UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACE MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Historie a současnost integrálu

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Jan Tomeček Ph.D.

Vypracovala:
Ivana Pešková
ME, III. ročník

Rok odevzdání: 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Jana Tomečka Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 15. dubna 2013

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce, panu RNDr. Janu Tomečkovi Ph.D., že měl se mnou dostatek trpělivosti, aby mi pomohl dovést tuto práci ke zdárnému konci. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

V této bakalářské práci se zaměřím na řešení otázky pojetí integrálu během jeho vývoje od dob antiky až po současnost a jeho jednotlivé druhy. Práce nabízí čtenářům přehledné shrnutí a snazší proniknutí do dané problematiky. Může sloužit jako studijní pomůcka k prohloubení dosavadních znalostí studenta matematického oboru. Celá práce je rozčleněna do tří hlavních kapitol.

První kapitola je věnována zkoumání integrálu v historických etapách. První období, o kterém se zde zmiňuji, je antika. Dále jsou zde shrnuti významní vědci z novověku a současnosti.

Druhá kapitola se zabývá již samotným rozborem některých typů integrálu. Vybrala jsem integrál Newtonův, Riemannův, Lebesgueův, Perronův a Kurzweilův.

Nejvíce zajímavá z pohledu zkoumání integrálu je poslední kapitola, a to porovnávání jednotlivých typů integrálů. V této kapitole jsou nejdříve sepsány vlastnosti, které mají všechny uvedené typy integrálů společné. Dále jsou zde vypsány klady a zápory jednotlivých integrálů. Závěrem kapitoly jsou praktické příklady.

Cílem práce je přiblížit danou problematiku v oboru matematiky i laické veřejnosti, tedy srozumitelně definovat daný pojem, jasně rozlišit jeho typy a nalézt nejvhodnější definice integrálu. Napomáhají tomu doplňující ilustrace, které mohou zvýšit zájem čtenářů.

1. Historie integrálu

V této kapitole se pojednává o nejznámějších a nejvýznamnějších představitelích historie, kteří se významnou měrou zasloužili o rozvinutí integrálu.
V této kapitole byla využita literatura [1], [2] a internetové zdroje [3], [4], [5], [6].

1.1 Antika

Archimédes

S myšlenkou o integrování se můžeme setkat již u ***Archiméda***, což je matematik z antického období. Pocházel ze Syrakus, kde se v roce 287 př. n. l. narodil. Lásku k matematice, mechanice a astronomii zdědil po svém otci. Předpokládá se, že zemřel během druhé punské války a to celkem kuriózním způsobem. Zabral se do řešení úlohy a nevěnoval se hluku, který přicházel z ulice. Do jeho domu vtrhl voják a snažil se ho donutit, aby s ním šel k jeho vůdci. Archimédes, zabraný do svého problému odmítl a voják ho probodl mečem.
Archimédes se zabýval exhaustivní metodou Eudoxa a snažil se o její zdokonalení. *Exhaustivní metoda* spočívá na principu, že veličiny můžeme dělit do nekonečna. Vysvětlíme to tak, že obsah plochy nějakého útvaru je roven obsahu ploch útvarů, které z něj můžeme vytvořit a jejichž obsahy umíme vypočítat. Platí zde princip monotonie a aditivity. Archimédes tuto metodu vylepšil a poté ji používal při důkazech vět. Nevěnoval se důkazům pouze starých poznatků, ale hledal i nová fakta. Vylepšení exhaustivní metody je považováno za základy integrálních metod. Nejen tato metoda, ale i to, že Archimédes vylepšil nápad Démokrita o rozdělení rovinných útvarů na tenké plátky, vedla k vytváření integrálního počtu. Archimédes rozpracoval metodu integrálních sum, kterou interpretoval ve své knize *"Myšlenka integrování vznikla z potřeby praxe"*. Pojednává se v ní o výpočtu obsahů a objemů.

Po smrti Archiméda došlo k jistému utlumení matematiky. Jedním z důvodů bylo přílišné snažení antických matematiků o logickou dokonalost důkazů. Další důvody, proč se matematika nerozvíjela, spočívaly ve vnějších příčinách. Římané přicházeli například s tím, že matematika je nedůležitá, ba dokonce nezákonná, a že se jí mají zabývat pouze pokořené národy, protože Římané se musí věnovat vládnutí.

Než přeskočíme téměř 2 tisíce let a přejdeme k dalšímu vědci, o jehož přínosu do matematiky je potřeba se rozepsat více, zmíníme alespoň matematiky ***Pappa*** nebo ***Thabita ibn Qurra***.

1.2 Novověk

Do období novověku patří velká spousta matematiků. V této práci jsou však vybráni ti, kteří měli největší význam.

Johannes Kepler

Prvním uznávaným matematikem v další historické epoše - tedy novověku, který se věnoval zdokonalování integrálních metod, byl ***Johannes Kepler***. Kepler žil na přelomu 16. a 17. století. Toto období je považováno za významné zejména pro rozvoj v oblasti matematiky a mechaniky. Rozdíl mezi Archimédem a Keplerem spočívá v tom, že Kepler se příliš nezajímal o přesnost. Napsal knihu *"Nova stereometria doliorum vinariorum"*, která je ve volném překladu do češtiny známa jako *"Stereometrie vinných sudů"*. Sepsal ji před svou svatbou z toho důvodu, že chtěl změřit pravítkem, kolik je vína v sudech. Tato kniha zlepšila integrální metodu. Můžeme v ní najít například vzorec pro výpočet kruhu, který je založen na infinitezimálních úvahách. Ty jsou spojeny s rozdělením tělesa na nekonečně mnoho malých kousků, kdy můžeme objemy jednotlivých kousků vypočítat. Přiblížit tyto úvahy je možno při výpočtu objemu kruhu. Kepler postupoval tak, že si kruh rozdělil na mnoho jednotlivých kousků, jejichž obsahy jsou velmi malé. Roztáhl kruh do úsečky, kde jednotlivé kousky tvoří pravidelné rovnoramenné trojúhelníky. Vrcholy všech trojúhelníků přemístil do jednoho vrcholu, a to do středu kruhu. Musíme ale poznamenat, že základny dílčích trojúhelníků zůstaly stejné. Tímto způsobem se vytvořil jeden trojúhelník, který obsahuje všechny počáteční trojúhelníky s odvěsnami o délkách $2\pi r$ a r. Z důvodu ekvivalence mezi kruhem a daným trojúhelníkem tedy vyplývá, že obsah kruhu je πr^2. Keplerův vliv na utváření integrálních metod byl významný, avšak některé jeho vzorce pro výpočet objemu těles se projevily jako chybné. Nové Keplerovy myšlenky v té době neuznávali někteří kritikové, například matematikové jako ***A. Anderson***, ***P. Guldin*** a další.

Bonavenura Cavalieri a Evangelista Torricelli

Italský matematik ***Bonaventura Cavalieri*** je představitelem další etapy při vytváření integrálního počtu. Snažil se najít pro různé matematické úlohy obecný princip, který by je vyřešil. Tím se lišil od Keplera a učinil tak další posun ve zkoumání v tomto oboru. Cavalieriho rodiče chtěli, aby se stal duchovním. Díky matematikovi a astronomovi Castellimu se vzdělával v klášteře a roku 1629 se stal profesorem na katedře matematiky Boloňské univerzity. Velkým přínosem Cavalieriho je důkaz, že objemy dvou těles jsou stejné, pokud se shodují obsahy nebo délky odpovídajících řezů. Cavalieri porovnával známé útvary s neznámými a tím získal objemy nebo obsahy neznámých útvarů. Napsal knihu *"Geometrie"*, kde se můžeme setkat s myšlenkou integrálu mnohočlenů druhého stupně, určovaných pomocí objemů a obsahů. Už Archimédes a Kepler pracovali s integrály, avšak Cavalieri byl první, kdo vyčíslil integrály $\int_0^a x\mathrm{d}x$, $\int_0^a x^2\mathrm{d}x$. Výrok Cavalieriho, který to dokazuje, zní takto: *„všechny čáry mají poměr jako 2 a 1, všechny čtverce jako 3 a 1, všechny třetí mocniny jako 4 a 1, … “*. Jeho úvahy, které byly publikovány v knize *"Sta rozličných úloh"*, tedy vyčíslují integrály:

$$\int_0^a x\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}, \quad \int_0^a x^2\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}, \dots, \int_0^a x^n\mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Stoupencem myšlenky Cavalieriho byl ***Evangelista Torricelli***. Staral se o něho jeho strýc, který ho poslal studovat do jezuitské školy. Zdokonalil metodu nedělitelných. Nepoužíval pouze nedělitelné úsečky, ale i nedělitelné části křivek v prostoru i v rovině. Dokázal, že pokud se pravoúhlá parabola otáčí kolem své osy, pak je její objem konečný. Důkaz byl provázen mnoha předintegračními metodami. Jednou z nejdůležitějších je již zmiňovaná metoda nedělitelných. Torricelli zkonstruoval jakousi *"trumpetu"*, kterou si můžeme představit jako parabolu. Parabola se otáčí kolem jedné své asymptoty a je protnutá rovinou, jež je na tuto asymptotu kolmá. Torricelliho význam ve vědě je zejména v oblasti optiky a fyziky.

V 16. a 17. století dochází k obrovskému rozmachu matematiky i ostatních věd. Byly zakládány vědecké kroužky a vědci si mezi sebou často korespondovali. Důvodem bylo sjednocení vědeckých myšlenek. V 17. století docházelo v matematice k velkým změnám. Oddělila se z ní odvětví jako matematická analýza, teorie pravděpodobnosti a další. Na druhou stranu začaly do matematiky patřit aritmetika, algebra, geometrie a jiné.

Pierre de Fermat

Jedním z představitelů matematiky 17. století je ***Pierre de Fermat***. O jeho životě se dochovalo málo informací, navíc se jedná pouze o spekulace. Jedním z faktů, které o něm víme, je to, že vystudoval práva a stal se uznávaným právníkem. Nezmiňuji ho avšak kvůli jeho právnické kariéře. Fermat byl úspěšný i v matematice. Vyslovil větu, která je známa především vysokoškolským studentům a zní takto: *„Jestliže má funkce v nějakém bodě extrém, pak derivace v tomto bodě je rovna nule“*.

Fermat používal při výpočtech velmi často slovo kvadratura. Pod tímto slovem si mnoho z nás neumí nic představit, proto si ho vysvětlíme blíže. Kvadratura je vymezená osou $0x$, grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Jedná se tedy o určitý integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Kvadratury parabol $f(x) = x^n$ Fermat vyčíslil jako integrál $\int_0^a x^n \mathrm{d}x$. Byl velice dobrým matematikem. Dokázal vyčíslit i exponenty ve zlomku, a tím vlastně vyčíslil integrál $\int_0^a x^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x$ pomocí nerovnosti:

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

Vzhledem k tomu, že se k výpočtu používaly sumy, byl postup složitý. U Fermata se můžeme poprvé setkat se záměnou proměnných a s analogií metody per partes. Pomohlo mu to k vyčíslení neznámých kvadratur na známé. Dokázal například, že Agnesiova křivka, která má tvar $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$, je rovna obsahu polokruhu s poloměrem a. Fermat dokázal integrovat funkce parabolické, hyperbolické a exponenciální.

Roberval (Gilles Personne)

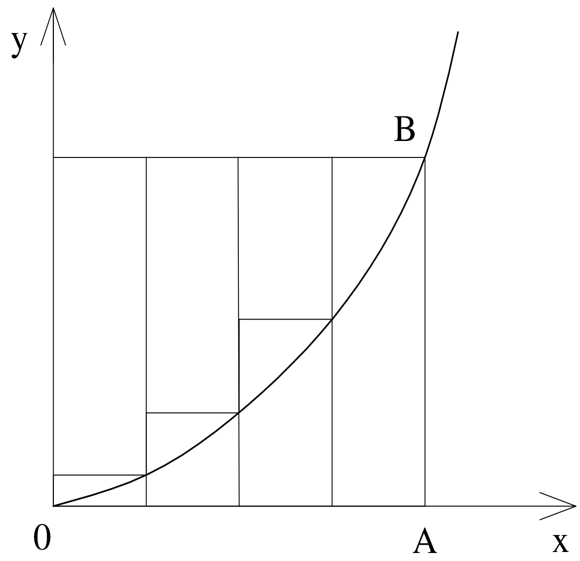
O životě dalšího představitele, o kterém by bylo dobré se alespoň zmínit, se dochovalo ještě méně informací než o životě Fermata. Tímto představitelem je ***Gilles Personne***, který je spíše znám pod pseudonymem ***Roberval***. V Paříži, kam odcestoval ze svého rodného města, se věnoval problémům v matematice, fyzice a astronomii. Roberval zkonstruoval tečny k několika křivkám, avšak ne vždy byly jeho úvahy správné. Setkáme se u něj opět s metodou nedělitelných. Věnoval velkou pozornost *cykloidě*, která byla důležitá v rozvoji matematiky. Cykloida je křivka, která opisuje libovolný bod kružnice, která se kutálí po přímce. Studovat ji začal už Galilei, avšak obsah mezi obloukem cykloidy a přímkou poprvé vyčíslil Roberval.

Blaise Pascal

Velkým přínosem byly z pohledu rozvoje integrálních metod Pascalovy myšlenky. ***Blaise Pascal*** zdědil zájem o matematiku po svém otci. Jednou ze zajímavostí je, že vytvořil sčítací stroj, na jehož sestrojení pracoval 3 roky. Stroj dostal název Pascalína a byl osmimístný. Prvních šest míst sloužilo pro sčítání plnohodnotných peněz a poslední dvě místa sčítala drobné peníze. Tento stroj měl jednu obrovskou nevýhodu. Neusnadňoval násobení a dělení. Pascalův význam v teorii integrálu spočívá v tom, že zjistil, jak můžeme sčítat r-té mocniny přirozených čísel. Ve svých úvahách došel k výpočtu integrálu mocninných funkcí pro přirozené hodnoty n : $\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. K tomuto výpočtu před ním došli již matematici Fermat a Cavalieri. V uvažování Pascala a jeho předchůdců můžeme vidět určité odlišnosti. Pascal nebere v úvahu pouze sumy s konečným počtem sčítanců ale i sumy, kdy počet sčítanců roste do nekonečna.

John Wallis a Isaac Barrow

John Wallis se nejdříve studiu matematiky věnoval samostatně, pak ale v roce 1645 vstoupil do kroužku přírodovědců. Díky tomuto kroužku v Londýně vznikla Londýnská královská společnost, kde Wallis působil. V roce 1656 napsal knihu *"Aritmetika nekonečna"*. Vymyslel nové vzorce pro integrování funkcí. Vypočetl integrál $\int_0^a x^n \mathrm{d}x$ pro celé a racionální kladné i záporné exponenty mocnin. Říkal, že k matematice ho přivedla metoda nedělitelných Cavalieriho, která byla vyložena Torricellim. Wallis se snažil najít obsahy útvarů sčítáním opsaných a vepsaných obdélníků. Kvadratury počítal pomocí limity poměrů aritmetických sum. Ukážeme si to na příkladu, který je jak popsán v následujícím textu, tak i znázorněn na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Kvadratura mocninných funkcí

Máme dán útvar, který je omezen parabolou na intervalu $\langle 0, A\rangle$. Útvar rozdělil na obdélníky o stejných délkách. V bodech, které nám osu x rozdělují, uvažoval řezy plochy pod parabolou. Porovnával součty těchto délek se součty délek řezů, které jsou rovny délce největšího obdélníku, vzorcem:

$$\frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{\sum_{m=0}^{n} m^k}{(n+1)n^k}.$$

Můžeme to považovat za stanovení obecné úlohy integrace funkce. Pomocí metody indukce dostával pro tento vztah výsledek:

$$\frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

Dále uvedený výraz dosadil do limity, kde n jde do nekonečna:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{1}{3}.$$

V současnosti tato myšlenka vyjadřuje integrál $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Druhý jmenovaný, ***Isaac Barrow***, našel vztah mezi integrováním a derivováním, a to inverznost. Zjistil, že mezi nimi platí tento vztah tak, že se věnoval určování kvadratur různých křivek a hledal u nich tečny.

Za nejvýznamnější matematiky 17. století jsou považováni ***Isaac Newton*** a ***Gottfried Wilhelm Leibniz***. Snažili se o vytvoření uceleného pohledu na integrální a diferenciální počet. Každý z nich samozřejmě vytvořil svoji teorii, avšak hlavní myšlenka byla společná.

Isaac Newton

Isaac Newton žil v letech 1643 - 1727. Narodil se ve Woolsthorpe. Byl významným matematikem, fyzikem a astronomem druhé poloviny 17. století. Vystudoval univerzitu v Cambridge a v roce 1669 se stal jejím profesorem. V roce 1668 sestrojil teleskop, díky kterému se stal členem Londýnské královské společnosti. Newton přispěl do matematické analýzy dříve než Leibniz, avšak svoje poznatky publikoval později. Jeho úvahy v oblasti matematiky mnoho vědců neuznávalo.

Rozvinul substituční metodu výpočtu integrálu, vypracoval tabulky integrálu a mnohé další. Ve své knize *"Metoda fluxí"*, která byla vydána až po jeho smrti, chápe matematiku jako abstraktní pojem. Říkal například, že čára vzniká při pohybu bodu, povrchy vznikají při pohybu čáry a podobně. A že tyto pohyby trvají nějaký čas. Fluxe tedy popsal jako okamžité rychlosti, které mají povahu vektorů. Zavedl ještě pojem fluenty, což jsou veličiny popisující dráhu hmotného bodu, které postupně rostou nebo klesají. V dnešní terminologii můžeme fluxe chápat jako metodu derivování a fluenty jako metodu integrování. Úvahy týkající se integrálního počtu opřel o teorii fluxí a fluent. Metoda fluxí a fluent je založena na tom, že integrování je chápáno jako inverzní operace k derivování.

Další jeho úvahy vedly k nalezení primitivní funkce. Uvažoval, že máme danou kladnou funkci $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Obsah útvaru $F(x)$, který je vymezený grafem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, pak můžeme danou funkci zapsat ve tvaru $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ neboli $F'(x) = f(x)$. Těmito úvahami dostaneme Newton-Leibnizovu formuli:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a),$$

která se ovšem objevila v podobě, jakou známe dnes, až v roce 1798 v knize ***S.F. La-***

croixe. Díky těmto Newtonovým myšlenkám lze zformulovat Newtonův integrál, o kterém se podrobněji zmíníme v další kapitole.

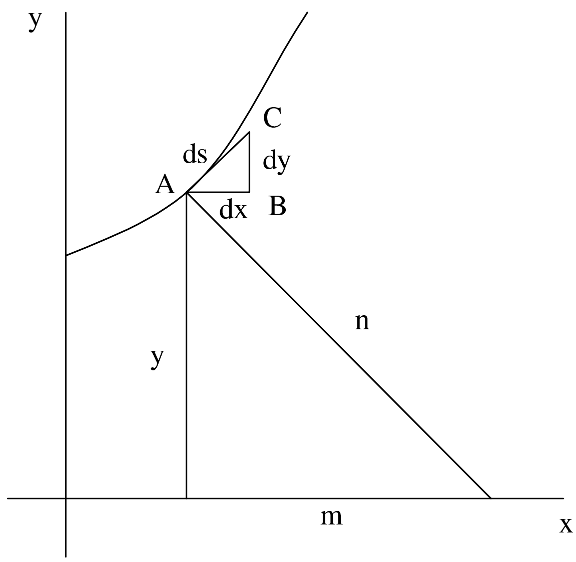
Gottfried Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz se narodil v Lipsku v roce 1646 a zemřel v roce 1716. Říkalo se o něm, že je univerzální génius. Byl matematikem, filozofem, politikem, profesionálním diplomatem a právníkem. Zabýval se i technickými vynálezy. Počítací stroj je jeden z jeho významných vynálezů. K matematice ho přivedly diskuze s vědci, z nichž ho nejvíce ovlivnil Ch. Huygens.

Díky Wallisově *"Aritmetice nekonečna"* a Vincencově *"Geometrické práci"* se v něm probudil zájem o rozvoj analýzy nekonečně malých veličin. Chápal matematiku jako filozofický systém. Je pro něho typické, že chtěl, aby vše, co vzniklo jeho zásluhou, mělo užití v praxi. Díky vědeckým časopisům a dopisování s jinými vědci byly Leibnizovy objevy dostupné veřejnosti, což je velký rozdíl od Newtona, který svoje úvahy tajil.

Pascal napsal knihu, kde popsal *metodu charakteristického trojúhelníku* tak, že řešil problémy kvadratur a bodu, kdy na obvod kruhu přidružil trojúhelník s nekonečně malými stranami. Leibniz zobecnil tuto ideu Pascala. Je-li zadaná libovolná křivka a na ní nějaký bod, můžeme zde také vytvořit nekonečně malý trojúhelník. Tím, že zobecnil tuto myšlenku, dokázal vypočítat diferenciály odmocnin a zlomku.

Pokusíme se metodu charakteristického trojúhelníku hlouběji popsat. Jak vidíme na obrázku 1.2, máme danou křivku a na ní bod A. Bodem A prochází tečna dané křivky $f(x)$. Sestrojíme si pravoúhlý trojúhelník, jehož jedním vrcholem bude bod A. Délky stran si označíme $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, kdy $\mathrm{d}s$ bude délka strany AC, $\mathrm{d}x$ bude délka strany AB a $\mathrm{d}y$ bude BC. V bodě A si vytvoříme kolmici k úsečce AC. Díky této úsečce, ose x a přímce, která prochází bodem A a je rovnoběžná s osou y, nám vznikne pravoúhlý trojúhelník, který je podobný trojúhelníku ABC. Abychom mohli vysvětlit přínos těchto myšlenek do infinitezimálního počtu, označíme si strany vzniklého trojúhelníku, malými písmeny y, n, m. Prostřednictvím těchto dvou trojúhelníků dostaneme poměry stran $\frac{m}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Leibniz si představil, že veličina $\mathrm{d}x$ je nekonečně malá, a tedy konverguje k nule. Toto si dokázal představit v každém bodě křivky. Všechny tyto veličiny sečetl a dostal se ke vztahu $\int m\mathrm{d}x = \int y\mathrm{d}y$, což můžeme pomocí poměru, který jsme si definovali dříve, převést do vztahu $\int y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \int y \mathrm{d}y$.



Obrázek 1.2: Metoda charakteristického trojúhelníka

Leibnizovo uvažování však nebylo považováno za přesné. Roku 1693 Leibniz vydedukoval vztah $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = F(x)$, kdy musí platit, že

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad F(0) = 0.$$

Vzorec nám vypočte integrál jako rozdíl hodnot primitivní funkce a ukáže spojitost mezi integrováním a derivováním.

Vytvořil také novou *metodu transmutace*, která v sobě zahrnuje jak integrování a metodu charakteristického trojúhelníku, tak i rozklad do řad. Metoda transmutace je založena na transformaci integrálu od kartézských souřadnic k polárním. Transmutační věta je velmi podobná současné metodě per partes. Je dána vztahem:

$$\int_a^b y \mathrm{d}x = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x \mathrm{d}y.$$

Leibniz byl první, kdo zavedl znak integrálu, neboť chápal integrál jako sumu nekonečného počtu sčítanců. Znak $\int$ tedy vznikl z prvního písmene slova *summa* a znamenal součet. Samotné slovo integrál bylo zavedeno až dalším přestavitelem, ***Johannem Bernoullim***.

Porovnat přístup Newtona a Leibnize není snadné. Každý z nich měl na danou problematiku trochu odlišný pohled. Zatímco na Newtona měla velký vliv inverznost, kterou zavedl Barrow, Leibnizovo uvažování ovlivnila metoda nedělitelných Cavalieriho a zkoumání nekonečně malých veličin Pascala. Leibniz založil své úvahy na geometrickém chápání, kdy si můžeme integrál představit jako *"nekonečný součet diferenciálů"*, zatímco Newtonovo vnímání je ovlivňováno kinematickými představami.

Jacob a Johann Bernoulli

Na přelomu 17.-18. století, po etapě Newtona a Leibnize, přichází celá řada dalších významných matematiků. Můžeme zmínit bratry ***Jacoba*** a ***Johanna Bernoulli***. Starším z bratrů je Jacob. Studoval teologii a bohoslovenctví na univerzitě v Basileji. Studiu matematiky se začal věnoval až po svém pobytu v zahraničí. V roce 1687 se stal profesorem na katedře matematiky Basilejské univerzity, kterou rod Bernoulliho vedl téměř 105 let. Velký význam mají jeho úvahy v teorii pravděpodobnosti. Vytvořil schéma, které je považováno za základní model teorie pravděpodobnosti. Jeho přínosy nebudeme jmenovat všechny, uvedeme pouze ty, které jsou pro tuto práci nejdůležitější.

Jacob chtěl narovnat oblouk spirály. Tato myšlenka ho přivedla k prvnímu eliptickému integrálu v historii matematiky. Jacob vyučoval svého mladšího bratra Johanna, se kterým se ke konci svého života dostal do rozporů. Po smrti Jacoba Johann převzal jeho místo na univerzitě, kde vyučovalo mnoho známých matematiků. Velkou pozornost věnoval Leonhardu Eulerovi, o kterém bude zmínka dále. Oba bratři se významně zapsali do dějin matematiky. Rozvinuli integrální a diferenciální počet jako základ infinitezimálního počtu.

Leonard Euler

Dalším matematikem je již zmiňovaný ***Leonard Euler***. Do dějin matematiky přispěl významným způsobem zejména v oblasti matematické analýzy, teorie čísel a řady dalších odvětví matematiky. Napsal mnoho významných děl. Pro tuto bakalářskou práci je podstatná především trojdílná kniha nazvaná *"Integrální počet"*, kterou napsal v letech 1768-1774. Euler byl významným matematikem, mechanikem, fyzikem, astronomem a dalším. Jako zajímavost si můžeme uvést, že během hodiny dokázal vypočítat prvních 20 číslic čísla π. Přestože Euler oslepl, věnoval se i nadále vědeckým činnostem a své myšlenky diktoval k zapsání svým žákům.

Vypočítal mnoho složitých určitých integrálů, jako například:

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{\ln x} = \ln 2 \quad \text{nebo} \int_0^\infty \frac{\sin x \mathrm{d}x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Nepoužíval pro výpočty integrálu sumy jako jeho předchůdci, ale vypočítal určitý integrál jako rozdíl hodnot primitivních funkcí.

V jeho knize je zaznamenána základní vlastnost integrálů vztahem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Euler považuje infinitezimální metodu za metodu algebraickou, přestože až do této doby byla považována za metodu geometrickou. Dříve se integrovatelná funkce rozkládala člen po členu. Euler jako významný aparát používal teorii řad. V prvním díle Knihy *"Integrální počet"* řeší otázku integrace funkcí a integraci diferenciálních rovnic prvního řádu. Je zde zformulována definice integrálu, která zní takto: *„Nakolik diferenciál libovolné funkce x má tvar Xdx, ve kterém X je libovolná nějaká funkce, jejíž diferenciál $X\mathrm{d}x$ se nazývá integrálem a označuje se $|$ postaveným zepředu, protože $|X\mathrm{d}x$ označuje to proměnné množství, jehož diferenciál se rovná $X\mathrm{d}x$“*. Integraci druhého řádu a vyšších řádů je věnován díl druhý. Třetí díl je zaměřen na integraci rovnic parciálních derivací. Euler vyčíslil mnoho integrálů. Za zmínku stojí i jeho kniha *"O dvojných integrálech"*, kde jsou uloženy základy dvojného integrálu, které používal k vyčíslení objemů a povrchů.

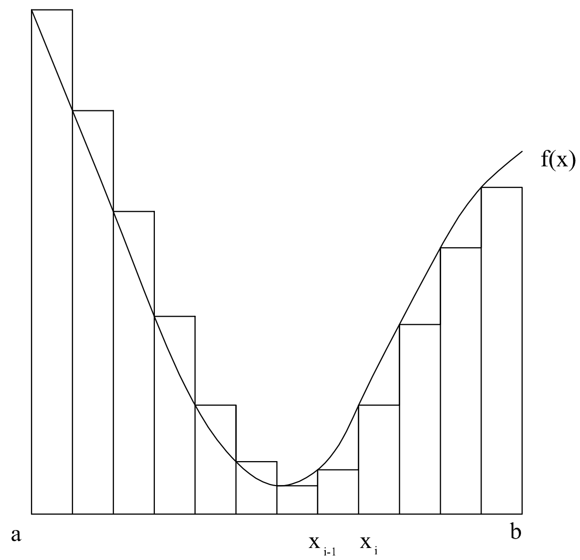
V 18. století se na tvorbě infinitezimálního počtu podíleli také další významní matematici jako ***Brook Taylor, Colin Maclaurin, Jean Baptiste Le Rond d´Alembert, Joseph Louis de Lagrange, Pierre Simon de Laplace*** a další. V 18. století se nahromadila spousta nových poznatků, avšak objevila se i řada problémů kolem nekonečně malých veličin, limity, derivace i integrálu. V tomto období se téměř zapomnělo na exhaustivní metodu Eudoxa a integrovalo se pomocí Newtonova vztahu.

1.3 Od 19. století až po současnost

Augustus-Louis Cauchy

V 19. století se objevuje matematik ***Augustin-Louis Cauchy*** a snaží se specifikovat pojem integrál. Jeho pracovitost je fascinující. Napsal kolem 700 prací. Byl příslušníkem skoro všech vědeckých akademií. Cauchy realizoval prvořadé objevy v teorii řad, teorii diferenciálních rovnic, analýze, matematické fyzice a podobně.

Chápal určitý integrál jako limitu integrálních sum. V roce 1823 zavedl novou definici integrálu. Usiloval o to, aby bylo možné pro funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ určit obsah plochy ohraničené osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $f(x)$. Cauchy to řešil tak, že rozdělil interval $\langle a, b\rangle$ na n částí. Podmínkou bylo, že funkce $f(x)$ musí být spojitá. K dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ připojil aproximující součet, což bylo vyjádření součtu obsahu obdélníku se základnou $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a výškou, jež měla funkční hodnotu $f(x_{i-1})$. Jeho úmyslem bylo zjistit obsah vymezené plochy v rovině pomocí součtu ploch obdélníků, což je patrné z grafu 1.3.



Obrázek 1.3: Geometrický význam integrálu

Pomocí spojitosti funkce a určení integrálu Cauchy dokázal následující vlastnosti:

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

2. $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3. $\int_a^b f(x \pm \alpha)\mathrm{d}x = \int_{a\pm\alpha}^{b\pm\alpha} f(x)\mathrm{d}x$

4. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f[a+\theta(b-a)], \quad \text{kde} \;\; 0 \leq \theta \leq 1$

5. $\int_a^b \sum c_i f_i(x)\mathrm{d}x = \sum c_i \int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x$

6. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum \int_{\alpha-1}^{\alpha_1} f(x)\mathrm{d}x, \quad a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots \alpha_n = b$

Dokázal také správnost Newton-Leibnizova vzorce. Jeho přínos ve vědě byl velký a některé jeho myšlenky přetrvaly do dneška.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann byl významným německým matematikem v 19. století. Prožil těžké dětství v rodině chudého luteránského kněze. Od mládí se zajímal o matematiku, ale bohužel v jeho rodné vesnici nebylo gymnázium a tudíž neměl příležitost svůj talent více rozvíjet. Jeho vášeň k matematice však byla silná a on se svého snu nechtěl vzdát. Svěřil se s tím otci a po jeho souhlasu odešel studovat matematiku do Berlína. Stal se významným profesorem matematiky. Podstatným způsobem přispěl k rozvoji matematické analýzy a diferenciální geometrie. Riemann zemřel na tuberkulózu při návštěvě Itálie ve věku nedožitých 40 let. Za svůj nepříliš dlouhý život dokázal významným způsobem proniknout do dějin matematiky. Jeho jméno najdeme nejen v mnoha matematických publikacích (Riemannova geometri, Riemannova křivost, Riemannova plocha a tak dále), ale je po něm pojmenován kráter na Měsíci a planetka 4167. Dnešní studenti ho mají v paměti hlavně v souvislosti s teorií integrálu.

Henri Léon Lebesgue

Henri Léon Lebesgue byl francouzský matematik na přelomu 19. - 20. století. Již na základní škole dosahoval skvělých výsledků. Vystudoval jednu z nejprestižnějších škol v Paříži, a to Ecole normale superieure. Zaobíral se především matematickou analýzou. V roce 1901 vytvořil teorii míry a v témže roce předložil teorii integrálu. Způsobilo to obrovské změny v dosavadní představě o integrálním počtu. Ve svých 32 letech se stal profesorem a vyučoval na mnoha univerzitách, avšak posledních 20 let svého života učil hlavně na univerzitě College de France.

Oskar Perron

Oskar Perron žil v letech 1880 - 1975. Po absolvování gymnázia odešel studovat vysokou školu do Mnichova a Berlína, kde se věnoval studiu matematiky a fyziky. V roce 1906 byl jmenován docentem. Stal se profesorem na univerzitách, avšak první světová válka narušila jeho kariéru. Po skončení války se začal plně věnovat pedagogice. V jeho publikacích, které sám vydal, se dozvíme řadu přínosných informací především z matematické analýzy. Jeho největším přínosem je vytvoření Perronova integrálu. Zajímal se také o diferenciální rovnice, geometrii, teorii čísel a mnoho dalšího.

Jaroslav Kurzweil

Posledním představitelem, kterému se budeme v práci věnovat, je český matematik ***Jaroslav Kurzweil***. Narodil se v roce 1926 a žije dodnes. Studoval na přírodovědecké fakultě v Praze matematiku a fyziku. V roce 1964 dostal státní cenu za matematiku. Získal mnoho medailí z oblasti vědy a od prezidenta ČR vyznamenání za zásluhy. Jeho přínos v oblasti vědy je velký. Nás hlavně zajímá, jakým způsobem přispěl do integrálního počtu. Jaroslav Kurzweil zobecnil teorii Perronova integrálu. V dnešní době se neustále tato teorie zkoumá. Ve světě je známá jako Henstockova-Kurzweilova.

2. Typy integrálu a jejich definice

V této kapitole se zaměříme na vysvětlení a bližší přiblížení pěti typů integrálu, a to konkrétně na Newtonův, Riemannův, Lebesgueův, Perronův a Kurzweilův integrál. Vybrány jsou z toho důvodu, že jsou jedny z nejznámějších a nejvýznamnějších integrálů. Existuje ale celá řada dalších typů integrálů, jako například Stieljesův, Daniellův, Youngův, Harrův, McShaneův.
V této kapitole byla využita literatura [7], [8].

2.1 Newtonův integrál

Newtonův integrál je ze všech integrálů, o kterých se budeme zmiňovat, na výpočet nejjednodušší. Je založen na deskriptivní definici.

Newtonův integrál se opírá o definici primitivní funkce, která je založena na znalosti derivace.

Definice 2.1. Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je definována na intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Funkci $F : J \to \mathbb{R}$, pro kterou je $F'(x) = f(x)$ pro $x \in J$, nazveme *primitivní funkcí* k funkci f na J.

Primitivní funkce neexistuje ke každé funkci. Například funkce sgn na intervalu $(-1, 1)$ nemá primitivní funkci.

Definice 2.2. Nechť $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a platí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na intervalu (a, b),

a) existuje-li primitivní funkce F k funkci f na (a, b),

b) existují-li vlastní limity $\lim_{x \to b-} F(x)$ a $\lim_{x \to a+} F(x)$

položme

$$(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Číslo $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nazveme *Newtonovým integrálem* funkce f od a do b. Množinu všech funkcí, pro které platí a) a b) označíme $N((a,b))$.

2.2 Riemannův integrál

V 19. století se objevuje Riemannův integrál. S teorií Riemannova integrálu je spojena celá řada matematiků. Největší zásluhu však má Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Riemannův integrál je na výpočet jeden z nejběžnějších. Setkávají se s ním běžně studenti na vysokých technických školách. Jeho formulace je velmi důležitá a to hlavně pro svoji geometrickou interpretaci. Je založen na konstrukci geometrických útvarů pod křivkou. Riemannův integrál je definován pouze pro omezené a nezáporné funkce na uzavřeném omezeném intervalu.

Nechť $f(x)$ je omezená a nezáporná funkce definována na intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Sestrojíme útvar, který je ohraničený přímkami $y=0$, $x=a$, $x=b$ a grafem funkce $f(x)$, což je množina:

$$M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\in\langle a,b\rangle, 0\le y\le f(x)\right\}.$$

Obsah tohoto útvaru určíme tak, že rozdělíme plochu útvaru na jednotlivé obdélníky, jejichž obsah umíme určit a sečteme jednotlivé obsahy.

Definici Riemannova integrálu říkáme konstruktivní definice integrálu. Existují dvě definice Riemannova integrálu, a to Darbouxova a Riemannova. V práci uvedeme obě dvě, jelikož jsou rovnocenné.

Darbouxova definice

Tato definice je běžnější a setkáváme se s ní častěji. Je založena na výpočtu horních a dolních integrálních součtů. Abychom ji pochopili, je třeba vysvětlit si několik primárních pojmů.

Definice 2.3. Nechť $D=\{a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{k-1}<\alpha_k=b\}$ je *dělení intervalu* $\langle a,b\rangle$, $(-\infty<a<b<\infty)$ a $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ je omezená funkce. Pro dané dělení D

označme

$$m_j = \inf\{f(x); x \in \langle \alpha_{j-1}, \alpha_j \rangle\}$$

a

$$M_j = \sup\{f(x); x \in \langle \alpha_{j-1}, \alpha_j \rangle\}$$

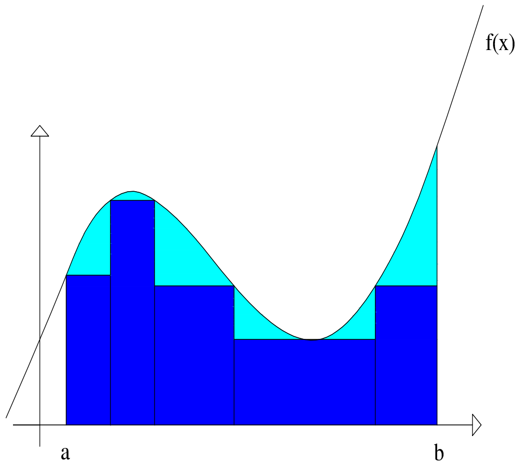
pro $j = 1, , \ldots, k$. Utvoříme *dolní integrální součet*

$$s(D, f) = \sum_{j=1}^{k} m_j(\alpha_j - \alpha_{j-1})$$

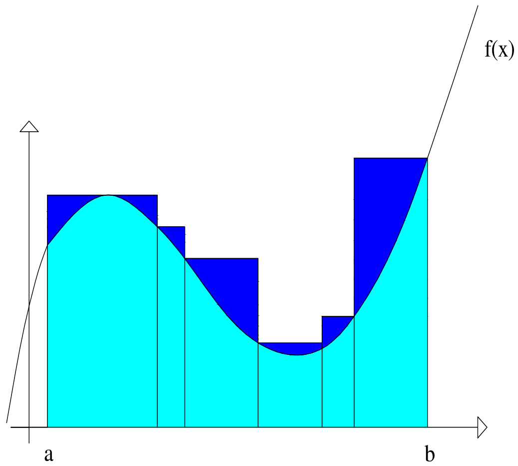
a *horní integrální součet*

$$S(D, f) = \sum_{j=1}^{k} M_j(\alpha_j - \alpha_{j-1}).$$

Dolní integrální součet vidíme na obrázku 2.4 a horní integrální součet na obrázku 2.5.



Obrázek 2.4: Dolní integrální součet



Obrázek 2.5: Horní integrální součet

Protože pro každé $j = 1, \ldots, k$ platí nerovnost $m_j \leq M_j$, dostaneme po sečtení ihned $s(D) \leq S(D)$. Jelikož zřejmě je

$$m = \inf\{f(x); x \in \langle a, b \rangle\} \leq m_j = \inf\{f(x); x \in \langle \alpha_{j-1}, \alpha_j \rangle\}$$

a

$$M_j = \sup\{f(x); x \in \langle \alpha_{j-1}, \alpha_j \rangle\} \leq M = \sup\{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$$

pro $j = 1, \ldots, k$, dostaneme pro každé dělení D nerovnosti

$$m(b - a) = \sum_{j=1}^{k} m(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \leq s(D) \leq S(D) \leq \sum_{j=1}^{k} M(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = M(b - a).$$

Všechny možné *horní (a též dolní) integrální součty* odpovídající funkci $f(x)$ tvoří tedy omezené množiny čísel. Označíme je

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup s(D) \quad \text{a} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf S(D),$$

kde sup a inf bereme přes všechna dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$.

Vzhledem k tomu, že množiny čísel $s(D)$ a $S(D)$ jsou omezené, existuje uvedené infimum a supremum. A tedy $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ se nazývá *dolním* a $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ se nazývá *horním integrálem* funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 2.1. Supremum má každá shora omezená množina a infimum má každá zdola omezená množina.

Původní Riemannova definice integrálu

Tuto definici vytvořil sám Riemann v roce 1854. Dospěl k závěru, že pokud konvergují délky dílčích intervalů k nule, pak můžeme integrál chápat jako limitu, ke které konvergují integrální součty.

Definice 2.4. Předpokládejme, že je $-\infty < a < b < \infty$. Je-li dáno $k+1$ bodů $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = b$, říkáme, že je dáno dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na intervaly $\langle \alpha_{j-1}, \alpha_j\rangle$, $j = 1, \ldots, k$. *Dělení intervalu* $\langle a, b\rangle$ označme písmenem D, kde $D = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k\}$. Číslo

$$\nu(D) = \max_{j=1,\ldots,k} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$$

nazveme normou dělení D. Jestliže v každém intervalu $\langle \alpha_{j-1}, \alpha_j\rangle$, $j = 1, \ldots, k$ je dán bod $\tau_j \in \langle \alpha_{j-1}, \alpha_j\rangle$, pak mluvíme o dělení s význačnými body a označíme jej symbolem $(D, \tau) = (D, \tau_1, \ldots, \tau_k)$, tedy

$$(D, \tau) = (D, \tau_1, \ldots, \tau_k) = \{a = \alpha_0 \leq \tau_1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{k-1} \leq \tau_k \leq \alpha_k = b\}.$$

Nechť je dána funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. K dělení $(D, \tau_1, \ldots, \tau_k)$ s význačnými body a k funkci $f(x)$ utvořme tzv. *Riemannův integrální součet*

$$\sigma(f; D, \tau) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}).$$

Definice 2.5. Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme *Riemannovým integrálem* funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ od a do b, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení s význačnými body (D, τ), pro které $\nu(D) < \delta$, platí nerovnost

$$|\sigma(f; D, \tau) - I| < \varepsilon.$$

Když existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ říkáme, že existuje Riemannův integrál $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2.3 Lebesgueův integrál

Dalším typem integrálu, kterým se budeme zabývat, je Lebesgueův integrál, jenž byl vytvořen Henrim Léonem Lebesguem. Tento integrál je obecnější než Riemannův integrál a má oproti němu spoustu výhod. Například díky Lebesgueovu integrálu můžeme integrovat nejen na intervalu, ale i přes libovolnou měřitelnou množinu. Než se dostaneme k samotné definici Lebesgueova integrálu, musíme zavést pár pojmů. Jelikož je rozsah práce omezený, uvedeme si dané pojmy pouze v bodech.

Teorie míry

Nejdřív si zavedeme pojem míra množiny v $\mathbb{R}$. Budeme ji označovat písmenem μ. To provedeme v několika krocích.

Nejdříve budeme definovat míru intervalů v $\mathbb{R}$

Míru intervalu $I \in \{(a, b), \langle a, b\rangle, (a, b\rangle, \langle a, b)\}$, kde $a \leq b$ je rovna jeho délce. Vypočítáme ji jako rozdíl dvou čísel, tedy $\mu(I) = b - a$. Všimněme si, že takto definovaná míra intervalů splňuje dvě obecné vlastnosti míry, a to že je nezáporná $\mu(I) \geq 0$, $\mu(\emptyset) = 0$ a aditivní $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, pokud $A \cap B = \emptyset$. Míra intervalů je však pro naše účely nedostatečná, a tak je nutné si ji nejprve rozšířit na sjednocení konečného počtu disjunktních intervalů. Tuto množinu označíme písmenem ε.

Rozšíření míry μ *z intervalů na* ε

Uvažujme množinu $M \in \varepsilon$, zapsanou jako $M = \bigcup_{i=1}^n I_i$, kde I_i je posloupnost po dvou disjunktních intervalů s krajními body a_i a b_i. Potom míra množiny M je rovna $\mu(M) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$. V tomto rozšíření také platí nezápornost a aditivita míry. Avšak ani v tomto případě není rozšíření dostatečné. Jelikož je cílem měřit, co možná nejvíce podmnožin v $\mathbb{R}$, tak si míru μ rozšíříme ještě jednou, na množinu všech měřitelných množin, kterou značíme $\mathcal{M}$.

Rozšíření míry μ z ε na $\mathcal{M}$

Prvkům $\mathcal{M}$ budeme říkat měřitelné množiny.

Rozšíření na tuto množinu probíhá ve dvou krocích.

I. Sestrojíme nejdříve funkci, kterou nazýváme vnější míra a označíme ji μ^*.

   Vnější míru $\mu^*(A)$ množiny $A \subset \mathbb{R}$ rozumíme $\mu^*(A) = \inf(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i)$, kde infimum se bere přes všechna spočetná otevřená pokrytí množiny A množinami z ε (tj. $M_i \in \varepsilon$, M_i je otevřená, $i \in \mathbb{N}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$). Na systému všech podmnožin množiny $\mathbb{R}$ bude však μ^* pouze σ-subaditivní, což znamená že:

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

   kde $A_i \subset \mathbb{R}$ a $i \in \mathbb{N}$.

   Jelikož potřebujeme σ-aditivitu, nikoli σ-subaditivitu, tak přichází na řadu druhý krok, kdy množinu $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$ zúžíme, co možná nejméně, na množinu všech měřitelných množin $\mathcal{M}$.

II. Najdeme podmnožinu $\mathcal{M}$ v množině všech podmnožin množiny $\mathbb{R}$.

   Definice 2.6. Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je konečně měřitelná, existuje-li posloupnost množin $A_n \in \varepsilon, n \in \mathbb{N}$, že $m^*(\Delta A, A_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Řekneme, že $A \subset \mathbb{R}$ je měřitelná, je-li sjednocením konečného nebo spočetného systému konečně měřitelných množin. Množinu všech měřitelných množin, pro které platí $A \subset \mathbb{R}$, značíme $\mathcal{M}$.

Podmnožina $\mathcal{M}$ má čtyři vlastnosti:

1. $\varepsilon \subset \mathcal{M}$
2. $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$
3. $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow (A \setminus B) \in \mathcal{M}$
4. $\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$, $A_i \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

a platí na ní 4. požadovaná vlastnost, že μ^* je již σ-aditivní. Míru μ^* na podmnožině $\mathcal{M}$ označíme jako Lebesgueovu míru a budeme ji dále značit písmenem μ.

Měřitelnými množinami jsou samozřejmě všechny intervaly a jejich konečná a spočetná sjednocení. Měřitelnou množinou je ale i například množina všech racionálních čísel (a její míra je nulová). Než definujeme Lebesgueův integrál, vysvětlíme si ještě pojmy měřitelná funkce, jednoduchá funkce a jednoduchá nezáporná měřitelná funkce, o které se samotná definice tohoto integrálu opírá.

Měřitelné funkce

Definice 2.7. Nechť $M \in \mathcal{M}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *měřitelná na množině* M, jestliže:

1. je definována skoro všude na M (skoro všude na M znamená, že je definovaná všude kromě množiny míry nula)
2. pro každé $a \in \mathbb{R}$ je množina $M_a(f) = \{x; x \in D_f \cap M, f(x) > a\}$ měřitelná.

Měřitelnost funkce je nutnou podmínkou její integrovatelnosti, ne však postačující. Pro definici integrálu si funkci f rozdělíme na dvě části, na kladnou a zápornou.

Definice 2.8. Nechť f je reálná funkce na množině M, přes kterou se integruje. Pro funkci f definujeme funkce

$$f^+(x) = \max(f(x), 0),$$

$$f^-(x) = \max(-f(x), 0),$$

které nazýváme *kladnou, resp. zápornou částí* funkce f.

Platí, že $f = f^+ - f^-$ a $f^+, f^- \geq 0$.

Funkce f je měřitelná na M právě tehdy, když jsou na M měřitelné obě funkce f^+a f^-.

Pro definici Lebesgueova integrálu potřebujeme ještě zavést pojem **jednoduchá funkce**.

Definice 2.9. Funkci $s(x)$ nazveme *jednoduchou funkcí*, jestliže její definiční obor jsou všechna reálná čísla a obor hodnot je konečná množina.

Jako příklad jednoduché funkce si uvedeme funkci χ_M, která se nazývá *charakteristickou funkcí* množiny M a nabývá hodnoty:

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus M \end{cases}$$

Definice 2.10. Nechť $s(x)$ je jednoduchá nezáporná měřitelná funkce na $\mathbb{R}$ a nechť $M \in \mathcal{M}$. Potom definujeme *integrál jednoduché nezáporné měřitelné funkce* takto:

$$\int_M s(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(M \cap M_i),$$

kde c_i jsou všechny hodnoty, které $s(x)$ nabývá a M_i jsou příslušné množiny, na nižse tyto hodnoty nabývají.

Po vysvětlení základních pojmů, přejdeme k **samotné definici Lebesgueova integrálu.**

Definice 2.11. Nechť $f(x)$ je nezáporná měřitelná funkce na $\mathbb{R}$ a $M \in \mathcal{M}$. Potom definujeme:

$$\int_M f(x) d\mu = \sup \int_M s(x) d\mu,$$

kde se supremum bere přes všechny jednoduché nezáporné měřitelné funkce $s(x)$ takové, že $s(x) \leq f(x)$ skoro všude na M.

Je-li $f(x)$ měřitelná na $M \in \mathcal{M}$ a alespoň jeden z integrálů $\int_M f(x)^+ d\mu$, $\int_M f(x)^- d\mu$ je konečný, definujeme:

$$\int_M f(x) d\mu = \int_M f(x)^+ d\mu - \int_M f(x)^- d\mu.$$

2.4 Perronův integrál

S tímto typu integrálu bylo poprvé seznámeno v práci *"Űber den Integralbegriff"* německého matematika Oskara Perrona. Definice Perronova integrálu pochází z roku 1914.

Při vytvoření definice se omezíme pouze na omezený uzavřený interval $J \subset \mathbb{R}$, tj. $J = \langle a, b \rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$.

Definice 2.12. Buď dána funkce $g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ a $x \in \langle a, b \rangle$. Definujme vztahem

$$\overline{D}g(x) = \lim \sup_{h \to 0, x+h \in \langle a,b \rangle} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

horní derivaci funkce g v bodě $x \in \langle a, b \rangle$ a vztahem

$$\underline{D}g(x) = \lim \inf_{h \to 0, x+h \in \langle a,b \rangle} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

dolní derivaci funkce g v bodě $x \in \langle a, b \rangle$.

Definice 2.13. Buď $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Funkci $M : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ nazveme *majorantou* k funkci $f(x)$, když pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$\underline{D}M(x) \geq f(x)$$

Funkci $m : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ nazveme *minorantou* k funkci $f(x)$, když pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$\overline{D}m(x) \leq f(x).$$

Definice 2.14. Když k dané funkci $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ existuje aspoň jedna majoranta i minoranta a když

$$\inf_M (M(b) - M(a)) = \sup_m (m(b) - m(a)) = I,$$

kde infimum bereme přes všechny majoranty a supremum přes všechny minoranty k funkci $f(x)$, řekneme, že funkce $f(x)$ má *Perronův integrál* $(P) \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ a klademe

$$I = (P) \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

V Perronově integrálu chápeme majoranty a minoranty jako primitivní funkci. Můžeme říci, že jestliže funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ má primitivní funkci $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, potom má funkce $f(x)$ Newtonův integrál a též i Perronův. Důvodem je, že primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ je současně majorantou i minorantou k funkci $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$. Oba integrály poté nabývají stejné hodnoty. Perronův integrál zahrnuje obecnější třídu funkcí než integrál Newtonův, protože na minoranty a majoranty nejsou kladeny takové požadavky jako na primitivní funkci.

2.5 Kurzweilův integrál

Tento typ integrálu vznikl jak v České republice, tak i v Anglii. Jeho tvůrci jsou český matematik Jaroslav Kurzweil a britský matematik Ralph Henstock, kteří tento typ integrálu vytvořili nezávisle na sobě. Z toho důvodu bývá tento integrál někdy taky nazýván jako Kurzweil-Henstockův integrál.

Definice 2.15. Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a nechť je dána funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Nechť $D = \{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \tau_k, \alpha_k\}$, je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Utvořme *integrální součet* příslušný k dělení D a k funkci f:

$$\sigma(f; D) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}),$$

kde $\sigma(f; D)$ je integrální součet.

Definice 2.16. Buď $-\infty < a < b < \infty$. Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme *Kurzweilovým integrálem* funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje funkce (kalibr) $\delta : \langle a, b\rangle \to (0, \infty)$ tak, že platí nerovnost

$$|\sigma(f; D) - I| < \varepsilon.$$

Kurzweilův integrál funkce f od a do b označíme $(K) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3. Vlastnosti integrálů a jejich vzájemné porovnávání

V poslední kapitole této práce jsou nejdříve shrnuty společné vlastnosti uvedených pěti typů integrálů, a poté se zaměříme na jejich odlišné vlastnosti. Uvedeme si příklady funkcí, které jsou integrovatelné v jednom smyslu a nejsou integrovatelné v jiném smyslu.
Stěžejní literaturou pro tuto kapitolu byly knihy [7], [12].

3.1 Obecné vlastnosti integrálů

Následující věty, které popisují dané vlastnosti, platí pro všechny typy zmíněných integrálů. První vlastnost, kterou si vysvětlíme, se nazývá linearita. Linearita znamená, že jestliže je každá z funkcí $f(x), g(x)$ integrovatelná zvlášť, pak mohu integrovat i součet těchto dvou funkcí, a zároveň pokud je integrovatelná funkce $f(x)$, tak je integrovatelná i funkce $cf(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Věta 3.1. *Nechť $a < b$ a nechť existují integrály $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ a dále nechť c je libovolné číslo. Pak existují i $\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x$ a platí:*

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \\ \int_a^b cf(x)\mathrm{d}x &= c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Další vlastností je monotonie, která říká, že pokud funkce $f(x)$ je větší nebo rovna funkci $g(x)$ na daném intervalu, pak tato vlastnost platí i pro integrály daných funkcí.

Věta 3.2. *Nechť $a < b$ a nechť existují integrály $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Pokud $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.*

Důsledek 3.3. *Nechť $a < b$ a nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Je-li $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.*

Věta 3.4. *Nechť $a < b < c$ a nechť existují integrály $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. Potom můžeme říci, že existuje i integrál $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ a platí:*

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

V případě Newtonova integrálu navíc požadujeme, aby funkce $f(x)$ byla v bodě c spojitá.

Věta 3.5. *Nechť $a < b$ a nechť existují integrály $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. Potom platí:*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

3.2 Specifické vlastnosti integrálů

Newtonův integrál

U Newtonova integrálu integrujeme přes otevřený interval (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Pokud je funkce v bodě spojitá, pak k ní existuje primitivní funkce. Výhodou je, že nepožadujeme, aby byl interval, přes který integrujeme, omezený. Omezená nemusí být ani integrovaná funkce na (a, b). Dalším kladem Newtonova integrálu je jeho snadný výpočet pomocí definice.

Riemannův integrál

Výhodou Riemannova integrálu je jeho snadno pochopitelná definice. Je tedy jedním z nejrozšířenějších typů integrálů při výuce. V případě Riemannova integrálu jsou množiny, přes které integrujeme omezené intervaly. Abychom mohli integrovat funkci, která není na (a, b) omezená, nebo funkci na otevřeném intervalu, byl zaveden tzv. nevlastní Riemannův integrál. Protože měl Riemannův integrál mnoho nevýhod, vznikl nový typ integrálu, který je obecnější, a to integrál Lebesgueův.

Lebesgueův integrál

Lebesgueův integrál má také své kladné i záporné stránky. Mezi klady můžeme řadit, že je obecnější než Riemannův integrál a více používanější v matematice. Pokud máme danou nějakou funkci $f(x)$ tak, aby byla integrovatelná v Lebesgueově smyslu, nemusí být spojitá v žádném bodě intervalu. Další specifickou vlastností je absolutní konvergence, která je důsledkem následující věty.

Věta 3.6. *Jsou-li $f(x), g(x)$ funkce měřitelné v M, platí:*

$$f \geq g \Rightarrow \int_M f \geq \int_M g,$$

kde musí samozřejmě oba integrály existovat.

Důsledek 3.7.

$$f \in L(M) \Leftrightarrow |f| \in L(M).$$

Nevýhodou Lebesgueova integrálu je jeho složitější definice a také to, že při jeho výpočtu nemůžeme vždy použít Newtonův-Leibnizův vzorec. Lebesgueův integrál je tedy složitější na výpočet. Jestliže je funkce integrovatelná jak newtonovsky, tak lebesgueovsky a jejich hodnoty se rovnají, pak mohu Lebesgueův integrál počítat pomocí Newtonova-Leibnizova vzorce. Výpočet se nám tedy zjednoduší.
V případě Lebesgueova integrálu můžeme integrovat přes libovolné měřitelné množiny, tedy speciálně i přes intervaly jakéhokoliv typu. Výhodou je, že se dá zobecnit do vyšších dimenzí a integrovat přes abstraktní množiny (užitečné např. v pravděpodobnosti).

Další dva typy integrálu, které uvedu, jsou známy hlavně pro odborníky.

Perronův integrál

Perronův integrál byl zaveden proto, abychom nemuseli požadovat pouze integrály funkcí, které konvergují absolutně, ale i ty, které konvergují neabsolutně. Šlo dále také o to, abychom mohli funkce počítat pomocí Newtonova-Leibnizova vzorce. Postupem času se definice jednotlivých integrálů stávají stále více obecnější, což je považováno za klad. Perronův integrál je zobecněním Lebesgueova integrálu. U Perronova integrálu narozdíl od Lebesgueova platí, že jestliže existuje jedna z vlastních limit $\lim_{a' \to a^+} \int_{a'}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ nebo $\lim_{b' \to b^-} \int_{a}^{b'} f(x)\mathrm{d}x$, existuje i integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

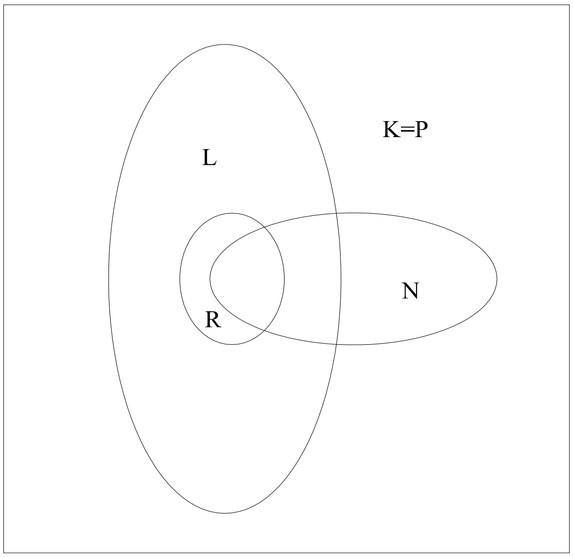
a je roven vypočítané limitě, což je jasně jeho výhoda. Množina funkcí, které jsou newtonovsky integrovatelné, jsou i perronovsky integrovatelné, ale nemusí být integrovatelné lebesgueovsky. Perronův integrál není absolutně konvergentní. To znamená, že pokud máme danou funkci $f(x)$ a je-li integrovatelná v Perronově smyslu, tak její absolutní hodnota nemusí být integrovatelná. Výhodou zde je, že pokud je perronovsky integrovatelná jak funkce $f(x)$, tak i $|f(x)|$, pak je tato funkce integrovatelná i lebesgueovsky. V Perronově integrálu integrujeme přes omezené množiny.

Kurzweilův integrál

Tento integrál má stejnou nevýhodu jako Riemannův integrál a to, že je definován na omezeném intervalu. Tedy nemůžeme integrovat integrály typu $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$, ani $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$. Existuje však možnost, jak tento integrál vypočítat, ale musíme definovat integrál jako limitu integrálu v konečných mezích stejně jako u nevlastního Riemannova integrálu.
Jeho výhodou je, že lze integrovat každou derivaci. Kurzweilův integrál je neabsolutně konvergentní na rozdíl od Lebesgueova integrálu, který je absolutně konvergentní.

3.3 Příklady

V této podkapitole jsou ukázány příklady funkcí, které jsou integrovatelné v jednom smyslu a nejsou integrovatelné ve smyslu druhém. Pro lepší názornost si ukážeme diagram 3.6, který je omezený na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pomocí tohoto diagramu nám budou lépe jasné jednotlivé vztahy mezi integrály.



Obrázek 3.6: Diagram

Je patrné, že Perronův integrál, který je zde označen písmenem (P) je ekvivalentní Kurzweilovu integrálu (K). Rozdíl je u nich pouze v tom, že definice Kurzweilova integrálu je jednodušší, jelikož si u ní vystačíme s elementárnějšími prostředky. Dále vidíme, že lebesgueovsky, riemannovsky a newtonovsky integrovatelné funkce jsou integrovatelné i kurzweilovsky, a tudíž i perronovsky. Také je vidět, že funkce, které mají Riemannův integrál, mají určitě i Lebesgueův, protože všechny funkce (R) jsou i (L) integrovatelné.

Ukážeme si některé zajímavé funkce.

Můžeme říci, že existuje mnoho funkcí, které jsou integrovatelné v Newtonově smyslu, ale nejsou integrovatelné v Riemannově smyslu a naopak. Samozřejmě, že existuje i celá řada funkcí (např. spojitých), které jsou integrovatelné jak v Riemannově smyslu, tak i v Newtonově smyslu. Pokud platí, že jsou integrovatelné v obou, tak si jsou integrály rovny a platí následující věta.

Věta 3.8. *Buď $-\infty < a < b < \infty$, nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce, pro kterou existuje Riemannův integrál $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a Newtonův integrál $(N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (tj. $f \in R([a,b]) \bigcap N((a,b))$). Potom je*

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Nás však zajímají hlavně příklady funkcí, kdy jeden z integrálů neexistuje. První je uveden příklad funkce, která je newtonovsky integrovatelná, ale není riemannovsky integrovatelná.

Příklad 3.1. Funkce $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, která má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má primitivní funkci tvaru $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(-1, 1)$. Z tohoto tvaru je patrné, že platí $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) = \sin 1$, a proto existuje Newtonův integrál $(N)\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$, jenž je roven 0. Protože ale daná funkce $f(x)$ není omezená na $(-1, 1)$, tak nemá Riemannův integrál.

Jak jsme si již řekli, existují i funkce, které mají Riemannův integrál, ale nemají integrál Newtonův.

Příklad 3.2. Funkce

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

která je omezená na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, má Riemannův integrál, ale nemá Newtonův, protože nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Má-li existovat vlastní derivace $F'(0)$, musela by platit rovnost mezi limitou $\lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1$ a limitou $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$. Vzhledem k tomu, že se tyto limity nerovnají, nemůže existovat $F'(0)$, a tedy neexistuje ani primitivní funkce $F(x)$.

Další situace, která může nastat, je, že budeme mít danou funkci, která nebude riemannovsky integrovatelná a bude integrovatelná lebesgueovsky. Opačná situace nemůže nastat.

Příklad 3.3. Příkladem je Dirichletova funkce, jež je na množině $\mathbb{R}$ všude nespojitá. Lebesgueův integrál existuje a lze zintegrovat tak, že si množinu $\mathbb{R}$ rozdělíme na množinu $\mathbb{Q}$ a na množinu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Když integrujeme přes $\mathbb{Q}$, výsledkem je nula. Důvodem je, že $\mathbb{Q}$ je spočetná množina a má míru nula. V množině $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ je integrand nulový. Mohu říci, že Dirichletova funkce není riemannovsky integrovatelná, ale je lebesgueovsky integrovatelná.

Ukažme si také příklad funkce, která má Newtonův integrál a nemá integrál Lebesgueův.

Příklad 3.4. Funkce $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ splňuje tento požadavek. Daná funkce má Newtonův integrál, který je určen součtem alternující řady tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x,$$

kdy její k-tý člen konverguje k nule. Důvodem existence Newtonova integrálu je, že se nám členy se sudým a lichým indexem ruší zároveň a vznikne nám tedy konečná limita. Zatímco u Lebesgueova integrálu posčítáme nejdříve členy se sudými indexy a pak členy s lichými indexy a odečteme je od sebe, pokud to lze. Bohužel v tomto případě tomu tak není, protože $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ je neabsolutně konvergentní. Tuto třídu funkcí Lebesgueův integrál nezahrnuje. Newtonův integrál existuje jak pro absolutně konvergentní, tak pro neabsolutně konvergentní funkce.

Dále si v této podkapitole uvedeme příklad funkce, která má Lebesgueův integrál a nemá integrál Newtonův. Je to například funkce signum, kterou jsme si vysvětlovali v (3.2).
Jelikož daná funkce má Riemannův integrál, tak má zákonitě i Lebesgueův integrál, ale nemá integrál Newtonův.

Ukážeme si případ, kdy funkce nemá Lebesgueův, ale má integrál Newtonův.

Příklad 3.5. Funkce je definována na intervalu $(0,1\rangle$ a má tvar $F(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}$. Derivace funkce je $F'(x) = \frac{-2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} + 2x \sin \frac{\pi}{x^2}$, a její hodnota v bodě 0 je $F'(0) = 0$. $F(x)$ není na intervalu $(0,1\rangle$ absolutně spojitá, a tedy $F'(x)$ nemá Lebesgueův integrál. Newtonův integrál existuje, protože k funkci $F'(x)$ existuje primitivní funkce. Tato funkce má samozřejmě také Kurzweilův a Perronův integrál.

V následujícím smyslu bychom mohli uvádět další typy funkcí, které jsou integrovatelné v jednom, ale nejsou integrovatelné v druhém smyslu. Kvůli jejich velkému množství jsou však vybrány pouze ty nejjednodušší.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo přiblížit čtenářům pojem integrál, což je jeden ze základních pojmů matematické analýzy. Snažila jsem se čtenářům přehledně shrnout danou problematiku.

V první kapitole jsem se věnovala historii integrálu. Z mého pohledu je tato kapitola zajímavá, jelikož se zde dozvíme, co předcházelo vzniku integrálu, který známe dnes.

Druhá kapitola se zaobírá pěti typy integrálu. Mnoho z nás jistě zná integrál Newtonův a Riemannův, ke kterým existuje dostatek odborné literatury. Méně čtenářů zná integrál Lebesgueův, který je založen na znalosti teorie míry. Proniknutí do dané problematiky je složitá záležitost, ale díky množství odborných knih se Lebesgueův integrál dá pochopit. Další dva typy integrálu, o kterých se zde zmiňuji, tedy integrál Perronův a Kurzweilův, jsou známy pouze u odborníků. Mohu říci, že zde byl problém sehnat jakýkoliv materiál k jejich zpracování.

Třetí, poslední kapitola, je pro studenty nejvíce přínosná, jelikož jsem porovnávala mezi sebou uvedených pět typů integrálů. Jsou zde také uvedeny specifikace každého typu integrálu a názorné příklady.

Seznam použité literatury

[1] Nikiforovskij, A. V. *Cesta k integrálu.* Moskva: nakladatelství Nauka, 1985

[2] Schwabik Š., Šarmanová P. *Malý průvodce historií integrálu.* Praha: Prometheus, 1996

[3] Bernhard Riemann [online], dostupné z: `http://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann` [cit. 2012-10-02]

[4] Henri Léon Lebesgue [online], dostupné z: `http://cs.wikipedia.org/wiki/Henri_L%C3%A9on_Lebesgue` [cit. 2012-10- 16]

[5] Oscar Perron [online], dostupné z: `http://de.wikipedia.org/wiki/Oskar_Perron` [cit. 2012-10-24]

[6] Jaroslav Kurzweil [online], dostupné z: `http://inserv.math.muni.cz/biografie/jaroslav_kurzweil.html` [cit. 2013-02-12]

[7] Schwabik, Š. *Integrace v R.* Praha: nakladatelství Karolinum, 1999

[8] Kopáček, J. *Matematická analýza pro fyziky III..* Praha: Matfyzpress, 2002

[9] Ženíšek, A. *Lebesgueův integral a základy funkcionální analýzy.* Brno: nakladatelství PC-DIR, 1998

[10] Jahnke, H. N. *Historie analýzy.* Pardubice: Nakladatelství RNDr. Karla Vašíčka, 2007

[11] Lebesgueův integrál [online], dostupné z:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Lebesgue%C5%AFv_integr%C3%A1l
[cit. 2013-02-14]

[12] Jarník, V. *Integrální počet I., II.* Praha: ČSAV, 1956