UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Nevlastné integrály a ich aplikácie

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedúca bakalárskej práce: **RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.**

Vypracovala: **Jana Milová**

Študijný program: B1103 Aplikovaná matematika

Študijný obor: Matematika- ekonomie se zaměřením na bankovnictví

Forma štúdia: prezenčná

Rok odovzdania: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jana Milová

Názov práce: Nevlastné integrály a ich aplikácie

Typ práce: bakalárska

Pracovisko: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedúca práce: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

Rok obhajoby: 2015

Abstrakt: Táto bakalárska práca na tému nevlastné integrály a ich aplikácie sa zameriava na teóriu nevlastných integrálov a kritéria konvergencie resp. divergencie. Práca je doplnená príkladmi na objasnenie teórie a v jej závere je priblížená aplikácia nevlastných integrálov v štyroch oblastiach: v geometrii, v štatistike, v ekonómii a vo fyzike.

Kľúčové slová: nevlastné integrály, aplikácia nevlastných integrálov, kritéria konvergencie

Počet strán: 45

Počet príloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jana Milová

Title: Improper integrals and their applications

Type of thesis: bachelor

Department: Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics

Supervisor: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: This bachelor's theses is focused on theory of improper integrals and their applications and also on the tests of their convergence/ divergence. The theses is supplemented by examples illustrating the theory and at the end of the theses, there are explained applications of improper integrals in four areas: geometry, statistics, economics and physics.

Key words: improper integrals, applications of improper integrals, tests of convergence

Number of pages: 45

Number of appendices: 0

Language: slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vytvorila samostatne za vedenia pani RNDr. Martiny Pavlačkovej, Ph.D a že som v zozname literatúry uviedla všetky zdroje, z ktorých som pri písaní bakalárskej práce čerpala.

V Olomouci dňa 1.4.2015

Obsah

Poďakovanie

Rada by som týmto chcela poďakovať vedúcej svojej bakalárskej práce, pani RNDr. Martine Pavlačkovej Ph.D., za ochotu, odborné pripomienky, rady a čas, ktorý mi venovala. Taktiež by som chcela poďakovať všetkým ľuďom, ktorí ma podporovali.

Úvod

S matematikou sa každý z nás stretáva vo svojom každodennom živote, ale mnohí z nás si neuvedomujú, aká dôležitá je pre nás, a väčšina si ani neuvedomuje, že mnohé veci fungujú na základoch matematiky. Matematika ma uchvátila už na základnej škole a tento pocit vo mne pretrvá dodnes, a to je jeden z hlavných dôvodov, prečo sa moja bakalárska práca zaoberá matematickou témou.

Vo svojej bakalárskej práci som sa rozhodla venovať problematike nevlastných integrálov ako časti matematiky, ktorá býva mnohokrát pre študentov údelom. Okrem samotných nevlastných integrálov sa v svojej bakalárskej práci zaoberám ich aplikáciami v rôznych oblastiach, konkrétne pre moju prácu je to geometria, štatistika, ekonómia a fyzika.

Moja bakalárska práca je rozdelená na tri základné časti. V prvej časti sa venujem vlastnému Riemmanovmu integrálu, ktorý potrebujem, aby som mohla zaviesť pojem nevlastný integrál. Prvá časť v sebe zahrňuje krátku teóriu neurčitého a určitého integrálu. V druhej časti sa venujem hlavnej téme mojej práce, a to nevlastnému Riemmanovmu integrálu. Druhá časť v sebe taktiež zahrňuje prehľad základných konvergenčných kritérií pre určovanie konvergencie, respektíve divergencie, nevlastných integrálov. Začiatkom prvých dvoch častí je teória, úvod, ktorým sa budem snažiť priblížiť, čo bude nasledovať v ďalšom texte, ďalej nasledujú definície, príklady s príslušným výpočtom, grafy a základné vlastnosti jednotlivých integrálov, a v prípade nevlastných integrálov už spomínané kritéria konvergencie. V tretej, a teda poslednej časti mojej práce sa zaoberám aplikáciou nevlastných integrálov. Tretia časť začína teoretickým úvodom a nasleduje už samotnými aplikáciami nevlastných integrálov v geometrii, v štatistike, v ekonómii a vo fyzike.

Pri tvorení grafov pre moju bakalársku prácu som využila program *Wolfram Mathematica 9*, s ktorým sa som sa stretla na začiatku svojho štúdia na vysokej škole a ktorý si ma naklonil svojím prehľadným ovládaním.

1 Vlastný Riemmanov integrál

Aby sme sa mohli venovať nevlastným integrálom, musíme najprv zadefinovať vlastné integrály, ktoré môžeme označiť ako predchodcov nevlastných integrálov. Pri tvorbe tejto kapitoly boli využité hlavne zdroje [1]-[4], [6], [13], [23]-[25] a [34].

1.1 Primitívna funkcia a neurčitý integrál

Ak by sme mali napr. zadané dve funkcie $f\colon y = 6x$ a $F\colon y = 3x^2$, tak pri derivovaní funkcie F, by sme dostali funkciu f. Na tomto princípe sú založené pojmy primitívna funkcia a neurčitý integrál.

Definícia 1 Nech sú funkcie f a F definované na otvorenom intervale I. Hovoríme, že funkcia F je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I, ak platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pre každé } x \in I.$$

Ak by sme sa vrátili späť ku funkciám f a F, ukázali sme že, derivovaním funkcie F dostaneme funkciu f. Otázkou je, či je to jediná funkcia, ktorá vyhovuje tejto podmienke. Odpoveď je, že nie. Ak by sme ku funkcii F pripočítali ľubovoľné reálne číslo C, získali by sme jej derivovaním taktiež funkciu f.

Príklad 1

$F(x) = 3x^2 \qquad F'(x) = 6x = f(x)$

$F(x) = 3x^2 + 4 \qquad F'(x) = 6x = f(x)$

Veta 1 Ak je funkcia F primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I, tak potom každá funkcia v tvare $F(x) + C$, kde $C \in \boldsymbol{R}$, je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I.

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť napr. v [3].

Poznámka 1 Vetu 1 by sme mohli geometricky interpretovať nasledovne: grafy primitívnych funkcií F k funkcii f sa od seba líšia posunutím v smere osi y.

Definícia 2 Neurčitým integrálom funkcie f na intervale I nazývame množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na I, tj. množinu

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c; c \in \boldsymbol{R}, \qquad F(x) \text{ je primitívna funkcia k } f \text{ na } I\}.$$

Proces hľadanie primitívnej funkcie k funkcii f sa nazýva **integrovanie** alebo **integrácia**. Funkcia f sa nazýva integrandom, „c“ integračnou konštantou, symbol $\int$ integračným znakom a dx slúži k odlíšeniu integračnej premennej.

Poznámka 2 Ak je funkcia F primitívnou funkciou k funkcii f, potom tento fakt zapisujeme skrátene nasledujúcim vzťahom

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \boldsymbol{R}$$

Z definície 2 plynie tiež nasledovné

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

z čoho vyplýva, že integrovanie a derivovanie sú navzájom takmer inverzné operácie.

Pri hľadaní primitívnej funkcie F k funkcii f sa využívajú tri hlavné spôsoby metód výpočtov:

1. **Tabuľkové integrály**
2. **Metóda per partes**
3. **Substitučná metóda**

Tabuľkové integrály sú odvodené zo vzorcov pre derivovanie základných elementárnych funkcií. Medzi najčastejšie používané patria hlavne nasledujúce:

$$\int a\, dx = ax + c \qquad a \in \boldsymbol{R}, x \in \boldsymbol{R}$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \in \boldsymbol{N}, x \in \boldsymbol{R}$$

$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ $\qquad a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1\}, x \in \boldsymbol{R}$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$

$\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R}$

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\qquad a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}, x \in \boldsymbol{R}$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R}$

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R}$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R} \setminus \{k \cdot \pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R}$

$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\operatorname{arccotg} x + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$ $\qquad x \in (-1,1)$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$ $\qquad x \in (-1,1)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ $\qquad x \in \boldsymbol{R}: f(x) \neq 0$

$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$ $\qquad a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, b \in \boldsymbol{R}$

Veta 2 Nech funkcie f a g majú primitívne funkcie na *I* a nech $c \in \boldsymbol{R}$**.** Potom pre funkcie $f \pm g$ a $c \cdot f$ platí, že na intervale *I* majú primitívne funkcie a platia nasledujúce vzťahy

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť napr. v [3].

Príklad 2

$$\int x^2 + \operatorname{tg} x + 2\,dx = \int x^2 dx + \int \operatorname{tg} x\,dx + \int 2dx =$$

$$= \int x^2 dx + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int 2dx = \int x^2 dx + \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{-1}{-1} dx + \int 2dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \ln|\cos x| + 2x + c, c \in \boldsymbol{R}$$

Ak by sme chceli vypočítať $\int e^x x\,dx$ pomocou tabuľkových integrálov, nie je to možné, pretože neintegrujeme základné elementárne funkcie, ale integrujeme funkciu, ktorá je daná ako súčin dvoch elementárnych funkcií a to funkcií e^x a x. Pre výpočet takýchto neurčitých integrálov sa používa metóda *per partes*, ktorou sa teraz budeme zaoberať.

Veta 3 Nech k funkciám u a v existujú ich derivácie u'a v' na intervale *I*. Ak existuje primitívna funkcia ku jednej z funkcií $u'v, uv'$ na *I*, existuje aj druhá a platí

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť napr. v [4].

Poznámka 3 Popísanej metóde sa hovorí per partes alebo integrovanie „po častiach“. Metóda per partes sa využíva v prípade, kedy integrujeme súčin dvoch funkcií, tieto funkcie však spolu nijako nesúvisia. Za funkciu "u" väčšinou volíme funkcie: $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, ..., $\sin x$, $\cos x$, polynómy. A za funkciu "v' " najčastejšie volíme funkcie: $\cos x$, $\sin x$, e^x, ..., polynóm.

Príklad 3

$$\int e^x \cdot x\,dx = \begin{vmatrix} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{vmatrix} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x =$$

$$= e^x \cdot (x-1) + c, c \in \boldsymbol{R}$$

Okrem metódy per partes, ktorú nemôžeme vždy využiť, sa pri výpočtoch integrálov využíva aj substitučná metóda, pri ktorej zavedením novej premennej môžeme našu funkciu, ktorú chceme zintegrovať, previesť na funkciu, ktorú zintegrujeme jednoduchšie.

Veta 4 Nech $f(t)$ je spojitá na intervale *(a, b)*, nech funkcia $\varphi(x)$ má na intervale $(\alpha,\ \beta)$ spojitú deriváciu a nech $\varphi(x)\ \in\ (a,b)$ pre každé $x\ \in\ (\alpha,\beta)$. Potom na intervale (α,β) platí

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx\,, pre\ t = \varphi(x).$$

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť napr. v [4].

Príklad 4

$$\int \frac{5}{2x-1}dx = \left| \begin{matrix} t = 2x-1 \\ dt = 2x \\ \frac{1}{2}dt = dx \end{matrix} \right| = \frac{5}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{5}{2}\ln|t| = \frac{5}{2}\ln|2x-1| + c, c \in \boldsymbol{R}$$

1.2 Určitý integrál

Určitý integrál sa uvažuje na uzavretom a obmedzenom intervale $\langle a,b\rangle$, na ktorom je funkcia *f* integrovateľná a obmedzená. Ak je funkcia *f* na $\langle a,b\rangle$ nezáporná, môžeme pomocou určitého integrálu vypočítať plochu, ktorú nám vymedzuje graf funkcie $y = f(x)$ pre $x \in \langle a,b\rangle$, priamky $x = a$ a $x =\ b$ a priamka $y = 0$.

Doteraz sme uvažovali funkciu F, ako primitívnu funkciu na otvorenom intervale, teraz sa obmedzujeme na uzavretý interval, preto zavádzame nasledujúcu definíciu.

Definícia 3 Majme funkcie $F,\ f$ definované na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$. Ak pre každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí $F'(x) = f(x)$, pričom deriváciu funkcie *F* v bode *a* rozumieme deriváciu v bode *a* sprava a deriváciu funkcie *F* v bode *b* deriváciu v bode *b* zľava, hovoríme, že funkcia *F* je primitívnou funkciou k funkcii f na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$.

Definícia 4 Delením uzavretého intervalu $\langle a,b\rangle$ nazývame akúkoľvek konečnú množinu bodov $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ležiacu v intervale $\langle a,b\rangle$ takú, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Body $x_{0,}x_1, \dots, x_n$ sa nazývajú deliace body intervalu $\langle a,b\rangle$; interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ sa nazýva i-tý deliaci interval; číslo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ sa nazýva dĺžka i-tého deliaceho intervalu.

Množinu všetkých delení intervalu $\langle a, b\rangle$ budeme označovať symbolom $\mathcal{D}(\langle a, b\rangle)$.

Definícia 5 Nech je funkcia f obmedzená na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je nejaké delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme pre všetky $i = 1, \dots, n$

$m_i = inf\{f(x);\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$ ...

... infimum funkčných hodnôt $f(x)$ na intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$,

$M_i = sup\{f(x);\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$ ...

... supremum funkčných hodnôt $f(x)$na intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Potom číslo

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

nazývame dolný (Riemannov) súčet funkcie f pri delení D a číslo

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

nazývame horný (Riemannov) súčet funkcie f pri delení D.

Definícia 6 Nech f je obmedzená na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom sa číslo

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = sup\{s(f, D); D \ \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)\}$$

nazýva dolný (Riemannov) integrál funkcie f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a číslo

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = inf\{S(f, D); D \ \in \mathcal{D}(\langle a, b\rangle)\}$$

nazýva horný (Riemannov) integrál funkcie f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definícia 7 Nech f je obmedzená na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx,$$

hovoríme, že funkcie f je Riemannovsky integrovateľná na $\langle a, b\rangle$. Spoločnú hodnotu dolného a horného Riemannovho integrálu nazveme Riemannovým integrálom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, označujeme

$$\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Pokiaľ

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx < \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx,$$

potom hovoríme, že f nie je Riemannovský integrovateľná.

Poznámka 4 Funkciu f, ktorá je Riemannovský integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ zapisujeme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Veta 5 (Newton- Leibnizov vzorec) Nech $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a nech existuje primitívna funkcia F k funkcii f na $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť napr. v [3].

Pri výpočtoch určitého integrálu sa používa tiež metóda per partes a substitučná metóda. Ak u určitého integrálu využívame substitučnú metódu, musíme k novej premennej zmeniť medze, prepočítať ich z pôvodnej premennej. Metóda per partes si zachováva svoj postup, a však obidva vzniknuté vzťahy podliehajú Newton- Leibnizovmu vzorcu. Využitie oboch metód bude ukázané na nasledujúcom príklade.

Príklad 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot \sin(\cos x)\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ -dt = \sin x\, dx \\ \vdots \\ x = 0 \ldots t = \cos(0) = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \ldots t = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right| = \int_0^1 t \cdot \sin t\, dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t & v' = \sin\ t \\ u' = 1 & v = -\cos\ t \end{vmatrix} = [t \cdot -\cos t]_0^1 + \int_0^1 \cos t\, dt = [t \cdot -\cos t]_0^1 + [\sin\ t]_0^1 =$$

$$= \sin(1) - \cos(1) \cong 0{,}3012$$

2 Nevlastný Riemmanov integrál

V druhej polovici predchádzajúcej kapitoly sme sa venovali určitému integrálu, kde pri jeho výpočte sme boli obmedzení na:

1. integráciu cez obmedzený interval,
2. integráciu funkcie, ktorá bola na tomto intervale obmedzená .

Ak je porušená aspoň jedna z týchto dvoch podmienok nie je možné použiť pre výpočet klasický určitý integrál, ale je nutné použiť tzv. nevlastný integrál. Pred tým než sa budeme venovať samotným nevlastným integrálom je potrebné zaviesť jeden dôležitý pojem, a to integrál ako funkcia hornej medze resp. dolnej medze. Tieto dva pojmy sú si veľmi podobné, čo bude ukázané v ďalšom texte. Pri tvorbe tejto kapitoly boli využité hlavne zdroje [1], [2], [4], [5], [7], [9], [11]-[15] a [26]-[33].

2.1 Integrál ako funkcia hornej medze

Definícia 8 Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom sa funkcia

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

definovaná pre všetky $t \in \langle a, b\rangle$ nazýva funkcia hornej medze integrálu funkcie f. Tiež môžeme povedať, že integrál $\int_a^t f(x)dx$ je funkciou hornej medze.

Poznámka 5 Ako bolo naznačené v úvode integrál funkcie hornej a dolnej medze sú si podobné. Ich podobnosť spočíva v tom, že integrál dolnej medze sa zapisuje analogicky ako $G(t) = \int_t^b f(x)\, dx$ pre $t \in \langle a, b\rangle$, a z toho vyplýva že integrál $\int_t^b f(x)dx$ považujeme za funkciu dolnej medze integrálu funkcie f alebo tiež funkciu dolnej medze.

Veta 6 Nech je funkcia f Riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, tak potom pre funkciu $F(t)$ zavedenú v definícií 8 platí nasledujúce:

a) Funkcia F je na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitá.

b) V každom bode $t_0 \in \langle a, b\rangle$, v ktorom je funkcia f spojitá, má funkcia F vlastnú deriváciu (v krajných bodoch intervalu a, b musíme uvažovať príslušné jednostranné derivácie a to k a sprava, k b zľava) a platí

$$F'(t_0) = f(t_0).$$

c) Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, potom je funkcia F primitívnou funkciou k funkcii f na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$.

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť napr. v [12].

V súvislosti s nevlastnými integrálmi je nutné zaviesť si ešte jeden pojem, a to pojem singulárny bod.

Definícia 9 Povedzme, že bod $c \in \boldsymbol{R}^*$, kde $a \leq c \leq b$, je singulárnym bodom integrácie funkcie f na intervalu (a, b), ak je $c = \infty$ alebo $c = -\infty$ alebo ak je funkcia f na každom okolí bodu *c* neobmedzená.

O singulárnych bodoch môžeme teda prehlásiť, že sú to body, ktoré nám robia problémy kvôli ktorým nemôžeme priamo počítať integrál postupom uvedeným u určitého integrálu.

Príklad 6 Určenie singulárnych bodov

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x-5}$$ singulárnym bodom je $-\infty$

$$\int_{1}^{7} \frac{dx}{x-2}$$ singulárnym bodom je 2

$$\int_{1}^{4} \frac{2x}{\ln x - 1} dx$$ singulárnym bodom je *e*

2.2 Nevlastné integrály

O nevlastných integráloch teda uvažujeme pokiaľ je porušené buď to, že funkcia f nie je obmedzená na intervale (a, b) alebo nemáme obmedzený interval (a, b).

Nevlastné integrály potom delíme na :

1. Nevlastné integrály vplyvom medze – znamená to, že aspoň jeden z bodov a, b je ∞ alebo $-\infty$.

2. Nevlastné integrály vplyvom funkcie – funkcia $f(x)$ je na danom intervale neobmedzená.

Nevlastné integrály sú definované ako limity určitého integrálu, ktorý má premenlivú hornú alebo dolnú medzu. Potom, ak existuje vlastná limita nevlastný integrál bude konvergovať, ak limita neexistuje alebo je nevlastná hovoríme, že nevlastný integrál diverguje.

2.3 Nevlastné integrály vplyvom medze

Definícia 10 Nech je funkcia f definovaná na $\langle a, \infty)$ a nech pre každé $t \in (a, \infty)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)dx$. Ak existuje vlastná limita

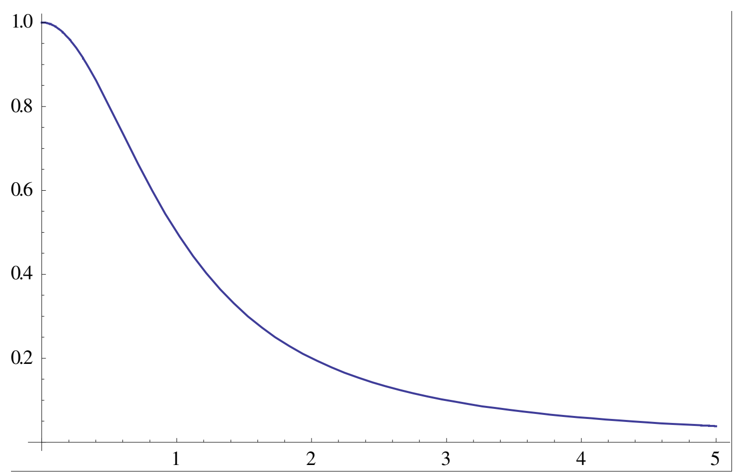
$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje (existuje). Ak existuje tento nevlastný integrál, potom ho definujeme vzťahom

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

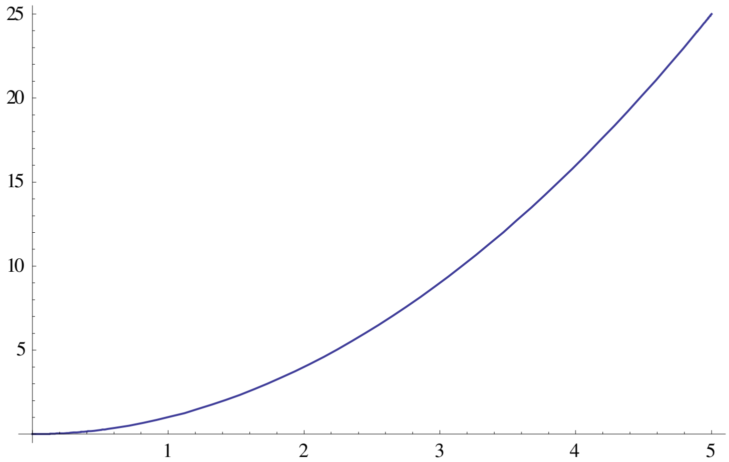
Ak je limita nevlastná alebo neexistuje, hovoríme, že nevlastný integrál diverguje .

Na nasledujúcom obrázku je zobrazená časť grafu funkcie $\frac{1}{1+x^2}$, ktorej nevlastný integrál $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ konverguje k $\frac{\pi}{2}$. Postup výpočtu je naznačený v príklade 7 časť d.



Obr. 1: Časť grafu funkcie f, ktorej nevlastný integrál $\int_0^\infty f(x)dx$ konverguje

Na nasledujúcom obrázku je časť grafu funkcie x^2, ktorej nevlastný integrál $\int_1^{\infty} x^2 dx$ diverguje k ∞. Postup výpočtu je naznačený v príklade 7 časť b.



Obr. 2: Časť grafu funkcie f, ktorej nevlastný integrál $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverguje

Definícia 11 Nech je funkcia f definovaná na $(-\infty, b\rangle$ a nech pre každé $t \in (-\infty, b)$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$. Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx,$$

potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ konverguje (existuje). Ak existuje tento nevlastný integrál, potom ho definujeme vzťahom

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Ak je limita nevlastná alebo neexistuje, hovoríme, že nevlastný integrál diverguje.

Definícia 12 Nech je funkcia f definovaná na $(-\infty, \infty)$ a nech konvergujú obidva nevlastné integrály

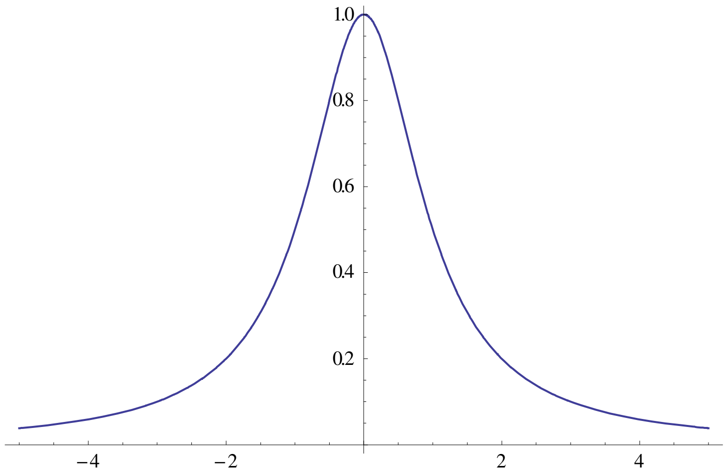
$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \quad \text{a} \quad \int_c^{\infty} f(x)dx,$$

kde $c \in \boldsymbol{R}$. Potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konverguje (existuje) a definujeme ho vzťahom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx,$$

kde $c \in \boldsymbol{R}$. Ak diverguje aspoň jeden z integrálov, potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ diverguje.

Na nasledujúcom obrázku je zobrazený graf funkcie $\frac{1}{1+x^2}$, ktorej nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ konverguje k π.



Obr. 3: Graf funkcie $\boldsymbol{f}$, ktorej nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(x)dx}$ konverguje

Príklad 7

a) Integrál, ktorý konverguje

$$\int_{-\infty}^{3} 2^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{3} 2^x dx = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_t^3 = \frac{8}{\ln 2} \cong 11{,}542$$

b) Integrál, ktorý diverguje

$$\int_{1}^{\infty} x^2 dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} x^2 dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^t = \infty - \frac{1}{9} = \infty$$

c) Integrál, ktorý diverguje

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} x^2 dx + \lim_{z\to\infty} \int_{0}^{z} x^2 dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{x^3}{3}\right]_t^0 + \lim_{z\to\infty} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^z = \infty + \infty = \infty$$

d) Integrál, ktorý konverguje

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^t = \frac{\pi}{2}$$

Pri určovaní konvergencie a divergencie nevlastných integrálov sa často používa tzv. **p-test**, ktorý sa týka mocninných funkcií.

Primitívnou funkciou pre ľubovoľné $p \in \boldsymbol{R}$ k funkcii

$$f(x) = x^{-p} = \frac{1}{x^p}, x \in (0, \infty)$$

je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} + c & pre\ p \neq 1 \\ \ln|x| + c & pre\ p = 1, \end{cases}$$

kde *c* je ľubovoľná konštanta. Pretože

$\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{p-1}} = 0$ pre $p > 1$ a $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{p-1}} = \infty$ pre $p < 1$,

získame nasledujúci výsledok:

Ak $k \in (0, \infty)$, potom

$$\int_k^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty & pre\ p \leq 1 \\ \dfrac{1}{k^{p-1}(p-1)} & pre\ p > 1. \end{cases}$$

Tým sme získali tzv. p-test pre nevlastné integrály vplyvom medze.

Niekedy sa na určenie konvergencie respektíve divergencie využívajú konvergenčné kritéria. Vo svojej práci sa budem zaoberať a bližšie priblížim kritéria: porovnávacie, limitné porovnávacie, Dirichletovo, Trenchovo, Abelovo, Bolzano-Cauchyho a integrálne.

Porovnávacie kritérium

Nech na intervale $\langle l, \infty)$ sú splnené nerovnosti $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Potom platí

a) Ak konverguje $\int_l^{\infty} g(x)dx$, konverguje aj $\int_l^{\infty} f(x)dx$.

b) Ak diverguje $\int_l^{\infty} f(x)dx$, diverguje aj $\int_l^{\infty} g(x)dx$.

Dôkaz Pre dôkaz porovnávacieho kritéria budeme vychádzať z faktu, že pokiaľ máme ľubovoľný interval $\langle l, \infty) = L$ a ľubovoľné funkcie vyhovujúce nerovnosti $0 \le f(x) \le g(x)$, tak pre obyčajný určitý integrál platí

$$0 \le \int_l^t f(x)dx \le \int_l^t g(x)dx \text{ pre ľubovoľné } t \in \boldsymbol{R}$$

a limity zachovávajú nerovnosti $\le$. Potom na dokázanie viet a) a b) využijeme fakty

$$\int_L g(x)dx < \infty \; a \; \int_L f(x)dx = \infty.$$

Príklad 8 Na tomto príklade ukážem existenciu integrálu $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ pomocou porovnávacieho kritéria.

Uvažujme spojitú funkciu $f(x) = e^{-x^2}$ na intervale $\langle 0, \infty)$ a definujme

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & pre\ 0 \le x \le 1 \\ e^{-x} & pre\ 1 \le x \le \infty. \end{cases}$$

Potom platí $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in \langle 0, \infty)$ a

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx =$$

$$= konečná\ hodnota + (e^{-1} - 0) = (konečná\ hodnota).$$

Odtiaľ teda,

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \le \int_0^\infty g(x)dx < \infty,$$

čo teda znamená, že $\int_0^\infty f(x)dx$ je konečný, a teda konverguje.

Poznámka 6 Rovnako by sme mohli dokázať, že $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ existuje alebo by sme mohli využiť faktu, že $f(x) = e^{-x^2}$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$ je párna funkcia teda

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

I keď neexistuje primitívna funkcia k e^{-x^2}, tento integrál sa dá vypočítať pomocou dvojného integrálu. Bližšie sa tejto problematike budem venovať v tretej kapitole svojej práce.

V praxi sa však používa tiež limitné porovnávacie kritérium, ktoré je silnejšie a často účinnejšie ako porovnávacie kritérium.

Limitné porovnávacie kritérium

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú nezáporné na intervalu $\langle l, \infty)$ a nech existuje limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 \leq L \leq \infty.$$

Potom platí:

a) Ak je $L < \infty$ a integrál $\int_l^\infty g(x)dx$ konverguje, potom konverguje aj integrál $\int_l^\infty f(x)dx$.

b) Ak je $L > 0$ a $\int_l^\infty g(x)dx$ diverguje, potom diverguje aj integrál $\int_l^\infty f(x)dx$.

Z toho plynie, že ak je limita L kladná a konečná, tak integrály z $f(x)$ a $g(x)$ súčasne buď konvergujú alebo divergujú.

Dôkaz tohto kritéria môžeme nájsť napr. v [9].

Pre limitné porovnávacie kritérium si často volíme funkcie v tvare $\frac{1}{x^k}$, pretože o nich vieme, pre ktoré *k* konvergujú.

Príklad 9 Pomocou limitného porovnávacieho kritéria môžeme dokázať, že $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x+x^2}$ konverguje.

Zvolíme si $f(x) = \frac{1}{x^2}$ a $g(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$. Spočítame si limitu L , tzn.

$$\mathrm{L} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1+x+x^2}{1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 0 + 1 = 1,$$

ktorá vyjde ako konečná, kladná hodnota. Odtiaľ, $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x+x^2}$ konverguje, pretože $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konverguje.

Integrálne kritérium

Nech $y = f(x)$ je kladná a nerastúca funkcia, ktorá je definovaná na intervale $\langle l, \infty)$, kde l je prirodzené číslo. Označíme $a_n = f(n)$ pre $n = l, l+1, l+2, \dots$. Potom

$$\int_l^\infty f(x)dx \text{ konverguje/diverguje}$$

vtedy a iba vtedy keď

$$\sum_{n=l}^{\infty} a_n \text{ konverguje/diverguje.}$$

Dôkaz tohto kritéria môžeme nájsť v rôznych matematických knihách zameraných na integrálny počet, napr. v [7].

Príklad 10 Na tomto príklade ukážem pomocou integrálneho kritéria, že $\int_{e^3}^{\infty} \frac{dx}{[\ln x]^{\ln x}}$ konverguje.

Najprv si zavedieme substitúciu $t = \ln x \leftrightarrow x = e^t$[tj. $dx = e^t dt, x = e^3 \rightarrow t = \ln(e^3) = 3, x = \infty \rightarrow t = \infty$], a dostaneme

$$\int_{e^3}^{\infty} f(x)dx = \int_{3}^{\infty} \frac{e^t}{t^t} dt.$$

Funkcia $g(t) = \frac{e^t}{t^t}$ je na intervale $\langle 3, \infty)$ spojitá, kladná a klesajúca.

Pretože nekonečná rada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$ konverguje napr. podľa odmocninového kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} = 0 < 1,$$

konverguje podľa integrálneho kritéria tiež $\int_{e^3}^{\infty} \frac{dx}{[\ln x]^{\ln x}}$.

Dirichletovo kritérium

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú definované na intervale $\langle l, \infty)$. Potom $\int_{l}^{\infty} f(x)g(x)dx$ konverguje, ak pre funkcie $f(x)$ a $g(x)$ platí:

1. Funkcia $f(x)$ je integrovateľná na ľubovoľnom intervale $\langle l, t\rangle$ a existuje konštanta L taká, že $\left|\int_{l}^{t} f(x)dx\right| \leq L$ pre každé $t \in \langle l, \infty)$,
2. Funkcia $g(x)$ je nerastúca na $\langle l, \infty)$ a

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Príklad 11 Na tomto príklade preskúmam konvergenciu $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ pomocou Dirichletovho kritéria.

Najprv si zavediem označenie $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x}$.

Aby sme overili prvú podmienku z Dirichletovho kritéria, zvolím si ľubovoľné $t > 1$ a spočítam integrál:

$\int_{1}^{t} \sin x \, dx = [-\cos x]_1^t = -\cos t + \cos(1) \leq 2,$

tj. funkcia $f(x)$ splňuje podmienku 1. z Dirichletovho kritéria.

Pretože je funkcia $g(x) = \frac{1}{x}$ na integračnom obore klesajúca, je pre overenie druhej podmienky nutné iba spočítať limitu funkcie $g(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Zo splnenia obidvoch podmienok vyplýva, že $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ konverguje podľa Dirichletovho kritéria.

Ábelovo kritérium

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú definované na intervale $\langle c, \infty)$. Potom nevlastný integrál $\int_c^\infty f(x)g(x)dx$ konverguje, ak pre funkcie $f(x)$ a $g(x)$ platí:

1. Funkcia $f(x)$ je integrovateľná na $\langle c, \infty)$ a integrál $\int_c^\infty f(x)dx$ koverguje,
2. Funkcia $g(x)$ je monotónna a ohraničená na $\langle c, \infty)$.

Príklad 12 Na tomto príklade preskúmam konvergenciu $\int_3^\infty \frac{1}{x\cdot(1+x^2)}dx$ pomocou Ábelovho kritéria.

Označím si ako funkciu $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $g(x) = \frac{1}{x}$.

Funkcia $\frac{1}{x}$ je na intervale $\langle 3, \infty)$ ohraničená a monotónna. Ako ďalšie je nutné overiť konvergenciu integrálu $\int_3^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$, spočítame teda

$$\int_3^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_3^t \cong 0{,}3215.$$

Zo splnenia oboch podmienok vyplýva, že $\int_3^\infty \frac{1}{x\cdot(1+x^2)}dx$ konverguje podľa Ábelovho kritéria.

Bolzano- Cauchyho kritérium

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale $\langle c, \infty)$. Potom integrál $\int_c^\infty f(x)dx$ konverguje práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in \langle c, \infty)$ také, že pre každé $x_1, x_2 \in \langle c, \infty)$ také, že $x_1 > x_0$ a $x_2 > x_0$, platí vzťah

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Definícia 13 Hovoríme, že integrál $\int_c^\infty f(x)dx$ konverguje absolútne, ak konverguje integrál $\int_c^\infty |f(x)|dx$**.**

Hovoríme, že integrál $\int_c^\infty f(x)dx$ konverguje relatívne, ak on sám konverguje, ale integrál $\int_c^\infty |f(x)|dx$ diverguje.

Príklad 13 Na tomto príklade budem dokazovať relatívnu konvergenciu nevlastného integrálu $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

Najprv si musíme uvedomiť, že ide iba o nevlastný integrál vplyvom medze, pretože *0* nie je singulárnym bodom. Toto tvrdenie overím s využitím L'Hospitalova pravidla nasledovne:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Ako prvé dokážem, že nevlastný integrál $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ konverguje. Aj keď *0* nie je singulárnym bodom, budem sa ju snažiť izolovať, čím dostanem: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx =$

$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Prvý integrál nie je nevlastný, preto sa budem sústrediť na nevlastný integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Z využitím definície 10 a nasledovným výpočtom získam,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\sin x}{x}dx = \begin{vmatrix} u = \frac{1}{x} & v' = \sin x \\ u' = -\frac{1}{\mathrm{x}^2} & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^t - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}dx\right] = \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Ďalej si musíme uvedomiť, že nevlastný integrál$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ konverguje absolútne. Keďže platí: $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, tak potom s využitím p-testu nevlastný integrál $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konverguje a pomocou porovnávacieho kritéria aj nevlastný integrál $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}dx$ konverguje. Z čoho vyplýva, že nevlastný integrál $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ tiež konverguje. A tým máme dokázané, že nevlastný integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ konverguje.

Ak by sme chceli dokázať relatívnu konvergenciu nevlastného integrálu $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ museli by sme overiť, že $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ diverguje. Toto tvrdenie budem dokazovať sporom, čiže budem pripúšťať, že nevlastný integrál $\int_0^\infty \frac{|\sin\, x|}{x} dx$ konverguje a teda aj nevlastný integrál $\int_1^\infty \frac{|\sin\, x|}{x} dx$ konverguje. Pretože pre ľubovoľné $x \in \boldsymbol{R}$ platí $0 \leq |\sin\, x| \leq 1$, prenásobením výrazu nezáporným číslom $|\sin\, x|$ získame nerovnosť $0 \leq |\sin\, x|^2 = \sin^2 x \leq |\sin x|$. Pre $x \geq 1$ potom získame nerovnosť $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin\, x|}{x}$. Keďže sme predpokladali konvergenciu nevlastného integrálu $\int_1^\infty \frac{|\sin\, x|}{x} dx$, podľa porovnávacieho kritéria musí konvergovať aj nevlastný integrál $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$. To však nie je možné.

Vieme, že platí rovnosť $\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x)$. Pomocou napr. Dirichletova kritéria by sa dalo dokázať, že $\int_1^\infty \frac{\cos\, 2x}{x} dx$ konverguje. Pokiaľ máme dva nevlastné integrály funkcií $f(x)$ a $g(x)$, ktoré konvergujú na tom istom integračnom obore, potom aj integrál súčtu $f(x) + g(x)$ konverguje. Podľa tejto poznámky by mal potom konvergovať v našom prípade integrál:

$$\int_1^\infty \left(\frac{sin^2 x}{x} + \frac{\cos\, 2x}{2x}\right) dx = \int_1^\infty \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x)}{x} + \frac{\cos\, 2x}{2x}\right) dx =$$

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x} dx,$$

čo je podľa p-testu spor. Z toho vyplýva, že náš pripúšťajúci predpoklad o konvergencii nevlastného integrálu $\int_0^\infty \frac{|\sin\, x|}{x} dx$ bol chybný.

Poznámka 7 Pokiaľ by sme skúmali konvergenciu, resp. divergenciu nevlastných integrálov vplyvom dolnej medze, môžeme postupovať tak, že daný integrál prevedieme substitúciou $t = -x$ na nevlastný integrál vplyvom hornej medze, a na ten aplikujeme niektoré z vyššie uvedených kritérií.

2.4 Nevlastné integrály vplyvom funkcie

Definícia 14 Nech je funkcia f definovaná na obmedzenom intervale $\langle a, b)$ a nie je obmedzená na žiadnom ľavom okolí b, pričom pre každé $t \in \langle a, b)$ existuje integrál $\int_a^t f(x) dx$.

Ak existuje vlastná limita

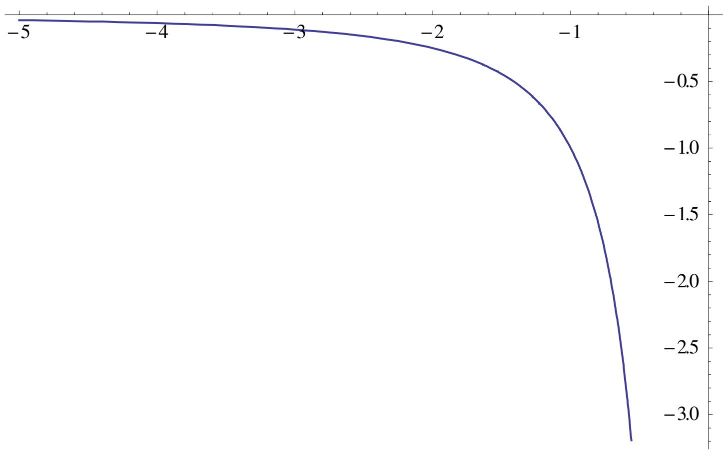
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje (existuje). Ak existuje nevlastný integrál, potom ho definujeme vzťahom

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Ak je limita nevlastná alebo neexistuje, hovoríme, že nevlastný integrál diverguje.

Na nasledujúcom obrázku je časť grafu funkcie $\frac{1}{-x^2}$, ktorej nevlastný integrál $\int_{-5}^{0} \frac{1}{-x^2} dx$ diverguje. Postup výpočtu je naznačený v príklade 14.



Obr. 4: Graf funkcie f, ktorej nevlastný integrál $\int_{-5}^{0} f(x)dx$ diverguje

Príklad 14

$$\int_{-5}^{0} \frac{1}{-x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-5}^{t} \frac{1}{-x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{1}{x}\right]_{-5}^{t} = -\infty + \frac{1}{5} = -\infty$$

Definícia 15 Nech je funkcia f definovaná na obmedzenom intervale $(a, b\rangle$, nie je obmedzená na žiadnom pravom okolí bodu *a* a nech pre každé $t \in (a, b\rangle$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$.

Ak existuje vlastná limita

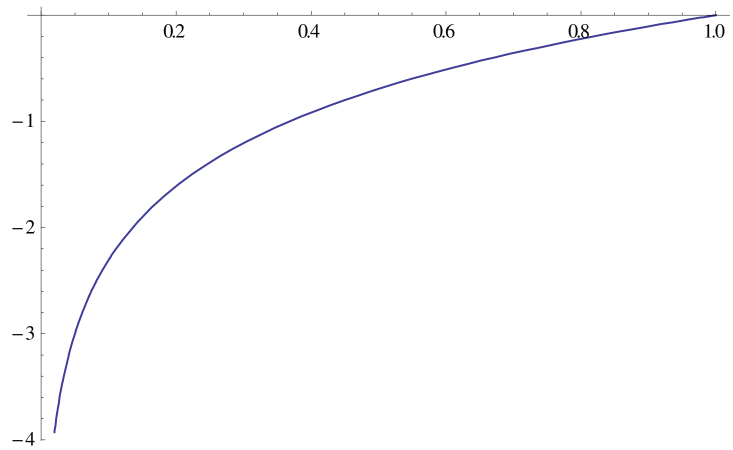
$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje (existuje). Ak existuje nevlastný integrál, potom ho definujeme vzťahom

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_a^t f(x)dx.$$

Ak je limita nevlastná alebo neexistuje, hovoríme, že nevlastný integrál diverguje.

Na nasledujúcom obrázku je časť grafu funkcie $\ln x$, ktorej nevlastný integrál $\int_0^1 \ln(x)\, dx$ konverguje k -1. Postup výpočtu je naznačený v príklade 15.



Obr. 5: Graf funkcie f, ktorej nevlastný integrál $\int_0^1 f(x)dx$ konverguje

Príklad 15

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} = \lim_{t\to 0^+} [[\ln\ x \cdot x]_t^1 -$$

$$-\int_t^1 \frac{1}{x} \cdot x\, dx = \lim_{t\to 0^+} [[\ln\ x \cdot x]_t^1 - [x]_t^1] = 0 - \left(\lim_{t\to 0^+} \ln\ t \cdot t\right) - 1 + 0 = 0 - 0 - 1 +$$
$$+0 = -1$$

Poznámka 8 Limita z predchádzajúceho príkladu

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\ x \cdot x$$

nepatrí medzi triviálne výrazy, musí sa preto najprv upraviť a následne s využitím L'Hospitalova pravidla získame výsledok -0.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\ x \cdot x = -\infty \cdot 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\ x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = -0.$$

Definícia 16 Nech je funkcia f definovaná na $\langle a, c) \cup (c, b\rangle$, nie je obmedzená na žiadnom okolí bodu c a nech konvergujú obidva nevlastné integrály

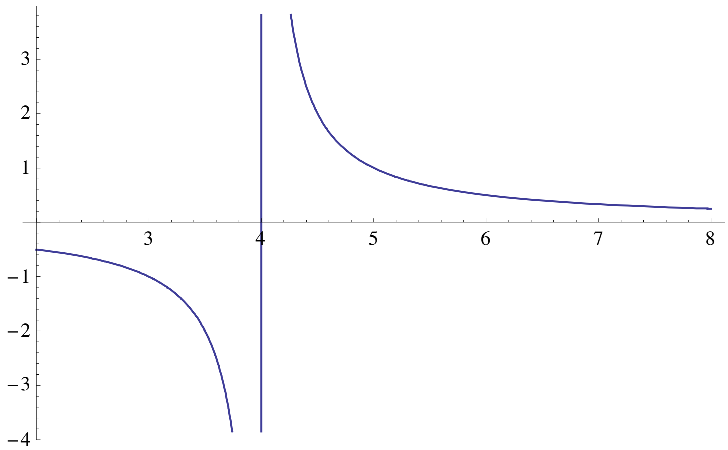
$$\int_a^c f(x)dx \qquad a \qquad \int_c^b f(x)dx.$$

Potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje (existuje) a definujeme ho vzťahom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ak diverguje aspoň jeden z integrálov, potom hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.

Na nasledujúcom obrázku je časť grafu funkcie $\frac{1}{x-4}$, ktorej nevlastný integrál $\int_2^8 \frac{dx}{x-4}$ diverguje. Postup výpočtu je naznačený v príklade 16, v tomto prípade singulárny bod leží uprostred integračného oboru.



Obr. 6: Graf funkcie f, ktorej nevlastný integrál $\int_2^8 f(x)dx$ diverguje

Príklad 16

$$\int_2^8 \frac{1}{x-4}dx = \int_2^4 \frac{dx}{x-4} + \int_4^8 \frac{dx}{x-4} = \lim_{t\to 4^-} \int_2^t \frac{dx}{x-4} + \lim_{u\to 4^+} \int_u^8 \frac{dx}{x-4} =$$

$$= \lim_{t\to 4^-} [\ln|x-4|]_2^t + \lim_{u\to 4^+} [\ln|x-4|]_u^8 = -\infty + \infty = \text{nie je definované} \leftrightarrow$$

$\leftrightarrow$ integrál $\nexists$

Na určovanie konvergencie a divergencie sa opäť používa **p-test**, s ktorým sme sa oboznámili v kapitole o nevlastných integráloch vplyvom medze.

Primitívnou funkciou pre ľubovoľné $p \in \boldsymbol{R}$ k funkcii

$$f(x) = x^{-p} = \frac{1}{x^p}, x \in (0, \infty)$$

je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} + c & pre\ p \neq 1 \\ \ln|x| + c & pre\ p = 1, \end{cases}$$

kde *c* je ľubovoľná konštanta. Pretože

$\lim\limits_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$, $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t^{p-1}} = \infty$ pre $p > 1$ a $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t^{p-1}} = 0$ pre $p < 1$,

získame nasledujúci výsledok:

Ak $k \in (0, \infty)$, potom

$$\int_0^k \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{k^{1-p}}{1-p} = \dfrac{1}{k^{p-1} \cdot (1-p)} & pre\ p < 1 \\ \infty & pre\ p \geq 1. \end{cases}$$

Pri určovaní konvergencie a divergencie nevlastných integrálov vplyvom funkcie sa budem zaoberať iba kritériom porovnávacím a limitným porovnávacím. Ostatné kritéria pre nevlastné integrály vplyvom medze by šli samozrejme tiež využiť, pokiaľ by sme daný nevlastný integrál vplyvom funkcie previedli na substitúciou na nevlastný integrál vplyvom medze.

Porovnávacie kritérium

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú spojité funkcie na $(l, d\rangle$ a nech $g(x) > 0$ pre všetky *x* dostatočne blízke k *l*.

1. Ak

$$|f(x)| \leq g(x) pre\ všetky\ x\ dostatočne\ blízke\ k\ l, a \int_l^d g(x)dx < \infty,$$

potom $\int_l^d f(x)dx$ konverguje.

2. Ak

$$f(x) \geq g(x)\ pre\ všetky\ x\ dostatočne\ blízke\ k\ l, a \int_l^d g(x) = \infty,$$

potom $\int_l^d f(x)dx$ diverguje.

Príklad 17 Na tomto príklade dokážem konvergenciu $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+x}dx$.

Pretože

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+x}\right| = \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x}+x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{pre } x > 0$$

a pretože podľa p-testu je $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$, integrál $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+x}dx$ konverguje.

Limitné porovnávacie kritérium

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sú spojité funkcie na $(l, d\rangle$ a nech $g(x) > 0$ pre všetky *x* dostatočne blízke k *l*.

1. Ak

$$\lim_{x\to l}\frac{|f(x)|}{g(x)} \text{existuje, je konečná a} \int_l^d g(x)dx < \infty,$$

potom $\int_l^d f(x)dx$ konverguje.

2. Ak

$$\lim_{x\to l}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ existuje, je nenulová a} \int_l^d g(x)dx = \infty,$$

potom $\int_l^d f(x)dx$ diverguje.

Príklad 18 Na tomto príklade dokážem divergenciu $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}dx$.

Na porovnanie použijem funkciu $g(x) = \frac{1}{x}$, pre ktorú viem, že $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty$. Ďalej spočítam

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)} \cdot f(x), \text{a získam}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq 0.$$

Potom z limitného porovnávacieho kritéria plynie divergencia $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}dx$.

2.5 Nevlastné integrály vplyvom medze a funkcie

Doteraz som sa vo svojej bakalárskej práci venovala nevlastným integrálom buď vplyvom medze alebo funkcie. V praxi sa však môžeme stretnúť s prípadom nevlastného integrálu vplyvom medze aj funkcie. To znamená, že budeme uvažovať funkciu $f(x)$ na intervale $(-\infty, a)$ alebo (a, ∞) a na tomto intervale bude $f(x)$ neohraničená. Ukážkovým príkladom na takýto typ integrálu je nevlastný integrál $\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. Postup výpočtu je vysvetlený v príklade 19.

Príklad 19

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \lim_{u\to 0^+}\int_u^5 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_5^t \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left|\begin{array}{c} z = -\frac{1}{x} \\ dz = \frac{1}{x^2}dx \\ \vdots \\ x = 0^+ \ldots z = -\frac{1}{x} = -\infty \\ x = \infty \ldots z = -\frac{1}{x} = 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\int_u^{\frac{-1}{5}} e^z dz + \lim_{t\to 0^-}\int_{\frac{-1}{5}}^t e^z dz = \lim_{u\to-\infty}[e^z]_u^{\frac{-1}{5}} + \lim_{t\to 0^-}[e^z]_{\frac{-1}{5}}^t =$$

$$= e^{\frac{-1}{5}} - 0 + 1 - e^{\frac{-1}{5}} = 1$$

3 Aplikácie nevlastných integrálov

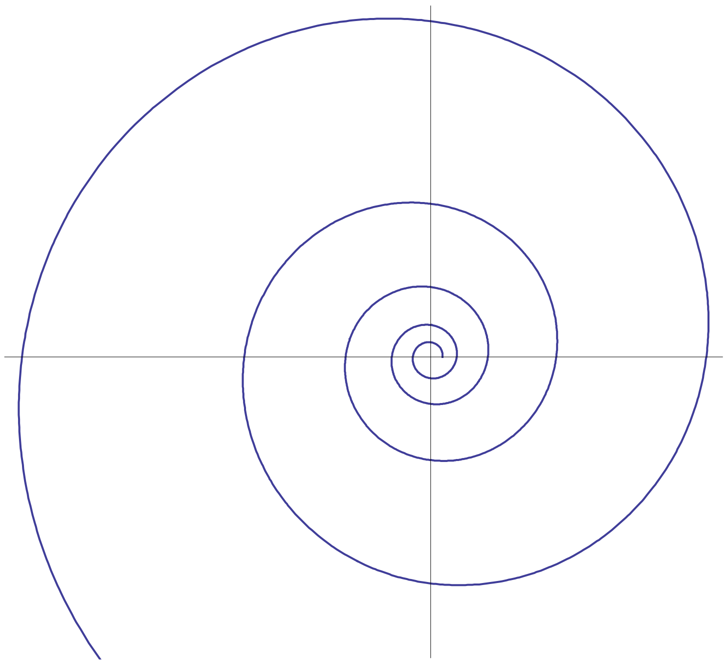
Nasledujúca časť mojej bakalárskej práce je zameraná na aplikáciu nevlastných integrálov, a to konkrétne v geometrii, v štatistike, v ekonómii a vo fyzike. V tejto časti sa budem taktiež venovať problematike výpočtu nevlastného integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, ktorú som priblížila v poznámke 6. Pri tvorbe tejto kapitoly boli využité zdroje [8], [10], [13] a [16]-[22].

3.1 Aplikácia v geometrii

V geometri, v diferenciálnej geometrii a v ďalších oblastiach sa môžeme stretnúť s rôznymi rovinnými krivkami, medzi ktoré patrí tiež logaritmická špirála a asteroida. Pokiaľ chceme vypočítať dĺžku rovinnej krivky používame určitý integrál. Pri výpočtoch dĺžky logaritmickej špirály a asteroidy sa však dostávame k nevlastným integrálom.

Logaritmická špirála je krivka, ktorej polomer *r* exponenciálne rastie s veľkosťou uhla θ, ktorý zviera sprievodič s kladným smerom osi *x*. V polárnych súradniciach (r, θ) je logaritmická špirála zadaná vzťahom

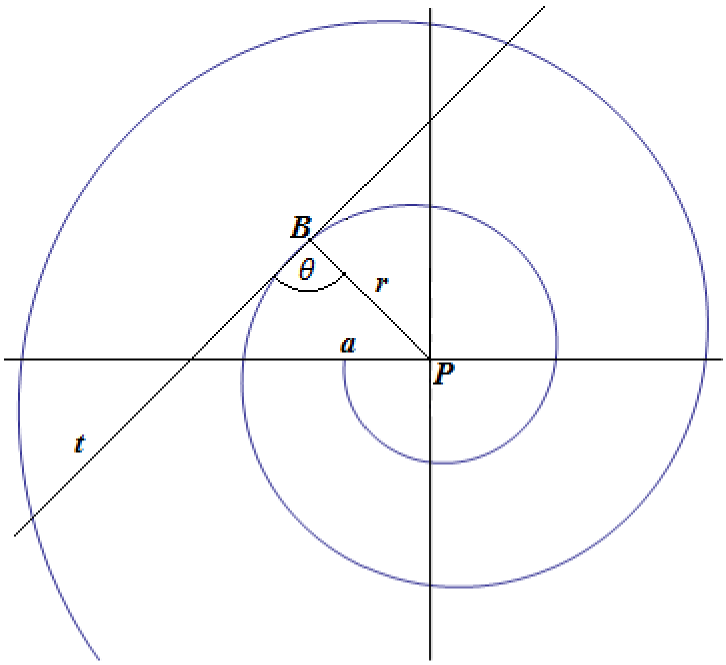
$$r = a \cdot e^{b\theta}, a, b \in \boldsymbol{R} \backslash \{0\}.$$



Obr. 7: Dĺžka krivky zadanej v polárnych súradniciach $\boldsymbol{r = a \cdot e^{b\theta}}$

S logaritmickou špirálou sa stretávame v každodennom živote, napr. je to dráha, po ktorej sa dravce približujú k svojej obeti alebo dráha, po ktorej sa hmyz približuje ku žiarovke alebo tvar ulity mäkkýšov.

Dôležitými bodmi špirály sú pól a počiatok. Pól *P* je bod, okolo ktoré sa špirála obtáča a počiatok je bod, od ktorého sa špirála začne vykresľovať. Polomer *r* je vektor, ktorý spája pól špirály a ľubovoľný bod *B* na špirále. Parameter *a* určuje posunutie počiatku od pólu špirály. Parameter *b* určuje samotný tvar krivky. Dotyčnicový uhol θ je uhol, ktorý zviera pre daný bod *B* vektor polomeru *r* s dotyčnicou *t* v rovnakom bode.



Obr. 8: Časť grafu logaritmickej špirály zobrazujúca dôležité body špirály

Dĺžka krivky, ktorá je zadaná predpisom $r = f(\theta)$ a $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ sa vypočíta vzťahom

$$L(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Aplikovaním predpisu logaritmickej špirály do tohto vzťahu získame

$$L(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |a|\sqrt{1 + b^2}\, e^{b\theta} d\theta = |a| \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b} \left(e^{b\theta_2} - e^{b\theta_1}\right).$$

Pre $b > 0$ a ľubovoľné $\theta \in \boldsymbol{R}$ je dĺžka logaritmickej špirály $L(-\infty, \theta)$ nevlastný integrál, ktorý má konečnú hodnotu, teda

$$L(-\infty, \theta) = |a| \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} e^{b\theta}.$$

Podobne pre $b < 0$ a $\theta \in \boldsymbol{R}$ dostaneme

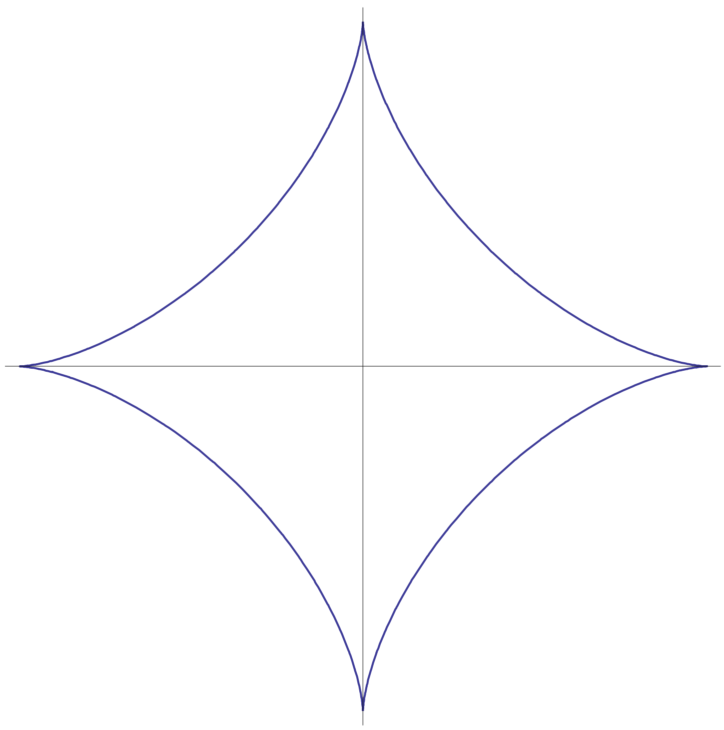
$$L(\theta, \infty) = |a| \frac{\sqrt{1+b^2}}{-b} e^{b\theta}.$$

Príklad 20 Dĺžka logaritmickej špirály popísanej rovnicou $r = e^{-\theta}$, kde $\theta \in \langle 0, \infty)$ je rovná $L(0, \infty) = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot e^0 = \sqrt{2}$.

Asteroida je rovinná krivka, ktorá je implicitne zadaná napr. predpisom

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

kde $a > 0$. Táto krivká má vrcholy v bodoch $\{(a, 0), (0, a), (-a, 0), (0, -a)\}$. Krivka je symetrická podľa oboch osí, podľa priamok $y = \pm x$ a podľa počiatku.



Obr. 9: Asteroida

S využitím symetrie asteroidy sa dĺžka asteroidy vypočíta pomocou vzťahu

$$L = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Keďže premenné x a y nie sú vyjadrené explicitne, ale implicitne, budeme využívať implicitné derivovanie.

Príklad 21 Nájdite $\frac{dy}{dx}$ pre funkciu $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ a vypočítajte dĺžku asteroidy popísanej touto rovnicou.

Ako prvé vyjadrím *y* ako funkciu veličiny *x*: $x^{\frac{2}{3}} + y(x)^{\frac{2}{3}} = 1$.

Najprv obidve strany rovnice zderivujem podľa veličiny *x*, potom z danej rovnice vyjadrím $\frac{dy}{dx}$, čím dostanem

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}} + y(x)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{d}{dx}1$$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}y^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = y'.$$

S využitím vypočítaného vzťahu získam:

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}.$$

Dĺžka asteroidy je teda konečná a je daná nevlastným integrálom

$$L = 4\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}dx = 4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}dx = 4\left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^1 = 4\cdot\frac{3}{2} = 6.$$

3.2 Aplikácia v štatistike

Nevlastné integrály sa vyskytujú napr. pri výpočte strednej hodnoty a rozptylu náhodnej veličiny alebo pri určovaní či je daná funkcia hustotou rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej veličiny a pod.

Príklad 22 Nájdite strednú hodnotu a rozptyl náhodnej veličiny, ktorá je zadaná hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & x > 1, \\ 0, & inak. \end{cases}$$

Najprv vypočítam strednú hodnotu z nasledujúceho vzťahu:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{\infty} x\frac{3}{x^4}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{3}{x^3}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{2x^2}\right]_1^t = \frac{3}{2}.$$

Pre rozptyl spojitej náhodnej veličiny platí nasledujúci vzťah:

$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$

Hodnota strednej hodnoty $E(X)$ je vypočítaná vyššie, takže pomocou nasledujúceho vzťahu dopočítam

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{1}^{\infty} x^2\frac{3}{x^4}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{3dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{x}\right]_1^t = 3.$$

Potom,

$var(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$

V teórii pravdepodobnosti sa stretávame s Gaussovou funkciou, ktorá je reálnou funkciou reálnej premennej *x* s troma parametrami a, μ, σ v tvare

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kde *a*, σ musia byť kladné, μ je ľubovoľné číslo a *e* je Eulerovo číslo. Gaussova funkcia má často význam funkcie pravdepodobnosti, v takom prípade potom musí byť splnené, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Najjednoduchší tvar Gaussovej funkcie je $g(x) = e^{-x^2}$, ktorej integrál je rovný $\sqrt{\pi}$. Postup výpočtu je naznačený v nasledujúcom príklade.

Príklad 23 Vypočítajte nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Najprv zavedieme značenie $Y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Potom obidve strany rovnice umocníme na druhú, pričom premennú v druhom integráli označíme ako *y*, čím dostaneme

$$Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Súčin integrálov predstavuje dvojný integrál funkcie dvoch premenných *x* a *y*, ktorý je súčinom pôvodných funkcií:

$$Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

Dvojný integrál prevedieme do polárnych súradníc (φ, r) nasledovne:

$x = r \cdot \cos\varphi$ a $y = r \cdot \sin\varphi$, pričom $r \in \langle 0, \infty)$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, absolútna hodnota Jakobiánu transformácie $|J| = r$,

potom dostaneme

$$Y^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-(r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi)} r dr d\varphi = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2} dr d\varphi.$$

S využitím substitučnej metódy potom získame hodnotu veličiny Y^2:

$$Y^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2} dr d\varphi = \begin{vmatrix} t = r^2 \\ dt = 2rdr \\ \frac{1}{2}dt = rdr \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t} dt = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot -\frac{1}{2} \lim_{u\to\infty} [e^{-t}]_0^u =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Pre získanie hodnoty pôvodného integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ odmocníme veličinu *Y* a dostaneme $\sqrt{\pi}$.

3.3 Aplikácia v ekonómii

Nevlastné integrály sa v ekonómii využívajú napr. pri počítaní súčasnej hodnoty doživotného dôchodku pomocou vzťahu

$$P = \int_0^{\infty} R(t)e^{-rt} dt,$$

kde *P* je súčasná hodnota, $R(t)$ je funkcia neustáleho príjmu a *r* označuje úrokovú mieru.

Príklad 24 Inštitúcia prenajala obrazy do súkromného vlastníctva múzea, ktoré ich bude vystavovať permanentne. Podmienky nájomnej zmluvy hovoria, že múzeum bude inštitútu platiť 1700 € ročne. Inštitút má peniaze zo zmluvy uložené na účte so 6 % úrokovou mierou. Aká je súčasná hodnota účtu?

Súčasnú hodnotu získame vypočítaním nevlastného integrálu $\int_0^{\infty} 1700e^{-0,06t}dt$, tzn.

$$\int_0^{\infty} R(t)e^{-rt}dt = \int_0^{\infty} 1700e^{-0,06t}dt = \lim_{u\to\infty}\int_0^{u} 1700\, e^{-0,06t}dt = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{1700e^{-0,06t}}{-0,06}\right]_0^u =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\frac{1700e^{-0,06u}}{-0,06} - \frac{1700e^{-0,06\cdot 0}}{-0,06} \cong 0 + 28333,3 = 28333,3\ €.$$

Súčasná hodnota účtu je 28333,3 €.

3.4 Aplikácia vo fyzike

Aplikáciou nevlastných integrálov vo fyzike je napr. počítanie gravitačnej potenciálnej energie alebo strednej doby života atómu rádioaktívnej hmoty. Vo svojej bakalárskej práci sa budem venovať prvej možnosti, teda využitiu nevlastných integrálov pri počítaní gravitačnej potenciálnej energie.

Na výpočet gravitačnej potenciálnej energie sa používa vzťah

$$W = -\int_{\infty}^{R} \frac{GmM}{R^2}dR,$$

kde *W* (*z anglického work= práca*) je gravitačná potenciálna energia, *G* je Newtonova gravitačná konštanta, pričom $G = 6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^2$, *M (z anglického mass= hmotnosť)* je hmotnosť zdroja gravitačného poľa, *m* je hmotnosť telesa a *R (z anglického radius= polomer)* označuje vzdialenosť telesa od stredu gravitačného pôsobenia.

Príklad 25 Na povrchu Zeme je umiestnené teleso o hmotnosti 1 000 kg. Aká je gravitačná potenciálna energia telesa na povrchu Zeme?

Zo zadania plynie, že $m = 1\,000\ kg, G = 6,67\cdot 10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^2$, *R* je rovné polomeru Zeme tzn. 6 378 900 metrov a *M* je hmotnosť Zeme, tzn. $5,974\cdot 10^{24}kg$.

Gravitačná potenciálna energia *W* je rovná

$$-\int_{\infty}^{R}\frac{GmM}{R^2}dR = -\lim_{a\to\infty}\int_a^R \frac{GmM}{R^2}dR = -\lim_{a\to\infty} GmM\left[\frac{1}{R}\right]_a^R$$, doplnením hodnôt získame

$$= -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 1000\cdot 5,974\cdot 10^{24}}{6\,378\,900} - \left(-\lim_{a\to\infty} GmM\frac{1}{a}\right) = -6,25\cdot 10^{10}\,J.$$

Gravitačná potenciálna energia telesa s hmotnosťou 1 000 kg na povrchu Zeme je $-6{,}25 \cdot 10^{10}\ J$ a je to práca, ktorú by sme museli vynaložiť, aby sme toto teleso dostali mimo gravitačné pôsobenie Zeme.

Záver

Jedným z cieľov mojej práce bolo spracovanie teórie nevlastných integrálov s dôrazom na kritéria ich konvergencie a druhým poukázať už na samotnú aplikáciu integrálov v daných oblastiach. Pri písaní svojej práce, hlavne v časti o aplikácii, som sa stretla s niekoľkými novými pojmami, a to hlavne v geometrii, kde šlo o logaritmickú špirálu, asteroidu a implicitné derivovanie. V štatistike som pracovala s hustotou pravdepodobnosti, s ktorou som sa stretla v predchádzajúcom štúdiu. V poslednej spomínanej oblasti som sa taktiež zaoberala problematikou výpočtu integrálu najjednoduchšej Gaussovej funkcie e^{-x^2}. V prípade ekonómie som sa venovala výpočtom doživotného dôchodku a vo fyzike gravitačnou potenciálnou energiu, pri ktorej som využila svoje vedomosti zo strednej školy.

Pri písaní svojej bakalárskej práce som väčšinu času pracovala s anglickými odbornými textami, ktoré pre svoju náročnosť vyžadovali viac času na prekladanie.

Práca sama o sebe môže poslúžiť študentom ako vhodný prostriedok pri príprave na skúšky. Väčšina teórie a metódy využívané pri výpočtoch sú explikované na príkladoch, čo podľa môjho názoru napomáha ich jednoduchšiemu pochopeniu.

Vďaka svojej bakalárskej práci som sa zoznámila s novými pojmami, bližšie som nahliadla do anglickej terminológie v matematike, s ktorou budem určite pracovať aj pri ďalšom štúdiu a ešte viac som sa utvrdila v tom, že matematika je pre nás dôležitá a jej uplatnenie nenachádzame len vo vedných disciplínach, ale tvorí súčasť každodenného života, pretože ako povedala Shakuntala Devi:

„Without mathematics, there's nothing you can do. Everything around you is mathematics. Everything around you is numbers.“/Bez matematiky, nie je nič čo by sme mohli robiť. Všetko okolo nás je matematika. Všetko okolo nás sú čísla./

Literatúra

[1] Buck, R., Buck, E.F.: *Advanced calculus*, 3.vydanie. McGraw-Hill, Inc., New York, 1978

[2] Finney, R.L., Thomas Jr., G.B.: *Calculus,* 2.vydanie. Addison- Wesley Publishing Company, USA, 1992

[3] Hošková, Š., Kuben, J., Račková, P.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné*, 1.vydání.VŠB-TU, Ostrava, 2006.

[4] Jarník, V.: *Integrálni počet (I),* 3.vydanie. Academia, Praha, 1974

[5] Jarník, V.: *Integrálni počet (II),* 2.vydanie. Academia, Praha, 1976

[6] Kouřilová, P., Pavlačková, M.: *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii*, 1.vydání. Vydavatelství UP, Olomouc, 2013.

[7] Larson, R., Edwards, B.H.: *Calculus of a Single Variable: Early Transcendental Functions*, 6.vydanie. Cengage Learning, Boston, 2014.

[8] Larson, R., Falvo, D.: *Brief Calculus: an applied approach*, 8.vydanie. Brooks/Cole/CengageLearning, Belmont, 2010

[9] Larson, R., Edwards, B. H.: *Calculus: Early Transcendental Functions,* 6.vydanie. Cengage Learning, Boston, 2014.

[10] Latorre, D.: *Calculus concepts: an informal approach to the mathematics of change*, 5.vydanie. Cengage Learning, Boston, 2012

[11] Mayerová, Š., Kuben, J., Račková, P.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné*, 1.vydanie. VŠB - Technická univerzita, Ostrava, 2006

[12] Novak, V.: *Integralni počet v R*, 1. vydanie. Statni pedaogicke nakladatelstvi, Praha 1, 1986

[13] Roussos, I. M.: *Improper Riemann integrals,* Kindle edition, Chapman and Hall/CRC, New York, 2013

[14] Absolútna a relatívna konvergencia [online], dostupné z: http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/maiii/i2.pdf, [citované 31.10.2014]

[15] Absolútna konvergencia [online], dostupné z: http://www.sosmath.com/calculus/improper/absconv/absconv.html, [citované 31.10.2014]

[16] Gaussova funkcia [online], dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Gaussova_funkce, [citované 10.1.2015]

[17] Gravitačná potenciálna energia [online], dostupné z: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/pegrav.html, [citované 21.1.2015]

[18] Gravitačná potenciálna energia [online], dostupné z: http://kf-lin.elf.stuba.sk/KrempaskyFyzika/18.pdf, [citované 21.1.2015]
[19] Gravitačná potenciálna energia [online], dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Gravita%C4%8Dn%C3%AD_potenci%C3%A1ln%C3%AD_energie, [citované 21.1.2015]
[20] Gravitačná potenciálna energia [online], dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=louI_Ncp6gY, [citované 21.1.2015]
[2] Implicitné derivovanie [online], dostupné z: http://www.sosmath.com/calculus/diff/der05/der05.html, [citované 20.11.2014]
[22] Logaritmická špirála [online], dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/LogSpir/LogaritmickaSpirala.pdf, [citované 1.12.2014]
[23] Metóda per partes [online], dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Per_partes, [citované 26.3.2014]
[24] Neurčitý integrál [online], dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/8238/mod_resource/content/0/KMA_M1N_20.pdf, [citované 20.3.2014]
[25] Neurčitý integrál [online], dostupné z: http://www.matematika.cz/integral, [citované 20.3.2014]
[26] Nevlastné integrály [online], dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/7598/mod_resource/content/0/KMA_M2N_04.pdf, [citované 29.3.2014]
[27] Nevlastné integrály [online], dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/7597/mod_resource/content/0/KMA_M2N_03.pdf, [citované 26.3.2014]
[28] P-test [online], dostupné z: http://www.math.sk/skripta2/node50.html, [citované 11.10.2014]
[29] P-test [online], dostupné z: http://www.sosmath.com/calculus/improper/convdiv/convdiv.html, [citované 11.10.2014]
[30] P-test [online], dostupné z: https://diversity.umn.edu/multicultural/sites/diversity.umn.edu.multicultural/files/p-test_000.pdf, [citované 11.10.2014]

[31] Testy konvergencie [online], dostupné z:
http://www.phengkimving.com/calc_of_one_real_var/11_more_on_the_intgrl/11_03_tests_for_conv_of_improper_intgrl.htm, [citované 10.10.2014]
[32] Testy konvergencie [online], dostupné z:
http://www.sosmath.com/calculus/improper/testconv/testconv.html, [citované 10.10.2014]
[33] Testy konvergencie [online], dostupné z:
http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/4/txc3da4c.htm, [citované 10.10.2014]
[34] Určitý integrál [online], dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/7593/mod_resource/content/0/KMA_M2N_01.pdf, [citované 24.3.2014]