Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Eulerovo číslo

Vypracoval: Bc. Lucie Rálková
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Eulerovo číslo jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 2.1.2017 ………………………….

Bc. Lucie Rálková

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Fakulta pedagogická
Akademický rok: **2015/2016**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Lucie RÁLKOVÁ**
Osobní číslo:	**P13648**
Studijní program:	**N7503 Učitelství pro základní školy**
Studijní obory:	**Učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol**
	Učitelství informatiky pro 2. stupeň základních škol
Název tématu:	**Eulerovo číslo v matematické analýze**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování:

Teoretická část: Rešeršní práce
Praktická část: Vypracovat přehlednou studii o roli Eulerova čísla v matematické analýze. Úvod práce věnovat nezbytným vymezením v historických a praktických souvislostech. V hlavní části práce se hlavně věnovat vztahu Eulerova čísla k různým tématům matematické analýzy (posloupnosti, limity, derivace, integrály, diferenciální rovnice, mocninné řady, nekonečné řady) a k jejich aplikacím (v geometrii, v biologii, v ekonomii, apod.). Dle uvážení studentky může být studie doplněna i jinými tématy, například využití Eulerova čísla v informatice.

Rozsah grafických prací: **dle dohody**

Rozsah pracovní zprávy: **30- 50 (dle dohody)**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

— **Samková: Matematické modelování v biologických disciplínách.**

— **elektronická knihovna http://dml.cz/**

— **časopis Matematika, fyzika, informatika**

— **hledání (další) vhodné literatury je součástí vypracování DP**

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Libuše Samková, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání diplomové práce: **26. dubna 2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **27. dubna 2018**

Michal Vančura

Mgr. Michal Vančura, Ph.D.
děkan

L.S.

prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 1. února 2016

Anotace

Hlavním cílem mé diplomové práce na téma „Eulerovo číslo v matematické analýze“ je vytvořit přehled eulerova čísla v matematické analýze. Diplomová práce v první části pojednává o vzniku čísla *e*, v další části současné použití v matematické analýze. Účelem vzniku této práce je nahlédnutí studentům středních či vysokých škol do problematiky eulerova čísla a pro lepší pochopení významu *e* nejen v matematice.

Klíčová slova: Euler, eulerovo číslo, e, matematická analýza, historie eulerova čísla, limita a posloupnost, matematické řady, derivace, integrály, logaritmus, finanční aplikace

Annotation

The main aim of my thesis on the topic of "Euler's number in mathematical analysis" is to create an overview of the Euler numbers in calculus. This essay in the first part deals with the rise of the number *e*, in other parts of the current use of calculus. Purpose of this work is the insight students of secondary schools and universities to problems Euler numbers and to better understand the importance of *e* not only in mathematics.

Key words: Euler, Euler's number, e, calculus, history Euler numbers, limits and succession, mathematical derivations, integrals, logarithm, financial applications

Obsah

1 Úvod

Kdysi jsem slyšela výborný vtip. *Jednou takhle vtrhne naštvaná zuřivá derivace do hospody, kam chodívají funkce. Polynomy rychle vypadnou, ostatní funkce taky dostanou strach a klidí se jí z cesty, jen e^x tam zůstane sedět. Derivace se rozčílí a zařve: "A co ty, ty se mě nebojíš?" No a e^x v klidu prohlásí: "Já jsem přece e^x, samozřejmě, že se tě nebojím." A ta derivace prohlásí: "No jo, jenomže já jsem dneska naštvaná a derivuju podle y!"*[1] Kdykoliv jsem tento vtip vyprávěla, málo kdo ho pochopil. Ptali se mě žáci, studenti ale i dospělí: Co je eulerovo číslo? K čemu se používá? Hodnota je 2,71, ale to je vše co vím. To je jako π?

Všichni vědí co je π – seznámili jsme se už na základní škole při obsahu kruhu. Ale eulerovo číslo se okrajově vyskytuje na střední škole a následně pak na vysoké. I díky této práci jsem já lépe pochopila použití čísla *e*.

Hned za π je v síni slávy transcendentních čísel („přesahují algebru“) nejznámější konstanta e. Toto číslo, jehož hodnota (na šest desetinných míst) je 2,718281, je někdy nazýváno „Eulerovým číslem“ podle matematika, který je zpopularizoval. Od svého vzniku se stalo nedocenitelným v takových oblastech, jako je výzkum vývoje populace či finanční matematika, a objevuje se všude ve statistice a teorii pravděpodobnosti. ([4]s.42)

Mnozí z nás si vzpomenou, že se jedná o základ přirozeného algoritmu. Ale proč zrovna toto číslo? Proč se v tak velké míře vyskytuje v matematice? K čemu bylo potřeba dříve, když my se s ním setkáváme především až na vysoké škole? Na všechny tyto otázky dostaneme odpověď v této práci a i na mnoho dalších. V této práci se seznámíme s příběhem čísla e tak, aby si na své přišel každý čtenář.

Eulerovo číslo v dnešní době je známo na jeden milion desetinných míst. Pro ochutnávku zde uvedu desetinný zápis eulerova čísla na 30 555 míst.

2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423

3454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265
6029760673711320070932870912744374704723069697720931014169283681902551
5108657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905987931
6368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288
6939849646510582093923982948879332036250944311730123819706841614039701
9837679320683282376464804295311802328782509819455815301756717361332069
8112509961818815930416903515988885193458072738667385894228792284998920
8680582574927961048419844436346324496848756023362482704197862320900216
0990235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707016768
3964243781405927145635490613031072085103837505101157477041718986106873
9696552126715468895703503540212340784981933432106817012100562788023519
3033224745015853904730419957777093503660416997329725088687696640355570
7162268447162560798826517871341951246652010305921236677194325278675398
5589448969709640975459185695638023637016211204774272283648961342251644
5078182442352948636372141740238893441247963574370263755294448337998016
1254922785092577825620926226483262779333865664816277251640191059004916
4499828931505660472580277863186415519565324425869829469593080191529872
1172556347546396447910145904090586298496791287406870504895858671747985
4667757573205681288459205413340539220001137863009455606881667400169842
0558040336379537645203040243225661352783695117788386387443966253224985
0654995886234281899707733276171783928034946501434558897071942586398772
7547109629537415211151368350627526023264847287039207643100595841166120
5452970302364725492966693811513732275364509888903136020572481765851180
6303644281231496550704751025446501172721155519486685080036853228183152
1960037356252794495158284188294787610852639813955990067376482922443752
8718462457803619298197139914756448826260390338144182326251509748279877
7996437308997038886778227138360577297882412561190717663946507063304527
9546618550966661856647097113444740160704626215680717481877844371436988
2185596709591025968620023537185887485696522000503117343920732113908032
9363447972735595527734907178379342163701205005451326383544000186323991
4907054797780566978533580489669062951194324730995876552368128590413832
4116072260299833053537087613893963917795745401613722361878936526053815

5841587186925538606164779834025435128439612946035291332594279490433729
9085731580290958631382683291477116396337092400316894586360606458459251
2699465572483918656420975268508230754425459937691704197778008536273094
1710163434907696423722294352366125572508814779223151974778060569672538
0171807763603462459278778465850656050780844211529697521890874019660906
6518035165017925046195013665854366327125496399085491442000145747608193
0221206602433009641270489439039717719518069908699860663658323227870937
6502260149291011517177635944602023249300280401867723910288097866605651
1832600436885088171572386698422422010249505518816948032210025154264946
3981287367765892768816359831247788652014117411091360116499507662907794
3646005851941998560162647907615321038727557126992518275687989302761761
1461625493564959037980458381823233686120162437365698467037858533052758
3333793990752166069238053369887956513728559388349989470741618155012539
7064648171946708348197214488898790676503795903669672494992545279033729
6361626589760394985767413973594410237443297093554779826296145914429364
5142861715858733974679189757121195618738578364475844842355558105002561
1492391518893099463428413936080383091662818811503715284967059741625628
2360921680751501777253874025642534708790891372917228286115159156837252
4163077225440633787593105982676094420326192428531701878177296023541306
0672136046000389661093647095141417185777014180606443636815464440053316
0877831431744408119494229755993140118886833148328027065538330046932901
1574414756313999722170380461709289457909627166226074071874997535921275
6084414737823303270330168237193648002173285734935947564334129943024850
2357322145978432826414216848787216733670106150942434569844018733128101
0794512722373788612605816566805371439612788873252737389039289050686532
4138062796025930387727697783792868409325365880733988457218746021005311
4833513238500478271693762180049047955979592905916554705057775143081751
1269898518840871856402603530558373783242292418562564425502267215598027
4012617971928047139600689163828665277009752767069777036439260224372841
8408832518487704726384403795301669054659374616193238403638931313643271
3768884102681121989127522305625675625470172508634976536728860596675274
0868627407912856576996313789753034660616669804218267724560530660773899

6242183408598820718646826232150802882863597468396543588566855037731312
9658797581050121491620765676995065971534476347032085321560367482860837
8656803073062657633469774295634643716709397193060876963495328846833613
0388294310408002968738691170666661468000151211434422560238744743252507
6938707777519329994213727721125884360871583483562696166198057252661220
6797540621062080649882918454395301529982092503005498257043390553570168
6531205264956148572492573862069174036952135337325316663454665885972866
5945113644137033139367211856955395210845840724432383558606310680696492
4851232632699514603596037297253198368423363904632136710116192821711150
2828016044880588023820319814930963695967358327420249882456849412738605
6649135252670604623445054922758115170931492187959271800194096886698683
7037302200475314338181092708030017205935530520700706072233999463990571
3115870996357773590271962850611465148375262095653467132900259943976631
1454590268589897911583709341937044115512192011716488056694593813118384
3765620627846310490346293950029458341164824114969758326011800731699437
3935069662957124102732391387417549230718624545432220395527352952402459
0380574450289224688628533654221381572213116328811205214648980518009202
4719391710555390113943316681515828843687606961102505171007392762385553
3862725535388309606716446623709226468096712540618695021431762116681400
9759528149390722260111268115310838731761732323526360583817315103459573
6538223534992935822836851007810884634349983518404451704270189381994243
4100905753762577675711180900881641833192019626234162881665213747173254
7772778348877436651882875215668571950637193656539038944936642176400312
1527870222366463635755503565576948886549500270853923617105502131147413
7441061344455441921013361729962856948991933691847294785807291560885103
9678195942983318648075608367955149663644896559294818785178403877332624
7051945050419847742014183947731202815886845707290544057510601285258056
59470304683634459265255521370080687520095934536073162261187281739280746
2309468536782310609792159936001994623799343421068781349734695924646975
2506246958616909178573976595199392993995567542714654910456860702099012
6068187049841780791739240719459963230602547079017745275131868099822847
3086076653686685551646770291133682756310722334672611370549079536583453

8637196235856312618387156774118738527722922594743373785695538456246801
0139057278710165129666367644518724656537304024436841408144887329578473
4849000301947788802046032466084287535184836495919508288832320652212810
4190448047247949291342284951970022601310430062410717971502793433263407
9959605314460532304885289729176598760166678119379323724538572096075822
7717848336161358261289622611812945592746276713779448758675365754486140
7611931125958512655759734573015333642630767985443385761715333462325270
5720053039882894990342595662329757824887350292591668258944568946559926
5845476269452878051650172067478541788798227680653665064191097343452887
8338621726156269582654478205672987756426325321594294418039943217000090
5426507630955884658951717091476074371368933194690909819045012903070995
6622662030318264936573369841955577696378762491885286568660760056602560
5445711337286840205574416030837052312242587223438854123179481388550075
6893811249353863186352870837998456926199817945233640874295911807474534
1955142035172618420084550917084568236820089773945584267921427347756087
9644279202708312150156406341341617166448069815483764491573900121217041
5478725919989438253649505147713793991472052195290793961376211072384942
9061635760459623125350606853765142311534966568371511660422079639446662
1163255157729070978473156278277598788136491951257483328793771571459091
0648416426783099497236744201758622694021594079244805412553604313179926
9673915754241929660731239376354213923061787675395871143610408940996608
9471418340698362993675362621545247298464213752891079884381306095552622
7208375186298370667872244301957937937860721072542772890717328548743743
5578196651171661833088112912024520404868220007234403502544820283425418
7884653602591506445271657700044521097735585897622655484941621714989532
3834216001140629507184904277892585527430352213968356790180764060421383
0730877446017084268827226117718084266433365178000217190344923426426629
2261456004337383868335555343453004264818473989215627086095650629340405
2649432442614456659212912256488935696550091543064261342526684725949143
1423939884543248632746184284665598533231221046625989014171210344608427
1616619001257195870793217569698544013397622096749454185407118446433946
9901626983516078489245140589409463952678073545797003070511636825194877

0118976400282764841416058720618418529718915401968825328930914966534575
3571427318482016384644832499037886069008072709327673127581966563941148
9617168329804551397295066876047409154204284299935410258291135022416907
6943166857424252250902693903481485645130306992519959043638402842926741
2573422447765584177886171737265462085498294498946787350929581652632072
2589923687684570178230380965678831122893058091405726108658848458731016
5815116753332767488701482916741970151255978257270740643180860142814902
4146780472327597684269633935773542930186739439716388611764209004068663
3988568416810038723892144831760701166845038872123643670433140911557332
8018297798873659091665961240202177855885487617616198937079438005666336
4884365089144805571039765214696027662583599051987042300179465536788567
4302859746001437854832370687011900784994049309189191816493272597740300
7487968148488234293202301212803232746039221968752834051690697419425761
4673978110715464186273369091584973185011183960482533518748438923177292
6135430249325628963713619772854566229244616444972845978677115741256703
0787188510933634448014967524061853656953207417053348678275482781541556
1966911055101472799040386897220465550833170782394808785990501947563108
9841241446728218654599715966390156419417518209359326163168883801327587
5260146050767609839262572641112013528859131784829947568247256488553335
7279772205543568126302535748216585414000805314820697137262149755576051
8904816223767904149267426000710459226953148351881374638871042735447676
2357793399397063239660496914530327388787455790593493777232014295480334
5000695256980935282887783710670585567749481373858630385762823040694005
6653405848875270053088324591821834943180498341996399814587734358631159
4057044368351528538360944295596436067609022174189688354813164399743776
4158365242234642619597390455450680695232850751868719449064767791886720
3064186307510535121498510512073138466487175475183829799901893177515506
3998101646641459210240683829460320853555405814715927322067756766921366
4081505900806952540610628536408293276621931939933861623836069111767785
4482361293268581999652392754884274354144028845364555951247355461394031
5495209739705189624015797683263945063323045219264504965173546677569929
5718989690470902730288544945416699791992948038254980285946029052763145

5803165140662291712234293758061439934849143621079935767373179489642524
8881372043557928751138585697338197608352442324046677802094839963994668
4833774706725483618848273000648319163826022110555221246733323184463005
5044818499169966220877461402161570210296033185887273332987793525701823
9386124402686833955587060775816995439846956854067117444493247951957215
9419645863736126915526457574786985964242176592896862383506370433939811
6713975447362286255068036826641355414480489977213731741191999700172939
0730335086902092251912444739327837615632181084289820770697413870705326
6117683698647741787180202729412982310888796831880854367327806879771659
1116542244538066258617117294980382488799865040615639756299369628093581
8976149101714534355665954275706419440883381684111116620075978724413708
2333917886114708228657531078536674695018462140736493917366254937783014
0743026684221503351177364718538723240404210379077502660201148149354822
2891666364078245016681534121350527857853933260611024980227309363674021
3515386431693015267460536064351732154701091440650878823636764236831187
3909374642326090216463656275539768340194829327957506243996452725786244
0037598342205080893512902312247597064410567836187087717233355546548259
8906861201410107222465904008553798235253885171623518256518482203125214
9507003783004112162121260527260599443204430562745229161288917668141606
3913123597535039032007752958739241247645185080916391145929607115634420
4347133544720981178461451077872399140606290228276664309264900592249810
2910687594345338583303911787475759770659535709796400122240921990311582
2925966791315399156143807012926078019702258966292336815431249941225946
0023399472228171056603931877226800493833148980338548909468685130789292
0642428191747958661999444111962087304980643850068526202584328420855823
3856693664984972081704613537616358401534284067411858758154651459827022
8676671855309311923340191286170613364873183197560812569460089402953094
4291195902959685639230376899763274622839007354571445964141082292859222
3933283621019282293724359028300388444570138377163205651835197010011572
2010956997890484964453434612129224964732356126321951155701565824427661
5993264631558066720531275969485380573642083849188870951760522878173394
6274764465685890093626612331115291081604152410021419593734978643166155

6732702792109593543055579732660554677963552005378304619540636971842916
1685827341222171458858708142740902481854464217748769250933287856706746
7738122675283165355924520457807054135257690325352273896384749564625594
0378924925007624386893776475310102323746733771474581625530698032499033
6764554303052745615129612145859444321507490514914539509810013887379263
7996487372839641689755513227596201183824865074698549203809769193260643
7608743209385602815642849756549307909733854185583515789409814007691892
3890630905425348838968317629041202129491671958119357912031625143440965
0313283521672802137241594734409549831613832250548670817222147513842516
6790445416617303200820330902895488808516797258495813407132180533988828
1393460498505323404725950972143314925866042485114058195797115641914588
4283300052568477687430591639049430687134311879618963747550336282093994
9343690321031976898112055595369465424704173323895394046035325396758354
3953505167202616479613477909123279952649290451511483079233693821660107
0287265193814384484453263951739411013115250275046574934306376654186612
8915264446926222884366299462732467958736383501937142786471398054038215
5134632237020715331348870831741465914924063594930209211220526103123906
8294134569678595851839349138234088427431241909915287080433280913299307
8936867127413922890033069995875921815297612482409116951587789964090352
5773459382482320530555672380950222667904396142318529919891810655544124
7720450851021007152235234279253126693010827063394232176257007632313915
9349709946933241013908779161651226804414809765618979735043151396066913
2583790337486208366954750832803187867077511775256639634792592197335779
4955549865521419339817026863998738834701025526205231231721525406257163
6771270010760912281528326508984359568975961038372157726831170734552250
1941217015413187936518185020208773269061335921820007623272695032838273
9124382819817087116810895118789674670707337786959256554271334005232670
6040004348843432902760360498027862160749469654989210474443927871934536
7017986739208038456337233119838558626380085163455971944419943446247611
2384461761573624201593507852082560060410155688989950173255433729807356
1699861101908472096600708320280569917042590103876928658336557728758684
2504926903709342620280223998618034002113207421986429173836791762328264

4464575633033655677737480864410996914182777425341701098843585318933917
5934511574023847292909015468559163792696196841000676598399744972047287
8818312002333832980305678654808714764645128242644782166442666167320960
1256479451482712567132669706736714461779564375239174292850398702258373
4069852309190464967260243411270345611114149835783901793499713790913696
7064976371272484666132799082543054492955285949327938183416078270913266
8086565592110273374670013258342871524083566152216557499843123627828710
6649401564670141943713823863454729606978693335973109537126499416282656
4637084905801515382053383265112895049385664687529211359322202656818564
1826082753879000240791589264602849089492229996616743773134777613415096
5262448332709343898412056926145108857812249139616912534202918139898683
9013357958576244351940089439551805547465540000517662402028259448288338
1188638174959428489201352009095100786494186825600927397766758564259837
8587497776669563350170748579027248701370264203283965756348010818356182
3721770822364231865915958836694873224117265044872683923284530109916775
1837683159982126323712385435731268120244517540185213266374053880290124
9728180895021553100673598184430429105288459323064725590442355960551978
8393259303395729346630551604309237856772292935372084166931345752840118
7374685469162064899116472690942898297106560680180580784360046186622356
2874591385185904416250663222249561448724413813849763797102676020845531
8241119639279410696194654264800067617276181156300636443211162248373791
0562361135883633455010228617051789044057041957785983334846331792190449
4652923021469259756566389965893747728751393377105569802455757436190501
7724662145875923744186575300649980566883769642298255011950658378431252
3213530937123524396914966231011032824357006578148767729916094115395406
3362752423712935549926713485031578238899567545287915578420483105749330
0601979582077395585228073070489509362355507698378819263571417793387502
1634439101418757671193891441627710960285941580971991342931329514592437
3636456473035037374538503489286113141638094752301745088784885645741275
0033533034161380965600431058605483557739466250332300343415878146346021
6923507921611101314894828189539102891681632870930971318413981542767881
8067628650978085718262117003140003377301581536334149093237034703637513

3545376345210503709954529420552320788174493709376770560093063536455109
1348162737820498565705560878421196403997234455645860768951556968689938
4896439195225232309703301037277227710870564912966121061494072782442033
4140574414464599682369661188784116562903551178399440709617725671649197
9016819523452380744629987766482487375331301814276391051923468508197900
1796519907050490865237442841652776611425351538665162781316090964802801
2344933724278669308948279134654439319652541548294945778757585994820991
8182452244931207776825083076828233500159704041919956050970536469647314
2448453825888112602753909548852639708652339052941829691802357120545328
2318092703564917433719320806287313035896405708737799678451747405153174
0138487808288100604638893671164047775598548126390750474729501260941999
0373721246201677030517790352952793168766305099837441859803498821239340
9198050551038215398276772913731380067153392401269545863764220650978108
5290763907972784130176455324752707378876406936642001219474570235829548
1365781809867944020220280822637957006755393575808086318932075864444206
6446916493344676981808117165686652133896861735924509208014653125297779
6613719869591645186943232424640440167238197802072839441826450218313148
3366019384891972317817154372192103946638473715630226701801343515930442
8538489418256788707212385205972638592249347636231221881137063075069182
6010968906925141714251421815349153212907772374850663548917089285076023
4351768218355008829647410655814882049239533702270536705630750317499788
1870099892510201780156010422778362836443237297799299351609258845157720
5523289697833312642767129109399310377342591059230327765266764187484244
1076564447767097790392324958416348527735171981064673837142742974468992
3204069325060628344689375430167878153206160090576934049061461766070943
8011091544326192900074520989595920115941232410227484548260540436187183
6330268992858623582145643879695210235266673372434423091577183277565800
2119282703910423919664269111553335945696857828170203254955525288754644
6607462029476611600443555160473504429212791635874847350159021552212038
8281168021413865865168464569964810015633741255098479730138656275460161
2792463597836614801638716027944054827101962907745436280926125675071817
7364174976325443677350363258000404291990696311739778787508156022736882

4967077635559869284901628768699628053790181848148810833946900016380791
0759607455046889126867928123911488800367207297308013544313253477130941
8671717860752298137353912677281259395822052428999137169068565042157505
6729991274177149279608831502358697816190894908487717722503860872618384
9479397574406649127605188781242336831254672783315131867589156683006792
1021594733685859120139536030167811041344441103090338876152048829690910
4689167671555373346622545575975202624771242796225983278405833585897671
4742057240474397202328959037261486883880031741464902038435903585279931
2387104284598160899610194569164698383771826726468526486917294841415300
4604004299585035164101899027529366867431834955447458124140190754681607
7709779205793838953781921288474099295370405469622265472788072486855080
4657104312385487335165307057078458424333555095822191286279720545546626
7099131902370311779690892786623112661337671178512943059323281605826535
6238481641921447325437310020627384668123516910163592525882568064389463
8988087273528440646220814951386227523993893873490508262547241778170258
2044129853760499827899020083498387362992498125742354568439023012261733
6658205467856711479730650770354756205674283001874730191973108811575167
7700507143201272635460191246080045160810864183553966994693694732227167
0748972850464195392966434725254724357659192969949061670189061433616907
0561482809803632434541282299682759802266940456421813286245175496521472
2162083982459457661334271056495719356443156177450082837693570099541954
1839029151033187933907614207467028867968594985439789457300768939890070
0739246974618128557646622654129132040522790712128206537750582800408971
6346716370902490677473630913690400261564643215956091085109244516245442
0141442641660181385990017417408244245378610158433361777292580611159192
0084140918881912088582076270114836717607490469809144430572622111045833
0078933169819160391715062279298628270944627591500968322634507372545136
6858172483498470080840163868209726371345205439802277866337293290829914
0106455897616974559784092114091676840202693702292317433344999869018415
1088899316512509000116371911499485202482158639621629498175309462304760
4832399379391002142532996476235163569009445086058091202459904612118623
3182786144647277955232186359165518830579306577033314985100683571356243

4188188440578002884401812903137865379486961463046772691455295369015416
7025838032477842272417994513653582260971652588356712133519546838335349
8015032693597981674632318476283063405883247312289512579442676398779467
1312104276338087269573860931463153914854879251402888502518978807602383
8995615684850391995855029256054176767663145354058496296796781349420116
0033258744314387462483138502149804016819407956872192684626172874034809
6793194996560429919028181059760326325174640501645460626676552901063986
8703668263299050577706266397868453584384057673298268163448646707439990
9175040188923192675575183540549560177329071272191345775249057715127733
5842331400835608092696229889416304728778005474379849854556287072996840
7382937218623831766524716090967192007237658894226186550487552614557855
8987730087032347264183848310403948187436162244552861632876285411759464
6049702772449079927514644579298254980225860100177243784016772316680200
4162547244179415547810554178036773553354467030326469619447560812831933
0956796855827719320312059416166939020496653521896728226719726400294933
0738471754475376193701788297638248723336181349941454169473654925484063
3793674361541081593464960431603544354737728802361047743115330785159902
9777714996102746277697596124888794486098633494228528476513102779262797
4398195761750559130099337736824051090258375934517001534052226614407723
7050890044496613295859536020556034009492820943862994618834790932894161
0988565949542131143356088102394237060871080264659132035601218759337916
3966643728283675232839168886537375133579485986010756937488964565718729
2540448508624449947816273842517229343960137212406286783636675845331904
7439547406640152608719409157439552827739043038687727282620656631293874
5987531774997379929304329437176380185628006114161956394241431225439709
9163565102848315765427037906837175764870230052388197498746636856292655
0582228877132217814404895380996810721430123946935309315240540812157054
0227441452187654190142838674426001188904172457053747075555058163283168
7247110220353727166112304857340460879272501694701067831178927095527253
2221252243616733433663847565909497282218094186840742383515678688934211
4820390582422432426464363020144178798202211624847165746829114631540756
3770222740135841109076078464780070182766336227978104546331131294044833

5701348695851652674595151876800333955224105481817678677721527982702501
1719581657760354973292372473206785369025753623397121688439087887926218
8202305529937132397194333083536231248870386416194361506529551267334207
1985022597714086381220159808943635618085970100800816225574550391013219
8197904552004961858377772104804663553380661651702359509713320363157894
5644487800945620369784973459902004606886572701865867757842758530645706
6171271949673710839506032675015324359090294915169737381108979347822976
8410011765798709818572513137226774970660925048187683551600371463868591
8913011736805218743265426063700710595364425062760458252336880552521181
5664175534306811815482678441693152844084610875882143176416498356631275
1872818294865565852420685222183075530611839332693416445941534265177865
3397980580828158806300749952897558204686612590853678738603318442905510
6897786984177356031181116775638725899115168032365470029879896289861810
1459647130791614436956469090951878857439882173058388498080952307756935
8851616027719521488998358632323127308909861560777386006984035267826785
3872159209362558178898134162474864564332110431948214212997931881046363
9954149653944150138386874838487022468182939186031959866796236348930928
3087840712400431022706137591368056518861313458307990705003607588327248
8678793240933800718641528533179435350734018911936385467300006604537837
8447246928883054697900013124895210044694903205883829492361391928430524
9167833012980192255157050378521810552961623637523647962685751660066539
3641422730630016486526138918422435017974559936167940633035221118290715
9753882183977755281298153857016870220262027467864791664403072901844549
7956399844836807851997088201407769199261674991148329821854382718946282
1653870648585886462216114103435703428788629790834188716062144300145332
7502971510467315602100004386951058377377976600346088762486164093864525
2177935289947578496255243925598620521409052346250847830487046492688313
2894705538913572907069675995562985866695597216865060520728013421043557
6277918402179762665648458026159140717347700903947516801770990012939113
7881248534255949312866653465033728846390649968460644741907524313323903
4049081952330443895590605478549546202632566768132624359250202495162756
0708090043646042149702569148855526502281032776211584228243326952862913

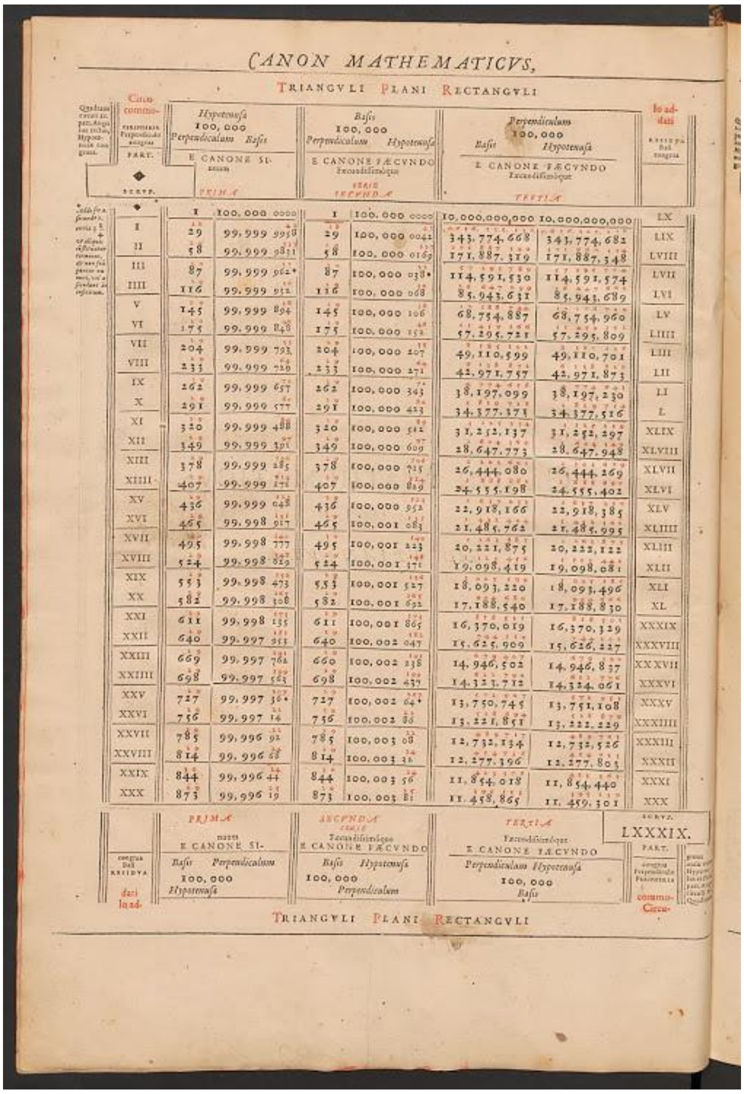
7662675481993546118143913367579700141255870143319434764035725376914388
8996830882628446164255750340014289825576203863643841379065196129177773
5418369467623298290498126171767619155429257043843223991848226174435047
0199171258214687683172646078959690569981353264435973965173473319484798
7580641379268854135525232757204573294772157068500169500469597583893735
2753862266494345643707161051152161717623759805090055323215489606281779
4302268640579555845730600598376482703339859420098582351400179507104569
0191913590623041023367980809072401963126752689163621363510326480772329
1495085915126581214382337107294914808847235528639419599345568415634457
7951727033374238129903260198160571971183950662758220321837136059718025
9408706155347131044822727168483955241059136059198124449784581108545112
3166817353483825372482534763677758171286720586514828531727356906983993
5110763432091319780314031658897379628301178409806410175016511072932907
8321774875662893106503838060933728413992267333847782033020207005171889
4170646514623836672063274264433661217401176691491923557090564480301634
2294301837655263108450172510307540942604409687066288066265900569082451
4076325991581644993614551724520570204430937223055502172222997062097492
6860976278740962644877205604307863480888570914346479324153621430319996
5695610753570417207285334250171325558818113295504095217830139465216436
5942629607685705856985071571513172629289600725876015648405560886131654
1183595862871066549628259953512719324463579104655438916515095418730607
1015034430609582302257455974944275067630926322529966338219395202927917
9732470945596910164029836830804263099104815675036235096549243025895752
7352141244514954246297225851012070780211018810672234797257933065318771
3438466713807546383471635428854957610942841898601794658721444495198801
5508040425064521914849899204000073106723699446552460209087678823000643
3772565738501096989905819129095707986669945376508040791785243822204107
0599278889267745752084287526377986730360561230710723922581504781379172
7312612348783340344738335736019732359466042737046352013271825924109060
4009763858585771695841956310957774852957983684475680312187481820283394
1887076311731615289811756429711334181497218078040465077657204457082859
4174751149261793673799992201817893994333377311469119707378610419639864

221660455889656832067013375057450388721113324367398402841886391476334916951140325834758415141703256901617849314557069041698580502177984976370147589148105432058549141006622017217197268789300121012674812702359408551626016894251114584996583155896604600915257978816703846259053832569205204257913789488275796032788775354668614418268277976512589535637614859944850497066384062661219571419110632460617741805772123816598724724322529690985336284407990300075945462815492355060864815579289619696170607152015898252997728035200026108888141765066362169059280215164291984840774461436178914151915179765378482826870187500302648676084332046585254705558824102546548060404373727718347690147206642344343742555141291785030324712634180765251878029255347740011048539969605499265080939106913376148418348845963656215266103322394174670643683405047499433398022856103130830384845712947673898562939376419144070365075446220611864991272496437998758065378502037531899726180144046677930501403015807092662132292736497186539528665675385721151336061144572228008511837578992195430634136923022931397511437024048302273576290399117944992484809150710024440784828665985794065255391410414973427802035201354199

2 Historie

Copak eulerovo číslo není po Eulerovi? Ve skutečnosti eulerovo číslo objevil někdo jiný? Dalo by se říct ano i ne. V mnohé literatuře – hlavně britské, se setkáváme třeba s označením Napierova konstanta. Jak je možné, že jedna konstanta má dva objevitele?

Rozvoj matematiky byl především v 16. a 17. století a souvisel s rozvojem astronomie. S novým pozorováním planet a komet bylo nutné provádět zdlouhavé numerické výpočty. Matematici hledali cesty, jak tyto výpočty zjednodušit. V roce 1571 vyšla kniha Canon mathematicus od Francois Viète (1540 – 1603), která uvádí vzorce rovinné a sférické trigonometrie (slovo trigonometrie je odvozeno z řeckého trigón (trojúhelník) a metrein (měřiti)) jeho český význam tedy je nauka o měření trojúhelníků a trigonometrické tabulky funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, kosekans uvedené po stupních na deset platných číslic.[2] Tyto výpočty provedl na základě kruhu vepsaného do mnohoúhelníku – 12 288 stran, do něhož byl vepsán mnohoúhelník o 6 144 stranách. Velmi zjednodušil počítání s goniometrickými výrazy tím, že objevil vzorec, který převáděl násobení kosinů na sčítání – dnes ekvivalentní s vzorcem pro součet kosinů.



Obrázek 1 Ukázka trigonometrických tabulek [3]

Vztah, který Viète sám odvodil:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

jde o upravený vzorec pro součet kosinů:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

po jednoduchých úpravách vidíme, že se daný vzorce sobě rovnají, ověřit si můžeme například na wolfram alpha: *https://www.wolframalpha.com/*.

$$\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} - cosx \cdot cosy = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - (cosx + cosy)$$

Mějme například čísla a = 52 383 a b = 84 396. S využitím svého vzorce a pomocí svých tabulek postupoval Viète takto:

$$\cos\alpha = 0{,}523\,83 \implies \alpha = 58{,}410\,487\,224°$$

$$\cos\beta = 0{,}843\,92 \implies \beta = 32{,}443\,593\,209°$$

$$\alpha + \beta = 90{,}854\,080\,433°$$

$$\alpha - \beta = 25{,}966\,894\,015°$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -0{,}014\,905\,963$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 0{,}899\,047\,190$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} = 0{,}442\,070\,613\,6$$

Vyšlo ab = 4 420 706 136. Správnost Viètova výpočtu si dnes můžeme rychle vypočítat kalkulačkou. (Ježková [5], str. 5)

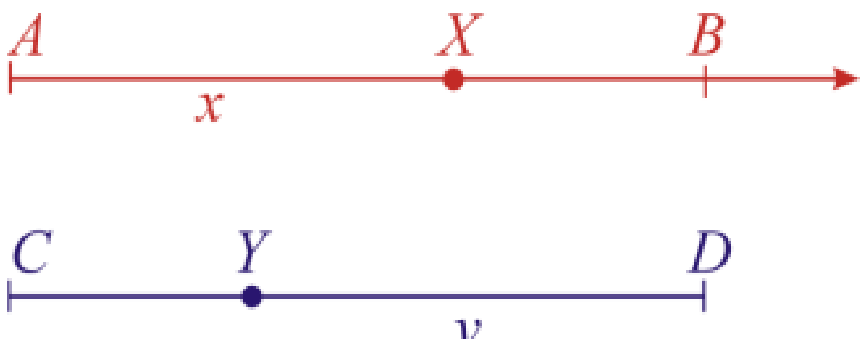
Viète prosazoval používání pozičního číselného zápisu o základu 10. [6]

Další mezník v matematice a přínos pro astronomii bylo objevení logaritmů (Napier). Skotský matematik John Napier (1550 – 1617) v roce 1614 publikoval knihu Mirifici logaritmorum canonis descriptio (Popsání podivuhodného zákona logaritmů). Podmětem pro jeho práci bylo snížení velkého množství potřebných výpočtů v astronomii. Tato kniha neobsahovala pouze pravidla pro počítání s logaritmy (umožňovaly převést násobení a dělení, na sčítání a odčítání), ale také v ní byla příloha, která obsahovala tabulku logaritmů funkce sinus s krokem po jedné minutě. Proto lze usuzovat, že hlavní motivací byl Francois Viète a jeho vzorec pro násobení kosinů

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

který právě přispěl ke vzniku logaritmů a pravidla pro počítání s nimi – převedení součinu na součet, rozdíl.

Napier zavedl logaritmy následujícím způsobem. Uvažujme dva body, z nichž jeden se pohybuje rovnoměrnou rychlostí po polopřímce AB a druhý se pohybuje po úsečce CD rovnoměrně zpomaleně tak, že v každém bodě je jeho okamžitá rychlost rovna vzdálenosti zbývající do bodu D:



Obrázek 2 Napierův způsob

Napier zvolil $|CD| = 10^7$ *a získal tabulku obsahující pro jednotlivé časové okamžiky aritmetickou posloupnost tvořenou vzdálenostmi* $x = |AX|$ *a geometrickou posloupnost tvořenou vzdálenostmi* $y = |YD|$*:*

čas n	*x = n · 1,000 000 05*	$y = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{10^7})^n$
0	*0*	*10 000 000*
1	*1,000 000 05*	*9 999 999*
2	*2, 000 000 10*	*9 999 998*
3	*3, 000 000 15*	*9 999 997*
…	…	…

Tabulka 1 Závislost vzdálenosti na čase

Vzdálenost x pak definuje Napierův logaritmus vzdálenosti y,

$$x = Nap\,log\,y\,.$$

Z dnešního pohledu odpovídá Napierův logaritmus vztahu

$$Nap\,log\,y = 10^7 \cdot log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right).$$

Napierovy tabulky vyvolaly značný zájem. V roce 1915 navštívil Napiera Henry Briggs (1561 – 1631). Během této návštěvy se Napier s Briggsem domluvili, že tabulky budou užitečnější, změní-li se tak, že logaritmus jedné bude roven nule a logaritmus deseti bude roven jedné; tak byl zaveden dekadický logaritmus. Briggs následně vypracoval rozsáhlé 14- místné tabulky logaritmů. ([7], s.2)

V roce 1683 Jacob Bernoulli (1654 – 1705) věnoval problematice složeného úročení a snažil se najít limitu výrazu $(1 + \frac{1}{n})^n$. Dokázal, že daná limita leží mezi hodnotami čísel 2 a 3. Tento odhad lze považovat za první zmínku čísla *e*.

Leonhard Euler (1707 – 1783) byl plodný matematik a dalo by se říci, že působil v téměř každém oboru matematiky své doby. První definoval logaritmus jako exponent.

$$\log_a x = y \;\; a\,pro\,něj\,platí\,a^y = x\,.$$

V roce 1748 Euler publikuje ve své práci *Introductio v Analysin infinitorum* plno myšlenek týkající se *e*. Ukázal, že

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

a přiblížil *e* na 18 desetinných míst.

e = 2,718 281 828 459 045 235.

Euler počítal s k=20, ale ve skutečnosti byl výsledek dosti přesný. (V dnešní době je eulerovo číslo vyčísleno přes milion desetinných míst.) [15]

Euler se zabýval mnoha způsoby, jak vyjádřit toto číslo. Jeden z nich je ve formě nekonečných řetězových zlomků a obráceně. Pro číslo *e* použil vyjádření pomocí nekonečné řady $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}$.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cdots}}}}}$$

Co je nekonečný řetězový zlomek si ukážeme na příkladu. Máme zlomek $\frac{14}{9}$. Můžeme jej napsat jako 1 + $\frac{5}{9}$. Což jde dále napsat jako $1 + \frac{1}{\frac{9}{5}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{4}{5}}$ a v tomto bychom mohli dále pokračovat. Dostáváme tedy:

$$\frac{14}{9} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{5}}.$$

Introductio je obvykle citován jako první místo, kde se objevil symbol e. Milně mnozí lidé předpokládají, že Euler vybral e jako „Euler“. Eulerova skromnost by mu nedovolila takovou okázalost. Se vší pravděpodobností si vybral *e* jako „exponenciální“, nebo proto, že to bylo další písmeno v abecedě, již není široce používané k jinému účelu[1]. [8]

[1] Vlastní překlad z anglického originálu

3 Současnost - Eulerovo číslo v matematické analýze

3.1 Limita a posloupnost

Eulerovo číslo lze zapsat jako limitu:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

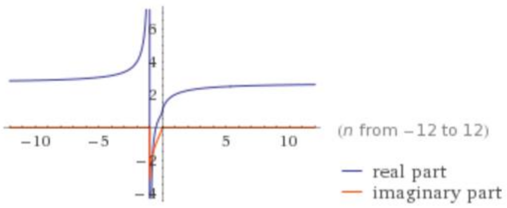
Než se pustíme do důkazu této limity, připomeneme si některé poznatky, které budeme potřebovat. Důležité je si uvědomit, že při hledání $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ hledáme limitu posloupnosti, jejíž n-tý člen má tvar $(1+\frac{1}{n})^n$. Připomeneme si pár základních znalostí o posloupnosti.

Množinu všech čísel, jež jsou členy této posloupnosti, nazveme množinu všech členů posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots, a$ na okamžik ji označíme číslem M. Číslo x je prvkem množiny právě tehdy, když existuje alespoň jedno přirozené číslo n takové, že $a_n = x$. Například množina M naší posloupnosti se skládá ze všech čísel tvaru $(1+\frac{1}{n})^n$, pár jejich členů nalezneme v tabulce:

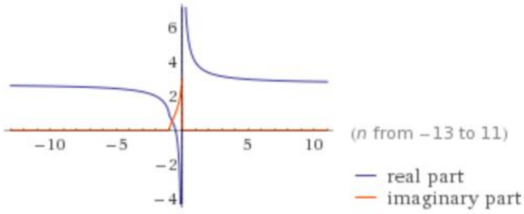
k	$\boldsymbol{n = 2^k}$	$\boldsymbol{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$	$\boldsymbol{b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$
0	1	2,00000000	4,00000000
1	2	2,25000000	3,37500000
2	4	2,44140625	3,05175781
3	8	2,56578451	2,88650757
4	16	2,63792850	2,80279902
5	32	2,67699013	2,76064607
10	1 024	2,71695573	2,71960900
15	32 768	2,71824035	2,71832330
20	1 048 576	2,71828053	2,71828312
25	33 554 432	2,71828179	2,71828186

Tabulka 2 Numerické vyčíslení daných posloupností s rostoucím k [9]

Teď se zaměříme na existenci limity $(1+\frac{1}{n})^n$ n→∞. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ je rostoucí. Dále budeme mít posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ je klesající. Vše pro *n=1,2,3,...*



Obrázek 3 graf f(n)=a_n



Obrázek 4 graf g(n) = b_n

Důkaz. Posloupnost je rostoucí právě tehdy, když pro každé n platí $a_n < a_{n+1}$. Důkaz provedeme AG-nerovností (vztah mezi geometrickým průměrem a aritmetickým průměrem – více informací například nalezneme zde: https://mks.mff.cuni.cz/library/AGNerovnostLZ/AGNerovnostLZ.pdf), kterou použijeme na součin n činitelů $(1+\frac{1}{n})^n$. Budeme mít

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

a dále

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Víme, že platí $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n} < 1 + \frac{1}{n+1}$ (platí ostrá nerovnost, protože činitelé si nejsou rovni). Umocníme obě strany nerovnosti (n+1) a dostaneme:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \ (n = 1,2,\dots).$$

Vychází nám, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost. Pro druhou část důkazu položme $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n+1}, \quad x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2$. Potom

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$$

a

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\frac{n+2}{n+1} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3} =$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\right] \leq$$

$$\leq 1 + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^k} + \cdots\right] = 1 + \frac{1}{n}$$

v hranaté závorce se jedná o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{n+1}$. Dle AG nerovnosti dostáváme $\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} < 1 + \frac{1}{n}$, po odstranění mocniny (umocnění obou stran nerovnosti výrazem (n+1) dostaneme:

$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (n = 1,2,\dots)$$

Tedy $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$je klesající posloupnost.

Teď si nadefinujeme větu, kterou budeme potřebovat dále.

Věta. Nechť je daná neklesající posloupnost $a_{1,} a_2, a_3, \dots$. Je-li tato posloupnost shora omezená, má vlastní limitu.

Zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$platí, že $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$, a proto je pro každé $n \in \mathbb{N}$ $a_n < b_n \leq b_1 = 4$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená a dokázali jsme, že je i rostoucí. Proto víme, že tato posloupnost má konečnou limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dále si všimněme, že

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \quad .$$

Tedy platí, že

$$e = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

a vzhledem k tomu, že daná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$) je rostoucí (klesající) posloupnost, platí:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (n = 1,2,\dots)$$

Nerovnost nám pomáhá určit přibližnou hodnotu čísla e, například pro n=1 dostaneme 2< e <4, pro n=2 dostaneme $\frac{9}{4} < e < \frac{27}{8}$ a podobně. ([15], s.16)

3.1.1 Příklad

Vyřešte příklad $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{n}\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

Víme, že e je definované jako limita (vysvětleno výše)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

Když se podíváme na příklad a na limitu, kterou je definované eulerovo číslo, vidíme, že jsou si dost podobný, kromě jmenovatele ve zlomku. Buď se musíme „zbavit“ čísla 2 ve jmenovateli, nebo číslo 2 přidat k exponentu, abychom mohli použít substituci (2n = m). Nám stačí si uvědomit základní matematickou operaci ze základní školy, kdy

$$a = \sqrt[x]{a^x} = (a^x)^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{x}{x}} = a\ .$$

A můžeme se pustit do počítání

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{2n})^{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2]{(1+\tfrac{1}{2n})^{2n}} =$$

teď nastane daná substituce 2n = m

$$= \lim_{m\to\infty}\sqrt[2]{(1+\frac{1}{m})^{m}} = \sqrt[2]{e}$$

3.2 Řady

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

Součet nekonečné řady je pro vyčíslení eulerova čísla výhodnější než $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Jak ukazuje tabulka, tak řada konverguje rychleji než limita. Je to hlavně pro to, že n! roste rychle ve jmenovateli každého členu. Navíc jsou všechny členy kladné, konvergence je monotónní – čím větší n, tím blíže k limitě.

n	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$
1	2,00000000	2,00000000
2	2,50000000	2,25000000
3	2,66666666	2,37037037
4	2,70833333	2,44140625
5	2,71666666	2,48832000
6	2,71805555	2,52162637
7	2,71825396	2,54649969

Součet řady je vytvořen z posloupnosti prvků $a_1,a_2,a_3,...$ a značíme ji jako (s_n), jejíž členy jsou určeny jako

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Posloupnost (s_n) označujeme jako posloupnost částečných součtů řady, a člen s_n nazýváme n-tým částečným součtem nekonečné řady. To znamená, že pro naši posloupnost by $s_5 = 2{,}7083333$.

$$s_5 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2{,}7083333.$$

Součet nekonečné řady je definován prostřednictvím limity $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Zamyslíme se. Jak by vypadala nekonečná řada e^x? Nekonečnou řadu ekvivalentní e^x také objevil Newton: ([10] s. 216)

$$e^x = +1\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ ...$$

3.2.1 Příklad

Určete součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = ln2 + ln\frac{3}{2} + \cdots$$

Řešení: Pro n-tý částečný součet řady platí

$$s_n = ln2 + ln\frac{3}{2} + \cdots + ln\frac{n+1}{n} =$$

$$= ln2 + ln3 - ln2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln\,(n+1).$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,$$

příslušná řada diverguje.

3.3 Derivace

Definice: Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci, je-li f definována v okolí bodu x_0 a existuje-li limita $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f(x_0)$.

Věta. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(e^x)' = e^x$.

Důkaz. Podle definice derivace platí:

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Základní vzorce

$$c' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(x^c)' = cx^{c-1}$$

Sčítání, násobení a dělení

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(c \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

derivace složené funkce

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Logaritmy a exponenciální funkce

$$(c^x)' = c^x lnc; \quad c > 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_c x)' = \frac{1}{x \cdot lnc}; \quad c > 0 \wedge c \neq 0$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x}.$$

3.3.1 Příklad

Vypočítejte derivaci prvního řádu

$$f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$$

ze vzorečků derivací víme, že derivace $e^x = e^x$. V dané funkci f(x) je e^{-x} a zároveň x^3, takže se jedná o složenou funkci. V prvním kroku nás čeká rozložení pomocí vzorce pro součin. $[f(x) \cdot g(x)]' = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)'$.

$$f(x)' = (x^3)' \cdot e^{-x} + x^3 \cdot (e^{-x})' =$$

levý mnohočlen derivujeme podle pravidel. Pravý mnohočlen je složená funkce a tu musíme derivovat podle pravidel o derivaci složených funkcí.

$$f(x) = h\big(g(x)\big)$$

$$f(x)' = h'\big(g(x)\big) \cdot g(x)' \ .$$

takže derivace e^{-x} bude vypadat takto:

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

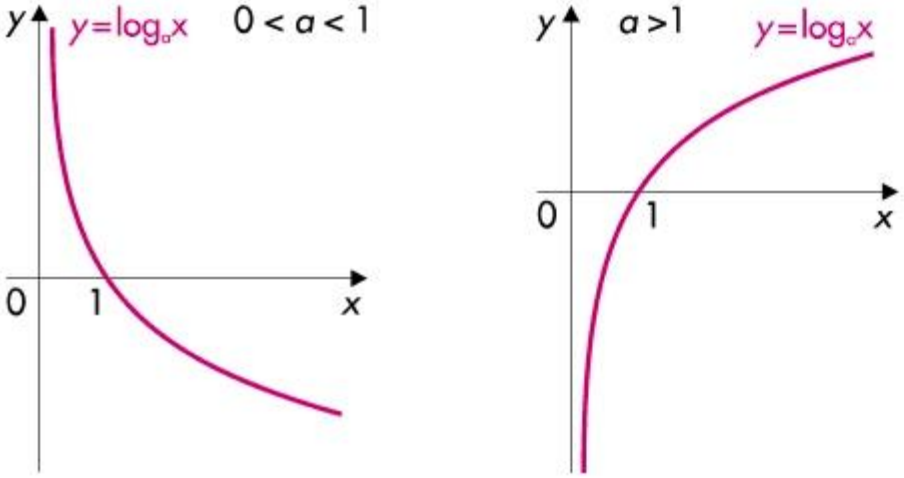
Dosadíme výsledek do našeho příkladu

$$= 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot (e^{-x})' = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x} = e^{-x}(3x^2 - x^3).$$

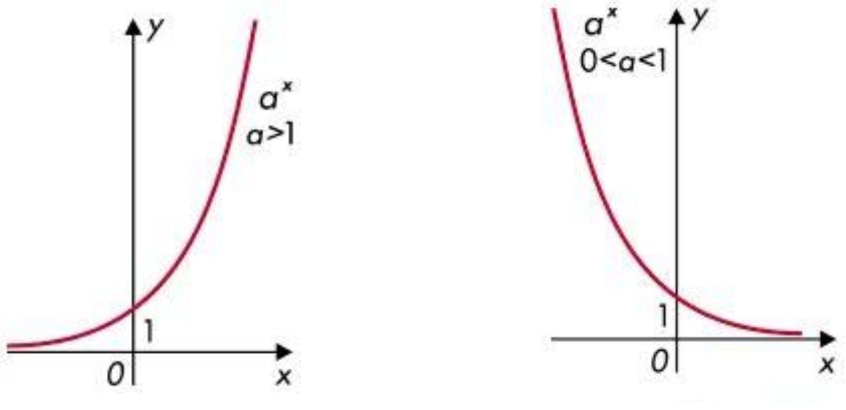
3.4 Logaritmus

Číslo e je základem exponenciální funkce a přirozených logaritmů, je transcedentní – není kořenem žádného polynomu s celočíselnými koeficienty, je iracionální.

Logaritmickou funkci o základu a∈ (0,1) ∪(1,+ ∞) nazýváme funkcí inverzní k a^x. Značíme ji f(x) = $\log_a x; x \in (0; \infty)$. Funkce $\log_a x \begin{cases} \quad a > 1 - je\ daná\ funkce\ rostoucí \\ 0 < a < 1 - je\ daná\ funkce\ klesající \end{cases}$.

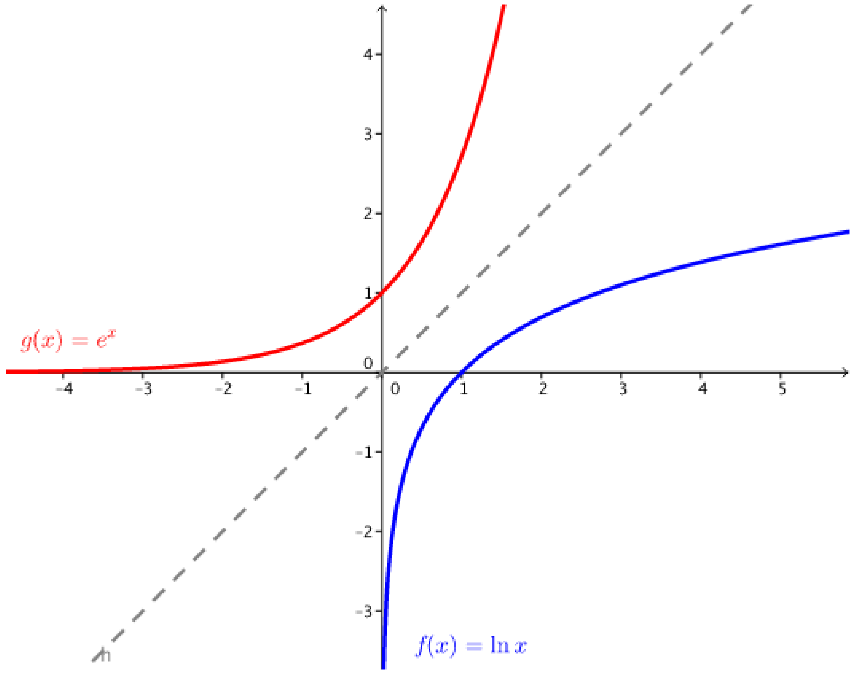


Obrázek 5 Graf logarimu v závislosti na a [12]



Obrázek 6 Graf exponenciální funkce [13]

K logaritmický funkci je inverzní funkce exponenciální (inverzní – přiřazení opačných hodnot Df(x) ↔ Hf(x)).



Graf funkce $y = e^x$ a $y = \log_e x$ – křivky jsou souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu (šedá přerušovaná čára)

Obrázek 7 Inverzní funkce [14]

Pravidla pro počítání s logaritmy:

$$y = \log_a x \;\leftrightarrow\; a^y = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a x^a = a \log_a x$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$$

Přirozený logaritmus, jehož základ je číslo *e* značíme *lnx*.

$$\log_e x = \ln x$$

3.4.1 Příklad

Vyřešte rovnici

$$\ln(2x + 6) = 0$$

Za použití pravidla

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

převedeme výraz

$$e^{\ln(2x+6)} = e^0$$

$$2x + 6 = 1$$

a už se jedná o jednoduchou rovnici, která stačí upravit a výsledek je

$$x = -\frac{5}{2}$$

3.5 Finanční aplikace

Když jsem hledala na internetu význam eulerova čísla, nejvíce jsem nalézala složené úročení.

My víme, že eulerovo číslo je iracionální – nelze zapsat ve tvaru zlomku a jeho desetinný zápis je nekonečný. Vysvětlíme si složené úročení na základě příkladu.

Do banky vložíme 100Kč na 100% úrok roční

na konci 1. roku

$$100 \ \cdot 2 = 200 \ Kč$$

na konci 2. roku

$$200 \ \cdot 2 = 400 \ Kč$$

a takhle by to šlo dál. Tomuto říkáme složené úročení. Ale co kdyby jsme místo ročního úročení měli úročení půlroční? Co kdyby jsme dostali poloviční úrok, ale za to 2x do roka. Měli bychom stejně?

za 1. pololetí

$$100 \ \cdot 1{,}5 = 150 \ Kč$$

za 2. pololetí

$$150 \ \cdot 1{,}5 = 225 \ Kč.$$

Vzoreček pro vypočítání této částky by byl

$$100\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 100 \cdot 2{,}25 = 225 \ Kč$$

A co třeba 4x za rok?

$$100\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \doteq 100 * 2{,}4414 = 240{,}14 \ Kč.$$

Teď vás napadá myšlenka, kdyby se mi částka úročila každý měsíc. Nebo ještě lépe každou sekundu, tak bych za rok měl nekonečně mnoho peněz a už bych nemusel pracovat. Odpověď bude ale pro mnohý zklamáním.

Všimněte si vzorečku. 100 Kč (označíme si ho V) je náš prvotní vklad. V závorce máme, na kolik částí se nám daný rok dělí. Takže nám vznikl vzorec

$$V \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Když budeme chtít zjistit hodnotu v nekonečnu, použijeme limitu

$$\lim_{n \to \infty} V \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = V \cdot e.$$

A tady vidíme, že i kdybychom měli úročení po sekundách, nikdy nedostaneme víc než 2,71 násobek vkladu.

3.5.1 Příklad

Na hliněné destičce z Mezopotámie, datované kolem roku 1700 př.n.l. (nyní se nachází v Louvru), najdeme následující problém: Za jak dlouho se zdvojnásobí můj vklad, když budeme každoročně skládat 20% úrokovou sazbu?

Zopakujeme si, co víme – úrok 20% ročně, vklad = *V*, za jak dlouho =*x*.

na konci 1. rok budu mít

$$V \cdot 1{,}2$$

na konci 2. roku budu mít

$$(V \cdot 1{,}2) \cdot 1{,}2 = V \cdot 1{,}2^2$$

po x letech budu mít

$$V \cdot 1{,}2^x.$$

Víme, že původní vklad se nám má zdvojnásobit

$$V \cdot 1{,}2^x = V \cdot 2.$$

Po úpravě rovnice dostáváme

$$1{,}2^x = 2$$

a původní částka se v rovnici nevyskytuje. Nyní bychom měli použít logaritmy. V Mezopotámii, ale logaritmy neznali, tak počítali přibližnou hodnotu. Všimli si, že $1{,}2^3 = 1{,}728$ a $1{,}2^4 = 2{,}0736$ a usoudili, že hodnota bude někde mezi 3 až 4 roky. V dnešní době to dokážeme říct přesně na den právě za pomoci logaritmů.

$$\log 1{,}2^x = \log 2$$

$$x = 3{,}80178$$

3 celé roky, měsíce a dny vypočítáme pomocí trojčlenky

měsíce:

$$100\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .12 měsíců$$

$$80\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. x\ měsíců$$

$$x = \frac{80}{100} \cdot 12 = 9{,}6$$

9 celých měsíců. Když budeme předpokládat, že měsíc má 30 dní

$$100\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .30 dnů$$

$$60\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. x\ dní$$

$$x = \frac{60}{100} \cdot 30 = 18$$

18 celých dnů.

4 Závěr

Cílem této práce bylo přiblížit čtenáři využití eulerova čísla v matematické analýze. V průběhu práce jsem zjistila, že práce nikdy nebude úplná. V mé práci musí mít čtenář matematický základy, aby danou problematiku pochopil. Jsem ráda, že jsem si dané téma vybrala a mohu říci, že jsem plně pochopila problematiku eulerova čísla v matematice. A na závěr jedna citace z knihy od Davida Achesona ([11],s174):

..., je vzít řadu, která reprezentuje e^t a dosadit do ní zcela bez skrupulí imaginární veličinu t = iθ, kde θ je reálné číslo a i = $\sqrt{-1}$. *Dostaneme*

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{i\theta^3}{2 \cdot 3} + \frac{i\theta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

a oddělíme-li na pravé straně reálné členy od imaginárních, vyjde

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \ \ldots\right) \ + i\left(\theta - + \frac{\theta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\theta^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right)$$

Jenomže obě nekonečné řady v závorkách jsou právě ty řady, které reprezentují sin θ a cos θ na stránce 171! Takže nakonec dostáváme

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

Tento úžasný vzorec, který objevil Euler v roce 1748, je dostatečně významným výsledkem na závěr knihy.

Za prvé, získali jsme jej propojením široké škály sofistikovaných matematických myšlenek včetně kalkulu, nekonečných řad a imaginárních čísel.

Za druhé, vzorec má obrovský význam pro praxi. Mimo jiné je jediným důvodem, proč v technické nebo fyzikální literatuře věnované oscilacím najdeme jek e tak i=$\sqrt{-1}$ *prakticky všude. Obě tyto konstanty významně zjednodušují mnohé výpočty.*

Konečně, dosadíme-li speciální hodnotu θ = π a vzpomeneme toto, že sin π=0 a cos π=1 (viz stránka 171). dostaneme nakonec

$$e^{i\theta} = -1$$

5 Literatura

[1] *http://vs-vtipy.tonikovo.cz/vtipy/derivace/*

[2] http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/404206/BranaKVedeni_011-1952-1_3.pdf)

[3] https://plus.google.com/+HeinrichCKuhn/posts/3ZWX7zVgbK9

[4] CRILLY, A. J. *Velké otázky*. Praha: Knižní klub, 2012. Universum (Knižní klub). ISBN 978-80-242-3596-7.

[5] (http://theses.cz/id/9qlvst/Jezkova.pdf) Andrea Ježková, bakalářská práce – Historie e, 2014

[6] SARTORI, E. Velikáni francouzské vědy. Přeložila E. Vergeinerová aj. Grospietsch. Praha: Agentura KRIGL, 2005. ISBN 80–86912–00–0 strana 24

[7] http://home.pf.jcu.cz/~math4all/doc/u/H_4_3_Logaritmy_a_exponencialni_funkce.pdf

[8] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html

[9] http://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf

[10] KAPLAN, Robert a Ellen KAPLAN. *Umění nekonečna: náš ztracený jazyk čísel*. Praha: Triton, 2010. ISBN 978-80-7387-245-8.

[11] ACHESON, D. J. *1089 a další parádní čísla: [matematická dobrodružství]*. Praha: Dokořán, 2006. ISBN 80-7363-025-7.

[12] https://leporelo.info/logaritmus

[13] https://leporelo.info/exponencialni-funkce

[14] http://www.matematika.cz/logaritmy

[15] http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/_M/funkce/expon_log_fce_rce/diplomka_eulerovo_cislo.pdf