UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Metóda ANP a její využití

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedúci diplomovej práce: **Doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.**
Vypracoval: **Bc. Laura Grúberová**
Študijný program: N1101 Matematika
Študijný odbor Matematika a její aplikace
Forma štúdia: prezenčná
Rok odovzdania: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKÁCIA

Autor: Bc. Laura Grúberová

Názov práce: Metóda ANP a její využití

Typ práce: Diplomová práca

Pracovisko: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedúci práce: Doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: Diplomová práca sa zaoberá metódou Analytického sieťového procesu a vysvetlením matematického modelu. Prvá kapitola obsahuje poznatky o viackriteriálnom rozhodovaní. Druhá kapitola je zameraná na vysvetlenie metódy Analytického hierarchického procesu. Tretia obsahuje podrobný popis metódy Analytického sieťového procesu a postupu riešenia rozhodovacieho problému pomocou tejto metódy. Získané informácie sú aplikované na konkrétnom príklade v závere práce.

Kľúčové slová: Viackriteriálne rozhodovanie; Kritériá; Váhy kritérií; ANP

Počet strán: 73

Počet príloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Laura Grúberová

Title: The ANP Method and its applications

Type of thesis: Master's thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.

The year of presentation: 2016

Abstract: This thesis reviews the Analytic network process method and explains the mathematical model. The first chapter reviews current knowledge about multi-criteria decision-making. The second chapter explains the Analytic hierarchy process method. The third chapter describes in detail the Analytic network process method and the problem-solving and decision-making process using this method. The gathered information are applied on the example at the end of this thesis.

Key words: Multi-Criteria Decision-Making; Criteria; Weights of criteria; ANP

Number of pages: 73

Number of appendices: 0

Language: Slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že diplomovú prácu som spracovala samostatne pod vedením pani doc. RNDr. Jany Talašovej, CSc. a všetky použité zdroje som uviedla v zozname literatúry.

V Olomouci dňa ....

podpis

Obsah

Poďakovanie

Rada by som poďakovala vedúcej diplomovej práce pani doc. RNDr. Jane Talašovej, CSc. za obetavú spoluprácu i za čas, ktorý mi venovala pri konzultáciách.

Úvod

Rozhodovanie je súčasťou nášho každodenného života. Stretávame sa so situáciami a problémami, kedy je potrebné sa správne a efektívne rozhodnúť. Väčšinou sa jedná o malé rozhodnutia, ktoré zväčša riešime intuitívne. V živote nastávajú ale aj situácie, kedy je človek postavený pred vážnu vec a jeho úlohou je múdro a správne sa rozhodnúť. Všetky rozhodnutia vykonávame na základe nejakých kritérií.

Ľudia sa už dlhé roky snažia prísť na to, akým spôsobom robiť dobré rozhodnutia. Problém rozhodovania sa týka niekoľkých protichodných hľadísk, kedy už nie je jednoduché rozhodnúť sa, ktorá alternatíva je pre nás tá najlepšia. Je potrebné zrozumiteľné a komplexné riešenie, ktoré rozčlení problém na jednoduchšiu a prehľadnejšiu štruktúru. Potrebná je teda metóda, ktorá je ľahko použiteľná, ale na druhej strane musí byť dostatočná, aby dokázala riešiť reálne problémy života. Mnohé teórie sa zaoberajú metódami rozhodovania a snažia sa definovať, čo vlastne znamená správne rozhodnutie. Matematické modelovanie rozhodovacieho procesu poskytuje spôsob, ako do chaotickej rozhodovacej situácie zaviesť pravidlá.

Viackriteriálnosť v rozhodovacích procesoch má svoje opodstatnenie. Výber z viacerých možných riešení nie je možné objektívne realizovať iba na základe jedného kritéria či názoru jedného subjektu. Problém je nutné preskúmať, analyzovať a riešiť z viacerých uhlov pohľadu. Objektívne a optimálne rozhodnutie možno dosiahnuť zakomponovaním viacerých názorov odborníkov a zainteresovaných strán do procesu rozhodovania [6].

Existuje niekoľko metód viackriteriálneho rozhodovania. Obsahom prvej kapitoly tejto diplomovej práce je súhrn základných poznatkov o viackriteriálnom rozhodovaní, popis prvkov viackriteriálneho rozhodovania a klasifikácia typov kritérií.

Jednou z najpoužívanejších metód viackriteriálneho rozhodovania je metóda Analytického hierarchického procesu (AHP), ktorej je venovaná druhá kapitola práce. AHP predstavuje metodologický nástroj na podporu rozhodovania. Metóda používa hierarchický rozhodovací model, ktorý je založený na matematických základoch. V práci sú popisované jednotlivé typy hierarchie, vysvetlené výpočty párových porovnávaní kritérií. Následne je popísaný postup rozhodovania pomocou metódy AHP .

Cieľom diplomovej práce je vysvetlenie Metódy Analytického sieťového procesu (ANP), navrhnutej profesorom Thomasom L. Saatym. V kapitole tri podrobnejšie opisujeme základné pojmy metódy ANP a vysvetľujeme typy sieti v modely. Taktiež uvádzame matematické modely spätnoväzbových sieti a v závere kapitoly spracúvame prehľad krokov metódy ANP. V štvrtej kapitole uvádzame príklad rozhodovacieho problému sieťového charakteru, na ktorý sme aplikovali získané informácie o metóde ANP.

Kapitola 1

Procesy rozhodovania a ich pojmy

1.1. Viackriteriálne rozhodovanie

Rozhodovacie situácie sú takmer vždy spojené s potrebou a nutnosťou vziať do úvahy viac ako len jedno kritérium, pričom tieto kritériá väčšinou nebývajú vo vzájomnom súlade. Modely viackriteriálneho rozhodovania riešia konflikty medzi vzájomne protikladnými kritériami. Určujú najopitimálnejšiu variantu pre konkrétneho rozhodovateľa.

Uvedieme to na všeobecnom a jednoduchom príklade, s ktorým sa za života isto stretne každý jeden z nás a to výber bytu, v našom prípade výber bytu v meste. Rozhodujeme sa na základe viacerých kritérií ako sú napríklad: cena bytu, rozloha, lokalita, poschodie, dostupnosť (možnosť zamestnania, obchody, parky, škola, škôlka, zdravotnícke zariadenia, zastávky verejnej dopravy), susedia a tak ďalej. V podstate z jednoduchého príkladu ako je výber bytu sa stavá pre bežnehého človeka zložitá takmer ťažko riešiteľná situácia, kde sa skôr prikláňame k intuíciam a skúsenostiam ako k racionálnej úvahe. Našou úlohou je aj na podobne zložité situácie, nájsť čo najlepšie riešenie a tým napomôcť a uľahčit rozhodovanie. Ako sme spomenuli v úvode, úlohou viackriteriálneho rozhodovania je nájsť najoptimálnejšiu možnosť pre rozhodovateľa. Ak si byt budú vyberať študenti, budú hľadať možnosti bývania v blízkosti školy a centra, pričom dôchodcovia alebo mladé rodiny s deťmi budú mať úplne iné subjektívne požiadavky. Aj keď všetci rozhodovatelia budú vyberať z rovnakých bytov podľa rovnakých kritérií, pričom každému kritériu určia inú dôležitosť, tak každému z nich vyjde iný byt, ale pre nich práve ten najoptimálnejší.

Rozhodovací proces, teda rozhodovanie, predstavuje riešenie rozhodovacieho problému s viacerými variantami riešenia. Riešením rozhodovacej úlohy je postup, ktorý nás dovedie k optimálnemu záveru úlohy [2],[6].

1.2. Prvky viackriteriálneho rozhodovacieho procesu

Rozhodovací proces je tvorený viacerými jeho etapami [7], ako sú:

- formulácia a stanovenie cieľov rozhodovacieho problému,
- voľba kritérií rozhodovania,
- tvorba súboru variantov, ktoré predstavujú riešenie daného problému,
- zhodnotenie dôsledkov jednotlivých variantov vzhľadom k rozhodovacím kritériám,
- konečné rozhodnutie, čiže výber varianty alebo variantov riešenia daného problému.

Rozhodovacia úloha pozostáva z viacerých prvkov, ktoré môžeme bližšie špecifikovať nasledovne [6]:

- cieľ rozhodovania,
- subjekt a objekt rozhodovania,
- kritériá (vlastnosti, atribúty),

- varianty (alternatívy, možnosti),
- stav sveta (scenáre rozhodovania).

Cieľ rozhodovania je budúci stav systému, ktorý vyplýva z nutnosti uspokojiť určité potreby a plniť nejaké funkcie. Cieľ by mal byť dosiahnutý za pomoci niektorých z variantov rozhodovania. Cieľ rozhodovania sa rozkladá do čiastočných cieľov, ktoré sa transformujú do rozhodovacích kritérií.

Subjekt rozhodovania predstavuje subjekt, ktorý rozhoduje, ciže vyberá variantu určenú k realizácií. Môže to byť jednotlivec, skupina jednotlivcov alebo celé skupiny (podnik, inštitúcia).

Objekt rozhodovania chápeme ako systém, v ktorom je formulovaný rozhodovací problém, cieľ, varianty a kritériá.

Kritériá môžu mať rôznu povahu od fyzikálnych, technických alebo technologicky merateľných vlastností cez ekonomické kritériá vyjadrované peňažnými jednotkami až po nemerateľné subjektívne kritériá.

Varianty sú rôzne prvky, ktoré navzájom porovnávame, pretože prichádzajú do úvahy ako riešenia rozhodovacieho problému.

Stav sveta možno charakterizovať ako vzájomne sa vylučujúce stavy tej časti okolia rozhodovacieho systému, ktorý je mimo kontroly rozhodujúceho sa subjektu.

1.2.1. Typy kritérií

Ako sme už spomenuli, kritéria majú rôzny charatker, povahu a jednotlivé kritéria majú väčšinou opozitný efekt. Našou úlohou je najsť kompromisnú variantu, ktorá čo najviac spĺňa všetky protichodné kritériá [6],[7].

Kvalitatívne a kvantitatívne kritériá

Kvalitatívne kritériá preverujú kvalitatívne vlastnosti jednotlivých variant. Usporiadanie variant pri kvalitatívnom kritériu sa môže u každého jedinca líšiť. Kvantitatívne kritérium naopak skúma množstvo a hodnotu. Typickým kritériom je cena.

Maximalizačné a minimalizačné kritériá

U prvého spomínaného kritéria chceme aby jeho hodnota bola čo najvyššia. Platí, čím viac, tým lepšie. Zaraďujeme sem napríklad výkon auta. Porovnáme to s minimalizačným kritériom, u ktorého vyžadujeme opak, teda čím menej, tým lepšie. Príkladom kritéria je spotreba auta.

Objektívne a subjektívne kritériá

Od subjektívneho kritéria očakávame, že hodnotiteľ zaujme vlastný názor, stanovisko k hodnotenému predmetu. Objektívne kritérium vie stanoviť požadované vlastnosti s dostatočnou presnoťou.

1.3. Základné pojmy

V našej diplomovej práci budeme používať a pracovať s pojmami matice, relácie, usporiadaná relácia. Definície v kapitole sú prevzaté z [5].

1.3.1. Matice

Definícia 1. Nech $\mathcal{T} = (T, +, \cdot)$ je číselné teleso, kde $m, n \in \mathbf{N}, a_{ij} \in T, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$

Potom schéma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} alebo \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

sa nazýva matica typu $m \times n$ nad $\mathcal{T}$.

Symbolom a_{ij} označujeme prvok matice, ktorý sa nachádza v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Ak $r = min\{m, n\}$, hovoríme že prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{rr}$ tvoria hlavnú diagonálu a prvky $a_{1,n}, a_{2n-1}, \ldots a_{rn-(r-1)}$ tvoria vedľajšiu diagonálu matice A.

Poznámka 1. Maticu A typu $m \times n$ môžeme niekedy zapísať aj v skrátenom tvare:

$$A = \|a_{ij}\|_{m \times n} = \|a_{ij}\|_{m,n} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m,n}.$$

Definícia 2. Matica typu $A_{m \times n} = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ sa nazýva:

- *nulová* ak $a_{ij} = 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,$
- *štvorcová* ak $m = n,$

- *diagonálna* ak platí, že $a_{ij} = 0$ pre všetky $i \neq j$ a súčasne $a_{ij} \neq 0$ pre $i = j$.

Definícia 3. Nech $A_{m\times n} = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ je matica, tak potom transponovanú maticu k matici A nazveme $A^T = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, ktorá vznikne z matice A vzájomnou zámenou riadkov a stĺpcov, teda platí: $a_{ij} = a_{ji}$.

Definícia 4. Matica $A_{m\times n}$ sa nazýva recipročná, ak platí $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

1.3.2. Zobrazenie a relácie

Definícia 5. Nech S je množina, $S\times S$ je karteziánsky súčin, to znamená množina všetkých dvojíc $(u, v), u \in S, v \in S$. Podmnožina $R \subseteq S \times S$ sa nazýva *relácia* na S. Ak sú dva prvky $u, v \in S$ spolu v relácií R, označujeme tento fakt uRv.

Definícia 6. Relácia R na množine S sa nazýva:

- *reflexívna,* ak platí
$$\forall u \in S : uRu,$$
- *symetrická,* ak platí
$$\forall u \in S, \forall v \in S : uRv \Longrightarrow vRu,$$
- *antisymetrická,* ak platí
$$\forall u \in S, \forall v \in S : (uRv \wedge vRu) \Longrightarrow u = v,$$
- *tranzitívna,* ak platí
$$\forall u \in S, \forall v \in S, \forall w \in S : (uRv \wedge vRw) \Longrightarrow uRw,$$
- *úplná,* ak platí
$$\forall u \in S, \forall v \in S : uRv \vee vRu.$$

Definícia 7. Relácia R na množine S sa nazýva *čiastočné usporiadanie*, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Definícia 8. Relácia R na množine S sa nazýva *usporiadanie*, ak je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna a úplná.

Kapitola 2

Analytický hierarchický proces

Analytický hierarchický proces - Analytic Hierarchy Process (ďalej len AHP) je jednou z hlavných metód viackriteriálneho rozhodovania. Metódou sa zaoberajú publikácie [4],[7],[9].
Autorom metódy AHP je americký profesor Thomas L. Saaty, ktorý v 70. rokoch 20. storočia spolu so svojími kolegami metódu rozvinul do praktického nástroja na riešenie zložitejších úloh. Metódu AHP je definovaná ako štrukturovaná metóda pre organizáciu a analýzu zložitých rozhodnutí, pre kvalifikovanie elementov súvisiacich s cieľmi a pre hodnotenie alternatívnych riešení.

Metóda AHP sa zvykne nazývať podľa svojho tvorcu ako Saatyho metóda. Je možné ju použiť ako pri individuálnom tak aj skupinovom rozhodovaní v rôznych oblastiach podnikania, priemyslu, ale aj pri riešení štátnych otázok.

Tri základné pojmy v názve tejto metódy nám dávajú informácie o charakteristike samotnej metodiky.

Analytický – znamená, že cieľ rozhodovania je popísaný pomocou kritérií.
Možnosti sa porovnávajú na základe kvantitatívnych aj kvalitatívnych kritérií, pričom tieto sú váhovo ohodnotené.

Hierarchický – odkazuje na kritériá, podmienky prostredia a možnosti (varianty). V AHP metóde sú tieto vždy usporiadané do rôznych hierarchických úrovní.

Proces – poukazuje na to, že riešenie rozhodovacieho problému je organizované ako systematická postupnosť čiastkových krokov.

AHP umožňuje pripraviť účinné rozhodnutia v zložitých situáciach, teda zjednodušiť a vo všeobecnosti zrýchliť prirodzený proces rozhodovania. Je to metóda rozkladu neštrukturovanej zložitej situácie na jednoduchšie komponenty - tzv. hierarchický systém. Na základe subjektívnych hodnotení párového porovnávania táto metóda priradí jednotlivým komponentom číselné hodnoty, ktoré vyjadrujú ich relatívnu dôležitosť. Zlúčením týchto hodnotení sa určí komponenta s najvyššou prioritou, na ktorú sa zameria konkrétna akcia s cieľom získania riešenia rozhodovacieho procesu.

2.1. Hierarchia

Pod pojmom hierarchia rozumieme systém klasifikovania a organizovania myšlienok, vecí, ľudí, pričom každý prvok systému, okrem hlavného (vrcholového), je podriadený iným prvkom.

Hierarchická štruktúra - hierarchia je zvláštny typ systému, založený na predpoklade, že identifikované prvky systému je možné zoskupiť do disjunktných podmnožín, kde prvky jednej skupiny ovplyvňujú prvky inej skupiny a samy sú ovplyvňované. Skupina, ktorú nazývame taktiež úroveň alebo zhluk, je tvorená vzájomne nezávislými prvkami [6].

Príklady hierarchie

V tejto časti uvedieme príklady modelov na typ hierarchie AHP.

Všeobecný model hierarchie je znázornený na Obrázku 1.

Obr. 1: Všeobecná hierarchia AHP

Vrstvy AHP:

- cieľ - najvyššia pozícia v hierarchickom systéme. Vyjadruje konečný výsledok, ktorý závisí od riešenia konkrétneho problému,
- kritériá - vlastnosti, na základe ktorých sa rozhodujeme,
- alternatívy - možnosti výberu alebo ponúkané možnosti.

Na Obrázku 2 je spracovaný príklad trojúrovňovej hierarchie, ktorý je najjednoduchším typom hierarchie. Prezentuje hierarchiu viackriteriálneho rozhodovacieho problému vysvetlenom na príklade Kúpa vhodného rodinného domu, cieľom je výber optimálneho rodinného domu. K výberu sme si stanovili alternatívy A1, A2, a A3. Rozhodovatelia, čiže skupina zložená z viacerých jednotlivcov, si určila päť nasledovných kritérií:

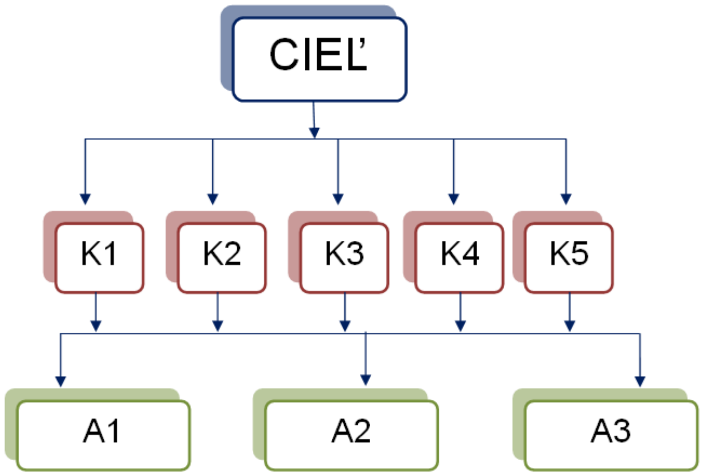
K1 - cena domu,

K2 - veľkosť domu,

K3 - lokalita,

K4 - vybavenie domu,

K5 - susedia.



Obr. 2: Hierarchia s 3 úrovňami

Ďalším možným typom hierarchie v AHP je štvorúrovňová hierarchia, znázornená na Obrázku 3. Je to typický príklad pre viackriteriálny rozhodovací problém za rizika, kde navyše uvažujeme tri stavy sveta.

Cieľ : Voľba optimálnej oblasti podnikania,

Stav sveta :

S1 - ekonomická recesia,

S2 - stagnácia,

S3 - ekonomický rast,

Kritériá :

K1 - ekonomické faktory,

K2 - technologické faktory,

K3 - politické faktory,

K4 - sociálne faktory,

Varianty :

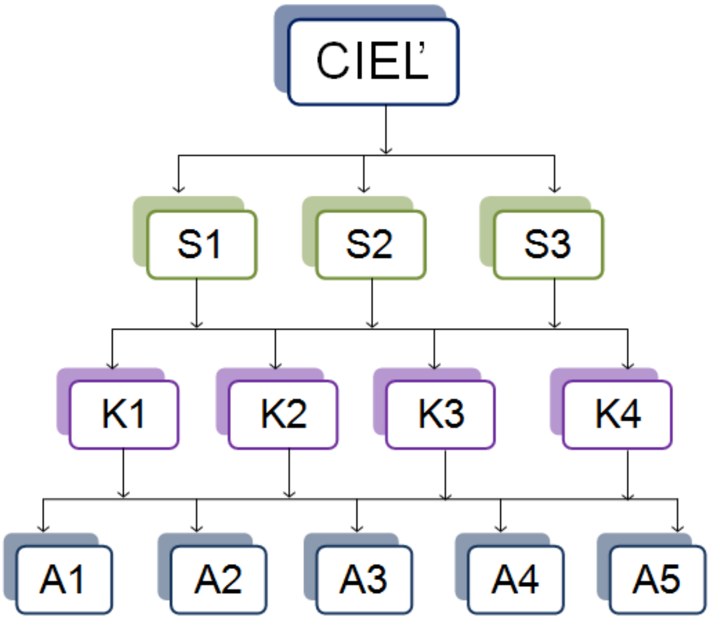
A1 - bankovníctvo,

A2 - infraštruktúra,

A3 - obchod,

A4 - životné prostredie,

A5 - informatika.



Obr. 3: Štvorúrovňová hierarchia

2.1.1. Maximálny a minimálny prvok

Definícia 9. [Maximálny a minimálny prvok]
Nech S je množina, relácia $\preceq$ je čiastočné usporiadanie na S, H je podmnožina S, tj. $H \subseteq S$. Hovoríme, že $s_{max} \in H$ je *maximálny prvok* v H ak platí:

$$x \preceq s_{max},$$

pre každé $x \in H$.
Analogicky hovoríme, že $s_{min} \in H$ je *minimálny prvok* v H, ak platí:

$$s_{min} \preceq x,$$

pre $x \in H$.

Poznámka 2. Nech S je množina čiastočne usporiadaná reláciou $\preceq$, $H \subseteq S$.
Ak existuje maximálny prvok (resp. minimálny prvok) v H, potom maximálny (resp. minimálny) prvok je jediný.

2.1.2. Hierarchia a úplná hierarchia

Definícia 10. Nech H je konečná množina čiastočne usporiadaná reláciou $\preceq$ a nech g je maximálny prvok v H. Hovoríme, že $\boldsymbol{H} = (H, \preceq)$ je *hierarchia*, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

- existuje rozklad H na množiny L_k, $k = 1, 2, \ldots, h$, tj. $H = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_h$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ pre $i \neq j$ a platí $L_1 = \{g\}$,

- ak $x \in L_k$ potom $x^- = \{y | y \rhd x\} \subseteq L_{k+1}, k = 1, 2, \ldots, h - 1$,

- ak $x \in L_k$ potom $x^+ = \{y | x \lhd y\} \subseteq L_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, h$.

$\{y|y \rhd x\}$ označuje y ako bezprostredného následovníka x.
$\{y|x \lhd y\}$ označuje y ako bezprostredného predchodcu x.
Množiny L_k sa nazývajú *hierarchické úrovne (hladiny)* **H**, $L_1 = \{g\}$ je najvyššia hierarchická úroveň **H**, L_h je najnižšia hierarchická úroveň **H** [7].

Definícia 11. [Úplna hierarchia]
Hierarchia **H** z predchádzajúcej Definície 9 sa nazýva *úplna*, ak platí:

$$\forall x \in L_k : x^+ = L_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, h.$$

V úplnej hierarchii ľubovoľný prvok vyššej hierarchickej úrovne ovplyvňuje každý prvok nižšej hierarchickej úrovne a obrátene, každý prvok nižšej hierarchickej úrovne je ovplyvňovaný všetkými prvkami vyššej hierarchickej úrovne [7].

Poznámka 3. Hierarchiu $\boldsymbol{H} = (H, \preceq)$ je možné vyjadariť a názorne zobraziť aj pomocou orientovaného grafu $\boldsymbol{G} = (V, E)$. Prvky množiny H tvoria uzly grafu $\boldsymbol{G}$, tj. $V = H$, množina hrán E grafu $\boldsymbol{G}$ je tvorená všetkými dvojicami prvkov $x, y \in H$, pre ktoré platí: $x \lhd y$.

2.1.3. Priority

Metóda priority je založená na párovom porovnávaní stupňa významnosti jednotlivých kritérií a miery toho, ako hodnotené varianty riešenia tieto kritériá spĺňajú.

Hodnotenie je založené na expertnom odhade, pri ktorom odborníci v danom odbore porovnávajú vzájomné vplyvy dvoch faktorov. Tieto vplyvy sú hodnotené na základe stupnice, ktorá je uvedená v Tabuľke 2.2, pričom každému slovnému hodnoteniu zodpovedajú číselné hodnoty $1, 3, 5, 7, 9$. Ak nie sú pre nás tieto hodnoty dostatočné, pričom slovné popisy sa až prilíš rozlišujú, pridávajú sa do stupnice aj párne hodnoty. Hodnoty $2, 4, 6, 8$ sa nazývaju medzihodnoty, ktoré použijeme, ak nie sme schopní rozhodnúť sa medzi dvoma hodnotami základnej škály. Častejšie sú používané anglické popisy hodnôt, ale v zátvorke uvedieme aj menej používané slovenské ekvivalenty. Thomas L. Saaty vo svojich článkoch [13],[14] vysvetľuje hodnoty ako kompromis medzi dvoma nepárnymi hodnotami. Slovný popis párnych hôdnot škály je nasledovný:

2 - weak or slightly importance (slabá alebo nepatrná dôležitosť),

4 - moderate plus importance (mierna dôležitosť),

6 - strong plus importance (veľká dôležitosť),

8 - very, very strong importance (veľmi, veľmi silná dôležitosť).

Porovnanie dvoch prvkov A a B urobíme tak, že si tieto prvky zapíšeme do tabuľky (Tabuľka 2.1) a zakrúžkovaním čísla zo stupnice určíme, ktorý prvok je pre nás významnejší. Označenie čísla na ľavo od 1 vyjadruje, že prvok A je významnejší než prvok B, naopak určením čísla vpravo od 1 vyjadrujeme, že prvok B je významnejší. Intenzitu preferencie určuje hodnota zo škály.

A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B

Tabulka 2.1: Určenie významnosti prvku

Intenzita dôležitosti	***Definícia***	***Vysvetlenie***
1	rovnaká dôležitosť	dva prvky sa rovnakou dôležitosťou podieľajú na splnení cieľa
3	slabá preferencia	jedno kritérium je slabo preferované pred druhým
5	silná preferencia	jedno kritérium je silne preferované pred druhým
7	veľmi silná preferencia	jedno kritérium je veľmi silne preferované pred druhým
9	extrémne silná preferencia	evidentná favorizácia jedného atribútu pred druhým
2,4,6,8	stredné hodnoty medzi dvoma susednými hodnotami	vyjadruje kompromis medzi dvoma intenzitami

Tabulka 2.2: Základná škála párového porovnávania pri metóde AHP (Saaty, Joyce, 1981)

V metóde AHP sú preferované dva druhy porovnávania - relatívne a absolútne. Pri relatívnom porovnávaní vychádzame z predpokladu, že alterntívy sú porovnávané párovo, pomocou stupňa významnosti jednotlivých kritérií a miery toho, ako hodnotené varianty riešenia tieto kritériá spĺňajú [4].

Údaje uvedené v tabuľke boli overované v aplikáciách u skupiny ľudí, a taktiež boli porovnávané aj s inými stupnicami. Slovné popisy Saaty zadefinoval na základe tzv. sémantického diferenciálu. Je to metóda merania intenzity sociologických a psychologických postojov človeka k danej situácii, definovanej na bodovacej škále, ktorá predstavuje intenzitu postoja daného subjektu k situácii.

Hodnoty uvádzané ako intenzity dôležitosti vyjadrujú, koľkokrát väčší z prvkov prevláda nad menším prvkom vo vzťahu k spoločnému kritériu. Menší prvok má prevrátenú - inverznú hodnotu vo vzťahu k väčšiemu.

Definícia 12. [Normalizácia]
Nech $f_i \in L_{k-1}$ je maximalizačné kardinálne kritérium na množine L_k, ďalej nech platí: $f_i : L_k \to \mathbb{R}$. Predpokladáme že kritérium f_i nadobúda len kladné hodnoty, to znamená $f_i(x_j) > 0$ pre všetky $x_j \in L_k$. Pre každé $f_i \in L_{k-1}$ zavedieme namiesto pôvodného kritéria f_i *normalizované kritérium* G_i:

$$G_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_i(x_j)}, \quad x \in L_k.$$

Normalizované kritériá transformujú hodnoty pôvodných kritérií na jednotkovú škálu $[0, 1]$. Pre G_i platí základný vzťah normalizácie:

$$\sum_{j=1}^{n} G_i(x_j) = 1.$$

Podkapitola spracovaná na základe literatúry [6],[9],[11].

2.1.4. Syntéza

V úvode budeme uvažovať hierarchiu $\boldsymbol{H} = (H, \preceq)$, ktorá bude obsahovať minimálne tri úrovne, teda $h \geq 3$. Zvoľme úroveň k a vyšetrujme po sebe nasledujúce hierarchické úrovne L_k, L_{k+1} pričom ich prvky označíme nasledovne:

$$L_k = \{x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{m_k}^k\},$$

$$L_{k+1} = \{x_1^{k+1}, x_3^{k+1}, \ldots, x_{m_{k+1}}^{k+1}\}.$$

Z uvedeného vyplýva, že hierarchická úroveň L_k má m_k prvkov a úroveň L_{k+1} má m_{k+1} prvkov [7].

Definícia 13. Ku každému prvku $x \in L_k$, ktoré je kritériom pre párové porovnávanie prvkov z L_{k+1} dostaneme recipročnú maticu párových porovnávaní $\boldsymbol{S}_x$ na prvkoch z $\bar{x} \subseteq L_{k+1}$. K tejto matici prislúcha maximálne vlastné číslo a k nemu vlastný vektor (vektor váh):

$$\mathbf{v^k}(x) = (v_1^k(x), v_2^k(x), \ldots, v_{m_{k+1}}^k(x)).$$

Prvkom z L_{k+1}, ktoré nepatria do $\bar{x}$ sme priradili váhu 0. Tento vektor nazývame *vektor priorít k-tej hierarchickej úrovne* vzhľadom k prvku $x \in L_k$

Definícia 14. *Matica priorít k-tej hierarchickej úrovne* $\mathbf{B}_k$ hierarchie $\boldsymbol{H} = (H, \preceq)$, ktorá má minimálne tri úrovne, teda $h \geq 3$, $k \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$ nazveme maticou typu $m_{k+1} \times m_k$, ktorej prvky sú tvorené váhami $v^k(x)$ pre všetky $x \in L_k$ takto:

$$\mathbf{B_k} = \begin{bmatrix} v_1^k(x_1^k) & v_1^k(x_2^k) & \ldots & v_1^k(x_{m_k}^k) \\ v_2^k(x_1^k) & v_2^k(x_2^k) & \ldots & v_2^k(x_{m_k}^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m_{k+1}}^k(x_1^k) & v_{m_{k+1}}^k(x_2^k) & \ldots & v_{m_{k+1}}^k(x_{m_k}^k) \end{bmatrix}.$$

Definícia 15. Nech platí: $1 \leq p < q \leq h-1$. *Vektorom priorít q-tej hierarchickej úrovne* vzhľadom k prvku $x \in L_p$ nazveme vektor $\mathbf{v}_p^q(x)$, ktorý je definovaný nasledovne:

$$\mathbf{v}_p^q(x) = \mathbf{B}_q \mathbf{B}_{q-1} \ldots \mathbf{B}_{p+1} \mathbf{v}^p(x).$$

Poznámka 4. Najčastejšia situácia je, keď $p = 1$ a $q = h-1$. Najvyššia hierarchická úroveň obsahuje jeden prvok g, inak označený aj ako *globálny cieľ*, teda $L_1 = \{g\}$ a naopak na najnižšej hierarchickej úrovni L_h sa nachádzajú obvykle základné prvky hierarchie - hodnotené varianty. Vektor priorít je potom syntetickým vektorom váh hodnotených variant vzhľadom ku globálnemu cieľu:

$$\mathbf{v}_1^{h-1}(g) = \mathbf{B}_{h-1} \mathbf{B}_{h-2} \ldots \mathbf{B}_2 \mathbf{v}^1(g).$$

Informácie čerpané z [6],[7],[8].

2.1.5. Matice párových porovnávaní

Párové porovnávanie predstavuje relatívne hodonotenie prvku z $k - tej$ hierarchickej úrovne L_k vzhľadom k danému prvku f z nadradenej úrovne L_{k-1}. Základom pre konštrukciu váh uvažovaných prvkov $x_i \in L_k$ vzhľadom ku kritériu $f \in L_{k-1}$ je matica párových porovnávaní [6].

Definícia 16. Matica párových porovnávaní $S_f = \{s_{ij}\}$ je matica, kde jej prvky s_{ij} vyjadrujú pomer medzi významnosťou prvku x_i a významnosťou prvku x_j vzhľadom k prvku $f \in L_{k-1}$, tj. pomer váh v_i a v_j.

$$s_{ij} = \frac{v_i}{v_j}, \qquad x_i, x_j \in L_{k-1}, i, j = 1, 2, \dots m,$$

kde m je počet prvkov v L_k.

Váhy v_i nie sú vopred známe a našim cieľom je stanoviť tieto váhy. Na ich určenie sa využíva matica s prvkami s_{ij}, ktoré sú prvkami základnej škály. Ak x_i je významnejšie ako x_j, potom

$$s_{ij} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

V opačnom prípade platí:

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}}.$$

Predchádzajúci vzťah nám vyjadruje, že ak prvok x_j je s_{ji}-krát významnejší ako prvok x_i, potom významnosť prvku x_i predstavuje $1/s_{ji}$ -tou časť významnosti prvku x_j. Ak pre prvky matice $\mathbf{S}_f = \{s_{ij}\}$ platí tento vzťah, tak matica S_f sa nazýva recipročná.

Definícia 17. Matica $\mathbf{S}_f = \{s_{ij}\}$ je konzistentná práve vtedy, keď pre jej maximálne vlastné číslo platí $\lambda_{max} = m$.

Zostavanie váh uvažovaných kritérií metódou AHP záleží od výpočtu vlastného vektora zodpovedajúceho maximálnemu vlastnému číslu λ_{max} matice párových porovnávaní $\mathbf{S}_f$. Riešením sústavy m rovníc o m neznámych $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ vo vektorovom tvare

$$(\mathbf{S}_f - \lambda_{max}\boldsymbol{I})\mathbf{w} = \mathbf{0},$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matica.

Pomocou vlastného vektoru zo Saatyho matice je možné normalizovaním vypočítať vektory priorít jednotlivých prvkov vzhľadom k nadradenému prvku [1]. Saatyho metóda ponúka niekoľko metód odhadu vektoru priorít, nakoľko s vyšším rádom matice rastie aj náročnosť hľadania vlastných čísel matice. Najpresnejšie výsledky udáva normalizovaný geometrický priemer riadkov. Na výpočet váh používame nasledovné označenie [2]:

$$\mathbf{s}_i = \prod_{j=1}^{k} s_{ij}, \quad \mathbf{r}_i = \sqrt[k]{s_i}, \quad \mathbf{w}_i = \frac{r_i}{\sum_{i=1}^{k} r_i}.$$

Vektory $\mathbf{s}$ a $\mathbf{r}$ sú medzikroky pri výpočte geometrického priemeru. Vektor $\mathbf{w}$ je normalizovaným vektorom váh, určujúcim vplyv jednotlivých kritérií vzhľadom k hlavnému cieľu.

Konzistencie párových porovnávaní

Z matice párových porovnávaní určujeme hodnotenie jednotlivých prvkov. Index konzistencie *CI* (consistency index) nám overuje, či matica párových porovnávaní je zostavená správne, tj. či rozhodovateľ pri určovaní preferencií medzi prvkami veľmi neodporoval vo svojích tvrdeniach [1].

[1]Saaty T.L.: *The Analytic Hierarchy Process*
[2]Fiala, P.: *Modely a metody rozhodování*

$\boldsymbol{m}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{RI}$	0	0	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49

Tabulka 2.3: Hodonoty Indexu RI (Saaty 2008)

Definícia 18. Nech $\mathbf{S}$ je kladná štvorcová matica typu $m \times m$ a λ_{max} je jej maximálne vlastné číslo. Indexom konzistencie matice $\mathbf{S}$ rozumieme číslo CI definované vzťahom:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - m}{m - 1},$$

kde $\lambda_{max} = \max\limits_{i,\ldots,m}\{\lambda_i\}$.

Index konzistencie CI je vždy nezáporný, pričom čím menšie hodnoty nadobúda, tým väčšia je konzistencia medzi jednotlivými párovými porovnávaniami. Hodnotu CI, pri ktorej by bola matica $\mathbf{S}$ považovaná za konzistentnú alebo nekonzistentú, sa všeobecne nedá určiť. Z toho dôvodu sa používa pomer konzistencie CR (consistency ratio):

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

kde RI je náhodný index (random index), ktorý je určený ako priemerná hodnota indexu konzistencie CI matíc náhodne generovaných z prvkov hodnotiacej škály. Hodnoty indexu RI sú uvedené v Tabuľke 2.3.

Maticu považujeme za konzistentnú ak $CR \leq 0.1$

2.2. Etapy rozhodovania pomocou metódy AHP

Analytický hierarchický proces ponúka metodiku, ktorá umožňuje modelovať komplexné rozhodovacie situácie a určovať ich vhodné riešenie. Tento postup bol vyvinutý za účelom napomáhania pri zdolávaní zložitých rozhodovacívh problémov AHP. Taktiež umožňuje riešiť tieto problémy práve aj pomocu jednoduchých výpočetných metód. Na základe [6] môžeme celý proces opísať nasledujúcimi krokmi:

1. Definovanie a analýza rozhodovacieho problému:
   - definovanie problému a stanovenie cieľa rozhodovania;
   - zostavanie súboru kritérií;
   - výber alternatív, medzi ktorými hľadáme práve takú, ktorá najlepšie rieši náš problém. Pre každú nami volenú variantu musíme vedieť vyjadriť jej dôsledky vzhľadom k ostatným kritériám;
   - určenie dôsledkov variant vzhľadom ku každému kritériu;
   - nastavenie aspiračnej úrovne pre jednotlivé kritériá. Pre každé kritérium si môžeme definovať minimálnu alebo maximálnu úroveň, ktorá musí spĺňať dôsledky variant. Ak nejaká varianta nedosahuje aspiračnú hodnotu, môžeme ju zo zoznamu vyradiť.
2. Štrukturovanie hierarchického modelu:
   V tejto etape rozhodovania vytvoríme hierarchickú štruktúru, kde na prvej úrovni budeme mať cieľ rozhodovania, na medziúrovniach budeme bližšie konkretizovať náš cieľ rozčlenením na jednotlivé kritériá a subkritériá a na poslednej úrovni budeme mať varianty, z ktorých vyberieme variantu, ktorá najviac odpovedá nášmu cieľu.
3. Čiastkové vyhodnotenie a párové porovnávanie:
   V danej skupine prvkov na rovnakej hierarchickej úrovni sú porovnávané

páry prvkov, ktoré berieme do úvahy a to vzhľadom k nadradenému prvky z vyššej hierarchickej úrovne. Párové porovnávanie a určovanie priorít (podkapitola 2.1.3) sa uskutočnuje pomocou Základnej škály párového porovnávania (Tabuľka 2.1 a 2.2).

4. Syntéza čiastkových hodnotení a výber najlepšej varianty:
   Čiastkové hodnotenia sú syntetizované do výsledného celkového hodnotenia na základe modelu pomocou váh. Matematický postup syntézy je popísaný v podkapitole 2.1.4. Princíp syntézy spočíva v postupnom vypočítavaní priorít postupne zhora nadol, od priorít celkového cieľa rozhodovania až k prioritám jednotlivých alternatív. Za najlepšie riešenie rozhodovacieho problému sa považuje alternatíva s najvyššou prioritou. Matica párových porovnávaní a výpočty váh sú uvedené v 2.1.5.

5. Analýza citlivosti modelu:
   Môžeme aplikovať pridaním alebo odobratím nejakej varianty v modely a pozorovať, či sa zmení preferenčné poradie jednotlivých variant (2.1.5).

6. Dokumentácia rozhodnutia:
   Dokumentácia môže poslúžiť ako zdôvodnenie rozhodnutí iným osobám alebo ako kontrola pôvodného rozhodnutia v budúcnosti.

Kapitola 3

Analytický sieťový proces

Analytický sieťový proces (Analytic Network Process) je jedným z ďalších z modelov viackriteriálneho rozhodovania. Metóda analyticko sieťového procesu (ďalej len ANP) bola odvodená v roku 1996 americkým profesorom z University of Pittsburgh Thomasom L. Saatym ako obecnejšia forma metódy AHP.
Z názvu metódy je zrejmé, že je založená na štruktúre sieťovania rozhodovacieho procesu. V niektorých literatúrach sa metóda ANP označuje taktiež ako rozšírená metóda AHP so systémom spätných väzieb.

Vďaka metóde ANP sme schopní riešiť náročnejšie a zložitejšie úlohy, ktoré nedokážeme riešiť metódou AHP, nakoľko daný rozhodovací proces vykonáva hĺbkovú a detailnú analýzu problému.

Metóda ANP rozkladá rozhodovací problém do siete čiastočných problémov, ktoré následne sú vyhodnocované a analyzované. Viacero rozhodovacích problémov nemôže mať hierarchickú štruktúru, pretože zahŕňajú interakciu a vzájomnú závislosť prvkov z vyššej úrovne v hierarchii s prvkami, ktoré sa nachádzajú v nižších úrovniach ale aj s prvkami z rovnakej úrovne. Z tohto dôvodu metóda ANP reprezentuje rozhodovací problém vo forme siete a nie vo forme hierarchie.

V mnohých článkoch, ktoré sa zaoberajú aplikáciami metód viackriteriálneho rozhodovania, sa vzájomné interakcie medzi jednotlivými štruktúrami zanedbávajú a častejšie je používaná metóda AHP, aj keď neumožňuje tak presné modelovanie ako metóda ANP [6].

Pri ANP systéme nebudeme používať pojem hierarchické úrovne, ale budeme hovoriť o zhlukoch alebo klastrách. V tejto časti našej diplomovej práce rozoberieme trojúrovňovú hierarchiu viackriteriálneho rozhodovacieho systému: Cieľ - Kritériá - Varianty. Zobecnením takejto základnej hierarchie dostaneme spätnoväzbový systém, kde jednotlivé kritériá môžu ovplyvňovať iné kritériá, prípadne jednotlivé varianty môžu spätne ovplyvňovať kritériá.

Štruktúra ANP:

- cieľ analýzy - cieľ rozhodnutí,
- skupina kritérií - skupina kritérií vyhodnocovania, ktoré zaisťuje rozhodovateľ,
- skupina sub-kritérií,
- skupina alternatív - posúdenie variant.

Spracované na základe [7],[9],[10].

3.1. Základné pojmy

3.1.1. Spätnoväzbová sieť

Definícia 19. [Spätnoväzbová sieť]
Nech N je konečná množina čiastočne usporiadaná reláciou $\prec$. Hovoríme, že $\mathbf{N} = (N, \prec)$ je *spätnoväzbová sieť*, ak je splnená nasledujúca podmienka:
Existuje rozklad N na množiny C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, tj.:

$$N = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n, \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad pre \quad i \neq j.$$

Pritom množinám $C_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in_i}\}$ hovoríme klastry a celkový počet prvkov v sieti je $n_c = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$.

Definícia 20. [Super matica spätnoväzbovej siete]
Nech $\mathbf{N} = (N, \prec)$ je spätnoväzbová sieť, supermatica $\mathbf{W}_N = \{\mathbf{W}_{ij}\}$ spätnoväzbovej siete N má nasledujúci tvar:

$$\mathbf{W}_N = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} & \dots & \mathbf{W}_{1n} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} & \dots & \mathbf{W}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W}_{n1} & \mathbf{W}_{n2} & \dots & \mathbf{W}_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pritom $\mathbf{W}_{ij}$ predstavuje bloky matice v tvare:

$$\mathbf{W}_{ij} = \begin{array}{c} \\ C_i \end{array} \begin{array}{c} C_j \\ \begin{pmatrix} w_{ij}^{11} & w_{ij}^{12} & \dots & w_{ij}^{1n_j} \\ w_{ij}^{21} & w_{ij}^{22} & \dots & w_{ij}^{2n_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{ij}^{n_i 1} & w_{ij}^{n_i 2} & \dots & w_{ij}^{n_i n_j} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Stĺpce matice $\mathbf{W}_{ij}$ predstavujú priority (dôležitosti stupňa vplyvu) prvkov $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i}$ z *í-teho* klastru vzhľadom k jednotlivým prvkom $e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jn_j}$ z *j-teho* klastru.

Napríklad stĺpec

$$\begin{bmatrix} w_{ij}^{11} \\ w_{ij}^{21} \\ \vdots \\ w_{ij}^{n1} \end{bmatrix}$$

predstavuje priority (vplyvy) prvku e_{ij} z klastru C_j na prvky $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i}$ z klastru C_i. Predpokladajme, že priority sme získali pomocou Saatyho metódy, to znamená ako normalizovaný vlastný vektor (vektor s nezápornými prvkami, pričom ich súčet je 1) matice párových porovnávaní prvkov $e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{im_i}$ z klastru C_i. V takomto prípade matica $\mathbf{W}_{ij}$ je *stĺpcovo stochastická.*

Vieme, že supermatica $\mathbf{W}_N$ spätnoväzbovej siete N je štvorcová matica s rozmermi $n_c \times n_c$, kde n_c určuje počet prvkov v N. Prvky (bloky) tejto matice sú taktiež matice $\mathbf{W}_{ij}$.

Ak sú prvky $\mathbf{W}_{ij}$ supermatice $\mathbf{W}$ stĺpcovo stochastické, to neznamená že aj celá supermatica musí byť stĺpcovo stochastická. Stĺpcovo stochastická nieje v prípade, keď sa v j-tom stĺpci supermatice pod sebou nachádzajú aspoň dva nenulové bloky. Vlastnosť, keď je supermatica stĺpcovo stochastická, má vplyv na vlastnosti limitnej matice.

Vlastnosť stochasticity supermatice vieme zabezpečiť prostredníctvom Saatyho metódy, že párovo porovnáme jednotlivé klastry $C_1, C_2, \ldots, \ldots C_n$ postupne s klastrom C_j. Následne dostaneme vektory váh v_{ij}, pre ktoré platí:

$$v_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} v_{ij} = 1.$$

Vynásobíme všetky prvky matice $\mathbf{W}_{ij}$ s rovnakou váhou v_{ij} a ak položíme

$$\mathbf{W}_{ij}{}' = v_{ij}\mathbf{W}_{ij},$$

tak potom upravená supermatica $\mathbf{W}' = \{\mathbf{W}_{ij}{}'\}$ je stĺpcovo stochastická.

Spracované na základe literatúry [6],[10],[11].

3.1.2. Limitná matica

Majme prvok w_{pq}, ktorý sa nachádza v supermatici $\mathbf{W}$ v riadku p a v stĺpci q. Riadkovému umiestneniu prvku odpovedá prvok e_p a stĺpcovému prvok e_q. Hodnota čísla w_{pq} predstavuje priamy vplyv prvku e_q na prvok e_p. Ak by platilo, že $w_{pq} = 0$, potom je samozrejmé že prvok e_q nemá žiadny vplyv na prvok e_p. Ovplyvňovanie medzi prvkami e_q a e_p môže nastať aj sprostredkovane cez iný prvok e_r. Súčet sprostredkovaných vplyvov získame ako výpočet druhej mocniny matice $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W}^2 = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}.$$

Aby sme sa dopracovali k správnemu výsledku, budú nás zaujímať celkové vplyvy, teda také prvky, ktorými spätnoväzbová sieť pôsobí na iné prvky.

Tieto vplyvy nazývame *limitné vplyvy* a maticu limitných vplyvov definujeme ako maticovú limitu postupnosti mocnín $\mathbf{W}^k$ supermatice $\mathbf{W}$ (viď.[6],[9],[10]).

Definícia 21. [Limitná matica supermatice]
Nech $\mathbf{W}$ je supermatica spätnoväzbovej siete N. Nech $c \geq 1$ je najmenšie prirodzené číslo také, že konvergujú postupnosti

$$\mathbf{W}^{ck}, \mathbf{W}^{ck+1}, \mathbf{W}^{ck+2}, \ldots \mathbf{W}^{ck+c-1},$$

potom definujeme limitnú maticu $\mathbf{W}^{\infty}$ k supermatici $\mathbf{W}$ ako priemer limit:

$$\mathbf{W}^{\infty} = \frac{1}{c}\left(\lim_{k\to\infty} \mathbf{W}^{ck} + \lim_{k\to\infty} \mathbf{W}^{ck+1} + \lim_{k\to\infty} \mathbf{W}^{ck+2} + \ldots + \mathbf{W}^{ck+c-1}\right).$$

Poznámka 5. Pokiaľ $c = 1$ existuje limita postupnosti $\mathbf{W}^k$, pre $k \to \infty$, potom platí:

$$\mathbf{W}^{\infty} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{W}^k.$$

Limita postupnosti $\mathbf{W}^k$, pre $k \to \infty$ nemusí existovať. Napríklad pre stochastickú maticu

$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ platí:

$$\mathbf{W}^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W}^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

preto limita $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{W}^k$ neexistuje, avšak podľa Definície 21. je $c = 2$ a limitná matica je definovaná ako

$$\mathbf{W}^{\infty} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definícia 22. [Primitívna a ireducibilná matica]
Nech $\mathbf{W}$ je štvorcová matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica $\mathbf{W}$ je *primitívna*, ak jej mocnina $\mathbf{W}^k$ pre niektoré celé a kladné k má všetky prvky kladné, to znamená, že matica $\mathbf{W}^k$ je kladná.
Matica $\mathbf{W}^k$ je *reducibilná*, ak je možné túto maticu elementárnymi úpravami previesť na maticu tvaru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_3$ sú štvorcové matice. Pokiaľ matica nie je reducibilná, nazýva sa *ireducibilná* [6].

Tvrdenie 1. Nech $\mathbf{W}$ je štvorcová matica typu $n \times n$, ktorá je stochastická a primitívna. Potom existuje jej limitná matica $\mathbf{W}^{\infty}$ a platí:

$$\mathbf{W}^{\infty} = \mathbf{w}\mathbf{e}^T,$$

pričom $w > 0$,

$$w = \begin{bmatrix} w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{w}$ je určený jednoznačne ako riešenie charakteristickej rovnice

$\mathbf{W}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, kde $\lambda = 1$ a $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Za predpokladu Tvrdenia 1 má limitná matica špecialny tvar: $\mathbf{W}^{\infty} = \mathbf{w}\mathbf{e}^{T}$. To znamená, že limitná matica k supermatici $\mathbf{W}$ typu $n \times n$ je štvorcová matica typu $n \times n$, ktorá má všetky stĺpce rovné vektoru $\mathbf{w}$, pričom jeho zložky sú kladné [6],[7].

3.1.3. Prvky modelu

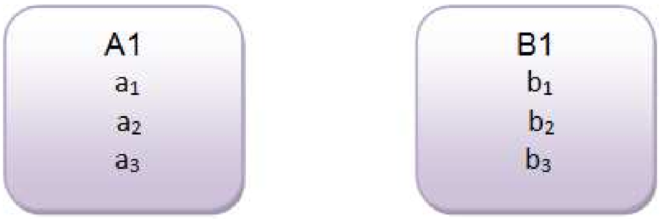
V tejto podkapitole uvádzame jednotlivé časti, ktoré tvoria model rozhodovacieho procesu.

Model je zložený z troch častí:

- klastry
- elementy
- väzby

Klastry

Klaster je logický celok, ktorý v sebe združuje elementy s podobnými vlastnosťami. Klastry rozčleňujú daný problém na časti, ktoré dokážeme popísať a analyzovať. V modeli počet klastrov ani počet elementov nie je obmedzený. Príklad dvoch klastrov je znázornený na Obrázku 4.



Obr. 4: Klaster A1 a B1

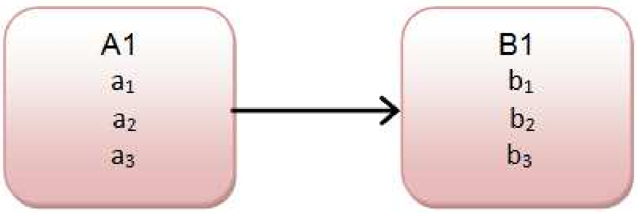
Elementy

Element je základný prvok klastra. Klaster môže obsahovať ľubovoľny počet elementov, minimálne však aspoň jeden. Elementy sú usporiadané do klastrov na základe určitých logických súvislostí. Jednotlivé elementy sú ovplyvňované alebo ovplyvňujú iný klaster elementov, aj keď nie vždy to platí.

Väzby

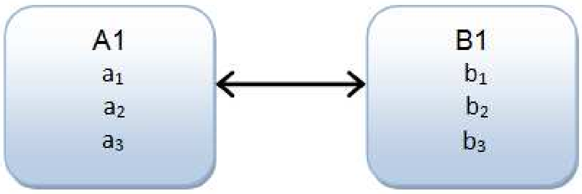
Za najdôležitejšie prvky modelu považujeme väzby. Určujú jednotlivé vzťahy medzi elementami navzájom alebo aj prepojenia medzi klastrami. Na nasledujúcich príkladoch si ukážeme rôzne druhy väzieb, ktoré sa v modeli najčastejšie vyskytujú.

1. V prvom type väzby (Obr. 5) uvedieme spôsob jednoduchej väzby. Tento typ väzby vyjadruje, že niektoré elementy, poprípade aj všetky, z klastra B1 sú ovplyvňované niektorými, poprípade všetkými elementami z klastra A1.

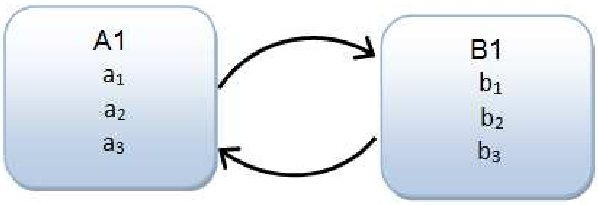


Obr. 5: Jednoduchá väzba

2. Obrázky 6 a 7 znázorňujú obojstrannú väzbu, ktorá sa niekedy nazýva aj dvojitá väzba. Obrázky sú navzájom ekvivalentné. Z toho vyplýva, že dvojitú väzbu môžeme zapísať pomocou dvojice jednoduchých väzieb, ktoré vyjadrujú, že niektoré (prípadne všetky) elementy z B1 sú závislé na niektorých (prípadne všetkých) elementoch z A1 ale naviac platí, že niektoré (prípadne všetky) elementy z A1 sú závislé na niektorých (prípadne všetkých) elementoch z B1.

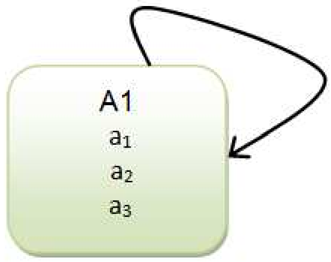


Obr. 6: Obojstranná väzba



Obr. 7: Obojstranná väzba

3. Tretím typom väzby v modeli je spätná väzba, ktorá je znázornená na Obrázku 8. Spätná väzba opisuje, že niektoré (prípadne všetky) elementy klastru sú ovplyvňované niektorými (prípadne všetkými) elementami toho istého klastra.



Obr. 8: Spätná väzba

Aplikácia prvkov modelu

V predchádzajúcej podkapitole Prvky modelu sme vysvetlili základné pojmy, ktoré budeme v ďalšej časti našej práce konkrétne aplikovať. Obrázok 9 prezentuje sieťovú štruktúru, v našom príklade štruktúru, aplikovanú pri výbere vhodného mobilného telefónu.
V grafickom znázornení príkladu zadefinujeme osem klastrov, ktoré budeme posudzovať:

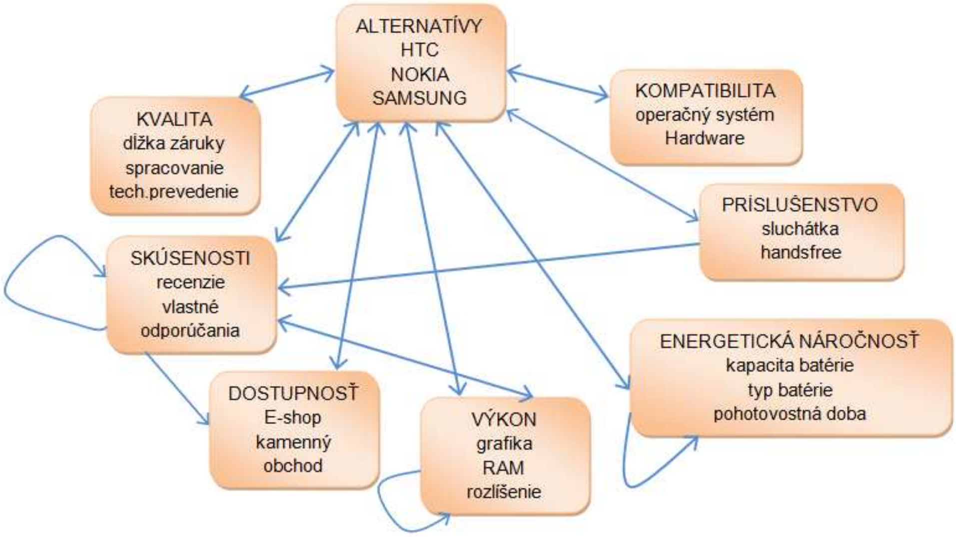
- Alternatívy,
- Kompatibilita,
- Kvalita,
- Skúsenosti,
- Príslušenstvo,
- Dostupnosť,
- Energetická náročnosť,
- Výkon.

Jednotlivé klastry obsahujú rôzne vybrané a posudzované elementy. Klaster Skúsenosti je zložený z elementov - recenzie, vlastné, odporúčania, klaster Dostupnosť je zložený z elementov e-shop, kamenný obchod a klaster Príslušenstvo je zložený z elementov slúchatká, handsfree. Podrobnejší rozpis elementov jednotlivých klastrov je uvedený v Obrázku 9.

Vybrali sme taký príklad, na ktorom môžeme prezentovať a znázorniť spomínané typy väzieb. Ako môžeme vidieť, tak medzi klastrami Skúsenosti a Dostupnosť je použitá jednoduchá väzba. Smer tejto väzby je naznačený šípkou, ktorá poukazuje na závislosť elementov klastra Dostupnosť na elementoch z klastra Skúsenosti. Výber obchodu je závislý na recenziách či odporúčaniach.

Obojstranná väzba sa nachádza medzi klastrami Alternatívy a Energetická náročnosť. Elementy jedného klastra sú závislé od druhého klastra a platí to aj naopak. Napríklad značka mobilu ovplyvňuje pohotovostnú dobu batérie, čo taktiež platí aj naopak, že pohotovostná doba ovplyvňuje značku (teda kvalitu) mobilu.

Tretím typom väzby je spätná väzba, ktorá je aplikovaná na klastry elementov Výkon, kde na základe väčšej RAM-ky je aj grafika mobilu lepšia a od grafiky závisí kvalita rozlíšenia mobilu. V klastry elementov Energetická náročnosť kapacita batérie závisí od typu batérie a to ovplyvňuje aj jej pohotovostnú dobu.

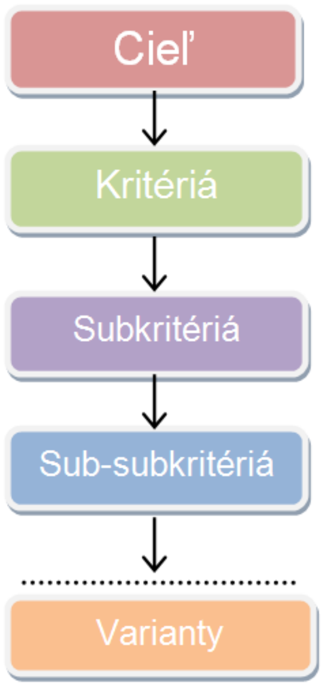


Obr. 9: Príklad

3.2. Hierarchický systém

Hierarchickým systémom sme sa z časti zaoberali už aj v kapitole 2.1 Hierarchia. Aj keď systém nie je spätnoväzbový, dokážeme ho analyzovať ako iné spätnoväzbové systémy. V kontexte viackriteriálneho rozhodovania sa hierarchický systém vyznačuje usporiadaním jednotlivých úrovní [7].

Na Obrázku 10 je vysvetlené usporiadanie jednotlivých úrovní, kde na najvyššej úrovni sa nachádza Cieľ rozhodovania, pod ním sa nachádzajú klastry kritérií, prípadne subkritérií a na najnižšej úrovni je úroveň rozhodovacích variant.



Obr. 10: Hierarchický systém

3.2.1. Supermatica hierarchického systému

Supermatica má nasledujúci tvar:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ W_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{43} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_{n-1,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & W_{n,n-1} & I \end{bmatrix}.$$

Vieme, že $\mathbf{W}_{i,i-1}$ prezentuje maticu vplyvu prvkov úrovne $i-1$ na prvky *í-tej* úrovne. $\boldsymbol{I}$ je jednotková matica.

Supermatica $\mathbf{W}$ hierarchického usporiadania bude obsahovať vždy len jeden komponent $\mathbf{W}_{ij}$ v stĺpci a v riadku začínajúci komponent $\mathbf{W}_{21}$ a postupne diagonálne nižšie usporiadané komponenty $\mathbf{W}_{ij}$. Vyplýva to z usporiadania väzieb zhora nadol.

Tvrdenie 2. Pre supermaticu $\mathbf{W}$ hierarchického systému, pre $k \geq n-1$ platí:

$$\mathbf{W}^k = \mathbf{W}^\infty,$$

pričom

$$\mathbf{W}^\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{W}_{n,n-1}\mathbf{W}_{n-1,n-2}\dots\mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{n,n-1}\mathbf{W}_{n-1,n-2}\dots\mathbf{W}_{32} & \dots & \mathbf{W}_{n,n-1}\mathbf{W}_{n-1,n-2} & \mathbf{W}_{n,n-1} & I \end{bmatrix}$$

Tvrdenie 2 nám hovorí, že postupnosť mocnín $\mathbf{W}^k$ je konštantná pre dostatočne veľké $k \geq n-1$ a preto limitná matica existuje a má špeciálny tvar ako je uvedný v Tvrdení 2.
V poslednom riadku a v prvom stĺpci limitnej matice sú uvedené výsledné priority, teda vplyv cieľa na jednotlivé alternatívy.

Ak $\mathbf{W}_{21}$ je vektor váh kritérií, tak výraz:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}_{n,n-1}\mathbf{W}_{n-1,n-2}\cdots\mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{21}$$

určuje výsledný vektor priorít rozhodovacích variant.

Ako príklad si uvedieme špeciálny prípad systému s troma úrovňami (Cieľ, Kritériá, Varianty). Počet kritérií označíme ako n počet variant bude m.

Pre tento systém máme danú supermaticu:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{W}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{32} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Matica $\mathbf{W}_{21}$ je typu $n \times 1$ a predstavuje vektor váh kritérií.
Matica $\mathbf{W}_{32}$ je typu $m \times n$ a jej stĺpce určujú váhy variant vzhľadom k jednotlivým kritériám.

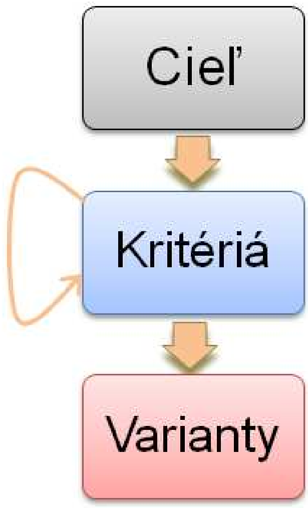
Špeciálny prípad limitnej matice vyzerá nasledovne:

$$\mathbf{W}^{\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{32} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Výsledná matica priorít je $\quad \mathbf{Q} = \mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{21}$
a je typu $m \times 1$ a zodpovedá jej vektor výsledných priorít, ktorý slúži k výslednému usporiadaniu variant pri rozhodovaní.

3.3. Spätnoväzbový systém so vzájomne závislými kritériami

V trojúrovňovom systéme sú typické väzby a vzájomné závislosti medzi jednotlivými prvkami. Jednotlivé druhy väzieb sme všeobecne definovali v predchádzajúcich podkapitolách. V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať vzájomnými závislosťami medzi kritériami v systéme. Získali sme spätnoväzbový systém, ktorý je znázornený na Obrázku 11. Takéto situácie sú typické v ekonomických systémoch [7],[12].



Obr. 11: Vzájomná závislosť kritérií

Systém je daný supermaticou:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{32} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix},$$

kde vzájomné závislosti sú určené maticou $\mathbf{W}_{22}$, ktorá je typu $n \times n$. Uvedená matica nie je stĺpcovo stochastická a teda nemusí existovať limitná matica. Aby supermatica bola stochastická, vieme to docieliť Saatyho metódou párového porovnávania prvkov, odpovedajúcich blokom $\mathbf{W}_{22}$ $\mathbf{W}_{32}$. Získame tak váhy $v_i \geq 0$, $i = 2, 3$, pre ktoré platí, že $v_2 + v_3 = 1$.

Vynásobíme maticu $\mathbf{W}_{i2}$ váhou v_i a dostaneme:

$$\mathbf{W}_{i2}{}' = v_i \mathbf{W}_{i2}, \quad i = 2, 3.$$

Položíme $\quad \mathbf{W}_{21}{}' = \mathbf{W}_{21}$

upravená matica, ktorá má tvar $\quad \mathbf{W}' = \{\mathbf{W}_{ij}{}'\} \quad$ je stĺpcovo stochastická. Pre takúto maticu už existuje limitná matica, ktorá je uvedená v nasledujúcej poznámke.

Poznámka 6. Pre limitnú maticu $\mathbf{W}^{\infty}$ k supermatici $\mathbf{W}$ platí:

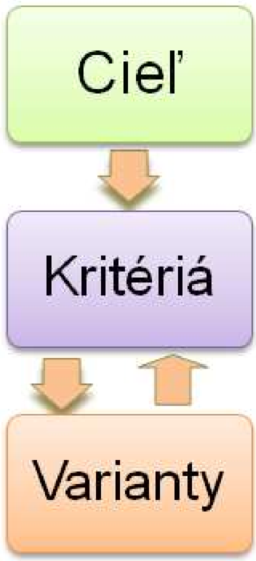
$$\mathbf{W}^{\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{W}_{32}(\mathbf{I} - \mathbf{W}_{22})^{-1}\mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{32}(\mathbf{I} - \mathbf{W}_{22})^{-1} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Podľa Poznámky 5 je postupnosť mocnín $\mathbf{W}^k$ konvergentná k matici $\mathbf{W}^{\infty}$. Vektor priorít, pomocou ktorého sa dopracujeme k výslednemu usporiadaniu variant pri rozhodovaní, má tvar:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}_{32}(\mathbf{I} - \mathbf{W}_{22})^{-1}\mathbf{W}_{21}.$$

3.4. Spätnoväzbový systém so vzájomne závislými kritériami a variantami

V tejto časti sa budeme zaoberať systémom s troma úrovňami, kde sú väzby a vzájomné závislosti medzi kritériami a variantami (Obrázok 12). Konkrétne varianty ovplyvňujú jednotlivé kritériá tak, že pre rôzne varianty má rovnaké kritérium rôzne priority. Konkrétnym systémom sa zaoberajú publikácie [6], [7],[10].



Obr. 12: Vzájomná závislosť kritérií a variant

Opísaný systém je daný supermaticou:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{W}_{21} & 0 & \mathbf{W}_{23} \\ 0 & \mathbf{W}_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

pričom závislosti sú určené maticami $\mathbf{W}_{32}$ typu $m \times n$ a $\mathbf{W}_{23}$ typu $n \times m$. Uvedená matica $\mathbf{W}$ je stochastická, ale nie je ani primitívna, ani ireducibilná, tak potom na stanovenie limitnej matice sa používa Perron - Frobeniova teória. Na základe tejto teórie vyplýva výsledok pre limitnú maticu spätnoväzbového systému.

Tvrdenie 3. Nech $\mathbf{W}_{21}$, $\mathbf{W}_{32}$, $\mathbf{W}_{23}$ sú stĺpcové stochastické matice s kladnými prvkami - bloky supermatice $\mathbf{W}$. Potom pre limitnú maticu $\mathbf{W}^{\infty}$ k supermatici $\mathbf{W}$ platí:

$$\mathbf{W}^{\infty} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{W}_{23}\mathbf{B}\mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{21} & \mathbf{A} & \mathbf{W}_{23}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}\mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{32}\mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

kde $\quad \mathbf{A} = \lim\limits_{k\to\infty}[\mathbf{W}_{23}\mathbf{W}_{32}]^k, \quad \mathbf{B} = \lim\limits_{k\to\infty}[\mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{23}]^k.$

Kedže predpokladáme o maticiach priorít $\mathbf{W}_{32}$ a $\mathbf{W}_{23}$, že sme ich získali párovým porovnávaním, teda sú to stochastické matice s kladnými prvkami, teda matice primitívne, takže to platí aj o maticiach $\mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{23}$ a $\mathbf{W}_{23}\mathbf{W}_{32}$. Preto podľa Tvrdenia 1 existujú limitné matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, ktoré sú jednoznačne dané vektormi

$$\mathbf{a} > 0, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} > 0, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

pričom platí:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{a}\mathbf{e}_n^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{b}\mathbf{e}_m^T$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} b_j = 1,$$

kde $e_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, resp., $e_m = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, je m-rozmerný vektor. Matica $\mathbf{A}$ je teda stochastická štvorcová matica typu $n \times n$, kde všetky stĺpce sú totožné a sú rovné vektoru $\boldsymbol{a}$. Zhodne to vieme povedať aj o matici $\mathbf{B}$, ktorá je typu $m \times m$ a taktiež jej všetky stĺpce sú rovné vektoru $\boldsymbol{b}$.

Vektor priorít, ktorý sa nachádza v limitnej matici $\mathbf{W}^{\infty}$ v treťom riadku a prvom stĺpci má tvar: $\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{W}_{32}\mathbf{W}_{21}$. Vektor tohto typu slúži k výslednému usporiadaniu variant pri rozhodovaní.

3.5. MODEL BOCR

Metóda ANP nachádza uplatnenie v rôznych disciplínach ľudskej činnosti. Jednou z možností aplikácie metódy sú modely BOCR [9].

BOCR model je príkladom zložitejšieho ANP modelu, ktorého štruktúra je tvorená viacerými vrstvami (vrchná vrstva je hierarchická a vnútorná vrstva je ANP sieť tvorená podsieťou).

BOCR je skratka prvých písmen anglických slov Benefits (B), Opportunities (O), Costs (C), Risks (R). Medzi Benefits (výhody) zaraďujeme pozitívne vlastnosti, ktoré nastanú v prípade určitého rozhodnutia. Opportunities (možnosti) sú pozitívne vlastnosti, ktoré môžu nastať v budúcnosti, na základe prijatého rozhodnutia. Costs (náklady) sú výdavky spojené s prijatím rozhodnutia. Risks (riziká) označujú možné nebezpečnstvo, ktoré môže v budúcnosti nastať [9], [10].

Metóda sa aplikuje na rôzne situácie, kde varianty tvoria množinu možných rozhodnutí a rozhodovateľ komplexne analyzuje ich následky.

Systém modelu BOCR je tvorený klastrom cieľ a štyrmi hlavnými podsieťami. Každá podsieť má definovanú vlastnú štruktúru kritérií prípadne subkritérií. Výpočet modelu BOCR sa uskutočňuje párovým porovnávaním, z ktorého získame váhy jednotlivých variant každej podsiete. Z tohto dôvodu každá podsieť BOCR musí obsahovať klaster variant. Na výpočet výsledných priorít modelu používame najčastejšie aditívnu rovnicu:

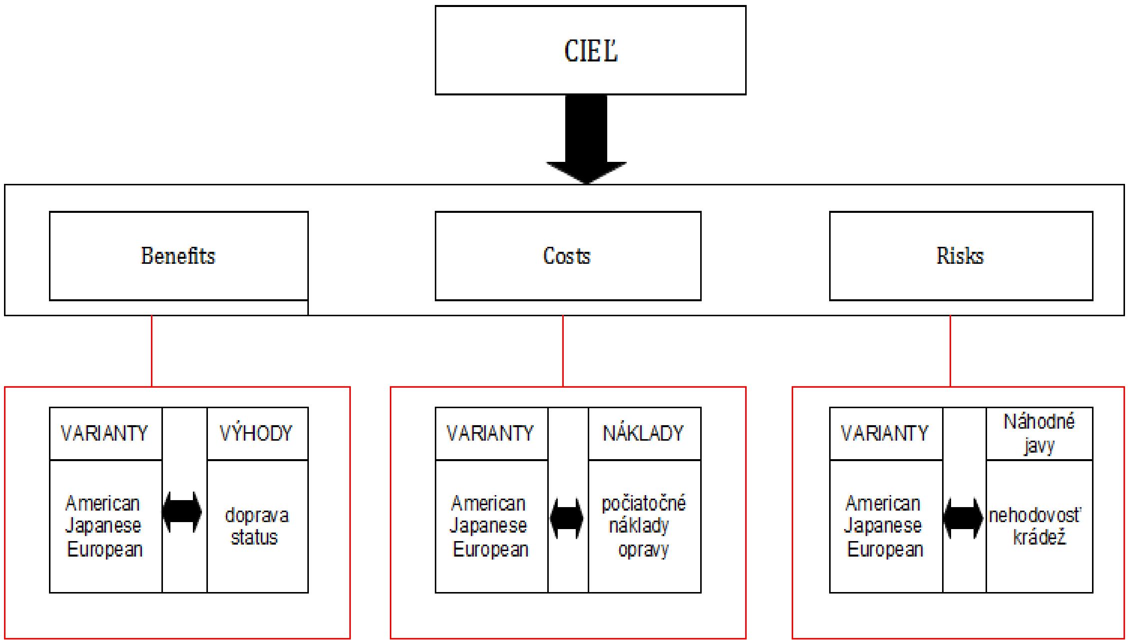
$$B + O + \frac{1}{C} + \frac{1}{R},$$

alebo multiplikatívnu rovnicu:

$$(B \times O)/(C \times R).$$

Pri použití aditívnej rovnice je potrebné pri párovom porovnávaní prevrátiť priority nákladov a rizík a to tak, aby viac riziková alebo nákladná varianta mala nižšiu prioritu [9],[10].

Model BOCR vysvetlíme na modelovom príklade. Snažíme sa vybrať najlepší typ automobilu podľa výrobcu - európsky, americký a japonský. Máme dvojvrstvový model, ktorého vrchná časť je hierarchia, vnútorné BCR vrstvy sú jednoduché ANP siete so spätnou väzbou. Na Obrázku 13 je graficky znázornený model. Červenou farbou sú zobrazené vnútorné väzby. Pre zjednodušenie časť Opportunities (O) je vynechaná.



Obr 13: Model BCR

Model riešime postupne po jednotlivých vrstvách. Vypočítame priority klastrov. V jednotlivých podsieťach hodnoty predstavujú, ktorá varianta je najvýhodnejšia z pohľadu Benefits (B), ktorá je najnákladnejšia (C), a ktorá je najrizikovejšia (R).

Nasledujúce Tabuľky 3.1, 3.2 a 3.3 pozostávajú z troch stĺpcov. Pre nás je podstatný stĺpec Ideals, ktorý určuje najlepšiu variantu v jednotlivých klastroch. Význam stĺpcov je viacej rozpracovaný v podkapitole 4.5.

Z hľadiska Benefits (Tabuľka 3.1) je najvýhodnejší automobil z Európy.

	Name	Ideals	Normals	Raw
Benefits (B)	1 American	0.349701	0.207222	0.103611
	2 Japanese	0.337863	0.200208	0.100104
	3 European	1.000000	0.592570	0.296285

Tabuľka 3.1: Hodnoty priorít Benefits

Náklady jednotlivých autobmobilov sú popísané v Tabuľke 3.2. Najvyššie náklady má automobil z Európy, pričom americký a japonský automobil majú približne rovnakú hodnotu nákladov.

	Name	Ideals	Normals	Raw
Costs (C)	1 American	0.360094	0.210726	0.105363
	2 Japanese	0.348730	0.204076	0.102036
	3 European	1.000000	0.585198	0.295999

Tabuľka 3.2: Hodnoty priorít Costs

Najrizikovejším automobilom je európsky automobil. Druhé miesto v rizikovosti má japonský automobil (Tabuľka 3.3)

	Name	Ideals	Normals	Raw
Risks (R)	1 American	0.499960	0.239554	0.119777
	2 Japanese	0.597094	0.291299	0.140650
	3 European	1.000000	0.479147	0.239573

Tabuľka 3.3: Hodnoty priorít Risks

Riešenie modelu sme hľadali multiplikatívnou rovnicou. Výsledky sme spracovali pomocou programu Super Decisions a sú uvedené v Tabuľke 3.4.

Podľa modelu BOCR najlepšiu variantu predstavuje americký automobil, ktorý aj keď mal najnižšie výhody ale bol najmenej rizikový.

	BENEFITS	COSTS	RISKS	B/(C*R)	NORM.
1 American	0.104	0.105	0.120	8.250	0.423
2 Japanese	0.100	0.102	0.141	6.950	0.359
3 European	0.296	0.293	0.240	4.210	0.218

Tabuľka 3.4: Výsledky BOCR modelu

3.6. Prehľad krokov ANP

Vyššie uvedené poznatky je možné zhrnuť do niekoľkých krokov, ktoré ilustrujú postup pri tvorbe modelu ANP. Niektoré body sa môžu preskočiť, ak sa daného problému netýkajú.

1. Podrobný popis rozhodovacieho problému do najmenších detailov, vrátane definovania cieľov, kritérií. Dôležité je zvážiť jednolitvé výstupy modelu a jeho varianty, mať základnú predstavu o súvislostiach v sieti.

2. Ak vytvárame model BOCR, je potrebná definícia štyroch hlavných podsieti a ich jednotlivých prvkov.

3. Vytvoríme väzby medzi jednotlivými prvkami v klastroch. Väzby môžu byť medzi jednotlivými klastrami alebo vo vnútri v klastroch. Väzby naznačujeme šípkou.

4. Po grafickom znázorení modelu je potrebné párovo zrovnať jednotlivé prvky podľa naznačených väzieb vzhľadom k určitému ďalšiemu prvku. Máme dva typy otázok, podľa ktorých budeme párovo zrovnávať prvky, či už vo vnútri klastrov alebo s prvkami z iného klastru. Je potrebné si vybrať len jednu otázku a používať ju počas celej práce inak nebudú výsledky zmysluplné [1].

- Je daný nadradený prvok, ktorého podmnožiny sú prvky A a B. Ktorý z týchto dvoch prvkov má väčší vplyv na nadradený prvok?
- Je daný nadradený prvok, ktorého podmnožiny sú prvky A a B. Ktorý z týchto dvoch prvkov je viacej ovplyvnený nadradeným prvkom?

5. Väzby medzi klastrami opäť ohodnotíme párovým porovnávaním, čím získame maticu váh klastrov.

[1] Saaty, R. W.: *Decision Making in Complex Enviroments*

6. Vytvoríme supermaticu na základe priorít získaných z párových porovnávaní.

7. Vynásobením jednotlivých matíc supermatice vektorom váh nám vznikne matica váh klastrov. Vážená supermatica predstavuje hodnotenie priemerného vplyvu medzi prvkami systému.

8. Postupným umocňovaním matice váh vznikne limitná supermatica. Stĺpce matice sú identické a popisujú výsledné priority všetkých prvkov. Limitná supermatica nám poskytuje výsledky modelu.

9. Ak sme riešili model BOCR, získame jednotlivé priority podsieti modelu a pomocou rovníc získame celkové výsledky.

10. Zhodnotenie výsledkov modelu.

3.7. Software

Táto podkapitola je venovaná softwérovým produktom, ktoré nám uľahčujú riešenia viackriteriálnych rozhodovacích problémov. Uvedieme podrobnejší popis programu Super Decisions, ktorý rieši modely metódy ANP.

V súčasnej dobe ponuka programov pre podporu rozhodovania je pomerne rôznorodá a rozsiahla. Od voľne šíriacich a dostupných programov určených pre študentov, až po komerčné produkty. Väčšina produktov pre záujemcov ponúka na vyskúšanie obmedzené licencie zdarma. V posledných rokoch s rozvojom internetu sa rozšírila aj ponuka riešenia problémov online.

Podrobnejší popis dostupných programov sa nachádza na Institute for Operation Research ant the Managment Sciences, vydávajúci časopis Operation Research/Management Science Today [2],ktorý okrem iného vytvára pravidelne zoznamy softwéru zo všetkých odvetví operačného výskumu a každé dva roky prehľad programov pre podporu rozhodovania [3].

[2]Institute for Operation Research Management Science: internetový časopis
[3]Decision Analysis Software Surwey

Jedným z programov, ktorý dokáže riešiť procesy rozhodovania, je program Expert Choice [4], zameraný hlavne na metódu AHP a zároveň umožňujúci nastavenia aj spätných väzieb.

Decision Lens [5] je program vyvýjaný za podpory Saatyho projektu Creative Decisions Foundation [6], ktorý sa zameriava predovšetkým na ANP. Cieľom projektu Saatyho a jeho manželky Rozann W. Saaty je zhromažďovanie článkov a projektov súvisiacich s viackriteriálnym rozhodovaním metódami ANP a AHP. Hlavným zámerom organizácie je vývoj a spravovanie programu Super Decisions, ktorý slúži ako efektívny nástroj pre riešenie úloh metódy ANP.

Testovacia verzia je sprístupnená po registrácií na stránke http://www.superdecisions.com/ bezplatne. Záujemcovi je pridelené licenčné číslo s platnosťou šesť mesiacov, ktorú je možné opätovne predĺžiť. Stránka okrem samotného odkazu na stiahnutie programu ponúka priestor na komunikáciu s tvorcami. Pokiaľ sa používateľovi počas práce s programom vyskytla chyba, má možnosť vyplniť report, na základe ktorého môže obdržať spätnú väzbu. Program je k dispozicií len v anglickom jazyku. Z grafického hľadiska je program Super Decisions obmedzený a jednoduchý, ale ponúka niekoľko možností zvýraznenia častí modelu pre lepšiu prehľadnosť. Program neponúka priamy presun dát z alebo do tabuľkového editoru, ale existuje možnosť exportovať dáta do textového súboru. Formát modelov vytvorených v Super Decisions má koncovku mod, pričom sa jedná o bežný textový súbor, ktorý je možné editovať v ľubovoľnom textovom editore. Program taktiež ponúka možnosť vytvorenia prehľadnej kompletnej správy (Full Report) vo forme pre tlač alebo ako prehľadný html súbor.

Detailnejšie informácie a manuál o programe je voľne dostupný [7].

[4]Expert Choice: Internetová stránka
[5]Decison Lens: Internetová stránka organizácie
[6]Creative Decisions Foundation: Internetová stránka organizácie
[7]Adams W.J.L a Saaty R.: *Super Decisions Software Guide*

Kapitola 4

Aplikácia ANP

Obsahom tejto kapitoly je konkrétna aplikácia modelu metódy ANP v programe Super Decisions.

4.1. Vytvorenie modelu

Prvým krokom pri zostavovaní modelu ANP je stanovenie cieľa.

Cieľ nášho rozhodovacieho problému, ktorý objasňujeme v tejto časti diplomovej práce, je výber vhodnej reštaurácie na víkendový obed. Vytvorili sme si model problému, ktorý obsahuje štyri klastry. Klaster ALTERNATIVES predstavuje varianty (alternatívy) cieľa. Ďalšie klastry, ktoré ovplyvňujú výsledok sú zvolené nasledovne: DOSTUPNOST, LOKALITA a OSTATNE.
Keďže naším cieľom je výber medzi reštauráciami, tak v klastry ALTERNATIVES (Obr.14) máme elementy (uzly): Koliba, Fastfood v nákupnom centre a Reštaurácia s denným menu. Elementy klastra predstavujú možnosti, pre ktoré sa rozhodujeme.

1 ALTERNATIVES
1 Koliba
2 Fastfood v nákupnom centre
3 Reštaurácia s denným menu

Obr. 14: ALTERNATIVES

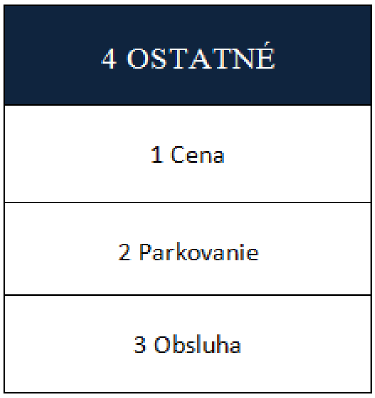
Ďalšie klastre, ktoré sme pre model vytvorili, sú DOSTUPNOST a LOKALITA (Obr. 15). Pri rozhodovaní výberu reštaurácie zohľadňujeme aj lokalitu, v akej sa reštaurácia nachádza, ale taktiež aj dostupnosť, akým spôsobom sme schopní sa na dané miesto prepraviť. Snažili sme sa pri výbere elementov brať do úvahy všetky varianty. Nakoľko sa koliba nachádza väčšinou mimo miest, máme možnosť výberu prvku z klastra DOSTUPNOST ako auto či autobus.

2 DOSTUPNOSŤ
1 Chodza
2 Autobus
3 Auto

3 LOKALITA
1 Mestská časť
2 Nákupné centrum
3 Mimo mesta

Obr.15: Klaster DOSTUPNOST a LOKALITA

Posledný klaster, ktorý sme vytvorili pri analýze nášho modelu je OSTATNE (Obr.16). Zoskupili sme tu elemeny, popisujúce základné charakteristiky, ktoré sú pre nás podstatné pri voľbe reštaurácie.

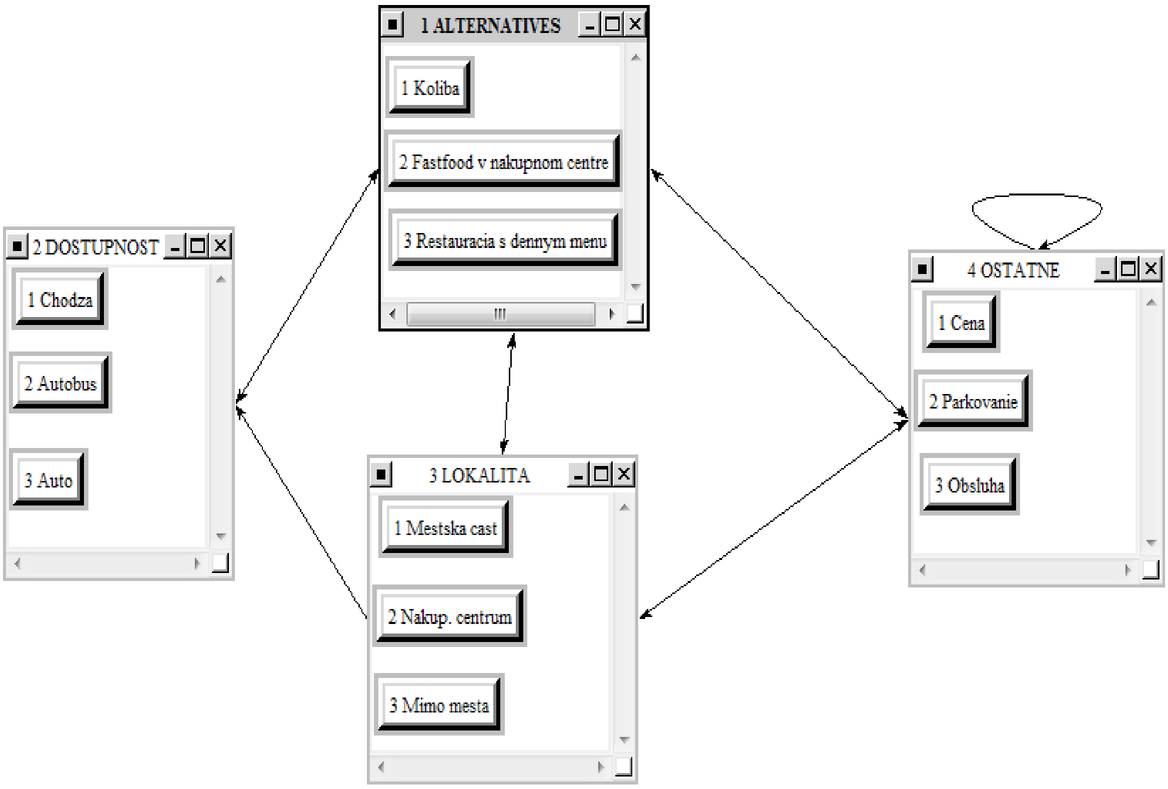


Obr.16: Klaster OSTATNE

4.2. Väzby

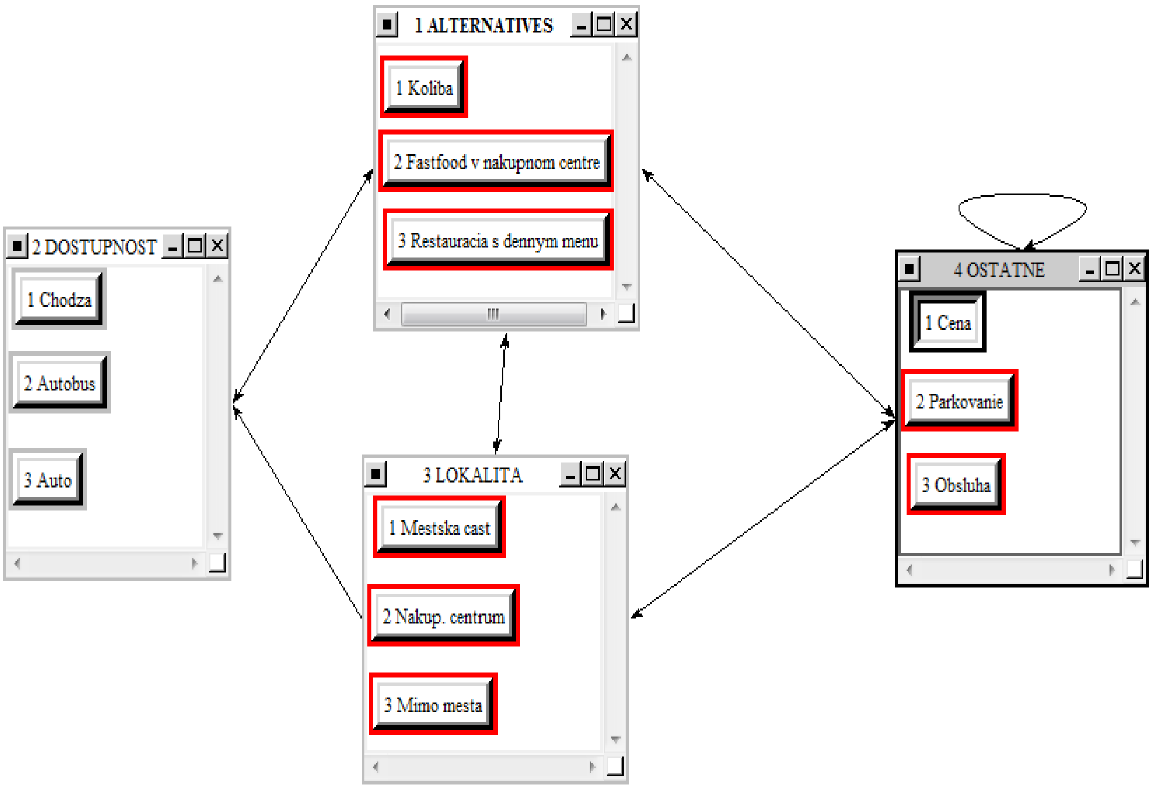
Po zostavení jednotlivých klastrov s elementami je ďalšou dôležitou časťou jednotlivé klastry a prvky poprepájať, či už vonkajšími alebo vnútornými väzbami. Väzby naznačujeme šípkami idúcimi z a do klastru. Je zásadné pri tejto časti postupovať rozvážne a mať dobre premyslený tvar modelu.

Obrázok 17 znázorňuje väzby použité v našom modeli. Vonkajšie väzby sú určené medzi ALTERNATIVES a všetkými ostatnými klastrami. Spätnú väzbu sme si určili na klastry OSTATNE, kde jednotlivé elementy sú závislé aj samé na sebe.



Obr.17: Väzby medzi klastrami

Obrázok 18 je príklad vybranej časti siete modelu. Elementy zafarbené na červeno majú vplyv na čierne orámovaný element Cena. Výška ceny je ovplyvnená lokalitou, kde sa reštaurácia nachádza, typom reštaurácie, ale aj úrovňou obsluhy.



Obr.18: Ukážka siete so zvýraznenými väzbami

4.3. Párové porovnanie

V momente, keď sú väzby vo všetkých sieťach modelu určené, ďalším krokom je párové porovnanie elementov a klastrov.

Párové porovnávanie v programe Super Decisions je možné zadať štyrmi spôsobmi:

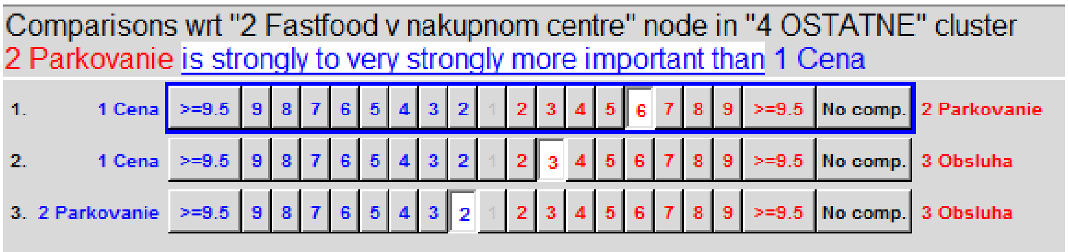
- Questionnare (dotazník)
- Matrix (maticou)
- Verbal (slovne)
- Graphic (graficky)

Pri spracovaní nášho modelu je zvolený dotaznikový spôsob zadávania hodnôt. V tejto možnosti dotazník sám ponúka otázky na základe popárovaných elementov či klastrov. Hodnotíme pomocou elementárnej stupnice priraďovaním bodov od 1 do 9 jednému prvku vo dvojici (Tabuľka 2.2). Počas určovania hodnôt program dokáže vypočítať jednotlivé váhy čiastočných párových porovnávaní a taktiež program kontroluje konzistenciu našich párových porovnávaní. V prípade, že sa objaví nekonzistencia, v matici sa zobrazí najviac nekonzistentný prvok.

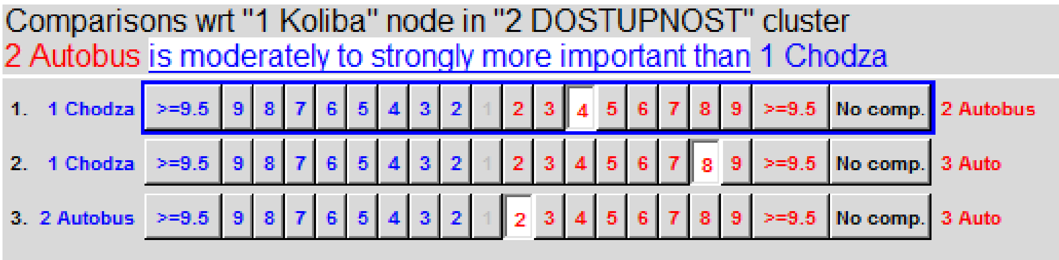
Preferencie určené pri prvku Fastfood v nákupnom centre vzhľadom ku elementom v klastry OSTATNE zobrazuje Obrázok 19. Hodnota tri, pri porovnávaní elementov Cena a Obsluha vzhľadom na element Fastfood v nákpnom centre predstavuje slabú preferenciu. Kritérium Obsluha je slabo preferovné pred kritériom Cena.

Obrázok 20 popisuje určené preferenčné hodnoty elementu Koliba s klastrom DOSTUPNOST. V porovnaní Chodza vs. Autobus sme vybrali hodnotu napravo od jednotky a teda sme určili miernu preferenciu Autobusu.

Údaje o ostatných párových porovnávaniach sú dostupné na priloženom CD.



Obr.19: Dotazníková forma



Obr.20: Dotazníková forma

4.4. Výpočty

Pre každú nami určenú sieť, vypočítame jednotlivé matice na základe párových porovnávaní.

V tabuľke Cluster Matrix je uvedená matica váh klastrov, ktorá vznikla párovým porovnávaním klastrov.
Nulové hodnoty určujú, že medzi klastrami DOSTUPNOST a OSTATNE a taktiež aj medzi prvkami klastra LOKALITA sme nepoužili žiadnu väzbu, teda sme ich párovo neporovnávali. Z tabuľky vidíme, že najväčšiu mieru ovplyvnenia pri výbere reštaurácie má klaster DOSTUPNOST. Maticu klastrových porovnávaní využijeme na výpočet váženej supermatice.

	1 ALTERNATIVES	2 DOSTUPNOST	3 LOKALITA	4 OSTATNE
1 ALTERNATIVES	0	1	0.1	0.57
2 DOSTUPNOST	0.67	0	0.6	0
3 LOKALITA	0.11	0	0	0.14
4 OSTATNE	0.22	0	0.3	0.29

Cluster Matrix - Super Decisions

		1 ALTERNATIVES			2 DOSTUPNOST			3 LOKALITA			4 OSTATNE		
		1 Koliba	2 Fastfood v nakupnom centre	3 Restauracia s dennym menu	1 Chodza	2 Autobus	3 Auto	1 Mestska cast	2 Nakup. centrum	3 Mimo mesta	1 Cena	2 Parkovanie	3 Obsluha
1 ALTERNATIVES	1 Koliba	0.000	0.000	0.000	0.077	0.667	0.667	0.010	0.008	0.073	0.127	0.401	0.327
	2 Fastfood v nakupnom centre	0.000	0.000	0.000	0.615	0.222	0.222	0.030	0.062	0.018	0.063	0.110	0.082
	3 Restauracia s dennym menu	0.000	0.000	0.000	0.308	0.111	0.111	0.060	0.031	0.009	0.381	0.061	0.163
2 DOSTUPNOST	1 Chodza	0.051	0.095	0.444	0.000	0.000	0.000	0.400	0.067	0.046	0.000	0.000	0.000
	2 Autobus	0.205	0.381	0.148	0.000	0.000	0.000	0.133	0.400	0.185	0.000	0.000	0.000
	3 Auto	0.410	0.190	0.074	0.000	0.000	0.000	0.067	0.133	0.369	0.000	0.000	0.000
3 LOKALITA	1 Mestska cast	0.034	0.034	0.067	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.095	0.086	0.082
	2 Nakup. centrum	0.009	0.068	0.033	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.016	0.014	0.020
	3 Mimo mesta	0.068	0.009	0.011	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.032	0.043	0.041
4 OSTATNE	1 Cena	0.022	0.022	0.025	0.000	0.000	0.000	0.037	0.030	0.030	0.000	0.057	0.286
	2 Parkovanie	0.067	0.133	0.049	0.000	0.000	0.000	0.069	0.090	0.180	0.229	0.229	0.000
	3 Obsluha	0.133	0.067	0.148	0.000	0.000	0.000	0.194	0.180	0.090	0.057	0.000	0.000

Vážená supermatica modelu

Máme zobrazenú váženú supermaticu pre sieť nášho modelu, ktorá vznikla na základe vložených informácií o vzťahoch medzi jednotlivými prvkami. Z váženej supermatice môžeme výčítať, že najväčšiu váhu pri Reštaurácií s denným menu prikladáme Cene, ale naopak, najmenšiu váhu z klastru OSTATNE sme si určili pre Parkovanie. Pri alternatíve Koliba má pre nás najväčšiu váhu z pohľadu dostupnosti element Auto a Autobus. Nulové hodnoty predstavujú, že medzi jednotlivými klastrami či elementami sme neurčili závislosti (väzby).

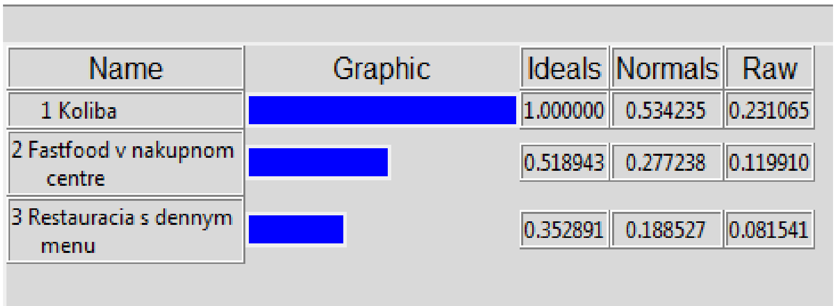
Pomocou váženej supermatice umocňovaním sme získali limitnú supermaticu, ktorá predstavuje výsledky nášho modelu. Nenormované hodnoty váh variant sú prvé tri čísla v stĺpci. Všetky stĺpce limitnej matice majú rovnaké hodnoty.

		1 ALTERNATIVES			2 DOSTUPNOST			3 LOKALITA			4 OSTATNE		
		1 Koliba	2 Fastfood v nakupnom centre	3 Restauracia s dennym menu	1 Chodza	2 Autobus	3 Auto	1 Mestska cast	2 Nakup. centrum	3 Mimo mesta	1 Cena	2 Parkovanie	3 Obsluha
1 ALTERNATIVES	1 Koliba	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231
	2 Fastfood v nakupnom centre	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
	3 Restauracia s dennym menu	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082	0.082
2 DOSTUPNOST	1 Chodza	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074
	2 Autobus	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
	3 Auto	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137	0.137
3 LOKALITA	1 Mestska cast	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
	2 Nakup. centrum	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
	3 Mimo mesta	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024
4 OSTATNE	1 Cena	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
	2 Parkovanie	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
	3 Obsluha	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064

Limitná supermatica modelu

4.5. Riešenie

Výsledky interpretujeme pomocou programu Super Decisions a vyzerajú nasledovne:



Name	Graphic	Ideals	Normals	Raw
1 Koliba		1.000000	0.534235	0.231065
2 Fastfood v nakupnom centre		0.518943	0.277238	0.119910
3 Restauracia s dennym menu		0.352891	0.188527	0.081541

Riešenie modelu

Tabuľka výsledkov je rozdelená do troch stĺpcov s jednotlivými alternatívami a ich prioritami. Stĺpec *Raw* (hrubé hodnoty) predstavuje váhy variant, tak ako nám vyšli v limitnej supermatici pred normalizovaním. Stĺpec *Normals* (normalizované varianty) zobrazuje váhy normalizované podľa variant. Stĺpec *Ideals* (ideálna varianta) určuje variantu s najväčšou váhou ako ideál a ostatné udáva ako jej podiel. V Ideals má varianta s najvyššou prioritou hodnotu 1 a hodnoty ostatných variant vyjadrujú na koľko percent sa jej vyrovnajú.

Spracovaním a výpočtami jednotlivých váh a matíc v našom modeli sme sa dopracovali k záveru a teda k vyriešeniu nášho rozhodovacieho problému. Najideálnejšia reštaurácia na víkendový obed vyšla Koliba. Ako druhá najlepšia alternatíva je Fastfood v nákupnom centre, ktorá predstavuje $51,8\%$ hodnoty varianty Koliba. Najmenej výhodná alternatíva je Reštaurácia s denným menu, ktorá predstavuje len $35,3\%$ hodnoty najideálnejšej alternatívy.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo popísanie metódy Analytického sieťového procesu, vysvetlenie matematického modelu a ilustrácia príkladu rozhodovacieho problému.

V teoretickej časti sme objasnili základné pojmy o viackriteriálnom rozhodovaní, ktoré boli v práci používané.

Keďže metóda ANP je rozšírením metódy AHP, tak pre lepšie pochopenie ANP sme venovali pozornosť definovaniu a popísaniu metódy AHP.

Vysvetlili sme základný princíp metódy AHP. Na príklade sme ilustrovali modely rôznych typov hierarchie. Ukázali sme, ako s metódou pracujeme - ako získať váhy kritérií, čiastočné hodnotenie variant a taktiež, ako určiť konzistenciu párových porovnávaní. Postup, akým sa dopracujeme k výpočtu metódy AHP, sme zhrnuli do etáp rozhodovania.

Hlavnú časť práce tvoril podrobný popis metódy Analytického sieťového procesu. Vysvetlili sme, na akom princípe metóda funguje. Metóda reprezentuje rozhodovací problém vo forme sieti, nie vo forme hierarchie, ako to je u metódy AHP. Definovali sme spätnoväzbovú sieť, čo je hlavný prvok metódy ANP. Na grafickom príklade s cieľom výber vhodného mobilného telefónu, sme vysvetlili topologické prvky modelu ako skupina, elementy a väzby a opísali sme rôzne druhy väzieb, vyskytujúce sa v topológii.

Definovali sme supermaticu spätnoväzbovej siete, ako pre vzájomne závislé kritériá, tak aj pre vzájomne závislé kritériá a varianty. Pre jednotlivé typy závislostí sme určili limitnú maticu, ktorej vektor priorít slúži k výslednému usporiadaniu variant.

Získané poznatky sme zhrnuli do niekoľkých krokov, ktoré tvoria postup pri tvorbe modelu ANP. Tohto postupu sme sa držali aj pri tvorbe nášho príkladu.

Vytvorili sme model, kde cieľom nášho rozhodovacieho problému bol výber vhodnej reštaurácie na víkendový obed. Náš model obsahoval tri alternatívy, pre ktoré sme sa rozhodovali a tri skupiny kritérií na základe, ktorých sme sa rozhodovali. Model sme spracovali pomocou programu Super Decisions. Určením väzieb sme vytvorili sieť modelu, kde sme následne párovo porovnávali uzly a klastri pomocou základnej škály párového porovnávania. Vypočítali sme váženú supermaticu modelu, z ktorej sme získali limitnú maticu a pomocou programu sme interpretovali výsledok.

Literatura

[1] Fiala, P.: *Modely a metody rozhodování*, Praha: Oeconomica, 1994.

[2] Fiala, P., Jablonsky, J., Maňas, M.: *Vícekriteriální rozhodování*, VŠE v Prahe, 1994.

[3] Fotr, J., Dědina, J., Hruzová, M.: *Manažérske rozhodování*, 3. upravené a rozšířené vydání, Praha: EKOPRESS, 2003.

[4] Grüning, R., Kühn, R., *Succesful Decision-making, A systematic Approach to Complex Problems*, Berlin, Springer, 2005.

[5] Hort, D., Rachůnek, J.:*Algebra 1*, UP Olomouc, 2003.

[6] Ramík, J.: *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání*, Slezská univerzita v Opavě OPF v Karviné, 2000.

[7] Ramík, J.: *Viackriteriální rozhodování - Analytický hierarchický proces - AHP*, Karviná, Slezská Univerzita, Opava, 1999.

[8] Roháčová, I., Marková, Z.: *Analýza metódy AHP a jej potenciálne využitie v logistike*, Acta Montanistica Slovaca, 2009.

[9] Saaty, Thomas L.: *Theory and Applications of the Analytic Network Process: Decission Making with Benefits, Opportunities, Costs and Risks*, Pittsburg, Pennsylvania, RWS Publications, 2005.

[10] Saaty, T.L., Vargas, L.G.: *Decision Making with the ANP*, Springer, New York, 2006.

[11] Saaty, T.L.: *Decision Making with Dependence and Feedback: The ANP*, Pennsylvania: RWS Publications, Pittsburgh, 1996.

[12] Štěrba, D., *Využití multikriteriálních rozhodovacích metod v procesu výběru dodávatele*, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta strojní, katedra Průmyslového inženýrství a managmentu, 2007.

[13] Saaty, T.L.: Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process, Management Science, Vol. 32, No. 7, 1986, 841 - 855.

[14] Saaty, T.L.: How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process, European Journal of Operational Research 48, 190, 9 - 26.

INTERNETOVÉ ZDROJE

[15] Institute for Operation Research Management Science ©2011 [online]. Dostupné z: https://https://www.informs.org/.

[16] Operation Research/Management Science Today,Decision Analysis Software Survey. Lionheart Publishing, Inc.©2012 [online]. Dostupné z: http://www.orms-today.org/surveys/das/das.html.

[17] Expert Choice Inc ©2009 [online]. Dostupné z: http://expertchoice.com/.

[18] Decision Lens ©2011 [online]. Dostupné z: http://decisionlens.com/.

[19] Creative Decisions Foundation [online]. Dostupné z: http://www.creativedecisions.net/software.php3.

[20] ADAMS,J.L.; SAATY,R. Super Decisions Software Guide 2003[online]. Dostupné z: http://www.superdecisions.com/category/support/tutorials/.