Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Nula jako číslo a číslice: její historie a vlastnosti

Bakalářská práce

Autor: Vojtěch Jedlička

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Společenské vědy se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D.

Hradec Králové 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové dne 9. 12. 2019 Vojtěch Jedlička

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Tomáši Zuščákovi, Ph.D. za odborné vedení práce, jeho rady, připomínky a ochotu.

Anotace

JEDLIČKA, Vojtěch. *Nula jako číslo a číslice: její historie a vlastnosti.* Hradec Králové, 2019. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Tomáš Zuščák. 49 s.

Tato bakalářská práce se zaměřuje na problematiku nuly, a to jako čísla i číslice. V první části je popsána úloha nuly v dějinách matematiky a filosofie: od prvních případů zavedení nuly až po její přijetí v Evropě. Druhá část práce obsahuje popis základních matematických vlastností nuly ve vztahu k aritmetickým operacím a úzký výběr několika oblastí matematiky, ve kterých nula sehrává důležitou roli.

Klíčová slova

nula, prázdno, vakuum, dělení nulou, neurčitý výraz, nulový prvek

Annotation

JEDLIČKA, Vojtěch. *Zero as a number and a digit: its history and properties.* Hradec Králové, 2019. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Tomáš Zuščák. 49 p.

This Bachelor Thesis is focused on the zero number problem both as a number and a digit. In the first part the role of zero number in history of mathematics and philosophy is described: from the first cases of using the zero number to its acceptation in Europe. The second part describes a basic mathematical characteristics of the zero number in relation to arithmetic operations and a narrow selection of some fields in mathematics in which the zero number has its important role.

Keywords

zero, emptiness, vacuum, division by zero, indeterminate form, neutral element

Obsah

Úvod

Nula je slovo, které používáme od malička: jak v matematice, tak v běžném životě. Ne každý si je ale vědom toho, že nula není součástí naší evropské kultury od dávných dob, ale právě naopak: je prvkem vcelku novým, který své pevné místo v Evropě získává až v období pozdního středověku a renesance.

S tímto faktem se pojí mnoho otázek: Proč byla nula v Evropě zavedena až takto pozdě? Jak je možné, že nebyla součástí matematiky starého Řecka? V jakých kulturách byla nula „objevena“ a s jakou motivací zavedena?

Právě na tyto otázky se snaží odpovědět první část této bakalářské práce. V první kapitole jsou zkoumány tři „zdroje nuly“: tedy civilizace, které díky charakteru svých početních systémů v určitém okamžiku nulu zavedly. V následující kapitole je řešeno přijetí nuly v Evropě, jako číslice i čísla. Cílem třetí kapitoly je rozvést diskusi o problému přijetí nuly jako samotné myšlenky a hledání reprezentace nuly (ničeho, prázdnoty) v našem světě. Čtvrtá kapitola pak krátce poukazuje na jeden z mnoha problémů absence nuly v dějinách naší společnosti, v tomto případě na problematiku našeho letopočtu.

V druhé části práce je nula zkoumána z pohledu matematiky: od jejího vztahu k aritmetickým operacím přes neurčité výrazy s nulou až po využití myšlenky nuly v algebře ve formě nulového prvku a v dalších oblastech.

Nula je velmi specifickým prvkem, ať už na ni pohlížíme jako na číslici nebo číslo. Existuje však pouze málo publikací, které by se nulou zabývaly jako hlavním tématem a prakticky žádná, jež by se nulou zabývala výhradně. I z tohoto důvodu je cílem této bakalářské práce vytvořit kompilaci z již existující literatury, psanou především z matematického pohledu, byť s drobnými odbočkami k filosofii, fyzice a historii v místech, kde je to nezbytné.

1 Původ nuly

Nula nebyla vždy součástí početního systému a dnes je skoro až s podivem, že její původ nepramení z hlavního zdroje naší současné západní kultury, tedy z filosofie a kultury starého Řecka a Říma (na problematiku absence nuly v řecké matematice se zaměřuje podkapitola 3.1).

„Objev“ nuly se podle současných vědeckých poznatků přisuzuje třem civilizacím: babylonské, mayské a indické. Avšak ani zdaleka ne ve všech třech se jednalo o nulu takovou, jakou ji známe dnes, tedy nejen jako číslici a prvek s určitou poziční vlastností při zápisu čísel, ale i jako číslo, které má nějaké matematické vlastnosti a existuje „samo o sobě“. Zaměřme se v následujících podkapitolách na tyto tři „zdroje nuly“ podrobněji.

Je nutné však již nyní podotknout, že pouze jedna z oněch tří civilizací je původcem nuly, kterou dnes známe a používáme, a že cesta nuly do Evropy trvala několik staletí a její přijetí nebylo jednoduché. Jak zmiňuje Seife [20], nula se do filosofie tehdejší křesťanské západní civilizace, vystavěné na základech učení Aristotela, nehodila, jelikož označovala „temné“ entity jako prázdno, vakuum, nebytí atd.

Všechny tři civilizace však spojuje motivace k zavedení nuly (poziční) jako prostředku k zdokonalení jejich početního systému. Můžeme tedy říci, že právě charakter jejich početních systémů, především pak jeho zápisu, je hlavním důvodem, proč se nula (v libovolné grafické podobě) v určité době jejich vývoje začala vyskytovat. Jak uvádí Barrow [1, s. 42] ve své monografii: *„… jak je zavedena poziční soustava, je jen věcí času, kdy se objeví symbol pro nulu.“*

1.1 Babylonská nula

Mezopotámskou říši označujeme jako jednu z nejstarších a zároveň nejvyspělejších starověkých civilizací. Minimálně potřeba obchodovat byla důvodem k vytvoření určitého početního systému, který by převody majetku a peněz zpřehlednil a usnadnil.

Babylonský a sumerský (dále jen babylonský) systém byl založen na sexagesimální (šedesátkové) poziční soustavě, kterou však kombinoval s nepoziční soustavou decimální (desítkovou). [1], [13], [20] Prostřednictvím starověkého Řecka můžeme pozorovat pozůstatky babylonského šedesátkového systému i v naší západní kultuře, a to v podobě dělení hodiny na 60 minut a minuty na 60 sekund. [20], [1]

Způsob zápisu babylonských číslic se vyvíjel od tzv. *„křivkových znaků“* [1, s. 28] až po klínové písmo, na které se zaměříme, jelikož první grafické znázornění nuly se vyskytuje právě až v tomto způsobu zápisu čísel.

Základem babylonského systému bylo číslo 60. Hodnota „jedna“ byla znázorněna „klínem“, deset „dvojitým klínem“ (viz Obrázek 1) a všechna další čísla jejich kombinací (původně psaním za sebe, v dalším vývoji různým umisťováním nad sebe, do různých geometrických útvarů apod.) – to vše na základě prostého aditivního způsobu.

Obrázek 1: Klíny označující hodnoty po řadě 1 a 10 [1][1]

Tendence k zavedení nuly pramení z drobných nedokonalostí jinak pokrokového babylonského početního systému. Klínový způsob zápisu mohl způsobit mnoho nejasností, jelikož jeden samotný klín mohl označovat nejen číslo 1, ale i 60, 3600 a další mocniny čísla 60. [15]

Zápis dvou klínů vedle sebe tedy mohl znamenat jak hodnotu 2, tak 61 apod. Řešení tohoto problému se postupně měnilo, v artefaktech můžeme nalézt mimo jiné tyto metody:

- vzestupná velikost klínů v závislosti na mocnině základního čísla 60 (počínaje nultou mocninou): klín označující číslo 1 byl nejmenší, klín pro číslo 60 o něco větší atd.,
- klíny označující čísla stejného řádu byly svojí horní částí spojeny (psány bez mezery), skupiny klínů jiných řádů pak již byly odděleny mezerou. [1]

Ani to však nemohlo vyřešit problém při zápisu takového čísla, ve kterém byl jeden řád „vynechán“, např. v čísle 3601. Barrow [1] uvádí, že tento problém se řešil vytvořením dostatečně velké mezery mezi klíny náležícími k různým řádům. Pokud však byla

[1] Tento obrázek i následující obrázky v této podkapitole jsou vytvořeny autorem práce, vyobrazení jednotlivých klínů je převzato z [1].

zapisována čísla, u kterých se vynechávalo řádů více, musel mít čtenář takových čísel dostatečný cit pro určení velikosti mezery.

Obrázek 2: Různé způsoby zápisu čísla 3601 působící nejasnosti[2]

Finálním řešením výše zmíněných problémů a nejasností bylo zavedení nuly. Přibližně od 3. století př. n. l. [20] (Kaplan [13] tento údaj rozšiřuje až k šestému století př. n. l.) se v babylonských zápisech začíná vyskytovat nový symbol: tzv. *„separační ukazatel"* [1, s. 33] v podobě dvou nakloněných klínů (viz Obrázek 3), který se začíná užívat k označení již zmíněných prázdných pozic v zápisu čísel.

Podle Bečvářové [2] došlo ke kodifikaci zápisu čísel ve 4. století př. n. l. (tedy i separačního ukazatele ve formě dvou nakloněných klínů), ve starších artefaktech byly objeveny tyto ukazatele i v jiných podobách, např. třech malých klínů či jednoho velmi malého klínu.

Funkce separačního ukazatele je zřejmá. Stejně tak jako my dnes při zápisu čísla 201 píšeme na druhé (desítkové) pozici nulu, označující, že výsledná hodnota je rovna součtu dvou stovek a jedné jednotky (s žádnými desítkami), Babyloňané při zápisu čísla 3601 na druhou pozici (náležící první mocnině základu 60) zapsali onen separační ukazatel (viz Obrázek 4).

Obrázek 3: Separační ukazatel

Obrázek 4: Zápis čísla 3601 s pomocí separačního ukazatele

Jak tedy uvádí Struik [22, s. 24]: *„…nalezení nuly… se… stalo logickým důsledkem zavedení pozičního systému, avšak až tehdy, když početní technika dosáhla značné dokonalosti."*

Citujme Barrowa [1, s. 35]: *„Zde je vyvrcholení babylonského vývoje: první symbolická reprezentace nuly v lidské kultuře."* Z globálně historického hlediska je tento výrok stoprocentně pravdivý, jelikož zavedení nuly v mayské i indické civilizaci je datováno o mnoho staletí později (viz následující podkapitoly). Je však nutné podotknout,

[2] Popis obrázku: 1. pouhé položení klínů třetího a první řádu vedle sebe, 2. vytvoření mezery pro chybějící druhý řád, 3. rozlišení řádů pomocí velikosti klínů, 4. kombinace způsobů 2 a 3.

že „objev“ nuly v mayské a indické civilizaci není s největší pravděpodobností nijak ovlivněn babylonskou matematikou, a to především z důvodu zhroucení babylonské říše. U Mayů je takový vliv absolutně vyloučen díky nemožnosti akulturace z geodemografických důvodů. [1]

Nula v babylonském pojetí, jak již bylo uvedeno v úvodu kapitoly, měla pouze poziční charakter, v podstatě jen zastupovala prázdné místo na hliněné destičce. Nebyla nikdy použita pro označení výsledku libovolné matematické operace: *„Nenacházíme žádné další stopy nějakého významu babylonského ‚nic‘. Jejich znak pro nulu nebyl nikdy zapsán jako odpověď na otázku po součtu typu* $6 - 6$*.“* [1, s. 35]

1.2 Nula v mayské kultuře

Jak již bylo naznačeno, sledovat vznik a vývoj nuly v mayské kultuře je velmi zajímavé už jen z toho důvodu, že tato kultura byla absolutně izolována od eurasijských civilizací. Podle Kaplana [13, s. 80] tak tedy můžeme pozorovat *„nezávislý původ konceptu nuly“.*

Nula byla v mayské civilizaci označována mnoha způsoby, záleželo na tom, v jaké znakové soustavě se vyskytovala. Mayové používaly dva základní způsoby zápisu čísel: systém „teček a čárek“ a hieroglyfický systém. [20]

V hieroglyfické soustavě se v průběhu vývoje nula označovala různými znaky. Kaplan [13], Seife [20] i Barrow [1] shodně zmiňují jako jeden ze symbolů profil „zamračené – zamyšlené tváře s rozloženou rukou na bradě“. Barrow a Kaplan dále uvádějí glyf *„tetovaného muže v náhrdelníku se zakloněnou hlavou“* [13, s. 80], podobných glyfů však můžeme nalézt mnohem více.

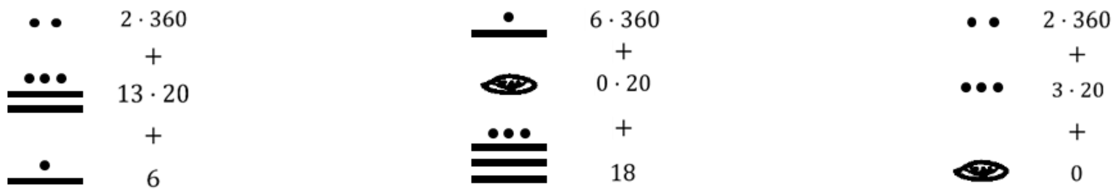
O něco jednodušší je znázornění nuly v mayském systému „čárek a teček“, kde byla nula značena symbolem mušle, lastury. I v tomto případě však symboly nebyly vždy psány zcela totožně: v zápisech je možné nalézt mnoho druhů „lastur“ lišících se vzorem, výplní atd. [1], [20]

Systém „čárek a teček“ využíval jen tří znaků (vodorovné čárky, tečky a ony „lastury“, viz Obrázek 5), s pomocí kterých, v kombinaci se systémem pozic, bylo možné napsat libovolně velké přirozené číslo (včetně nuly). Tečka označovala hodnotu „jedna“, pět teček tvořilo jednu čárku (zde nalézáme pozůstatky původního středoamerického a asijského pětkového systému). Prostým „vršením“ čárek a teček bylo možné zapsat všechny hodnoty od 1 do 19 (resp. základní mayské číslice) mayské dvacítkové poziční soustavy. [1], [15]

Obrázek 5: Znaky, ze kterých byly tvořeny mayské číslice (znaky pro hodnoty 1, 5 a 0)

V mayském početním systému byla hodnota jednotky každého dalšího řádu dvacetinásobkem jednotky řádu předchozího, s výjimkou řádu třetího, který byl osmnáctinásobkem jednotky druhého řádu. Důvodem tohoto faktu je zřejmě paralela početního systému a mayského „občanského“ kalendáře, ve kterém jeden rok obsahoval 365 (360 + 5) dnů rozdělených do 18 měsíců po 20 dnech (se speciální pětidenní periodou, jež se přidávala na konci roku). [15], [1]

Jak uvádí Kolman [15, s. 65]: *„Číslice zapisovali Mayové… do sloupců, postupovali přitom zprava doleva, zdola nahoru, od nižších řádů k vyšším“.* Měl-li nějaký z řádů zůstat prázdný, byla do jeho pozice vepsána nula (viz Obrázek 6).



Obrázek 6: Zápis čísel (po řadě) 986, 2 178, 780 pomocí mayských číslic[3]

Mayská nula měla ještě jednu speciální charakteristiku: podle Seifeho [20] od ní Mayové „začínali počítat“, a to například dny v měsíci. První den se značil nulou, následující jedničkou atd. Ačkoliv má tedy mayský měsíc dnů dvacet, poslední den je značen číslicí 19. Tímto postupem při „číslování – počítání“ se Mayský systém značně odlišuje od našeho. V jistém ohledu je tak mayský systém dokonalejší: jak uvádí Seife [20, s. 26], *„Mayové by se nikdy kvůli tomu, zda 21. století začíná rokem 2000 nebo 2001, nepřeli.“*. Na problematiku našeho letopočtu, jenž byl zaveden ještě před „objevem nuly“ v Evropě, je poukázáno níže v kapitole 4.

[3] V zápise čísel 2 178 a 780 si můžeme všimnout nutnosti užití nuly (lastury). Vynecháním lastury bychom v prvním případě místo čísla 2 178 získali číslo $6 \cdot 20 + 18 = 138$, ve druhém místo čísla 780 číslo $2 \cdot 20 + 3 = 43$.

1.3 Indická nula

Nula, která je dnes již neodmyslitelnou částí naší kultury, pochází právě z Indie. Oproti nule babylonské a mayské ta indická v průběhu vývoje získává významná specifika: není na ni pohlíženo jen jako na znak a označení prázdné pozice, nýbrž jako na číslo, byť podle Seifeho [20, s. 84] pro Indy tehdy *„bizarní“*, mající jisté matematické vlastnosti a časem i nesoucí hodnotu. [20]

Jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly, nula nebyla minimálně do středověku prvkem vhodným do filosofie západního světa, vystavěné na základech učení starého Řecka a značně ovlivněné křesťanstvím. Filosofie Dálného východu se od té západní značně lišila. Přijetí nuly nejen jako znaku (číslice), ale i jako samotné ideje tak bylo pro Indy mnohem snazší. Prázdnota jako pojem i myšlenka pro Indy nepředstavovala něco „děsivého, zlého, nelogického“. Naopak, byla pro ně spolu s idejí nekonečna přirozenou částí jejich filosofie a náboženství. [20], [1]

Výše uvedené tvrzení krátce ilustrujme. Jak uvádí Seife [20], dle filosofie hinduismu byl vesmír stvořen z prázdnoty a opětovné dosažení oné prázdnoty (nicoty) je pak cílem každého jedince. V každém člověku je obsažen „átmán“ (resp. jeho část): něco jako „duše – duch“. Po smrti jedince se átmán pomocí reinkarnace přesouvá do jiné živé bytosti. Cílem života člověka je žít jej tak, aby mohl být tento dlouhý řetězec převtělování ukončen, átmán byl osvobozen: *„ponořen do ticha a nicotnosti sebe samé“* a splynul s *„nekonečným duchem“*, můžeme říct „se vším a zároveň s ničím“. [20, s. 79]

Struik [22, s. 28] uvádí: *„Při studiu indické (a čínské) matematiky je rozhodující otázka vlivu Řeků a Babylóňanů.“* Seife [20] i Barrow [1] toto ovlivnění připouštějí. Podle Seifeho se indičtí matematikové mohli s babylonským pozičním systémem (tím pádem i s jejich „nulou“) setkat díky vpádu Alexandra Makedonského do Indie ve 4 století př. n. l., Barrow zmiňuje pozorovatelný vliv babylonského způsobu zápisu čísel v záznamech indických astronomů. Oba dva se však shodují v tom, že objev nuly v Indii byl nezávislý na objevu babylonském.

Dnešní desítkový poziční početní systém byl do zbytku světa postupně rozšířen právě z Indie. Nejstarší dochovaný zápis čísla v této soustavě pochází z roku 595 n. l. [1], [22]

Před zavedením jednotného pozičního desítkového systému bylo v Indii užíváno více nepozičních systémů. Nový, poziční systém vznikl jejich postupnou transformací a jeho výhodou bylo dle Barrowa [1] to, že nebylo potřeba, na rozdíl od jiných civilizací, vynalézt nové písmo.

Indický systém byl na rozdíl od mayského či babylonského do počtu užívaných znaků daleko bohatší. Ačkoliv soustav číslic se na území Indie užívalo větší množství a neustále se vyvíjely, již od dob před začátkem našeho letopočtu používali Indové číslice 1 až 9, dále číslice označující násobky čísla 10 až do stovky, mocniny čísla 10 ad. Přidání nuly k číslicím 1 až 9 jejich znakový systém značně zjednodušilo. [1]

Výše uvedený systém zápisu se díky Arabům rozšířil až do Evropy a naše současné číslice se vyvinuly právě z něj (více v kapitole 2). [20]

V indickém početním systému byla nula původně značena tečkou, časem se symbol změnil v onen „okrouhlý symbol", jenž pro zápis nuly používáme dnes. První nulu (ve formě tečky) dle Barrowa [1] nacházíme ve spisu z roku 458 n. l. Seife [20] však uvádí, že o užívání nuly v dekadickém zápisu můžeme s jistotou mluvit až v 9. století. Autoři se však shodují v tom, že nula mohla být používána již mnohem delší dobu, pouze se nám nedochoval žádný artefakt toto tvrzení dokládající: Barrow [1] hovoří již o 2. století př. n. l., Bentley [4] o 2. století n. l.

Prvním, kdo se věnoval studiu nuly a jako první vůbec jí přiřkl její hodnotu a matematické vlastnosti, byl indický astronom a matematik Brahmagupta. [4], [1]

V jeho spise z roku 628 n. l. nacházíme zásadní výrok: *„Nula je výsledkem odečtení čísla od sebe sama"* [4, s. 20]. Brahmagupta v tomto spise stanovil mnoho dalších pravidel pro provádění aritmetických operací s čísly, a to včetně čísel záporných, která byla v Indii používána (podle Bentleyho například k počítání s dluhy (záporná čísla) a majetkem (kladná čísla)).

Uveďme některá z nich týkající se počítání s nulou (převzato od [4, s. 21]):

- Majetek bez nuly je majetek, dluh bez nuly je dluh.
- Nula bez nuly je nula.
- Majetek odečtený od nuly je dluh.
- Výsledkem vynásobení nuly dluhem, majetkem nebo nulou je nula.
- Kladná nebo záporná čísla, jsou-li dělena nulou, dávají zlomky s nulou jako dělitelem.

- Nula dělená nulou je nula.

Ačkoliv dnes již víme, že poslední dvě uvedená pravidla nejsou pravdivá (tato problematika je řešena v kapitole 5), stále se jedná o velký posun kupředu v chápání nuly. Seife [20, s. 84] ostatně uvádí, že sám Brahmagupta nad těmito dvěma *„prostě mávl rukou"*. Podle Barrowa [1] Brahmagupta tvrdil, že výsledkem dělení nenulového čísla nulou je nekonečno, Seife [20] i Bentley [4] však tento výrok přisuzují Bhaskarovi, který žil takřka o pět století později.

2 Cesta nuly do Evropy

Není náhodou, že dnes námi používané číslice nazýváme číslicemi arabskými. Byli to právě Arabové, od kterých jsme, byť nepřímo, dnešní číselný systém převzali a nahradili jím číslice římské. Římské číslice z naší kultury samozřejmě definitivně nevymizely, dodnes se s nimi můžeme setkat při zápisu letopočtu, na mariášových kartách, v číslování stran, položek seznamu a na dalších místech. K samotnému počítání je však již nevyužíváme vůbec.

2.1 Arabské číslice

Málokterý laik však dnes ví, že arabské číslice nejsou původním arabským vynálezem. Arabové, díky svým obchodním a kulturním stykům s Dálným východem, se inspirovali výše popsaným indickým desítkovým systémem s nulou. Měli bychom tedy tyto číslice nazývat přinejmenším indo-arabskými (v literatuře též nalézáme pojmy hindsko-arabské, hindské, indicko-arabské číslice).

Původní arabský početní systém číslice nevyužíval. Pro záznam hodnot, čísel a výsledků početních operací užívali slov, nikoliv číslic. Pokud byla potřeba něco „počítat“ (operovat s hodnotami), podle Barrowa [1] Arabové takový početní úkon provedli v číslicích řeckých, které pak zpětně převedli do jejich slovního systému.

O zavedení a „popularizaci“ indického systému s číslicemi 0 až 9 v arabských zemích se zasloužil významný arabský matematik Al-Chorézmí (celým jménem Abu Abdallah Mohamed ibn Musa Al-Chorézmí Abů Džafar, někdy také Al-Chvárizmí, Al-Choresmí), tvořící v první polovině 9. století. Původní dílo, ve kterém Al-Chorézmí popisuje indický početní systém, se bohužel nedochovalo (k dispozici je pouze latinský překlad *Algorithmi de numeru indorum*, česky *Počítání s indickými číslicemi*). Podle Barrowa [1, s. 50] v něm Al-Chorézmí píše: *„Když [po odečtení] nic nezůstane, píši malé kolečko, takže místo nezůstane prázdné. Malé kolečko má obsadit pozici, protože jinak by neobsazená místa mohla vést k omylu.“* Al-Chorézmí si tedy uvědomoval, že nula v podobě popisovaného (a nám dobře známého „kolečka“) je, stejně jak bylo uvedeno v předchozích podkapitolách, nezbytnou součástí (původně indického) pozičního dekadického zápisu čísel.

Seife [20] uvádí, že právě díky tomuto dílu spolu s knihou *Al-jabr*, ve které Al-Chorézmí popisuje postupy řešení jednoduchých rovnic, se indický systém začal postupně rozšiřovat v arabských zemích a stal se brzy populárním. Běžné početní úkony bylo možné provádět mnohem rychleji a snadněji než s pomocí řeckých číslic. I přes tyto výhody a Al-Chorézmího přínos se systém v arabských zemích výrazněji rozšířil až v průběhu desátého století, v závislosti na rozšiřování nového způsobu zápisu čísel. [20], [1]

Přínos Al-Chorézmího pro matematiku dokládají dodnes hojně užívaná slova *algebra* (původ v názvu knihy *Al-jabr*) a *algoritmus* (původ ve jménu Al-Chorézmího a jeho latinském přepisu). [20], [1], [22]

V arabském světě existovalo mnoho způsobů zápisu „arabských“ číslic, můžeme je rozdělit do dvou základních skupin: číslice východoarabské a západoarabské. Východoarabské číslice jsou v arabských zemích užívány dodnes. Západoarabské číslice (též číslice *gobar*) jsou předchůdci našich dnešních evropských číslic. Do zbytku Evropy byly rozšířeny ze Španělska, do kterého západní Arabové přišli v 8. století n. l. Podle Struika [22] však existují teorie vypovídající, že číslice *gobar* byly ve Španělsku používány ještě před příchodem Arabů. V novějších studovaných monografiích se však již tato myšlenka neuvádí. [22], [1]

Ačkoliv Al-Chorézmí přímo popisoval výhody užívání nuly (viz výše), v obou systémech arabských číslic nebyla nula zprvu používána. Barrow [1] zmiňuje, že k rozlišování řádů dopomáhaly tečky psané nad číslicemi. V západoarabském systému tak číslice bez tečky označovala počet jednotek řádu prvního, s jednou tečkou počet jednotek řádu druhého (desítek), s dvěma tečkami řádu třetího (stovek) atd. (viz Obrázek 7). [1]

$$\ddot{2}\,\dot{4}\,6 = 246 \qquad \dddot{2}\,\ddot{4}\,\dot{6} = 2460 \qquad \ddot{2}\,6 = 206 \qquad \dddot{2}\,\dot{6} = 2060$$

Obrázek 7: Příklady zápisu číslic s využitím teček nad číslicemi k rozlišování řádů

Později se v západoevropských číslicích objevuje pro nulu znak „0“ (stejný jako používáme dnes), ve východoarabských dodnes používaná tečka „·“ (Barrow [1] uvádí malý kroužek).

2.2 Rozšíření arabských číslic do Evropy

Rozšíření arabských číslic do zbytku Evropy bylo poměrně zdlouhavým procesem, včetně přijetí nuly. Jedním z prvních, kdo se na tomto procesu významně podílel, byl Francouz Gerbert z Aurillacu, který měl možnost studovat matematické spisy ve Španělsku. Naučil se tak pracovat v arabském početním systému a díky jeho vlivu (po dobu čtyř let byl papežem Silvestrem II.) se arabský systém mohl dostat do povědomí v Evropě. Nulu ale Gerbert z Aurillacu podle Mareše [18] neznal, nebo ji nebyl schopen docenit (což není v „dějinách nuly“ nic překvapivého, rozšíření nuly bylo zpomalováno často právě tím, že byla ignorována, jak již bylo zmíněno v předchozích kapitolách). Ale podle Seifeho [20] právě absence nuly v učení Gelberta z Aurillacu mohla být důvodem, proč se arabský systém začal rozšiřovat a nebyl hned zavržen.

Až ve druhé polovině dvanáctého století se do Anglie a dalších západních zemí dostávají první překlady Al-Chorézmího knihy *Al-jabr*. Arabské číslice se v Evropě postupně začínají stávat populárními především mezi obchodníky: počítání s nimi je daleko jednodušší než s číslicemi římskými, kdy musel být užíván tzv. „abakus“ – počítadlo, užívané v různých kulturách (tím pádem i v různých podobách) již od starověku. [20]

O definitivním vítězství „arabských číslic včetně nuly“ nad římskými číslicemi ale můžeme hovořit až ve čtrnáctém století. Velkou roli v tomto procesu sehrál slavný matematik Leonardo Pisánský (také Leonardo z Pisy, známější pod jménem Leonardo Fibonacci), který žil přibližně v letech 1180–1250. Jako syn významného obchodníka měl k počítání blízko, a právě jeho otec byl tím, kdo mu sponzoroval jeho cesty po středomoří. Fibonacci se tak dostal i do severní Afriky, kde měl možnost studovat výhody arabského početního systému. [18], [20]

Leonardo Fibonacci své poznatky shrnul do několika knih, z nichž nejznámější je *Liber abaci* z roku 1202 (česky *Kniha o počítání* [18], *Kniha o abaku* [20]). Pro nás je velmi důležité, že na rozdíl od Gerberta z Aurillacu Fibonacci nulu nepřehlíží, ale bere ji jako nutnou součást systému. Seife [20, s. 94] uvádí: *„Zahrnutí této nové soustavy do Liber Abaci pak nule konečně vydláždilo cestu i do Evropy. Fibonacciho kniha vysvětlovala, jak pomocí arabských číslic provádět násobení a italští obchodníci a bankéři po novém početním systému dychtivě sáhli.“*

Nový početní systém se však na konci 13. století musel potýkat ještě s jedním problémem, mezi vládnoucími vrstvami (minimálně v Itálii) nebyl v oblibě. V roce 1299 byl dokonce zakázán, protože ho bylo možné, na rozdíl od původního římského, zneužít k podvodům v bankovnictví (nejen). Například z nově používané nuly se dala poměrně jednoduše udělat šestka nebo devítka, římské číslice byly z tohoto hlediska „tvarově výhodnější“.

Ještě větším rizikem se však zdálo být to, že připsáním nuly na konec čísla (nebo samozřejmě i jiné číslice), se značně změnila hodnota celého čísla. V římských „nepozičních“ číslicích nešlo provést až tak velkou (řádovou) změnu. V římském systému byl navíc vyvinutý speciální postup, jak zabránit připisování číslic: končilo-li číslo znakem „I“, změnil se tento poslední znak na „J“ a nebylo již možné žádný další znak připsat (ostatně na podobném principu jsou založeny námi psané dvě čárky za částkami: např. 540,-). [1], [20]

Vzhledem k velké popularitě arabského systému mezi obchodníky a výhodám při počítání (nebylo potřeba tabulek a abaku) byl tento zákaz nakonec zrušen a systém arabských číslic s nulou se začal šířit do zbytku Evropy. [20]

Fibonacciho význam v zavedení a popularizaci arabského systému s nulou je bezesporný. Nicméně ani Fibonacci zpočátku nulu neřadil mezi ostatní čísla (ani číslice). Kaplan [13, s. 108] uvádí, že sám Fibonacci ve svém díle „*hovoří o devíti indických číslicích, ale znaku 0*“. V dalších dílech však už nulu mezi indické číslice řadí. [13]

Nula začala být hojně užívána v rámci nového systému, jenž počítání značně usnadňoval. Byla to ale zprvu nula jen ve formě číslice, nikoliv čísla. Podle Kaplana [13] trvalo ještě minimálně dvě stě let od dob Leonarda Pisánského, než se tento fakt změnil.

Dnes je velmi obtížné vystopovat momenty, ve kterých nula začala vystupovat jako číslo. Můžeme říci, že známí matematikové od 2. poloviny 16. století ji jako číslo uznávali. První důkaz o použití nuly pro označení „hodnoty“ pochází z roku 1484 od Nicolase Chuqueta, jenž ji použil při výpočtu kořenů kvadratické rovnice, v jeho díle nacházíme zápis (převzato z [13, s. 108] a upraveno):

$$3x^2 + 12 = 12x$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-4}$$

$$4 - 4 = \mathbf{0}, (\sqrt{0} = 0)$$

$$x = 2$$

2.3 Názvy pro nulu a jejich vývoj

Vývoj názvu pro nulu v angličtině (*zero*) je možné pozorovat již od chvíle jejího „objevení“ v Indii. V Indii byla nula nazývána *šunja* (také *sunya*; nula, prázdnota). Arabové toto označení přeložili do arabštiny jako *as-sifr* (ve významu prázdno, prázdný prostor). Ve středověku pak bylo toto slovo transformováno do latinského *cifra* a *zefirum*[4]. *Zefirum* bylo vývojem upraveno až do podoby *zero*[5] (benátský dialekt), jež je v angličtině a dalších jazycích užívána dodnes. [17], [1], [20]

Slovo *cifra* se vyvíjelo dále také, nicméně jeho význam pozbyl na jednoznačnosti. Podle Barrowa [1] tak dnes anglické slovo *cipher*, stejně jako francouzské *chiffre*, může označovat jak nulu, tak jakoukoliv jinou číslici. V češtině se slovo *cifra* používá jako ekvivalent ke slovu číslice.

Slovo *nula* pochází z latinského výrazu *nulla figura* (žádný znak, žádné číslo/číslice). [1], [13]

[4] Slovo *zefirum* používá pro označení nuly i zmiňovaný Leonardo Fibonacci.

[5] Možný vývoj názvu pro nulu až do benátského *zero: **Zefirum** > zefiro > zephyr > zefro > zevro > zeviro > zevero > zevro >* ***zero**.* [13]

3 Nula a prázdnota v západní filosofii a vědě

V předchozí kapitole byla popsána cesta k přijetí nuly v Evropě. Dnes je ale značně obtížné stanovit, dokdy sloužila jen jako číslice – odkdy na ni bylo pohlíženo jako na číslo s určitými vlastnostmi.

Víme, že nula k nám „přicestovala“ z Indie, kde Brahmagupta na ni jako na jedno z čísel pohlížel a její vlastnosti zkoumal (viz výše). Nula však musela urazit značnou vzdálenost prostřednictvím mnoha kultur, s velkou pravděpodobností nebyla doprovázena Brahmaguptovými poznatky.

Aby byla nula přijata i jako číslo, které má hodnotu, místo na číselné ose, matematické vlastnosti atd., musí být přijata i jako „myšlenka“. A zde narážíme na základní problém: nula představuje nic, prázdnotu, nebytí. K těmto entitám se evropská společnost stavěla značně negativně. Myšlenka „prázdnoty“ byla pro Evropu něco velmi nepřirozeného a do jisté míry i nebezpečného, její přijetí by doslova zbořilo některá odvětví evropské filosofie.

Kořeny evropské filosofie se bezesporu nacházejí ve starověkém Řecku. Cílem této kapitoly je ve stručnosti sledovat vývoj názoru na prázdnotu, nic: tedy hlavní reprezentaci nuly ve světě. Kapitola končí v místě, kdy došlo k „objevu vakua – objevu nuly v přírodě“, ačkoliv zkoumání charakteru prázdna a jeho místa ve světě je jednou z otázek ve vědě a filosofii dodnes.

3.1 Starověké Řecko

V první kapitole bylo zmíněno, že nula do řecké matematiky a početního systému nepatřila. Řecká matematika není původním řeckým vynálezem, z určité části je ovlivněna matematikou starého Egypta. [15], [20]

Egypťané nulu neobjevili především z toho důvodu, že matematiku používali jen čistě k praktickým účelům (zeměměřičství, stanovení kalendáře), nikoliv v její abstraktní rovině. Navíc jejich početní systém (desítkový) je založen na aditivním způsobu, nevyžaduje práci s pozicemi, během které by se pravděpodobně v průběhu vývoje nula objevit mohla. [20]

Podle Kolmana [15] Řekové od Egypťanů přebrali početní systém a praktické matematické dovednosti (některé i od Babyloňanů). Přenesení matematiky od konkrétních problémů do teoretické roviny je však již (s největší pravděpodobností) dílem Řeků. [15], [20]

Kolman [15, s. 73] uvádí: *„Definitivně se začala v Řecku matematika ustavovat v samostatný vědecký obor od poloviny 6. stol. př. n. l."* Již od počátku 6. století př. n. l. se v myšlení Řeků začíná čím dál více objevovat ona *„teoretická stránka"* [15, s. 73]. Stejně tak začíná docházet ke spojování matematiky a filosofie. V následujících odstavcích se zaměřme na některé řecké matematiky a jejich filosofie.

3.1.1 Pythagorejci

Velkými průkopníky v matematice byli pythagorejci: spolupracovníci a následovníci Pythagora ze Samu (2. pol. 6. st. př. n. l.). Pythagorejci byli fascinováni čísly, zejména jejich propojením se skutečností: dualita mezi čísly a tvary, čísly a přírodními jevy. Seife [20, s. 43] uvádí: *„Ztotožnění čísel a forem (tvarů) učinilo z Řeků mistry geometrie, ale mělo současně jeden vážný nedostatek. Předem totiž vylučovalo, aby kdokoli uvažoval o nule jako o čísle."*

Vzhledem k tomu, že nula nebyla v žádné podobě v přírodě zastoupena, nemělo smysl o ní mluvit jako o jednom z čísel. Existence čísla nula by podle Seifeho podkopala základy celého pythagorejského pohledu na svět, způsobila by zásadní problém v *„úpravném řádu pythagorejského kosmu"* [20, s. 44]. Nula, na rozdíl od iracionálních čísel, jejichž existenci se pythagorejci snažili popřít, na ně zkrátka nikde „nevyskakovala", jako například druhá odmocnina z čísla dvě v úhlopříčce každého čtverce.

Podle Barrowa [1] však Aristoteles tvrdil, že pythagorejci s jistou formou prázdnoty operovali, jelikož prázdno oddělovalo jednotlivá čísla, fungovalo tedy jako určitá forma separace. Barrow [1] uvádí, že v tomto ohledu můžeme najít jakousi paralelu mezi pythagorejci a atomisty (atomisté viz 3.1.3).

3.1.2 Aristoteles (384–322 př. n. l.)

Jak již bylo upomenuto v předchozích částech práce, hlavní roli v chápání „prázdnoty" (a s tím souvisejících problémů s přijetím nuly) sehrál Aristoteles, jehož učení se stalo určujícím až do novověku. Jeho filosofický pohled na svět totiž vyhovoval církvi, která v průběhu dějin získala hlavní postavení v mnoha oblastech lidské činnosti (včetně vědy a filosofie): *„Jeho systém totiž dokázal existenci boha.“* [20, s. 57]

Podle Aristotela je celý vesmír vyplněn hmotou, je konečný a prvotní příčinou veškerého pohybu je právě Bůh. [20]

V Aristotelově filosofii tedy není pro prázdnotu vymezen žádný prostor, Aristoteles myšlenku „existence prázdna“ absolutně zavrhuje. Kromě prázdnoty se ale Aristoteles musel vypořádat i s myšlenkou nekonečna, které je v jistém způsobu s onou prázdnotou ve vztahu duality. [20]

„Logika vedla konec konců k závěru, že jsou pouze dvě možnosti, které by v přírodě dovolily prázdnotu – a z obou vyplývala existence nekonečna. Za prvé by prázdnoty mohlo být nekonečné množství. Za druhé by jí mohlo být konečné množství, ale protože prázdnota odpovídá jednoduše nepřítomnosti hmoty, musí být v tomto případě naopak hmoty nekonečné množství, aby mohla být zabezpečena konečnost prázdnoty.“ [20, s. 58]

Podle Seifeho [20] tak bylo (zjednodušeně řečeno) pro Aristotela snazší odmítnout existenci prázdnoty a tím i „omezit nekonečno“ – jedinou nekonečnost v Aristotelově filosofii nalézáme v nekonečnosti času (nekonečnosti doby existence světa).

Aristoteles samozřejmě není jediným vlivným starořeckým filosofem, jenž vylučuje existenci prázdna. Jako další zastánce tohoto názoru můžeme jmenovat např. Parmenida, Thaleta z Milétu či Platóna. [1]

Aristotelův pohled na svět však není jediným výstupem starořecké filosofie. S pojmem prázdnoty operovaly i další filosofické školy, některé z nich její existenci připouštěly, pro některé byla dokonce základním kamenem.

3.1.3 Atomisté a stoikové

Atomisté, zastoupeni Démokritem (460–370 př. n. l.), tvrdí, že veškerá hmota ve vesmíru se skládá z velmi malých atomů, které jsou lidským okem nepozorovatelné, neměnné a dále nedělitelné. Pohyb ve světě pak vzniká pohybem těchto částic. Aby však mohl takový pohyb proběhnout, musí být mezi atomy jisté „mezery“ – tedy prázdný prostor, vakuum. Podle atomistů je takové vakuum nekonečné a všudypřítomné. [1], [15], [20]

Myšlenky atomistů mají jistý základ už v učení Empedokla, který však myšlenku prázdnoty nahradil „éterem“, jakousi *„tajemnou lehkou látkou“* [1, s. 62], jež je prostoupena prostorem a obklopuje veškerou hmotu. Víra v éter, jakýsi element, zpopularizovaný mj. Isaacem Newtonem (viz níže), díky kterému se do jisté míry lze vyhnout přijetí existence vakua, se stane velmi důležitou až do prvních let dvacátého století. [1]

Myšlenku existence prázdnoty (vakua) pak nalézáme i u stoiků, podle kterých je celý existující svět obklopen nekonečným prázdným prostorem. [1]

3.1.4 Případy užití nuly ve starověkém Řecku

Existují důkazy, že pokud nebylo zbytí, Řekové s nulou operovali. Díky expanzi v době (nejen) Alexandra Velikého měli možnost seznámit se s babylonským systémem a poznat jeho výhody.

Morris Kline [14] uvádí, že v alexandrijském období (první tři století př. n. l.) byla nula v některých případech užívána se stejným účelem jako u Babyloňanů: k označení prázdné pozice, a to jak uprostřed, tak na konci čísla.

Nula (prázdno) však celkově odporovala mainstreamu řecké filosofie. Podle Seifeho [20]: byla-li nula využita (například v astronomických výpočtech), stalo se tak v babylonském početním systému a výsledky pak byly zpět převedeny do řeckého. Speciální řecké symboly pro nulu Seife na rozdíl od Klineho nezmiňuje. *„Řekové sice užitečnost nuly pro své výpočty uznávali, nicméně ji v zásadě přesto nepřijali.“* [20, s. 49]

3.2 Křesťanství a středověk

Středověká evropská společnost, resp. její filosofie a věda, byla vystavěna na Aristotelově učení v syntéze s křesťanskou ideologií. Došlo tak k mísení starořeckého myšlenkového proudu, jež prázdno vylučoval a „bál se ho“, s myšlenkou stvoření světa z ničeho: *creatio ex nihilo*, tím pádem i možnosti existence ničeho. Sledujme ve stručnosti některé mezníky vývoje debaty ohledně tohoto drobného rozporu.

Jedním z těch, kdo do debaty ohledně prázdnoty přispěl a velmi ovlivnil směřování křesťanské filosofie, byl sv. Augustin (Augustin z Hippo; 354–430[6]). Augustin byl

[6] Jako začátek epochy středověku bývá nejčastěji označován rozpad západořímské říše: rok 476. Sv. Augustin tedy žil ještě ve starověku, přesto ho zařazuji do této kapitoly, jelikož svými myšlenkami výrazně ovlivnil směřování středověké křesťanské filosofie.

zastáncem původního biblického tvrzení, že Bůh stvořil svět z ničeho, nikoliv pouhou přeměnou již existující látky. Augustin však „nic“ (prázdnotu, nebytí) ztotožnil s největším zlem (ďáblem) a podpořil tak z Řecka děděné *horror vacui* (strach z prázdnoty). Podle Barrowa [1] se sv. Augustin vyhnul problému existence zla před Bohem (možnosti neexistence Boha v minulosti) tím, že podle něj Bůh v momentě stvoření světa stvořil i čas, tudíž jakýsi „stav před Bohem“ nemohl existovat. [1]

Převaha „augustinismu“ v církvi však začala být ohroženou od 10. století, kdy do Evropy začaly pronikat myšlenky z muslimského (arabského) světa včetně nového výkladu Aristotelových spisů. Ty byly pro církev do určité míry ohrožením, jelikož některé Aristotelovy teze omezovaly „moc Boha“. Mezníkem v tomto procesu se stal rok 1277, kdy pařížský biskup Etienne Tempier převahu „aristotelismu“ ve filosofii odmítl, některé učení Aristotela zakázal a vrátil se k původní myšlence, že Bůh v rámci své všemohoucnosti může dělat naprosto cokoliv. [25], [1], [22]

Z výše uvedeného vyplývá důsledek, že Bůh mohl stvořit i prázdnotu – je to v jeho kompetenci. Podle Barrowa [1] se tak na další století otevírá možnost diskuse o existenci prázdnoty v podobě *„extrakosmického vakua“* [1, s. 78], takového vakua, které obklopuje svět (resp. vesmír).

Existence *„intrakosmického vakua“* [1, s. 78] (lokálního, vnitřního) byla až do 17. století filosofy a vědci vyvracena. Většina důkazů nemožnosti jeho existence byla založena na aristotelovském strachu z prázdnoty: příroda se snaží všemi prostředky jakékoliv prázdno zaplnit hmotou. [1]

3.3 Objev vakua: reprezentace nuly (prázdnoty)

K nalezení prázdnoty v přírodě, v reálném světě, ve kterém žijeme, došlo až díky Evangelistovi Torricellimu v 17. století, jenž při svých pokusech se rtutí a skleněnou trubicí vytvořil vakuum. Do té doby úvahy o vakuu a prázdnotě patří více do metafyziky a teologie, než do fyziky a potažmo matematiky.

Evangelista Torricelli byl žákem Galilea Galileiho a údajně právě Galileo byl tím, kdo, ač nepřímo, poskytl Torricellimu inspiraci k vykonání známého pokusu se skleněnou trubicí a rtutí. Galileo [9] v jednom ze svých děl hovoří o jevu, jenž ho zaujal a jenž v danou chvíli nedokázal vysvětlit. Galileo popisuje problematiku tehdejších vodních pump v Itálii, jež fungovaly na principu *„obří stříkačky“* [20, s. 112]. Tyto pumpy dokázaly vypumpovat vodu jen do určité hranice: do výšky (resp. z hloubky) přibližně 10,5 metru. Torricelli na základě této informace provedl experiment: trubici (delší než 76 cm, na jednom konci uzavřenou) celou naplnil rtutí, otevřený konec zakryl palcem a tento konec následně ponořil do misky. Po vztyčení trubice a uvolnění konce klesla hladina rtuti na hranici cca 76 cm. Ve zbytku (vrchní část) trubice tak vzniklo vakuum – ona „prázdnota“, reprezentace naší nuly v reálném světě. [1], [9], [20]

Torricelliho experimenty nebyly primárně určeny k objevení vakua, spolu s dalšími měly posloužit zkoumání tlaku a dalších veličin. Známý fyzik Blaise Pascal byl tím, jenž v Torricelliho pokusech pokračoval a jenž dokázal, že výška hladiny rtuti v trubici prokazatelně závisí na nadmořské výšce, ve které je pokus prováděn. Tyto výsledky velmi přispěly jak k výzkumu atmosférického tlaku, tak i ke zkoumání vakua. Zaprvé, jak uvádí Barrow [1], tak mohly být otevřeny diskuse, jež mohly vyloučit „sací vlastnost“ vakua a tím pádem začít bořit mýtus, že příroda vakuum „nesnáší“ a snaží se jakýkoliv prostor zaplnit. Zadruhé došlo k rozvinutí úvahy o tom, že vedle intrakosmického vakua v trubici může existovat i vakuum extrakosmické – klesání atmosférického tlaku s rostoucí nadmořskou výškou a řídnutí vzduchu přidává důležitosti myšlence, že pravděpodobně existuje hranice zemské atmosféry a že celá země je obklopena další formou vakua. [1]

Existence vakua nebyla v době jeho objevení okamžitě uznána: Torricelli i Pascal se museli potýkat s řadou oponentů jak z řad vědců, tak církve.

Největším Pascalovým oponentem byl v jeho době René Descartes. Ačkoliv Descartes nulu v matematice používal a jeho snad nejvýznamnější vynález, kartézská soustava souřadnic, má nulu v podobě počátku ve svém středu, existenci prázdnoty, jakési „absolutní nuly“, kategoricky odmítal. Podle Seifeho [20] je tomu tak z mnoha důvodů, zejména vlivem aristotelské filosofie na Descarta a jeho myšlení. [1], [20]

Ostatně existence „prázdnoty“ by pak odporovala i Descartově gnoseologickému učení a známému důkazu existence Boha.

Někteří vědci však myšlenku vakua podporovali. Jmenujme Otto von Guerickeho, jenž se (zjednodušeně řečeno) pokusem s „magdeburskými koulemi“ snažil dokázat, že není pravda, že příroda „nemá ráda vakuum“, ale naopak se ho snaží udržet. Dalším pak byl např. Robert Boyle, který se pokusil přispět k vyvrácení názoru ohledně savého účinku vakua. [1]

Diskusi ohledně povahy vakua a jeho podob můžeme od 17. století sledovat až do dnešních dob. Isaac Newton podle Barrowa [1] při studiu vakua dospěl k názoru, že „absolutní prázdno“ existovat nemůže, jelikož zkoumané vakuum vykazovalo jisté vlastnosti (např. dovolovalo šíření světla, nerušilo magnetickou přitažlivost apod.). Dospěl tak k názoru, že ono prázdné místo je vyplněno již (výše) zmíněným éterem, tedy jakousi velmi zředěnou tekutinou, mnohem řidší než vzduch, která vyplňuje veškerý prázdný prostor. Ačkoliv sám Newton ohledně existence a formy éteru bilancoval až do konce svého života, éter se stal až do první poloviny dvacátého století všeobecně přijímanou záležitostí a přijímání jeho existence narušil až Albert Einstein a jeho teorie relativity. [1]

4 Křesťanský letopočet: absence roku nula

Jedním z typických příkladů, který dodnes dokládá absenci nuly v západní kultuře, je křesťanský letopočet, náš běžný letopočet. Ačkoliv je křesťanský letopočet v naší společnosti všeobecně uznávaný, jeho užívání dává vzniknout několika problémům, které sice poměrně snadno dokážeme překonat, nicméně myšlení velké části lidí mohou tyto paradoxy i dnes ovlivňovat.

Původ našeho letopočtu

Základním bodem, od kterého letopočet počítáme, je okamžik narození Ježíše Krista, tedy alespoň to byla základní idea mnicha Dionysia Exigua, jenž tento okamžik (až) v roce 525 zpětně stanovil. Vytvoření nového letopočtu bylo jen vedlejším produktem Dionysiovy činnosti. Dionysius původně pracoval s velikonočními tabulkami (rozšiřoval je), pomocí kterých se stanovovalo datum Velikonoc. Dionysiův letopočet však zůstal po více než dvě století v zapomnění, dokud jej neobjevil anglosaský mnich Beda Ctihodný právě při studiu Dionysiových velikonočních tabulek. Beda Dionysiův letopočet zahrnul do své práce a značně jej zpopularizoval. Letopočet se tak začal šířit nejprve v Británii, následně přes území dnešní Francie i do kontinentální Evropy. Podle Bláhové [7] existuje několik dokladů o užívání Dionysiova letopočtu již v průběhu 7. století. Ačkoliv se tento letopočet původně užíval jen v liturgických spisech či kronikách, během středověku se rozšířil takřka do celé Evropy (v některých případech i dál) a začal se užívat i v úředních spisech. [7], [23], [20]

Rok Kristova narození byl označen jako rok „1 A. D." (*Anno Domini*: „léta Páně"; v češtině rok 1 n. l.: „našeho letopočtu"). Sám Dionysius však spočítal, že se Ježíš Kristus narodil 25. prosince roku předešlého, tedy roku 1 př. n. l.[7] Jak vidíme, po roku 1 př. n. l. ihned následuje rok 1 n. l. a pro rok 0 nezbývá žádné místo. Představíme-li si číselnou osu, kde se léta n. l. nacházejí na kladné části osy a léta př. n. l. na záporné, zjistíme, že rok 0 se musí

[7] Byl to právě Beda Ctihodný, který zavedl označení „BC" (u nás př. n. l.) pro roky před narozením Krista, jelikož se ve svém díle zabýval dějinami od roku 60 př. n. l. [23], [20]

„scvrknout“ do jediného bodu, a to půlnoci mezi 31. prosincem roku 1 př. n l. a 1. lednem roku 1 n. l., tedy do stanoveného okamžiku narození Ježíše Krista[8]. [20], [23], [7]

Problém ve výpočtech

Absence nuly (resp. roku 0) je tak z matematického hlediska značným prohřeškem vůči číselné ose, která je však dodnes ve výuce dějin ve formě osy časové hojně používána.

Tato vada není však jen jakýmsi estetickým prohřeškem. Další problém vzniká, pokud chceme zjišťovat délku období (intervalu), které zasahuje do obou částí osy, záporné i kladné. Při zjišťování délky období tak úplně selhává metoda součtu absolutních hodnot (či odečtení menšího čísla od většího v případě, že si čísla na levé straně osy představíme jako čísla záporná). [20]

Budeme-li chtít zjistit věk mladíka, jenž se narodil 1. ledna roku 3 př. n. l. k 1. lednu roku 16 n. l., běžnými postupy získáváme:

$$16 - (-3) = |16| + |-3| = 16 + 3 = 19 \text{ let}$$

Vynechaný prostor pro nulu však způsobil chybu – mladíkovi je v roce 16 n. l. pouze 18 let.

Při zjišťování délky časových intervalů v historii (zasahujících do období n. l. i př. n. l.) tedy musíme používat pravidlo, kdy od výsledku získaného standardním způsobem musíme odečíst jedničku. Tomuto pravidlu se lze vyhnout užitím astronomického vyjádření letopočtu, ve kterém se rok před rokem 1 n. l. označí jako rok 0 a dále se sestupně pokračuje zápornými čísly (tedy rok 0 = 1 př. n. l., rok –1 = 2 př. n. l. atd.).

Začátek nového tisíciletí (století)

S chybějící nulou v letopočtu je spojen ještě minimálně jeden paradox, a to otázka, kdy začíná nové století, tisíciletí. Matematik či jiný vědec na tuto otázku odpoví snadno, podle Teresiho [23] a Seifeho [20] však právě oslavy startu třetího tisíciletí byly důkazem toho, že očima velké části společnosti bude jako začátek nového tisíciletí brán rok 2000. Teresi poukazuje dokonce na několik chyb redaktorů, kteří rok 1900 označovali za počátek 20. století. Jak tedy vyvodit, kdy začíná nové tisíciletí (století)?

[8] Jak již bylo uvedeno výše, Dionysius stanovil tento okamžik na 25. prosince roku 1 př. n. l., podle Seifeho [20] však začátek nového roku stanovil na 1. ledna z toho důvodu, aby začátek roku odpovídal tehdy užívanému římskému kalendáři, ve kterém rok začínal 1. lednem. Ostatně okamžik narození Krista byl stanoven s mnohem větší chybou, dnes je zastáván názor, že k němu mělo dojít roku 4 př. n. l. [20]

Pomozme si příkladem. Uvažujme situaci Ježíše Krista a pro názornost: nechť se Ježíš narodil v první sekundě 1. ledna roku 1 n. l., jak by to odpovídalo původní myšlence zavedení letopočtu. V roce 2 by mu byl 1 rok, tedy o jeden méně, než je hodnota označení probíhajícího roku. V případě Ježíšovy nesmrtelnosti by mu v roce 100 bylo 99 let, stého roku života by dosáhl až 1. ledna 101, jeho život by byl až v tento den roven délce jednoho století. Druhé století tedy logicky musí začínat až dnem 1. ledna 101 stejně tak, jako nové tisíciletí 1. ledna 2001. (inspirováno [20])

Jak ale uvádí Seife [20], pro laiky je daleko přitažlivější slavit přelom let 1999 a 2000 než 2000 a 2001 – je to stejný případ, jako když nás v autě na měřidle ujetých kilometrů spíše zaujme moment překročení hranice mezi 19 999 a 20 000 kilometry než situace o kilometr dále.

Právě z tohoto příkladu je patrná podstata problému letopočtu (a tím pádem začátku nového století, tisíciletí): zatímco počítadlo kilometrů nám ukazuje, kolik toho již máme za sebou, počítadlo zvané „letopočet“ nám ukazuje aktuální stav: v roce 2000 za sebou nemáme 2000 let n. l., ale prožíváme její dvoutisící rok, poslední rok starého tisíciletí.

V kapitole 1.2 bylo naznačeno, že při použití mayského početního systému (včetně jejich nuly) by k podobným paradoxům nedocházelo. Počítat bychom začínali od nuly a princip letopočtu i měřidla kilometrů by byl totožný.

5 Matematická část

Cílem této kapitoly je zaměřit se na nulu z čistě matematického pohledu: zkoumat její matematické vlastnosti a její výskyt v různých částech matematiky.

Stěžejní částí je podkapitola zaměřená na nulu a její roli ve vztahu k základním aritmetickým operacím. V dalších podkapitolách jsou pak uvedeny příklady oblastí, ve kterých se můžeme s nulou v matematice setkat. Jedná se však pouze o velmi úzký výběr takových případů. Kritériem k jejich zařazení do této práce byla míra vlivu problematiky nuly (jako čísla či myšlenky obecně) na danou oblast.

Na mnoha místech této kapitoly budeme pracovat s pojmy, které by bylo velmi vhodné nejprve zavést. K tomu by však bylo nutné vymezit mnohem více prostoru, než charakter této práce nabízí. Bude tedy předpokládáno, že čtenář této práce již má znalost alespoň základních pojmů, definic a vět ze základů vysokoškolské matematiky. Přesto tato kapitola obsahuje několik definic a vět, které jsou pro dané téma důležité.

5.1 Nula a základní aritmetické operace

V této podkapitole se zaměříme na aritmetické vlastnosti nuly, resp. na nulu ve vztahu k základním aritmetickým operacím.

Tato podkapitola je zpracována podle: [8], [11], [12], [19], [20], [21], [24], [26].

Pro všechny proměnné, které budou užity v této podkapitole (5.1), nebude-li uvedeno jinak, platí, že jsou prvky množiny reálných čísel.

V celé kapitole budeme pracovat s nulou v oboru reálných čísel. Aby nebylo nutné postupně nadefinovat obor reálných čísel, vyjdeme z toho, že obor reálných čísel je *pole* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a z tohoto faktu pouze vyvodíme důležité vlastnosti, informace a vztahy pro tuto podkapitolu, ze kterých se bude dále čerpat a na které bude v dalším textu odkazováno.

Pole je *komutativní těleso*. Těleso je sktrukturou, ve které je množina jeho prvků vzhledem ke sčítání komutativní *grupou* a množina jeho prvků bez nuly[9] vzhledem k násobení

[9] „Bez nuly“, tj. bez neutrálního prvku (v tomto případě nulového prvku) vzhledem k operaci sčítání.

grupou. Komutativní těleso je struktura, ve které je grupa s operací násobení rovněž komutativní. Komutativní strukturou je taková struktura, pro jejíž prvky platí:

$$a + b = b + a \text{ (v aditivním zápisu)} \tag{1}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ (v multiplikativním zápisu)} \tag{2}$$

Množina prvků tělesa je vzhledem k oběma operacím grupou, musí tedy existovat neutrální prvky vůči oběma operacím, pro které platí:

$$a + 0 = 0 + a = a \tag{3}$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Ve vztahu ke sčítání je neutrální prvek označován jako nulový prvek a ve vztahu k násobení jako prvek jednotkový (v našem případě to jsou prvky po řadě „0“ a „1“).

Množina prvků tělesa je vzhledem k oběma operacím grupou, musí tedy existovat inverzní prvky vůči oběma operacím, pro které platí:

$$a + (-a) = 0 \tag{4}$$

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

5.1.1 Sčítání a odčítání

Podle vztahů (1), (3) platí: přičtením nuly k libovolnému číslu toto číslo nezměníme, stejně tak jako přičtením libovolného čísla k nule toto číslo nezměníme. Pro odčítání již však neplatí komutativní zákon, tudíž se situace změní i pro nulu: odečtením nuly od libovolného čísla toto číslo nezměníme (jako při sčítání), avšak odečtením libovolného čísla od nuly toto číslo změníme, a to na číslo opačné[10]. Rozdíl dvou stejných čísel je roven nule.

Z výše uvedeného tedy vyplývají aritmetické vztahy pro nulu:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a - 0 = a$$

$$0 - a = -a$$

$$a + (-a) = a - a = 0$$

[10] Opačným číslem rozumíme takové číslo, které je inverzním prvkem k původnímu číslu vůči operaci sčítání.

5.1.2 Násobení

Jakékoliv číslo vynásobené nulou je rovno nule. Díky komutativnímu zákonu (2) platí také: nula je výsledkem násobení nuly libovolným číslem.

Z výše uvedeného tedy vyplývají aritmetické vztahy pro nulu:

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \tag{5}$$

5.1.3 Dělení

Dělení je operací opačnou (inverzní) k násobení, platí tedy vztah:

$$\frac{a}{b} = c \text{ (též značeno } a\colon b = c) \Leftrightarrow b \cdot c = a, \qquad b \neq 0 \tag{6}$$

Rovnice $\frac{a}{b} = 0$ platí právě tehdy, pokud $a = 0$. Platí tedy vztah:

$$\frac{0}{b} = 0, \qquad b \neq 0$$

5.1.4 Dělení nulou

Dělení nulou není definováno. Snad každý žák základní školy ví, že nulou se dělit „nesmí“. Není ovšem pravidlem, že by vždy učitel toto tvrzení podpořil vhodným „důkazem“ či příkladem: tento poznatek o dělení nulou se bere jako jakýsi axiom, o kterém se nediskutuje. Uveďme níže několik „důkazů“, proč dělit nulou není možné, proč tato operace není definována a k jakým alternativním chybným výsledkům operace dělení nulou můžeme chybnou úvahou dospět.

Dělení nulou můžeme vyloučit už jen na základě zavedení dělení jako inverzní operace k násobení. Vezměme číslo 24 a vydělme ho číslem 2 podle vztahu (6). Jako jednoznačný výsledek získáme číslo 12:

$$24 : 2 = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot 12 = 24$$

Pokud ale budeme dělit číslo 24 nulou, dostáváme výraz:

$$24 : 0 = c \Leftrightarrow 0 \cdot c = 24$$

Ze vztahu (5) však víme, že součinem libovolného čísla a nuly je nula. Tudíž neexistuje žádné takové číslo, které by násobené nulou dalo součin 24. Nulou tedy dělit nelze, tato operace nemá smysl.

V průběhu dějin matematiky se můžeme na několika místech setkat s tvrzením, že jakékoliv číslo dělené nulou je rovno nekonečnu (nekonečné hodnotě). [20]

K tomuto tvrzení bychom mohli mylně dojít i následujícími úvahami. Operaci dělení se děti v prvních ročnících základních škol učí pomocí různých praktických úloh, na základě jejichž pochopení si pak mohou abstraktní operaci dělení převádět do názorných představ. Jednou takovou může být představa dělení jako situace:

„Kolikrát se ‚vejde‘ dělitel do dělence?“

Tento výrok můžeme přepsat do následující rovnice.

$$\underbrace{(b + b + \cdots + b)}_{c\text{krát}} = a \tag{7}$$

Vezměme příklad $24 : 3$, který podle (7) můžeme rozepsat jako:

$$\underbrace{(3 + 3 + \cdots + 3)}_{8\text{krát}} = 24 \tag{8}$$

Využitím této pomůcky při dělení bychom tak mohli mylně dojít k závěru, že výsledkem dělení $24 : 0$ je nekonečno. Na otázku „Kolikrát se vejde nula do dvacet čtyřky?“ bychom mohli mylně odpovědět „nekonečněkrát“: vždyť přeci neexistuje omezení, které by maximální počet nul v pomyslné závorce (obdobně jako číslo 8 v (8)) stanovilo. Pokud by si však každý tuto úvahu přepsal pomocí vztahu (7), hned by mu bylo jasné, že nekonečno jako podíl je chybným závěrem: ani po sečtení nekonečného počtu nul číslo 24 nezískáme.

Podobně můžeme výsledek nekonečno jako podíl při dělení nulou vyvrátit pomocí představení si dělení jako postupného odečítání[11]:

$$a : b = c \Leftrightarrow a \underbrace{-b - b - \cdots - b}_{c\text{krát}} = 0 \tag{9}$$

Budeme-li chtít tímto způsobem dělit číslo 24 číslem 4, můžeme výraz $24 : 4$ převést na:

$$24 \underbrace{-4 - 4 - \cdots - 4}_{6\text{krát}} = 0 \Leftrightarrow 24 : 4 = 6$$

Při řešení příkladu $24 : 0$ si tedy můžeme položit otázku: „Kolikrát musím odečíst nulu od čísla 24, abych dosáhl nuly?“ Již zde je zřejmé, že přesnou odpověď na tuto otázku poskytnout nelze. Odpověděl-li by i přesto někdo „nekonečněkrát“, můžeme oponovat následujícím způsobem: když jsme dělili číslo 24 číslem 4, po prvním odečtení jsme získali číslo 20, po druhém 16 atd. Avšak po prvním odečtením nuly od čísla 24 jsme se

[11] Vycházíme z faktu, že násobení (inverzní operace k dělení), lze zavést jako postupné sčítání.

k výsledné nule nepřiblížili „o žádný kus“, stejně tak jako po jakémkoliv dalším odečtení. Není tedy vůbec možné, abychom výsledné nuly dosáhli, tudíž nulou dělit nelze.

5.1.5 Výraz $\frac{0}{0}$

Výraz $\frac{0}{0}$ je značně specifický. Jelikož obsahuje dělení nulou, mohli bychom tvrdit, že tento výraz nelze definovat. Jenže přepisem tohoto výrazu podle vztahu (6) získáváme:

$$\frac{0}{0} = c \Leftrightarrow 0 \cdot c = 0 \tag{10}$$

Jak vidíme, u této úlohy, na rozdíl od dělení nulou s dělencem různým od nuly, řešení nalézt lze. Vztahy v úloze (10) platí pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Jelikož však výraz $\frac{0}{0}$ může nabývat různých hodnot, hovoříme o něm jako o výrazu neurčitém. Jeho jednoznačnou hodnotu v konkrétních příkladech však můžeme získat při počítání s limitami (viz podkapitola 5.2).

Mohli bychom se setkat s tvrzením, že hodnotu výrazu $\frac{0}{0}$ lze dodefinovat jako „1“ na základě pravidla, že číslo dělené sebou samotným je rovno jedné[12]. Vybereme-li si jakékoliv číslo, poučka $\frac{n}{n} = 1$ pro něj platí. Pokud se budeme přibližovat k nule, poučka stále platí, proč by tedy nemohla platit i pro nulu?

$$\frac{100}{100} = 1, \quad \frac{25}{25} = 1, \quad \frac{8}{8} = 1, \quad \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{0{,}3}{0{,}3} = 1, \quad \frac{0}{0} = 1$$

Avšak neplatnost rovnosti $\frac{0}{0} = 1$ lze demonstrovat jednoduchým příkladem:

$$48 = 1 \cdot 48 = \frac{0}{0} \cdot 48 = \frac{0 \cdot 48}{0} = \frac{0}{0} = 1$$

5.1.6 Umocňování

Nula umocněná libovolným kladným mocnitelem[13] je rovna nule. V případě záporného mocnitele bychom došli k dělení nulou[14], které není definováno. Pro $a \in \mathbb{R}^+$ tak platí vztah

$$0^a = 0. \tag{11}$$

Pro nulu jako mocnitele platí

$$a^0 = 1, \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \tag{12}$$

---

[12] Dodefinování $\frac{0}{0} = 1$ neodporuje ani vztahu (10).

[13] Případ, kdy mocnitel je roven nule, je řešen níže.

[14] S využitím vztahu $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Tento vztah lze získat rozšířením definice mocniny s přirozeným mocnitelem.

Definice 1 Pro každé $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a$. Číslo a^n nazýváme n-tá mocnina čísla a.

Pokud bychom množinu přirozených čísel v definici rozšířili o číslo 0 (tj. $n \in \mathbb{N}_0$), pomocí rekurentního pravidla v definici získáváme rovnici (12)

$$a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a = a \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = 1.$$

Vztah $a^0 = 1$ pak ani neodporuje níže uvedenému pravidlu počítání s mocninami:

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, a \neq 0$$

Pro $s = r$ platí: $a^r : a^r = a^{(r-r)} = a^0$. Protože pro $a \neq 0$ je $a^r : a^r = 1$, platí $a^0 = 1$.

Výše uvedený postup je však jen motivací k zavedení definic a vět pro počítání mocnin s celým (a dále jiným) exponentem.

Ve vztazích (11) a (12) se zvolením podmínek vyhýbáme výrazu 0^0. Výraz 0^0 je stanoven jako nedefinovaný, přesto se můžeme v některých částech matematiky setkat s tím, že je dodefinován podle vztahů (po řadě) (11) a (12) jako hodnota 0 či 1, častější je druhý případ.

K hodnotě 1 se dostáváme např. při výpočtu limity[15] funkce $y = x^x$ v bodě 0 (viz podkapitola 5.2, př. (f)). Jak ale uvádí Trávníček [24], *„výraz 0^0 nelze chápat jako $f(0)$ pro funkci $f(x) = x^x$ jedné proměnné, ale jako $f(0,0)$ pro funkci $f(x,y) = x^y$ dvou proměnných.“* Tato limita však neexistuje.

Trávníček [24] dodává: *„Učebnice matematické analýzy … uvádějí proto výraz 0^0 mezi tzv. neurčitými výrazy … a nepovažují za možné (tj. o takové možnosti vůbec neuvažují) definovat 0^0 jako* 1.“

5.1.7 Odmocňování

Odmocňování je zavedeno jako operace inverzní[16] k umocňování. Pro odmocňování platí vztah

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \quad \text{pro } a \geq 0, n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

[15] Limity zprava, limita zleva nemá smysl.

[16] Pouze částečně inverzní: v oboru (nejen) reálných číslech si nejsou definiční obory těchto operací rovny.

Nulu je tedy možné užitím vztahů (11) a (13) odmocnit, výsledkem bude nula:

$$\sqrt[n]{0} = 0 \Leftrightarrow 0^n = 0$$

Nultou odmocninu však vytvořit nemůžeme, odmocnitel n je zaveden jako číslo přirozené.

Nula nemůže být odmocnitelem už jen z toho důvodu, že využitím vztahu mezi odmocninou a mocninou s racionálním mocnitelem

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \text{pro } m, n \in \mathbb{N} \tag{14}$$

bychom získali výraz

$$\sqrt[0]{a^m} = a^{\frac{m}{0}},$$

ve kterém v mocniteli dělíme nulou. Tudíž nula nemůže být odmocnitelem a nultá odmocnina není definována.

5.1.8 Faktoriál

Faktoriál nuly je roven jedné. Faktoriál je zaveden pomocí vztahu

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k\,, \qquad \text{pro } n \geq 0. \tag{15}$$

Faktoriálu 0! (případ prázdného součinu) je dodefinována hodnota 1. Tuto hodnotu můžeme ale získat i užitím vztahu pro zobecnění faktoriálu na množinu komplexních čísel:

$$z! = \int_0^{\infty} t^z\, e^{-t} dt \tag{16}$$

Podle vztahu (16) tak můžeme určit hodnotu 0!:

$$0! = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \left| \begin{matrix} s = -t \\ ds = -dt \\ t = 0 \Rightarrow s = 0 \\ t \to +\infty \Rightarrow s \to -\infty \end{matrix} \right| = \int_0^{-\infty} -e^s ds = \int_{-\infty}^{0} e^s ds$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \int_u^0 e^s ds = \lim_{u \to -\infty} [e^s]_u^0 = \lim_{u \to -\infty} (e^0 - e^u) = \lim_{u \to -\infty} (1 - e^u) = 1 - 0$$

$$= 1$$

$$0! = 1 \tag{17}$$

Výše uvedená hodnota (17) neodporuje ani představě faktoriálu jako hodnoty získané postupným[17] násobením přirozených čísel od 1 do n ($n \in \mathbb{N}$). Hodnotu „1“ pro výraz 0! můžeme získat zpětným procesem, postupným dělením (viz příklad níže).

$$4! = \mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{4} = 24$$

$$\underbrace{24}_{4!} : \mathbf{4} = \underbrace{6}_{3!},\ \ 6 : \mathbf{3} = \underbrace{2}_{2!},\ \ 2 : \mathbf{2} = \underbrace{1}_{1!},\ \ 1 : \mathbf{1} = \underbrace{1}_{0!}$$

5.2 Limity a neurčité výrazy s nulou

Nula, díky svým specifickým vlastnostem, zastává v matematické analýze důležité místo. V této podkapitole bude navázáno na podkapitolu předchozí: bude poukázáno na specifickou roli nuly při výpočtu limit neurčitých výrazů.

Podkapitola je zpracována podle [10], [12], [16], [26].

Hlavní částí podkapitoly je řešení několika příkladů limit neurčitých výrazů s nulou. Při výpočtu těchto limit je užíváno l‘Hospitalovo pravidlo[18].

Věta 1. *(l‘Hospitalovo pravidlo)*[19,20] *Je-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *nebo* $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, $a \in \mathbb{R}^*$ *a existuje-li*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*,$$

pak je také

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Pomocí tohoto pravidla můžeme řešit limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Kdykoliv při řešení dojdeme k neurčitému výrazu tohoto typu, můžeme užít l’Hospitalovo pravidlo (i opakovaně).

Limity typu $0^0, \infty^0$ můžeme převést na typy $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ pomocí vztahu (18) níže, limitu typu $0 \cdot \infty$ pak pomocí vztahu (19).[21]

---

[17] Podle vztahu (15).
[18] Ve skutečnosti mohl být autorem l’Hospitalova pravidla učitel l’Hospitala, Johann Bernoulli. [20]
[19] Věta platí též pro jednostranné limity v bodě a a pro limity v bodech $+\infty, -\infty$.
[20] $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$
[21] l’Hospitalovo pravidlo je možné aplikovat i na další případy (limity typu $\infty - \infty, 1^{\infty}$), tyto typy však k vzhledem k „absenci zkoumané nuly“ nejsou uvedeny a řešeny.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} \tag{18}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \tag{19}$$

Příklady limit[22]

Příklady (a)–(d) jsou vztaženy na případy, kdy po dosazení bodu získáme výraz „$\frac{0}{0}$“, příklady (e)–(g) na typy „∞^0“, „0^0“. Cílem příkladů je ukázat, že limity neurčitých výrazů lze spočítat, a to s různými výsledky.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \langle\langle \frac{0}{0} \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \langle\langle \frac{0}{0} \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x-\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x}}{1-\cos x} =$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1} = 2$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{x^3-4x+3} = \langle\langle \frac{0}{0} \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to 1}\frac{((x-1)^3)'}{(x^3-4x+3)'} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2}{3x^2-4} = \frac{0}{-1} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-9x} = \langle\langle \frac{0}{0} \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to 9}\frac{(3-\sqrt{x})'}{(x^2-9x)'} = \lim\limits_{x\to 9}\frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2x-9} = \lim\limits_{x\to 9}\frac{-1}{2\sqrt{x}(2x-9)} = -\frac{1}{54}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \langle\langle \infty^0 \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \langle\langle \frac{\infty}{\infty} \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} =$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{1+x} = 0$, tudíž hledaná limita je $e^0 = 1$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \langle\langle 0^0 \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \langle\langle \frac{-\infty}{\infty} \rangle\rangle = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$
$\lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$, tudíž hledaná limita je $e^0 = 1$.[23]

[22] Při řešení příkladů je ve dvojitých špičatých závorkách je naznačen příslušný neurčitý výraz. V následujícím kroku je použito l'Hospitalovo pravidlo.

[23] Pokud bychom ve třetím kroku mocnitele automaticky upravili na tvar $x\ln x$, museli bychom v následujícím kroku řešit limitu typu $0\cdot(-\infty)$, pomocí které bychom se dostali ke stejné limitě typu $\frac{-\infty}{\infty}$, která je řešena v příkladu (f).

(g) $\lim_{x\to0^+} kx^{\sin x} = k\cdot\lim_{x\to0^+} x^{\sin x} = \langle\langle 0^0\rangle\rangle = k\cdot\lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}$, $\quad \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \langle\langle \frac{-\infty}{\infty}\rangle\rangle =$ $\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \langle\langle \frac{0}{0}\rangle\rangle = \lim_{x\to0^+} -\frac{2\sin x\cos x}{x\,(-\sin x)+\cos x} = \frac{2\cdot0\cdot1}{0\cdot0+1} = 0$, tudíž hledaná limita je $ke^0 = k$ pro $k\in\mathbb{R}$.

5.3 Nulový prvek

Tato podkapitola je zpracována podle: [3], [5], [6], [8].

V algebře se s nulou setkáváme v mnoha případech. A to jak ve formě čísla 0 (např. při řešení algebraických rovnic), tak i s nulou ve formě myšlenky *nulového prvku*, velmi důležitým pro konstrukci a studium algebraických struktur.

Pojem *nulový prvek* (0) je jednou z forem označení *neutrálního prvku*, v tomto případě při užívání aditivního způsobu zápisu (pomocí operace sčítání).

Definice 2 Struktura $(M,*)$ se nazývá *struktura s neutrálním prvkem*, právě když platí

$$\exists e\in M, \forall x\in M:\ x*e = x \land e*x = x.$$

Každý prvek $e\in M$, pro nějž platí

$$\forall x\in M:\ x*e = x \land e*x = x,$$

se nazývá *neutrální prvek* struktury $(M,*)$.

V dalším textu (vzhledem k charakteru práce) bude užíván již pouze aditivní zápis, neutrální prvek bude nazýván prvkem nulovým, avšak značen symbolem e (kvůli rozlišení čísla 0 a nulového prvku).

V kapitolách zabývajících se rolí nuly v dějinách matematiky jsme sledovali vývoj od objevu nuly až po její uznání jako číslo a připsání jí typických matematických vlastností. V algebře však jako bychom šli o něco dále, do obecnější roviny: bereme si myšlenku nuly, v mnohých případech ji pak odpoutáváme od čísla 0 a zavádíme onen *nulový prvek*.

Existence nulového prvku v dané množině je pak jednou z podmínek pro existenci mnoha druhů algebraických struktur. Z těch základních uveďme *grupu*.

Definice 3 Množina G s binární operací „+“ (sčítání) se nazývá *grupa* $(G,+)$, jestliže platí následující axiomy:

1. $\forall a, b, c \in G: (a + b) + c = a + (b + c)$, *(asociativní zákon)*
2. $\exists e \in G, \forall a \in G: a + e = e + a = a$, ***(existence nulového prvku)***
3. $\forall a \in G, \exists -a \in G: a + (-a) = (-a) + a = e$. *(existence inverzních prvků)*

Pokud ještě platí:

4. $\forall a, b \in G: a + b = b + a$, *(komutativní zákon)*

pak hovoříme o *komutativní grupě*, resp. *Abelově grupě*.

Jako příklady komutativních grup s nulovým prvkem 0 (číslo 0) můžeme uvést struktury: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$; po řadě grupy čísel celých, racionálních, reálných a komplexních.

Příkladem, že nulový prvek grupy nemusí být vždy roven číslu 0, jsou některé aditivní grupy vytvořené aplikací pravidel modulární matematiky. Uveďme jeden takový příklad[24].

Zaveďme strukturu, v níž budeme pracovat s operací „sčítání na hodinovém ciferníku" (dále „$\oplus$"). Nosičem naší algebraické struktury bude množina čísel odpovídajících značkám na hodinovém ciferníku $H_{12} = \{1,2,3,4, \dots ,12\}$. Operace „sčítání na hodinovém ciferníku" je založena na standardním „sčítání", součet však vždy bude pouze číslo z množiny H. Příklad $3 \oplus 5$ si představme jako situaci, kdy hodinovou ručičku posuneme ze „startovací polohy" 3 hodiny o 5 hodin dopředu, výsledkem bude hodina 8. S využitím tohoto principu je jasné, že $9 \oplus 4$ nebude v našem případě rovno číslu 13, nýbrž 1 (posuneme ručičku z hodiny 9 o 4 hodiny dopředu na hodinu 1). Tuto operaci na množině H je možné znázornit pomocí Cayleyho tabulky:

[24] Myšlenka k zavedení následující struktury převzata z [8].

⊕	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabulka 1: Cayleyho tabulka pro (H_{12},⊕)

Struktura (H_{12},⊕) splňuje všechny axiomy z definice grupy (viz výše), jedná se tedy o komutativní grupu s neutrálním (nulovým) prvkem 12.

U tohoto příkladu bychom mohli namítat, že jsme pouze vyměnili číslo 0 za číslo 12: že jsme pouze využili jakési společenské úmluvy, podle které se na hodinách v nejvrchnější části značí hodina 12 místo jakéhosi počátku 0. Výše uvedeným způsobem ale můžeme zkonstruovat další komutativní grupy s různými nulovými prvky. Pokud příklad zobecníme a nosičem struktury stanovíme množinu $H_n = \{1,2,\dots,n\}$, získáme komutativní grupy s neutrálním prvkem n. Níže jsou uvedeny Cayleyho tabulky pro příklady grup s nulovými prvky 4 a 7.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Tabulka 2: Cayleyho tabulka pro (H_4,⊕)

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

Tabulka 3: Cayleyho tabulka pro (H_7,⊕)

5.4 Nula a algebraické rovnice

Tato podkapitola je zpracována podle: [3], [5], [6], [8].

Nula hraje důležitou roli v moha dalších částech algebry, z nichž krátce zmiňme algebraické rovnice.

S nulou se v algebraických rovnicích setkáváme na mnoha místech. „Nejdůležitější nulu" nalézáme hned v zavedení algebraické rovnice, ve vztahu $f(x) = 0$.

Řešením algebraické rovnice $f(x) = 0$ je myšleno hledání *kořenů* polynomu $f(x)$.

Definice 4 Prvek c tělesa T se nazývá *kořen polynomu* $f(x) \in T[x]$, jestliže $f(c) = 0$.

Při řešení algebraických rovnic má tedy nula značně zásadní postavení. S nulou se pak samozřejmě můžeme mnohokrát setkat v průběhu algoritmu řešení algebraické rovnice, stejně tak i s nulou jako kořenem (resp. řešením rovnice).

Nula pak též sehrává důležitou roli ve stanovování podmínek řešitelnosti: nule nesmí být roven jmenovatel zlomku, argument logaritmu atd. Tímto způsobem může „nula" vyřadit některé prvky z řešení rovnice. Ačkoliv je předchozí věta formulována velmi laicky, je pravdou, že není žádného jiného čísla, na jehož matematické vlastnosti je nutné při řešení rovnice natolik myslet, jejichž opomenutí by mohlo v procesu řešení algebraické rovnice způsobit fatální chyby.

5.5 Nula a prázdná množina

Tato podkapitola je zpracována podle [1].

V prvních kapitolách této práce bylo mnohokrát opakováno, že nula je reprezentací prázdna (ničeho). Pojem *prázdná množina* je pak v teorii množin dalším příkladem přenesení určitého aspektu ideje nuly do jedné z částí matematiky.

Při práci s množinami je pojem *prázdná množina* nezbytný. Je to množina neobsahující žádný prvek. K potřebě pojmu *prázdná množina* se dostáváme již při práci se základní množinovou operací *průnik*: prázdná množina je průnikem dvou *disjunktních množin* (dvou množin, které nemají žádné společné prvky).

Prázdná množina je nejčastěji značena symbolem $\emptyset$, užívá se i označení pomocí prázdných množinových závorek: $\{\}$. Symbol „0“ je při práci s množinami pro označení prázdné množiny nevyhovující, jelikož by mohl být zaměněn s označením nuly jako prvku.

Již na základních školách jsou žáci upozorňováni, že je chybou označit prázdnou množinu symbolem $\{\emptyset\}$. V tomto případě se totiž nejedná o prázdnou množinu, ale o množinu obsahující prázdnou množinu.

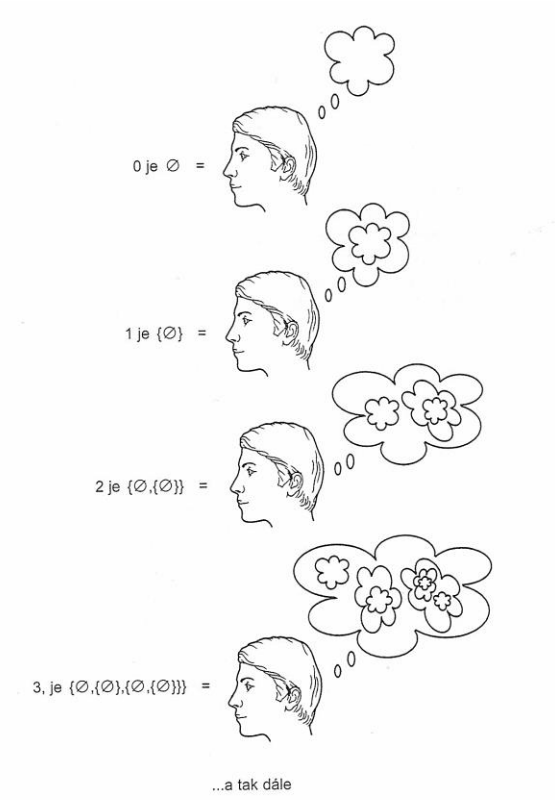
Nyní si ukažme, že uchopením této skutečnosti (rozdílem mezi množinami $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$) můžeme zavést celý obor přirozených čísel.

Využijme jisté ideové ekvivalence mezi nulou a prázdnou množinou. Definujme tedy, že číslo nula (reprezentující nic, prázdno) je prázdnou množinou (prázdná množina nic neobsahuje), prázdnou množinu označíme obvyklým symbolem $\emptyset$. Číslo 1 pak definujme jako množinu obsahující nulu, tedy $\{\emptyset\}$. Čísla 0 a 1 si rovny nejsou – zatímco nula je prázdná množina (neobsahuje nic), číslo 1 je množina obsahující *jeden* prvek. Číslo 2, tedy množinu, obsahující *dva* prvky 0 a 1, definujeme jako množinu $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Analogicky můžeme definovat další přirozená čísla: číslo 3 jako množinu $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ obsahující *tři* prvky a podobně až do $n = \{0,1,2, \dots , n-1\}$.

Tento způsob „generování přirozených čísel postupným vrstvením“ se může na první pohled zdát dosti bizarním, nicméně přesně tímto způsobem funguje naše myšlení: *„Představme si myšlenku jako množinu, která se vznáší ve svém balonovitém obalu. Mysleme nyní na tuto myšlenku. Prázdná množina, $\emptyset$, je jako prázdný balon, ale my můžeme myslet* *na tento prázdný myšlenkový balon. To je něco podobného, jako vytvořit množinu, která obsahuje prázdnou množinu* $\{\emptyset\}$*. A máme to, co nazýváme číslem 1."* [1, s. 150]

Stejným způsobem můžeme myslet na to, jak „myslíme na prázdnou množinu", což můžeme vyjádřit schématem pro číslo 2: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Tuto pozoruhodnou situaci, kdy všechna přirozená čísla vytváříme „z nuly – z ničeho", znázorňuje obrázek níže.



Obrázek 8: Mentální analogie pro vytvoření čísel z prázdné množiny [1, s. 151]

Závěr

Nula je značně specifickým číslem, které je v západní civilizaci používáno až od doby pozdního středověku a renesance. V první části práce bylo zkoumáno „objevení“ a následné zavedení nuly jako čísla i číslice, její postupné rozšíření do Evropy spolu s problémy, které s sebou tento proces nesl.

Nula však z počátku nebyla přijímána jako číslo, ale jen jako číslice. Motivace k jejímu zavedení pramenila přímo z potřeby označení prázdného řádu v pozičních číselných systémech. Tímto způsobem byla nula zavedena třemi civilizacemi: babylonskou, mayskou a indickou. Babyloňané nulu značili dvěma nakloněnými klíny, Mayové znakem lastury či různými glyfy. V indickém zápisu nuly pak nalézáme původ znaku „0“, jež se pro označení nuly užívá dodnes. Indičtí matematikové byli rovněž prvními, kteří přiřkli nule určité matematické vlastnosti.

Dnešní nula, používána prakticky po celém světě, byla rozšířena právě z Indie. Do Evropy byla nula spolu s celým desítkovým pozičním systémem rozšířena Araby, kteří indický systém přejali a upravili.

Přijetí nuly v Evropě byl komplikovaný proces. Užívání nuly jako číslice bylo zavedeno ruku v ruce s postupnou popularizací arabských číslic obchodníky, kteří si arabské číslice oblíbili především z důvodu usnadnění výpočtů a zjednodušení zápisu čísel.

První užití nuly v Evropě jako vyjádření hodnoty bylo uskutečněno až v závěru 15. století. Problémy s akceptací nuly jako čísla byly spojeny s negativními postoji k reprezentaci nuly v přírodě (ničeho, prázdnoty, vakua). Ony negativní postoje vycházejí z tehdejší evropské filosofie, která byla vystavěna na základech Aristotelova učení a velmi ovlivněna křesťanstvím. K prvnímu nalezení prázdnoty v přírodě (vakua) došlo až v 17. století.

Důkazem neexistence nuly v naší kultuře je např. náš křesťanský letopočet, ve kterém mezi lety našeho letopočtu a lety před naším letopočtem chybí rok 0. Tato skutečnost zavdává vzniku několika paradoxů v našem myšlení, např. sporům o to, kdy začíná nové století, tisíciletí apod.

V druhé části práce byly zkoumány matematické vlastnosti nuly. Nula (dále už jen jako číslo) je neutrálním prvkem vůči operaci sčítání. Odečtením libovolného čísla od nuly získáváme číslo opačné. Jakékoliv číslo násobené nulou je rovno nule. Nula dělená libovolným číslem (kromě nuly) je rovna nule. Dělení nulou není definováno. Při práci s nulou a aritmetickými operacemi získáváme řadu neurčitých výrazů, např.: $\frac{0}{0}, 0^0, \infty^0, 0 \cdot \infty$. S těmito výrazy se setkáváme např. při výpočtu limit. Faktoriál nuly je roven jedné.

Nulovým prvkem v algebře nazýváme neutrální prvek v aditivním zápisu (vůči operaci sčítání). Existují příklady algebraických struktur, ve kterých je nulový prvek roven číslům různým od nuly.

Tato bakalářská práce přináší základní poznatky o číslu a číslici nula. Problematika nuly však ani v této práci nebyla zdaleka vyčerpána. Na tuto práci je možné navázat v mnoha oblastech, a to zejména v její druhé, matematické části: důkladněji zmapovat roli nuly v různých oblastech matematiky: algebře, geometrii, matematické analýze, teorii množin apod. Rovněž by bylo zajímavé zaměřit se na didaktickou stránku zkoumané problematiky.

Seznam použité literatury

[1] BARROW, John D. *Teorie ničeho*. Praha: Mladá fronta, 2005. ISBN 80-204-1156-9.

[2] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie*. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 8071962554.

[3] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Vyd. 2. Praha: Matfyzpress, 2002. ISBN 8085863928.

[4] BENTLEY, Peter. *Kniha o číslech: tajemství čísel a jejich vliv na náš svět*. Čestlice: Rebo, 2013. ISBN 9788025506493.

[5] BICAN, Ladislav. *Algebra I*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977.

[6] BICAN, Ladislav. *Algebra II*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984.

[7] BLÁHOVÁ, Marie. *Historická chronologie*. Praha: Libri, 2001. ISBN 80-7277-024-1.

[8] BLAŽEK, Jaroslav et al. *Algebra a teoretická aritmetika I*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979.

[9] GALILEI, Galileo. *Dialogues Concerning Two New Sciences [1638]*. New York: The Macmilian Company, 1914.

[10] HAVIGER, Jiří et al. *Sbírka úloh pro matematiku 1*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2013. ISBN 9788074352584.

[11] HRUBÝ, Dag. Problémy výrazu nula na nultou. *Matematika, fyzika, informatika*. 1998, 8(1), 4-8. ISSN 1210-1761.

[12] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (1)*. 6. vyd. Praha: Academia, 1974.

[13] KAPLAN, Robert. *The nothing that is: a natural history of zero*. New York: Oxford University Press, 2000. ISBN 0-19-512842-7.

[14] KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.

[15] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1969.

[16] KOPÁČEK, Jiří et al. *Příklady z matematiky pro fyziky I*. 3. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2002. ISBN 8085863901.

[17] LOGAN, Robert. The mystery of the discovery of zero. *ETC: A Review of General Semantics: A Review of General Semantics* [online]. 2017, 74(3/4), 327-339 [cit. 2019-04-27]. ISSN 0014164X. Dostupné z:

http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&an=135134496&scope=site

[18] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008. ISBN 978-80-87053-16-4.

[19] PLEVA, Přemysl. *Matematické paradoxy a omyly*. Brno, 2016. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.

[20] SEIFE, Charles. *Nula: životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Argo, 2005. Aliter (Argo: Dokořán). ISBN 8072037412.

[21] STEWART, Ian. *Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta.* Praha: Dokořán, 2013. Aliter (Argo: Dokořán). ISBN 9788073632922.

[22] STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis).

[23] TERESI, Dick. Zero. *TheAtlantic.com* [online]. The Atlantic Monthly Group, 2019 [cit. 2019-04-22]. Dostupné z:

https://www.theatlantic.com/magazine/archive/1997/07/zero/376900/

[24] TRÁVNÍČEK, Stanislav. Poznámky k výrazu nula na nultou. *Matematika, fyzika, informatika*. 1998, 8(1), 9-10. ISSN 1210-1761.

[25] TRETERA, Ivo. *Nástin dějin evropského myšlení*. 4. vyd. Praha: Paseka, 2002. ISBN 80-7185-171-X.

[26] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele*. Vyd. 2. upr. Praha: MATFYZPRESS, 2001. ISBN 8085863626.

Seznam obrázků a tabulek

Obrázky

Tabulky