UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Jana Skácelová

Úlohy hierarchicky složené ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ

Olomouc 2019 vedoucí práce: PhDr. Radka Dofková, Ph. D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „*Úlohy hierarchicky složené ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ*“ vypracovala pod vedením PhDr. Radky Dofkové, Ph. D. samostatně a použila uvedené prameny a literaturu.

V Olomouci dne 18. dubna 2019

……………………………..

Jana Skácelová

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování PhDr. Radce Dofkové, Ph. D. za její cenné rady, trpělivost a ochotu při vedení mé diplomové práce. Rovněž bych chtěla poděkovat učitelům a žákům základních škol, díky nimž jsem získala podklady pro zpracování empirické části. Poděkování patří také mé rodině především mým rodičům, kteří mi byli po celou dobu studia velkou oporou.

Obsah

Úvod

Učební úlohy jsou nedílnou součástí každé vyučovací hodiny. Učitel předkládá žákům různé učební úlohy z několika důvodů. Ať už prostřednictvím nich žáci procvičují určitou oblast učiva nebo je učitelé využívají k tomu, aby zjistili, jak si žáci byli schopni dané učivo osvojit. Existují také úlohy, které podněcují žáky k bádání. Jedná se o tzv. badatelské úlohy, které jsou žákům předkládány v rámci badatelsky orientovaného vyučování (dále jen BOV). Dané pojetí vyučování se v současnosti dostává stále více do podvědomí a stává se častým předmětem diskuze. BOV může být vnímáno jako příležitost ke zpestření vyučování matematiky i jiných předmětů.

Jedním typem badatelských úloh v matematice jsou úlohy hierarchicky složené, které jsou tématem diplomové práce. Pozornost věnuji úlohám zaměřeným na 1. stupeň základní školy. V současné době neexistuje žádná sbírka, která by obsahovala typy těchto úloh sloužící učitelům jako pomoc při badatelsky orientované hodině matematiky.

Hlavním cílem diplomové práce je teoreticky vymezit problematiku úloh hierarchicky složených, vytvořit daný typ úloh a ověřit jejich efektivitu ve výuce. Diplomová práce má dvě části, teoretickou a empirickou. Teoretická část je rozčleněna do tří kapitol.

První kapitola je zaměřena na vyučování matematiky. Vhledem k tématu práce je zde charakterizován Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) a vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Dále jsou popsány dva naproti sobě postavené přístupy k matematickému vyučování, transmisivní a konstruktivistický.

Druhá kapitola se věnuje učebním úlohám a jejím parametrům. Dále je uvedena taxonomie učebních úloh podle D. Tollingerové, druhy učebních úloh a jejich řešení. V závěru kapitoly jsou shrnuty úlohy matematické, jejich struktura, funkce a klasifikace s konkrétními příklady úloh. Dané úlohy jsou vybrány z učebnic matematiky pro 1. stupeň základních škol.

Třetí kapitola vymezuje pojem badatelsky orientovaného vyučování matematice (dále jen BOVM), role učitele a žáka vhledem k BOVM a badatelské úlohy. Badatelské úlohy jsou děleny na několik typů, přičemž ke každému z nich uvádím příklad.

Empirická část je rozdělena do čtyř kapitol. Cílem empirické části je zjistit, jakým způsobem žáci 5. ročníku vybraných základních škol řeší úlohy hierarchicky složené. Ve čtvrté kapitole je nastíněna charakteristika výzkumného šetření. Jsou zde uvedeny cíle výzkumného šetření, dále výzkumné předpoklady, metody a výzkumný vzorek.

Pátá kapitola charakterizuje přípravnou fázi výzkumného šetření, do které je zahrnuta konstrukce úloh hierarchicky složených a předvýzkum. Nejprve je uvedeno zadání vytvořených úloh a každá úloha je blíže popsána. Následuje předvýzkum zaměřený na výběr třech úloh, které byly v rámci vlastního výzkumného šetření předloženy žákům k vyřešení.

V šesté kapitole je analyzováno řešení jednotlivých úloh. U každé úlohy jsou představeny kategorie řešení podle míry správnosti. Dále jsou analyzována chybná řešení a uvedeny nejčastější typy chyb.

Poslední kapitola je zaměřena na vyhodnocení dat. Každá úloha je vyhodnocena podle pohlaví, typu školy a paralelních tříd. Následuje vyhodnocení dotazníků, ve kterých žáci hodnotili vytvořené úlohy. Na závěr je uvedeno shrnutí výzkumného šetření.

Diplomová práce by mohla vést k vytvoření sbírky nejen úloh hierarchicky složených ale kompletně všech typů úloh badatelských. Uvedené úlohy mohou učitelé využít v hodinách matematiky, k oživení a zpestření vyučování. Práce by mohla sloužit jako inspirace pro autory různých učebnic k tvorbě učebnice, která by sloužila učitelům matematiky na 1. stupni základních škol, ale také pro rodiče k procvičování s dětmi.

TEORETICKÁ ČÁST

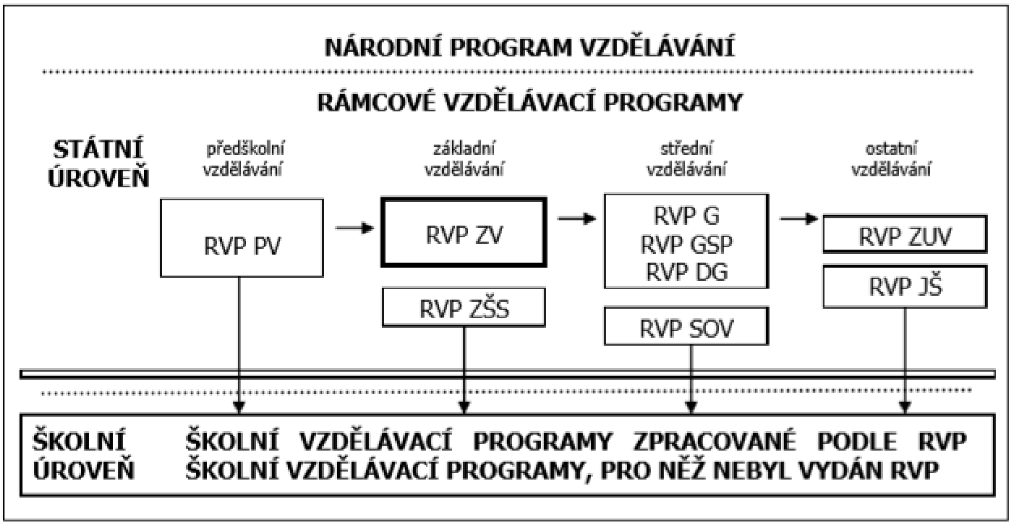
1 Vyučování matematice

Matematika jako přírodní věda má své kořeny již v pravěku. Z tohoto období se dochovalo malé množství hmotných dokladů. Jedním z nich jsou tzv. vrubovky, které nejpíš fungovaly jako počítadla (Fuchs, 1993). Matematika se řadí mezi profilové vyučovací předměty na základních a středním školách. Většina žáků a studentů má z matematiky, možná zbytečné, obavy. Ať už má každý k matematice jakýkoliv vztah, nevyhneme se jí a využíváme ji v každodenním životě. Bez matematiky bychom si jen těžko spočítali, kolik peněz zaplatíme za nákup, nebo kolik metrů pletiva potřebujeme na oplocení zahrady. Vyučování matematice je důležité, ale hlavně potřebné.

V Pedagogickém slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2009) je vyučování vymezeno obecně jako vše, co se děje ve škole během vyučovací hodiny, ovšem konkrétněji tento termín označuje lidskou činnost spočívající ve vzájemném působení učitele a žáka. Umyslným působím učitele a žáka dochází k „učení“, jehož věcným obsahem je učivo (soubor vědomostí a dovedností, který si má v průběhu vyučování žák osvojit).

Postavení matematiky a její učivo je vymezeno v kurikulárních dokumentech. V podkapitolách je popsána struktura Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV), konkrétně, vzdělávací oblast Matematika a její aplikace a její učivo. Dále také jednotlivé přístupy k matematickému vyučování, transmisivní a konstuktivistický.

1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání



Obrázek č. 1: Systém kurikulárních dokumentů (RVP ZV, 2017, s. 5)

V rámci zavádění nového systému kurikulárních dokumentů pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let byly na státní úrovni vytvořeny rámcové vzdělávací programy (dále jen RVP), které vymezují vzdělávání pro jednotlivé stupně vzdělávání, předškolního, základního a středního. Kurikulární dokumenty jsou utvářeny nejen na úrovni státní, ale také na úrovni školní. Na školní úrovni jsou postaveny školní vzdělávací programy (dále jen ŠVP), které si každá škola vytváří samostatně na základě RVP. Viz obrázek č. 1 výše.

Všechny kurikularní dokumenty státní a školní úrovně jsou veřejně přístupné (RVP ZV, 2017).

RVP ZV navazuje na Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání a vymezuje vše, co je společné a nezbytné v povinném vzdělávání žáků na základních školách. V RVP ZV je stanoven vzdělávací obsah, který zahrnuje očekávané výstupy a učivo, dále klíčové kompetence a průřezová témata. Jedna část dokumentu je zaměřena na vzdělávání žáků se specifickými vzdělávacími potřebami a žáků nadaných a mimořádně nadaných. Na konci dokumentu jsou charakterizovány zásady pro zpracování, vyhodnocování a úpravy ŠVP. V příloze jsou vymezeny standardy pro základní vzdělávání, které jsou nápomocny při dosahování cílů, jenž jsou stanoveny v RVP ZV. Z dokumentu vychází rámcové vzdělávací programy pro střední vzdělávání a školy ho využívají také při stanovování požadavků přijímacího řízení.

Po splnění devítileté povinné školní docházky by měli mít žáci osvojeny stanovené klíčové kompetence. Klíčové kompetence jsou charakterizovány jako „*souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti*." (RVP ZV, 2017, s. 10). Dělí se na kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence sociální a personální, kompetence občanské a kompetence pracovní.

Vzdělávací obsah v kurikulárním dokumentu se člení do devíti vzdělávacích oblastí, které jsou tvořeny vzdělávacími obory, jež jsou si blízké svým obsahem. Příkladem je vzdělávací oblast Jazyk a jazyková komunikace, do které spadají tři vzdělávací obory: Český jazyk a literatura, Cizí jazyk a Další cizí jazyk. Některé vzdělávací oblasti, např. Matematika a její aplikace, tvoří pouze jeden vzdělávací obor. U každé oblasti je uvedeno cílové zaměření, vzdělávací obsah jejich vzdělávacích oborů, očekávané výstupy, učivo a minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření.

Očekávané výstupy pro 1. stupeň základního vzdělávání jsou rozděleny pro dvě období, přičemž 1. období zahrnuje 1. – 3. ročník a 2. období 4. a 5. ročník (RVP ZV, 2017).

1.1.1 Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace se soustřeďuje na aktivní činnosti založené na práci s matematickými objekty a uplatnění matematiky v reálných situacích. Prostřednictvím této oblasti získává žák vědomosti a dovednosti, které využije v praktickém životě, a matematickou gramotnost (RVP ZV, 2017).

Jana Straková (in Hošpesová, 2011, s. 26) definuje matematickou gramotnost jako „*schopnost rozeznat a pochopit matematické problémy, zabývat se jimi a využívat matematiku v soukromém životě, v zaměstnání a ve společnosti přátel a příbuzných jako konstruktivní, zainteresovaný a přemýšlivý občan*“.

Fuchs, Hošpesová a Lišková (2006) uvádí, že matematická gramotnost na 1. stupni je chápána jako dovednost počítat zpaměti a písemně. Význam rychlého a přesného počítání zpaměti už není tak vysoký, jako byl dříve kvůli rozvoji techniky, která umožňuje provádět výpočty. Díky osvojené dovednosti počítat mohou žáci odhadnout přibližný výsledek, a tak si ověřit, že se při použití kalkulačky nedopustili větší chyby.

V dané vzdělávací oblasti jsou žáci vedeni k tomu, aby využívali získané matematické vědomosti a dovednosti v praktických činnostech, rozvíjeli svou paměť numerickými výpočty a osvojili si důležité matematické vzorce a algoritmy. Dalším cílem je rozvíjet logické a kombinatorické myšlení, řešení matematických problémů, užívání přesné matematické terminologie a symbolů. Dále rozvíjet systematičnost, přesnost, vytrvalost a v neposlední řadě důvěru ve schopnost řešit úlohy (RVP ZV, 2017).

Vzdělávací obsah je rozčleněn do čtyř tematických okruhů. První tematický okruh jako jediný nemá jednotný název pro oba stupně základního vzdělávání. Na prvním stupni se nazývá **Číslo a početní operace**, na nějž na druhém stupni navazuje **Číslo a proměnná**. Prostřednictvím tohoto tematického okruhu se žáci učí provádět aritmetické operace, porozumět postupu, kterým jsou operace provedena a propojit je s reálnou situací.

Dalším tematickým okruhem jsou **Závislosti, vztahy a práce s daty**. Cílem tohoto okruhu je naučit žáky rozpoznávat určité změny a závislosti běžných jevů v reálném světě. Dále se učí pracovat s tabulkami, diagramy a grafy, kde vyhledávají různé informace. Jednoduché typy se učí také sami vytvořit (RVP ZV, 2017).

Dalším okruhem je **Geometrie v rovině a v prostoru**, kde se žáci věnují určování a znázorňování geometrických útvarů, hledání podobností a odlišností jednotlivých útvarů a určování vzájemné polohy objektů v rovině nebo prostoru. Kromě toho žáci porovnávají, odhadují a měří délku, počítají obvod, obsah, povrch a objem a zdokonalují svůj grafický projev.

Poslední tematický okruh s názvem **Nestandardní aplikační úlohy a problémy** vyžaduje především uplatnění logického myšlení. Úlohy spadající do tohoto tematického okruhu by měly prostupovat všemi tematickými okruhy napříč celým základním vzděláváním. Žáci si osvojují řešení problémových situací a úloh z běžného života, třídění údajů a podmínek a provádění situačních náčrtů (RVP ZV, 2017).

Žáci jsou především směřováni k naplňování všech šesti typů klíčových kompetencí. Dle náročnosti tohoto vyučovacího předmětu je zjevné, že v matematice nejvíce uplatňují kompetence k řešení problémů. K naplňování těchto kompetencí by měli žáci řešit úlohy, které nemají pouze jeden správný výsledek. Dále úlohy, u nichž budou vnímat jednotlivé vztahy, zákonitosti a souvislosti a hlavně úlohy, které podporují přirozenou tvořivost (Fuchs, Hošpesová a Lišková, 2006).

1.2 Transmisivní a konstruktivistický přístup k matematickému vyučování

Jak již bylo zmíněno výše, rozlišují se dva přístupy k vyučování matematice, a to transmisivní a konstruktivistický. Toto rozdělení vychází z role, kterou má učitel ve výuce a jak je nahlíženo na žáka.

Transmisivní přístup k matematickému vyučování

Transmisivní přístup k matematickému vyučování je založený na výukových strategiích, prostřednictvím kterých jsou žákům předávány vědomosti a dovednosti v kompletní podobě. Žáci mají v tomto přístupu roli pasivních příjemců a jsou směřováni k osvojení hotových poznatků (Zormanová, 2012).

Hejný, Kuřina (2015) uvádí, že transmisivní vyučování přispívá k rozvoji paměti žáka, ale neposkytuje dostatek prostoru k rozvoji myšlení a tvořivosti. Důraz je kladen spíš na fakta a výsledky než na porozumění.

Kvůli zaměření na učební osnovy a obsah vyučování se mu říká také tradiční nebo klasické, v němž je klíčovou postavou učitel (Zormanová, 2012). Dále se může označovat jako instruktivní podle způsobu výkladu, který má formu instrukce (Stehlíková, 2004).

Učitel vystupuje v roli trenéra, který vede žáky k tomu, aby podali co nejlepší výkon. Seznamuje žáky s řešením úloh, se kterými se může setkat, a ukazuje, jak je co nejrychleji a nejjednodušeji řešit. Je potřeba, aby se neustále opakovaly definice, věty a důkazy, aby si žák zapamatoval jejich přesné znění. Veškeré poznatky žákům předkládá ve formě instrukcí, pouček, vzorců, tabulek, obrázků, aby jim usnadnil učení (Stehlíková, 2004).

Podle Hejného, Kuřiny (2015) je poskytování instrukcí a vzorů způsob, jak se snadno a rychle naučit řešení různých úloh. Ovšem není jisté, zda dané úloze žák rozumí, nebo ji řeší pouze podle naučených postupů.

Žák má omezenou roli. Měl by se naučit a upevnit fakta, která mu učitel předložil, a následně je použít při řešení standardních úloh, nebo v případě potřeby odříkat. Jeho postavení je závislé na učiteli (Stehlíková, 2004).

Činnost učitele a žáka v transmisivním vyučování je blíže popsána v následující tabulce č. 1:

Činnost učitele	**Činnost žáka**
▪ stanovuje si, co bude v hodině probírat, ▪ rozdělí učivo na tematické celky a témata, která odpovídají kapitolám v učebnici, pro vyučovací hodinu si vybírá určité téma, ▪ vybrané téma oznámí žákům na začátku hodiny, ▪ na začátku hodiny opakuje a zkouší učivo z předchozích hodin jako přípravu pro novou učební látku, ▪ nové učivo vyloží žákům (studentům), ▪ provede zápis na tabuli (popř. nadiktuje zápis), ▪ řídí opakování a upevňování učiva, ▪ kontroluje zvládnutí požadovaných znalostí a dovedností, ▪ hodnotí zvládnutou úroveň učiva, ▪ na základě podaných výkonů rozdělí žáky do několika skupin a oznámkuje, ▪ probrané učivo přesune do kategorie „staré učivo“	▪ netuší, co bude v hodině dělat, nebo má jen matnou představu na základě dříve zpracovaného učiva, vzpomíná, kde se s tématem setkal, ▪ vyslechne informaci, které téma se bude probírat a kde toto téma najde v učebnici *(!!! cíle, kterých má v hodině dosáhnout, mu zůstávají skryté)*, ▪ prokazuje, co si zapamatoval z předcházející hodiny a jak zvládá „staré učivo“, ▪ poslouchá a vnímá výklad učitele (rozdílně a v různé intenzitě), ▪ provádí zápis do sešitu ▪ odpovídá na položené otázky, prokazuje tím, že učitelův výklad poslouchal, že učivo „chápe a rozumí mu“, ▪ řeší zadané úkoly, aplikuje zvládnuté postupy na upravené situace, reprodukuje učivo

▪ připravuje pro žáky „nové učivo“.	▪ vyslechne a vnitřně zpracuje informaci o udělené známce, (!!! někdy bezprostředně po výkonu, jindy s časovým zpožděním, !!! méně často se dozví, co neuměl a co má dělat, aby zjištěné nedostatky odstranil), ▪ učivo a činnosti, které byly předmětem hodnocení, přesouvá do kategorie „staré učivo“ (není třeba se jím již nadále zabývat).

Tabulka č. 1: Transmisivní model činností učitele a žáka (Kolář, Šikulová, 2007, s. 33)

Konstruktivistický přístup k matematickému vyučování

Konstruktivismus je v Pedagogickém slovníku charakterizován jako *„široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující aktivní úlohu subjektu v poznávání světa, význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, důležitost jeho interakce s prostředím a společností“* (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, s. 131).

Pedagogický konstruktivismus je stavěn naproti transmisivnímu vyučování. Je formulován jako snaha o jeho překonání. V konstruktivistickém vyučování žáci pracují aktivně s předloženými informacemi a zkušenostmi, čímž si sami vytvářejí významy a porozumění smyslu. Při poznání vycházejí ze svých dosavadních znalostí, dovedností, zkušeností a mentálních struktur. Žáci jsou v tomto přístupu aktivní na základě poskytnuté příležitosti pracovat s učivem. Nejprve pracují s učivem prostřednictvím fyzické činnosti, čímž je např. manipulace s objekty, … Později probíhají činnosti pouze v mysli žáka. (Kalhous, Obst, 2002).

Je zde vyzdvihována role žáka a proces učení nad roli učitele a proces vyučování. Dále je zdůrazňováno učení jako proces vytváření poznávání a aktivní manipulování. Díky tomuto se učení stává nejefektivnějším, a navozování problémových situací vede k podpoře smysluplného učení a motivaci. Porozumění vychází ze sociálního a kulturního kontextu a na základě aktivizace předchozího porozumění začíná nové učení (Molnár, Schubertová, Vaněk, 2007).

Podstatou konstruktivistického přístupu k matematickému vyučování je *„aktivní vytváření části matematiky v duševním světě dítěte. Podle povahy žáka může být podkladem* *pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé"* (Hejný, Kuřina, 2015, s. 196).

Hejný, Kuřina (2015) vymezují tzv. **desatero konstruktivismu**, což je deset zásad, z nichž vychází pojetí konstruktivistických přístupů k matematice:

1. **Aktivita** – matematikou rozumíme specifickou lidskou aktivitu, nejen její výsledek formulovaný do souboru definic, vět a důkazů.
2. **Řešení úloh** – matematická aktivita je založena na hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorbě pojmů, zobecňování a dokazování tvrzení.
3. **Konstrukce poznatků** – poznatky jsou na rozdíl od informací nepřenosné a vznikají v mysli člověka, který poznává.
4. **Zkušenosti** – na základě zkušeností z běžného života a ze školy a opírání se o informace si poznávající vytváří určité poznatky.
5. **Podnětné prostředí** – pro matematické vzdělávání se podstatné vytvořit prostředí, které bude podněcovat tvořivost. Pro vytvoření podnětného prostředí je potřeba tvořivého učitele, dostatku vhodných podnětů a sociálního klimatu, které je příznivé tvořivosti.
6. **Interakce** – vytváření poznatků sice probíhá individuálně, ale ovlivňuje ho vzájemné sociální působení, ke kterému dochází ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, argumentace, …).
7. **Reprezentace a strukturování** – konstruktivistický přístup k vyučování charakterizuje využívání různých druhů prezentace a strukturální budování matematického světa.
8. **Komunikace** – pro konstruktivistické vyučování v matematice je důležitá komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky, např. matematické symboliky.
9. **Vzdělávací proces** – vzdělávací proces v matematice by měl být hodnocen nejméně ze tří hledisek, kterými jsou porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla a aplikace matematiky.
10. **Formální poznání** – formální poznávání je poznání založené na informacích, které jsou ukládány do paměti. K těmto informacím, jež jsou většinou rychle zapomenuty a jen výjimečně využívány netriviálně, směřuje především vyučování, ve kterém dochází k předávání informací a návodů, jak postupovat = transmisivní vyučování (Hejný, Kuřina, 2015).

Učitel formuje osobnost žáka tím, že mu neposkytuje hotové poznatky, ale směřuje ho, aby k poznání došel sám. Role učitele spočívá také v naslouchání žákovi, který mu vypráví o jeho cestě za hledáním řešení. Dále je učitel vhodný partner k diskusi a sdílí se žákem jeho radost ze všech nových objevů. Pokud se žákovi nedaří problém vyřešit, podpoří ho, dodá mu sebedůvěru a víru. Nabízí mu doplňující otázky a rady, aby se mu podařilo problém vyřešit. Učitel směřuje žáky k tomu, aby si vybudovali vlastní obraz matematického světa, který vychází z jejich zkušeností (Stehlíková, 2004).

Učitel by měl žáky především motivovat k aktivitě, což probíhá různými způsoby. Nejdůležitější z nich je využívání vhodných otázek, problémů a výsledků. Učitel směřuje žáky k formulování vlastních nápadů, názorů, námitek. Pokud je úspěšný, začíná konstruktivní proces poznávání (Hejný, Kuřina, 2015).

Role žáka v konstruktivistickém vyučování je, oproti vyučování transmisivnímu, aktivnější. Žák samostatně zkoumá, klade si vlastní otázky, posuzuje výsledky a názory jiných a učí se pracovat s chybou, poučí se z ní a opraví ji (Stehlíková, 2004).

Porovnání činnosti žáka a učitele, hodnoty poznání a dalších oblastí transmisivního a konstruktivistického vyučování jsou shrnuty v následující tabulce č. 2:

Polaritní dipól	**Konstruktivistické vyučování**	**Transmisivní vyučování**
hodnota poznání	kvalita	kvantita
motivace	vnitřní	vnější
trvanlivost poznání	dlouhodobá	krátkodobá
vztah učitel-žák	partnerský	submisivní
klima	důvěry	strachu
nositel aktivity	žák	učitel
činnost žáka	tvořivá	imitativní
poznatek žáka	produktivní	imitativní
nosná otázka	Co? a Proč?	Jak?

Tabulka č. 2: Srovnání transmisivního a konstruktivistického vyučování (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004, s. 21)

2 Učební úlohy

Učební úlohy označují všechna zadání, která užívá každý učitel ve své každodenní práci. Zadáním určité úlohy učitel vyvolává činnost žáka potřebnou k efektivnímu učení. Učební úlohy slouží jako jeden z nejdůležitějších nástrojů řízení učení. Dále se využívají k aktivizaci žáků a k ověřování, zda byly naplněny stanovené výukové cíle. Výukové cíle a učební úlohy by měly být stanoveny tak, aby rozvíjely všechny tři složky osobnosti žáka – kognitivní, afektivní a psychomotorickou. Řešením by si žáci měly osvojit nové vědomosti a dovednosti, a také zopakovat a procvičit učivo, které se naučili dříve. Z poznatků, které se dozvěděli, by měli žáci postupně vytvářet ucelený systém daného vyučovacího předmětu (Kalhous, Obst, 2002).

Dříve byla úloha chápána jako jednoduché zadání: opsat text podle zadání, zpaměti reprodukovat naučenou část textu, vyřešit úlohu v matematice nebo projít si již vyřešený matematický příklad.

V současnosti je pojetí učební úlohy mnohem širší a vyžaduje splnění různých činností. Například vyřešení úlohy z geometrie, doplnění chybějících částí slov do textu, provedení stanoveného pokusu, porozumění dotazu kladeného v cizím jazyce a vhodná reakce na něj, najít na mapě požadované body a využívat internet ke zjištění různých informací (Mareš, 2013).

2.1 Vymezení učebních úloh a jejich parametry

Dříve než budou klasifikovány a popsány učební úlohy, je nutné daný pojem nejprve teoreticky vymezit. Definice pojmu učební úlohy není jednotná, proto bude nejprve uvedeno, jak učební úlohy charakterizují různí autoři.

D. Holoušová (in Kalhous, Obst, 2002) vymezuje učební úlohy jako širokou škálu všech učebních zadání, která jsou řazeny postupně od nejjednodušších úkolů, jejichž řešení je založeno pouze na pamětní reprodukci poznatků, až po úkoly složité, u jejichž řešení je vyžadováno tvořivé myšlení.

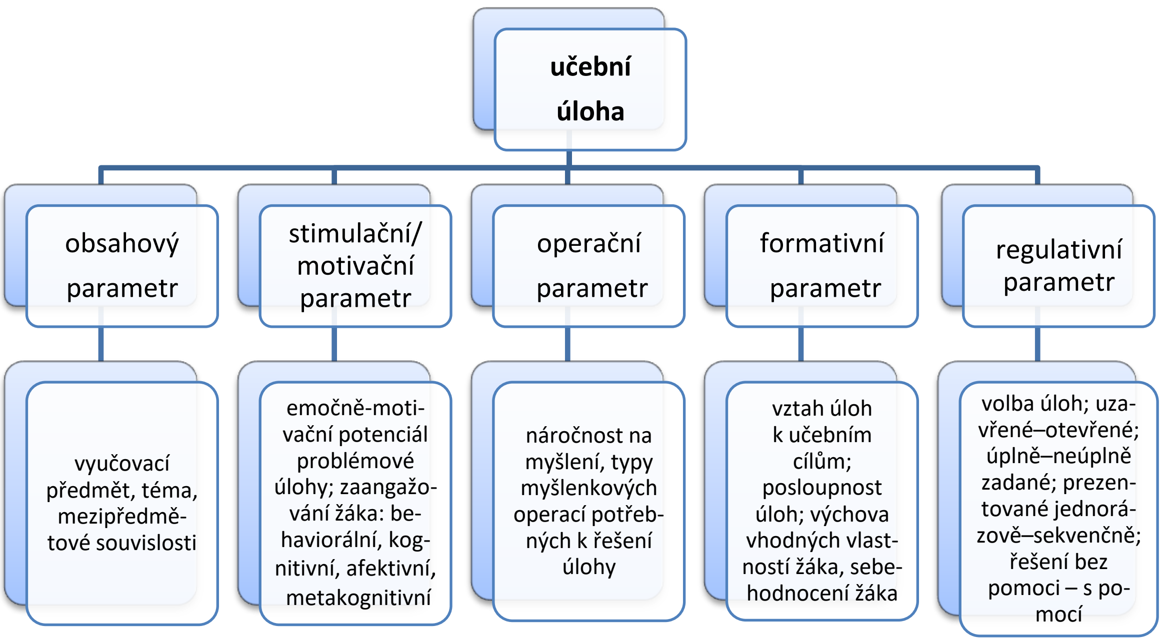
V Pedagogickém slovníku je učební úloha definována jako *„každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle*“. (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, s. 323) Podobně je pojem učební úloha vymezena v publikaci Pedagogická psychologie. Podle Mareše (2013) rozumíme učební úlohou práci pro jednotlivce nebo skupiny žáků, která byla promyšlená a připravená tak, aby zajistila dosažení stanoveného učebního cíle. Při řešení učební úlohy, jež má rozvíjet vědomosti a dovednosti žáka, je podstatný nejen výsledek, ale i postup, kterým se k výsledku směřuje.

Jak uvádí Nikl (1997), učební úloha je každé zadání, které je zadáváno s určitým didaktickým záměrem a stanovuje úkony, které je potřeba provést. Řešení úlohy se provádí poznávacími a manuálními operacemi. Dané operace žák vybírá z postupů, které již zná nebo si je teprve osvojí.

Podle D. Tollingerové (in Helus, a kol., 2013) plní učební úloha čtyři základní funkce:

1. působí jako příčina podněcující žáka k činnosti
2. poskytuje prostor pro činnost žáka a z části určuje operace, které by měl žák při řešení využít
3. slouží jako podmínka podněcující žáka k činnosti – řešením úlohy nejen, že žáci dojdou k určitému výsledku, ale osvojí si činnosti v průběhu řešení, které k danému výsledku směřují
4. funguje jako prostředek, prostřednictvím kterého lze řídit činnost žáka

V odborné literatuře je rozlišováno pět parametrů učební úlohy: obsahový, stimulační (motivační), operační, formativní a regulativní (obrázek č. 2). Následně budou jednotlivé parametry podrobněji charakterizovány.



Obrázek č. 2: Parametry učební úlohy (Mareš, 2013, s. 366)

Obsahový parametr je dán zvláštnostmi každého vyučovacího předmětu, které se odráží v zadání jednotlivých učebních úloh, jež žáci v rámci daného předmětu řeší. V některých vyučovacích předmětech, které jsou si obsahově blízké, např. matematika a fyzika, se dají využívat podobné typy úloh. U kombinací jiných předmětů, které jsou si vzdálenější, je využití podobných úloh komplikovanější.

Z hlediska obsahu se podoba učebních úloh liší i v rámci jednoho předmětu. Všechny úlohy v matematice jsou vytvořeny tak, aby žáky vedly k provedení důkladné analýzy, logickému myšlení a přesnému vyjadřování. Mimo jiné jsou patrné rozdíly mezi úlohami z jednotlivých odvětví předmětu, např. aritmetiky, algebry, kombinatoriky, planimetrie, atd. (Mareš, 2013).

Stimulační (motivační) parametr učební úlohy ovlivňuje postoj žáka k úloze a zájem o její řešení. Podle D. Tollingerové (in Mareš, 2013) by měla mít učební úloha emočně-motivační náboj, podněcovat zvědavost a zvídavost žáků a vzbuzovat u nich touhu podat co nejlepší výkon. Motivační potenciál u různých typů učebních úloh se samozřejmě liší. Nejlepší motivační potenciál mají pravděpodobně tzv. problémové úlohy, které jsou pro žáky zajímavé kvůli svému obsahu.

Stimulační hodnota určité učební úlohy není dána pouze podobou zadání a obsahem učební úlohy, ale závisí mimo jiné na individuálních a věkových zvláštnostech žáků, kterým je úloha předložena k řešení, dále na dosaženém stupni přípravy předcházející řešení dané učební úlohy a na vzájemných vztazích, které panují mezi učitelem a žáky (Helus, a kol., 1979).

Podle Nikla (1997) má na stimulační hodnotu vliv také preciznost formulace úlohy, přesně vymezené používané termíny, přiměřenost obsahu úlohy nebo grafické doplnění.

Operační parametr stanovuje operace, které by měl žák provést, aby se mu podařilo vyřešit předloženou učební úlohu a dosáhl stanoveného cíle, ze kterého dané početní operace vycházejí. Učební úloha tedy slouží jako prostředek k naplnění určitého učebního cíle. Učební úlohy s požadovaným operačním parametrem jsou formulovány na základě taxonomií učebních úloh, ve kterých jsou většinou úlohy řazeny podle narůstající náročnosti myšlenkových operací žáků, podrobněji v podkapitole 2.3 (Maňák, Švec, 2003)

Formativní parametr se týká formulování znalostí a dovedností žáků. Učební úlohy se zadávají žákům proto, aby si díky nim osvojili učivo, které bylo stanoveno k naplnění cíle vyučovací hodiny, tématu nebo předmětu. Dále se prostřednictvím zadaných úloh žáci mohou učit věcem, které doposud chápali nesprávně nebo si doplnit informace, jež neměli možnost si z důvodu své nepřítomnosti osvojit. Školní vyučování je založeno na systematické práci učitelů a žáků, kteří se zabývají kompletními soubory úloh, nikoliv řešením izolovaných učebních úloh. Obtížnost jednotlivých úloh by v rámci celého systému měla postupně gradovat. Úlohy na stejné úrovni by měly být využity k doplnění chybějícího učiva nebo procvičení učiva, které činí žákům problémy.

Učební úlohy mohou kromě znalostí a dovedností formovat také osobnostní vlastnosti žáků. Řešením různých typů úloh dochází k rozvíjení tvořivosti, pečlivosti, přesnosti, pohotovosti, vytrvalosti atd. Dobře zvolené a promyšlené učební úlohy mohou mít vliv i na sebepojetí žáků (Mareš, 2013).

Regulativní parametr učební úlohy souvisí s řízením žákovy činnosti. Průběh řešení je částečně ovlivňován formou zadání. Mareš (2013) popisuje pět přístupů k učebním úlohám, které řídí činnost žáka:

- úlohy, které si může žák z nabízeného souboru úloh zvolit sám a úlohy, které jsou vybrány a předloženy někým jiným, např. učitelem
- úlohy, u kterých žák sám nic nedoplňuje, ale pouze vybírá správnou odpověď z předložených možností a úlohy, u kterých musí žák odpověď formulovat samostatně
- úlohy, které jsou celkově vymezené a jsou uvedeny všechny potřebné údaje k řešení a úlohy, které mají zadání vymezené jen částečně, díky němuž mají žáci širší prostor pro aktivitu
- úlohy, jejichž zadání je kompletní a v průběhu řešení se nemění a úlohy, jejichž zadání se je postupně změněno a upravováno, podle toho, jestli jsou žáci při řešení úspěšní nebo se vyskytly nějaké problémy
- úlohy, které musí žák vypracovat samostatně a není umožněno, aby využil něčí pomoci a úlohy, které žákovi umožňují nahlédnout do různých materiálů, např. příručky, slovníky,… nebo vyhledávat informace na internetu, popřípadě požádat o pomoc učitele nebo některého ze spolužáků, podrobněji v podkapitole 2.4

Podle Heluse (1979) tvoří regulativní parametr tři dílčí aspekty:

1. aspekt určenosti

Podle tohoto aspektu se úlohy dělí na úplně vymezené a neúplně vymezené. Úlohy úplně vymezené mají všechny potřebné podmínky, aby mohly být vyřešeny. Úlohám neúplně vymezeným některé nutné podmínky k vyřešení chybí, avšak jsou pro řešitele častěji zajímavější a mají větší stimulační potenciál.

Úlohy neúplně vymezené můžeme dále rozdělit na dalších pět typů:

a) úlohy, které mají všechny potřebné informace, aby mohly být vyřešeny, ale chybí jim otázka, kterou musí žák samostatně vytvořit
b) úlohy, které obsahují všechny potřebné informace, aby mohly být vyřešeny, a navíc obsahují údaje, které jsou pro řešení nepotřebné a matoucí
c) úlohy, kterým chybí nějaké potřebné informace k vyřešení, jež musí žák objevit a sám si je doplnit nebo požádat učitele, jestli by mu je sdělil
d) úlohy, které neobsahují všechny potřebné informace k vyřešení a navíc jsou v zadání zmíněny informace, které jsou k řešení nepotřebné a matoucí
e) úlohy, ve kterých se mění některé potřebné informace – jde o úlohy, které mají hlavní část s různými odvozenými variantami

2. aspekt heurističnosti úlohy

Heurističnost úlohy je možné chápat jako stupeň tvořivosti při řešení. Tvořivost při řešení úlohy se využívá u úloh, které nelze vyřešit podle známého algoritmu. Úlohy se dělí podle míry tvořivosti při řešení do čtyř skupin:

a) úlohy, u kterých jsou řešitelovi známy všechny potřebné informace a může je řešit podle známých pravidel a postupů
b) úlohy, u kterých řešitel zná pouze některé potřebné informace a řeší je obvykle vybíráním z nabízených možností nebo jejich prověřováním
c) úlohy, u kterých řešitel nezná žádné potřebné informace k řešení úlohy, ale podstatné je, že si je může na základě předchozích zkušeností vybavit z paměti
d) úlohy, které se od předchozího typu liší v tom, že řešitel nemá ve své paměti uloženy poznatky, důležité k jejich vyřešení, a musí si je nejprve osvojit, aby je následně mohl použít při řešení daných úloh

Tato typologie úloh závisí na znalostech řešitele. Úlohy, které jsou pro jednoho řešitele (jenž zná příslušný algoritmus) úlohou prvního nebo druhého typu, je pro jiného řešitele úlohou třetího nebo čtvrtého typu, protože ještě daný algoritmus osvojený nemá.

3. aspekt míry pomoci

Učitel může poskytnout žákovi přímou pomoc tím, že mu sdělí určité informace, nebo nepřímou tak, že ho nějakým způsobem navede, aby mohl následně úlohu vyřešit.

2.2 Taxonomie učebních úloh

D. Tollingerová (in Kalhoust, Obst, 2002) utřídila učební úlohy do jednotlivých kategorií podle stoupající náročnosti poznávacích operací nutných k jejich řešení. Taxonomii učebních úloh, která obsahuje 27 typů úloh, rozdělených do pěti kategorií, autorka zpracovala na základě Bloomovy taxonomie kognitivních cílů. Učební úlohy dělíme na:

1) Úlohy vyžadující pamětní reprodukci poznatků

Úlohy spadající do této kategorie vyžadují od žáka pamětní operace. Žák musí určitá fakta vyhledat v paměti, vybavit si je a následně je reprodukovat. Typickými formulacemi, kterými tyto úlohy začínají, jsou: *Co platí…? Jak se nazývá…? Jak zní…? Které z tvrzení…? Definuj…! Přednes…! Zopakuj…!*

2) Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatky

Druhou kategorii tvoří úlohy, při jejichž řešení se provádí jednoduché myšlenkové operace. Příkladem jednoduchých myšlenkových operací jsou analýza, syntéza, kategorizace, komparace a další. Formulace úloh dané kategorie začínají slovy: *Čím se liší…? Proč…? Z jakých částí…? Dokaž…! Popiš…! Popiš, jak probíhá…! Porovnej…! Rozděl podle…! Urči, z čeho se skládá…! Uveď postup při…! Uveď příklad…! Vyjmenuj druhy…! Vypočítej rozměr…! Změř…!*

3) Úlohy vyžadující složité myšlenkové operace s poznatky

Třetí kategorie obsahuje úlohy, které vyžadují náročné myšlenkové operace, např. indukce, dedukce, interpretace, transformace atd. Tyto úlohy obvykle začínají formulacemi: *Dokaž, že…! Na základě tohoto modelu se pokus konkretizovat…! Ověř správnost…! Posuď…! Potvrď, že…! Vyjádři slovy vzorec…! Vysvětli význam…! Z uvedených příkladů odvoď pravidlo…*

4) Úlohy vyžadující sdělení poznatků

Do této kategorie jsou zařazeny úlohy, součástí jejichž řešení jsou nejen myšlenkové operace, ale i písemná výpověď o nich. Kromě interpretace výsledku svého řešení žák vypovídá o jeho průběhu, podmínkách a fázích. Formulace úloh zní: *Nakresli…! Napiš stručný obsah…! Vypracuj zprávu o…! Zpracuj…!*

5) Úlohy vyžadující tvořivé myšlení

Úlohy poslední kategorie vyžadují tvořivý přístup a tvořivé řešení vycházející ze znalostí předchozích operací. Dále se předpokládá schopnost kombinovat operace do rozsáhlejších celků a docházet k novým závěrům. Úlohy vyžadující tvořivé myšlení začínají většinou slovy: *Navrhni zlepšení…, nové řešení! Na základě vlastního pozorování urči…! Pokus se nalézt příčinu…! Řeš matematický úkol, vypracuj návrh…! Zkoumej problém…!* (Kalhoust, Obst, 2002, Maňák, Švec, 2003).

2.3 Druhy učebních úloh

Mareš (2013) dělí úlohy podle regulativního parametru na:

a) **úlohy uzavřené a úlohy otevřené**

Úlohy uzavřené se obvykle využívají v didaktických testech kvůli jejich snadnému vyhodnocování. Řešitel zná všechny údaje, které potřebuje k vyřešení úlohy a z předložených možností vybírá, která odpověď je správná. Úlohy uzavřené se dělí na několik typů:

- **úlohy dichotomické** – řešitel vybírá správné řešení pouze ze dvou možností
- **úlohy s výběrem odpovědí** – řešitel vybírá správnou odpověď z více než tří možností; v těchto úlohách nemusí být správná pouze jedna možnost
- **úlohy přiřazovací** – řešitel k sobě navzájem přiřazuje údaje ze dvou různých skupin, např. obrázku nebo pojmu z jedné skupiny odpovídá obrázek či pojem ze skupiny druhé
- **úlohy uspořádací** – řešitel v daném typu úloh uspořádává pojmy či obrázky na základě stanovených pravidel

Úlohy otevřené jsou náročnější na hodnocení, neboť není nikdy dopředu jasné, jaké odpovědi se v řešení žáků objeví. Řešitel musí na základě zadání vymyslet a zapsat celou odpověď samostatně. Učitel musí všechny odpovědi rozdělit podle míry správnosti a následně ohodnotit. Existují dva typy otevřených úloh, které se ještě dále dělí:

- úlohy se stručnou odpovědí
    - **úlohy doplňovací** – řešitel doplňuje na vynechané místo v textu chybějící informace
    - **úlohy redukční** – řešitel formuluje a následně zapisuje krátkou odpověď
- úlohy se širokou odpovědí
    - **úlohy strukturované** – řešitel formuluje a následně zapisuje rozsáhlejší odpověď na základě dodržování bodů stanovené osnovy
    - **úlohy nestrukturované** – řešitel formuluje a následně zapisuje rozsáhlejší odpověď bez stanovené osnovy

b) úlohy úplně vymezené a úlohy neúplně vymezené

Ve vyučování se pracuje nejčastěji s úlohami, které jsou úplně vymezené, u nichž řešitel zná všechny potřebné informace, aby mohl úlohy vyřešit. Naproti tomu v běžném životě musí člověk poznat, jestli má dostupné všechny informace k řešení úlohy. Jestli zjistí, že tomu tak není, musí si je sám najít. Mezi úlohami úplně a neúplně vymezenými jsou stanoveny přechodné úlohy. Rozdělení těchto úloh bylo již rozepsáno výše u aspektu určenosti regulativního parametru úlohy.

c) Úlohy prezentované jednorázově a úlohy prezentované sekvenčně

Úlohy prezentované jednorázově jsou úlohy, které jsou řešiteli zadány k řešení v jejich celkové podobě. Mohou nastat tři možnosti, jak se žáci s danou úlohou vypořádají. Někteří žáci úlohu vyřeší správně, některým se podaří vyřešit úlohy jen částečně a někteří ji nevyřeší vůbec.

Úlohy prezentované sekvenčně jsou úlohy, které jsou průběžně upravovány podle schopností řešitele. Učitel nejprve žákovi úlohu zadá a pozoruje, jak je schopný se s ní vypořádat. Pokud se při řešení objeví nějaké obtíže, učitel má několik možností, jak danou úlohu upravit:

- přepsat zadání do takové podoby, aby jí žák lépe porozuměl
- rozdělit úlohu na několik jednodušších částí
- řešit jiné podobné úlohy, aby si žák osvojil postupy, které následně využije při řešení úlohy původní

d) Úlohy, u nichž je pomoc povolena a úlohy, u nichž je pomoc zakázána

S úlohami, u kterých se jakákoliv pomoc zakázána, se žáci nejčastěji setkají při zkoušení. V této situaci žákům není dovoleno, aby se do něčeho podívali a hledali dané informace nebo se s kýmkoliv radili. Daný typ úloh však není vhodné využívat při procvičování nového učiva či řešení úloh, které jsou pro žáky složité.

Při řešení úloh, u kterých je pomoc naopak povolena, mohou žáci nahlédnout do různých slovníků, encyklopedií či příruček a učitel může poskytnout žákům pomoc několika způsoby:

- sdělit žákovi informaci, která mu pomůže v řešení dané úlohy
- sdělit žákovi záchytné body, které ho navedou, jak dál postupovat při řešení úlohy
- nasměrovat žáka od nevhodně zvoleného postupu na jiný, který bude při řešení dané úlohy správný
- navést žáka a poradit mu, do kterého materiálu nahlédnout, aby našel potřebnou informaci pro řešení dané úlohy (Mareš, 2013)

2.4 Řešení učební úlohy

Každý žák, kterému byla předložena k vypracování nějaká učební úloha, projde v průběhu jejího řešení čtyřmi fázemi: přijímání učební úlohy, orientace v učební úloze, průběh řešení učební úlohy a kontrola řešení učební úlohy.

1) Přijímání učební úlohy

Učební úloha, která je předložena žákům k vyřešení, nemusí být vždy vnitřně přijata. Důvodem nepřijetí dané úlohy může být nepochopení žáka, že úloha je mu zadávána k tomu, aby si osvojil nějakou dovednost nebo, že se podobná situace, kterou se naučí řešit prostřednictvím dané úlohy, může objevit i v reálném životě. Některé úlohy nejsou od žáků přijaty také proto, že jim připadají příliš snadné nebo naopak příliš obtížné. Záleží také na vývojové etapě žáků a jejich dosažených vědomostech a dovednostech. Úloha, která se některým žákům zdá naprosto jednoduchá, může připadat jiným žákům stejného věku obtížná. Také žákovi, kterému připadala daná úloha obtížná, když se seznamoval s novým učivem, se následným procvičováním zdá stejná úloha přijatelně řešitelná, a postupem času až příliš jednoduchá (Mareš, 2013).

2) Orientace v učební úloze

Poté, co žák danou úlohu příjme, ocitá se ve fázi, kdy se musí zorientovat v zadání úlohy a uvědomit si, co je zadáno a co má s úlohou dělat, jakým způsobem ji má řešit. Často se stává, že žáci neporozumí struktuře zadání a vyloží si ji jinak, než bylo zamýšleno. Příčinou chybného porozumění je povrchní „čtení“ úlohy, zátěžová situace ve formě zkoušení nebo nedostatečné nasazení žáků (Mareš, 2013).

Učitel by měl žáky naučit, jak učební úlohu analyzovat. Žáci by se měli dozvědět co je to úloha, z jakých se skládá částí a jak vzniká. Dále by měl učitel žáky naučit, jak mají rozebrat zadání úlohy a vytvořit si jeho schéma, a také, jak si sestavit plán řešení úlohy. Tyto dovednosti si žáci osvojují prostřednictvím řešení speciálních cvičení (Helus a kol., 1979).

3) Průběh řešení učební úlohy

Při pročítání pokynů si žák plánuje, jak bude při řešení postupovat. Ze známých postupů si vybere ten, který se mu zdá jako nejvhodnější k řešení daného typu úlohy. Někdy se stane, že si žák vybere postup, který je pro zadaný typ úlohy nevhodný. Nastává také situace, kdy žák neví, jak při řešení úlohy postupovat, protože se s tímto typem úlohy ještě nesetkal. Pokud se žák ocitne v této situaci, má několik možností, jak postupovat: ověřit různé postupy a zjistit, jestli některý z nich není ten správný; nejprve zjistit, jaký je výsledek dané úlohy, a poté se snažit k němu dojít; zeptat se spolužáků, jestli by mu nemohli prozradit, jaký postup vybrali oni; nebo postupovat při řešení úlohy netradičně a vypozorovat výsledek zvoleného postupu.

U některých úloh existuje pouze jeden postup, který je při řešení správný. Žáci by kromě nich měli řešit také úlohy, k jejichž správným výsledkům vede několik různých postupů. Tyto úlohy poskytují žákům vetší prostor k rozvíjení tvořivosti (Mareš, 2013).

Na průběh řešení učební úlohy má dvojí vliv žákova předchozí zkušenost. Pokud využije dříve získané vědomosti a dovednosti při řešení podobných úloh, je předchozí zkušenost vnímána pozitivně jako usnadňující faktor řešení. Předchozí zkušenost žáka působí i negativně jako znesnadňující faktor řešení. K tomu dochází v případě, kdy žák nedokáže odlišit znaky zadané úlohy od znaků, které platí jen pro dříve řešené úlohy. Na základě toho volí postup, který je pro danou úlohu nesprávný (Helus a kol., 1979).

4) Kontrola řešení učení úlohy

Po vyřešení učební úlohy by si měl žák zkontrolovat nejen, zda došel ke správnému výsledku, ale jestli byl správný i zvolený postup. Učitel by měl žáky učit, aby si svou práci po dokončení zkontrolovali, což mohou provádět dvěma způsoby. Žáci si mohou správnost ověřit podle stanovených výsledků, což jim však nezaručuje, že byl postup řešení správný nebo mohou dát na svůj subjektivní pocit. Zpočátku žáci nejsou schopni přiměřeně zhodnotit, jestli je jejich řešení správné. Někteří žáci si vůbec nevěří a myslí si, že je jejich výsledek nesprávný, i když je správný, nebo jsou naopak přesvědčeni, že je jejich výsledek správný, ačkoliv je chybný (Mareš, 2013).

2.5 Matematické učební úlohy

Učební úlohy se mohou třídit podle různých hledisek. Mareš (2013) uvádí třídění úloh např. podle místa řešení, účelu, typu adresátů, plnosti zadání a v neposlední řadě podle vyučovacího předmětu. Z hlediska vyučovacího předmětu se úlohy dělí na jazykové, matematické, fyzikální, chemické, dějepisné atd. Vzhledem k tématu práce jsou nejpodstatnější úlohy z vyučovacího předmětu matematika, tedy úlohy matematické.

Jak uvádí Kuřina (2011), úloha je jakákoli výzva k činnosti, proto matematická úloha je výzva k matematické činnosti. Děti by měly být vedeny k matematice zajímavě a přirozeně již od útlého mládí. Matematika by se neměla žákům předávat jako ucelená disciplína, ale měla by se postupně utvářet řešením vhodných úloh.

2.5.1 Struktura a funkce matematický úloh

Matematická úloha se skládá ze třech částí. První částí, kterou u matematické úlohy rozlišujeme, je **předmětná komponenta**, což představuje množinu všech objektů, o kterých se v úloze pojednává, a také vztahy mezi těmito objekty. Dále se rozlišuje **požadavek na řešení úlohy**. Požadavek je formulován jako pokyn k řešení dané úlohy nebo otázka. Poslední částí matematické úlohy je **operátor**, který představuje soubor operací, jenž se musí provést při řešení úlohy, aby byl splněn její požadavek.

Matematické úlohy plní různé funkce a dají se využít ve všech fázích vyučovacího procesu. Učitelé mohou úlohou žáky motivovat a probudit v nich zájem o další učení. Prostřednictvím matematické úlohy může být vysvětlena nová látka a následně procvičena a upevňována využitím dalších vhodných úloh, u kterých je postupně zvyšována jejich náročnost. Dále je využívána ke kontrole a zjišťování dosažených výsledků žáků (Novák, Stopenová, 1993).

2.5.2 Klasifikace matematických úloh

Novák a Stopenová (1993) rozdělují matematické úlohy, se kterými pracují žáci ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy podle různých kritérií. Jednotlivé typy úloh jsou doplněny příklady úloh z učebnic matematiky pro 1. stupeň základní školy.

1) Úlohy podle matematického obsahu

Na základě obsahové analýzy úlohy se zjišťuje, které matematické poznatky, vědomosti a dovednosti jsou obsahem úlohy. Podle daného kritéria jsou úlohy postupně klasifikovány v různých rovinách.

- **Matematické úlohy**
  - aritmetické

    „Doplň správně.   7 x 8 _____ – 50 _____ x 5 _____ – 20 _____“

    (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 60)
  - geometrické

    „Sestroj čtverec o straně a = 6 cm.“

    (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 16)
  - algebraické

    „Martin má stejně bratrů jako sester. Jeho sestra Jana má ale 2krát více bratrů než sester. Kolik dětí je v této rodině? Kolik je chlapců a kolik dívek?“ (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 52)
- **Aritmetické úlohy**
  - na porovnávání čísel

    „Porovnej.   200 > < = 400   760 > < = 670“

    (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 48)
  - na sčítání

    „Doplň správně tabulku (č. 3).“ (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 10)

k	32	74	43	11	65	22	56
k + 24							

Tabulka č. 3: Tabulka k aritmetické úloze na sčítání (Molnár, Mikulenková, 2018a, s.10)

- na odčítání

  „Ve velké tělocvičně trénovalo 48 sportovců. V malé tělocvičně jich trénovalo o 19 méně. Kolik sportovců trénovalo v malé tělocvičně“ (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 34)
- na násobení

  „Vypočítej. 3 000 x 3 = 6 000 x 10 = 4 000 x 4=“ (Molnár, Mikulenková, 2018c, s. 16)
- a další …

- **Úlohy na sčítání**
  - pamětné

    „Vypočítej správně. 2 700 + 3 100 = 5 200 + 2 400 =“ (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 59)
  - písemné – podle algoritmu

    „Vypočítej a proveď kontrolu záměnou sčítanců: 771 350

    <u>206</u> <u>535“</u>

    (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 3)
- **Úlohy na pamětné sčítání**
  - bez přechodu přes desítku

    „Vypočítej. 43 + 41 = 72 + 16 = 11 + 61 =“ (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 4)
  - s přechodem přes desítku

    „V parku roste 26 jehličnatých stromů. Listnatých stromů tam roste o 29 více. Kolik stromů roste v parku?“ (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 13)

2) Úlohy podle kognitivní/operační náročnosti

Matematické úlohy se na základě tohoto kritéria třídí podle stoupající náročnosti na myšlenkové operace, které musí žák při řešení provést. Třídění vychází z tzv. taxonomie učebních úloh.

- **Úlohy vyžadující pamětní reprodukci matematických poznatků** – názvy, definice, pravidla, …

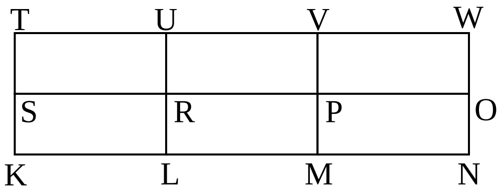
  „Které strany obdélníku se nazývají protější, které sousední? Co o nich víš?“ (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 45)

- **Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s matematickými poznatky** – jednoduché výpočty, vyjmenovávání a popis faktů, porovnávání, analýza a syntéza, abstrakce, konkretizace, …

  „Sadař sklidil 150 kg jablek. Hrušek sklidil 10krát méně. Kolik kg hrušek sklidil? Kolik kg jablek a hrušek sklidil? O kolik kg hrušek sklidil méně než jablek?“ (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 25)

- **Úlohy vyžadující složitější myšlenkové operace s matematickými poznatky** – transformace, indukce, dedukce, verifikace a dokazování, …

  „Tomáš tvrdí, že na tomto obrázku (č. 3) je právě 17 obdélníků. Je to pravda?“ (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 40)



Obrázek č. 3: Obrázek k úloze vyžadující složitější myšlenkové operace s matematickými poznatky (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 40)

- **Úlohy vyžadující tvořivé myšlení** – řešení problémových situací, kladení otázek a formulace úloh žáky, objevování na základě vlastního pozorování a úvah žáka

  „Maminka má zaplatit 4 300 korun. Jaké bankovky si mohla připravit, když nejmenší byla stokoruna?“ (Molnár, Mikulenková, 2018b, s. 29)

První tři kategorie úloh mohou být označovány jako úlohy standardní. **Standardní úlohy** jsou ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy využívány nejčastěji a jsou to takové úlohy, které se řeší podle známého vzorce, pravidla nebo postupu (algoritmu). Poslední kategorie úloh jsou úlohy nestandardní. Při řešení **nestandardních úloh** si žák nevystačí se známými postupy a algoritmy, a proto musí sám řešit matematický problém, hledat a objevovat postup řešení (Novák, Stopenová, 1993).

3) Úlohy podle způsobu jazykového vyjádření

- **Úlohy formulované větou rozkazovací – forma pokynu**

  „Narýsuj přímku p a přímku o. Průsečík těchto přímek označ R.“ (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 38)

- **Úlohy formulované větou tázací – forma dotazu**

  „Kolik stojí 1 kg ořechů, stojí-li 200 g 22,- Kč?“ (Molnár, Mikulenková, 2018c, s. 11)

Některé učební úlohy, které jsou formulované větou tázací, obsahují více než jednu otázku. Úlohy s více otázkami mají menší stimulační hodnotu, ale pokud se v zadání objeví více otázek, měly by být formulovány každá samostatně (Nikl, 1997).

4) Úlohy podle charakteru požadavků na řešení

Matematické úlohy je možné rozlišit na tři typy podle toho, jakou se řeší metodou.

- **Úlohy určovací** – při řešení tohoto typu úloh se určuje množina všech objektů základní množiny, které mají požadovanou vlastnost

  „Které hodinky si Milan může koupit, jestliže si na ně ušetřil 625,- Kč?

  420,- 620,- 582,- 945,- “

  (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 53)
- **Úlohy existenční** – u těchto úloh se rozhoduje, jestli je množina objektů s určitou vlastností prázdná nebo neprázdná
- **Úlohy důkazové** – tímto typem úloh se dokazuje tvrzení, že každý prvek dané množiny vyhovuje požadavkům úlohy

Mezi úlohami existenčními a důkazovými není významný rozdíl. Tyto dva typy vznikají z úloh určovacích a liší se v uvedení soustavy řešení. V zadání úloh existenčních je pouze část soustavy řešení, přičemž v úlohách důkazových je zadána soustava řešení celá. Řešitel pouze ověřuje, úplnou nebo částečnou zkouškou, zda jsou zadaná řešení opravdovým řešením určité úlohy (Vyšín, 1972).

5) Úlohy podle povahy objektů, které v úloze vystupují

Jak již bylo zmíněno, učební úloha se skládá ze třech základních prvků, kterými jsou předmětná komponenta, požadavek na řešení úlohy a operátor. Podle předmětné komponenty, tedy souboru objektů, o kterých se v úloze pojednává, se dělí úlohy na dva typy.

- **Úlohy „čistě matematické“** – úlohy, jejichž předmětná komponenta je vyjádřena matematickou symbolikou (čísla, konstanty, proměnné, …)

  „Vypočítej. 242 – (30 – 8) = 250 – (16 + 16) =“

  (Molnár, Mikulenková, 2018c, s. 7)
- **Slovní úlohy** – úlohy, jejichž předmětná komponenta je vyjádřena slovy a tvořena reálnými objekty z nematematické oblasti

  „Ve skříni bylo 52 sešitů. Paní učitelka rozdala 31 sešitů žákům. Kolik sešitů zůstalo ve skříni?“ (Molnár, Mikulenková, 2018a, s. 30)

Jak uvádí Vyšín (1972) slovní úlohy se dělí na matematické úlohy, které jsou zadány slovy a v malé míře matematickými symboly, jejichž příkladem jsou geometrické konstrukční úlohy a úlohy matematického charakteru, jejichž témata jsou použita z běžného života. Druhou skupinu slovních úloh je nutné nejprve převést na matematickou úlohu, zmatematizovat situaci, a teprve potom přejít k jejímu řešení.

3 Badatelsky orientované vyučování matematiky

Úlohy hierarchicky složené jsou specifickým typem matematických učebních úloh, které spolu s dalšími patří do úloh badatelských. Badatelské úlohy jsou žákům předkládány v rámci badatelsky orientovaného vyučování. Než budou jednotlivé badatelské úlohy charakterizovány, je potřeba vymezit badatelsky orientovanou výuku a roli učitele a žáka v badatelsky orientovaném vyučování matematice.

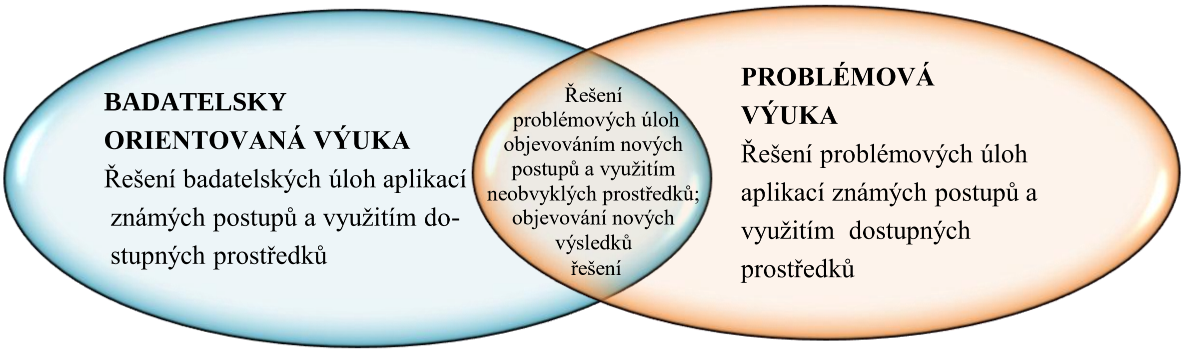
3.1 Pojem badatelsky orientované vyučování

Termín badatelsky orientované vyučování je přeložený z anglického *„inquiry-based teaching“* a jeho podstatou je **bádání**, které je překladem termínu „*inquiry“*. Podle amerického filosofa a pedagoga Johna Deweye je bádání vymezováno jako *„kontrolovaná nebo řízená transformace neurčité situace v situaci, která je určitá do té míry, nakolik to vyžaduje zařazení prvků původní situace do nějakého jednotného celku“* (Samková a kol., 2015, s. 101).

Chápání pojmu badatelsky orientované výuky není jednotné. Dle literárních zdrojů jsou patrné dva odlišné úhly pohledu autorů, tedy dva směry. První směr chápe řešení problémů jako podstatu badatelsky orientované výuky a vidí její značné překrytí s výukou problémovou. Do této skupiny spadá např. charakteristika M. Papáčka, který chápe badatelsky orientované vyučování jako: *„jednu z účinných aktivizujících metod problémového vyučování, která spadá do konstruktivistického přístupu ke vzdělávání. Učitel nepředkládá učivo výkladem v hotové podobě, ale vytváří znalosti cestou řešení problému a systémem kladených otázek“* (Dostál, 2015a, s. 27).

Druhá skupina autorů chápe badatelsky orientovanou výuku jako pojetí výuky, ve kterém je řešení problémů důležité, ale kromě něj se zaměřuje i na jiné aspekty. Badatelsky orientovaná výuka má jiné cíle než výuka problémová a svým obsahem ji přesahuje. D. Nezvalová (in Dostál, 2015a, str. 27) vymezuje badatelsky orientované vyučování jako: *„vyučování, kdy žáci formují výuku ve třídě, učitel je facilitátorem. Ve vztahu k učení žáka je badatelsky orientované učení aktivní proces, reflektující přístupy vědců ke zkoumání a bádání v přírodě. Zahrnuje zkušenost, důkaz, experimentování a konstrukci poznatkové struktury. Je tedy konzistentní s konstruktivistickým přístupem k učení.“*

Vztah mezi badatelsky orientovanou výukou a problémovou výukou je zobrazen na obrázku č. 4. Na základě uvedeného schématu Dostál (2015b, str. 54) vymezil pojem **badatelsky orientovaná výuka** jako *„činnost učitele a žáka zaměřená na rozvoj vědomostí, dovedností a postojů žáka na základě aktivního a relativně samostatného poznávání skutečnosti, kterou se sám učí objevovat a objevuje.“*



Obrázek č. 4: Vztah badatelsky orientované výuky a problémové výuky (Dostál, 2015b, s. 55)

Badatelsky orientovaným vyučováním matematiky je rozuměno vyučování, ve kterém se žáci setkávají s tzv. badatelskými postupy a metodami práce. Žáci používají postupy a metody využívané odbornými vědeckými pracovníky, které jsou upraveny tak, aby odpovídaly školské matematice. Žáci jsou v hodinách matematiky směřováni k badatelským aktivitám vytvořením vhodného prostředí, které je zpravidla stanovené úlohou nebo problémem, jež jsou žákům předloženy k vyřešení (Samková, 2016).

Antigue, Baptist (2012) vymezují BOVM jako matematické bádání, které začíná otázkou nebo problémem, na něž se hledají odpovědi pozorováním a zkoumáním. Provádějí se mentální, materiální a virtuální experimenty, otázky se propojují s podobnými otázkami, které už byly zodpovězeny a využívají se známé matematické techniky. Proces bádání je směřován k hypotetickým odpovědím neboli domněnkám, které mají být potvrzeny.

3.2 Učitel a žák vzhledem k BOVM

Učitel zastává v BOV významnou roli. Plánuje, vytváří a provádí projekt výuky a následně zjišťuje a vyhodnocuje dosaženou úspěšnost. Učitel připravuje výuku a zařazuje do ní situace, prostřednictvím nichž směřuje k všestrannému rozvoji žáka na základě jeho bádání.

Učitel působí jako facilitátor učení žáka. Prostřednictvím využívání vyučovacích metod, které aktivizují myšlenkové procesy žáka, kooperativních strategií výuky a dalších prostředků napomáhá žákovi objevit způsob, jak se efektivně učit. Ve výuce je podstatné, aby učitel předkládal žákům problémy podněcující zkoumání a vytvářel činnosti, které budou žákům usnadňovat vytváření znalostí (Dostál, 2015a).

Votápková a kol. (2013, s. 16) charakterizují učitele jako *„průvodce žáka při bádání, který plánuje postup výuky i metody (zadá úkoly, zprostředkuje pomůcky, doporučí literaturu) tak, aby se všichni žáci zapojili. Do myšlenkových pochodů a do práce žáků však pokud možno příliš nezasahuje. Pouze je koriguje a usměrňuje správným směrem tak, aby žáci sami dospěli k vyřešení problému.“*

Podle M. Papáčka (in Dostál, 2013) BOV vychází z konstruktivistického přístupu ke vzdělávání. Učitel nepředkládá žákům hotové poznatky, ale směřuje je k tomu, aby si prostřednictvím řešení problémů a systémem kladených otázek formulovali znalosti samostatně.

Jak uvádí Antigue, Baptist (2012) učitel by neměl žáky učit mechanicky řešit určité problémy, ale měl by je vést k pochopení celkového pojetí matematiky. Učitel žáky vyzývá k tomu, aby se vyptávali, zkoumali, pozorovali, objevovali, domnívali se, vysvětlovali a dokazovali. Na těchto aktivitách je založen badatelsky orientovaný přístup k matematice.

Role žáka v BOV je stejně důležitá jako role učitele. Žák „přijímá“ a zpracovává aktivity, které připravil učitel v rámci výuky. D. Nezvalová (in Dostál, 2013, s. 86) uvádí, že *„žáci formují výuku ve třídě, kladou si badatelsky orientované otázky, hledají důkazy, formulují objasnění na základě důkazů, vyhodnocují objasnění s možností využití alternativ objasňování, komunikují a ověřují objasnění.“*

Bádání žáka je aktivní činností, při které téměř samostatně poznává skutečnosti. Kromě objevování skutečností, které si žák osvojuje, se také učí badatelsky myslet. Tento typ myšlení je založen na učení se aktivně poznávat nové skutečnosti.

Žáci se v rámci BOV učí nejen měřit, pozorovat a experimentovat, ale zaměřují se také na poznávání myšlenkových procesů, kterými jsou analýza, syntéza, indukce, dedukce, komparace a specifikace (Dostál, 2013).

Jak uvádí Votápková a spol. (2013), žáci by měli v rámci BOV určit problém, který budou řešit, a pokládat si otázky. Následně sestavují hypotézu a objevují důkazy, které ji potvrzují. Dále musí kriticky myslet, posuzovat možné alternativy, a nakonec vyvodit závěry. Při BOV žáci mimo jiné pracují v týmu, vedou diskuzi, snaží se argumentovat a nechávají ostatní, aby posoudili jejich výsledky.

3.3 Badatelské úlohy

Badatelské úlohy jsou takové úlohy, prostřednictvím kterých mohou být žáci směřování k badatelské činnosti. Při zadání badatelské úlohy nedojde k badatelské aktivitě, pokud nebudou splněna všechna specifika, která k badatelsky orientovanému vyučování směřují (Samková a kol., 2015).

Podle Baptist, Raab a kol. (2012) by měly mít badatelské úlohy následující vlastnosti:

- úlohy by měly být otevřené – nastínit matematickou situaci, která nabízí různé možnosti výpočtů
- úlohy by měly být matematicky bohaté – umožnit žákovi prohlubovat porozumění matematice
- úlohy by měly být pro žáky podnětné a motivující
- úlohy by měly být všem dětem dostupné – každý žák by měl mít možnost pracovat s úlohami a zažít v matematice pocit úspěchu
- úlohy by měly podporovat práci na různých úrovních – slabší žáci by měli mít možnost rozvíjet své schopnosti, nadaní žáci by měli být schopni pracovat vyšší úrovni

Na základě Deweyova vymezení bádání Samková a kol. (2015) roztřídila badatelské úlohy do několika skupin, které mohou dále sloužit jako inspirace pro hledání dalších typů úloh, a doplnila je množstvím rozmanitých příkladů. Vzhledem k zaměření diplomové práce budou uvedeny příklady jednotlivých úloh, které jsou vhodné pro žáky prvního stupně základní školy. Na základě vhodné modifikace nebo i bez ní mohou být tyto úlohy zařazeny i do vyučování vyšších stupňů škol. Záleží na učiteli a cíli hodiny, které úlohy využije, ve kterém ročníku. Učitel by měl dobře promyslet využití daných úloh ve vyučování tak, aby sloužila k rozvíjení požadovaných témat a metod řešení.

Badatelské úlohy, které jsou formulovány jako slovní úlohy, mají vstupní situaci stanovenou podmínkami a výstupní situaci otázkami slovní úlohy. Samková a kol. (2015) rozlišuje podle počtu podmínek a otázek badatelské úlohy jednoduché a složené.

3.3.1 Jednoduché badatelské úlohy

Jednoduché badatelské úlohy jsou takové badatelské úlohy, které mají jednu podmínku a jednu otázku. Tyto úlohy se dále třídí podle množství informací určujících vstupní situaci na úlohy informačně strohé a úlohy informačně hutné (Samková a kol., 2015).

Úlohy informačně strohé

Úlohy informačně strohé jsou takové jednoduché badatelské úlohy, jejichž vstupní situace má velmi malé množství informací. Tento typ úloh má velký badatelský potenciál, protože jsem hodně neurčité a žák má více možností, jak danou úlohu vyřešit. Kromě jiných jsou do této skupiny úloh řazeny také úlohy ze statistiky a úlohy, které rozvíjejí finanční gramotnost.

Příkladem tohoto typu úloh je:

„Obsah neznámého čtverce je 64 cm^2. Jak by tento obrazec mohl vypadat?“

„Zjistěte v obchodech v okolí svého bydliště ceny jablečného džusu a rozhodněte, ve kterém obchodu se vyplatí džus koupit.“ (Samková a kol., 2015, s. 109)

Úlohy informačně hutné

Úlohy informačně hutné jsou takové jednoduché badatelské úlohy, které mají vstupní situaci s velkým množstvím informací. Podstatou je, aby se žák v tomto velkém množství informací správně zorientoval. Mezi tyto úlohy jsou řazeny také úlohy ze statistiky a úlohy, jejichž vstupní informace je zadána obrázkem nebo fotografií.

Příkladem tohoto typu úloh je:

„Jaký obvod má mnohoúhelník, který je sestaven ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků s délkami stran 3, 4, 5?“ (Samková a kol., 2015, s. 110)

„Na farmě mají jedno políčko s fazolemi na sluníčku a druhé ve stínu. V tabulce č. 4 jsou uvedeny přibližné hmotnosti fazolí na těchto políčcích 6, 8, a 10 týdnů od vysázení. Které políčko je vhodnější pro pěstování fazolí?“ (Samková a kol., 2015, s. 111)

SLUNCE	6 týdnů	8 týdnů	10 týdnů	STÍN	6 týdnů	8 týdnů	10 týdnů
Řádek 1	9 kg	12 kg	13 kg	Řádek 1	5 kg	9 kg	15 kg
Řádek 2	8 kg	11 kg	14 kg	Řádek 2	5 kg	8 kg	14 kg
Řádek 3	9 kg	14 kg	18 kg	Řádek 3	6 kg	9 kg	12 kg

Tabulka č. 4: Tabulka k úloze informačně hutné (Samková a kol., 2015, s. 111)

3.3.2 Složené badatelské úlohy

Badatelské úlohy složené vznikají různým skládáním úloh jednoduchých. Tento typ úloh se dále třídí do třech skupin na úlohy hierarchicky složené, úlohy s dynamickým vstupem a úlohy s dynamickým výstupem. Dále budou charakterizovány úlohy s dynamickým vstupem a výstupem. Úlohám hierarchicky složeným bude věnována větší pozornost v následující podkapitole.

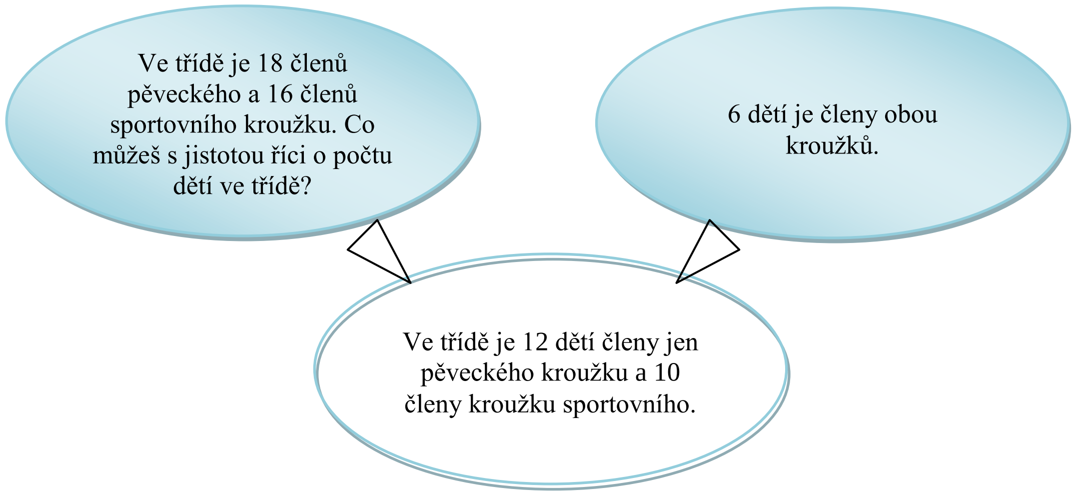
Úlohy s dynamickým vstupem

Úlohy s dynamickým vstupem jsou úlohy složené z více úloh, které mají stejnou otázku. Každá část úlohy má určitou vstupní informaci (podmínku), ale otázka je stejná, proto je stejná i výstupní situace. Tyto úlohy by mohly být nazývány i úlohami postupně informačně usměrňovanými (Samková a kol., 2015).

Příkladem tohoto typu úloh je:

„Ve třídě je 18 členů pěveckého a 16 členů sportovního kroužku. Co můžeš s jistotou říci o počtu dětí ve třídě? Doplněk k úloze: 6 dětí je členy obou kroužků.“ (Samková a kol., 2015, s. 114)

Na obrázku č. 5 je daná úloha graficky znázorněna.



Obrázek č. 5: Grafické znázornění úlohy s dynamickým vstupem (Dofková, 2016, s. 101)

Úlohy s dynamickým výstupem

Úlohy s dynamickým výstupem jsou úlohy složené z více úloh, které mají stejnou vstupní situaci. Vstupní situace zůstává stále stejná, přestože každá část úlohy má jinou výstupní situaci, otázku. Tento typ úloh by také mohl být nazýván jako úlohy postupně informačně vytěžované (Samková a kol., 2015).

Příkladem tohoto typu úloh je:

„Kolik je 10 000 minut? Kolik je to dní? Kolik je to vyučovacích hodin?“ (Dofková, 2016, s. 101)

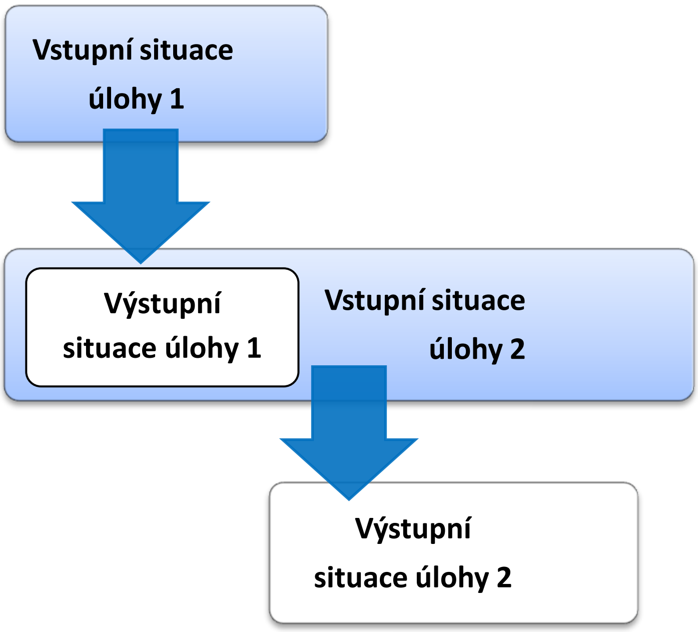
Daná úloha je graficky znázorněna na následujícím obrázku č. 6.

Obrázek č. 6: Grafické znázornění úlohy s dynamickým výstupem (Dofková, 2016, s. 101)

3.4 Úlohy hierarchicky složené

Úlohy hierarchicky složené, jak z názvu vyplývá, patří do badatelských úloh složených. Vznikají tak, že: *„výstupní situace jedné úlohy se stává součástí vstupní situace úlohy další"*, jak je znázorněno na obrázku č. 7. Tyto úlohy v sobě nesou prvky neurčitosti, protože teprve až při řešení úlohy žák zjistí, které části jedné úlohy budou podstatné pro řešení druhé úlohy a které jsou navíc (Samková a kol., 2015, s. 111).

Při řešení určitých částí úloh hierarchicky složených se využívají poznatky z řešení úloh předchozích. Některé části úloh hierarchicky složených mohou být samostatnými badatelskými úlohami (Samková a kol., 2015).



Obrázek č. 7: Dvě badatelské úlohy složené hierarchicky (Samková a kol., 2015, s. 111)

3.4.1 Příklady úloh hierarchicky složených

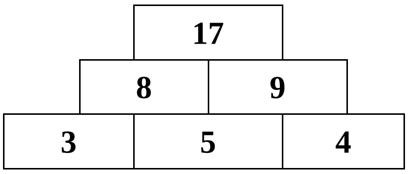
Samková a kol. (2015) uvádí pro úlohy hierarchicky složené následující příklady.

Úloha:

a) *„Rozstřihni čtverec jedním rovným střihem na dva díly. Z těchto dílů skládej tvary. Kolik tvarů vznikne?*
b) *Pokus se čtverec rozstřihnout tak, aby mohlo vzniknout co nejvíce tvarů. Jaký je nejvyšší počet tvarů?"* (Samková a kol. 2015, s. 112)

Úloha:

„Prohlédni si číselnou zeď na obrázku č. 8.

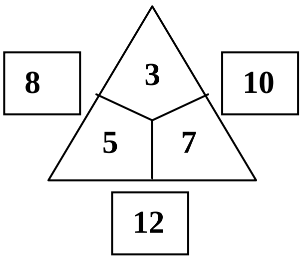


Obrázek č. 8: Číselná zeď (Samková a kol., 2015, s. 111)

a) *Jak lze vytvořit takovou zeď? Najdi všechny číselné zdi, které můžeš postavit se základními kameny 3, 4, 5. (podobně jako na obrázku č. 8) Zdi vypočti a porovnej.*
b) *Sám si vyber tři základní kameny a počítej stejně.*
c) *Popiš, čeho sis všiml.*
d) *Můžeš to zdůvodnit?“* (Samková a kol., 2015, s. 112)

Úloha:

a) *„Najděte a popište pravidlo, podle kterého se doplňují čísla v trojúhelníku na obrázku č. 9.*
b) *Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé, a své tvrzení zdůvodněte:*
    - *Součet vnějších čísel se rovná součtu vnitřních čísel.*
    - *Součet všech tří vnějších čísel může být číslo sudé i liché.*
c) *Doplňte vnitřní čísla, jsou-li vnějšímu čísly 6, 13 a 14; 13, 21 a 22.“* (Samková a kol., 2015, s. 112)



Obrázek č. 9: Číselný trojúhelník (Samková a kol., 2015, s. 112)

Úloha:

a) *„Rozlož číslo 10 na součet dvou (přirozených) čísel a tato dvě čísla vynásob. Jaký nejmenší a jaký největší součin dostaneš?*
b) *Číslo 10 rozlož na součet tří (přirozených) čísel a tato tři čísla vynásob. Jaký nejmenší a jaký největší součin dostaneš?*

c) *Číslo 10 rozlož na součet libovolného počtu (přirozených) čísel a tato čísla vynásob. Jaký nejmenší a jaký největší součin dostaneš?*
d) *Jak bude řešení úloh a) až c) vypadat pro čísla 7, 8, 9 a 11?*
e) *Existuje strategie pro řešení úloh a) až c) nezávislá na volbě rozkládaného čísla?"* (Samková a kol., 2015, 113)

3.4.2 Úlohy hierarchicky složené v RVP ZV

Pojem úlohy hierarchicky složené, ani nadřazený název badatelské úlohy, ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v RVP ZV zmíněny nejsou. Vhledem k tomu, že se jedná o úlohy, které vyžadují tvořivé myšlení a mají určitou spojitost s problémovou výukou, spadají do tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. V daném tematickém okruhu je vymezený pouze jeden očekávaný výstup pro 2. období, který stanovuje, že: *„žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky"* a spadá do něj učivo: slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce a prostorová představivost (RVP ZV, 2017, s. 34).

EMPIRICKÁ ČÁST

4 Charakteristika výzkumného šetření

Záměrem kapitoly je seznámit s cíli a výzkumnými předpoklady realizovaného výzkumu, které byly k naplnění cílů stanoveny. Výzkum byl realizován na předem vybraném výzkumném vzorku prostřednictvím zvolených výzkumných metod, jež budou blíže popsány.

Výzkum probíhal celkově ve třech vzájemně se prolínajících fázích, na něž budou zaměřeny následující kapitoly:

1. **Přípravná fáze** – konstrukce úloh, předvýzkum
2. **Vlastní průběh šetření** – analýza řešení navrhovaných úloh
3. **Vyhodnocení dat** – základní statistické údaje, hodnocení úloh dle žáků, shrnutí výzkumného šetření

4.1 Cíle výzkumného šetření

Cílem výzkumného šetření bylo zjistit, jakým způsobem žáci 5. ročníku vybraných základních škol řeší badatelské úlohy v matematice, konkrétně úlohy hierarchicky složené. Dílčími cíli bylo zjistit, jaké jsou nejčastější chyby, kterých se žáci při řešení dopouští, jaký vliv má na výsledky řešení rozdílnost pohlaví, různý typ škol, které žáci navštěvují a jaký je rozdíl mezi žáky dvou různých tříd stejné základní školy. Doplňujícím cílem bylo zanalyzovat hodnocení daných úloh žáky.

4.2 Výzkumné předpoklady

K naplnění cílů výzkumného šetření byly stanoveny následující výzkumné předpoklady.

VP1: Pohlaví nemá vliv na výsledky řešení úloh hierarchicky složených. Dívky a chlapci budou při řešení úloh dosahovat podobných výsledků.

VP2: Žáci, kteří navštěvují městskou školu, budou dosahovat při řešení úloh hierarchicky složených podobných výsledků jako žáci školy venkovské.

VP3: Výsledky řešení úloh hierarchicky složených žáků dvou paralelních tříd se budou lišit.

VP4: Žáci budou každou z řešených úloh hodnotit rozdílně.

VP5: Úlohy hierarchicky složené budou mít u žáků pozitivní odezvu.

4.3 Metody výzkumného šetření

Po vytvoření úloh hierarchicky složených a jejich následném zadání žákům byla provedena analýza řešení jednotlivých úloh. Žáci byli zařazeni do kategorií, podle toho jak se jim daná úloha podařila vyřešit. Dále byla věnována pozornost chybám, které se v řešení objevovaly a alternativnímu řešení, které se objevilo v řešení některých žáků.

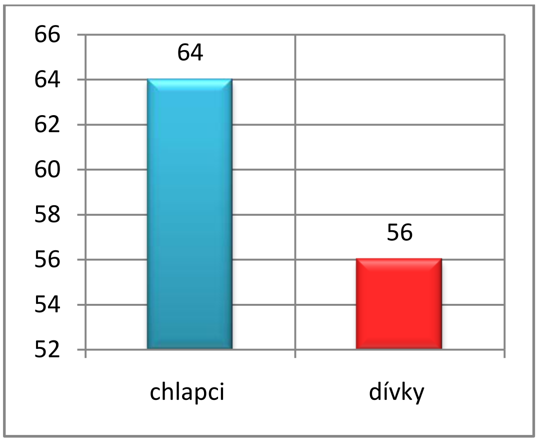
K hodnocení jednotlivých úloh žáky byla využita metoda dotazníku. Dotazník obsahoval devět uzavřených položek, které se vztahují k úlohám, které žáci v rámci výzkumného setření řešili. Sedm položek nabízelo žákům výběr ze tří možností. Tyto tři možnosti byly v pěti případech zobrazeny formou smějícího se obličeje (kladný), obličeje s neutrálním výrazem a obličeje, který se mračí (záporný) a ve dvou položkách byly na výběr názvy jednotlivých třech úloh. U zbývajících dvou položek se žáci rozhodovali mezi možnostmi ANO a NE.

4.4 Výzkumný vzorek

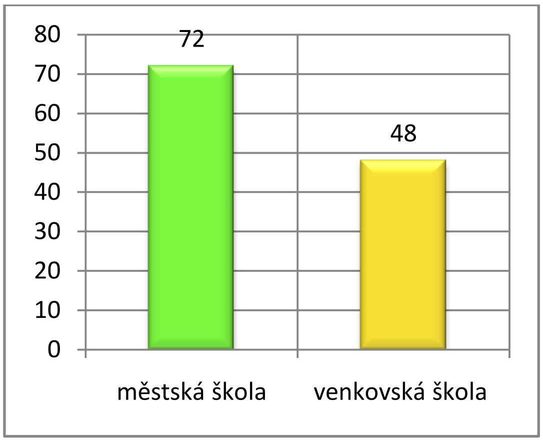
Výzkumným vzorkem byli žáci 5. ročníku vybraných základních škol Olomouckého kraje. V rámci výzkumného šetření, které probíhalo v říjnu roku 2018, bylo celkem navštíveno pět základních škol. Jednalo se o dvě plnoorganizované školy městského typu v Olomouci – Základní škola Olomouc, tř. Spojenců 8 a Základní škola Olomouc, Holečkova 10. Další dvě školy byly plnoorganizované venkovského typu – Základní škola Velký Újezd a Základní škola Tršice. Poslední z navštívených škol byla škola málotřídního typu – Základní škola Lazníky, ve které se výzkumného šetření účastnili pouze čtyři žáci. Z důvodu malého počtu žáků v málotřídní škole budou žáci v rámci vyhodnocování výsledků řešení jednotlivých úloh rozděleni pouze na dvě skupiny podle toho, jestli navštěvují školu ve městě nebo na venkově. Rozložení výzkumného vzorku je uvedeno v tabulce č. 5. Dále graf č. 1 a graf č. 2 ukazují rozdělení žáku podle pohlaví a typu školy.

Typ školy	Název školy		Počet žáků	Počet chlapců	Počet dívek	
Městská škola	ZŠ Olomouc, tř. Spojenců 8		29	15	14	72
	ZŠ Olomouc, Holečkova 10	Třída A	23	11	12	
		Třída B	20	9	11	
Venkovská škola	ZŠ Velký Újezd		24	15	9	48
	ZŠ Tršice		20	13	7	
	ZŠ Lazníky		4	1	3	
			120	64	56	**Celkem**

Tabulka č. 5: Výzkumný vzorek



Graf č. 1: Rozdělení žáků podle pohlaví



Graf č. 2: Rozdělení žáků podle typu školy

5 Přípravná fáze výzkumného šetření

Výzkumné šetření probíhalo ve třech fázích. První byla fáze přípravná, do které je zahrnuta konstrukce úloh a předvýzkum. Na základě teoretických informací bylo vytvořeno pět úloh hierarchicky složených. V rámci předvýzkumu byly vybrány tři úlohy, které byly následně předloženy žákům k vyřešení. Dále budou jednotlivé části přípravné fáze blíže popsány.

5.1 Konstrukce úloh

V rámci teoretické části byla prostudována odborná literatura, ve které bylo zjišťováno, jak jsou definovány úlohy hierarchicky složené a jaké jsou uvedeny příklady těchto úloh. Následně bylo pro inspiraci nahlédnuto do různých učebnic matematiky pro žáky 1. stupně základních škol. Poté byla provedena první část přípravné fáze výzkumného šetření zaměřena na vytvoření úloh, jejichž efektivita byla následně ověřena ve výuce. Při samotné konstrukci se vycházelo z RVP ZV, aby se v jednotlivých úlohách objevilo pouze učivo, které odpovídá věku žáku a měli by být schopni je vyřešit.

Pro potřeby výzkumu byly vytvořeny následující úlohy.

5.1.1 Rozklad čísla 20

Zadání úlohy

5.1.1a: Rozlož číslo 20 na součet dvou lichých čísel a poté tato dvě čísla vynásob.

5.1.1b: Seřaď výsledné součiny od nejmenšího po největší a zjisti, jaký je vždy mezi dvěma sousedními rozdíl.

5.1.1c: Můžeš mezi těmito rozdíly vysledovat nějaký vztah?

5.1.1d: Ověř, zda tento vztah platí pro všechna sudá čísla do 20?

Popis úlohy

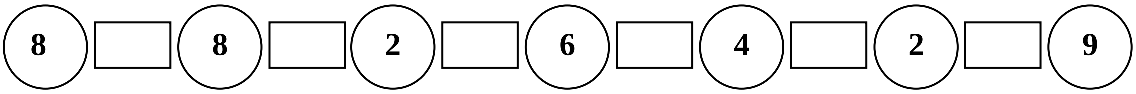
Daná úloha se skládá ze čtyř částí, které na sebe navazují. V 5.1.1a si musí žáci nejprve uvědomit, jaká čísla patří mezi lichá a následně určit taková dvě čísla, jejichž součtem je číslo 20. Po objevení všech takových dvojic čísel by se měly jednotlivé dvojice mezi sebou vynásobit.

V 5.1.1b se používají už jen se součiny jednotlivých dvojic čísel, z první části úlohy. Nejprve měly být poskládány od nejmenšího po největší a následně měl být určen rozdíl mezi dvěma sousedními. V 5.1.1c by měli žáci dojít k tomu, že mezi každými dvěma čísly je vždy rozdíl roven 8. Poslední část úlohy 5.1.1d slouží k ověření, jestli se vypozorovaný vztah z třetí části úlohy objevuje i u jiných sudých čísel do 20.

5.1.2 Početní řetězec

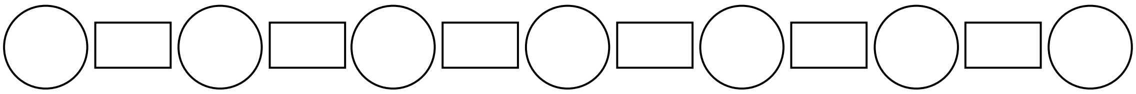
Zadání úlohy

5.1.2a: Doplň řetězec (obrázek č. 10). Každou operaci – sčítání, odčítání, násobení a dělení – použij alespoň jednou.



Obrázek č. 10: Početní řetězec 5.1.2a

5.1.2b: Použij doplněné operace a pokus se vymyslet vlastní řetězec (obrázek č. 11).



Obrázek č. 11: Početní řetězec 5.1.2b

Popis úlohy

Druhá vytvořená úloha se skládá ze dvou částí. V 5.1.2a je zadán početní řetězec s chybějícími údaji. V řetězci je uvedeno úvodní číslo, dále průběžné výsledky a výsledek konečný. Žáci by se měli pokusit doplnit vhodné operace a k nim příslušná čísla, aby došli ke stanoveným výsledkům. Při řešení by neměla být opomenuta stanovená podmínka, které určuje, aby při doplňování byla použita každá zmíněná operace, tedy operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, alespoň jednou.

Početní řetězec byl až na jednu výjimku sestaven tak, aby nebyla při doplňování pouze jedna správná odpověď. Např. mezi čísla 24 a 6 je možné doplnit operaci dělení, tedy „ : 4 “, nebo operaci odčítání, tedy „ – 18 “. Výjimkou je chybějící operace mezi dvěma posledními čísly v řetězci, kam lze doplnit pouze odčítání. Předposledním číslem bylo vybráno číslo 24 a jako výsledek řetězce číslo 9, aby se zjistilo, jestli žáci doplní operaci odčítání i mezi jiná dvě čísla než jen do políčka, kam lze doplnit pouze „ – 15 “.

Prvním číslem řetězce bylo záměrně vybráno číslo 80 a jako následující číslo 8. Očekává se, že většinu žáků napadne, že číslo 80 je násobkem čísla 8 a proto doplní operaci dělení, tedy „ : 10“. Naopak pouze malý počet žáků doplní do políčka mezi tyto dvě čísla operaci odčítání, tedy „ – 72 “.

V 5.1.2b mají žáci za úkol vymyslet vlastní řetězec na základě operací a čísel, které doplnili do první části úlohy. Cílem je objevit takové počáteční číslo, aby bylo možné doplnit celý řetězec. Ne každé číslo, které bude zvoleno jako počáteční, se ukáže být vhodným číslem pro vypočítání celého řetězce.

5.1.3 Trojice čísel

Zadání úlohy

5.1.3a: Podívej se na trojice čísel a pokus se zjistit, co mají společného.

28, 14, 63 **7, 28, 70** **35, 49, 21** **56, 7, 42**

5.1.3b: Vymysli další trojice, které splňují stejná pravidla.

Popis úlohy

Tato úloha se skládá stejně jako úloha předchozí ze dvou částí. V 5.1.3a jsou dány čtyři trojice čísel. Úloha by měla být žákům představena tak, aby se na trojice čísel podívali a zkusili si s nimi jakkoliv pohrát a zjistit, co mají všechny tyto čtyři trojice čísel společného.

Očekává se, že nejprve žáci přijdou na pravidlo, že všechna čísla jsou násobkem čísla 7. Pokud mají žáci násobky čísel dobře osvojené, neměl by se vyskytnout větší problém s objevením tohoto prvního pravidla. Ve dvou trojicích se objevuje samotné číslo 7, což by mohlo být malou nápovědou k řešení.

Objevení druhého pravidla by mohlo být pro žáky složitější. Jedná se o takové pravidla, že součtem všech čísel každé trojice je číslo 105. Pokud se však žáci pokusí prozkoumat různé varianty, mohlo vy se jim podařit i tohle pravidlo objevit.

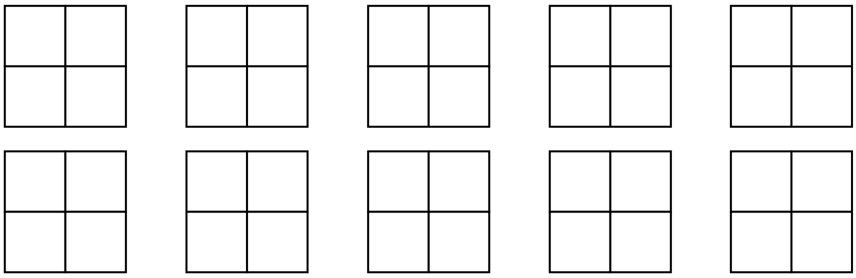
Původně byly vymyšleny jiné trojice čísel, u kterých bylo předpokládáno, že žáci objeví pravidlo násobků čísla 4 a součet čísel rovný 80. Pravidlo násobků čísla 4 ale není jednoznačné. Někteří by mohli uvést, že čísla jsou násobky 4 a jiní, že se jedná o násobky čísla 2, proto byla vymyšlena jednoznačná alternativa násobků čísla 7.

V 5.1.3b mají žáci za úkol vymyslet další trojice čísel, které budou splňovat stejná pravidla jako trojice v 5.1.3a.

5.1.4 Stavby z krychlí

Zadání úlohy

5.1.4a: Stavebnice obsahuje 10 krychlí, z nichž je potřeba vytvořit stavbu se čtvercovým půdorysem (obrázek č. 12). Do následujících půdorysů doplň počty krychlí tak, aby v každém sloupci byla vždy alespoň jedna krychle.



Obrázek č. 12: Půdorysy staveb z krychlí

5.1.4b: Rozhodni, zda platí daná tvrzení. Svá rozhodnutí zdůvodni.

- ❖ V jedné stavbě budou mít všechny sloupce stejný počet krychlí.
- ❖ Jeden sloupec může mít nejvíce 7 krychlí.

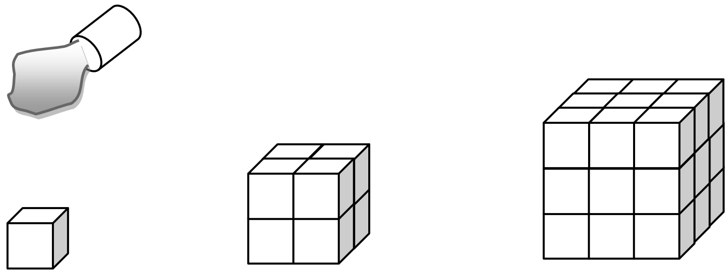
Popis úlohy

Úloha se skládá ze dvou částí. V 5.1.4a jsou zakresleny čtvercové půdorysy a žáci by se měli pokusit vymyslet různé stavby, které by mohly být postaveny z deseti krychlí. Při řešení musí být dodržena stanovená podmínka, která určuje, že každý ze čtyř sloupců musí obsahovat alespoň jednu krychli.

V 5.1.4b jsou dána dvě tvrzení, o jejichž pravdivosti mají žáci rozhodnout na základě staveb, které vytvořili v první části úlohy. Pokud se žádná taková stavba, která by odpovídala danému tvrzení, v jejich řešení neobjevila, měli by zauvažovat, jestli by bylo možné takovou stavbu postavit. Rozhodnutí, zda se jedná o pravdivé či nepravdivé tvrzení, by mělo být následně zdůvodněno.

5.1.5 Barevné krychle

Zadání úlohy



Obrázek č. 13: Krychle

5.1.5a: Kdyby se vylila plechovka s barvou, kolik stěn malé krychle (obrázek č. 13) by se obarvilo?

5.1.5b: Kolik krychliček, ze kterých je složena prostřední krychle, by mělo obarvené 3 stěny?

5.1.5c: Kolik krychliček, ze kterých je složena velká krychle, by mělo obarvené 2 stěny?

5.1.5d: Skládá se velká krychle z nějakých krychliček, které mají obarvenou pouze jednu stěnu, nebo nemají obarvenou žádnou stěnu?

Popis úlohy

Tato úloha se stejně jako úloha Rozklad čísla 20 skládá ze čtyř částí. Součástí zadání úlohy jsou obrázky třech krychlí. Při řešení se postupuje od nejmenší krychle k největší. V jednotlivých částech úlohy žáci určují počty jednotlivých obarvených stěn nebo krychliček, ze kterých jsou složeny jednotlivé krychle. Řešení úlohy záleží na úhlu pohledu každého žáka. V zadání není uvedeno, jestli jsou krychle umístěny na podložce nebo zda je možné, aby se obarvily ze všech stran.

5.1.5a se vztahuje k malé krychli. Žáci mají určit, kolik stěn této malé krychle by se obarvilo, pokud by se na ni vylila plechovka s barvou, jak naznačuje obrázek v zadání úlohy.

Úloha 5.1.5b je zaměřena na prostření krychli, která se skládá z osmi malých krychliček. Úkolem žáků je zjistit, kolik krychliček prostření krychle by mělo obarvené tři stěny. Správná odpověď závisí na tom, jestli žáci v první části úlohy určí, že krychle „leží“ nebo „visí“.

Stejně jako předchozí část je 5.1.5c zaměřena na určování počtu malých krychliček. V této části se vychází z největší krychle, jež se skládá z dvaceti sedmi malých krychliček. Žáci mají za úkol určit počet krychliček této velké krychle, které by měly obarveny dvě stěny.

5.1.5d se také vztahuje k největší zobrazené krychli. Žáci měli zjistit, jestli se velká krychle skládá z nějakých krychliček, které mají obarvenou jednu stěnu nebo nemají obarvenou žádnou stěnu.

5.2 Předvýzkum

Cílem předvýzkumu bylo zjistit, které tři úlohy z pěti nabízených jsou podle učitelů nejvhodnější a měly by být vybrány a předloženy žákům k vyřešení v rámci výzkumného šetření. Předvýzkum probíhal ve školách, v nichž následně probíhalo výzkumné šetření. Celkem pěti učitelům, již vyučují matematiku v daných třídách, bylo položeno sedm otázek. První dvě otázky se vztahovaly obecně k úlohám hierarchicky složeným a zbylých pět otázek se týkalo konkrétních pěti vytvořených úloh.

	Rozklad čísla 20	Početní řetězec	Trojice čísel	Stavby z krychlí	Barevné krychle
Učitel 1	✔	✔	✔		
Učitel 2		✔	✔		✔
Učitel 3		✔	✔		✔
Učitel 4		✔		✔	✔
Učitel 5		✔	✔		✔
Celkový počet	1	5	4	1	4

Tabulka č. 6: Výběr nejvhodnějších úloh učiteli

V tabulce č. 6 je zaznačeno, které úlohy by jednotliví učitelé upřednostnili a vybrali do samotného výzkumného šetření. Na základě odpovědí učitelů byly vybrány úlohy Početní řetězec, Trojice čísel a Barevné krychle. Úlohy s názvem Rozklad čísla 20 a Stavby z krychlí byly zařazeny jako bonusové.

První otázka rozhovoru zněla: *„Už jste se někdy setkal/a s tímto typem úloh – úlohy hierarchicky složené?“* Tři z pěti učitelů odpověděli, že se s daným typem úloh už setkali. Dva učitelé se s těmito úlohami ještě nesetkali, přičemž důvodem jednoho učitele bylo, že vyučuje matematiku teprve prvním rokem. Někteří učitelé podle názvu nevěděli, o jaký typ úloh se jedná. Na otázku dokázali odpovědět až poté, co jim byly ukázány konkrétní úlohy.

Na druhou otázku: *„Pracujete s úlohami hierarchicky složenými v hodinách matematiky?“* Tři učitelé odpověděli, že s těmito úlohami v hodinách matematiky pracují, jeden z učitelů navíc doplnil, že s nimi pracuje, protože žáky i jeho samotného takové úlohy baví řešit. Zbylí dva učitelé, kteří na první otázku odpověděli, že se s těmito úlohy ještě nesetkali, s nimi v hodinách nepracují.

Další otázka už se týkala konkrétně souboru vytvořených úloh. Její znění bylo: *„Zaujaly vás tyto úlohy?"* Všichni učitelé odpověděli, že je dané úlohy zaujaly a zároveň, že by je chtěli zařazovat do výuky, což byla odpověď na čtvrtou otázku: *„Chtěl/a byste dané úlohy zařazovat do výuky?"*

Pátou otázkou: *„Zdají se Vám úlohy pro žáky přiměřené nebo obtížné?"* bylo zjištěno, že úlohy připadají učitelům pro žáky 5. ročníku přiměřené. Tři učitelé navíc doplnili, že úlohy zvládnou pouze šikovnější žáci a ostatní budou mít při řešení problémy.

Předposlední otázka byla klíčová pro následné výzkumné šetření. Učitelům byla položena otázka: *„Které tři úlohy by bylo nejvhodnější zadat žákům v rámci výzkumného šetření?"*, podle níž byly z celkových pěti úloh vybrány pouze tři, které byly žákům předloženy k řešení. Zbylé dvě úlohy byly využity jako bonusové pro žáky, již měli tři předložené úlohy dříve vyřešené.

První úlohou, kterou učitelé nevybrali mezi tři úlohy, které byly následně zadány žákům, byla úloha Rozklad čísla 20. Jedním z důvodů, proč dali učitelé přednost jiným úlohám před touto úlohou je fakt, že žáci mají problém s názvoslovím základních početních operací – sčítání, odčítání, násobení a dělení. Úloha se skládá ze čtyř částí, které na sebe navazují. Pokud by žáci nedovedli rozlišit, o jakou operaci se jedná, nemohli by úspěšně pokračovat dál. Jeden z učitelů si nebyl jistý, jestli by ve třetí části úlohy žáci věděli, co mají vysledovat. Zadání úlohy, které je formulováno: „*Můžeš mezi těmito rozdíly vysledovat nějaký vztah?*", není podle učitele dostatečně určité pro žáky mladšího školního věku.

Druhá úloha, která byla žákům předložena pouze jako bonusová, je úloha Stavby z krychlí. Učitelé se ve většině shodli, že žáci nebudou rozumět slovu půdorys. Jiný konkrétní důvod, proč by danou úlohu nevybrali, uveden nebyl.

Záměrem poslední otázky bylo získat nějaké další úlohy hierarchicky složené. Byla položena otázka: „*Měl/a byste nějakou podobnou zajímavou úlohu, o kterou byste se rád/a podělil/a?*" Žádný z učitelů bohužel neměl žádnou konkrétní úlohu, která by zde mohla být zmíněna.

6 Vlastní průběh šetření

Druhá fáze výzkumného šetření byla zaměřena na analýzu řešení navrhovaných úloh. Každá základní škola poskytla k uskutečnění výzkumného šetření jednu vyučovací hodinu matematiky, tedy 45 minut. Výzkumné šetření probíhalo anonymně. Každý žák pouze napsal jakého je pohlaví. Zkráceně D jako dívka nebo CH jako chlapec. Předtím, než žáci začali řešit dané úlohy, jim bylo řečeno, že se jedná o badatelské úlohy, takže jejich úkolem je, aby si zahráli na „badatele“ a pokusili se dané úlohy vyřešit. Žákům bylo oznámeno, že celý list papíru je možný využít k psaní si různých poznámek či výpočtů. Dále bylo žákům sděleno, že se nejedná o žádnou písemku ani test, takže nejde o známku, ale pouze o to, jak si jsou schopni s jednotlivými úlohami poradit.

Následně bylo analyzováno řešení jednotlivých úloh a žáci byli zařazeni do určitých kategorií podle toho, do jaké míry se jim úlohu podařilo vyřešit. U každé úlohy jsou zmíněny chyby, kterých se žáci nejčastěji dopouštěli.

6.1 Rozklad čísla 20 – analýza řešení

Daná úloha byla předložena k vyřešení čtyřem žákům. Jeden žák nechal úlohu nevyplněnou. Dva žáci doplnili do první části úlohy dvakrát číslo 10, přičemž jejich součin je 100. Tyto dvě čísla nejsou správně, protože číslo 10 je číslo sudé.

Poslední ze čtyř žáků, který se pokusil vyřešit danou úlohu, se dostal v řešení nejdál. V 5.1.1a napsal čísla 5,15; 11, 9 a 3, 17. Správně dané dvojice i vynásobil, tzn., že v 5.1.1b seřadil čísla následovně: 51, 75, 99. Do 5.1.1c úlohy napsal: *„Ano, vždycky když přičtu 14, bude to o 10 míň než druhé číslo.“* Žák tedy vypozoroval, že mezi jednotlivými čísly je rozdíl 24. Předpokládá se, že pokud by v 5.1.1a objevil i lichá čísla 1, 19 a 7, 13 jako součet čísla 20, došel by k očekávanému řešení, že každý druhý rozdíl čísel je větší o 8.

6.2 Početní řetězec – analýza řešení

První úloha, která byla zadána všem žákům, byla úloha Početní řetězec. Nejprve dostali žáci prostor k tomu, aby si zadání úlohy přečetli a začali pracovat samostatně. Po určité době, kdy bylo zřejmé, že si žáci nevědí rady, jak úlohu řešit, jim byla úloha vysvětlena a ukázán názorný příklad. Žáci nevěděli, co mají do chybějících políček doplňovat. Někteří doplňovali pouze čísla, jiní zase jen operace, proto jim byl na tabuli ukázán vzorový příklad.

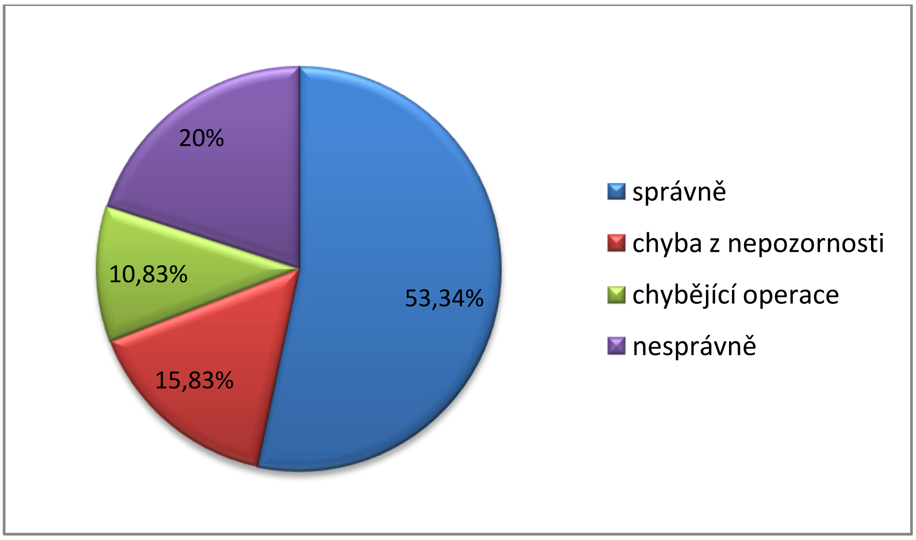
Žáci byli navedeni otázkou: *„Co uděláme s číslem 25, abychom dostali číslo 5?“*, na kterou si však museli sami najít odpověď.

V průběhu řešení druhé části úlohy často padl dotaz, jestli je možné, aby vyšlo číslo se zbytkem nebo co mají žáci dělat, když jim řetězec nevychází. Na tuto otázku bylo odpovězeno, aby hledali jiné počáteční číslo, které se bude do řetězce hodit. Žákům bylo také řečeno, aby čísla, která se pokusili doplnit do řetězce, ale řetězec jim nevycházel, nechali napsané a například přeškrtnuté, aby bylo vidět, která čísla se pokoušeli doplnit. Ve většině případů však žáci čísla smazali a nechali pouze číslo, se kterým jim řetězec vycházel správně. Pár žáků si naopak značilo, jestli už v řetězci použili všechny operace, aby některou nezapomněli doplnit.

<u>Analýza řešení 5.1.2a</u>

Při vyhodnocování této úlohy byli žáci zařazováni do <u>čtyř kategorií</u> podle toho, do jaké míry úlohu správně vyřešili.

- **I. kategorie – správně**: do této kategorie spadají žáci, kterým se podařilo do řetězce doplnit správné operace se správnými čísly, a zároveň splnili stanovenou podmínku, tzn. v řetězci je každá operace – sčítání, odčítání, násobení a dělení zastoupena alespoň jednou.
- **II. kategorie – chyba z nepozornosti**: do druhé kategorie jsou zařazeni žáci, kteří se při výpočtu dopustili nějaké chyby, pravděpodobně z nepozornosti.
- **III. kategorie – chybějící operace**: třetí kategorii tvoří žáci, kteří mají sice početní řetězec správně doplněný, ale chybí jim některá z požadovaných operací.
- **IV. kategorie – nesprávně**: do čtvrté kategorie spadají žáci, kteří udělali při řešení dvě a více chyb, dále žáci, kteří se dopustili nějaké chyby a zároveň jim chybí některá operace a také žáci, kteří úlohu nevyplnili vůbec.

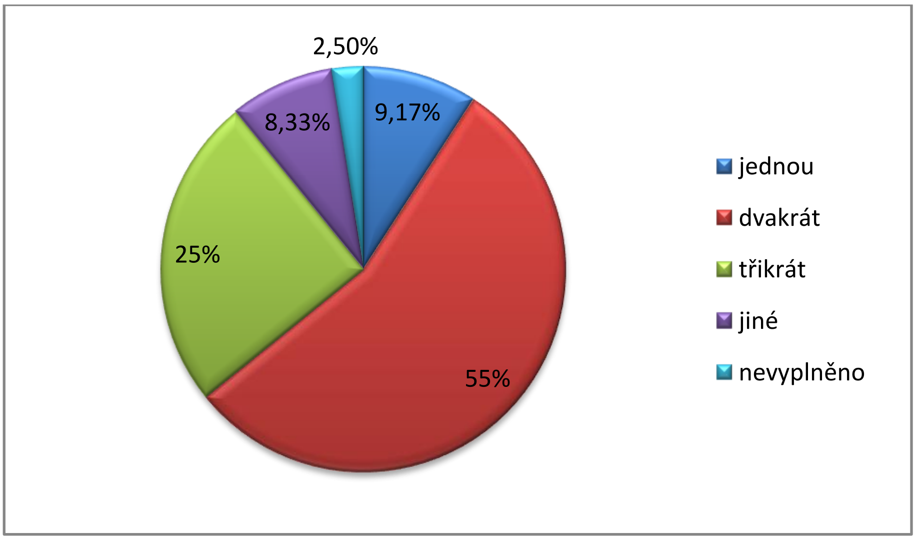


Graf č. 3: Výsledky řešení 5.1.2a

Z grafu č. 3 vyplývá, že úlohu 5.1.2a vyřešilo správně 53,34 % žáků. Chyby z nepozornosti se dopustilo 15,83 % žáků a 10,83 % žáků v řešení chyběla jedna z požadovaných operací. 20 % žáků se úlohu nepodařilo správně vyřešit. Z toho dva žáci nechali úlohu nevyplněnou.

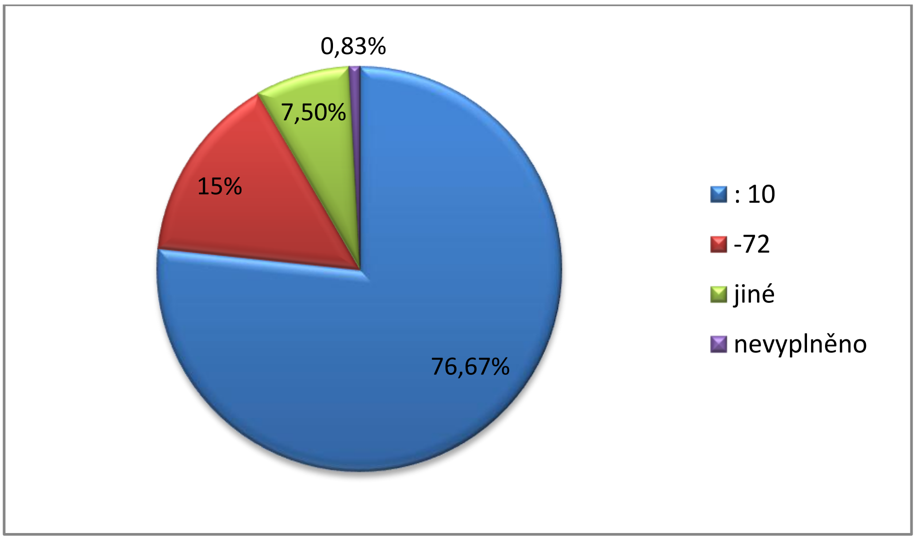
Úloha 5.1.2a – operace odčítání, první operace v řetězci

V následujících grafech je znázorněno, kolikrát doplnili žáci do početního řetězce operaci odčítání a kterou operaci doplnili žáci jako první mezi čísla 80 a 8.



Graf č. 4: Operace odčítáni v úloze Početní řetězec

Z grafu č. 4 je možné vyčíst, že 9,17 % žáků použilo operaci odčítání pouze jednou tam, kde není žádná jiná možnost. Kromě políčka, u kterého nešlo doplnit jinou operaci, použilo odčítání ještě jednou v řetězci, celkově tedy dvakrát 55 % žáků. 25 % žáků použilo operaci odčítání celkem třikrát. 8,33 % žáků použilo operaci vícekrát nebo pouze u jiných políček ale tam, kde se určitě měla objevit, doplněna nebyla. Zbylí tři žáci, tedy 2,5 %, řetězec nevyřešili vůbec.



Graf č. 5: První operace v úloze Početní řetězec

Z grafu č. 5 je patrné, že častější doplněnou operací byla operace dělení. Z celkového počtu 120 žáků doplnilo operaci dělení, tedy „ : 10“, 76,67 % žáků. 15 % žáků doplnilo operaci odčítání, tedy „ – 72“. 7,5 % žáků napsalo jinou možnost, než je uvedena, konkrétně *„· 10, : 0, : 1, : 8, : 9, : 640“* nebo pouze dělení bez správného čísla. Jeden žák, tedy 0,83 %, nedoplnil žádnou operaci.

<u>Analýza chybných řešení 5.1.2a</u>

Žáci se při řešení úlohy dopouštěli různých chyb. Častou chybou bylo použití opačné operace, např. 24 + 15 = 9, 48 + 24 = 24, 24 · 4 = 6.

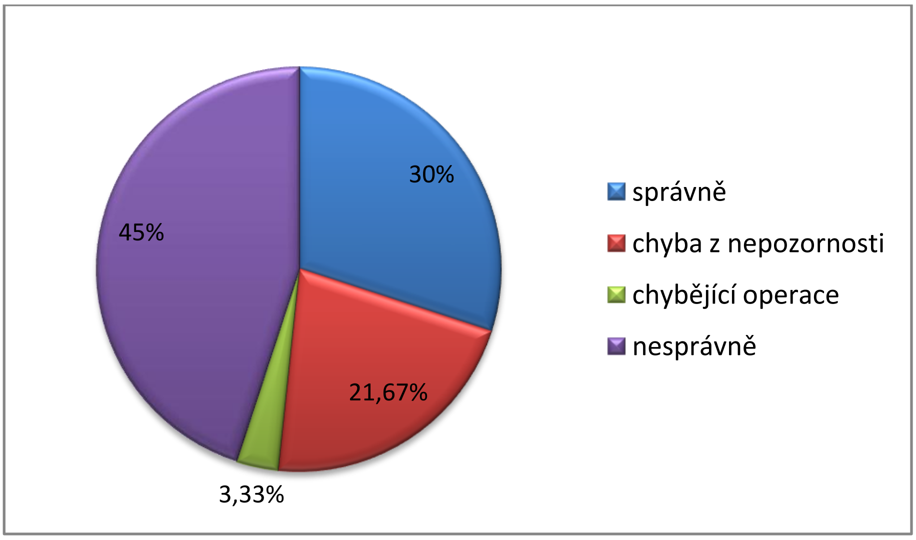
Další chyby se objevovaly při násobení a dělení příkladů z malé násobilky, např. 8 · 2 = 24, 6 · 4 = 48, 24 : 2 = 6, 80 : 1 = 8, 24 : 4 = 6, 80 : 9 = 8 ale i při sčítání a odčítání, např. 6 + 56 = 48, 6 + 32 = 48, 8 + 26 = 24, 48 – 28 = 24, 24 – 13 = 9, 48 – 23 = 24, 24 − 16 = 6.

Nejčastější chybějící operací v početním řetězci byla operace sčítání. Z celkového počtu třinácti žáků, kteří zapomněli doplnit některou ze zadaných operací, jedenáct žáků nedoplnilo operaci sčítání a pouze dva žáci do řetězce nedopsali operaci dělení.

Analýza řešení 5.1.2b

Při vyhodnocování této úlohy byli žáci stejně jako v úloze 5.1.2a zařazováni do čtyř kategorií podle toho, do jaké míry úlohu správně vyřešili.

- **I. kategorie – správně**: to této kategorie jsou zařazeni žáci, kteří se při řešení nedopustili žádné chyby a celou část této úlohy mají správně.
- **II. kategorie – chyba z nepozornosti**: do druhé kategorie spadají žáci, kteří se při řešení dopustili nějaké chyby nebo žáci, kteří opsali informace z první části úlohy s chybou, ale jinak mají řetězec vyřešený správně.
- **III. kategorie – chybějící operace**: ve třetí kategorii jsou žáci, kteří vymysleli početní řetězec správně, ale zapomněli doplnit do první části úlohy některou operaci, tzn., že jim tato operace chybí i ve druhé části úlohy.
- **IV. kategorie – nesprávně**: do poslední kategorie patří žáci, kteří se při řešení dopustili dvou a více chyb, nebo žáci, kteří opsali chybné informace z první části úlohy a zároveň se dopustili nějakých chyb, či žáci, kteří úlohu nedořešili do konce nebo ji nevyřešili vůbec.



Graf č. 6: Výsledky řešení 5.1.2b

Z grafu č. 6 je možné vyčíst, že s řešením 5.1.2b si správně poradilo 30 % žáků. Chyba z nepozornosti se objevila u 21,67 % žáků. Správně vyřešený řetězec s přenesenou chybějící operací z 5.1.2a se objevil v řešení 3,33 % žáků. Téměř polovina žáků, konkrétně 45 %, úlohu nevyřešila správně. Osm žáků nechalo úlohu nevyřešenou.

Úloha 5.1.2b – počáteční číslo řetězce

Nejčastěji číslo, které žáci doplňovali na začátek řetězce, pokud zvolili operaci dělení, bylo číslo 40. Další doplněná počáteční čísla byla např. 60, 70, 90, 100, 120, 320, 400 a 1000. Jeden žák zvolil jako počáteční číslo 0. Žáci, kteří jako první operaci doplnili odčítání, vybrali čísla 88, 92, 100 a 152. Jeden žák doplnil na začátek číslo 72.

Analýza chybných řešení 5.1.2b

Na vzorovém příkladu z 5.1.2a bylo žákům ukázáno, co mají doplnit do řetězce v 5.1.2b. Přesto se několikrát objevil řetězec, který vůbec neodpovídal zadání. Žáci si vymýšleli celý řetězec kompletně podle sebe, nebo přepsali pouze čísla, ale operace doplnili jiné. Několikrát se také objevilo, že žáci doplnili úplně stejná čísla, která byla v 5.1.2a, tzn., že napsali stejný řetězec. V řešení se také objevil řetězec, ve kterém žáci zachovali operace z 5.1.2a, ale vymysleli si k nim jiná čísla, což vedlo k zamyšlení, jestli je zadání 5.1.2b správně formulováno. Možná by bylo vhodnější formulovat zadání konkrétněji.

I v 5.1.2b se žáci dopouštěli nejrůznějších chyb. Žáci dělali chyby při násobení a dělení, např. $7 \cdot 3 = 23$, $66 : 4 = 16$, ale také u sčítání a odčítání, např. $3 + 42 = 47$, $7 + 16 = 25$, $21 – 15 = 0$, $21 – 15 = 14$, $45 – 24 = 19$, $21 – 18 = 17$, $32 – 24 = 18$, $21 – 15 = 16$, $8 – 15 = 7$, $3 – 18 = 15$, $32 – 15 = 16$.

U některých chyb je patrné, že se jich žáci dopustili proto, že číslo, které původně dosadili do řetězce, se ukázalo jako nevhodné, a tak hledali jiné, pro které by jim řetězec už vyšel správně, ale původně doplněná čísla už zapomněli přepočítat a opravit.

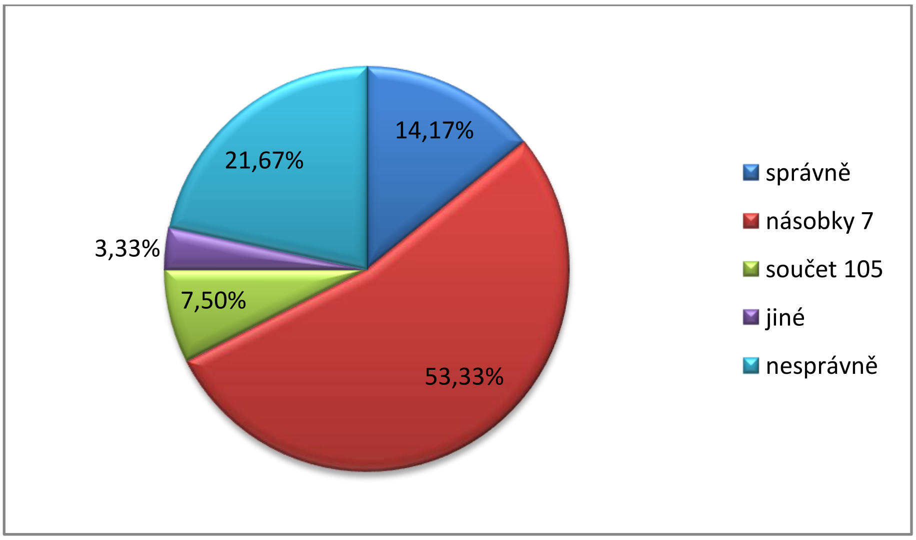
6.3 Trojice čísel – analýza řešení

Trojice čísel je druhou úlohou, které byla předložena všem žákům k vyřešení. Během řešení této úlohy často padl dotaz, který se týkal toho, že žáci nevěděli, co s úlohou mají dělat. Žáci byli navedeni, aby se zamysleli, co všechno umí s čísly dělat, jak s nimi umí pracovat a na základě toho se pokusili objevit společná pravidla. Dalším dotazem bylo, kolik pravidel by měli žáci najít. Žákům bylo sděleno, že se v úloze skrývají dvě pravidla, ale aby se pokusili najít alespoň jedno. Počet pravidel, která mají žáci nalézt, by mohl být napsán přímo do zadání, aby bylo jednoznačnější.

Analýza řešení 5.1.3a

V rámci vyhodnocování 5.1.3a byly výsledky žáků rozděleny do pěti kategorií**.**

- **I. kategorie – správně**: první kategorie se skládá ze žáků, kteří objevili obě předpokládaná pravidla, popřípadě žáci, kteří kromě těchto dvou pravidel napsali ještě další správné, které se po ověření také ukázalo jako správné.
- **II. kategorie – násobky 7**: do druhé kategorie jsou zařazeni žáci, kteří přišli pouze na pravidlo násobků čísla 7
- **III. kategorie – součet 105**: třetí kategorie je tvořena žáky, kteří pouze zjistili, že součet čísel každé trojice je číslo 105
- **IV. kategorie – jiné**: do čtvrté kategorie spadají žáci, kteří objevili jiná pravidla, než se očekávalo, ale po ověření bylo zjištěno, že pro všechny trojice platí.
- **V. kategorie – nesprávně**: do páté kategorie jsou zařazeni žáci, kteří neobjevili žádná společná pravidla nebo žáci, kteří úlohu nevyplnili vůbec.



Graf č. 7: Výsledky řešení 5.1.3a

Z grafu č. 7 vyplývá, že úlohu 5.1.3a správně vyřešilo 14,17 % žáků. Přes 60 % žáků objevilo alespoň jedno z uvedených pravidel. 3,33 % žáků se podařilo objevit jiné pravidlo, které také platí. 21,67 % žáků neurčilo žádné pravidlo správně. Z celkového počtu 26 žáků, kteří jsou zařazeni do poslední kategorie, dvacet žáků nechalo úlohu nevyplněnou.

Alternativní řešení 5.1.3a

Ačkoli se očekávalo, že žáci objeví pouze dvě zmíněná pravidla, někteří našli i jiná pravidla, které odpovídají všem čtyřem trojicím čísel. Dva žáci napsali, že v každé trojici se objevuje číslice 2. Po překontrolování, jestli je tohle tvrzení správné, bylo zjištěno, že číslici 2 je opravdu možné nalézt v každé trojici čísel.

Jeden žák objevil takové pravidlo, že součet jednotek každé trojice dá výsledek 15 a součet desítek každé trojice dá výsledek 90. I tato varianta byla ověřena a opět bylo zjištěno, že i tohle tvrzení je pravdivé. Pokud by se v zadání úlohy objevila například trojice čísel 21, 70, 14, dané tvrzení by pravdivé nebylo, ale tato trojice v zadání napsána nebyla.

V řešení této úlohy se také objevila možnost, že čísla jsou menší než 100. Tohle tvrzení je také pravdivé.

Analýza chybných řešení 5.1.3a

Někteří žáci na úlohu dívali z pohledu lichých a sudých čísel. Tento nápad však neodpovídal všem čtyřem trojicím. Objevila se i možnost, že jde o násobky čísla 14. Tohle tvrzení není správné, protože se v jednotlivých trojicích objevují čísla, která nejsou násobky 14.

Někteří učitelé v rámci předvýzkumu předpokládali, že žáci budou prověřovat možnost, ve které se součet nebo rozdíl dvou čísel rovná číslu třetímu. Žáci se pokoušeli i tento způsob řešení ověřit, ale neuspěli.

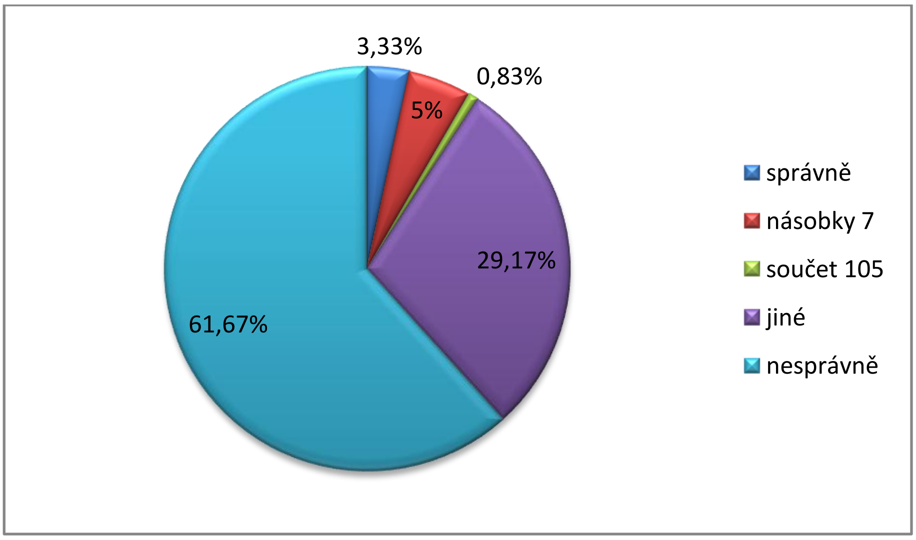
Žáci se při objevování pravidla stejného součtu dopouštěli chyby při sčítání. Někteří se dopočítali, že součet 105 platí pouze pro tři trojice a u jedné trojice jim vyšlo jiné číslo. To je vedlo k tomu, aby si svůj původní výpočet přepočítali a poté zjistili, že daný součet platí pro všechny trojice. Jeden žák se dopočítal součtu 95, tedy o 10 méně než bylo správně. Jelikož se u řešení úlohy nenachází žádné poznámky, není jasné, jestli se vyskytla chyba při sčítání čísel všech trojic nebo jestli žák tento výsledek vypočítal jen u jednoho příkladu a ostatní nepočítal dostatečně pozorně.

Analýza řešení 5.1.3b

Žáci jsou podle výsledků řešení druhé části úlohy rozděleni opět do pěti kategorií.

- **I. kategorie – správně**: první kategorie je tvořena žáky, kteří napsali správně další trojice čísel podle obou určených pravidel.
- **II. kategorie – násobky 7**: druhá kategorie zahrnuje žáky, kteří vymysleli trojice čísel, která splňují pravidlo násobků 7.

- **III. kategorie – součet 105**: ve třetí kategorii jsou žáci, kteří vymýšleli trojice dávající součet 105
- **IV. kategorie – jiné**: do čtvrté kategorie jsou zařazeni žáci, kteří vymysleli trojice, ale jiných násobků než 7, dále trojice, jejichž součtem bylo jiné číslo než 105, a také trojice, které splňují úplně jiná pravidla.
- **V. kategorie – nesprávně**: poslední kategorie je zastoupena žáky, kteří neurčili správné trojice, např. každá trojice se skládala z čísel různých násobků, nebo žáky, kteří úlohu vůbec nevyplnili.



Graf č. 8: Výsledky řešení 5.1.3b

Graf č. 8 ukazuje, že více než polovině žáků se úloha 5.1.3b nepodařila vyřešit. 61,67 % žáků nevymyslelo žádné další správné trojice čísel. Další trojice čísel, které odpovídaly objeveným pravidlům, napsalo pouze 3,33 % žáků. Téměř 6 % žáků dokázalo vymyslet trojice, které splňovaly alespoň jedno z uvedených pravidel. Z celkového počtu třiceti pěti žáků, čemuž odpovídá 29,17 %, kteří jsou zařazeni do kategorie s názvem „jiné“, dvacet sedm žáků vymýšlelo trojice, jejichž čísla byla násobky jiných čísel než 7, čtyři žáci si jako součet čísel jednotlivých trojic vybrali jiné číslo než 105 a zbylí čtyři žáci doplnili trojice, které odpovídají zcela jiným pravidlům.

Žáci, kterým se podařilo v první části úlohy objevit obě pravidla a správně vyřešili i druhou část úlohy, objevili správně tyto trojice čísel: (35, 7, 63); (49, 49, 7); (7, 14, 84); (14, 21, 70); (21, 28, 56); (28, 35, 42); (70, 35, 0); (77, 21, 7).

Analýza chybných řešení 5.1.3b

Očekávalo se, že pokud žáci naleznou obě pravidla, vymyslí trojice, které budou odpovídat právě těmto dvěma pravidlům. Jeden z žáků, ačkoliv objevil v první části úlohy obě požadovaná pravidla, zde napsal trojice čísel takových, že když od prvního čísla odečteme další dvě čísla, výsledek je 31. Jiný z žáků uvedl trojice čísel, které jsou násobky 8, a jejich součet je číslo 88. Další z žáků napsal pouze trojice, jejichž součet je 119, ale druhé pravidlo nevzal v úvahu. V řešení jednoho žáka se objevily dvě dvojice, jejichž čísla jsou násobky 7 a dvě dvojice, jejichž součet dává 105. Tohle řešení vedlo k úvaze, jestli je zadání 5.1.3a dostatečně přesné. Pro ujasnění by mohlo být upraveno: „Podívej se na trojice čísel a pokus se zjistit, co mají všechny tyto trojice společného." V zadání druhé úlohy by mohlo být zvýrazněno slovo „stejné".

Předpokládalo se, že pokud žáci přijdou pouze na to, že všechny trojice mají čísla, která jsou násobky 7, napíší další trojice, jejichž čísla budou násobky 7. Jestliže zjistí, že pro všechny trojice je společný součet 105, napíší jiné trojice, jejichž součtem bude opět číslo 105. Pouze několik žáků vymýšlelo trojice podle těchto pravidel, ostatní vymýšleli trojice jiných násobků nebo trojice, jejichž součtem je jiné číslo než 105. Žáci nejčastěji tvořili trojice, jejichž čísla byla násobky 5, a nejméně trojice s násobky 4, 8 a 10. Jinými součty trojic, které se objevily v řešení žáků, byla čísla 80, 100, 118, 131.

Žák, který v 5.1.3a objevil pravidlo, že všechny trojice obsahují číslici 2, v 5.1.3b vymyslel trojice, které obsahují číslici 6. Druhý žák, který si všimnul stejného pravidla, zase dopsal trojice, které mají číslici 5.

Za chybnou odpověď bylo kromě jiného považováno, když žáci dopsali více trojic, ale každá trojice obsahuje čísla jiných násobků. V řešení některých žáků se také objevovaly trojice, u kterých nebylo jasné, co mají společného, protože u 5.1.3a nebyla popsána společná pravidla.

6.4 Stavby z krychlí – analýza řešení

Tuto úlohu se pokusilo vyřešit šest žáků. Tři žáci vyřešili celou úlohu správně, přičemž jeden z žáků v 5.1.4a objevil osm různých staveb a v 5.1.4b správně rozhodl o obou tvrzeních a své rozhodnutí v obou případech zdůvodnil. Druhý žák přišel také na osm variant staveb a správně rozhodl o obou tvrzeních, své rozhodnutí však nezdůvodnil. Třetí z žáků, kteří úlohu vyřešili správně, uvedl šest správných variant a správně posoudil obě tvrzení.

Konkrétní zdůvodnění, proč si myslí, že je první tvrzení pravdivé a druhé nepravdivé, chybělo.

Dva z celkového počtu šesti žáků vyřešili správně pouze 5.1.4a, přičemž jeden z nich našel osm správných variant a druhý o jednu variantu méně. Úloha 5.1.4b zůstala u obou žáků nevyplněna. Poslední žák, který řešil danou úlohu, úspěšný nebyl, protože nedodržel stanovenou podmínku, která určovala, že v každém sloupci musí být alespoň jedna krychle.

6.5 Barevné krychle – analýza řešení

Barevné krychle je třetí úloha, které byly v rámci výzkumného šetření předloženy všem žákům k vyřešení. Předtím než budou rozebrány řešení jednotlivých částí úlohy, jsou zde popsány obecně chyby, kterých se žáci dopouštěli ve všech částech úlohy.

<u>Analýza chybných řešení 5.1.5</u>

Žáci se dopouštěli při řešení různých chyb. Nejčastější chybou byly špatně určené počty stěn nebo krychliček. Žáci se nedopočítali správného výsledku kvůli opomenutí částí krychle, které nejsou jasně viditelné nebo zapomněli spočítat všechny krychličky.

Častou chybou bylo určování počtu stěn místo počtu krychliček. Při řešení této úlohy je důležité, aby si žáci pozorně přečetli zadání, a tím se vyvarovali tohoto typu chyby. Pro lepší zorientování v zadání a ujasnění toho, co přesně mají žáci určovat, by mohlo být zvýrazněno „kolik stěn“ nebo „kolik krychliček“.

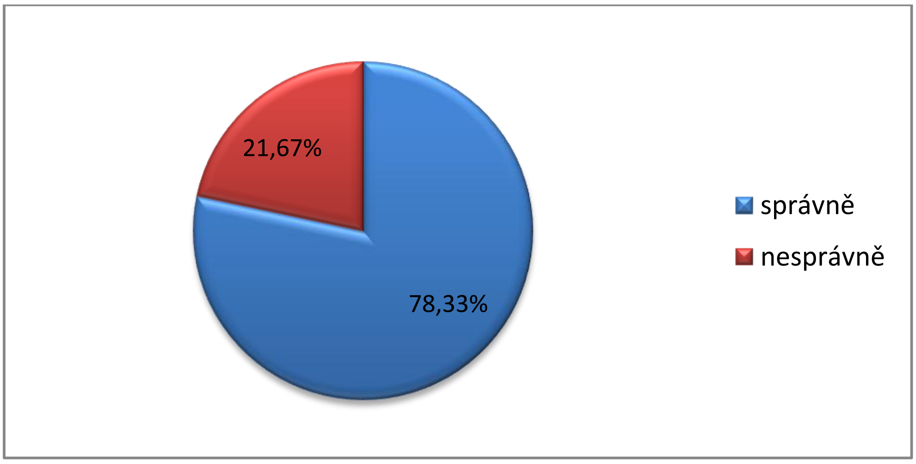
Další chybou, které se žáci dopouštěli, bylo kombinování obou možností polohy krychle. V jedné části úlohy počet odpovídal krychli, která je umístěna na podložce a v následujících odpovědích jsou uvedeny počty, které odpovídají krychli obarvené ze všech stran.

<u>Analýza řešení 5.1.5a</u>

Žáci většinou volili možnost, že krychle leží na podložce, proto uvedli, že by se obarvilo pět stěn. Pouze několik žáků uvedlo, že se obarví celá krychle, všech šest stěn. Řešení dalších tří částí úloh je závislé na tom, kterou z možností žáci vybrali.

Na rozdíl od předchozích úloh jsou výsledky řešení této úlohy rozděleny pouze do <u>dvou kategorií</u>.

- **I. kategorie – správně**: do této kategorie jsou zařazeni žáci, kteří odpověděli, že krychle má obarveno pět nebo šest stěn.
- **II. kategorie – nesprávně**: ve druhé kategorii jsou žáci, kteří napsali jiný počet než je pět nebo šest stěn a také žáci, kteří nechali úlohu bez řešení.



Graf č. 9: Výsledky řešení 5.1.5a

Z grafu č. 9 je patrné, že více než tři čtvrtiny žáků si s úlohou poradily. Správné řešení napsalo 78,33 % žáků. Z celkového počtu 94 žáků, kteří úlohu vyřešili správně, sedm žáků uvedlo, že by se obarvilo šest stěn krychle, tzn., že by krychle nebyla na podložce, a jeden žák uvedl obě možné varianty. 21, 67 % žáků nedokázalo úlohu vyřešit správně.

Analýza chybných řešení 5.1.5a

V řešení několika žáků se objevila odpověď, že se obarví pouze tři stěny. Žáci uvedli tento počet obarvených stěn krychle pravděpodobně proto, že nevzali v úvahu stěny, které na obrázku nejsou viditelné a měli si je jen představit.

Někteří žáci uvedli, že se obarví pouze jedna stěna. Předpokládá se, že žáci měli na mysli pouze horní stěnu, popřípadě, že si spletli počet krychliček s počtem stěn.

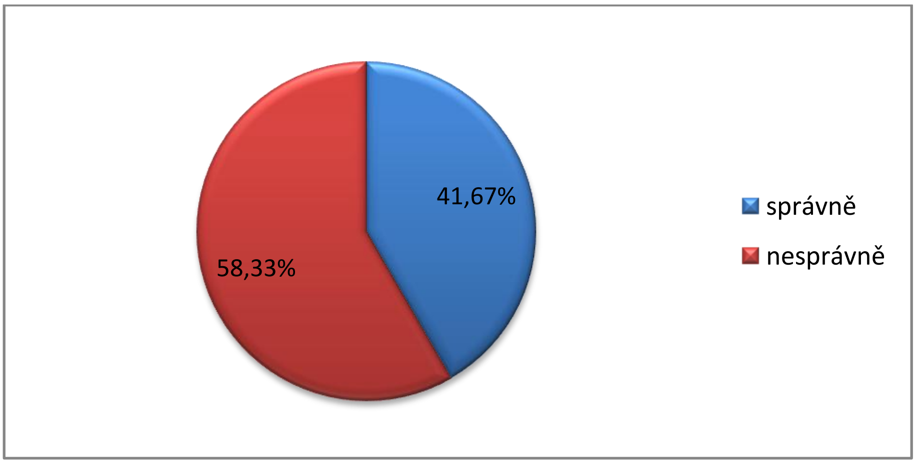
Kromě jedné a třech stěn se párkrát objevily i odpovědi dvě a čtyři. U těchto odpovědí nebylo zjištěno, proč žáci napsali zrovna tyto počty.

Analýza řešení 5.1.5b

Správné řešení 5.1.5b vychází z odpovědi v 5.1.5a. Pokud žáci v 5.1.5a určili, že má krychle obarvených pět stěn, správnou odpovědí je, že prostřední krychle bude mít obarveny čtyři krychličky, konkrétně čtyři horní. V případě, že odpověď žáků v 5.1.5a byla šest stěn, správným řešením 5.1.5b je všech osm krychliček.

Podle výsledků řešení 5.1.5b jsou žáci rozděleni do dvou kategorií.

- **I. kategorie – správně**: první kategorii tvoří žáci, kteří odpověděli, že prostřední krychle má obarveny čtyři nebo osm krychliček.
- **II. kategorie – nesprávně**: ve druhé kategorii jsou zařazeni žáci, kteří neuvedli počet čtyři nebo osm, dále žáci, kteří jeden z těchto počtů uvedli, ale daný počet neodpovídá řešení první části úlohy a nakonec žáci, kteří nenapsali žádnou odpověď.



Graf č. 10: Výsledky řešení 5.1.5b

Graf č. 10 ukazuje, že více než polovina žáků si s úlohou 5.1.5b nedokázala poradit. 58,33 % žáků vyřešilo úlohu nesprávně. 41,67 % žáků dokázalo uvést správný počet obarvených krychliček.

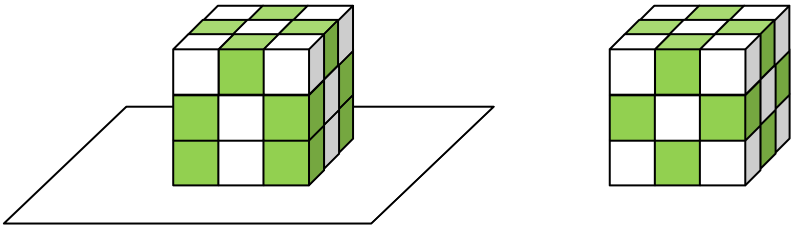
Analýza chybných řešení 5.1.5b

V řešení několika žáků se objevila odpověď 12. Žáci pravděpodobně počítali místo krychliček jejich obarvené stěny. Číslo dvanáct odpovídá čtyřem krychličkám se třemi obarvenými stěnami.

Další častou odpovědí bylo číslo 20. Předpokládá se, že žáci spočítali všechny viditelné stěny malých krychliček. Krychle má obarveno pět stěn a každá stěna má čtyři stěny malých krychliček.

Analýza řešení 5.1.5c

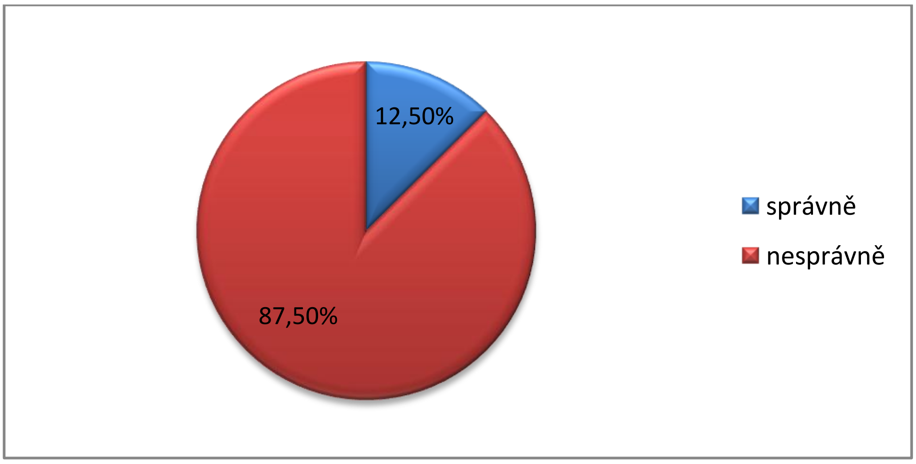
Na rozdíl od předchozích částí je řešením této úlohy stejný počet pro obě varianty polohy krychle. Dvě obarvené stěny by mělo obarveno dvanáct malých krychliček. Rozdíl by byl pouze v určení konkrétních krychliček, nikoliv v počtu, což je možné vidět na obrázku č. 14.



Obrázek č. 14: Znázornění obarvených krychliček velké krychle

Stejně jako u předchozích dvou částí jsou žáci rozdělení podle výsledků do dvou kategorií.

- **I. kategorie – správně**: do této kategorie jsou zařazeni žáci, kteří napsali, že velká krychle má obarveno dvanáct krychliček.
- **II. kategorie – nesprávně**: do druhé kategorii spadají žáci, kteří uvedli jiný počet než dvanáct a žáci, kteří úlohu nevyřešili.



Graf č. 11: Výsledky řešení 5.1.5c

Úloha 5.1.5c byla pro žáky z prvních třech částí úlohy 5.1.5 nejsložitější. Z grafu č. 11 je patrné, že správně odpovědělo pouze 12,5 % žáků. 87,5 % žáků se nepodařilo úlohu správně vyřešit.

Analýza chybných řešení 5.1.5c

V řešení žáků se často objevovala odpověď 18. Předpokládá se, že žáci opět určovali počet stěn ale pouze u krychliček, které jsou viditelné. Na obrázku v zadání úlohy (krychle vpravo) je viditelných devět krychliček, které mají obarvené dvě stěny, což odpovídá počtu osmnácti stěn.

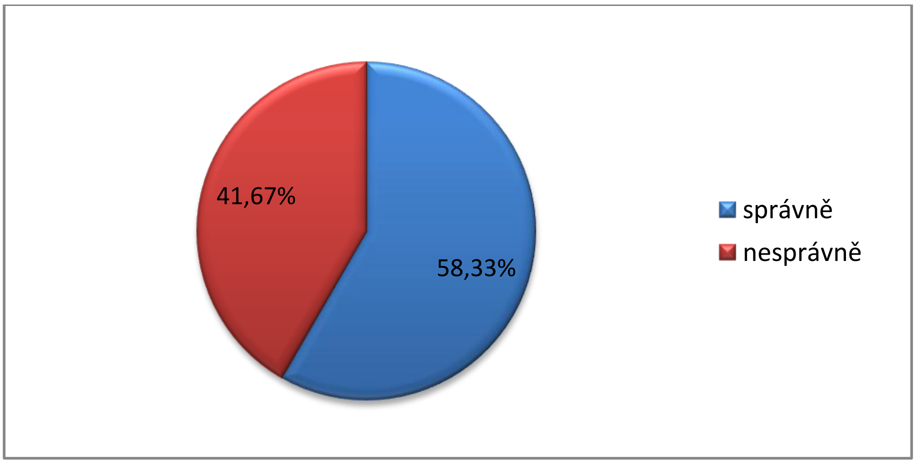
Někteří žáci napsali jako řešení číslo 45, což odpovídá pěti stranám celé krychle, z nichž jedna je složená z devíti stěn malých krychliček.

Analýza řešení 5.1.5d

Vzhledem k položení otázky „Skládá se…“ se nabízí odpověď „ANO“ nebo „NE“. Pokud by byl požadován přesný počet jednotlivých krychlí, musela by být otázka položena jinak nebo doplněna „Pokud ano, z kolika?“ Někteří žáci se však pokusili jednotlivé krychle spočítat.

Výsledky řešení 5.1.5d rozděluje žáky opět do dvou kategorií.

- **I. kategorie – správně**: do první kategorie jsou zařazeni žáci, kteří napsali pouze odpověď „ANO“, dále žáci, kteří zároveň určili správný počet jednotlivých krychliček, a také žáci, kterým se podařilo určit alespoň jeden správný počet, a v neposlední řadě žáci, kteří se sice pokusili určit přesné počty obarvených krychliček, ale oba počty byly chybné.
- **II. kategorie – nesprávně**: druhou kategorii tvoří žáci, kteří odpověděli, že se velká krychle neskládá z krychliček, které mají obarvenou jednu nebo žádnou stěnu, a také žáci, kterým řešení této části úlohy chybělo.



Graf č. 12: Výsledky řešení 5.1.5d

V grafu č. 12 je zřejmé, že více než polovina žáků dokázala na otázku odpovědět správně, konkrétně 58,33 %. Více než 40 % žáků se úloha vyřešit nepodařila.

7 Vyhodnocení dat

Ve třetí fázi výzkumného šetření byla vyhodnocena řešení jednotlivých předložených úloh podle různých paramentů. Dále byly zanalyzovány a vyhodnoceny dotazníky, prostřednictvím kterých žáci hodnotili předložené úlohy hierarchicky složené. V poslední podkapitole jsou shrnuty výsledky výzkumného šetření.

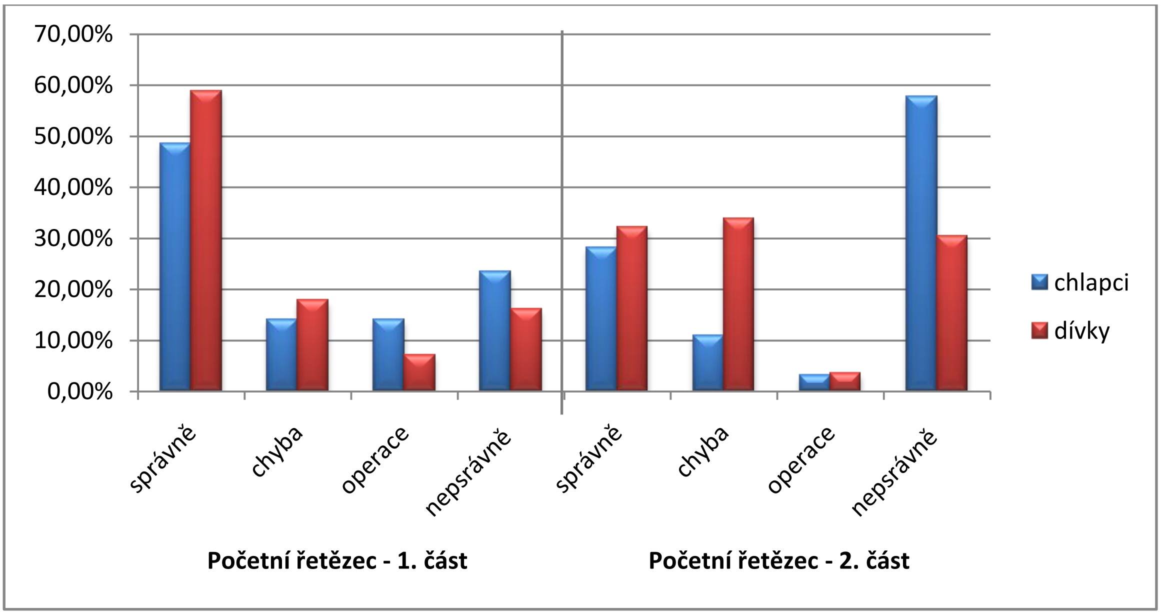
7.1 Statistické zpracování dat

V této podkapitole bude porovnáno, jak si při řešení jednotlivých úloh vedli nejprve dívky a chlapci, poté žáci různého typu škol, tedy žáci městské školy a žáci školy venkovské, a nakonec žáci dvou paralelních tříd jedné školy.

7.1.1 Vyhodnocení podle pohlaví

Početní řetězec

V následujícím grafu je zobrazeno, jak si poradili chlapci a dívky s jednotlivými částmi úlohy 5.1.2.



Graf č. 13: Výsledky jednotlivých částí úlohy Početní řetězec podle pohlaví

Z grafu č. 13, který je rozdělen podle pohlaví, je možné vyčíst, že úlohu 5.1.2a vyřešilo správně 48,44 % chlapců. 14,06 % chlapců se dopustilo chyby z nepozornosti a 14,06 % chlapců vyřešilo řetězec správně, akorát zapomněli splnit podmínku, kterou bylo doplnění všech zadaných operací. Nesprávně řetězec vyřešilo 23,44 % chlapců.

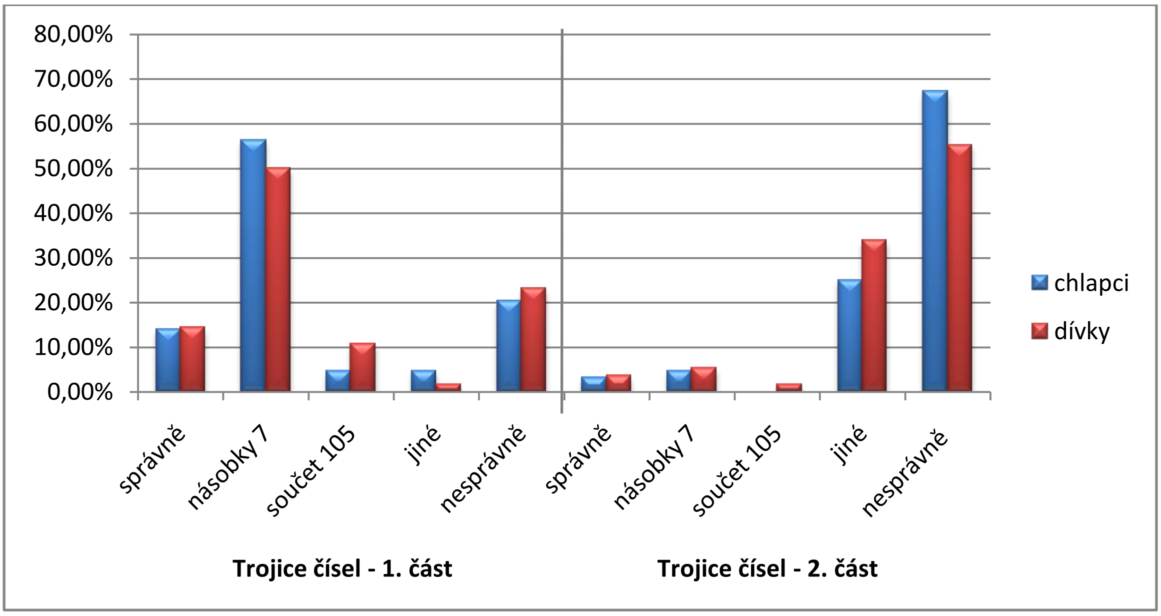
Dívky při řešení úlohy dosáhly těchto výsledků: Ke správnému řešení došlo 58,93 % dívek a 17,86 % dívek udělalo při řešení nějakou chybu. Chybějící operace se objevila v řešení 7,14 % dívek a 16,07 % dívek nevyřešilo úlohu správně.

Úlohu 5.1.2b správně vyřešilo 28,13 % chlapců. 10,94 % chlapců se dopustilo chyby nebo chybu opsali z první části a 3,13 % chlapců nedoplnilo jednu z požadovaných operací. Více než polovině chlapců, přesně 57,80 % se úloha nepodařila vyřešit.

Správné řešení napsalo 32,14 % dívek a 33,93 % udělalo při řešení nějakou chybu. 3,57 % chyběla v řešení nějaká ze čtyř požadovaných operací a 30,36 % dívek úlohu nevyřešilo správně.

<u>Trojice čísel</u>

Následující graf ukazuje výsledky jednotlivých částí úlohy Trojice čísel podle toho, jak je vyřešili chlapci a dívky.



Graf č. 14: Výsledky jednotlivých části úlohy Trojice čísel podle pohlaví

Z grafu č. 14 vyplývá, že v 5.1.3a 14,06 % chlapců objevilo obě dvě pravidla. 56,25 % chlapců přišlo na to, že čísla všech trojic jsou násobky čísla 7 a jen 4,69 % uvedlo, že součet všech trojic je číslo 105. Jiné pravidlo bylo objeveno 4,69 % chlapců a 20,31 % si s úlohou neporadilo.

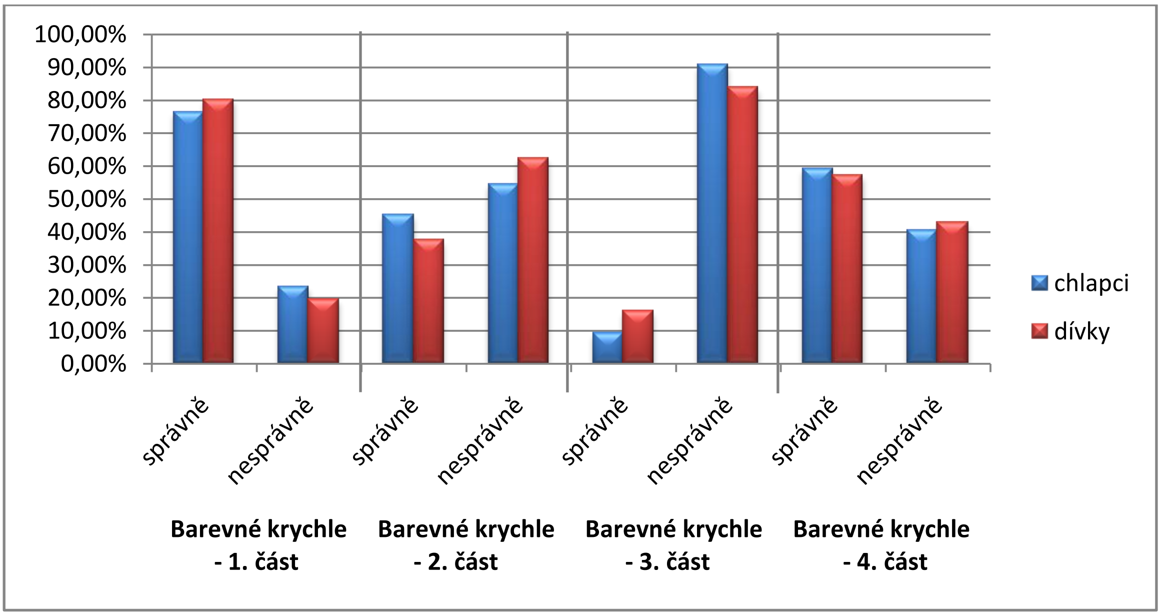
Úlohu 5.1.3a správně vyřešilo 14,29 % dívek. Polovina dívek, tedy 50 %, objevila pravidlo, že všechna čísla trojic jsou násobky 7, a 10,71 % dívek přišlo pouze na druhé pravidlo, že součet čísel všech trojic je číslo 105. Jedna dívka, konkrétně 1,79 %, objevila a zapsala jiné pravidlo, než je zmíněno a 23,21 % dívek nenašlo žádné z uvedených pravidel.

V 5.1.3b 3,13 % chlapců vymyslelo další trojice, které odpovídaly oběma nalezeným pravidlům. Pouze 4,69 % chlapců doplnilo další trojice násobků 7. Žádný chlapec nepřipsal další trojice, jejichž součtem by bylo číslo 105. Čtvrtina chlapců vypsala trojice, které se nedají přiřadit k žádné ze zmíněných možností, a 67,18 % nevymyslelo žádné další trojice nebo se v řešení objevily trojice různých násobků.

5.1.3b vyřešilo správně 3,57 % dívek. 5,36 % dívek nalezlo další trojice čísel, která jsou násobky čísla 7 a jedna dívka, konkrétně 1,79 %, napsala další trojice čísel, jejichž součtem je číslo 105. Třetina dívek, tedy 33,93 %, napsala trojice, které splňovaly jiná pravidla, než jsou zmíněna. Více než polovina dívek, konkrétně 55,35 % dívek, nenapsala žádné další správné trojice čísel.

Barevné krychle

V grafu č. 15, je možné vidět, jak se chlapcům a jak dívkám podařilo vyřešit jednotlivé části úlohy Barevné krychle.



Graf č. 15: Výsledky jednotlivých části úlohy Barevné krychle podle pohlaví

Z grafu č. 15 je patrné, že 75,56 % chlapců bylo v řešení 5.1.4a úspěšné a 23,44 % se ji nepodařilo vyřešit správně.

Dívky byli při řešení nepatrně úspěšnější než chlapci. 80,36 % dívek určilo, že pokud by se vylila plechovka s barvou, nejmenší krychle by měla obarvených pět, popřípadě šest stěn. 19,64 % dívek bylo neúspěšných a počet obarvených stěn neurčily správně nebo vůbec.

V 5.1.4b byli úspěšnější chlapci. 45,31 % chlapců dokázalo určit správný počet krychliček, které by měly obarveny tři stěny. 54,69 % chlapců se správného čísla nedopočítalo.

Z celkového počtu 56 dívek 37,5 % vyřešilo úspěšně. 62,5 % dívek nenapsalo správný počet obarvených krychliček.

Úloha 5.1.4c se podle výsledků jeví jako nejobtížnější. Pouze 9,38 % chlapců dokázalo správně určit, že dvanáct krychliček největší krychle by mělo obarvené dvě stěny. Více než 90 % chlapců, přesně 90,62 %, nedokázalo počet krychliček správně spočítat.

Z pohledu dívek se úloha podařila vyřešit 16,07 %. 83,93 % dívek bylo v řešení této úlohy neúspěšné.

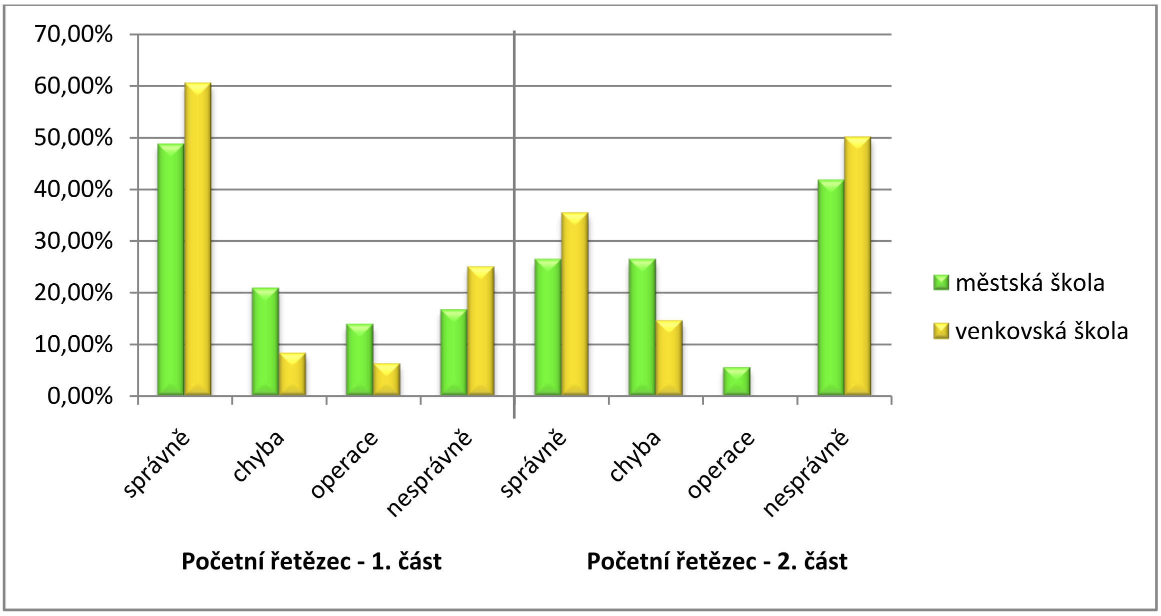
Celkově si s úlohou 5.1.4d úspěšně poradilo 59,38 % chlapců. Přes 40 % chlapců, konkrétně 40,62 %, odpovědělo záporně, což bylo nesprávné, nebo úlohu nevyplnili vůbec.

Rozdíly v řešení této úlohy byly mezi chlapci a dívkami minimální. Správně vyřešilo úlohu 57,14 % dívek. 42,86 % dívek odpovědělo, že velká krychle se neskládá z krychliček s jednou nebo žádnou obarvenou stěnou, popřípadě úlohu nechalo bez řešení.

7.1.2 Vyhodnocení podle typu školy

Početní řetězec

Graf č. 16 ukazuje, jak úlohu Početní řetězec vyřešili žáci, kteří navštěvují různý typ školy – městskou nebo venkovskou.



Graf č. 16: Výsledky jednotlivých části úlohy Početní řetězec podle typu školy

Graf č. 16, který je rozdělen podle toho, zda žáci navštěvují městskou školu nebo školu venkovskou, ukazuje, že s 5.1.2a si výborně poradilo 48,61 % žáků městských škol. 20,83 % žáků udělalo při řešení nějakou chybu a jednu požadovanou operaci neuvedlo 13,89 % žáků. Nesprávně vyřešilo úlohu 16,67 % žáků.

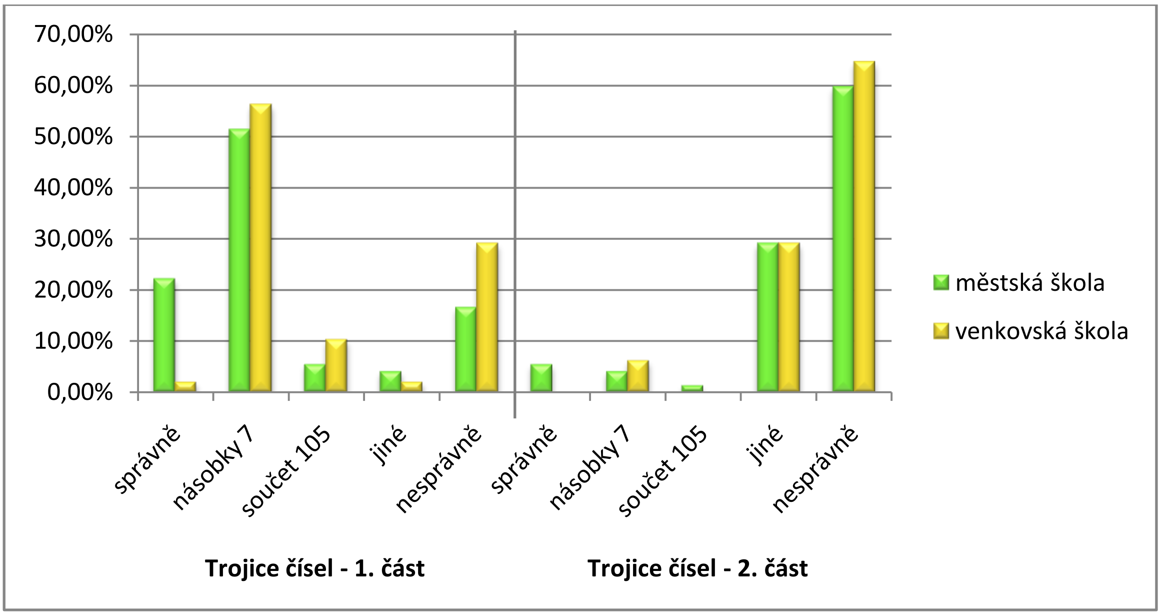
Z celkového počtu žáků, kteří navštěvují venkovskou školu, správně úlohu vyřešilo 60,42 %. Chyba v řešení se objevila u 8,33 % žáků, 6,25 % žáků vyřešilo úlohu správně, ale nedoplnilo všechny operace ze zadání a čtvrtina žáků venkovských škol si s úlohou neporadila.

Úloha 5.1.2a byla správně vyřešena 26,39 % žáků městských škol. 26,39 % žáků udělalo při řešení chybu nebo si chybu přenesli z první části a 5,55 % žáků chyběla v řešení jedna operace. Nesprávně byla úloha vyřešena 41,67 % žáků.

Z grafu č. 16 vyplývá, že 35,42 % žáků venkovských škol vyřešilo druhou část úlohy správně a 14,58 % žáků vyřešilo úlohu s jednou chybou. Žádný žák venkovské školy nedoplnil řetězec správně, aniž by v řešení chyběla některá požadovaná operace. Polovina žáků úlohu nevyřešila správně.

Trojice čísel

Z dalšího grafu č. 17 je možné vyčíst, jak si žáci škol městských a venkovských poradili s úlohou Trojice čísel.



Graf č. 17: Výsledky jednotlivých části úlohy Trojice čísel podle typu školy

V 5.1.3a 22,22 % žáků městských škol objevilo obě dvě společná pravidla. Více než polovina žáků, přesně 51,39 %, napsalo, že čísla jednotlivých trojic jsou násobky 7 a 5,55 % uvedlo, že součet všech čísel každé trojice se 105. Z celkového počtu 72 žáků, kteří navštěvují městskou školu, 4,17 % objevilo pravidlo, které nebylo předpokládáno, že je společné pro všechny trojice, ale platí. 16, 67 % žáků neobjevilo žádné společné pravidlo.

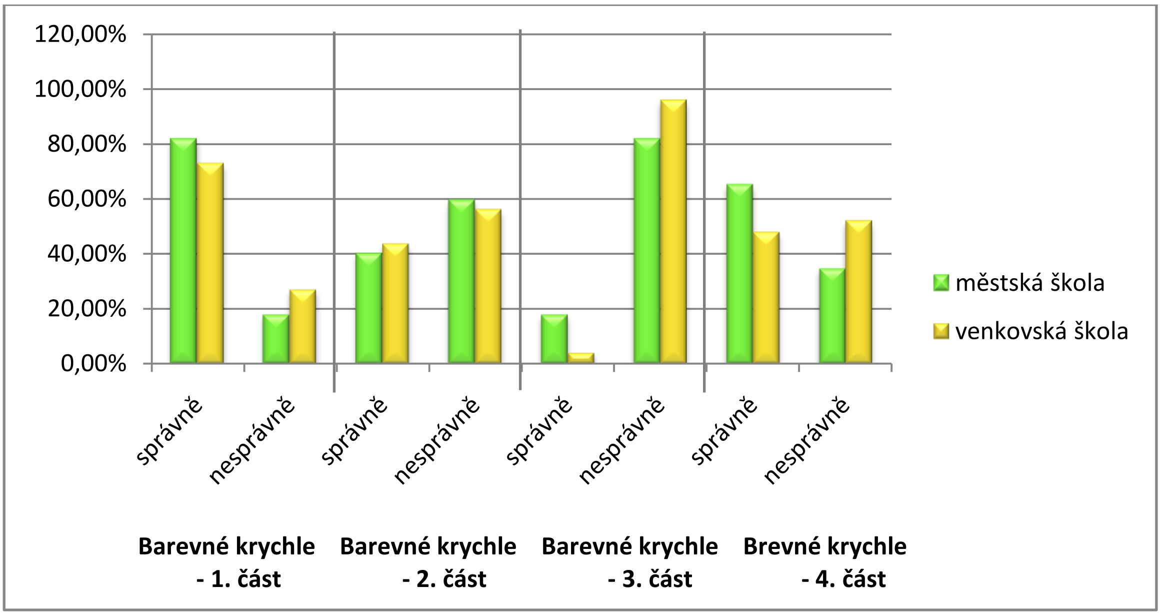
Z pohledu žáků venkovských škol pouze 2,08 % přišlo na obě pravidla. 56,25 % žáků zjistilo, že čísla jsou násobky 7 a součet 105 objevilo 10,42 % žáků. 2,08 % žáků napsalo ještě jiné společné pravidlo, které odpovídá všem trojicím a 29,17 % žáků tuto úlohu nevyřešilo správně.

Analýza výsledků 5.1.3b z hlediska rozdělení podle typu školy ukazuje, že 5,55 % žáků městských škol dokázalo vymyslet další trojice čísel, které splňují obě objevená pravidla. 4,17 % žáků vymyslelo další trojice, jejichž čísla jsou násobky čísla 7. Pouze 1,39 % žáků napsalo další trojice, jejichž součtem čísel je 105. 29,17 % žáků napsalo trojice, které neodpovídají žádnému ze zmíněných pravidel. Téměř 60 % žáků nevymyslelo žádné další trojice čísel.

Jedinému žákovi, který navštěvuje venkovskou školu a v první části našel obě společná pravidla, se nepodařilo přijít na další trojice čísel, které by těmto pravidlům odpovídaly. 6,25 % žáků venkovských škol uvedlo další trojice násobků 7 a žádní žáci nevymysleli trojice s výsledkem součtu 105. Další trojice čísel, které splňovaly jiná pravidla, zapsalo 29,17 % žáků. Z celkového počtu 48 žáků, kteří jsou žáky venkovských škol, 64,58 % žáků nedopsalo žádnou další správnou trojici čísel.

<u>Barevné krychle</u>

Jak se liší výsledky řešení úlohy Barevné krychle podle toho, jestli jsou žáci školy městské nebo venkovské, ukazuje následující graf č. 18.



Graf č. 18: Výsledky jednotlivých části úlohy Barevné krychle podle typu školy

Úlohu 5.1.5a lépe vyřešili žáci městských škol. 81,94 % žáků správně určilo počet obarvených stěn malé krychle. 18,06 % žáků napsalo chybný počet obarvených stěn krychle.

Z celkového počtu 48 žáků, kteří navštěvují venkovské školy, bylo při řešení první části úlohy 72,92 % úspěšných a 27,08 % neúspěšných.

Z grafu č. 18 vyplývá, že v 5.1.5b byli žáci městských škol méně úspěšní než žáci škol venkovských. Správný počet krychliček prostřední krychle, které by měly obarveny tři stěny, doplnilo 40,28 % žáků městských škol. Téměř 60 %, přesně 59,72 % žáků, úlohu vyřešilo nesprávně.

Žáci venkovských škol byli úspěšní ze 43,75 %. 56,25 % žáků se nepodařilo najít správný počet krychliček se třemi obarvenými stěnami.

Z grafu č. 18 je patrné, že lépe si s 5.1.5c poradili žáci městských škol. Z celkového počtu 72 žáků 18,06 % odpovědělo, že velká krychle by se skládala z 12 krychliček, které by měly obarvené dvě stěny. 81,94 % žáků k tomuto číslu nedospělo.

Úlohu 5.1.5c správně vyřešilo pouze 4,17 % žáků, které navštěvují venkovské školy. 95,83 % žáků si s úlohou nevědělo rady.

Z celkového počtu 72 žáků městských škol správně vyřešilo 5.1.5c 65,28 % žáků. 34,72 % žáků odpovědělo, že se krychle neskládá z krychliček, které mají obarvenou jednu stěnu a nemají obarvenou žádnou stěnu, nebo neuvedlo žádné řešení.

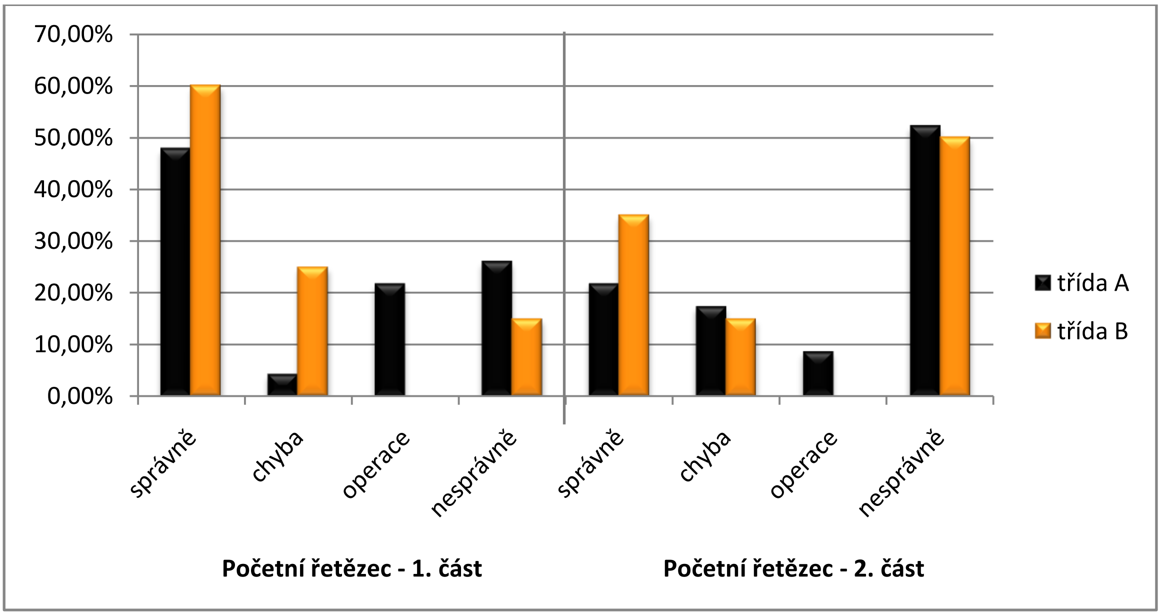
Celkově se podařila tato část úlohy vyřešit 47,92 % žáků venkovských škol. Více než polovina žáků, přesně 52,08 %, byla v řešení čtvrté části úlohy Barevné krychle neúspěšná.

7.1.3 Vyhodnocení podle paralelních tříd

Výzkumné šetření probíhalo na Základní škole Olomouc, Holečkova 10 ve dvou paralelních třídách. Pro analýzu výsledků řešení úloh budou třídy označovány jako třída A a třída B.

<u>Početní řetězec</u>

V následujícím grafu č. 19 je zobrazeno, jak si žáci paralelních tříd poradili s úlohou Početní řetězec.



Graf č. 19: Výsledky jednotlivých části úlohy Početní řetězec podle paralelních tříd

Z celkového počtu 23 žáků ve třídě A úlohu 5.1.2a správně vyřešilo 47,82 %. 4,35 % žáků této třídy se dopustilo při řešení nějaké chyby a s chybějící operací vyřešilo úlohu 21,74 % žáků. 26,09 % žáků doplnilo úlohu nesprávně.

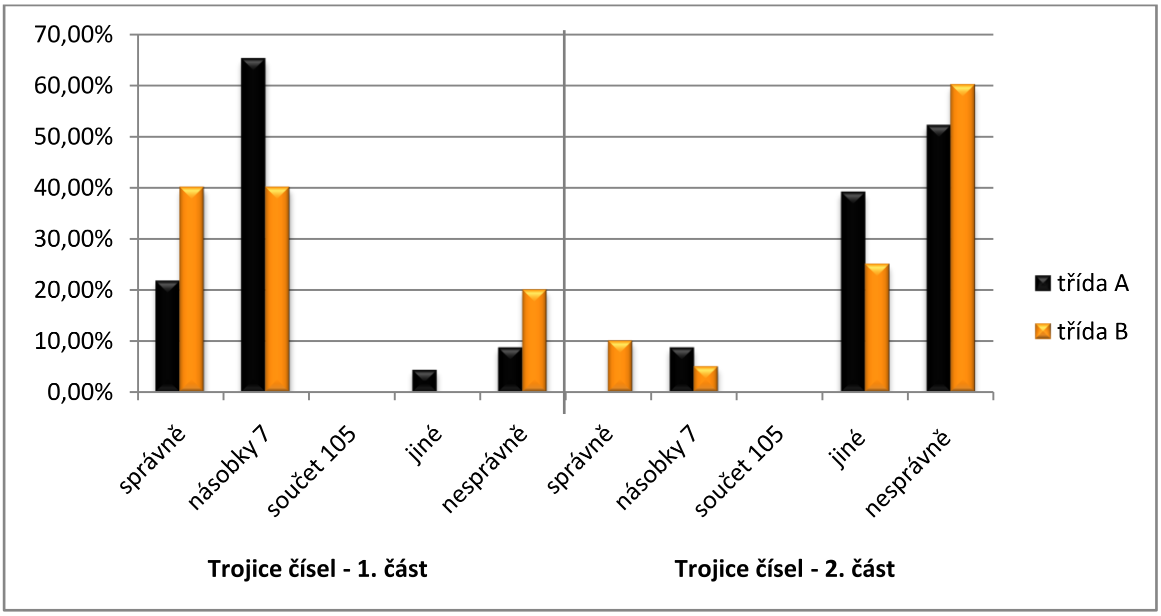
Ve třídě B došlo ke správnému řešení 60 % žáků. Čtvrtina žáků udělala v řetězci nějakou chybu. Žádný žák této třídy nevyřešil úlohu správně s chybějící operací a 15 % žáků úlohu nevyřešilo.

Graf č. 19 udává, že 5.1.2b správně doplnilo 21,74 % žáků třídy A. Při řešení úlohy 17,39 % žáků udělalo chybu nebo řetězec vymyslelo správně pouze s opsanou chybou z první části. 8,7 % žáků chyběla v řetězci některá z požadovaných operací a 52,17 % žáků úlohu doplnilo špatně.

Z celkového počtu 20 žáků, kteří se účastnili výzkumného šetření v třídě B, 35 % doplnilo úlohu správně. 15 % se dopustilo nějaké chyby, žádný žák nevyřešil úlohu správně akorát s chybějící operací a polovina žáků danou úlohu vyřešila nesprávně.

Trojice čísel

Výsledky úlohy Trojice čísel jsou posuzovány podle toho, jak si vedli žáci dvou tříd A, B jedné základní školy.



Graf č. 20: Výsledky jednotlivých části úlohy Trojice čísel podle paralelních tříd

Z grafu č. 20 vyplývá, že 21,74 % žáků třídy A úlohu 5.1.3a vyřešilo správně. 65,22 % žáků objevilo, že čísla všech trojic jsou násobky 7. Společné pravidlo, že součet čísel všech trojic je rovný 105, se neobjevilo v řešení žádného žáka. 4,35 % žáků uvedlo jiné pravidlo, kterému odpovídají všechny uvedené trojice. 8,69 % žáků neobjevilo žádné společné pravidlo pro trojice v zadání.

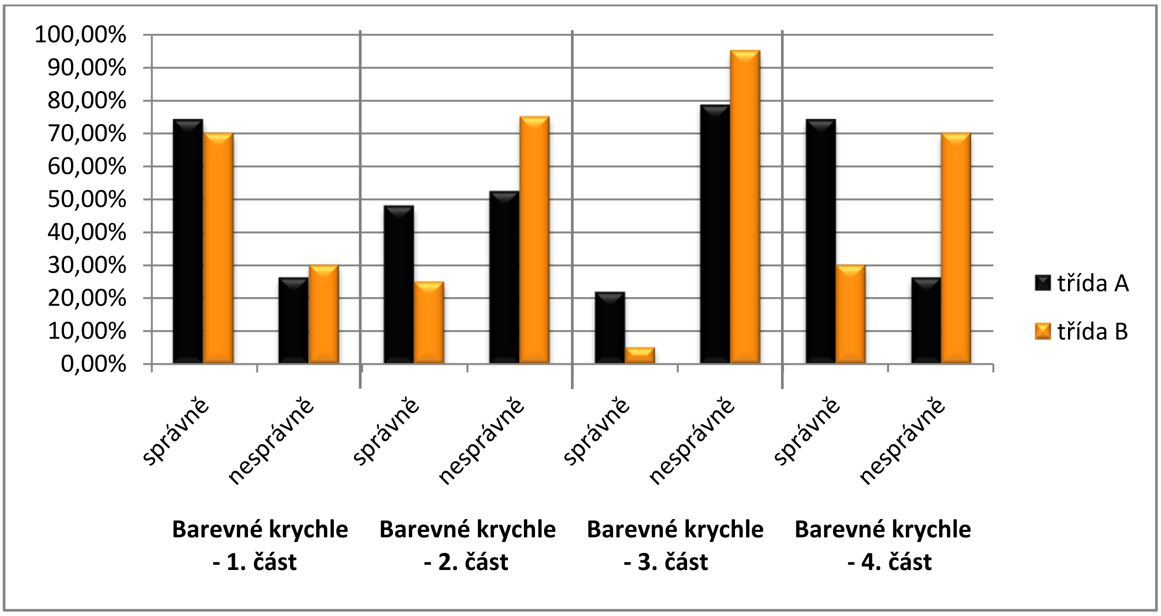
Z celkového počtu 20 žáků třídy B 40 % napsalo, že součtem čísel jednotlivých trojic je číslo 105 a zároveň jsou čísla všech trojic násobky 7, 40 % žáků objevilo pouze pravidlo násobků čísla 7. Žádný žák nenapsal, že trojice mají pouze společný výsledek 105 ani jiné pravidlo, které nebylo původně předpokládáno. 20 % žáků úlohu nevyřešilo správně.

Graf č. 20 ukazuje, že ve třídě A žádný ze žáků, kteří správně určili obě společná pravidla v 5.1.3a, nevymyslel žádnou další trojici čísel, která by splnila objevená pravidla. 8,69 % žáků dané třídy napsalo trojice čísel, které zahrnují čísla, která jsou násobky 7. Pro druhé pravidlo – součet 105 – nevymyslel žádný žák další správnou trojici. 39,14 % žáků uvedlo jiné trojice čísel, než jsou zmíněny v ostatních kategoriích. Více než polovina, konkrétně 52,17 % žáků nenapsalo správně žádné další trojice.

Výsledky analýzy řešení 5.1.3b ukazují, že 10 % žáků třídy B napsalo další správné trojice, jejichž čísla splňují pravidla nalezená v první části úlohy. 5 % žáků napsalo trojice čísel s násobky 7. Stejně jako ve třídě A ani ve třídě B nikdo nevymyslel trojice čísel, které mají společný součet 105. 25 % žáků uvedlo trojice, na základě jiných pravidel, než jsou zmíněna v ostatních kategoriích. Žádné další správné trojice nevymyslelo 60 % žáků třídy B.

<u>Barevné krychle</u>

Následující graf č. 21 ukazuje, jak byli při řešení úlohy Barevné krychle úspěšní žáci dvou paralelních tříd.



Graf č. 21: Výsledky jednotlivých části úlohy Barevné krychle podle paralelních tříd

Z grafu č. 21 vyplývá, že 5.1.5a lépe vyřešili žáci třída A. K správnému řešení se podařilo dojít 73,91 % žáků. 26,09 % žáků správný počet neurčilo.

Ve třídě B došlo ke správnému počtu obarvených stěn krychle 70 % žáků. 30 % žáků bylo v řešení úlohy neúspěšné.

Z celkového počtu žáků třídy A 5.1.5b správně vyřešilo 47,83 %. 52,17 % nenapsalo, že počet obarvených krychliček prostřední krychle, které mají obarvené tři stěny, je roven čtyřem nebo osmi.

Žáci třídy B byli v řešení této části úlohy méně úspěšní než žáci třídy A. Správné řešení se objevilo u 25 % žáků třídy B. 75 % nedokázalo určit správný počet krychliček se třemi obarvenými stěnami.

Stejně jako v předchozích dvou částech byli v řešení 5.1.5c úspěšnější žáci třídy A. 21,74 % žáků dokázalo určit správný počet krychliček velké krychle, které by mělo obarvené dvě stěny. Nesprávně vyřešilo úlohu 78,26 % žáků.

Pouze jeden žák z celkového počtu žáků třídy B, tedy 5 %, napsal, že by se velká krychle skládala z dvanácti krychliček, které mají obarvené dvě stěny. 95 % žáků bylo v řešení dané úlohy neúspěšné.

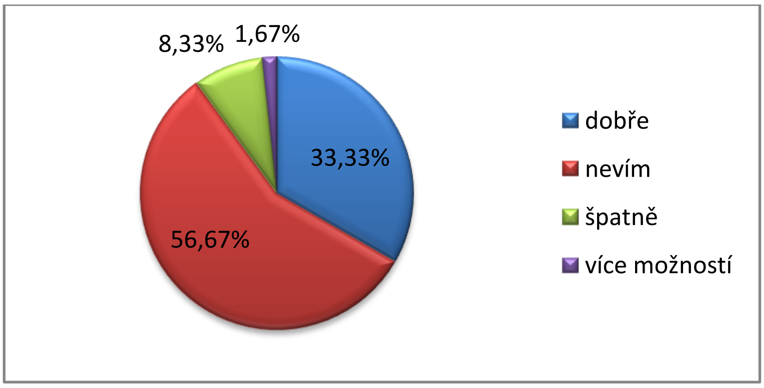
I v poslední části úlohy 5.1.5d se lépe vedlo žákům třídy A. Celkově vyřešilo úlohu správně 73,91 % žáků třídy A. 26,09 % žáků úlohu nevyřešilo správně.

Ve třídě B bylo úspěšných 30 % žáků. 70 % žáků úlohu nevyřešilo vůbec.

7.2 Hodnocení předložených úloh dle žáků

Na konci každé vyučovací hodiny po vyřešení jednotlivých úloh byl každému žákovi předložen dotazník. V dotazníku bylo 9 uzavřených položek, které se vztahovaly k úlohám, které žáci řešili.

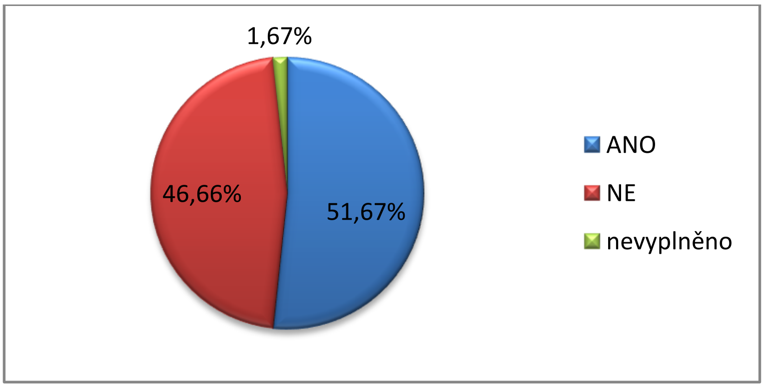
První položka zjišťovala, jak se žákům s úlohami pracovalo. Žáci mohli vybírat ze třech možností, které byly zobrazeny obličeji s různými výrazy.



Graf č. 22: Hodnocení práce s úlohami

Z grafu č. 22 vyplývá, že 33,33 % žáků se s úlohami celkově pracovalo dobře. Více než polovina žáků uvedla, že nedovedou přesně určit, jestli se jim s úlohami pracovalo dobře nebo špatně. Neutrální variantu zvolilo přesně 56,67 % žáků. 8,33 % žáků odpovědělo, že se jim s úlohami nepracovalo dobře. Dva žáci zakroužkovali dvě možnosti, protože se nemohli rozhodnout, jestli vybrat kladnou nebo neutrální.

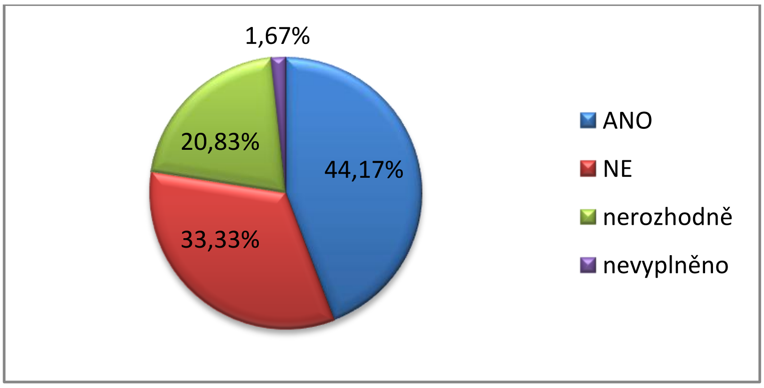
Druhá položka zjišťovala, jestli už někdy žáci takový typ úloh řešili. Na výběr byly dvě možnosti „ANO“ a „NE“.



Graf č. 23: Hodnocení četnosti řešení úloh

Graf č. 23 ukazuje, že obě možnosti byly vybírány téměř stejně. 51,67 % žáků odpovědělo, že tento typ úloh už někdy řešili. Jeden z žáků, který vybral tuto možnost, dopsal, že se mezi těmito dvěma možnostmi nemohl rozhodnout, ale pokud by musel jednu vybrat, spíš se přiklání k odpovědi „ANO“. 46,67 % žáků zaškrtlo, že takové úlohy ještě neřešili. Opět se mezi nimi našli dva žáci, kteří se nemohli rozhodnout, kterou variantu zvolit. Dva žáci, tedy 1,67 %, na otázku neodpověděli. Předpokládá se, že žáci nechali položku nevyplněnou, protože se stejně jako předchozí tři zmínění žáci nemohli rozhodnout, kterou možnost zvolit. Doplňující odpovědi žáků ukazují, že by bylo vhodnější použít výběr ze třech možností místo dvou stejně jako u předchozí položky. Očekává se, že by se výsledky výrazně lišily a spousta žáků by vybrala neutrální odpověď.

Třetí položkou bylo zjišťováno, jestli úlohy připadaly žákům obtížné. Žáci měli stejně jako u předchozí položky na výběr možnosti „ANO“ a „NE“.

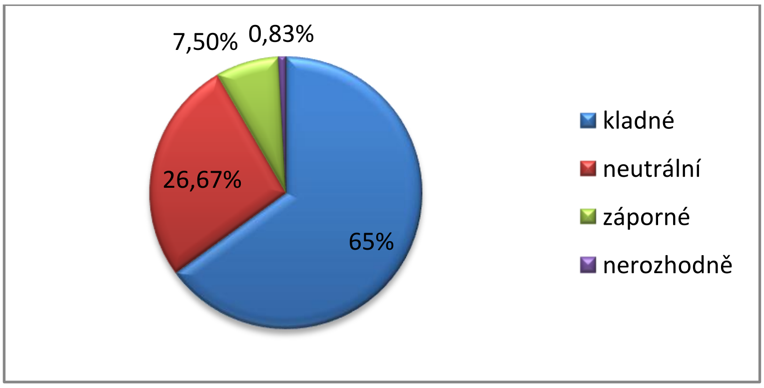


Graf č. 24: Hodnocení obtížnosti úloh

Z grafu č. 24 je patrné, že pro žáky byl výběr ze dvou možností nedostačující. 20,83 % žáků dopsalo, že je se nemohou rozhodnout pro jednu z nabízených možností. Z celkového počtu 25 žáků, kteří nedokázali vybrat pouze jednu variantu, se 7 z nich nepřiklonilo k žádné z nich, 8 žáků by se přiklonilo k možnosti „ANO“ a 10 žáků k možnosti „NE“. 44,17 % žáků odpovědělo, že jim úlohy připadaly obtížné a pro 33,33 % žáků obtížné nebyly. Jeden žák, který se rozhodl pro odpověď „NE“ připsal, že byla jedna úloha obtížná. Dva žáci třetí položku nezodpověděli vůbec.

Vzhledem k tomu, že žáci často dopisovali, že se nemohou rozhodnout pro jednu z nabízených možností, by bylo vhodnější nabídnout k výběru tři možnosti. Stejně jako u pěti dalších položek by mohly být využity obličeje s různým výrazem.

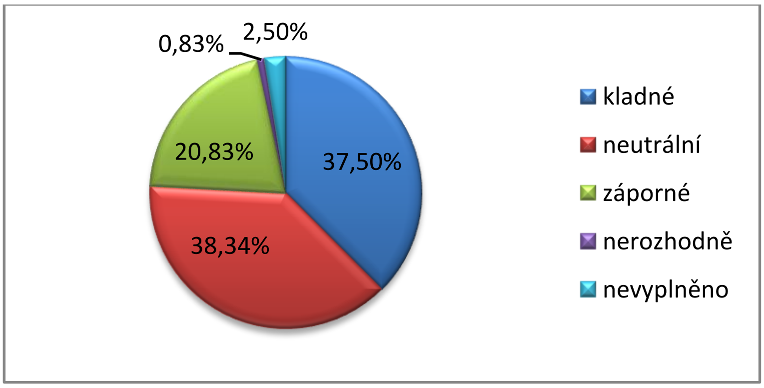
Následující tři položky se vztahují konkrétně k jednotlivým úlohám. **Čtvrtá položka** zjišťuje, jak byla žáky ohodnocena úloha Početní řetězec. Záměrně bylo zadání položky formulováno obecně, aby žáci hodnotili úlohu celkově, jak se jim líbila, jak se jim s ní pracovalo, jak se jim zdála obtížná, jestli jim přišla zajímavá, jestli je něčím zaujala atd. Ačkoliv byla úloha pro některého žáka obtížná, mohla ho zaujmout, protože rád řeší nestandardní úlohy.



Graf č. 25: Hodnocení úlohy Početní řetězec

Z grafu č. 25 vyplývá, že úloha Početní řetězec byla hodnocena většinou kladně. Nejlepší variantu zvolilo 65 % žáků. 26,67 % žáků ohodnotilo úlohu jako průměrnou. Záporného hodnocení se dočkala od 7,5 % žáků. Jeden žák, tedy 0,83 %, se nedokázal rozhodnout mezi kladnou a neutrální možností.

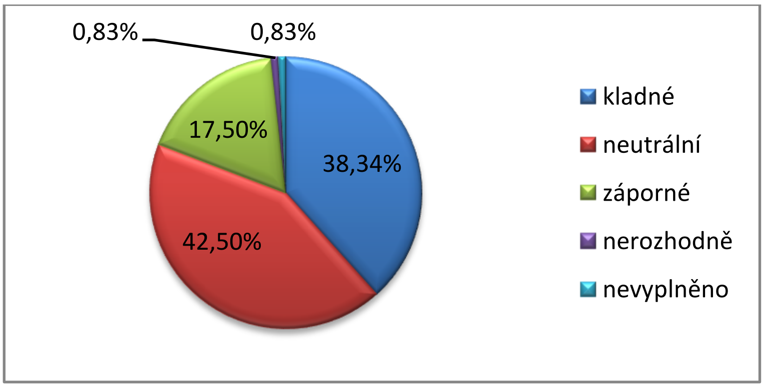
Pátá položka je zaměřena na hodnocení úlohy Trojice čísel. Stejně jako u předchozí položky žáci vyjadřují svůj celkový pohled na danou úlohu.



Graf č. 26: Hodnocení úlohy Trojice čísel

Graf č. 26 ukazuje, že téměř shodný počet žáků ohodnotil úlohu Trojice čísel kladně a průměrně. Nejlepší variantu vybralo 37,5 % žáků. Neutrální varianta byla zvolena od 38,33 % žáků. Pětina žáků, přesně 20,83 %, přiřadilo dané úloze záporné hodnocení. Jeden žák nedokázal určit, jestli více upřednostňuje kladné nebo neutrální hodnocení a tři žáci nevybrali žádnou z nabízených variant.

V **šesté položce** žáci hodnotili úlohu Barevné krychle. Žáci opět výběrem ze tří možností vyjádřili, jaký je jejich celkový názor na poslední z řešených úloh.

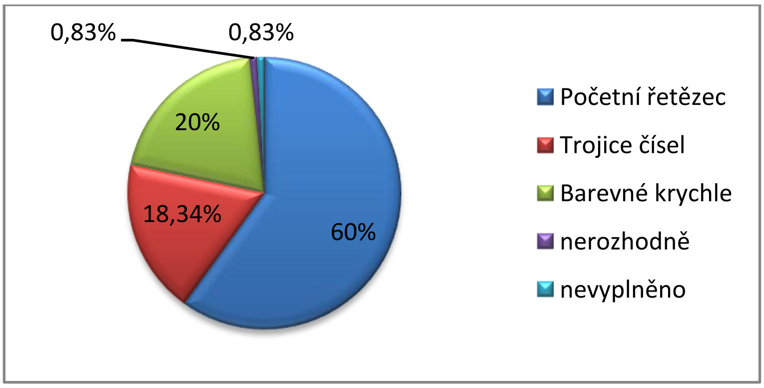


Graf č. 27: Hodnocení úlohy Barevné krychle

Z grafu č. 27 je možné vyčíst, že nejčastějším hodnocením úlohy Barevné krychle bylo hodnocení neutrální. Tuto možnost vybralo 42,5 % žáků. 38,33 % žáků hodnotilo úlohu kladně a 17,5 % žáků záporně. Jeden žák zakroužkoval zároveň kladnou a neutrální variantu a jeden žák nechal položku nezodpovězenou.

Z těchto třech úloh byla nejlépe ohodnocena úloha Početní řetězec. Nejhorší hodnocení vyplynulo pro úlohu Trojice čísel.

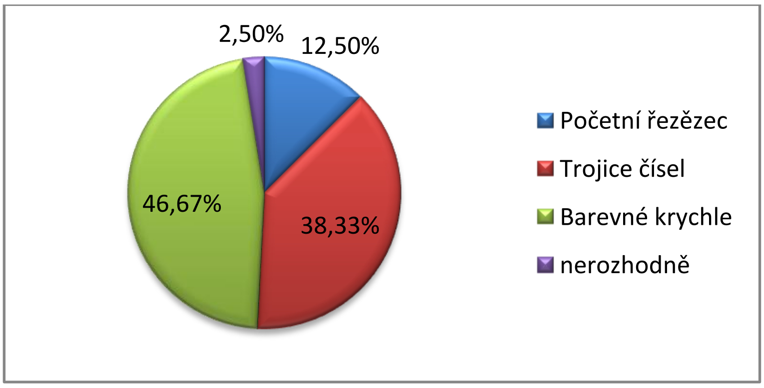
Sedmou položkou bylo zjišťováno, která ze tří úloh se zdála žákům nejjednodušší. V nabídce byly vypsány názvy jednotlivých úloh, žáci se měli rozhodnout pro jednu z nich a zakroužkovat ji.



Graf č. 28: Výběr nejjednodušší úlohy

Z grafu č. 28 je patrné, že jako nejjednodušší byla nejčastěji označena úloha Početní řetězec. Tuto úlohu vybralo jako nejjednodušší 60 % dotazovaných žáků. 20 % označilo jako nejjednodušší úlohu Barevné krychle a 18,33 % připadala nejjednodušší úloha Trojice čísel. Jeden žák se nedokázal rozhodnout, která z úloh Početní řetězec a Trojice čísel je jednodušší, proto zakroužkoval obě dvě. Jeden žák nechal položku bez odpovědi.

Osmou položkou se zjišťovalo, která úloha připadala žákům naopak nejobtížnější.

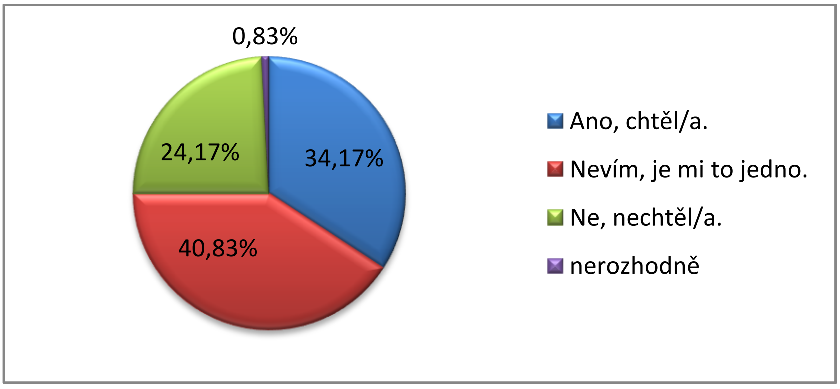


Graf č. 29: Výběr nejobtížnější úlohy

Z grafu č. 29 je zřejmé, že jako nejobtížnější úloha byla vybrána úloha Barevné krychle, kterou zakroužkovalo 46,67 % žáků. Úloha Trojice čísel byla určena jako nejobtížnější 38,33 % žáků. 12,5 % žáků zvolilo jako nejobtížnější úlohu Početní řetězec. Tři žáci, tedy 2,5 %, nedokázali určit, jestli je nejobtížnější úloha Trojice čísel nebo Barevné krychle.

Úloha Početní řetězec, která byla nejlépe ohodnocena, byla zároveň označena jako úloha nejjednodušší. Úloha Trojice čísel měla sice nejhorší hodnocení, ale za obtížnější úlohu byla považována úloha Barevné krychle.

Devátá položka zjišťovala, jestli by žáci chtěli pracovat s takovým typem úloh v hodinách matematiky.



Graf č. 30: Postoj k řešení úloh v hodinách matematiky

Z grafu č. 30 vyplývá, že 34,17 % žáků, bych chtělo s úlohami hierarchicky složenými pracovat v hodinách matematiky. 40,83 % žáků vybrali neutrální variantu, protože neví, je jim to jedno. Téměř čtvrtina žáků, přesně 24,17 %, uvedla, že by takové úlohy v hodinách matematiky řešit nechtěla. Jeden žák se nevyjádřil.

7.3 Shrnutí výzkumného šetření

Cílem výzkumného šetření bylo zjistit, jakým způsobem žáci 5. ročníku vybraných základních škol řeší badatelské úlohy v matematice, konkrétně úlohy hierarchicky složené. Dílčími cíli bylo zjistit, jaké jsou nejčastější chyby, kterých se žáci při řešení dopouští, jaký vliv má na výsledky řešení rozdílnost pohlaví, různý typ škol, které žáci navštěvují a jaký je rozdíl mezi žáky dvou různých tříd stejné základní školy. Doplňujícím cílem bylo zanalyzovat hodnocení daných úloh žáky.

K naplnění cílů výzkumného šetření byly stanoveny následující výzkumné předpoklady.

VP1: Pohlaví nemá vliv na výsledky řešení úloh hierarchicky složených. Dívky a chlapci budou při řešení úloh dosahovat podobných výsledků.

Výzkumného šetření se účastnilo 64 chlapců a 56 dívek. Při řešení úlohy Početní řetězec dosáhli chlapci a dívky podobných výsledků. Výraznější rozdíly byla u první kategorie 5.1.2a a třetí a čtvrté kategorie 5.1.2b (graf č. 13). V úloze Trojice čísel měli chlapci a dívky také podobné výsledky řešení. Pouze u čtvrté kategorie 5.1.3b byl rozdíl větší než 10 % (graf č. 14). Úloha Barevné krychle dopadla stejně jako obě předchozí úlohy. U této úlohy nebyly žádné výraznější rozdíly mezi chlapci a dívkami (graf č. 15). Pohlaví žáků tedy nemá vliv na výsledky řešení úloh hierarchicky složených.

VP2: Žáci, kteří navštěvují městskou školu, budou dosahovat při řešení úloh hierarchicky složených podobných výsledků jako žáci školy venkovské.

Z hlediska typu školy bylo účastníky výzkumného šetření 72 žáků školy městské a 48 žáků školy venkovské. Žáci školy městské a venkovské dosáhli při řešení úlohy Početní řetězec podobných výsledků. V první a druhé kategorii 5.1.2a a druhé kategorii 5.1.2b byl rozdíl jen těsně větší než 10 % (graf č. 16). Při řešení úlohy Trojice čísel dosáhli žáci také podobných výsledků. Výraznější rozdíly jsou pouze u první a páté kategorie 5.1.3a (graf č. 17). V úloze Barevné krychle měli žáci částečně podobné (5.1.5a, 5.1.5b) a částečně rozdílné (5.1.5c, 5.1.5d) výsledky (graf č. 18). Z toho vyplývá, že žáci městských škol dosáhli při řešení předložených úloh hierarchicky složených podobných výsledků jako žáci škol venkovských.

VP3: Výsledky řešení úloh hierarchicky složených žáků dvou paralelních tříd se budou lišit.

Ve třídě A se účastnilo výzkumného šetření 23 žáků a ve třídě B 20 žáků. Při řešení úlohy Početní řetězec dosáhli žáci paralelních tříd rozdílných výsledků. Podobnost byla pouze u druhé kategorie 5.1.2b (graf č. 19). V úloze Trojice čísel měli žáci částečně podobné a částečně rozdílně výsledky řešení (graf č. 20). Výsledky řešení úlohy Barevné krychle byly stejně jako v úloze Početní řetězec rozdílné. Podobnost výsledků řešení žáků paralelních tříd byla pouze v 5.1.5a (graf č. 21). Výsledky řešení úloh hierarchicky složených žáků dvou paralelních třít se tedy liší.

VP4: Žáci budou každou z řešených úloh hodnotit rozdílně.

Nejlépe ohodnocenou úlohou byla úloha Početní řetězec. Kladnou možnost vybralo 65 % žáků. Úlohy Trojice čísla a Barevné krychle byly ohodnoceny téměř stejně. Kladné hodnocení vybralo u první zmíněné úlohy 37,5 % žáků, u druhé úlohy 38,34 % žáků. Podobně tomu bylo i u neutrální varianty hodnocení. U úlohy Početní řetězec vybralo danou variantu 26,67 % žáků. Úlohu Trojice čísel ohodnotilo neutrálně 38,34 % žáků a úlohu Barevné krychle 42,5 % žáků. Nejhorší hodnocení vybralo u první úlohy 7,5 % žáků a u druhé a třetí podobně 20,83 % a 17,5 % žáků. Z toho vyplývá, že rozdílně byla hodnocena pouze úloha Početní řetězec, další dvě úlohy byly ohodnoceny podobně.

VP5: Úlohy hierarchicky složené budou mít u žáků pozitivní odezvu.

Poslední otázkou v dotazníku jsem se chtěla od žáků dozvědět, zda by chtěli úlohy tohoto typu řešit i v rámci hodin matematiky. Třetina dotazovaných žáků, konkrétně 34,17 %, vybralo pozitivní variantu hodnocení, to znamená, že by uvítali, kdyby jim jejich učitelé úlohy hierarchicky složené do vyučování matematiky zařazovali. 40,83 % žáků vybralo neutrální variantu, protože si nebyli úplně jisti, zda by chtěli nebo naopak nechtěli dané úlohy řešit. 24,17 % žáků odpovědělo, že by s úlohami hierarchicky složenými v hodinách matematiky pracovat nechtělo. Jeden žák se nedokázal rozhodnout mezi kladnou a neutrální variantou hodnocení. Podle mého názoru by bylo zajímavé zjistit, proč se žáci takto rozhodli. Nabízela by se zde doplňující otevřená otázky „Proč?“, aby žáci mohli uvést konkrétní důvod svého rozhodnutí. Pozitivní odezvu měly úlohy pouze u třetiny žáků. Zbylé dvě třetiny se přiklonily k variantě neutrální či negativní, pravděpodobně proto, že si s úlohami nevěděli rady.

Závěr

Diplomová práce byla zaměřena na badatelské úlohy ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ, konkrétně úlohy hierarchicky složené. Práce je rozdělena do dvou částí, teoretické a empirické.

První kapitola byla věnována vyučování matematice a přístupům k ní, transmisivnímu a konstruktivistickému. Dále byl charakterizován Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání a blíže přiblížena vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Druhá kapitola byla zaměřena na učební úlohy. Nejprve byly popsány učební úlohy obecně, poté byly uvedeny matematické učební úlohy a jejich příklady, které se vyskytují v učebnicích matematiky pro 1. stupeň základních škol. Cílem teoretické části bylo vymezit problematiku úloh hierarchicky složených, které byly uvedeny ve třetí kapitole spolu s dalšími badatelskými úlohami. Dále byl vymezen pojem badatelsky orientovaného vyučování a role učitele a žáka vhledem k BOVM.

Na základě prostudování odborné literatury bylo v empirické části vytvořeno pět úloh hierarchicky složených. Tyto úlohy byly předloženy učitelům, aby z nich vybrali tři, jež by podle nich byly pro žáky nejvhodnější. Nejčastěji vybrané úlohy poté byly zadány k vyřešení žákům na vybraných základních školách Olomouckého kraje. Vytvoření úloh hierarchicky složených a ověření jejich efektivity ve výuce bylo cílem empirické části.

V jednotlivých kapitolách empirické části byly nejprve charakterizovány cíle, předpoklady, metody výzkumného šetření a výzkumný vzorek. Následně byla věnována pozornost jednotlivým vzájemně se prolínajícím fázím, ve kterých výzkumné šetření probíhalo. V první kapitole empirické části byly popsány jednotlivé úlohy a předvýzkum zaměřený na výběr třech úloh z pěti předložených. Dále byla analyzována řešení jednotlivých úloh a nejčastější chyby, které je v řešení žáku objevovaly. Poté byly jednotlivé úlohy vyhodnoceny na základě rozdělení žáků podle pohlaví, podle typu školy, kterou navštěvují a podle paralelních tříd. Na závěr bylo uvedeno vyhodnocení úloh žáky podle dotazníku, který vyplňovali po vyřešení jednotlivých úloh.

Jak již bylo zmíněno, do této chvíle neexistuje žádná sbírka úloh hierarchicky složených. Tato diplomová práce by mohla být podnětem pro autory, aby takovou sbírku badatelských úloh vytvořili.

Seznam použité literatury

ARTIGUE, Michele, BAPTIST, Peter. *Inquiry in Mathematics Educatio*n [online]. 2012. [cit. 2019-03-16] Dostupné z: http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html

BAPTIST, Peter, RAAB, Dagmar. *Implementing inquiry in mathematics education* [online]. 2012. [cit. 2019-03-18] Dostupné z: http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html

DOFKOVÁ, Radka. Přesvědčení o připravenosti budoucích učitelů matematiky jako didaktická výzva primárního vzdělávání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2016. ISBN 978-80-244-5047-6.

DOSTÁL, Jiří. Badatelsky orientovaná výuka jako trend soudobého vzdělávání. *e-Pedagogium*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. 3, s. 81-93. ISSN 1213-7758.

DOSTÁL, Jiří. *Badatelsky orientovaná výuka: kompetence učitelů k její realizaci v technických a přírodovědných předmětech na základních školách*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015a. ISBN 978-80-244-4515-1.

DOSTÁL, Jiří. *Badatelsky orientovaná výuka: pojetí, podstata, význam a přínosy*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015b. ISBN 978-80-244-4393-5.

FUCHS, Eduard, HOŠPESOVÁ, Alena, LIŠKOVÁ, Hana. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu Základní vzdělávání*. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-326-7.

FUCHS, Eduard. Přehled vývoje matematiky. In: *Historie matematiky I.* Brno:Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. s. 4 – 19.

HEJNÝ, Milan, KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 3. vyd. Praha: Portál, 2015. ISBN 978-80-262-0901-0.

HELUS, Zdeněk, a kol. *Psychologie školní úspěšnosti žáků*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979.

HOŠPESOVÁ, Alena a kol. *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2011. ISBN 978-80-7394-259-5.

KALHOUS, Zdeněk, OBST, Otto. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

KOLÁŘ, Zdeněk, ŠIKULOVÁ, Renata. *Vyučování jako dialog*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1541-4.

KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3.

MAŇÁK, Josef, ŠVEC, Vlastimil. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

MAREŠ, Jiří. *Pedagogická psychologie*. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0174-8.

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana. *Matematika 3. ročník*. 2. díl. Olomouc: Prodos, 2018a. ISBN 978-80-85806-90-8.

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana. *Matematika pro 4. ročník*. 2. díl. Olomouc: Prodos, 2018b. ISBN 978-80-85806-53-3.

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana. *Matematika pro 4. ročník*. 3. díl. Olomouc: Prodos, 2018c. ISBN 978-80-85806-54-0.

MOLNÁR, Josef, SCHUBERTOVÁ, Slavomíra, VANĚK, Vladimír. *Konstruktivismus ve vyučování matematice.* Olomouc: Univerzita Palackého, 2007. ISBN 978-80-244-1883-4.

NIKL, Jiří. *Metody projektování učebních úloh*. Hradec Králové: Gaudeamus, 1997. ISBN 80-7041-230-5.

NOVÁK, Bohumil, STOPENOVÁ, Anna. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Olomouc: Univerzita Palackého, 1993. ISBN 80-7067-294-3.

PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška, MAREŠ, Jiří. *Pedagogický slovník*. 6. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2017 [cit. 2019-03-3]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/41216/

SAMKOVÁ, Libuše, a kol. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*. Praha: Univerzita Karlova, 2015. 6(1). s. 91-122. ISSN 1804-7106.

SAMKOVÁ, Libuše. Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů. In: UHLÍŘOVÁ, Martina. *EME2016 Proceedings*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2016. s. 9-14. ISBN 978-80-905281-3-0.

STEHLÍKOVÁ, Naďa. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In: HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila, STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, 2004. s. 11-21. ISBN 80-7290-189-3.

VOTÁPKOVÁ, Dana, a kol. *Průvodce pro učitele badatelsky orientovaným vyučováním*. Praha: Tereza, 2013. ISBN 978-80-87905-02-9.

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972.

ZORMANOVÁ, Lucie. *Výukové metody v pedagogice.* Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4100-0.

Seznam zkratek

RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP PV	Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
RVP ZŠS	Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání základní škola speciální
RVP G	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia
RVP GSP	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia se sportovní přípravou
RVP SOV	Rámcové vzdělávací programy pro střední odborné vzdělávání
RVP ZUV	Rámcový vzdělávací program pro základní umělecké vzdělávání
RVP JŠ	Rámcový vzdělávací program pro jazykové školy s právem státní jazykové zkoušky
ŠVP	Školní vzdělávací program
BOV	Badatelsky orientované vyučování
BOVM	Badatelsky orientované vyučování matematiky

Seznam grafů

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam příloh

Příloha č. 1: Ukázky řešení úloh

Příloha č. 2: Ukázky vyplněných dotazníků

Příloha č. 1: Ukázky řešení úloh

D

Úlohy hierarchicky složené

1. Početní řetězec

a) Doplň řetězec. Každou operaci – sčítání, odčítání, násobení a dělení – použij alespoň jednou.

80 | :10 | 8 | ·3 | 24 | :4 | 6 | +42 | 48 | −24 | 24 | −15 | 9

b) Použij doplněné operace a pokus se vymyslet vlastní řetězec.

40 | :10 | 4 | ·3 | 12 | :4 | 3 | +42 | 45 | −24 | 21 | −15 | 6

2. Trojice čísel

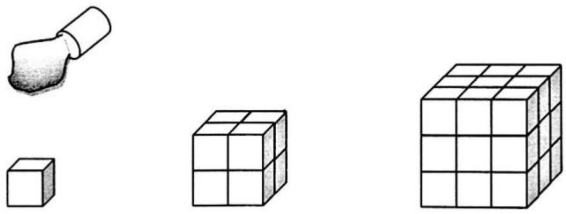
a) Podívej se na trojice čísel a pokus se zjistit, co mají společného.

28, 14, 63 **7, 28, 70** **35, 49, 21** **56, 7, 42**

když se trojice sečtou výsledek je 105 jsou to všechno nasobky 7

b) Vymysli další trojice, které splňují stejná pravidla.

3. Barevné krychle



a) Kdyby se vylila plechovka s barvou, kolik stěn malé krychle by se obarvilo? 5

b) Kolik krychliček, ze kterých je složena prostřední krychle, by mělo obarvené 3 stěny? 4

c) Kolik krychliček, ze kterých je složena velká krychle, by mělo obarvené 2 stěny? 12

d) Skládá se velká krychle z nějakých krychliček, které mají obarvenou pouze jednu stěnu nebo nemají obarvenou žádnou stěnu? 1

D

Úlohy hierarchicky složené

1. Početní řetězec

a) Doplň řetězec. Každou operaci – sčítání, odčítání, násobení a dělení – použij alespoň jednou.

80 $\boxed{:10}$ **8** $\boxed{\cdot 3}$ **24** $\boxed{-18}$ **6** $\boxed{+42}$ **48** $\boxed{:2}$ **24** $\boxed{-15}$ **9** ✓

b) Použij doplněné operace a pokus se vymyslet vlastní řetězec.

100 $\boxed{:10}$ 10 $\boxed{\cdot 3}$ 30 $\boxed{-18}$ 12 $\boxed{+42}$ 54 $\boxed{:2}$ 27 $\boxed{-15}$ 12 ✓

2. Trojice čísel

a) Podívej se na trojice čísel a pokus se zjistit, co mají společného.

28, 14, 63 **7, 28, 70** **35, 49, 21** **56, 7, 42** násobky 7

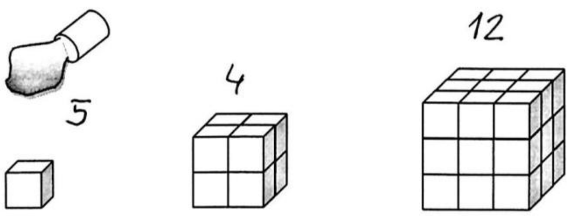
všechny trojice = 105 ✓

b) Vymysli další trojice, které splňují stejná pravidla.

~~7,28,14~~ 21

77, 21, 7 70, 21, 14 56, 28, 21 ✓

3. Barevné krychle



a) Kdyby se vylila plechovka s barvou, kolik stěn malé krychle by se obarvilo? 5 ✓

b) Kolik krychliček, ze kterých je složena prostřední krychle, by mělo obarvené 3 stěny? 4 ✓

c) Kolik krychliček, ze kterých je složena velká krychle, by mělo obarvené 2 stěny? 12 ✓

d) Skládá se velká krychle z nějakých krychliček, které mají obarvenou pouze jednu stěnu nebo nemají obarvenou žádnou stěnu?

Úlohy hierarchicky složené (bonus)

$3 \cdot 17 = 51$

$11 \cdot 9 = 99$

$5 \cdot 15 = 75$

Rozklad čísla 20

a) Rozlož číslo 20 na součet dvou lichých čísel a poté tato dvě čísla vynásob. 5, 15, 11, 9, 3, 17,
b) Seřaď výsledné součiny od nejmenšího po největší a zjisti, jaký je vždy mezi dvěma sousedními rozdíl.
c) Můžeš mezi těmito rozdíly vysledovat nějaký vztah? 51, 75, 99, ano vždycky když přičtu 14 bude to o 10 míň než 2 číslo
d) Ověř, zda tento vztah platí pro všechna sudá čísla do 20?

Úlohy hierarchicky složené (bonus)

Stavby z krychlí

c) Stavebnice obsahuje 10 krychlí, z nichž je potřeba vytvořit stavbu se čtvercovým půdorysem. Do následujících půdorysů doplň počty krychlí tak, aby v každém sloupci byla vždy alespoň jedna krychle.

2	2
3	3

3	1
4	2

4	4
1	1

2	2
4	2

1	2
6	1

1	1
7	1

d) Rozhodni, zda platí daná tvrzení. Svá rozhodnutí zdůvodni.

- V jedné stavbě budou mít všechny sloupce stejný počet krychlí. ne
- Jeden sloupec může mít nejvíce 7 krychlí. ano

Příloha č. 2: Ukázky vyplněných dotazníků

Dotazník – Úlohy hierarchicky složené

1. Jak se ti pracovalo se zadanými úlohami?

2. Už jsi někdy takové úlohy řešil/a?

   ANO **NE**

3. Připadaly ti úlohy obtížné?

   ANO **NE**

4. Ohodnoť úlohu Početní řetězec.

5. Ohodnoť úlohu Trojice čísel.

6. Ohodnoť úlohu Barevné krychle.

7. Zakroužkuj úlohu, která byla nejjednodušší.

   Početní řetězec **Trojice čísel** **Barevné krychle**

8. Zakroužkuj úlohu, která byla nejobtížnější.

   Početní řetězec **Trojice čísel** **Barevné krychle**

9. Chtěl/a bys takové úlohy řešit v hodinách matematiky?

Dotazník – Úlohy hierarchicky složené

1. Jak se ti pracovalo se zadanými úlohami?

2. Už jsi někdy takové úlohy řešil/a?

   ANO NE

3. Připadaly ti úlohy obtížné?

   ANO NE

4. Ohodnoť úlohu Početní řetězec.

5. Ohodnoť úlohu Trojice čísel.

6. Ohodnoť úlohu Barevné krychle.

7. Zakroužkuj úlohu, která byla nejjednodušší.

   Početní řetězec **Trojice čísel** **Barevné krychle**

8. Zakroužkuj úlohu, která byla nejobtížnější.

   Početní řetězec **Trojice čísel** **Barevné krychle**

9. Chtěl/a bys takové úlohy řešit v hodinách matematiky?

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Jana Skácelová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	PhDr. Radka Dofková, Ph. D.
Rok obhajoby:	2019

Název práce:	Úlohy hierarchicky složené ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ
Název v angličtině	Hierarchically composed tasks in teaching mathematics at lower primary school
Anotace práce:	Diplomová práce je zaměřena na úlohy hierarchicky složené jako jeden typ úloh badatelských. Teoretická část se zabývá vyučováním matematiky na základní škole, učebními úlohami a badatelsky orientovanou výukou. V rámci empirické části byly vytvořeny úlohy hierarchicky složené, které byly následně předloženy k vyřešení žákům 5. ročníku vybraných základních škol. Empirická část se dále věnuje analýze řešení daných úloh a dotazníku, prostřednictvím kterého žáci úlohy hodnotili.
Klíčová slova:	vyučování matematiky, učební úlohy, matematické úlohy, badatelsky orientované vyučování matematiky, badatelské úlohy, úlohy hierarchicky složené
Anotace v angličtině:	This diploma thesis is focused on hierarchically composed tasks as one type of inquiry-stimulating tasks. The theoretical part deals with teaching mathematics at lower primary school, tasks and inquiry-based mathematics teaching. Within empirical part there were created hierarchically composed tasks, which were assigned to pupils of the 5th year to solve them. The practical part is also concerned with an analysis of solution of tasks and a questionnaire through which pupils evaluated tasks.
Klíčová slova v angličtině:	teaching mathematics, tasks, mathematical tasks, inquiry based mathematics teaching, inquiry-stimulating tasks, hierarchically composed tasks
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1: Ukázky řešení úloh Příloha č. 2: Ukázky vyplněných dotazníků
Rozsah práce:	94 stran
Jazyk práce:	český