnosti daného dřeva se nacházejí v tabulce 4.

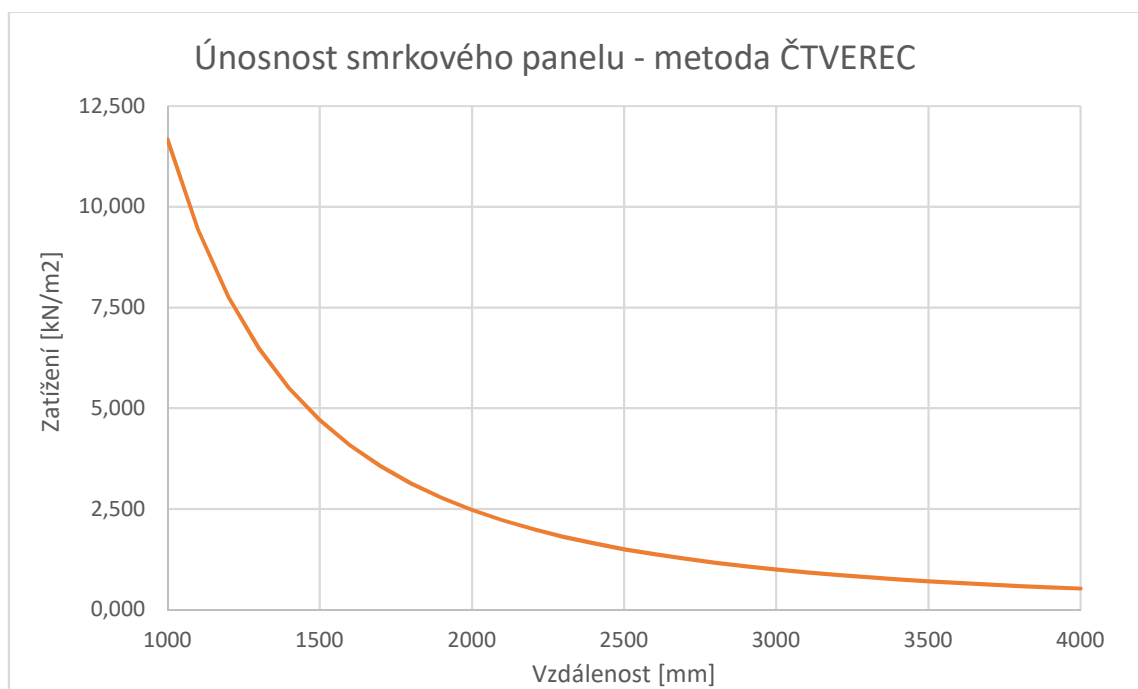


Obrázek 18: Schéma vzdálenosti vrstev laminátu od neutrální osy (Nettles, 1994)

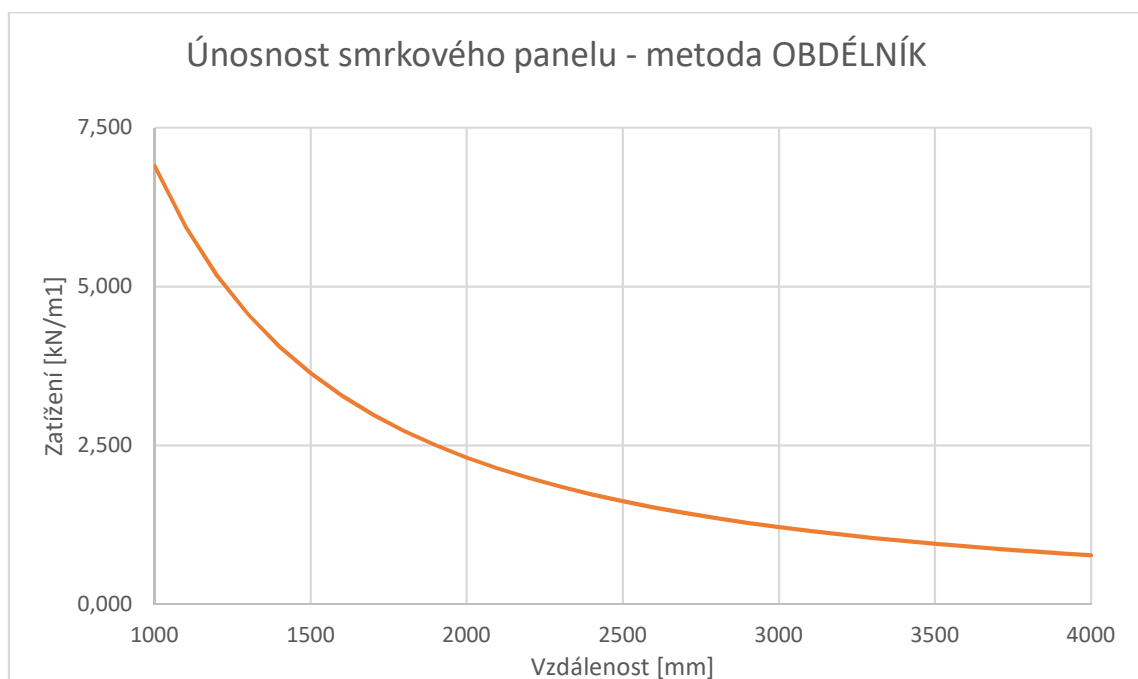
5. Výsledky

V této kapitole jsou uvedeny výsledky únosnosti smrkového panelu a bukových panelů, které byly zjištěny. Výsledky únosnosti byly vzájemně porovnány a vyhodnoceny. Zjištěné výsledky jsou uvedeny v grafech a tabulkách.

5.1. Únosnost smrkového panelu



Graf 2: Výsledek únosnosti smrkového panelu-metoda ČTVEREC



Graf 3: Výsledek únosnosti smrkového panelu-metoda OBDÉLNÍK

Na grafu 2 a 3 můžeme vidět výsledky výpočtu pro smrkový panel o tloušťce vrstvy 9 mm zjištěné metodou ČTVEREC a metodou OBDĚLNÍK. I přestože se výsledky mírně liší, můžeme si všimnout, že u obou grafů dochází přibližně do 2000 mm k poklesu křivky únosnosti panelu exponenciálně a prudce, kdežto od 2000 mm dochází pouze k mírnému poklesu křivky únosnosti.

5.2. Porovnání smrkového panelu s panelem Novatop Static

Výsledky smrkového panelu o celkové tloušťce 45 mm (každá vrstva o 9 mm) jsem porovnal s hodnotami získanými z „Technické dokumentace Novatop Static“. Tyto hodnoty jsem vzájemně porovnal dvouvýběrovým t-testem ($\alpha=0,05$), a lze konstatovat, že mezi těmito hodnotami je nevýznamný statistický rozdíl.

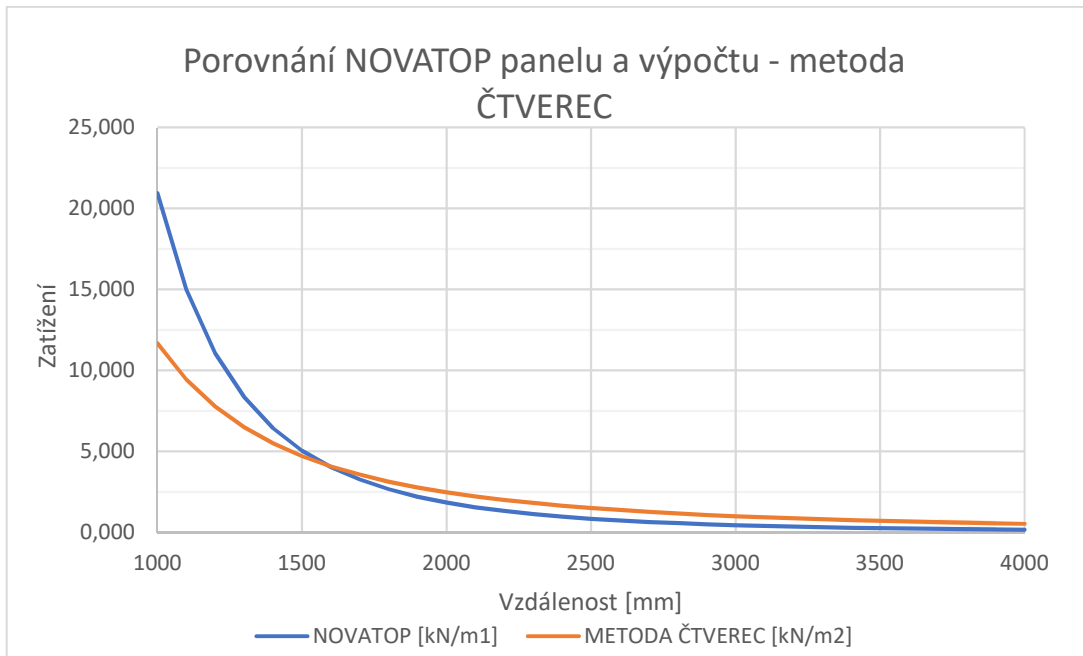
| | Novatop Static | Metoda ČTVEREC |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| Střední hodnota | 2,9709 | 2,6697 |
| Rozptyl | 23,3403 | 7,8790 |
| Pozorování | 31 | 31 |
| Rozdíl | 48 | |
| t Stat | 0,2703 | |
| P (T<=t) (1) | 0,3940 | |
| t krit. (1) | 1,6772 | |
| P (T<=t) (2) | 0,7880 | |
| t krit. (2) | 2,0106 | |

Tabulka 5: Dvouvýběrový t-test metody ČTVEREC

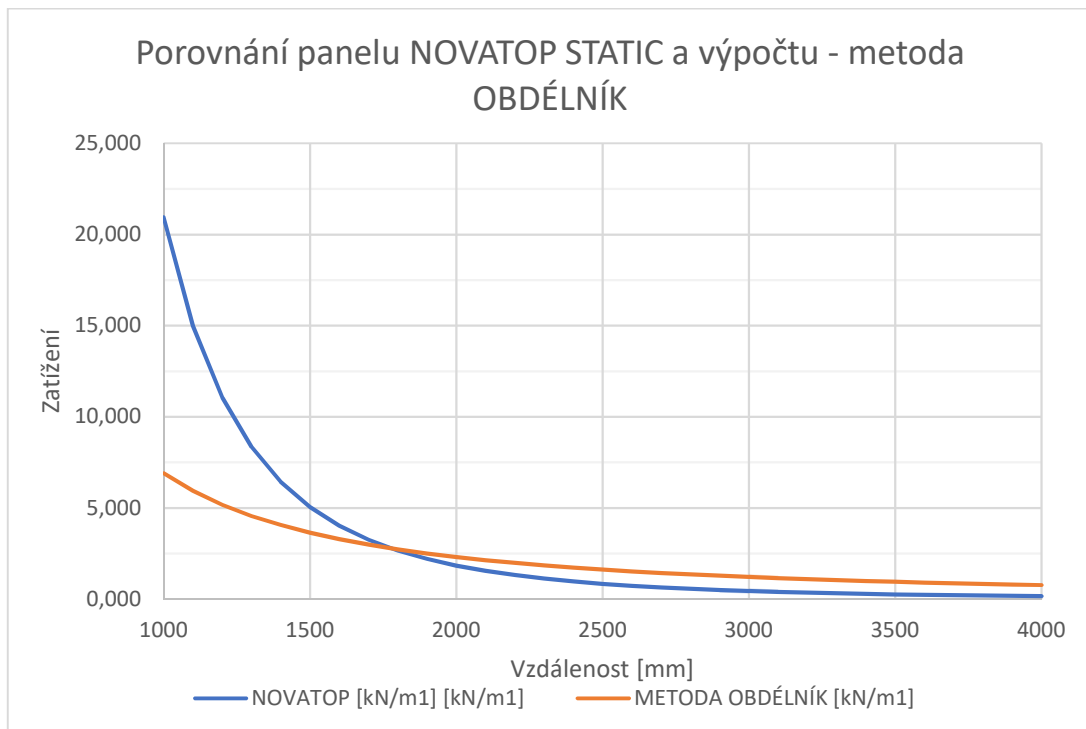
| | Novatop Static | Metoda OBDĚLNÍK |
|-----------------|-----------------------|------------------------|
| Střední hodnota | 2,9709 | 2,2483 |
| Rozptyl | 23,3403 | 2,6114 |
| Pozorování | 31 | 31 |
| Rozdíl | 37 | |
| t Stat | 0,7897 | |
| P (T<=t) (1) | 0,2174 | |
| t krit. (1) | 1,6871 | |
| P (T<=t) (2) | 0,4347 | |
| t krit. (2) | 2,0262 | |

Tabulka 6: Dvouvýběrový t-test metody OBDĚLNÍK

Získané výsledky pro smrkový panel o tloušťce 45 mm (9 mm na vrstvu) jsem porovnal s hodnotami pro panel Novatop Static, viz graf 1. Porovnávám hodnoty získané jak „metodou ČTVEREC“, tak „metodou OBDÉLNÍK“.



Graf 4: Porovnání panelu NOVATOP STATIC a výpočtu-metoda ČTVEREC

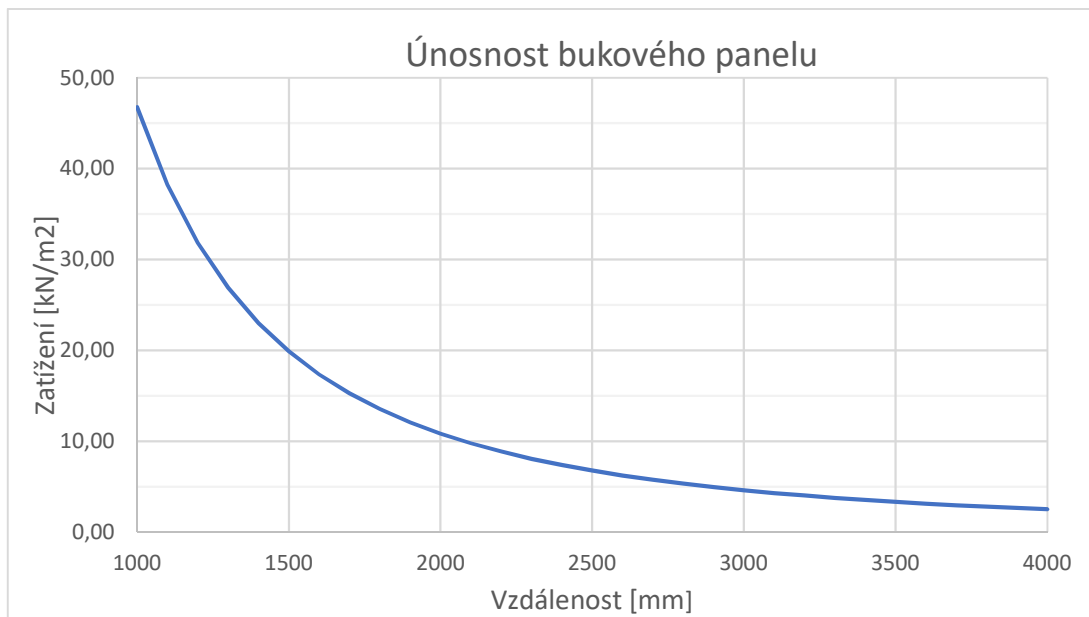


Graf 5: Porovnání panelu NOVATOP STATIC a výpočtu-metoda OBDÉLNÍK

Na grafech 4 a 5 můžeme pozorovat, že u obou metod dochází k mírné odlišnosti v porovnání s únosností panelu Novatop Static. Tato mírná nepřesnost je zapříčiněna jinými metodami výpočtu porovnávaných panelů. Při dalším postupu výpočtů budu pracovat pouze s metodou „ČTVEREC“.

5.3. Únosnost bukového panelu

Pro výpočet únosnosti bukového panelu bylo třeba nahradit materiálové konstanty smrku za konstanty buku (podle tab. 2,3 a 4).

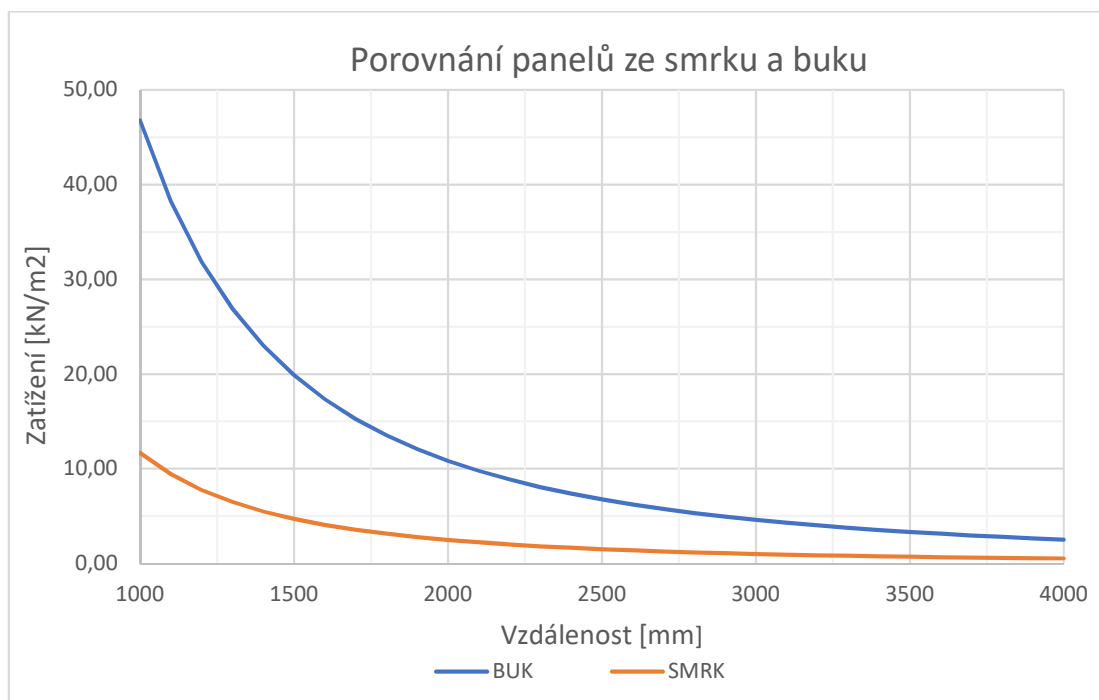


Graf 6: Únosnost bukového panelu

U bukového panelu můžeme, stejně jako u smrkového panelu, pozorovat s rostoucí vzdáleností podpěr prudce klesající křivku únosnosti panelu. Přibližně od vzdálenosti 2000 mm křivka únosnosti klesá mírně.

5.4. Porovnání smrkového a bukového panelu

Únosnost bukového panelu jsem porovnal se smrkovým panelem.



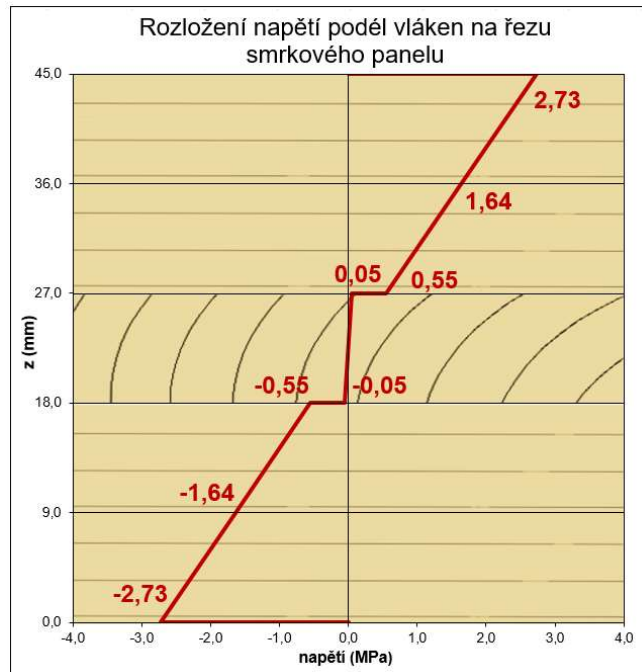
Graf 7: Porovnání panelů ze smrku a buku

Bukový panel má v porovnání ke smrkovému panelu stejných rozměrů únosnost průměrně 4,5krát větší. Pokud smrkový panel zatížíme plošným zatížením 5 kN/m^2 , můžeme mít maximální vzdálenost podpěr 1,5 m, kdežto při stejném zatížení bukového panelu můžeme zvolit vzdálenost podpěr až 3 m. Tento rozdíl je zapříčiněn hlavně výrazně většími materiálovými konstantami a větší mezí pevnosti buku.

5.4.1. Rozložení napětí v panelu

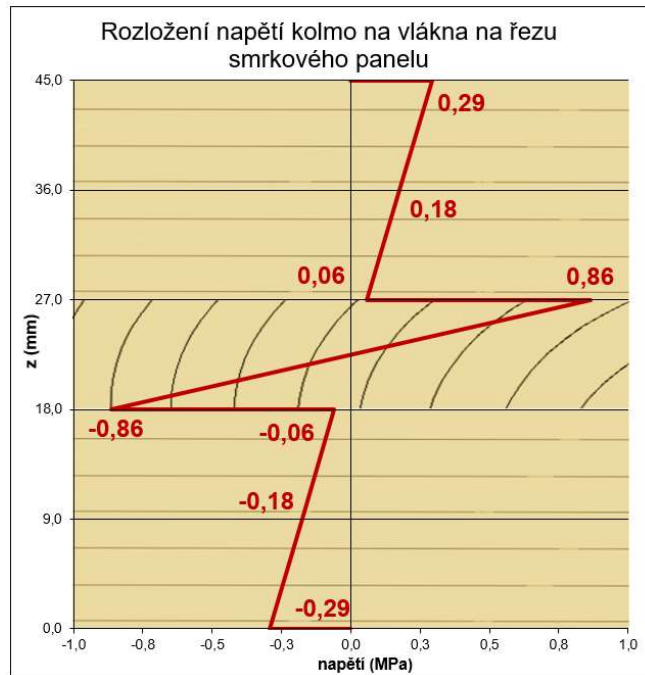
5.4.1.1. Smrkový panel

V navrženém smrkovém panelu, kde dvě povrchové vrstvy jsou rovnoběžné a prostřední vrstva kolmá, dochází k porušení v prostřední vrstvě, a to při tahovém napětí kolmo na vlákna. Tento výsledek můžeme odůvodnit nejnižší hodnotou meze pevnosti u napětí kolmo na vlákna.



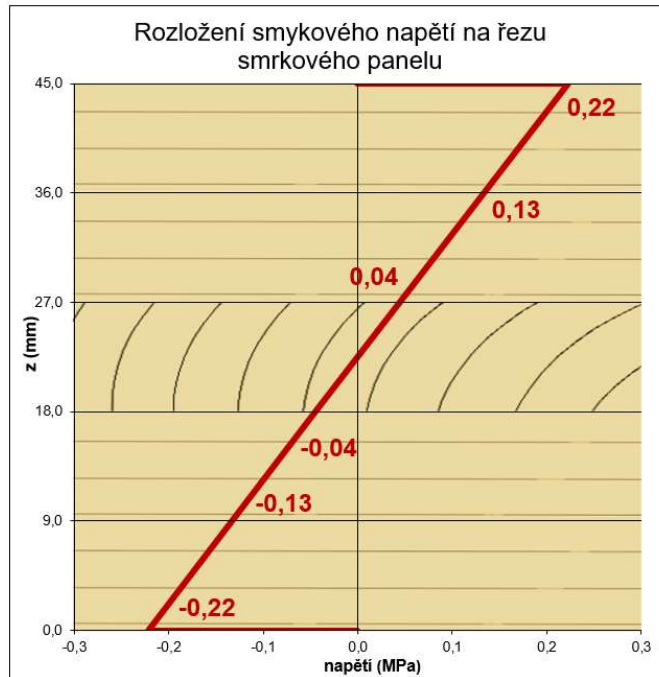
Graf 8: Rozložení napětí podél vláken na řezu smrkového panelu

Na grafu 8 vidíme rozložení napětí podél vláken na řezu smrkového panelu. Největší napětí se nachází na povrchových vrstvách panelu, konkrétní hodnota je 2,73 MPa. Následně se napětí přes první dvě vrstvy lineárně zmenšuje. Ke skokovému zmenšení napětí dochází na rozmezí druhé a třetí vrstvy, kde se napětí přibližuje nule. Nulové napětí se nachází v neutrální ose, která se nachází uprostřed středové vrstvy. Průběh napětí ve vrstvách je symetrický podle neutrální osy.



Graf 9: Rozložení napětí kolmo na vlákna na řezu smrkového panelu

Na grafu 9 vidíme rozložení napětí kolmo na vlákna na řezu smrkového panelu. Na povrchové vrstvě je napětí na hodnotě 0,29 MPa. Napětí se přes první dvě povrchové vrstvy lineárně snižuje, na konci druhé vrstvy se přiblíží nule. Na rozmezí druhé a třetí vrstvy dojde ke skokovému navýšení napětí, až na hodnotu 0,86 MPa. Nulové napětí se nachází na neutrální ose, která se nachází uprostřed středové vrstvy. Průběh napětí ve vrstvách je symetrický podle neutrální osy.

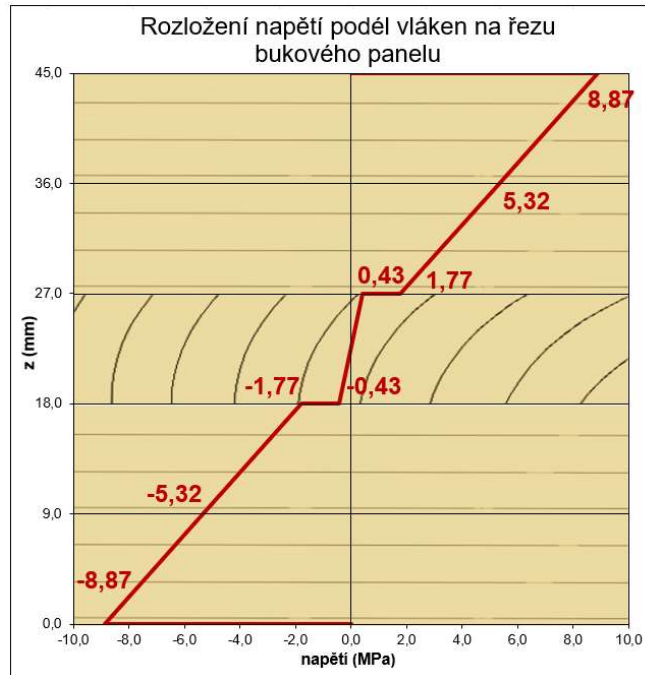


Graf 10: Rozložení smykového napětí na řezu smrkového panelu

Na grafu 10 vidíme rozložení smykového napětí na řezu smrkového panelu. Nejvyšší hodnota napětí se nachází na povrchové vrstvě, konkrétně dosahuje hodnoty 0,22 MPa. Napětí se lineárně snižuje přes všechny vrstvy, v neutrální ose prochází nulou.

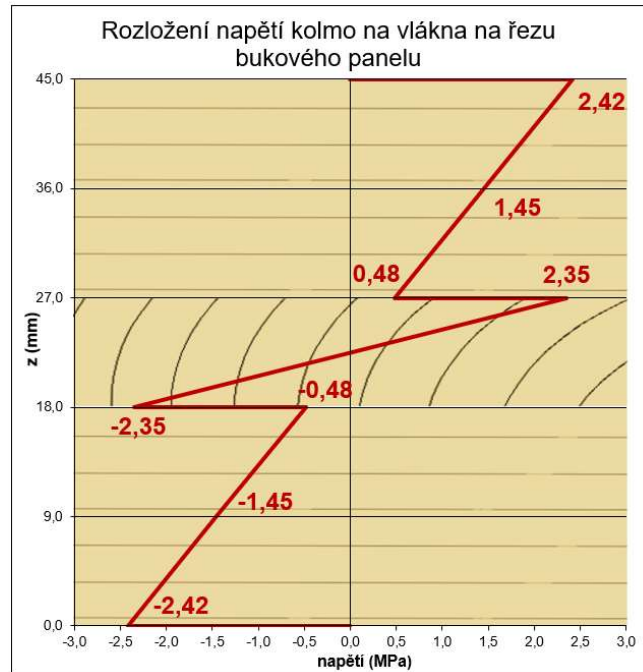
5.4.1.2. Bukový panel

U bukového panelu dochází k porušení v povrchové vrstvě při tahovém napětí kolmo na vlákna. Tento rozdíl mezi bukovým a smrkovým panelem je způsoben jinými hodnotami materiálových konstant, konkrétně materiálová konstanta E_1 je u buku menší než u smrku, naopak materiálové konstanty E_2 a G_{66} jsou u buku větší než u smrku.



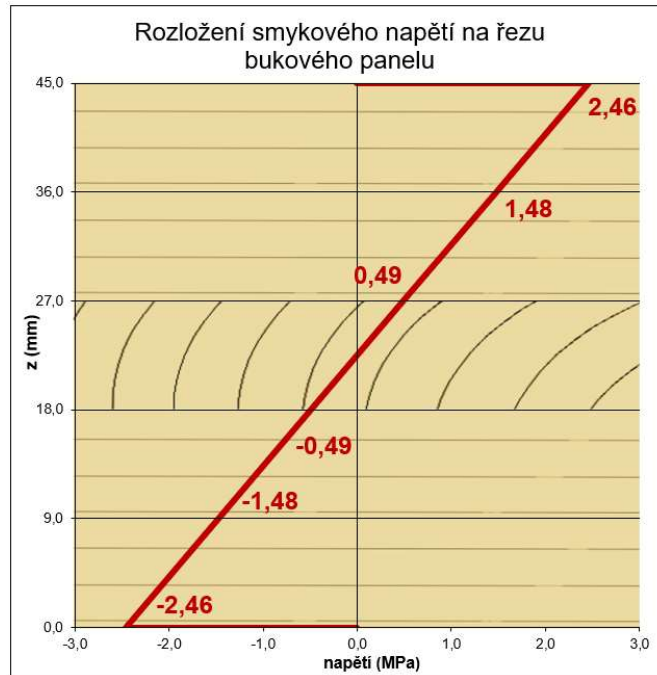
Graf 11: Rozložení napětí podél vláken na řezu bukového panelu

Na grafu 11 vidíme rozložení napětí podél vláken na řezu bukového panelu. Největší napětí se nachází na povrchových vrstvách panelu, konkrétní hodnota je 8,87 MPa. Následně se napětí přes první dvě vrstvy lineárně zmenšuje. Ke skokovému zmenšení napětí dochází na rozmezí druhé a třetí vrstvy, kde se napětí přibližuje nule. Nulové napětí se nachází v neutrální ose, která se nachází uprostřed středové vrstvy. Průběh napětí ve vrstvách je symetrické podle neutrální osy.



Graf 12: Rozložení napětí kolmo na vlákna na řezu bukového panelu

Na grafu 12 vidíme rozložení napětí kolmo na vlákna na řezu bukového panelu. Největší napětí se nachází na povrchové vrstvě, kde dosahuje hodnoty 2,42 MPa. Napětí se přes první dvě povrchové vrstvy lineárně snižuje, na konci druhé vrstvy se přibližuje nule. Na rozmezí druhé a třetí vrstvy dojde ke skokovému navýšení napětí až na hodnotu 2,35 MPa. Nulové napětí se nachází na neutrální ose, která se nachází uprostřed středové vrstvy. Průběh napětí ve vrstvách je symetrický podle neutrální osy.

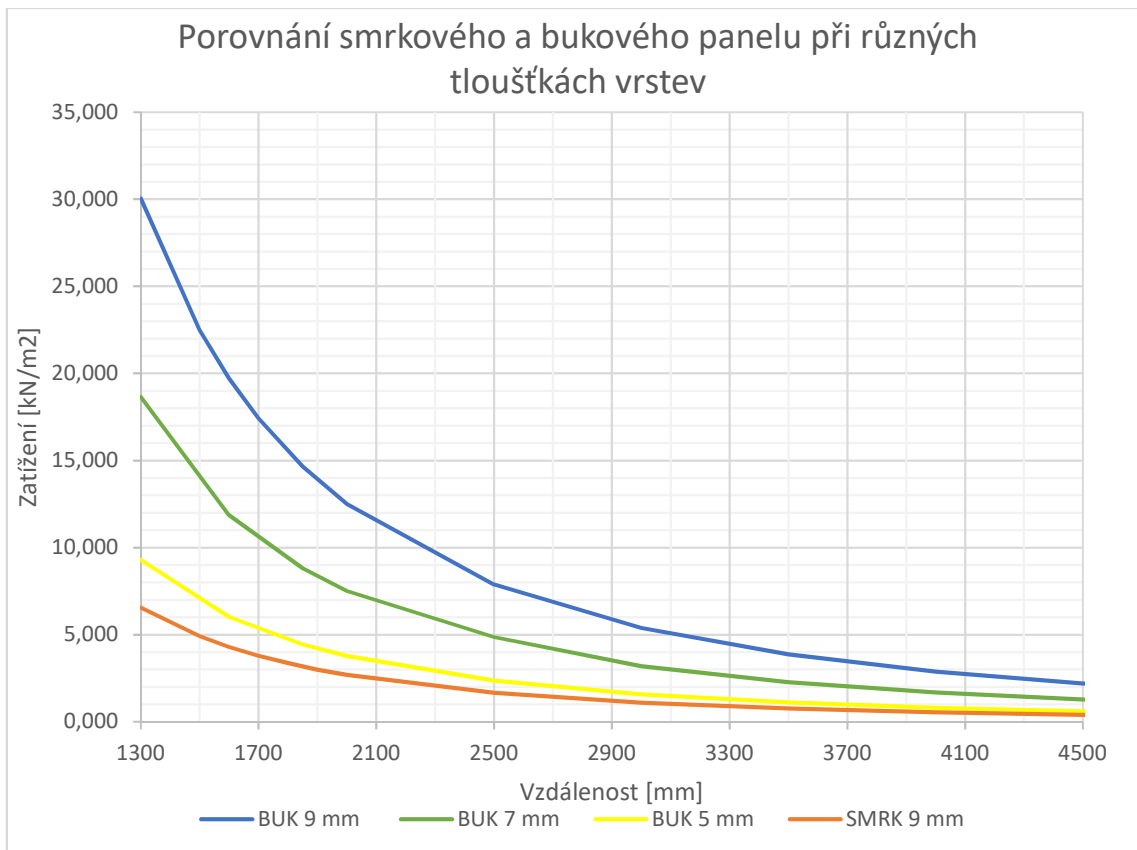


Graf 13: Rozložení smykového napětí na bukovém panelu

Na grafu 13 vidíme rozložení smykového napětí na řezu bukového panelu. Nejvyšší hodnota napětí se nachází na povrchové vrstvě, kde dosahuje hodnoty 2,46 MPa. Napětí se lineárně snižuje přes všechny vrstvy, v neutrální ose prochází nulou.

5.5. Panely o různých tloušťkách vrstev

Při dalším výpočtu jsem u bukového panelu postupně zmenšoval tloušťku vrstev o 2 mm na 7 mm a 5 mm. Výsledky jsem porovnal se smrkovým a bukovým panelem o tloušťce vrstev 9 mm.



Graf 14: Porovnání smrkového a bukového panelu při různých tloušťkách vrstev

Z grafu 14 vyplývá, že bukové panely o tloušťce vrstev 7 mm a 5 mm mají větší únosnost než původní smrkový panel o tloušťce vrstvy 9 mm. Konkrétně bukový panel o tloušťce vrstev 7 mm má únosnost průměrně 3krát větší než smrkový panel, bukový panel o tloušťce vrstev 5 mm má únosnost průměrně 1,5krát větší než smrkový panel. Kdybychom tedy nahradili smrkový panel o tloušťce vrstev 9 mm bukovým panelem o tloušťce vrstev 5 mm úspora na materiálu by mohla dosáhnout až 45 %.

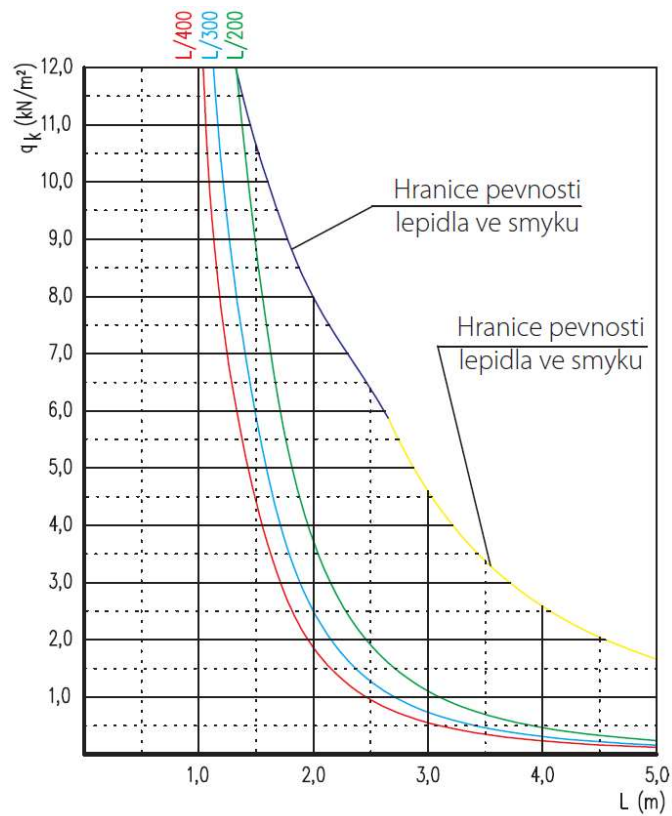
| Druh panelu | Smrkový panel | Bukový panel o tl. vrst. 9 mm | Bukový panel o tl. vrst. 7 mm | Bukový panel o tl. vrst. 5 mm |
|--|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Celková tloušťka panelu | 45 mm | 45 mm | 35 mm | 25 mm |
| Únosnost panelu při vzdálenosti podpěr 2000 mm | 2,69 [kN/m ²] | 12,51 [kN/m ²] | 7,51 [kN/m ²] | 3,78 [kN/m ²] |
| Vzdálenost podpěr při plošném zatížení 5 kN/m² | 1500 [mm] | 3100 [mm] | 2500 [mm] | 1750 [mm] |
| Úspora na materiálu vůči smrkovému panelu | - | 0 % | 22 % | 45 % |
| Únosnost panelu vůči smrkovému panelu | - | 465 % | 279 % | 140 % |
| Vzdálenost podpěr vůči smrkovému panelu | - | 207 % | 167 % | 117 % |

Tabulka 7: Porovnání únosnosti a úspory na materiálu bukových panelů

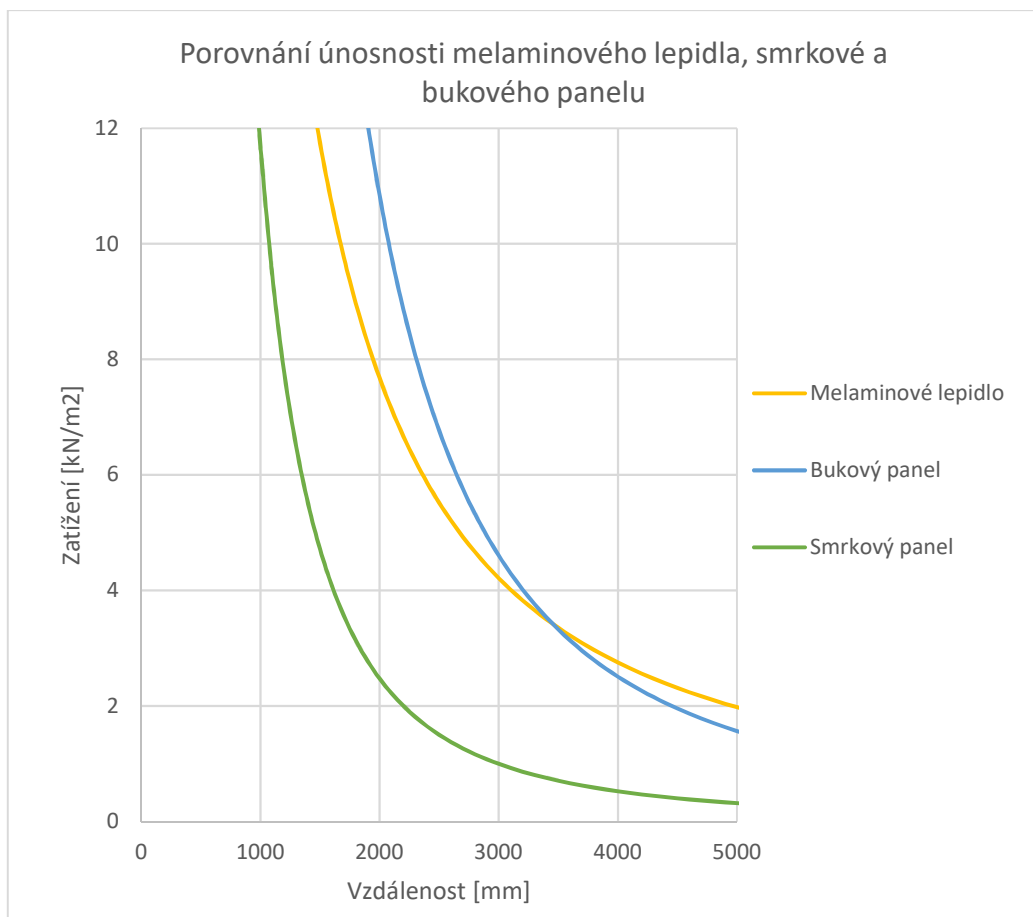
V tabulce 7 můžeme vidět porovnání jednotlivých panelů. Můžeme vidět porovnání celkové tloušťky panelu, únosnosti panelu při vzdálenosti podpěr 2000 mm, maximální možnou vzdálenost podpěr při plošném zatížení 5 kN/m², úsporu na materiálu bukových panelů vůči smrkovému panelu, únosnost bukových panelů vůči smrkovému panelu a maximální možnou vzdálenost podpěr bukových panelů vůči smrkovému panelu. V tabulce můžeme vidět jak se maximální únosnost i maximální vzdálenost podpěr zvětšuje v závislosti od celkové tloušťky bukového panelu. Můžeme též pozorovat, že bukový panel o celkové tloušťce 25 mm má únosnost přibližně o 40 % větší, a lze navrhnout o 17 % větší vzdálenost podpěr, než je tomu u smrkového panelu o celkové tloušťce 45 mm. Díky tomu je možná úspora materiálu až 45 %. Dále můžeme vidět, že při použití stejně širokého bukového panelu lze navrhovat dvojnásobně delší vzdálenost podpěr, a že únosnost panelu je o 365 % větší.

6. Diskuze

Vytvořením numerického modelu pro dimenzování dřevěného CLT panelu jsem zjistil, že bukový panel má potenciál mít až 4.5krát větší únosnost než smrkový panel o stejných rozměrech. Pokud bychom do tohoto panelu zahrnuli i melaminové lepidlo, které se používá pro výrobu Novatop Static panelů (viz. graf 15), museli bychom upravit graf únosnosti tohoto panelu.



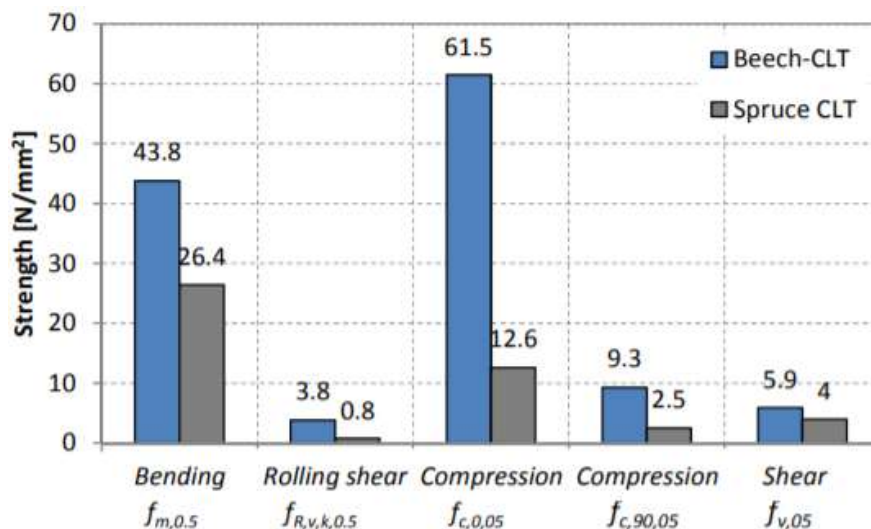
Graf 15: Únosnost melaminového lepidla používaného u panelů Novatop Static



Graf 16: Porovnání únosnosti melaminového lepidla, smrkové a bukového panelu

Na grafu 16 je vidět, že do vzdálenosti 3500 mm má větší únosnost bukový panel, od vzdálenosti 3500 mm má však větší únosnost použité melaminové lepidlo. Tento problém by se mohl vyřešit buď použitím jiného druhu lepidla, nebo zmenšením únosnosti tohoto bukového panelu.

Pokud v tomto výpočetním modelu upravíme tloušťku vrstev zjistíme, že při použití panelu o tloušťce vrstev 7 mm bude jeho únosnost až 3krát větší v porovnání se smrkovým panelem o tloušťce vrstvy 9 mm. Pokud tloušťku vrstev zmenšíme na 5 mm, budeme mít únosnost 1.5krát větší. Tento výsledek je zapříčiněn hlavně lepšími materiálovými vlastnostmi a větší mezí pevnosti buku. Pokud tento výsledek porovnáme s grafem 17 zjistíme, že nám vyšel podíl mezi únosnostmi bukového a smrkového panelu 4,5, a že poměr mezi tlakem kolmo na vlákna u panelů ze smrku a buku je 3,7. Tento rozdíl je dán hlavně tím, že na rozdíl od této práce, ve které jsem pracoval v numerickém modelu s ideálními hodnotami dřeva a nezohledňoval použité lepidlo, výsledky z grafu 17 byly zjišťovány experimentálně.



Graf 17: Srovnání mechanických vlastností CLT panelu z buku a ze smrku (Franke, 2016)

Výsledek této práce může mít v budoucnosti velké využití v praxi. Bukové panely, které mají únosnost 4,5krát větší než smrkové panely by se mohly využívat jako náhrada smrkových panelů, kdy úspora na materiálu by mohla dosahovat až 50 %. Velký potenciál bukových panelů je v realizaci bytových domů, výškových budov, mostů a stropů, kdy je potřeba velké únosnosti a stability, kterými bukový panel disponuje. CLT panel se dá také velmi dobře kombinovat s jinými dřevěnými i nedřevěnými materiály, díky čemuž lze dosáhnout splnění nejrůznějších potřeb zákazníka.

Bukové dřevo má však i své nevýhody. Jednou z nejzásadnějších nevýhod je velké borcení bukového dřeva, které se dá částečně omezit použitím lamel řezaných radiálně, neboť při tomto postupu dochází k bobtnání lamel ve stejném směru. Další nevýhodou bukového dřeva je výskyt nepravého jádra, které má odlišné mechanické vlastnosti v porovnání s bělovým dřevem. Tento nedostatek se dá vyřešit používáním pouze bělového dřeva, což se může jevit jako vysoce finančně nákladné, ale díky možnosti úspory materiálu při výrobě bukového panelu, která může dosáhnout až 50 %, se nebude jednat markantní rozdíl v ceně v porovnání se smrkovým panelem. Mezi další nevýhody bukového dřeva lze zařadit jeho nízkou odolnost vůči působení povětrnostních vlivů, která by se dala vyřešit hydroskopickou úpravou dřeva, nebo kombinací různých dřev na výrobu panelu, ve kterém by došlo k použití buku pouze na vnitřní vrstvě, která se nedostane do kontaktu s vnějším prostředím.

Postup výpočtu únosnosti panelu, který je prezentován v této práci, by mohl mít využití v praxi, muselo by však dojít k jeho zefektivnění a zrychlení. Zefektivnění a zrychlení lze v tomto případě docílit vytvořením výpočetního skriptu, který by obsahoval veškerý postup výpočtu. Poté by bylo možné v relativně krátkém čase vypočítat

únosnost jakéhokoli panelu, který by mohl mít jakékoli rozměry, mohl by být složen z různého dřeva a jednotlivé vrstvy by mohly být různě orientovány. Díky tomu by bylo možné navrhovat CLT panel pro konkrétní potřeby zákazníka.

Musíme také brát na vědomí skutečnost, že výsledek této práce byl zjišťován pomocí numerického modelu, nebyl tedy vyroben experimentální model, na kterém by se vypočítané zatížení testovalo. Výpočetní model nezahrnoval do výpočtu lepidlo, které by se použilo pro výrobu CLT panelu. Dále jsem v numerickém modelu pracoval s ideálními materiálovými vlastnostmi buku a s celistvými vrstvami, které nebyly rozděleny do jednotlivých lamel, ze kterých se CLT panel vyrábí.

Jedním z největších úkolů současnosti je nutnost přesvědčit veřejnost, že dřevo jako stavební materiál není materiálem minulosti, ale že v dnešním moderním světě může mít velmi široké využití a jeho vlastnosti mohou v mnoha případech předčít vlastnosti nedřevěných stavebních materiálů.

7. Závěr

Bakalářská práce se zabývá vytvořením výpočetního modelu pro navrhování dřevěných panelových konstrukcí a jeho použití pro výpočet únosnosti smrkového a bukového panelu. Bylo zjištěno:

- výsledky vytvořené pomocí výpočetního modelu jsou statisticky shodné s hodnotami únosnosti panelu Novatop Static
- bukový panel má průměrně 4,5krát větší únosnost, než panel smrkový o stejných rozměrech
- smrkový panel o celkové tloušťce 45 mm se dá nahradit bukovým panelem o celkové tloušťce 25 mm, čímž je možná úspora na materiálu až 45 %.

Výsledek této bakalářské práce může sloužit k většímu využití bukového dřeva při výrobě panelových nosných konstrukcí. Je však třeba zohlednit skutečnost, že výpočetní model pracoval s ideálními materiálovými konstantami a že nezohledňoval lepidlo, které je pro výrobu dřevěných panelových konstrukcí nezbytné. Tyto faktory by mohly ovlivnit celkovou únosnost vyrobeného panelu. I přes to lze konstatovat, že bukové dřevo má velký potenciál pro využití při výrobě panelových nosných konstrukcí a lze očekávat jeho častější používání.

8. Použitá literatura

- BAUMRUK, Martin. Mechanika kompozitních materiálů, analytické metody výpočtu stabilitních úloh kompozitních desek a sendvičových panelů a jejich porovnání s MKP [online]. Praha: Centrum leteckého a kosmického výzkumu, ČVUT [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/predmety/detail/107449>.
- BRDÍČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. Mechanika kontinua. Vyd. 4., rev. a upr. Praha: Academia, 2011. Gerstner. ISBN 978-80-200-2039-0.
- BROŽOVSKÝ, Jiří a Aleš MATERNA. Základy matematické teorie pružnosti. Ostrava: Vysoká škola báňská-Technická univerzita, 2012.
- CALARD, Vincent. Formulas and equations for the classical laminate theory. 2011 Dostupné z: <http://www.aac-research.at/downloads/Formula-collection-for-laminates.pdf>.
- GANDELOVÁ, Libuše, Jarmila ŠLEZINGEROVÁ a Petr HORÁČEK. Nauka o dřevě. 2. vyd. Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-7157-577-1.
- HAVÍŘOVÁ, Zdeňka. Technická mechanika I.: (základy statiky, pružnost a pevnost). 2. nezm. vyd. V Brně: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 2003. ISBN 80-715-7667-0.
- FRANKE, S. Mechanical properties of beech CLT. In: WCTE 2016 Proceedings, 22.-25.8. 2016 Vienna, 7 pp.
- HEARMON, R. F. S. The elasticity of wood and plywood. London: National government publication, 1948, 87 s.
- HORÁČEK, Petr. Mechanické vlastnosti dřeva [online]. [Brno], 2010 [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: https://is.mendelu.cz/lide/clovek.pl?zalozka=13;id=7038;studium=17869;zp=14344;download_prace=1;lang=sk
- KREJSA, Martin, Lenka LAUSOVÁ a Vladimíra MICHALCOVÁ. Pružnost a plasticita [online]. Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2012 [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_tisk.pdf
- MAREK, Michal. Vývoj a analýza kombinovaného vrstveného materiálu [online]. Brno, 2018 [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: <https://is.mendelu.cz/lide/clovek.pl?zalozka=13;id=5621;studium=91032;zp=608>

18;download_prace=1;lang=sk. Diplomová práce. Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova univerzita v Brně.

- NETTLES, Alan T. Basic Mechanics of Laminated Composite Plates. George C. Marshall Space Flight Center, Marshall Space Flight Center, Alabama 35812, 1994, 102 s.
- O systému Novatop. Novatop [online]. [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: <https://www.novatop-system.cz/system-novatop/co-je-novatop/>
- POŽGAJ, Alexander, Dušan CHOVANEC, Stanislav KURJATKO a Marián BABIAK. Štruktúra a vlastnosti dreva. Druhé. Bratislava: PRÍRODA, 1997. ISBN 80-07-00960-4.
- ŠMIŘÁK, Svatopluk. Pružnosť a plasticita II. Akademické nakladateľství CERM: VUT Brno, 1993. ISBN 80-214-0498-1, 2000.
- VRBKA, Jan. Mechanika kompozitů [online]. Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, 2008 [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340
- ZEIDLER, Aleš a Vlastimil BORŮVKA. Stavba a vlastnosti dřeva hospodářsky významných dřevin-podklady pro cvičení. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze, 2016. ISBN 978-80-213-2674-3.

9. Přílohy

9.1.1. Flex-PDE skript

title 'Ohyb OOD desky'

select

errlim = 1e-3 { increase accuracy to resolve stresses }
painted { paint all contour plots }
cubic

variables

u (0.1)
v (0.1)
w (0.1)
wxx (0.1)
wyy (0.1)
wxy (0.1)
wx (0.1)
wy (0.1)

definitions

L=2 {m}
b=1 {m}
h1=0.009 {m}
h2=0.009
h3=0.009
h4=0.009
h5=0.009

alfa1=0 {°}
alfa2=0
alfa3=90
alfa4=0
alfa5=0
alfa=alfa1

E11 = 15.9*10⁹ {Pa}
E22 = 6.9*10⁸
G12 = 7.5*10⁸
n12 = 0.44
n21 = (E22/E11)*n12
rho=400

$$C11 = E11/(1-n12*n21)$$

$$C12 = C11*n21$$

$$C22 = E22/(1-n12*n21)$$

$$C66 = G12$$

$$CC111=C11*(\cos(\text{alfa1 degrees}))^4+C22*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa1 degrees}))^2$$

$$CC121=(C11+C22-4*C66)*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa1 degrees}))^2+C12*((\sin(\text{alfa1 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa1 degrees}))^4)$$

$$CC161=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa1 degrees}))*(\cos(\text{alfa1 degrees}))^3+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^3+(\cos(\text{alfa1 degrees}))$$

$$CC221=C11*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^4+C22*(\cos(\text{alfa1 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa1 degrees}))^2$$

$$CC261=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^3*(\cos(\text{alfa1 degrees}))+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa1 degrees}))+(\cos(\text{alfa1 degrees}))^3$$

$$CC661=(C11+C22-2*(C12+C66))*(\sin(\text{alfa1 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa1 degrees}))^2+C66*((\sin(\text{alfa1 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa1 degrees}))^4)$$

$$CC112=C11*(\cos(\text{alfa2 degrees}))^4+C22*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa2 degrees}))^2$$

$$CC122=(C11+C22-4*C66)*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa2 degrees}))^2+C12*((\sin(\text{alfa2 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa2 degrees}))^4)$$

$$CC162=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa2 degrees}))*(\cos(\text{alfa2 degrees}))^3+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^3+(\cos(\text{alfa2 degrees}))$$

$$CC222=C11*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^4+C22*(\cos(\text{alfa2 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa2 degrees}))^2$$

$$CC262=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^3*(\cos(\text{alfa2 degrees}))+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa2 degrees}))+(\cos(\text{alfa2 degrees}))^3$$

$$CC662=(C11+C22-2*(C12+C66))*(\sin(\text{alfa2 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa2 degrees}))^2+C66*((\sin(\text{alfa2 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa2 degrees}))^4)$$

$$CC113=C11*(\cos(\text{alfa3 degrees}))^4+C22*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa3 degrees}))^2$$

$$CC123=(C11+C22-4*C66)*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa3 degrees}))^2+C12*((\sin(\text{alfa3 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa3 degrees}))^4)$$

$$CC163=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa3 degrees}))*(\cos(\text{alfa3 degrees}))^3+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^3+(\cos(\text{alfa3 degrees}))$$

$$CC223=C11*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^4+C22*(\cos(\text{alfa3 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa3 degrees}))^2$$

$$CC263=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^3*(\cos(\text{alfa3 degrees}))+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa3 degrees}))+(\cos(\text{alfa3 degrees}))^3$$

$$CC663=(C11+C22-2*(C12+C66))*(\sin(\text{alfa3 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa3 degrees}))^2+C66*((\sin(\text{alfa3 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa3 degrees}))^4)$$

$$CC114=C11*(\cos(\text{alfa4 degrees}))^4+C22*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa4 degrees}))^2$$

$$CC124=(C11+C22-4*C66)*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa4 degrees}))^2+C12*((\sin(\text{alfa4 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa4 degrees}))^4)$$

$$CC164=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa4 degrees}))*(\cos(\text{alfa4 degrees}))^3+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^3+(\cos(\text{alfa4 degrees}))$$

$$CC224=C11*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^4+C22*(\cos(\text{alfa4 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa4 degrees}))^2$$

$$CC264=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^3*(\cos(\text{alfa4 degrees}))+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa4 degrees}))+(\cos(\text{alfa4 degrees}))^3$$

$$CC664=(C11+C22-2*(C12+C66))*(\sin(\text{alfa4 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa4 degrees}))^2+C66*((\sin(\text{alfa4 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa4 degrees}))^4)$$

$$CC115=C11*(\cos(\text{alfa5 degrees}))^4+C22*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa5 degrees}))^2$$

$$CC125=(C11+C22-4*C66)*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa5 degrees}))^2+C12*((\sin(\text{alfa5 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa5 degrees}))^4)$$

$$CC165=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa5 degrees}))*(\cos(\text{alfa5 degrees}))^3+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^3+(\cos(\text{alfa5 degrees}))$$

$$CC225=C11*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^4+C22*(\cos(\text{alfa5 degrees}))^4+2*(C12+2*C66)*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa5 degrees}))^2$$

$$CC265=(C11-C12-2*C66)*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^3*(\cos(\text{alfa5 degrees}))+(C12-C22+2*C66)*(\sin(\text{alfa5 degrees}))+(\cos(\text{alfa5 degrees}))^3$$

$$CC665=(C11+C22-2*(C12+C66))*(\sin(\text{alfa5 degrees}))^2*(\cos(\text{alfa5 degrees}))^2+C66*((\sin(\text{alfa5 degrees}))^4+(\cos(\text{alfa5 degrees}))^4)$$

$$k1=wxx$$

$$k2=wyy$$

$$k6=2*wxy$$

$$e01=dx(u)+0.5*(dx(w))^2$$

$$e02=dy(v)+0.5*(dy(w))^2$$

$$e06=(dx(v)+dy(u))+1*dx(w)*dy(w)$$

$$e1=dx(u)+(h1+h2/2)*wxx$$

$$e2=dy(v)+(h1+h2/2)*wyy$$

$$e6=(dx(v)+dy(u))+2*(h1+h2/2)*wxy$$

$$D11=1/3*((h1+h2+h3/2)^3-(h2+h3/2)^3)*CC111+((h2+h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC112+((h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC113+((-h3/2)^3-(-h4-h3/2)^3)*CC114+((-h4-h3/2)^3-(-h5-h4-h3/2)^3)*CC115$$

$$D12=1/3*((h1+h2+h3/2)^3-(h2+h3/2)^3)*CC121+((h2+h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC122+((h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC123+((-h3/2)^3-(-h4-h3/2)^3)*CC124+((-h4-h3/2)^3-(-h5-h4-h3/2)^3)*CC125$$

$$D22=1/3*((h1+h2+h3/2)^3-(h2+h3/2)^3)*CC221+((h2+h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC222+((h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC223+((-h3/2)^3-(-h4-h3/2)^3)*CC224+((-h4-h3/2)^3-(-h5-h4-h3/2)^3)*CC225$$

$$D16=1/3*((h1+h2+h3/2)^3-(h2+h3/2)^3)*CC161+((h2+h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC162+((h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC163+((-h3/2)^3-(-h4-h3/2)^3)*CC164+((-h4-h3/2)^3-(-h5-h4-h3/2)^3)*CC165$$

$$D26=1/3*((h1+h2+h3/2)^3-(h2+h3/2)^3)*CC261+((h2+h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC262+((h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC263+((-h3/2)^3-(-h4-h3/2)^3)*CC264+((-h4-h3/2)^3-(-h5-h4-h3/2)^3)*CC265$$

$$D66=1/3*((h1+h2+h3/2)^3-(h2+h3/2)^3)*CC661+((h2+h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC662+((h3/2)^3-(h3/2)^3)*CC663+((-h3/2)^3-(-h4-h3/2)^3)*CC664+((-h4-h3/2)^3-(-h5-h4-h3/2)^3)*CC665$$

$$M1=D11*k1+D12*k2+D16*k6$$

$$M2=D12*k1+D22*k2+D26*k6$$

$$M6=D16*k1+D26*k2+D66*k6$$

$$SS1=CC111*e1+CC121*e2+CC161*e6$$

$$SS2=CC121*e1+CC221*e2+CC261*e6$$

$$SS6=CC161*e1+CC261*e2+CC661*e6$$

$$SG1=CC111*e01+CC121*e02+CC161*e06$$

$$SG2=CC121*e01+CC221*e02+CC261*e06$$

$$SG6=CC161*e01+CC261*e02+CC661*e06$$

$$SA1=(\cos(\text{alfa degrees}))^2*SG1+(\sin(\text{alfa degrees}))^2*SG2+2*\sin(\text{alfa degrees})*\cos(\text{alfa degrees})*SG6$$

$$SA2=(\sin(\text{alfa degrees}))^2*SG1+(\cos(\text{alfa degrees}))^2*SG2-2*\sin(\text{alfa degrees})*\cos(\text{alfa degrees})*SG6$$

$$SA6=-\sin(\text{alfa degrees})*\cos(\text{alfa degrees})*SG1+\sin(\text{alfa degrees})*\cos(\text{alfa degrees})*SG2+((\cos(\text{alfa degrees}))^2-(\sin(\text{alfa degrees}))^2)*SG6$$

$$g=-\rho*9.81 \quad \{N.m^{-3}\}$$

$$q=-3000+g*(h1+h2+h3+h4+h5) \quad \{N.m^{-2}\}$$

$$F1=0 \quad \{N\}$$

$$F2=0 \quad \{N\}$$

$$F6=0 \quad \{N\}$$

initial values

$$u=0$$

$$v=0$$

$$w=0$$

wxx=0

wyy=0

wxy=0

wx=0

wy=0

constraints

! surf_integral(u)=0

! surf_integral(v)=0

! surf_integral(w)=0

equations

u: dx(SS1)+dy(SS6)=0

v: dx(SS6)+dy(SS2)=0

wxx: dxx(w)=wxx

wyy: dyy(w)=wyy

wxy: dxy(w)=wxy

wx: dx(w)=wx

wy: dy(w)=wy

w:

$(D11 * dxx(wxx) + 2 * D12 * dxx(wyy) + 4 * D66 * dxx(wyy) + 4 * D16 * dxy(wxx) + 4 * D26 * dxy(wyy) + D22 * dy$
 $y(wyy)) = q + (F1 * dxx(w) + F2 * dyy(w) + F6 * 2 * dxy(w))$

boundaries

region 1

start (0,0)

natural(u)=0

natural(v)=0

! natural(w)=0 {volny okraj}

! natural(wy)=0 {volny okraj}

! natural(wyy)=0 {volny okraj}

! value(w)=0 {vetknuty / podepreny okraj}

! value(wy)=0 {vetknuty okraj}

value(wyy)=0 {podepreny okraj}

line to (L,0)

! natural(w)=0

! natural(wy)=0

value(wxx)=0

line to (L,b)

value(w)=0

value(wyy)=0

line to (0,b)

! natural(w)=0

```

!           natural(wy)=0
           value(wxx)=0
line to close
monitors
contour(w) { show deformed grid as solution progresses }

plots
contour(q) { transverse load }
contour(w) { show final deformed grid }
elevation(w) from (0,b/2) to (L,b/2)
surface(w) viewpoint(0,0.5,30)
vector(U,V) as "Displacement" on grid(x+U,y+V)
! contour(U) as "X-Displacement" on grid(x+U,y+V)
! contour(V) as "Y-Displacement" on grid(x+U,y+V)
contour(m1) as "M1" on grid(x+U,y+V)
contour(m2) as "M2" on grid(x+U,y+V)
contour(m6) as "M6" on grid(x+U,y+V)

elevation(m1,m2,m6) from (0,2*b/10) to (L,2*b/10) as "grad M" export format "#x#r#b#i"
file="momenty1.txt"

elevation(m1,m2,m6) from (0,5*b/10) to (L,5*b/10) as "grad M"
elevation(m1,m2,m6) from (0,8*b/10) to (L,8*b/10) as "grad M"
elevation(wxx,wyy,wxy) from (0,2*b/10) to (L,2*b/10) as "div w"
elevation(wxx,wyy,wxy) from (0,5*b/10) to (L,5*b/10) as "div w"
elevation(wxx,wyy,wxy) from (0,8*b/10) to (L,8*b/10) as "div w"
contour(sg1) as "X-Stress" on grid(x+U,y+V) as "X, Y, XZ Stresses - Geometry"
contour(sg2) as "Y-Stress" on grid(x+U,y+V) as "X, Y, XZ Stresses - Geometry"
contour(sg6) as "XY-Stress" on grid(x+U,y+V) as "X, Y, XZ Stresses - Geometry"
contour(sa1) as "X-Stress" on grid(x+U,y+V) as "X, Y, XZ Stresses - Anatomy"
contour(sa2) as "Y-Stress" on grid(x+U,y+V) as "X, Y, XZ Stresses - Anatomy"
contour(sa6) as "XY-Stress" on grid(x+U,y+V) as "X, Y, XZ Stresses - Anatomy"
elevation(SG1,SG2,SG6) from (0,2*b/10) to (L,2*b/10) as "X, Y, XZ Stresses - Geometry"
elevation(SG1,SG2,SG6) from (0,5*b/10) to (L,5*b/10) as "X, Y, XZ Stresses - Geometry"
elevation(SG1,SG2,SG6) from (0,8*b/10) to (L,8*b/10) as "X, Y, XZ Stresses - Geometry"
elevation(SA1,SA2,SA6) from (0,2*b/10) to (L,2*b/10) as "X, Y, XZ Stresses - Anatomy"
elevation(SA1,SA2,SA6) from (0,5*b/10) to (L,5*b/10) as "X, Y, XZ Stresses - Anatomy"
elevation(SA1,SA2,SA6) from (0,8*b/10) to (L,8*b/10) as "X, Y, XZ Stresses - Anatomy"
! elevation(D11,D12,D22,D16,D26,D66) from (0,b/2) to (L,b/2)

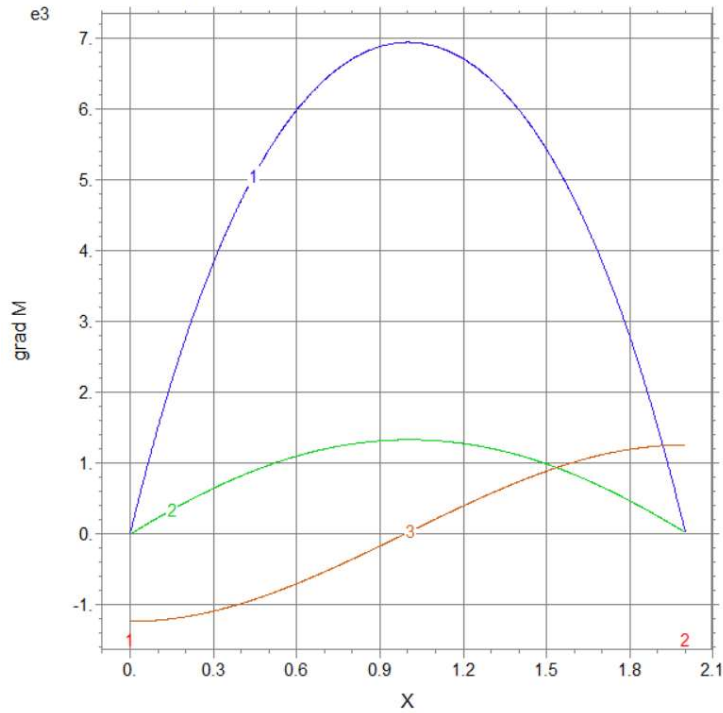
end

```

9.1.2. Grafické výsledky skriptu

Výsledky ohybových momentů v panelu

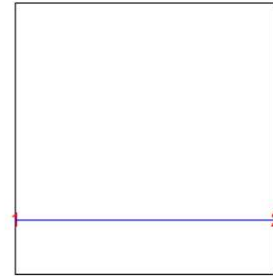
Ohyb OOD desky



23:27:32 4/17/19
FlexPDE 7.13a/W64

grad M
from (0,2*b/10) to (L,2*b/10)

1: m1
2: m2
3: m6

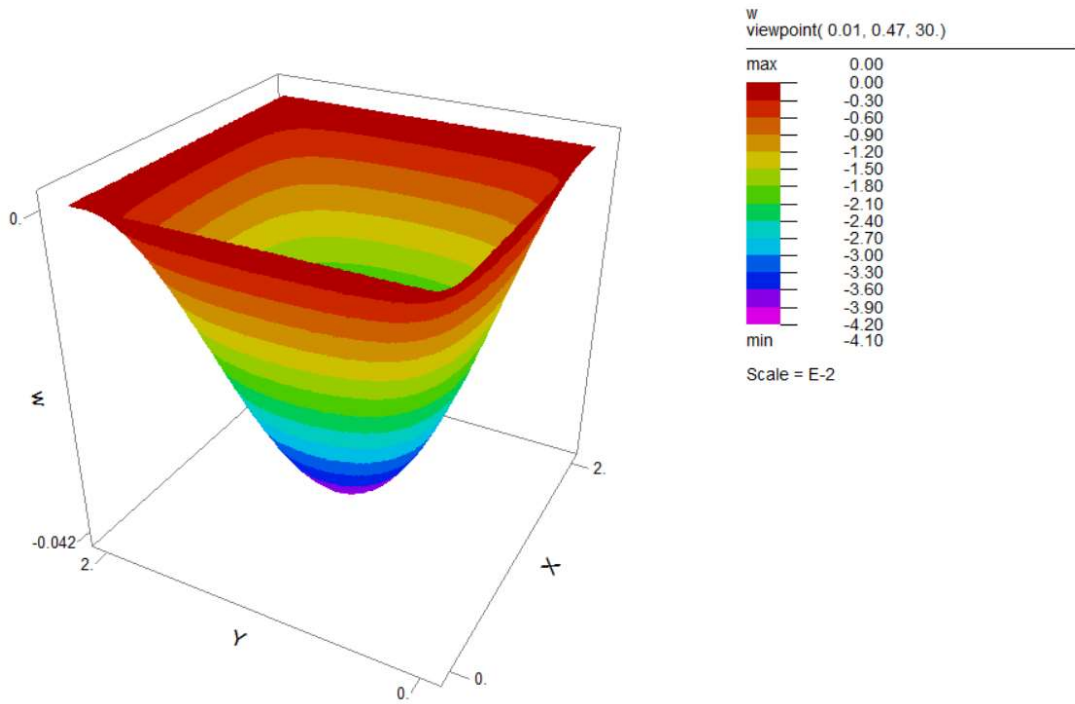


2D-ohyb-deska-OOD-q+F-final_5vrstev(1): Grid#1 P3 Nodes=499 Cells=916 RMS Err= 2.e-4
Integral(1)= 9575.747 Integral(2)= 1736.008 Integral(3)= 15.77377

Výsledku průhybu na panelu

Ohyb OOD desky

23:27:32 4/17/19
FlexPDE 7.13a/W64



2D-ohyb-deska-OOD-q+F-final_5vrstev(1): Grid#1 P3 Nodes=499 Cells=916 RMS Err= 2.e-4
Integral= -0.070160