UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Lucie Brablecová

Výuka pravděpodobnosti a statistiky na 2. stupni základní školy

Olomouc 2019 vedoucí práce:Mgr. Kamila Fačevicová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci nazvanou Výuka pravděpodobnosti a statistiky na 2. stupni základní školy zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Kamily Fačevicové Ph.D. Použitou literaturu a jiné odborné zdroje jsem řádně ocitovala v souladu s právními předpisy. Souhlasím se zveřejněním práce pro účely soukromého studia a výzkumu. Dále prohlašuji, že elektronická verze nahraná do IS/STAG je totožná s verzí odevzdané bakalářské práce.

V Olomouci dne: ....

Lucie Brablecová

Poděkování

Na prvním místě bych ráda poděkovala paní Mgr. Kamile Fačevicové Ph.D. za odborné vedení, ochotný přístup, poskytování podnětů i odborných materiálů k práci a velkou trpělivost. Dále děkuji své rodině za podporu po celou dobu psaní mé bakalářské práce a celou dobu mého studia.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	**Lucie Brablecová**
Katedra:	**Matematiky**
Vedoucí práce:	**Mgr. Kamila Fačevicová, Ph.D.**
Rok obhajoby:	**2019**

Název práce:	Výuka pravděpodobnosti a statistiky na 2. stupni základní školy
Název v angličtině:	The teaching of plausibility and statistics at the second grade of the elementary school
Anotace práce:	Bakalářská práce se věnuje výuce pravděpodobnosti a statistiky na 2. stupni základní školy. V teoretické části je popsaný současný stav RVP a ŠVP vybrané základní školy, analýza souboru učebnic a jsou vysvětleny základní pojmy pravděpodobnosti a statistiky. Praktickou část tvoří realizace vytvořených pracovních listů u žáků 8. a 9. tříd.
Klíčová slova:	Statistika, pravděpodobnost, korelace, kauzalita, grafy
Anotace v angličtině:	This Bachelor Thesis examines the teaching plausibility and statistics in Mathematics at lower secondary school. The theoretical part of this thesis desribes the current state of the Framework Educational Programme and Educational Program of School, analysis of the textbook collection and explains the basic terms such as Plausibility and Statistics. The empirical part consists of a practical implementation of the created work-sheets belonging to a 8^{th} and 9^{th} grade.
Klíčová slova v angličtině:	Plausibility, statistics, mathematical plots, correlation, causality
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1 – Pracovní list
Rozsah práce:	48 stran bez příloh
Jazyk práce:	Český jazyk

Obsah

Úvod

V současné moderní době, kdy jsou velmi populární informační technologie, jsme jako občané stále vystavováni vlivu velkému množství informací a také všech možných statistických dat aniž bychom si to plně uvědomovali. Zároveň je od nás často žádané abychom na základě těchto interpretací statistických dat činili rozhodnutí. Mezi běžné příklady těchto informací patří například informace o bankovnictví, výskytu běžných nemocí, nezaměstnanosti, porodnosti a úmrtnosti či ekonomickém trhu. Proto je důležité vychovávat budoucí generace k porozumění a chápání statistických pojmů.

Učivo statistiky je poměrně rozsáhlé a blíže se vyučuje až na vysoké škole. Na základní škole se žáci ovšem seznámí jen s minimem základů. Většinou nepatří ani mezi příliš oblíbená témata při hodinách matematiky. Pravděpodobnost se na základní škole vyučuje spíše ojediněle.

Výuka statistiky by měla směřovat ke správnému, popřípadě kritickému vyhodnocování dat, které je matematicky podložené. Měla by rozvíjet statistické či kritické myšlení, které je v dnešní informační době velmi potřebné. Toto myšlení zahrnuje pravděpodobnostní úvahy i statistickou interpretaci. S tím souvisí také problematika grafů. Velká část statistických šetření je prezentována grafy, proto je více než vhodné rozpoznat pro správné vyhodnocení správnost grafu a umět z něj číst.

Ráda bych se ve své práci zaměřila na rozvoj kritického myšlení na základě výuky statistiky. Kritické myšlení znamená důsledné prozkoumání myšlenky, porovnání ji s opačnými názory a také s tím, co již o daném tématu víme. Je také o zvídavosti a používání různých strategií při zjišťování informací, kladení otázek a hledání odpovědí. Dále se týká dovednosti racionálně obhájit vlastní názor. (Grecmanová, H., Urbanovská, E., Novotný, P., 2000)

V první části se podívám, jak výuku statistiky či pravděpodobnosti vykládá rámcový vzdělávací program a kam tuto část řadí. Poté se podívám, jak tuto část uchopila konkrétní základní škola ve školním vzdělávacím programu. Nahlédnu do školních učebnic a zjistím, jak se statistika vyučuje. V další části nastíním části teorie z pravděpodobnosti a statistiky. Pouze základy, popřípadě téma, kterým se budu zabývat v praktické části. Praktickou část bude tvořit pracovní list, který společně se žáky 8. a 9. tříd vypracuji. Pracovní listy by měli vést k rozvíjení kritického myšlení na základě výuky statistiky.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Rámcový vzdělávací program

Rámcový vzdělávací program (RVP) je centrálně zpracovaný pedagogický dokument, který stanovuje obecné požadavky pro vzdělávání. Tyto dokumenty schvaluje Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. Díky tomuto dokumentu je zaručený povinný rámec učiva na národní úrovni. Pro každý obor vzdělání v předškolním, základním, základním uměleckém jazykovém i středním vzdělávání existuje samostatný RVP. Dokument stanovuje konkrétní cíle, délku, formu vzdělávání a povinný obsah. Určuje také podmínky pro vzdělávání žáků se speciálními potřebami, podmínky organizační, materiální a bezpečnosti a ochrany zdraví. Každý program musí odpovídat nejnovějším poznatkům vědních disciplín, pedagogiky a psychologie. Také organizační struktura je přiměřená věku a rozvoji vzdělávané osoby. (RVP, 2017)

1.1 Ukotvení matematiky v RVP

Výuku matematiky nalezneme v RVP pro ZŠ ve vzdělávací oblasti matematika a její aplikace. Tato oblast je ještě rozdělena na čtyři tematické okruhy. Tematický okruh Čísla a početní operace na prvním stupni, na druhém stupni na něj navazuje okruh Číslo a jeho proměnná. Dále druhý tematický okruh Závislosti, vztahy a práce s daty, třetí okruh Geometrie v rovině a v prostoru. Jako čtvrtý je okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Cíle vzdělávání v matematice jsou založené na aktivních činnostech, které jsou typické pro využití matematiky v reálných situacích. Poskytuje dovednosti a vědomosti potřebné v praktickém životě. Klade důraz na porozumění základním pojmům matematiky a myšlenkovým postupům. Snaží se vést žáky ke kritickému myšlení a věcné argumentaci. Taktéž rozvíjí logické myšlení, vede k rozboru problému, zvolení správného postupu a následnému vyřešení.

1.2 Statistika a pravděpodobnost

Výuka pravděpodobnosti a statistiky se řadí do okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty. V tomto okruhu se žáci učí rozpoznávat různé změny a závislosti, které se projevují v běžném životě a seznamují se s jejich reprezentacemi. Zjišťují, že změna stavu může být pokles, růst, ale také může mít změna nulovou hodnotu. Tyto změny žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů. Při jednoduchých příkladech je i konstruují a pomocí matematických předpisů je zaznamenávají. Podle možností je mohou modelovat na vhodném počítačovém softwaru. Zkoumání těchto závislostí vede k pochopení pojmu funkce.

Dále bychom také mohli výuku statistiky a pravděpodobnosti, popřípadě příklady související s tímto tématem zařadit do okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Příklady v tomto okruhu nemusejí být závislé na znalostech a dovednostech matematiky, ale nutné je používat logické myšlení. Řešení těchto logických úloh posiluje žákovo vědomí ve vlastní schopnosti logicky uvažovat a tím může podchytit i žáky, kteří si v matematice nevěří. Učí se řešit úlohy z běžného života, chápat problém, analyzovat ho a správně jej vyhodnotit. Tyto úlohy se mohou a měly by se prolínat všemi ostatními okruhy v průběhu základního vzdělávání.

Nyní si popíšeme konkrétnější výstupy z RVP okruhy, závislosti, vztahy a práce s daty a nestandardní aplikační úlohy a problémy, pro druhý stupeň. (RVP ZV, 2017)

1.2.1 Závislosti, vztahy a práce s daty

Očekávané výstupy:

- porovnává soubory dat,
- vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data,
- určuje vztah nepřímé a přímé úměrnosti,
- vyjádří tabulkou, rovnicí, grafem funkční vztah,
- jednoduché reálné situace matematizuje s využitím funkčních vztahů.

Učivo, kde by se měly tyto výstupy uplatnit:

- závislosti a data – příklady z praktického života, schémata, grafy, nákresy, aritmetický průměr, četnost znaku,
- funkce – přímá a nepřímá úměrnost, lineární funkce, soustava souřadnic.

1.2.2 Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Očekávané výstupy:

- žák využívá logické úvahy a kombinační úsudek pro řešení problémů a nalézá různá řešení zkoumaných situací,
- řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje své poznatky a dovednosti z různých tematických oblastí.

Učivo, kde by se měly tyto výstupy uplatnit:

- číselné a logické řady,
- číselné a obrázkové analogie,
- logické a netradiční geometrické úlohy.

2 Školní vzdělávací program

Školní vzdělávací programy (ŠVP) představují školní úroveň v kurikulárním dokumentu. Podle těchto dokumentů se uskutečňuje vzdělávání na jednotlivých školách. ŠVP si vytváří každá škola sama na základě závazného dokumentu, kterým je RVP. Je vytvářen pedagogickými zaměstnanci školy. Schválený a vydaný je ředitelem školy. Každý ŠVP je veřejně přístupný a většinou bývá umístěn na stránkách školy. Pro tvorbu mohou školy využít tzv. *Manuál pro tvorbu školních vzdělávacích programů,* umístěn na stránkách národního ústavu pro vzdělávání. (NUV, 2013)

2.1 Základní škola Dr. Hrubého 2, Šternberk

Pracovní listy jsem testovala na žácích Základní školy Dr. Hrubého 2, ve Šternberku. Je to škola, kde jsem absolvovala povinnou školní docházku a je mi velice blízká.

Následující informace jsem čerpala ze Školního vzdělávacího programu Základní školy Dr. Hrubého pro rok 2018/2019, který se opírá o cíle uvedené v rámcovém vzdělávacím programu základního vzdělávání (RVP ZV). Snaží se o postupné získávání kvality osobnosti, pro další pokračování ve studiu nebo také pro aktivní podílení se na životě ve společnosti. Je zaměřen na podporu a tvořivost žáků. (ŠVP ZŠ Dr. Hrubého, 2018/2019)

Škola není specificky profilovaná, tudíž je zaměřená všeobecně. I přes všeobecné zaměření je škole velmi blízké sportovní prostředí, na školním dvoře je vybudovaná moderní atletická dráha. Ke všeobecným cílům patří výběr vzdělávacího obsahu vzdělávacích oborů tak, aby žákům zajistil kvalitní základní vzdělání zaměřené na další studium a životní praxi. Využívá takové vzdělávací postupy, metody a formy práce aby rozvíjela klíčové kompetence žáků. Snaží se o individuální přístupy, podporuje žáky se speciálními potřebami, nadané žáky i mimořádně nadané.

Dále své zaměření omezím pouze na vzdělávací oblast Matematika a její aplikace na druhém stupni. Vzdělávací obor se nazývá Matematika. Při výuce matematiky klade škola důraz na porozumění pojmům a souvislostem. Snaží se matematiku propojovat s dalšími předměty. Dbá na správné používání matematického vyjadřování a na rozvoj logického myšlení. Výuka probíhá v kmenových třídách a v učebně informatiky.

Učební plán pro výuku matematiky na druhém stupni znázorňuje tabulka č. 1. Tabulka konkrétně vyjadřuje počet vyučovacích hodin týdně v daném ročníku. Přičtené hodnoty znázorňují navýšení z disponibilní časové dotace. Disponibilní časová dotace je vymezená pro druhý stupeň v rozsahu 18 hodin a jedná se o počet hodin, se kterými si škola může naložit, jak chce.

Učební plán pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace pro druhý stupeň.

Vzdělávací oblast	Vzdělávací obor	6.	7.	8.	9.	Počet hodin (ŠVP)	Navýšení z disponibilní časové dotace	Min. počet hodin (RVP)
Matematika a její aplikace	Matematika	4	4+1	4+1	3+2	19	4	15

Tabulka 1 - Učební plán pro druhý stupeň (vlastní zdroj)

Výuka statistiky je dle ŠVP základní školy zařazena do 8. ročníku, kde se vyučuje přímo téma základy statistiky. Pro porozumění základům statistiky je důležité mít znalosti z předchozího učiva, kterého se statistika dotýká.

V 6. třídě se žáci naučí číst a zapisovat desetinná čísla a porovnávat je. Naučí se počítat aritmetický průměr a také zaokrouhlovat a provádět odhady s danou přesností.

V průběhu 7. třídy se žáci seznámí s pojmem zlomek. Naučí se jej graficky znázornit, převádět na desetinná čísla, nebo naopak, rozšiřovat a krátit a také početní operace jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení. Naučí se řešit slovní úlohy z praxe a provádět rozbor. Dále se učí procenta. Seznámí se s pojmem, naučí se vypočítat jedno procento, procentovou část i celek. Řeší jednoduché reálné situace s využitím procent. Učí se zacházet s kalkulátorem a efektivně tak počítat. Užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření celku. Porovnává a vyhodnocuje data znázorněná grafy a diagramy s procenty. Naučí se vytvořit jednoduchý diagram. Důležitým matematickým pojmem je také přímá a nepřímá úměra. Zde se žáci naučí určovat poměr, počítat trojčlenku a to všechno aplikovat na reálné příklady a úlohy ze života.

V 8. třídě se již učí samotná statistika, spíše její základy. Žáci se naučí provádět jednoduchá statistická šetření a výsledky zapisovat tabulkou. Naučí se také číst a interpretovat tabulky a grafy v praxi. Data se naučí vyhledat, zpracovat a nakonec vyhodnotit. Často se výuka statistiky propojuje v rámci mezipředmětových vztahů se zeměpisem, kde se žáci zabývají obyvatelstvem.

3 Analýza učebnic z pohledu pravděpodobnosti a statistiky

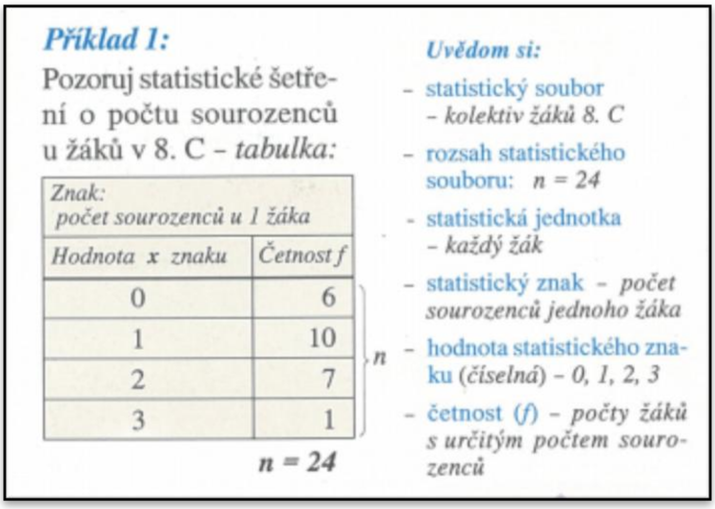
Základní škola Dr. Hrubého ve Šternberku pracuje v matematice se sadou učebnic, od autorky Mgr. Zdeny Rosecké a kolektivu učitelů při nakladatelství Nová škola. (Rosecká, 1997-2000)

Tato sada učebnic provází žáky od páté třídy celým druhým stupněm. Sada učebnic, která se mi dostala do rukou, je poměrně stará, vydaná byla v roce 1997-2000. Přesto je velmi pěkně zpracovaná a v každém ročníku můžeme najít prvky z hlediska pravděpodobnosti či statistiky. Pro každý ročník jsou dvě učebnice, vždy je jedna věnovaná geometrii a druhá buď algebře, nebo aritmetice.

V šesté třídě je to právě aritmetika. Učebnice o aritmetice v úvodu opakuje učivo páté třídy, kde se objevuje opakování těch nejjednodušších zlomků jako části celků nebo také základy desetinných čísel. Následná část se věnuje detailnějšímu pohledu na desetinná čísla. Nachází se tu pro statistiku důležitý pojem aritmetický průměr. Díky spoustě slovních úloh si žáci mohou důkladně procvičit počítání průměrných hodnot.

Pro sedmou třídu je opět učebnice aritmetiky. Zde můžeme najít učivo věnované zlomkům, početním operacím, porovnávání nebo také vyjádření na číselné ose. Další prvek, který je z hlediska statistiky přínosný, je vyjádření poměru či přímá a nepřímá úměrnost a trojčlenka. Dále to jsou procenta. Tu je celá kapitola zaměřená na výpočet procentových částí celků, seznámení se s grafy. Na základě různých obrázků mají žáci zakreslovat určená procenta, nebo je naopak vyjádřit číselně. V neposlední řadě dává prostor pro počítání s kalkulátorem.

Samotná výuka statistiky je zařazená do učebnice pro 8. ročník. Celá kapitola o statistice je velmi pěkně vysvětlená. Používá spoustu příkladů z prostředí, které je žákům určitě blízké. Začátek kapitoly je věnovaný vysvětlení základních pojmů, jako je statistický soubor, statistická jednotka a četnost. Pojmy jsou vysvětleny a následně jsou uvedeny na příkladu. Díky příkladu, který zahrnuje teoretické pojmy, jsou žáci schopni si lehko zapamatovat, co který pojem vyznačuje a také s nimi mohou dále pracovat. Viz obrázek níže.



Příklad 1:

Pozoruj statistické šetření o počtu sourozenců u žáků v 8. C – *tabulka:*

Znak: počet sourozenců u 1 žáka	
Hodnota x znaku	*Četnost f*
0	6
1	10
2	7
3	1

n

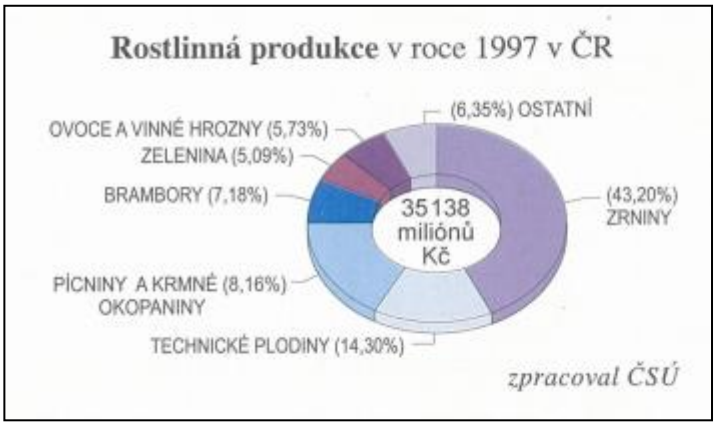
$n = 24$

Uvědom si:

- statistický soubor – *kolektiv žáků 8. C*
- rozsah statistického souboru: $n = 24$
- statistická jednotka – *každý žák*
- statistický znak – *počet sourozenců jednoho žáka*
- hodnota statistického znaku (*číselná*) – *0, 1, 2, 3*
- četnost (*f*) – *počty žáků s určitým počtem sourozenců*

Obrázek 1 - Příklad na vysvětlení statistických pojmů (Zdroj: Učebnice algebry pro 8. ročník, Rosecká, str. 98.)

Také popisuje rozdíl mezi kvantitativními a kvalitativními znaky. Veškeré nové poznatky jsou vysvětlovány lehkými, řešenými příklady i příklady na procvičení. V další části vysvětlují autoři další pojmy, jako jsou modus, medián a aritmetický průměr. Opět jim věnuje řadu příkladů na procvičení. Spoustu příkladů používá ze školního prostředí a dává prostor pro aktivní zapojení se do tvorby dalších příkladů.



Obrázek 2 - Diagram představuje vypěstované plodiny v ČR v roce 1997 (Zdroj: Učebnice algebry pro 8. ročník, Rosecká, str. 99.)

Učebnice sice používá staré výzkumy a statistické šetření, ale i tak může dávat žákům pěkný přehled o době před jejich narozením. Například z výše uvedeného grafu mají žáci spočítat, jakou hodnotu měly brambory vypěstované v roce 1997. Což následně mohou porovnat s dnešní dobou.

Poslední část kapitoly je věnovaná diagramům. Zde autoři vysvětlují jednotlivé grafy a ukazují je.

Celá kapitola je přínosem velkého množství informací a statistických šetření, které žáci postupně zpracovávají. Vždy na konci probraného úseku je návrh nějakého úkolu, vybízí žáky provést statistické šetření, nebo domyšlení dalších příkladů, také průběžně shrnuje učivo, takže pokud si žáci nejsou jisti, mohou nahlédnout do shrnutí.

Celá kapitola se soustředí především na početní operace, čtení z grafů a tabulek, ale nedává příliš mnoho prostoru pro logické uvažování a rozvíjení kritického myšlení. Tento fakt byl inspirací pro tuhle bakalářskou práci. Snažit se využít statistiku nejen pro porozumění interpretace statistických šetření, ale také pro zamyšlení se nad statistikou z jiného pohledu.

V 9. třídě učebnice pokračuje v algebře, kde se věnuje lomeným výrazům, slovním úlohám a funkcím. Závěr učebnice je zaměřený na základy finanční matematiky, kde se žáci seznamují s úroky, úrokovacím obdobím a výpočtem úroku.

4 Pravděpodobnost

Následující teoretickou část jsem zpracovala převážně podle Hrona a Kunderové (2015), Josefa Poláka (2016) a Emila Caldu (1999). Práci jsem doplnila i vlastními příklady.

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, která zkoumá a modeluje náhodné pokusy a náhodné jevy. Tyto jevy závisejí na náhodě. Pravděpodobnost pracuje s pojmem pravděpodobnost náhodného jevu. Díky dlouhodobému pozorování můžeme dojít k závěru, že náhodné jevy se řídí zákony pravděpodobnosti. Nestanoví nám, že za daného souboru podmínek nastane náhodný jev právě v daném okamžiku, ale pomůže nám předpovědět, s jakou pravděpodobností můžeme očekávat nastoupení tohoto jevu při určitém pokusu.

4.1 Náhodné jevy

Náhodný pokus je náhodný děj, který je za stejných podmínek nekonečně opakovatelný. Náhodný jev je tedy výsledek náhodného pokusu, o kterém můžeme jednoznačně říci, zda nastal či ne.

Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu značíme Ω. Konkrétní výsledek pak značíme $\omega \in \Omega$. O jednotlivých výsledcích mluvíme jako o elementárních jevech.

Při realizaci náhodného pokusu nastane jev A, jestliže v pokusu nastane výsledek ω, pro který platí $\omega \in A$. Jedná se o výsledek **příznivý jevu A**. Prázdná množina $\emptyset$ se nazývá **jev nemožný**. Tento jev nenastane při žádné realizaci náhodného pokusu. Množinu všech výsledků náhodného pokusu Ω nazýváme **jevem jistým**. Tento jev nastane při každé realizaci náhodného pokusu.

Pokud je množina Ω konečná, můžeme pracovat se všemi jejími podmnožinami. Pokud je množina nespočetná, nemůžeme pracovat se všemi podmnožinami Ω, ale jen s těmi, které tvoří určitý systém náhodných jevů.

4.1.1 Vztahy mezi jevy

Sjednocení jevůA_1, …,A_n je jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A_1, …,A_n. Značíme je $A_1 \cup A_n$.

Průnik jevůA_1, …,A_n je jev, který nastane právě tehdy, nastanou-li všechny tyto jevy společně. Značíme je $A_1 \cap A_n$

Opačný jev k jevu A je jev, který nastane právě tehdy, když nenastane A. Většinou se značí jako A'.

Rozdíl jevůA, B je jev, který nastane právě tehdy, když nastane A a zároveň nenastane B. Značíme jej $A \backslash B$.

Jev B je důsledkem jevu A, pokud je každý výsledek, který je příznivý jevu A také příznivý jevu B. Značíme je $A \subset B$. (Může také říci, že jev A je **podjevem** jevu B.)

Jevové pole

Systém S podmnožin základního prostoru Ω, který má tyto vlastnosti:

1. $\Omega \in S$,
2. jestliže $A \in S$, pak také $A' = \Omega \setminus A \in S$,
3. jestliže $A_k \in S$, $k = 1, 2, \dots$ pak také $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$, nazveme množinovou σ-algebrou a dvojici (Ω, S) nazveme jevovým polem.

4.2 Pravděpodobnost

Nechť (Ω, S) je jevové pole. Pravděpodobnost je zobrazení $P : S \to R$, splňující následující axiomy.

- Pravděpodobnost jevu A je nezáporné číslo $(P(A) \geq 0)$.
- Pravděpodobnost jistého jevu Ω je rovna jedné $[P(\Omega) = 1]$.
- Pravděpodobnost sjednocení konečného počtu neslučitelných jevů je rovna součtu pravděpodobností jednotlivých jevů $[P(A_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_\mathrm{n}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{n})]$.

4.2.1 Klasická definice pravděpodobnosti

Klasická definice pravděpodobnosti se definuje jako $P(A) = \frac{n(A)}{n}$, kde $\mathrm{n}(A)$ značí počet výsledků příznivých jevu A a n je počet všech možných výsledků náhodného pokusu. Tuto definici můžeme používat pouze pro pokusy, které mají konečnou množinu možných výsledků a jsou stejně možné.

Vybrané vlastnosti pravděpodobnosti:

- Pravděpodobnost nemožného jevu je rovna 0. $P(\emptyset) = 0$.
- Pravděpodobnost jevu jistého je rovna jedné. $P(\Omega) = 1$.
- Pro pravděpodobnost libovolného jevu A platí $0 \leq P(A) \leq 1$.

4.2.2 Nezávislé náhodné jevy

Nezávislosti dvou jevů rozumíme existenci jednoho jevu, který nemá vliv na existenci či neexistenci druhého jevu. Pokud máme dva nezávislé náhodné jevy, potom platí, že nepodmíněná pravděpodobnost daných jevů musí být stejná jako podmíněná.

Podmíněná pravděpodobnost $P\ (A|B)$ vypovídá o pravděpodobnosti výskytu jevu A za podmínky, že nastal jev B. Definujeme ji následovně: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Mějme dva náhodné jevy A, B. Předpokládejme, že platí $P\ (A|B) = P(A)$, za podmínky $P(B) > 0$. Pro vzájemný vztah to tedy znamená, že nastoupení jevu B nezměnilo pravděpodobnost nastoupení jevu A. Z této úvahy tedy vychází definice pro nezávislost dvou náhodných jevů.

Náhodné jevy jsou nezávislé, jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Tato rovnost je symetrická vzhledem k A, B. Pokud je $P(A) > 0$, potom platí také nezávislost jevu B na jevu A.

Na následujícím příkladu si ukážeme pár výše uvedených pojmů a výpočet pravděpodobnosti:

Házíme dvěma kostkami, černou a bílou. Za výhru považujeme, když alespoň na jedné kostce padne číslo 6, tedy jev

V = $\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$.

Právě jsme si vypsali všechny jevy, které jsou pro nás výhrou. Tedy padnutí šestky na černé kostce, bílé kostce nebo na obou.

Jev A, pokud padne 6 na černé kostce. $A = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$.

Jev B, pokud padne 6 na bílé kostce. $B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

Sjednocení jevů $A \cup B = V$ (Sjednocení jevů je tedy výčet všech hodů, kde padne alespoň jedna 6).

Průnik jevů $A \cap B = \{(6,6)\}$ (Průnik nastane, pokud na obou kostkách padne 6).

Opačným jevem rozumíme všechny ostatní možnosti, které nejsou V, ale mohou nastat, tedy

V′=

$$\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\end{matrix}\right\}$$

Pravděpodobnost, že padne alespoň na jedné kostce šestka je:

$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{11}{36} \doteq 30{,}1\%$

5 Statistika

5.1 Historie

Pojem statistika vychází z latinského slova „Status“, což znamená stav, nebo také stát. Kde samotný stát je stav společenství.

První zmínky o statistickém šetření pochází již z doby před Kristem, kdy vznikaly první městské státy a s nimi vzniká potřeba jejich správy. Největší zisky ve prospěch státu pochází z daní. K určení výše daně, bylo potřeba znát rozlohu státu, počet obyvatel, rozvoj obchodu, zemědělství a řemesel. Všechny tyto informace se získávaly ze statistických šetření. Tehdy měla statistika blíže spíš k dnešní hospodářské geografii. Počátky novodobé statistiky datujeme až od 19. století, v období, kdy se začaly zpracovávat hromadná data. Za zakladatele moderní matematické statistiky v 19. – 20. století považujeme anglického matematika a statistika Karla Pearsona. Pearson zavedl spoustu matematických pojmů jako například modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient. (Králík, 2000)

5.2 Využití statistiky

Obecně řečeno statistika zkoumá společenské jevy. Poznává zákonitosti v hromadných jevech vždy na základě rozsáhlého souboru dat. Statistiku můžeme chápat jako společenskou vědu, protože zasahuje snad do všech oblastí lidského života. Především pomáhá ekonomům a politikům, ale také lékařům, biologům a fyzikům.

5.3 Základní statistické pojmy

Nyní se budeme zabývat základními pojmy popisné statistiky, nikoli matematické statistiky, která je nad rámec učiva ZŠ.

STATISTICKÝ SOUBOR

Statistický soubor je konečná množina zkoumaných dat. Pokud bychom zkoumali například průměrný věk v České republice, tak bude statistickým souborem množina všech lidí v České republice.

STATISTICKÁ JEDNOTKA

Jednotlivé prvky ze statistického souboru se nazývají statistické jednotky.

STATISTICKÉ ZNAKY

Statistickým znakem rozumíme zkoumané vlastnosti statistických jednotek. Tyto znaky jsou buď **kvantitativní,** nebo **kvalitativní**. Kvantitativní znaky můžeme vyjádřit číselně (např. věk, výška, hmotnost, počet studentů). Kvalitativní nelze vyjádřit číselně, ale vyjadřují se slovně (např. barva očí, rodinný stav, pohlaví). Dále můžeme povahu kvalitativních znaků dělit na **nominální** či **ordinální**. Ordinální znaky můžeme jednoznačně uspořádat od nejmenšího po největšího (například hodnoty závislosti, nekuřák, občasný kuřák, pravidelný kuřák a silný kuřák, nebo stupně dosaženého vzdělání). Nominální znaky můžeme vyjadřovat v libovolném pořadí (u pohlaví nebo rasy psa jsou jednotlivé varianty neuspořádané.

ČETNOST ZNAKU A ROZSAH STATISTICKÉHO SOUBORU

Mějme dán statistický soubor o n prvcích a nechť je předmětem šetření jejich znak x, jehož hodnoty pro jednotlivé prvky označíme $x_1, x_2 \dots, x_n$. Různé hodnoty znaku označíme $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ (r ≤ n). Počet těchto n prvků se nazývá rozsah statistického souboru. Četnost hodnoty x_j^* říkáme počtu n_j, kde pro každou hodnotu x_j^* zjišťujeme, kolikrát se vyskytuje ve výčtu všech hodnot. Součet četností veškerých hodnot znaku x se rovná rozsahu statistického souboru.

RELATIVNÍ ČETNOST

Relativní četností v_j hodnoty x_j^* znaku x nazýváme poměr četnosti n_j této hodnoty a rozsahu souboru n ($\boldsymbol{v_j = \frac{n_j}{n}}$). Součet relativních četností je roven jedné. Nejčastěji se relativní četnosti vyjadřují v procentech, potom je jejich součet 100 %. Rozdělení četností se znázorňuje tabulkou nebo graficky pomocí grafů. Konkrétně spojnicovým, sloupkovým nebo kruhovým diagramem.

Pro lepší představu si tabulku četností znázorníme na příkladu, kde tabulka vyjadřuje známkování na vysvědčení z předmětu matematika v deváté třídě.

známka	absolutní četnost	relativní četnost
1	5	0,179
2	9	0,321
3	14	0,5
4	0	0
5	0	0
Celkem	28	1

Tabulka 2 - Tabulka četností (vlastní zdroj)

Absolutní četnost udává, kolik žáků má danou známku. Například můžeme vidět, že 14 žáků má na vysvědčení trojku z matematiky nebo že žádný žák nedostal ani čtverku ani pětku. Relativní četnost nám například říká, že 5 dětí, které dostali 1, představuje 17,9 % z 28 žáků.

ARITMETICKÝ PRŮMĚR

U kvantitativního znaku bývá velmi vhodné, někdy dokonce nutné nahradit všechny hodnoty jednou jedinou hodnotou a tou je právě průměrná. Tu nazýváme aritmetickým průměrem. Aritmetický průměr $\bar{x}$ je definován vzorcem $\boldsymbol{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Aritmetický průměr je nejčastěji používaný statistický pojem, objevuje se i v běžném životě. Velice často se ale využívá chybně, nebo může být záměrně chybně zneužit. Vysvětlíme si to na jednoduchém příkladu, kde spočítáme aritmetický průměr následujícího souboru {1,2,3,3,15}.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1+2+3+3+15}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8.$$

Můžeme vidět, že i přes poměrně vysoký průměr, jsou 4 hodnoty z 5 nižší než výsledný aritmetický průměr. Je zřejmé, že aritmetický průměr není vhodný pro každou situaci.

Pro vyjádření polohy můžeme použít ještě medián a modus. V některých situacích nám mohou výpočty mediánu a modu lépe nebo konkrétněji vyjádřit polohu.

MEDIÁN

I medián se určuje u kvantitativního znaku x. Jedná se o prostřední hodnotu znaků, které jsou uspořádány podle velikostí ($x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n$). Značí se Med (x). Definici můžeme zapsat jako Med (x) = $x_{\frac{n+1}{2}}$ pro n liché, Med (x) = $\frac{1}{2}$ ($x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}$) pro n sudé. Výhodou mediánu je to, že není ovlivněn extrémními hodnotami. Používá se v případě, kde aritmetický průměr značí nevhodné výsledky. U výše zmíněného příkladu, kde aritmetický průměr souboru $\{1,2,3,3,15\}$ je roven 4,8, je medián roven 3. Další výhodou mediánu je, že se dá použít i u znaku, který není číselně vyjádřený. Sledujeme-li například barvu vlasů u 7 kamarádek (blondýna, blondýna, zrzka, hnědovláska, hnědovláska, hnědovláska a černovláska), můžeme říci, že mediánem je hnědá barva vlasů.

MODUS

Modus se určuje u kvantitativního znaku x. Je to hodnota, která má největší četnost. Značí se Mod (x). Opět ho můžeme určovat i u hodnot vyjádřených jinak než číselně.

ROZPTYL

Ve statistice je důležité pozorovat nejen průměrné hodnoty kvantitativních znaků, ale také odchylky jednotlivých hodnot od průměrné hodnoty. Pokud jako charakteristiku polohy vezmeme aritmetický průměr, potom volíme zpravidla za charakteristiku variability rozptyl, který je definovaný jako průměr druhých mocnin odchylek od aritmetického průměru. Rozptyl znaku x označme jako s_x^2. Vzorec je následovný:

$$\boldsymbol{s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad popřípadě\ \boldsymbol{s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_j^* - \bar{x})^2\, n_j}$$

SMĚRODATNÁ ODCHYLKA

Druhá mocnina z rozptylu se nazývá směrodatná odchylka.

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Výhodou odchylky je, že udává variabilitu znaku ve stejných jednotkách měření, v jakých jsou udány. Zatímco rozptyl je vyjádřen ve druhé mocnině.

Pokud bychom chtěli charakterizovat variabilitu znaku bezrozměrným číslem, použili bychom variační koeficient v_x. Definuje se jako podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru. $v_x = \frac{s_x}{x} \cdot 100\ \%$. Tento koeficient se vyjadřuje většinou v procentech, tudíž má smysl jen tehdy, pokud nabývá nezáporných hodnot.

Příklad: Ve městě je 7 knihkupectví. Nově vydanou knihu známého autora nabízí všech 7 knihkupectví s rozdílnou cenou. Ceny v knihkupectvích jsou následovné: 350,- 360,- 420,- 400,- 450,- 440,- 380,-. Určete aritmetický průměr, medián a směrodatnou odchylku.

Jednotlivé ceny označíme $(x_1, x_2, \dots x_7)$ a $n = 7$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{350 + 360 + 420 + 400 + 450 + 440 + 380}{7} = \frac{2800}{7} = 400$$

Aritmetický průměr nám značí, že průměrná cena, za jakou si knihu ve městě můžeme koupit, činí 400 Kč.

Med (x) = 400 (Tuto hodnotu zjistíme jednoduše tak, že si vypíšeme všech 7 cen od nejnižší po nejvyšší. Medián je prostřední hodnota znaků uspořádaných podle velikosti a vzhledem k tomu že 7 je liché číslo, je to jednoduché. $350, 360, 380, \mathbf{400}, 420, 440, 450$.

Medián nám vyšel také 400 Kč, což nám značí, že ve třech knihkupectvích můžeme nalézt knihu s nižší cenou jako je 400 Kč a stejně tak ve třech knihkupectvích je kniha dražší než za 400 Kč.

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{7} \cdot (350 - 400)^2 + (360 - 400)^2 + (420 - 400)^2 + (400 - 400)^2 + (450 - 400)^2 + (440 - 400)^2 + (380 - 400)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{7} \cdot (-50)^2 + (-40)^2 + 20^2 + 0^2 + 50^2 + 40^2 + (-20)^2} = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot (2500 + 1600 + 400 + 2500 + 1600 + 400)}$$

$$\doteq \sqrt{1234{,}285714} \doteq 35{,}132403$$

Směrodatná odchylka nám značí, jak moc se od sebe ceny liší.

5.4 Korelace, koeficient korelace a kauzalita

Důležitou částí statistiky je problematika korelace a kauzality. Korelace vyjadřuje, zda existuje statistická závislost mezi dvěma jevy, kdežto kauzalita vyjadřuje příčinnost. Korelace je nutnou, ale nikoliv postačující podmínkou kauzality. Pokud spolu dvě proměnné korelují, ještě to nemusí nutně znamenat, že jedna je příčinnou druhé. Pearsonův korelační koeficient, který je nejčastěji používaný, udává pouze míru lineárního vztahu. Pokud se vyskytuje i jiný druh závislosti, korelační koeficient ho neodhalí.

Velmi často dochází k této logické chybě při vyhodnocování statistických dat. Je důležité zaměřit se na správné vysvětlení těchto pojmů již od brzkého věku, protože každou chvíli můžeme vidět v médiích, kdy ukazují nové výzkumy týkajících se právě této problematiky. Většina zpráv je založená na odborném, ale nejednoznačném výzkumu. Například tvrzení, že marihuana poškozuje paměť. (National geographic, 2013)

V takových případech, se může jednat o tzv. falešnou korelaci. U falešné korelace může vzniknout vztah mezi dvěma odlišnými jevy, u kterých nejsme schopni nalézt společnou příčinu. Další příklad falešné korelace si uvedeme v praktické části. Příkladem správné korelace může být například četnost otáček vrtule větrné elektrárny a množství vyrobené elektrické energie.

Statistickou závislost dvojici znaků x, y nazýváme korelací znaků. K jejímu číselnému vyjádření se zavádí tzv. koeficient korelace.

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{s_x s_y}, kde\ k_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

s_x a s_y jsou směrodatné odchylky $s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$ a k_{xy} je takzvaná kovariance proměnných X a Y a je statistickou mírou pro určení lineární závislosti dvou veličin.

Při vztahu dvou kvantitativních znaků se můžeme zabývat jejich těsností. Korelační koeficient vyjadřuje těsnost jejich lineární závislosti. Pokud se nejedná o lineární závislost, ale dá se předpokládat, že se jedná o monotónní závislost, vypočteme hodnotu Spearmanova korelačního koeficientu.

Spearmanův korelační koeficient vypočítáme pomocí vzorce $r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{r_i} \cdot y_{r_i} - n\bar{x}_r \cdot \bar{y}_r}{(n-1) \cdot s_{x_r} \cdot s_{y_r}}$, kde x_{r_i} a y_{r_i} jsou čísla pořadí hodnot $x_i \, a \, y_i$, $\bar{x}_r a \, \bar{y}_r$ jsou jejich průměrné hodnoty a $s_{x_r} \, a \, s_{y_r}$ jsou odpovídající směrodatné odchylky.

Tvar dané závislosti se nejlépe zobrazuje prostřednictvím bodového grafu. Graf označujeme termínem korelační diagram. Obsahuje body, které konstruují jednotlivé uspořádané dvojice (x_1, y_1),…,(x_n, y_n) tvořící soubor hodnot.

Koeficient korelace r_{xy} je vždy číslo z intervalu $\langle -1,1 \rangle$. Čím blíže je $|r_{xy}|$ k 1, tím můžeme statistickou závislost mezi znaky x, y považovat za větší. Krajních hodnot -1 a 1 nabývá korelační koeficient právě tehdy, když je 100 % lineární vztah. Při hodnotě -1 se jedná o zápornou korelaci, kde hodnota jedné proměnné stoupá a druhá klesá. Naopak při hodnotě 1 se jedná o kladnou korelaci, kde obě proměnné zároveň stoupají.

Pro grafické vyjádření závislosti vztahu mezi dvěma proměnnými, kde předpokládáme nějakou závislost, používáme regresní přímku. Při modelování závislosti považujeme jednu z veličin za závisle proměnnou, tu označíme Y a druhou za nezávisle proměnnou, tu označíme X. Tomuto značení odpovídá i pozice jednotlivých veličin v bodovém grafu. Na osu y vynášíme hodnoty závisle proměnné a na osu x nezávisle proměnné. Za závisle proměnnou dosazujeme veličinu, která nás zajímá především.

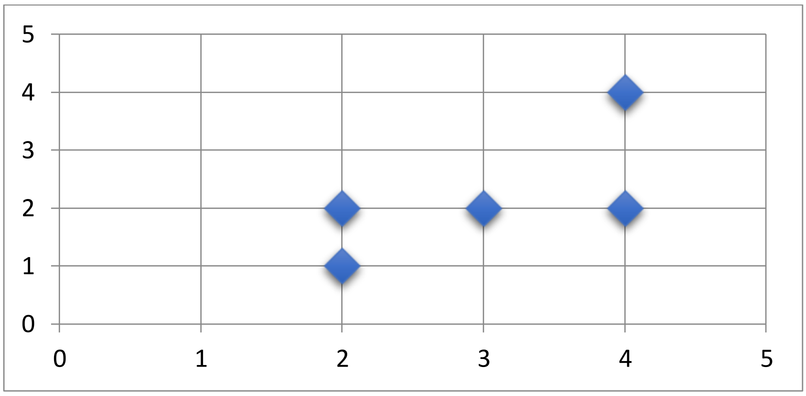
Uveďme si jednoduchý příklad, který nám nastíní výpočet korelace. Mým cílem není v této práci vysvětlovat teorii korelace a výpočty příkladů, z toho důvodu uvádím pouze jednoduchý příklad pro postup výpočtu.

Následující tabulka ukazuje, jaké známky z matematiky a jaké známky z fyziky mají žáci stejného ročníku.

známky z matematiky	x	2	3	2	4	4
známky z fyziky	y	2	2	1	4	2

Tabulka 3 - Výčet známek (vlastní zdroj)

Následně si hodnoty z tabulky zaznačíme do grafu. V grafu můžeme vidět jistou podobnost mezi známkami. Známka z fyziky se buď vůbec neliší od známky z matematiky, nebo se liší o jeden stupeň. Pouze poslední hodnota je rozdílná o dva stupně. Můžeme také pozorovat, že body zaznačené v grafu jsou poměrně blízko sebe, což značí vzájemný silnější vztah.



Graf 1 Graf korelace (vlastní zdroj)

Hodnoty x = známky z matematiky

Hodnoty y = známky z fyziky

n = 5 (počet zkoumaných žáků)

Jako první si spočítáme průměrné hodnoty známek.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5} \cdot (2 + 3 + 2 + 4 + 4) = 3$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{5} \cdot (2 + 2 + 1 + 4 + 2) = 2{,}2$$

Nyní, když známe hodnoty aritmetických průměrů, dosadíme a vypočítáme hodnoty směrodatných odchylek.

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot [(2-3)^2 + (3-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \cdot [(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2]} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 4} = \sqrt{0{,}8} \doteq 0{,}8944$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot [(2-2{,}2)^2 + (2-2{,}2)^2 + (1-2{,}2)^2 + (4-2{,}2)^2 + (2-2{,}2)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \cdot (-0{,}2)^2 + (-0{,}2)^2 + (-1{,}2)^2 + (1{,}8)^2 + (-0{,}2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \cdot [0{,}04 + 0{,}04 + 1{,}44 + 3{,}24 + 0{,}04]} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 4{,}8} = \sqrt{0{,}96} \doteq 0{,}9797$$

Vypočítáme si čitatele pro výpočet korelace.

$$k_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [(-1) \cdot (-0{,}2) + 0 \cdot (-0{,}2) + (-1) \cdot (-1{,}2) + 1 \cdot 1{,}8 + 1 \cdot (-0{,}2)] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot (0{,}2 + 1{,}2 + 1{,}8 - 0{,}2) = \frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Teď již známe všechny hodnoty pro dosazení do konečného vzorce pro výpočet korelačního koeficientu.

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{s_x s_y} \doteq \frac{0{,}6}{0{,}8944 \cdot 0{,}9797} = \frac{0{,}6}{0{,}8762} = 0{,}6847$$

Koeficient korelace nám vyšel jako číslo blížící se hodnotě 1, což víme, že značí poměrně silný korelační vztah. Můžeme tedy tvrdit, že na základě korelačního koeficientu spolu souvisí známky matematiky a fyziky. Pokud bychom uvažovali učivo matematiky a fyziky, zjistíme, že fyzika používá spoustu matematických výpočtů, vzorců a úvah. Tedy, pokud se ztrácíme v početních výpočtech v matematice, pak nebudeme schopni dané výpočty aplikovat ani ve fyzice. Naopak, pokud se orientujeme v matematických výpočtech, měli bychom je být schopni použít i ve fyzice. Můžeme pozorovat, že tedy opravdu existuje jistá závislost mezi matematikou a fyzikou. Zde můžeme vidět i příčinnost vztahu matematiky k fyzice, tudíž se jedná o kauzální vztah.

5.5 Grafy a diagramy

Pro správné vyhodnocení statistických výsledků je nutná správná orientace v grafu. Se špatně vytvořeným grafem se můžeme setkat poměrně často. Některá média používají záměrně špatně vytvořený graf pro manipulaci s informacemi. Takové špatně vytvořené grafy jsou zavádějící a matou. Existují však základní pravidla pro správné vytvoření grafu, pokud tyto pravidla známe a dokážeme je porovnat s grafem, který se nám zdá být zavádějící, máme vyhráno a nemusíme se nechat oklamat médii.

Pro podání velkého množství údajů o rozsáhlých statistických souborech slouží tabulky. Tabulky jsou vhodné i pro publikační účely. Ovšem pro rychlou orientaci a přehlednost ve velkém množství údajů už tak vhodné nejsou.

Na tyto účely poslouží mnohem lépe grafické vyjádření. Grafickým znázorněním rozumíme znázornění grafem neboli diagramem. Grafy vyjadřují statistické výsledky názorně a přehledně. Skládá se z obrazu, který tvoří souhrn grafických prostředků sloužících pro vyjádření vztahu mezi veličinami, velikosti a úrovně jevů. Obvykle jsou ve statistice využívány 2D grafy z důvodu větší přehlednosti. Abychom mohli znázornit graf, potřebujeme soustavu souřadnic. Nejčastěji se používá soustava pravoúhlá. Vodorovná přímka se značí x a svislá přímka y. Průsečík těchto dvou os nazýváme počátkem souřadnic a značíme jej nulou. Osy dělí souřadnicové pole na čtyři kvadranty.

Pro lepší čtení jednotlivých hodnot v grafu vedeme v poli body stupnice přímky rovnoběžně s osami souřadnic. Tyto přímky následně vytvářejí grafickou síť.

Grafy a diagramy jsou velmi významné pro rozvoj myšlení žáků. Velmi dobře slouží pro představu a zdůvodnění si matematických poznatků. Cílem v oblasti grafů je naučit žáky číst v grafu, vyjadřovat data vhodným grafem či tabulkou. Znát zákonitosti správně vyjádřeného grafu a taky jej sestavit.

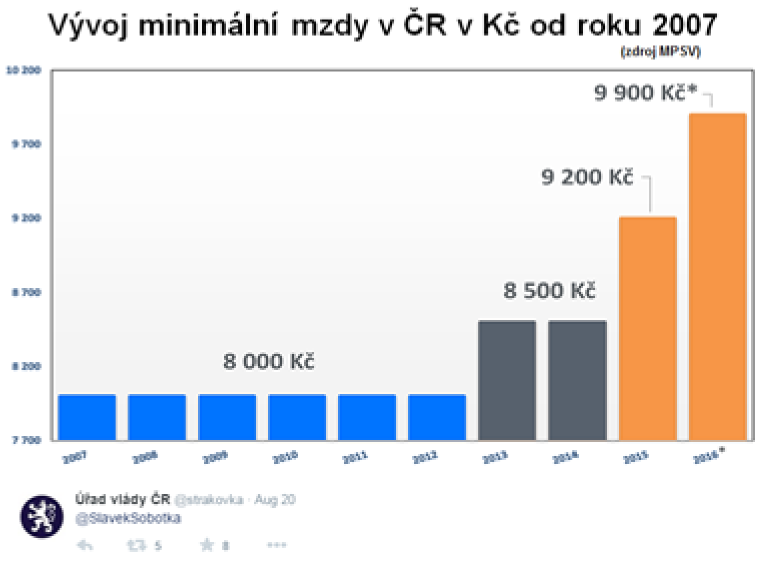
Pro různá statistická šetření nebo jakékoliv vyjádření, které je vhodné znázornit grafem, existují různé druhy grafů. Grafy existují jak 2D tak také ve 3D provedení. Pro čtení z grafů jsou 3D grafy nevhodné. Těžko se z nich čtou vyjádřené výseče či poměry.

Jak je již výše zmíněno, grafy jsou lehko manipulovatelné a mohou zkreslovat data. K následující části mě inspiroval článek zveřejněný na internetu. (Věříte grafům, 2015).

Toho často využívají různé firmy či politici. Podívejme se na dvě nejčastější chyby, kterých lze využívat pro manipulaci s daty.

Sloupcový graf

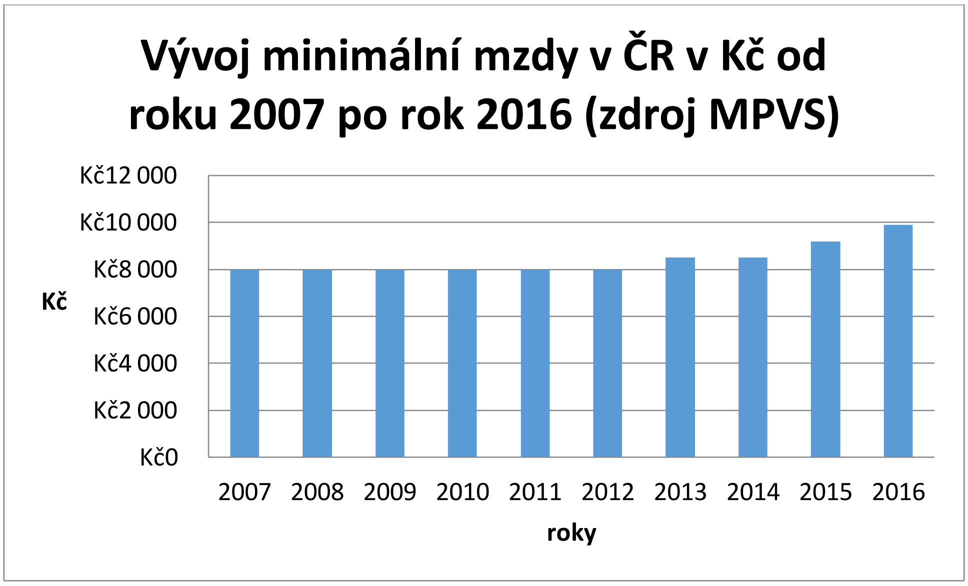
Jednou z nejčastějších chyb je oříznutí osy y u sloupcového grafu. Uveďme si reálnou situaci, kdy česká vláda zveřejnila na Twitteru následující graf.



Obrázek 3 - Graf ukazuje vývoj mzdy v čase zveřejněný na Twitteru 20. srpna 2015 (tento graf již není na Twitteru dostupný)

Graf má ukázat, jak vláda navýšila minimální mzdu v posledních letech. Není to ale správně vytvořený graf. Osa y je oříznutá a začíná na hodnotě 7 700 Kč. Podle grafu si můžeme domyslet, jak rapidně bude graf dále stoupat. Tento špatně vytvořený graf má vytvořit dojem, že částka 8 000 Kč je velmi nízká, kdežto částka 9 900 Kč je vysoká.

Následující graf jsem opravila a vyjádřila bez oříznuté osy y.



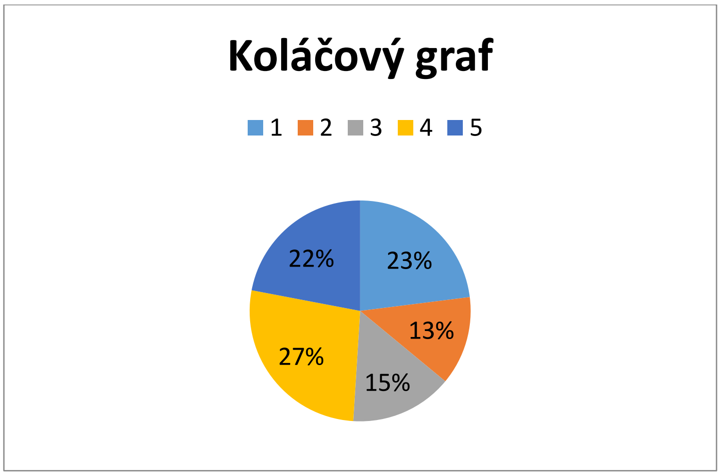
Graf 2 - Správně vytvořený sloupcový graf (vlastní zdroj)

Vidíme, že pokud není oříznutá osa y, nárůst grafu již není tak výrazný. Tudíž dává reálnou představu o nárůstu minimální mzdy.

Kruhový diagram

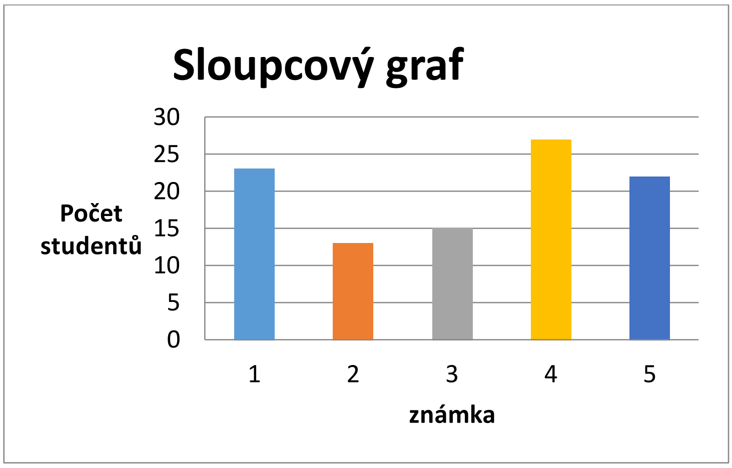
Druhé chybné vyjádření, které si v této práci vyjasníme, jsou koláčové grafy. Koláčové grafy patří mezi nejčastější typ grafického vyjádření. Tento typ grafu se používá především pro zobrazení procentuálního zastoupení části celku. Hodnoty v koláčových grafech nejsou vždy jasně porovnatelné jako například v grafech sloupcových.

Příklad: 100 studentů psalo písemný test z matematiky. Následující grafy nám znázorňují jejich úspěšnost. Pro porovnání si znázorníme dva různé grafy.



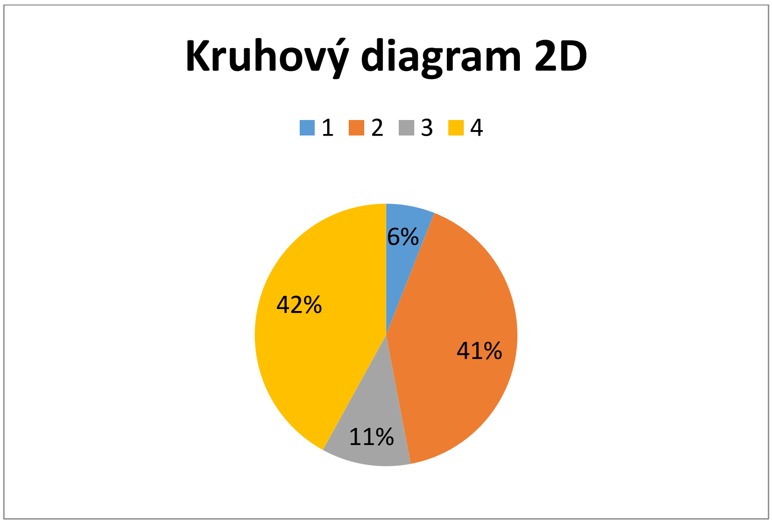
Graf 3 - Koláčový graf znázorňuje procentové vyjádření úspěšnosti v testu. Hodnoty 1-5 vyjadřují známky (vlastní zdroj)

Výše znázorněný graf představuje rozdělení hodnot i se znázorněnými procenty. V koláčovém grafu nám chvíli potrvá, než si seřadíme hodnoty a ujasníme poměry. Sloupcový graf znázorněný níže je přehledný a na první pohled můžeme charakterizovat vyjádřené hodnoty. Můžeme tedy říci, že obecně jsou přehlednější sloupcové grafy.



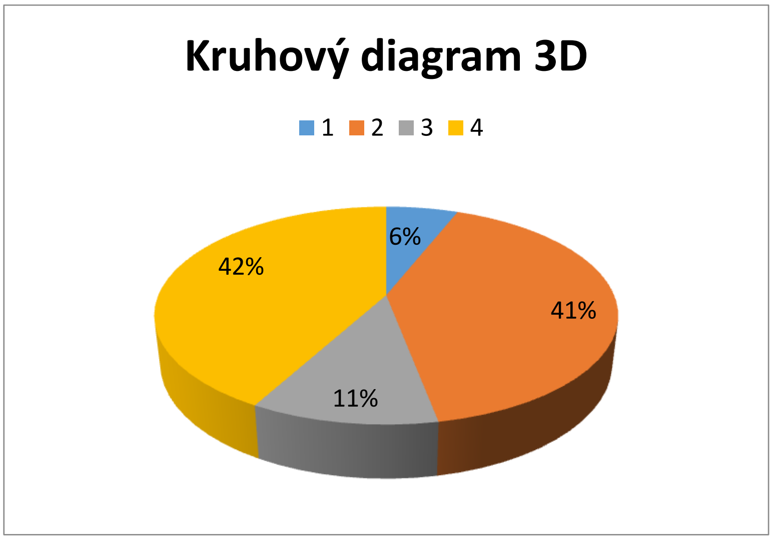
Graf 4 - Sloupcový graf vyjadřuje kolik studentů má danou známku (vlastní zdroj)

Největší problém u koláčových grafů je ale jejich 3D vyjádření, s tím lze totiž velmi lehko manipulovat. Níže si ukážeme 3 grafy stejných hodnot a porovnáme je.



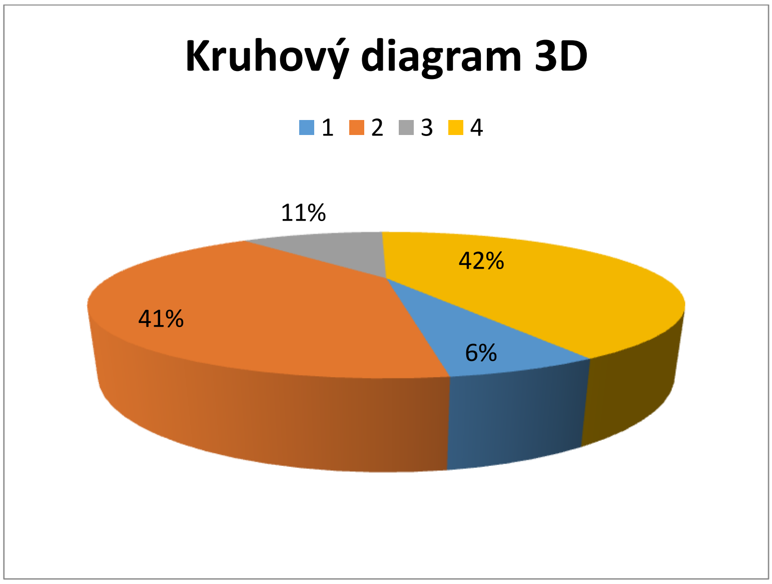
Graf 5 - Kruhový diagram 2D (vlastní zdroj)

Výše vyjádřený kruhový diagram 2D znázorňuje 4 hodnoty, které jsou v grafu vyjádřené procenty. Níže zmíněný graf vyjadřuje úplně stejné hodnoty, je ale ve 3D provedení.



Graf 6 - Kruhový diagram 3D (vlastní zdroj)

Abychom si ukázali, jak lze manipulovat s kruhovým diagramem ve 3D provedení, vytvořila jsem další graf, opět se stejnými hodnotami. Využila jsem ale možnosti otáčení grafu a změny perspektivy a najednou graf vypadá úplně jinak.



Graf 7 - Kruhový diagram 3D pootočený (vlastní zdroj)

Tento zmanipulovaný graf je značně odlišný od původního grafu. Těžko lze vyčíst, zda výseč označená 1 je větší nebo než výseč označená 3. Stejné dilema nastává i při porovnání výseče 2 a 4.

Obecně jsou trojrozměrné grafy zpestřením pro čtenáře, jinak jsou spíše zbytečné. Těchto výhod otáčení prostorového grafu využívají zejména manipulátoři, kteří potřebují zkreslit výsledná data. (Věříte grafům, 2015)

PRAKTICKÁ ČÁST

6 Výuka pomocí pracovních listů

V teoretické části jsou uvedeny a vysvětleny pojmy, se kterými budeme pracovat. Způsob výuky na základní škole je připraven na základě pracovních listů, které si v praktické části analyzujeme a detailně rozebereme, jak vypadalo praktické provedení pracovních listů s vybranými žáky. Obecně rozumíme pod pojmem pracovní list tištěný materiál, který má vést k usnadnění porozumění určitého tématu. Jsou vhodné pro zpestření vyučování, popřípadě procvičování probrané látky. Pracovní listy jsem si vybrala právě z důvodu možnosti využití aktivního zapojení žáků ve výuce.

6.1 Cíl práce

Pracovní listy, zaměřené na výuku statistického myšlení, mají za úkol přivést žáky k zamyšlení se nad statistikou z jiného pohledu, než kterým se na statistiku možná doteď dívali. Měly by žákům ukázat, že statistika opravdu zasahuje do našeho života v různých oblastech. A pokud se umíme orientovat ve výsledných analýzách statistického šetření, může nám zjednodušit spoustu situací, kterým budeme v průběhu života vystavováni. Pracovní listy jsou vytvořeny tak, aby rozvíjeli u žáků kritické myšlení. Právě kritické myšlení je důležitou součástí pro správné vyhodnocování jednotlivých úkolů v pracovních listech. V neposlední řadě by mohli být návrhem nové metodologie pro učitele matematiky.

6.2 Cílová skupina

Pro vyplnění pracovních listů byli vybráni žáci jedné základní školy v Olomouckém kraji. Konkrétně žáci osmých a devátých tříd Základní školy Dr. Hrubého 2, ve Šternberku. Výběrovým souborem jsou právě žáci osmých a devátých tříd, protože by již měli mít znalosti z předchozích studijních let o jednotlivých prvcích statistiky a také o čtení z grafů. Celkem se testování zúčastnilo 123 žáků, z toho 65 dívek a 58 chlapců.

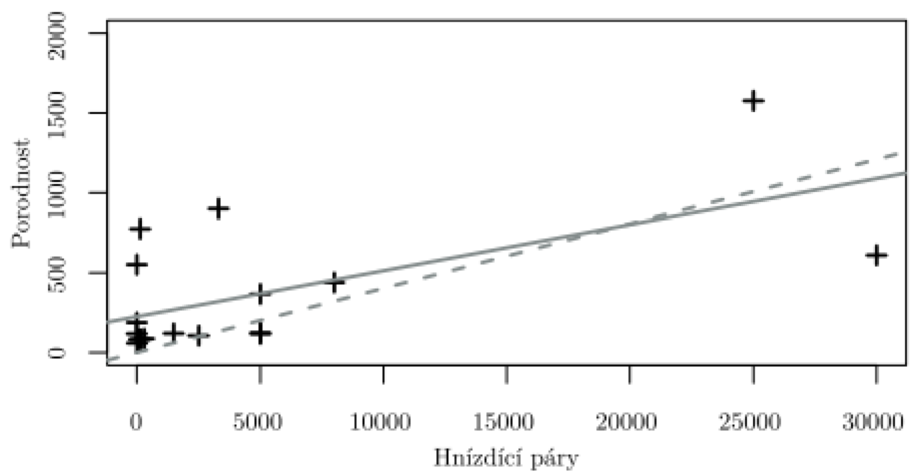
6.3 Realizace výzkumného šetření

Pracovní list je pomyslně rozdělený na tři části, každá část obsahuje jeden úkol na konkrétní téma. Úkoly na sebe plynule navazují. První část je věnována problematice korelace a kauzality, kde je žákům vysvětlen rozdíl mezi dvěma pojmy a je zaměřený na falešnou korelaci. Falešná korelace ukazuje, že spolu dvě veličiny mohou souviset, ale nenajdeme pro to žádné logické vysvětlení, zkrátka se může jednat o náhodu. Na tuto náhodu navazuje druhý úkol související s pravděpodobností a náhodnými jevy. Ve výsledné tabulce je vidět, že můžeme vybrat část informací a tu prezentovat jako výsledný stav, který je zavádějící.

Poslední úkol navazuje špatně vyjádřeným, zavádějícím grafem, který je porovnán se správným grafem. Druhá část posledního úkolu je věnovaná rozdílu kruhového diagramu ve 2D či 3D znázornění. Vzhledem k tomu že témata, která obsahují pracovní listy, nejsou zařazeny v ŠVP, tak jsme pracovní listy vypracovávali společně. Vždy jsem první vysvětlila danou problematiku, následně žáci dostali prostor pro vyjádření se k úkolu a zamyšlení se nad danou problematikou. Poté úkol ve dvojicích zpracovali a na závěr jsme ho společně prodiskutovali a zhodnotili.

6.3.1 Korelace x kauzalita

První úkol z pracovního listu se vztahoval ke statistickému tématu korelace. S tímto pojmem souvisí další pojem kauzalita. Jak už je výše zmíněné, s tímhle tématem se na základní škole žáci nepotkávají. Proto jsem se zaměřila na důkladné vysvětlení daných pojmů a problematiky. Na druhou stranu nebylo cílem děti naučit teorii, ale pouze je seznámit s pojmy aby s nimi mohli pracovat. Cílem bylo, aby uvedený graf vedl k uvědomění si existenci korelace, ale díky zapojení kritického myšlení ukázal nesmyslnost tvrzení, které tento graf uvádí.



Graf 8- Porodnost v jednotlivých státech (v tisících dětí za rok) vykreslená proti počtu hnízdících párů čápů. Plná čára ukazuje proloženou regresní přímku s absolutním členem. Čárkovaná čára ukazuje proloženou regresní přímku bez absolutního členu. (Pokroky m, fyziky a astronomie, ročník 62 (2017))

Výše vyobrazený graf znázorňuje existenci korelace mezi dvěma veličinami, a to porodností dětí a hnízdícími páry čápův jednotlivých státech. Tento graf jsem převzala z článku *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 62 (2017), č.4.*A rozhodla se na něm vysvětlit žákům problematiku korelace a kauzality.

Nad grafem byla v pracovním listu uvedená věta, která říká, že statistikové zjistili kladnou korelaci mezi počtem narozených dětí a výskytem hnízdících čápů.

Na úvod pracovního listu jsem žákům položila dvě otázky, první otázkou jsem se zeptala, kolik jich už slyšelo, že čápi nosí děti. Přihlásili se úplně všichni. Následně jsem se zeptala, kolik z nich tomu věří. To se už nepřihlásil vůbec nikdo. Nechala jsem je zamyslet se nad tím, čím to je a nechali jsme moji otázku bez odpovědi. Zatím jsme se vrhli na vysvětlení pojmů k prvnímu úkolu.

Po vysvětlení pojmů a popsání grafu měli žáci prostor pro komunikaci ve dvojici a následně pro společnou konverzaci na danou problematiku. K tvoření myšlenek měli k dispozici 3 otázky, které jim měli pomoci při vyhodnocování. První otázka, co si můžou myslet, že plyne z grafu, je měla přimět k vyjádření vlastními slovy, jak grafu rozumí podle toho, co o grafech už vědí a po mém uvedení do problematiky. Žáci správně usoudili, že podle grafu můžeme říci, vyšší počet čápů se vyskytuje společně s velkým počtem dětí. Což vedlo k diskuzi, jestli náhodou opravdu nenosí čápi děti.

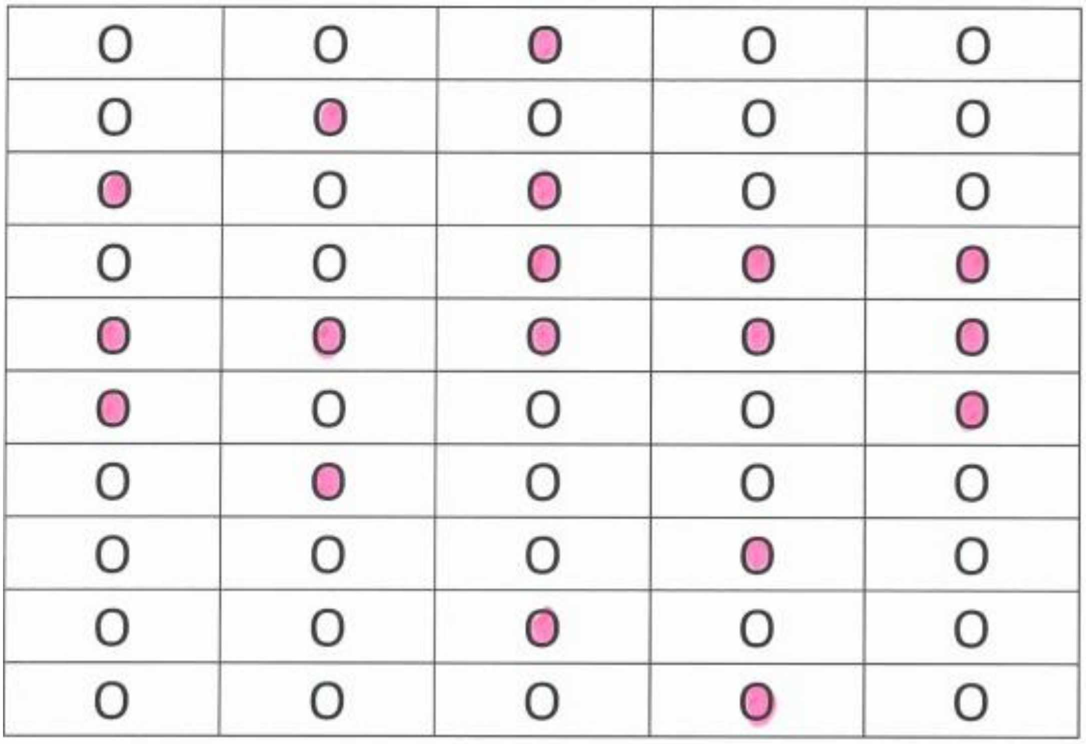
Druhá otázka, jestli závěru, ke kterému došli, mohou věřit, byla pro zamyšlení se nad reálností grafu. Na tomto místě jsme se společnou diskuzí dostávali k ukončení debaty nad pravdivostí uvedeného tvrzení.

Poslední otázku, která se ptá, co je tedy skutečná pravda, jsme uzavřeli opět společnou konverzací, kde jsme došli k závěru, že podle grafu existuje nějaký vztah mezi hnízdícími čápi a porodností dětí. Což ale rozhodně neznamená, že čápi nosí děti. Žákům jsem vysvětlila, že se jedná o výraznou korelaci, nikoliv však kauzalitu. Uvedli jsme si pár dalších příkladů, které značí buď falešnou či pravdivou korelaci. Žáci byli velmi kreativní. Vymýšleli příklady ze školního prostředí, jako například že chození za školu souvisí s množstvím omluvených, či neomluvených hodin. Nebo také že výsledné známky na vysvědčení souvisí s průběžnými známkami za celé pololetí. Nakonec jsme konstatovali, že tato významná korelace, kterou jsme si uvedli s počtem narozených dětí, je jen velmi zajímavá náhoda.

6.3.2 Náhodné jevy

Na zajímavou náhodu jsme navázali druhým úkolem, který se týká právě náhodných jevů. Náhodné jevy jsou součástí pravděpodobnosti. Ve druhém úkolu čekala žáky tabulka s políčky na vybarvení. Za úkol měli hodit padesátkrát mincí a zaznamenat výsledek hodů. Tento jednoduchý úkol jsem zařadila do pracovního listu také z důvodu návaznosti na úkol třetí. Cílem bylo se žáky jednoduše rozebrat problematiku náhodných jevů. První jsme si řekli, jaká je pravděpodobnost, padnutí mince na jednu či druhou stranu. A zkusili odhadnout, jak by tabulka měla vypadat. Po padesáti hodech jsme zjistili, že pravděpodobnost 50 % padnutí orla či panny je jen teorie. Nikomu ze všech žáků nevyšel přesný počet hodů podle pravděpodobnosti, ale zjistili jsme, že se od určení pravděpodobnosti liší velmi málo.

Tabulka je rozdělená na deset řádků a pět sloupců. Nechala jsem žáky si podrobněji prozkoumat vyznačenou tabulku. Většina přišla na zajímavý jev, kdy jim v tabulce padl například v celém řádku po sobě orel či panna. Žáci se začali překřikovat a soutěžit, komu padl vícekrát po sobě stejný jev. K tomu se nám hodil konkrétní jeden výsledek pracovního listu,viz níže, kde jedné dvojici padl orel devětkrát za sebou a ve zbytku hodů padal jen jednotlivě mezi hody, kdy padala panna. Neplánovanou soutěž, kterou žáci vymysleli, ta dvojice vyhrála. Ale ve skutečnosti měla nejmenší četnost hodů orla. Na tomto příkladu jsme si vysvětlili, že i přes nejmenší počet hodů orla, byla právě tato dvojice nejvhodnější pro uvedení zavádějící informace, pokud by veřejnosti představili pouze tu část, kde jim orel padl tolikrát po sobě. Tato náhoda padnutí devíti stejných jevů se nám stala pouze v jedné třídě. V ostatních třídách jsme našli podobné výrazné náhody, na kterých jsme si to vysvětlili.



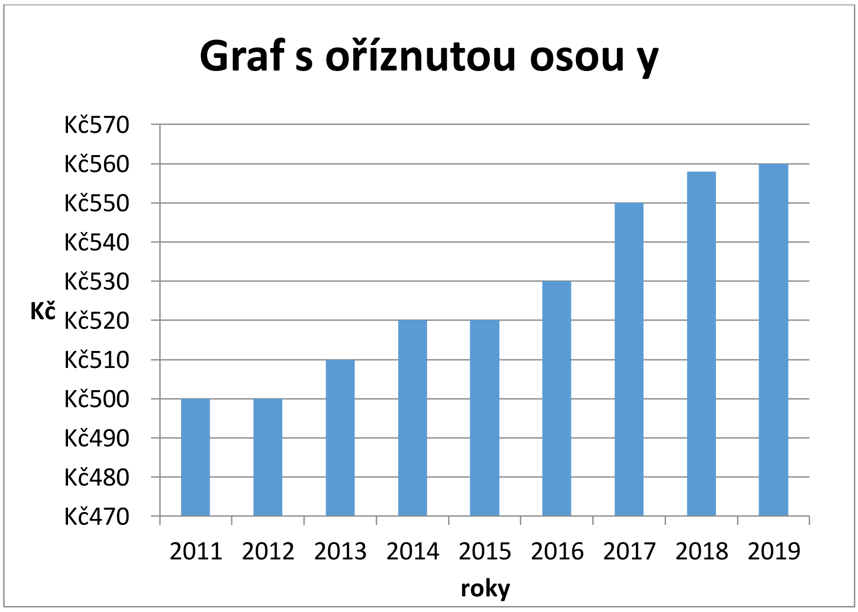
Tabulka 4 – Tabulka vyjadřující zaznamenané hody mincí. Růžové kolečko značí padnutí orla (vlastní zdroj)

Na základě dané situace jsem jim vysvětlila, jak můžeme představovat výsledky nějaké situace tak, jak se nám to hodí. Můžeme přeci tvrdit, že máme štěstí na padání orla při házení mincí a prezentovat pouze část tabulky, kde se daný jev nachází. Například jen dva řádky. Toto se žákům moc nezdálo a reagovali otázkami, zda to není podvod. Vysvětlili jsme si, že mají pravdu, ale že i tak se s tím mohou setkat poměrně často.

6.3.3 Grafy

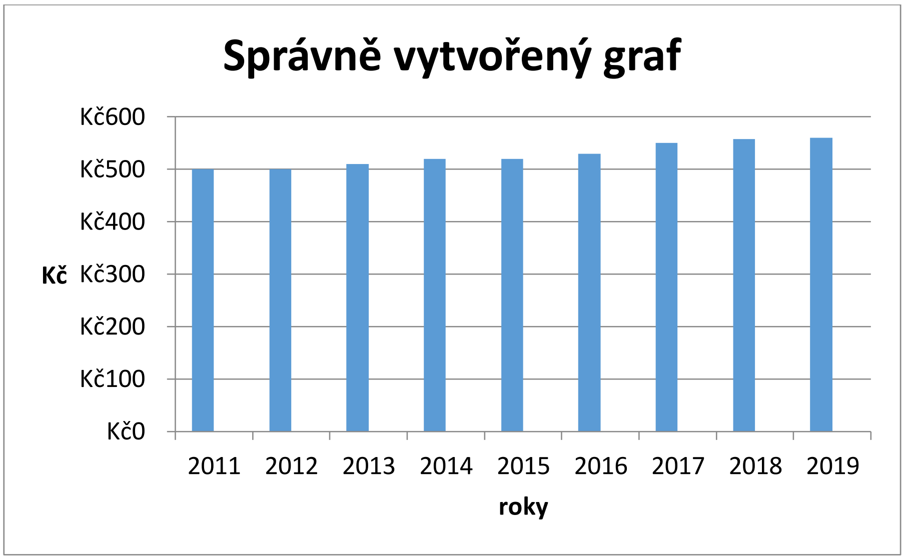
První část posledního úkolu je zaměřená na problematiku grafů. Pro správné vyhodnocení statistických dat, je nutná správná orientace v grafu. V dnešní době jsou grafy, popřípadě tabulky velmi využívané, z důvodu přehlednosti a rychlé informovanosti. Z toho důvodu se domnívám, že učit žáky číst správně v grafu je vhodné již od útlého věku. Na základních školách se žáci setkávají s tabulkami již od první třídy. Ve vyšších ročnících na druhém stupni by žáci již mohli být seznamováni nejen s tím, jak hledat informace v grafu, ale také jak vyhodnotit správně vytvořený graf.

Žáci dostali na papíru vytvořený graf, který ukazoval stoupající hodnotu v korunách každý rok. Za úkol měli navrhnout situaci, ke které se graf hodí. Žáci se aktivně zapojili do navrhování situací. Jeden z návrhů byl o stoupající ceně zlata. Když jsme si ujasnili právě na konkrétním příkladu s cenou zlata situaci v grafu, kde žáci popisovali, jak je překvapuje, rychle stoupající cena zlata a kolik asi tak jaká asi bude za pár let. Po rušné diskuzi měli žáci odpovědět na otázku pod grafem, která se ptá, zda se jedná o správně vytvořený graf. Stačila chvilka pro zamyšlení a žáci přišli na chybějící nulovou hodnotu na ose y.



Graf 9 – Graf s oříznutou osou y (vlastní zdroj)

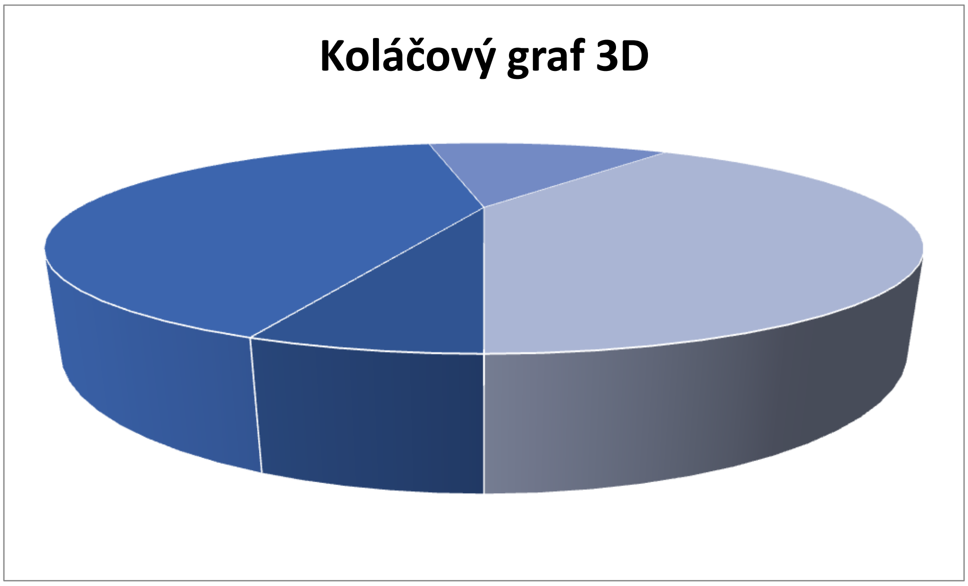
Následně jsem jim ukázala správně vytvořený graf.



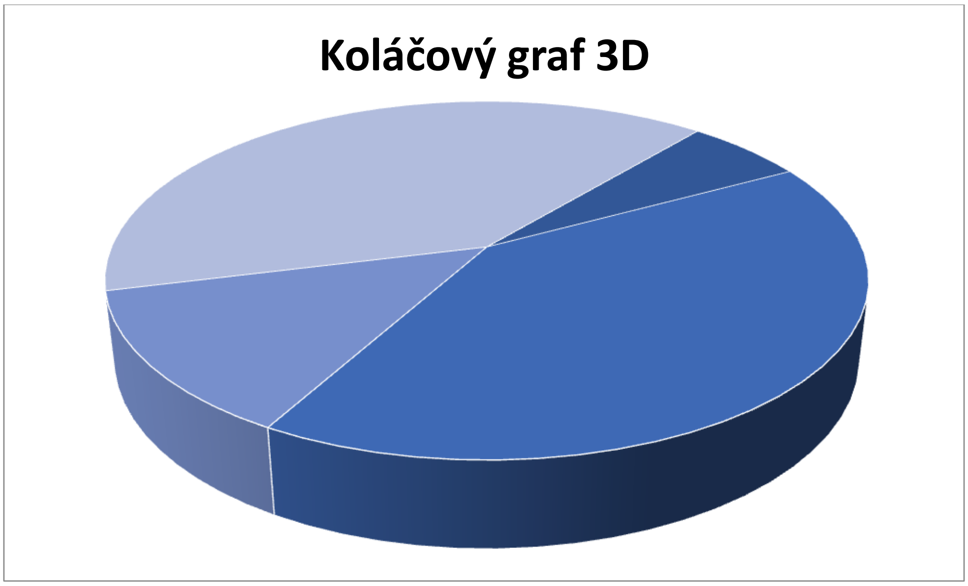
Graf 10 – Správně vytvořený graf (vlastní zdroj)

Z lavic se ozývalo udivení a překvapení, že to s tou cenou není tak rychle rostoucí, jak se na první pohled zdálo. Druhý graf již byl správně vytvořený a hned se vizuálně změnil. Nárůst již nevypadal tak vysoký. Což jsou opravdu zavádějící informace. Opět jsme si zkusili navrhnout pár situací, kdo a proč by chtěl uvádět zavádějící grafy.

Druhá část je věnovaná koláčovému grafu. Předložila jsem žákům graf, který vyjadřuje procentuální rozdělení znalosti angličtiny mých spolužáků. Poprosila jsem žáky, aby se svým spolužákem probrali graf, který jsem jim ukázala. Mezi tím, co spolu debatovali o znalosti angličtině mých spolužáků, jsem na projektoru v excelu vytvořila stejný graf stejných hodnot, ale ve 3D provedení. Prostorově jsem ho pootočila tak, aby na první pohled nebylo jasné, že se jedná o totožný graf. Potom jsem žáky upozornila na graf na projektoru a poprosila o porovnání grafu na papíru a na projektoru. Po společné diskuzi, kdy žáci viděli velké podobnosti grafu, ale nemohli s jistotou tvrdit, že je stejný, jsem odhalila, že se jedná o totožný graf, jen jsem s ním pootočila. Nebylo jasně vidět, která výseč znázorňuje kolik procent. Ukázala jsem jim ještě pár pootočení a poté jsem graf uvedla do původní podoby a ujistila žáky, že se jedná o totožný graf a ukázala jim, jak s ním můžu točit a měnit úhel pohledu do té doby, dokud nebude vypadat tak, jak já chci. Pro ukázku otáčení 3D grafu jsem vytvořila dva grafy na základě stejných hodnot.



Graf 11 – Koláčový graf otočený se záměrně neuvedenými procenty (vlastní zdroj)



Graf 12 – Koláčový graf jinak otočený opět se záměrně neuvedenými procenty (vlastní zdroj)

Uvedené grafy měly žákům názorně ukázat, jak je snadné manipulovat s výsledným grafem. Zamýšleli jsme se nad tím, kde všude se můžeme setkat s grafy a zjišťovali jsme, jestli už se někdo setkal s grafem, který nebyl správně vytvořený a zda to bylo lehko rozpoznatelné. Následně jsem žákům zmínila, že podobné grafy, které jsem jim ukázala, byli zveřejněné na internetu jako oficiální výsledky statistických šetření. A že je potřebné zkoumat správnost grafu pro správné vyhodnocení.

6.4 Vyhodnocení a reflexe pracovních listů

Vždy jsem na vyhotovení pracovních listů se žáky měla jednu vyučovací hodinu, tudíž pouze 45 minut. Je to poměrně krátký čas na seznámení žáků s pojmy, se kterými se ještě nesetkali a vypracování celého pracovního listu. Snažila jsem se tedy přizpůsobit se žákům a určeným 45 minutám. I přesto, že času bylo málo a informací mnoho, žáci aktivně spolupracovali a stihli jsme všechno.

V úvodu hodiny jsem se představila a vysvětlila žákům, proč s nimi tento pracovní list chci vypracovat a poprosila je o spolupráci. Ze začátku jsme si připomněli, co už o statistice vědí a co se naučili. Následně jsme se již vrhli na pracovní list. Celá vyučovací hodina se nesla v dobré atmosféře a v aktivním duchu. Žáci se hlásili, někdy dokonce i vykřikovali správné odpovědi na mé otázky. Aktivně také komunikovali se svými spolužáky o rozlišných názorech na dané téma. Vždy jsme společně přišli na správné závěry a ujasnili situaci. Na konci hodiny, jsem poprosila žáky, aby mi napsali zpětnou vazbu na celou hodinu. Poprosila jsem je o zhodnocení jednotlivých úkolů a vybrání jednoho z nich, který jim připadal nejvíce zajímavý, nebo s čím se ještě nesetkali nebo jej slyšeli ho poprvé. Hodnocení žáků bylo velmi pozitivní. Spoustu z nich psalo, že jsme probírali věci, které jsou docela zajímavé a vhodné pro život. Líbilo se jim uvedení praktických příkladů, které jim jsou velmi známé, tudíž ač to bylo poměrně nové učivo, nepřipadalo jim tak těžké. Také jsem ve spoustě zpětných vazeb našla kladné hodnocení vybraných grafů a žáci děkovali za zopakování. Nejvíce oblíbený byl právě poslední úkol, který zahrnoval problematiku špatně vyjádřených grafů. Celkově hodnotím vypracovávání pracovních listů pozitivně a přínosně pro obě strany.

Závěr

Bakalářská práce byla zaměřená na popis současného učiva statistiky v RVP, následně popis ŠVP vybrané školy. Také na analýzu učebnic, se kterými škola pracuje. A následná příprava a realizace interaktivních hodin zaměřených na výuku pravděpodobnosti a statistiky.

Teoretická část bakalářské práce měla za cíl objasnit současný stav RVP pouze z pohledu výuky statistiky či pravděpodobnosti. Také na vybrané základní škole popsat ŠVP opět z pohledu statistiky, pravděpodobnosti, nebo pouhých prvků těchto témat. Analyzovat sadu učebnic matematiky pro druhý stupeň. Následně seznámit se základními pojmy pravděpodobnosti a statistiky, které jsou využity v pracovních listech praktické části.

Na teoretickou část navazuje praktická část, kde jsem vytvořila pracovní list na výuku statistiky. Cílem praktické části byla snaha o přípravu a následnou realizaci interaktivní hodiny s výukou statistiky. Pracovní listy měly žákům představit statistiku také z jiného pohledu. Ukázat statistiku a čtení statistických závěrů v praxi. Naučit žáky, pokud to ještě nevědí, používat kritické myšlení v běžném životě. V pracovních listech byly použity na první pohled absurdní příklady nebo příklady z blízkého okolí žáků, pro úplné pochopení dané problematiky.

Žáci hodnotili pracovní listy kladně, což mě velmi potěšilo, protože si myslím, že dokázat správně vyhodnotit statistický výzkum na základě zveřejněného grafu nebo tabulky je více než vhodné. Stejně tak jako rozpoznat správně vytvořený graf, nebo znát pravidla pro tvoření grafů.

Pro mě byla práce velkým přínosem, a doufám, že i stejným přínosem byla pro žáky nebo učitele, kteří v hodině byli. Hodiny, kde jsme společně se žáky vypracovávali pracovní listy, byly příjemné a dobře se nám pracovalo. Žáci měli celkem přehled o grafech z teoretického hlediska, ale někteří si v tom nebyli příliš jisti, nebo nechtěli být aktivní. Myslím, že by nebylo vůbec na škodu nechat občas žáky mluvit více než vyučující, aby se naučili vytvořit si vlastní názor a následně umět používat vlastní argumenty pro obhajobu svého názoru. Za tu chvíli, kterou jsem se žáky strávila, jsem si všimla, že spousta z nich dokáže být rychlá v odpovědi, kterou si ale dopředu nerozmyslí, a potom si nedokáže stát za vlastním názorem.

Seznam použitých zkratek

RVP – Rámcový vzdělávací program

RVP ZV – Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání

ŠVP – Školní vzdělávací program

Seznam použité literatury a internetových zdrojů

1. CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4. upr. Vyd. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6147-7.

2. GRECMANOVÁ, H., URBANOVSKÁ, E., NOVOTNÝ, P. Podporujeme aktivní myšlení a samostatné učení žáků. Olomouc: Hanex, 2000.

3. HRON, Karel a Pavla KUNDEROVÁ. *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky*. 2. dopl. Vydání. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4774-2.

4. Kouření marihuany poškozuje paměť. *National geographic česko* [online]. 2013 [cit. 2019-06-12]. Dostupné z: https://www.national-geographic.cz/clanky/koureni-marihuany-poskozuje-pamet-tvrdi-nova-studie.html

5. KRÁLÍK, Oldřich. *Základy statistiky pro pedagogy*. Brno: CERM, 2000. ITEM. ISBN 80-7204-152-5.

6. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 62 (2017), č. 4 [cit: 2019-05-23] dostupné z: http://www.cs.cas.cz/hanka/POKROKY/4_17/dvorak.pdf?fbclid=IwAR02Hcd9x93_eiJtnwybG_2bEyegb1tS7qG-GMjn3SsnlAs4ahBWIjhksuc,

7. POLÁK, Josef. Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně. Plzeň: Fraus, 2016. ISBN 978-80-7489-326-1.

8. ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, c1999. ISBN isbn80-85607-92-1.

9. ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, c2000. ISBN isbn80-7289-024-7.

10. ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 7. ročník*. Ilustroval Jiří RŮŽIČKA. Brno: Nová škola, c1998. ISBN isbn80-85607-74-3.

11. ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: [učebnice pro základní školy]: [učebnice zpracovaná podle učebních dokumentů vzdělávacího programu Základní škola* ... Brno: Nová škola, c1997. ISBN isbn80-85607-54-9.

12. Rámcový vzdělávací program. *Národní ústav pro vzdělávání* [online]. [cit. 2019-05-10]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp

13. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. *Národní ústav pro vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2013. [cit. 2019-05-12]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/43792/

14. Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání. *Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání Základní školy Dr. Hrubého 2, Šternberk, příspěvkové organizace* [online]. 2018 [cit. 2019-05-20]. Dostupné z: http://www.zshrubeho.cz/dokumenty.asp

15. *Věříte grafům? Podívejte se, jak jednoduché triky používají manipulátoři* [online]. 2015. [cit. 2019-06-6]. Dostupné z: https://www.idnes.cz/technet/veda/manipulace-grafy-statistika.A151023_164547_veda_pka

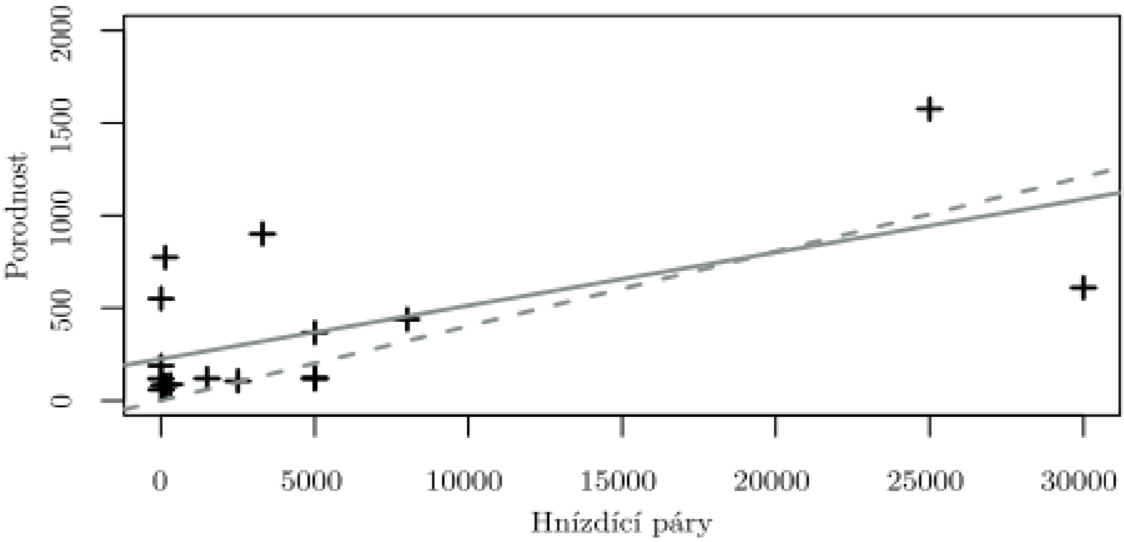
Seznam tabulek a grafů

Seznam příloh

Příloha 1 - Pracovní list

Že by opravdu čápi nosili děti?

>Statistikové zjistili, že existuje kladná korelace mezi výskytem čápů a počtem narozených dětí.<



1) Co si můžu myslet, že plyne z grafu?

2) Můžu tomu věřit?

3) Co je skutečná pravda?

Život je jen náhoda. Jednou jsi dole, jednou nahoře.

Hoď padesátkrát mincí a zakresli, co ti padne.

Pokud padne orel, použij barvičku a vykresli kolečko.
Pokud panna, nech kolečko nevykreslené.

O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O

Jaká je pravděpodobnost, že ti padne orel?

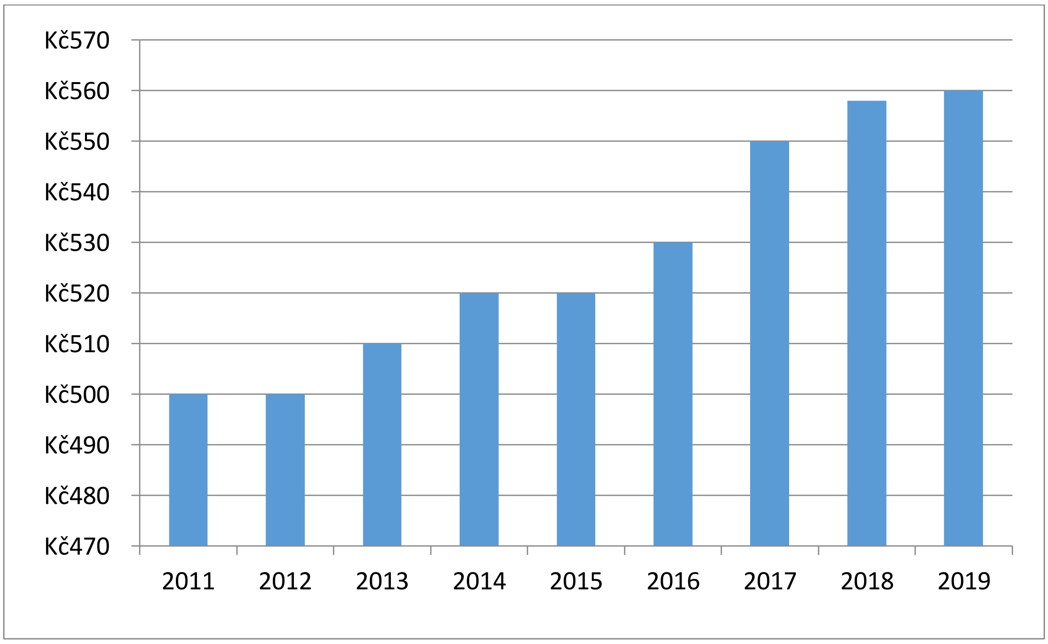
Padá ti panna častěji než orel? Nebo naopak?

Čím to je?

Když vám ukážu graf, budete vidět to, co já chci, abyste viděli?

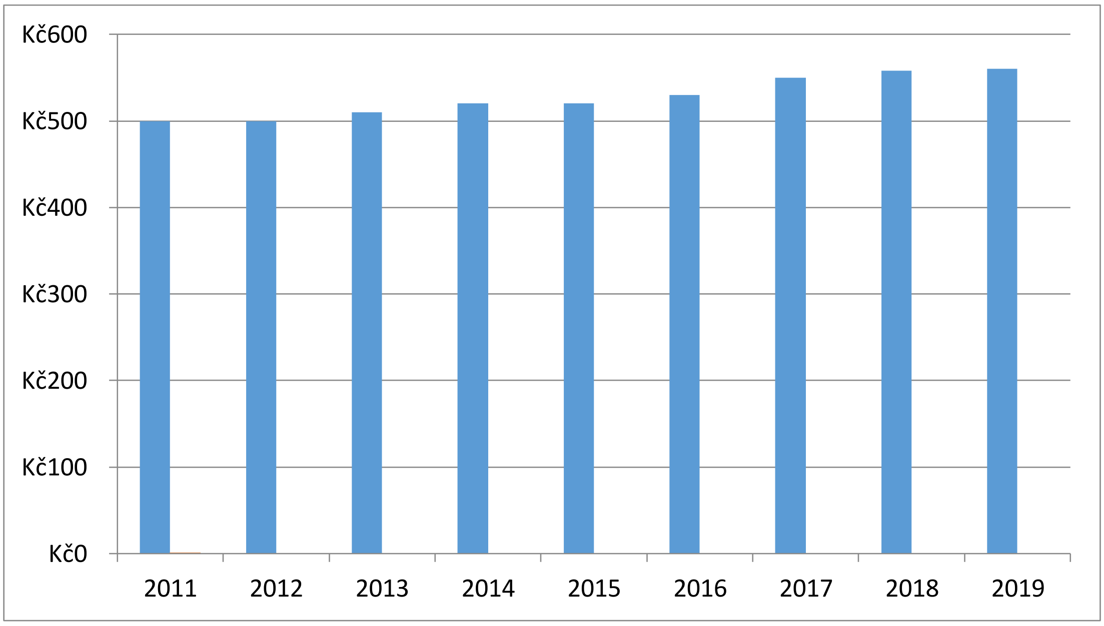
Prohlédni si graf a popiš ho.

Navrhni situaci, ke které se graf hodí.*(Co může mít finanční hodnotu, která stoupá?)*



Myslíš, že je to správně vytvořený graf ??

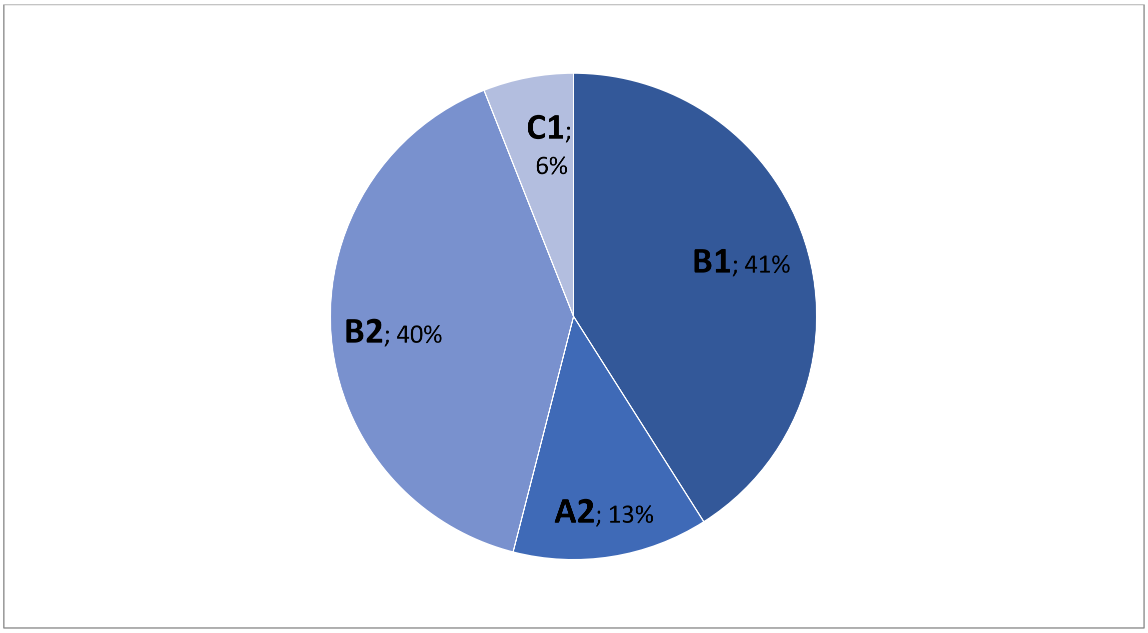
Zde je správně zakreslený graf



V čem je tento graf jiný?

Jak vypadá koláčový graf

Ptala jsem se svých spolužáků na jejich úroveň angličtiny. Výsledky jsem zaznačila do grafu.



- **Angličtina základy -**(stupně A1/A2)
- **Samostatný uživatel angličtiny -**(B1,B2)
- **Znalost angličtiny expert -**(C1,C2)

Pokuste se zhodnotit úroveň angličtiny mých spolužáků.