UNIVERZITA PALECKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Jana Hajtmarová

Zobrazení a elementární funkce v matematice

Olomouc 2015 Vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová, PhD.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem jen uvedené prameny a literaturu.

V Olomouci dne   Jana Hajtmarová

Poděkování

Děkuji Mgr. Jitce Hodaňové, PhD., za odborné vedení bakalářské práce, poskytování rad a materiálových podkladů k práci.

Dále bych chtěla poděkovat tatínkovi, za pomoc, trpělivost a čas strávený při školeních, jak se zachází a programem ConTeXt.

Obsah

Úvod

Bakalářskou práci na dané téma jsem si zvolila především proto, že patřilo k mým oblíbeným tématům již na střední škole. Je přitom všeobecně známou skutečností, že nás matematické funkce provází již od základní školy.

Bezesporu lze říci, že pojem funkce patří k nejdůležitějším v matematice. Než lidé poznali pojmy, jako jsou zobrazení a funkce v dnešní podobě, předcházela tomu staletí vývoje lidského kauzálního myšlení. Už naši dávní předkové vnímali souvislosti příčin a jejich důsledků. Taktéž si uvědomovali nejen závislosti jevů, kterými byli obklopeni, ale i těch do kterých nějak sami zasahovali. Lidé vždy přemýšleli nad příčinami různých událostí.

Ve starověkém Řecku Pythagorejci zkoumali zákony akustiky a snažili se najít vzájemné vztahy mezi různými fyzikálními veličinami. Podařilo se jim například nalézt vztah mezi délkou a tloušťkou struny a výškou zvuku, který tato struna při rozechvění vydávala. Už zde můžeme najít jasné základy funkčního myšlení. Myšlenka o funkční závislosti však v té době nebyla nikde explicitně vyslovena, stejně jako nebyla vnímána a popsána ani proměnná a závislá veličina.

Až ve středověku se mezi učenci začíná vytvářet představa o přírodních zákonech jako zákonech funkčního typu. Objevují se různé teorie o změnách veličin jako funkce času. V roce 1328 se Bradwardinus pokusil vyjádřit závislost mezi silou a rychlostí způsobujících pohyb a odporem. Oresme zavádí pojem velocitatio, čímž je míněno zrychlení jako intenzita rychlosti nebo pohybu. Zrychlení může být podle něj rovnoměrné, tedy konstantní, ale i nerovnoměrné. Funkční závislosti se Oresme snažil vyjádřit slovně nebo graficky.

Zásadním přelomem pro matematiku bylo 17. století. Dosavadní koncepce přírodních zákonitostí přerostly v pojem funkční závislosti. Velký rozvoj nastal propojením algebry a geometrie v analytickou geometrii. To proslavilo především René Descarta. Propojení algebry a geometrie umožnilo poprvé popsat závislost mezi dvěma proměnnými x a y pomocí algebraických rovnic. Jednotlivá analytická řešení rovnic následně umožnila bod po bodu sestrojit grafy závislostí mezi proměnnými. Centrální myšlenkou analytické geometrie se tak stala ekvivalence mezi algebraickou rovnicí $f(x,y)=0$ a geometrickou křivkou, sestávající se ze všech bodů, jejichž souřadnice (x,y) vztaženy ke dvěma daným osám vyhovují dané algebraické rovnici. Cesta k modernímu chápání pojmů zobrazení a funkce byla položena.

Cílem této práce je vypracovat ucelený přehled elementárních funkcí, jejich vlastností a grafů. Tento přehled funkcí je jakýmsi shrnutím učiva, které se probírá na střední škole. Text práce je doplněn o podrobně řešené příklady, které mohou sloužit jako návod k řešení podobných typů příkladů. V praktické části jsem se rozhodla toto téma rozšířit o několik příkladů, které představují využití funkcí při řešení praktických slovních úloh a o vyšetřování průběhu funkcí, které spíše spadají do vysokoškolské matematiky.

1 Základní pojmy

V úvodní části budou objasněny základní pojmy, které jsou důležité pro následnou orientaci v teorii funkcí a jejich grafů.

1.1 Kartézský součin

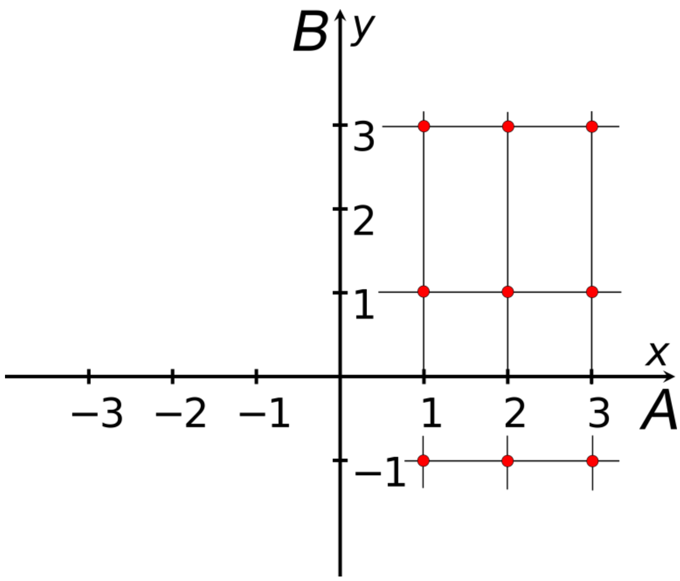
Definice 1.1.1 Kartézským součinem dvou množin A a B rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$ jsou libovolné prvky těchto množin. Kartézský součin značíme $A \times B$.

Tedy: $A \times B = \{[x, y]: x \in A \ \wedge \ y \in B\}$

Příklad 1.1.1 Mějme dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{-1, 1, 3\}$. Určete kartézské součiny $A \times B$ a $B \times A$ a graficky je znázorněte.

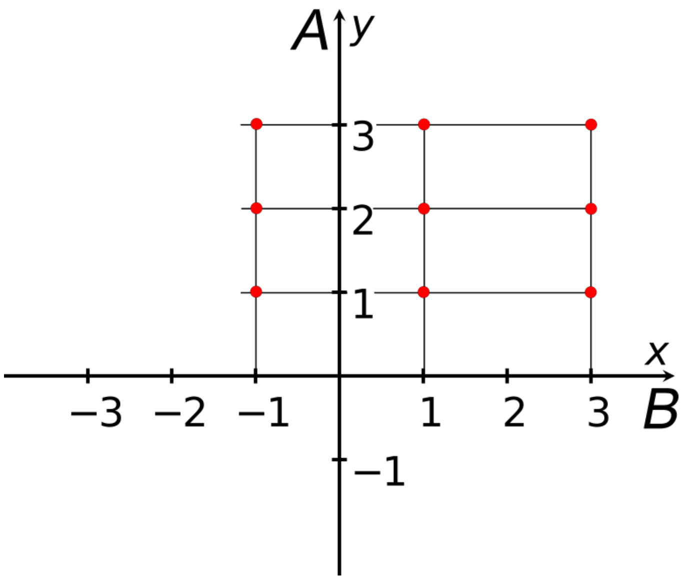
řešení:

$A \times B = \{ [1; -1]; \ [1; 1]; \ [1; 3]; \ [2; -1]; [2; 1]; [2; 3]; [3; -1]; [3; 1]; [3; 3] \}$



Obr. 1.1.1: Kartézský součin A×B

$B \times A = \{ [-1; 1]; \ [-1; 2]; \ [-1; 3]; \ [1; 1]; [1; 2]; [1; 3]; [3; 1]; [3; 2]; [3; 3] \}$

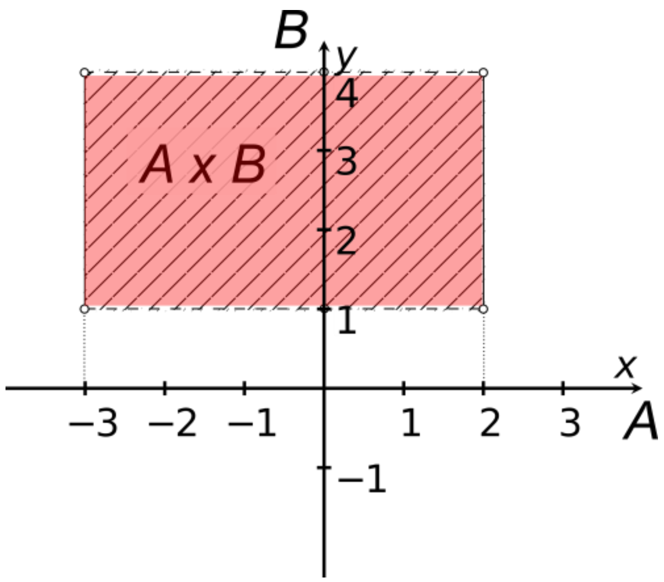


Obr. 1.1.2: Kartézský součin B×A

$A \times B \neq B \times A$

Příklad 1.1.2 Mějme dány množiny $A = \langle -3; 2 \rangle$ a $B = (1; 4)$. Graficky znázorněte kartézský součin $A \times B$.

řešení:

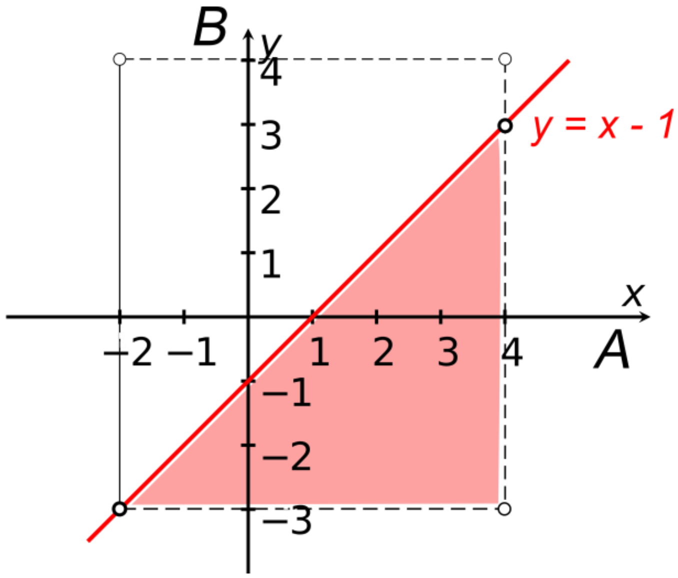


Obr. 1.1.3: Kartézský součin intervalů A×B

1.2 Binární relace

<u>Definice 1.2.1</u> Binární relací rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. V případě, že $A = B$, používá se označení binární relace na množině A. Obvykle se k označení relací používají malá písmena, např. $f \subseteq A \times B$.

<u>Příklad 1.2.1</u> Znázorněte graficky binární relaci $\varphi = \{[x; y] \in A \times B \;\wedge\; y \leq x - 1\}$, $A = \langle -2; 4 \rangle$, $B = (-3; 4)$.



Obr. 1.2.1: Graf binární relace $\boldsymbol{\varphi}$

Vlastnosti binární relace

Je dána binární relace R na množině M. Říkáme, že relace R je:

- reflexivní, pokud $\forall a \in$ M platí aRa.
- symetrická, pokud $\forall a, b \in$ M platí, že je-li aRb, pak i bRa.
- antisymetrická, pokud $\forall a, b \in$ M platí, že pokud je aRb a zároveň je i bRa, pak $a = b$.
- tranzitivní pokud $\forall a, b, c \in$ M platí, že pokud aRb a zároveň bRc, pak i aRc.

Ekvivalence je relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

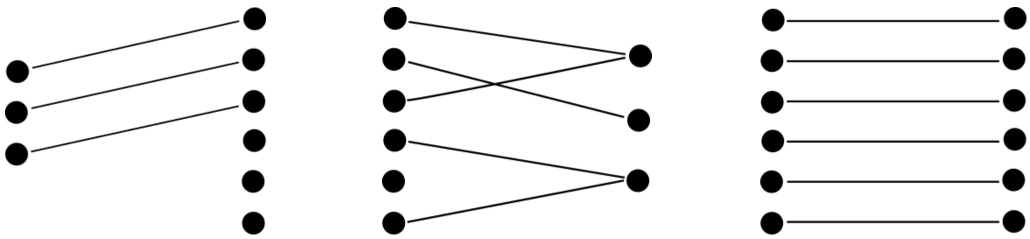
Uspořádání je relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

1.3 Zobrazení

Definice 1.3.1 Relaci $f \subseteq A \times B$ nazveme zobrazením množiny A do množiny B, jestliže platí, že pro každý prvek $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in B$ tak, že $[x, y] \in f$. Skutečnost, že f je zobrazením A do B, zapisujeme jako $f: A \to B$.

Typy zobrazení

1. Injekce (prosté zobrazení) je takové zobrazení, pro které platí:
$$\forall\, x_1, x_2 \in A:\ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$
2. Surjekce (zobrazení A na B) je takové zobrazení, pro které platí, že H(*f*) = B, tj.
$$\forall\, y \in B\ \ \exists x \in A: y = f(x).$$
3. Bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení) je zobrazení, které je zároveň injektivní i surjektivní.



Obr. 1.3.1: Typy zobrazení

1.4 Reálná funkce jedné reálné proměnné

Definice 1.4.1 Každé zobrazení f z **R** do **R** (tj. zobrazení v **R**) nazýváme reálná funkce jedné reálné proměnné. Je-li $[x, y] \in f$, píšeme $y = f(x)$; x se nazývá nezávisle proměnná, y závisle proměnná. Říkáme, že y je funkcí x.

Definiční obor

Nechť A a B jsou množiny a f je zobrazení $f: A \to B$.

Množinu D$(f) \subseteq A$, definovanou D(f) = $\{x \in \mathbf{R}; \exists [x, y] \in f\}$ nazýváme definiční obor funkce f.

Poznámka Je-li funkce f zadána rovnicí a její definiční obor není explicitně stanoven, je třeba určit D(f) jako množinu všech $x \in \mathbf{R}$, pro něž je daná rovnice definována.

Pravidla pro stanovení definičního oboru funkce

a) jmenovatel zlomku musí být nenulový

b) výraz pod odmocninou sudého stupně musí být nezáporný

c) argument logaritmu musí být kladný

d) argument funkce tg *x* musí být různý od lichých násobků $\frac{\pi}{2}$ (tj. $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$)

e) argument funkce cotg *x* musí být různý od celých násobků čísla π (tj. $x \neq k\pi$)

f) argument funkcí arcsin a arccos musí patřit do intervalu $\langle -1; 1\rangle$

<u>Příklad 1.4.1</u> Určete definiční obory zadaných funkcí:

a) $f(x) = \log(x-3)$

řešení: $x - 3 > 0$

$x > 3$

výsledek: $\mathrm{D}(f) = (3;\ \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{4x-6}}$

řešení: $\frac{x+2}{4x-6} \geq 0 \quad \wedge \quad 4x - 6 \neq 0$

$x \neq \frac{3}{2}$

	+	–	+
$x+2$	–	+	+
$4x-6$	–	–	+
	-2	$\frac{3}{2}$	

výsledek: $\mathrm{D}(f) = (-\infty; -2\rangle \ \cup\ \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

c) $f(x) = \frac{\log(4-x^2)}{1-x}$

řešení: $4 - x^2 > 0 \quad \wedge \quad 1 - x \neq 0$

$\mathrm{D}_1 = (-2; 2)$ $\qquad x \neq 1$

$\mathrm{D}_2 = \mathbf{R} - \{1\}$

výsledek: $\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2 = (-2; 1) \ \cup\ (1; 2)$

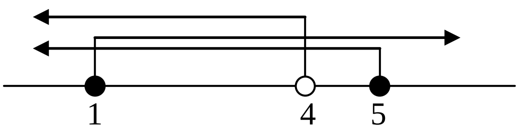
d) $f(x) = \arcsin \frac{x-3}{2} - \ln(4 - x)$

řešení: $-1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1 \quad \wedge \quad 4 - x > 0$

$-1 \leq \frac{x-3}{2} \quad \wedge \quad \frac{(x-3)}{2} \leq 1 \quad \wedge \quad 4 > x$

$-2 \leq x - 3 \qquad x - 3 \leq 2$

$1 \leq x \qquad x \leq 5$

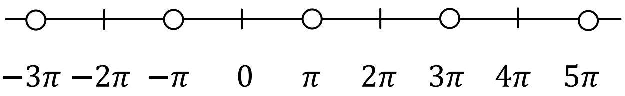


výsledek: $\mathrm{D}(f) = \langle 1; 4)$

e) $f(x) = \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$

řešení: $\frac{x}{2} \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathrm{Z}$

$x \neq (2k + 1) \cdot \pi$



výsledek: $\mathrm{D}(f) : x \in \bigcup_{k \in Z} \{(2k - 1)\pi; (2k + 1)\pi\}$

Obor hodnot

Nechť A a B jsou množiny a f je zobrazení $f\colon A \to B$.

Množinu $\mathrm{H}(f) \subseteq B$ definovanou $\mathrm{H}(f) = \{y \in \boldsymbol{R}; \exists [x, y] \in f\}$ nazýváme oborem hodnot funkce f.

<u>Příklad 1.4.2</u> Vypočítejte hodnotu funkce $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ v bodech $-1, 3, \sqrt{2}$.

řešení: $f(-1) = -\frac{3}{2}$

$f(3) = \frac{7}{2}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 2 + 5\sqrt{2} + 4 = 6 + 5\sqrt{2}$

Graf funkce

<u>Definice 1.4.2</u> Grafem reálné funkce reálné proměnné $f\colon \mathrm{D}(f) \to \mathbf{R}$ je množina bodů $G = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathrm{D}(f) \wedge y = f(x)\}$, kde $[x, y]$ značí bod roviny s pravoúhlými souřadnicemi x a y.

Rovnost funkcí

Dvě funkce se sobě rovnají (píšeme $f = g$), právě tehdy, když mají stejný definiční obor a v každém bodě tohoto definičního oboru platí, že $f(x) = g(x)$.

Symbolicky zapisujeme:

$$(f = g) \quad \Leftrightarrow \quad [(\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(g)) \quad \wedge \quad (\forall x \in \mathrm{D}(f): f(x) = g(x))]$$

<u>Příklad 1.4.3</u> Rozhodněte, zda dané funkce f, g jsou si rovny:

a) $f(x) = x$

$g(x) = x^{2} \cdot x^{-1}$

řešení: $\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$

$\mathrm{D}(g) = \mathrm{R} - \{0\}$

Funkce f, g si nejsou rovny, protože $\mathrm{D}(f) \neq \mathrm{D}(g)$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$

řešení: $\mathrm{D}(f)$: $x^{2} + x \neq 0$

$x(x+1) \neq 0$

$\mathrm{D}(f) = \mathbf{R} - \{-1; 0\}$

$\mathrm{D}(g)$: $x \neq 0 \quad \wedge \quad 1 + x \neq 0$

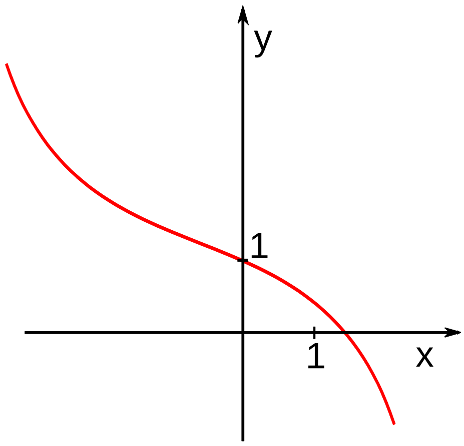
$\mathrm{D}(g) = \mathbf{R} - \{-1; 0\}$

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{x^2+x} = \frac{1}{x^2+x} = f(x)$$

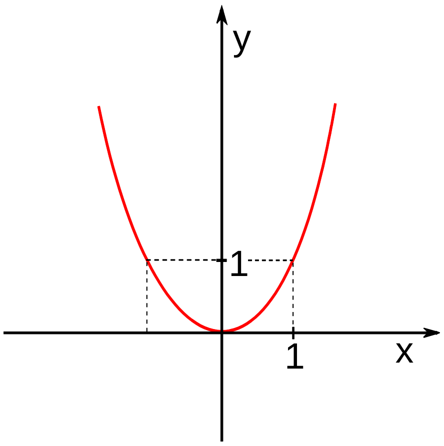
Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou si rovny, neboť mají stejné funkční předpisy i definiční obory.

Prosté zobrazení

<u>Definice 1.4.3</u> Zobrazení $f: A \to B$ nazýváme prosté (injektivní) zobrazení, jestliže pro každou dvojici různých argumentů $x, y \in A$; $x \neq y$ platí, že $f(x) \neq f(y)$.



Obr. 1.4.1: Prosté zobrazení



Obr. 1.4.2: Není prosté zobrazení

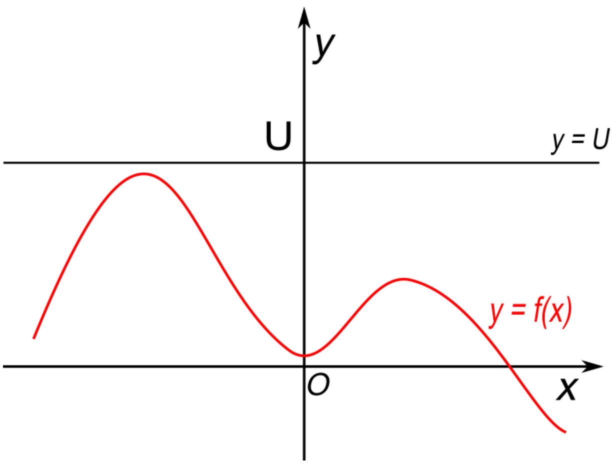
Definice 1.4.4 Je-li $f: A \rightarrow B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot H(f) lze přiřadit právě jedno y z množiny A tak, že $x = f(y)$. Takové zobrazení nazýváme inverzní zobrazení k zobrazení f a značíme jej f^{-1}.

Inverzní zobrazení má vlastnost: $D(f^{-1}) = H(f) \quad \wedge \quad H(f^{-1}) = D(f)$

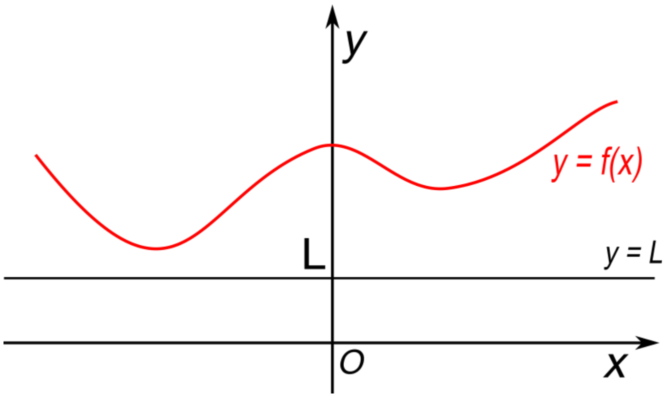
2 Vlastnosti funkcí

2.1 Omezená funkce

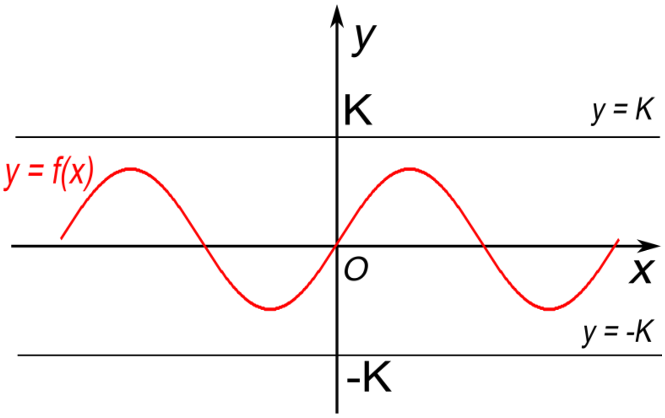
Definice 2.1.1 Funkce f se nazývá omezená shora, jestliže pro každé $x \in D(f)$ existuje $U \in \mathbf{R}$ takové, že $f(x) \leq U$. Funkce se nazývá omezená zdola, jestliže existuje $L \in \mathbf{R}$ takové, že $f(x) \geq L$, pro každé $x \in D(f)$. Funkce se nazývá omezená, jestliže je současně omezená shora i zdola, tj. pro každé $x \in D(f)$ existuje $K \in \mathbf{R}^+$ takové, že $|f(x)| \leq K$.



Obr. 2.1.1: Funkce omezená shora



Obr. 2.1.2: Funkce omezená zdola



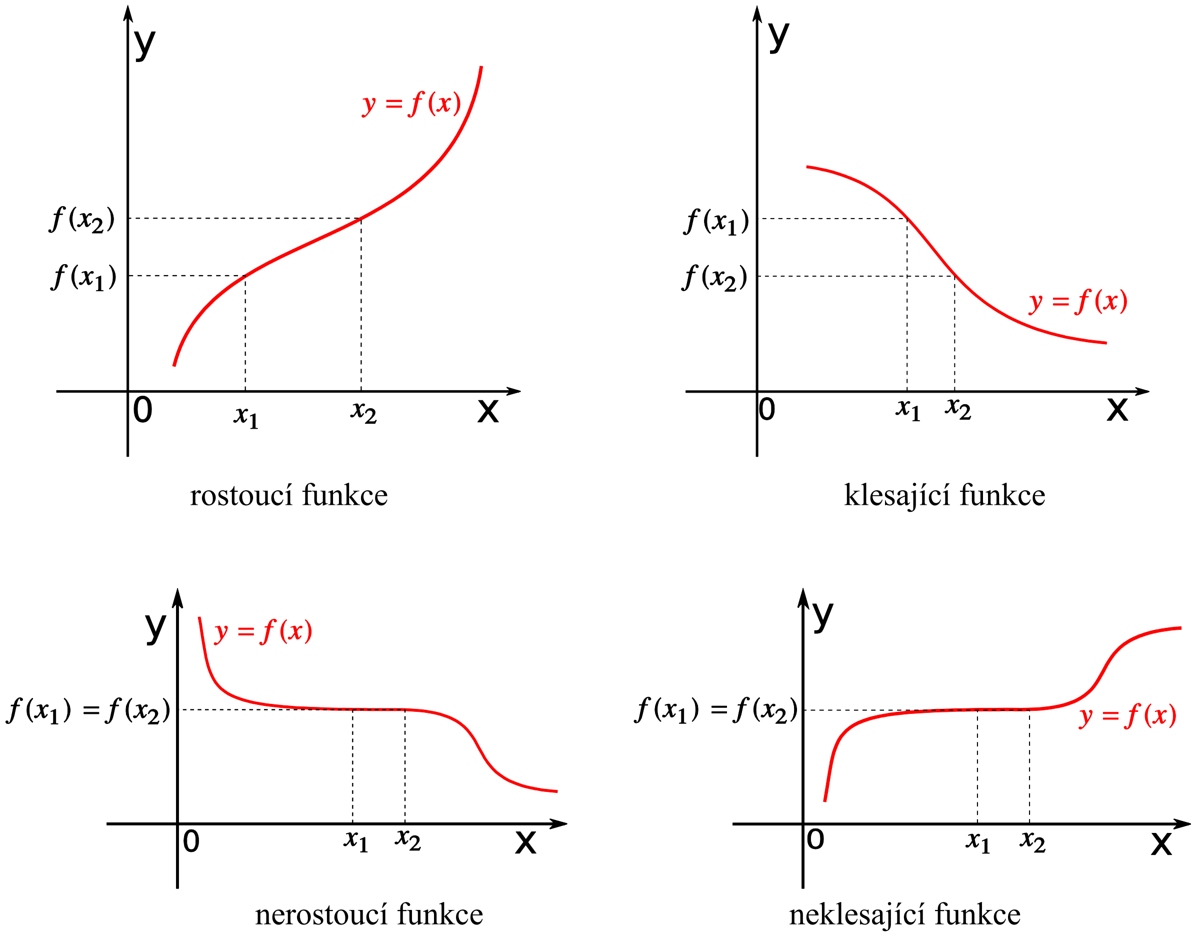
Obr. 2.1.3: Omezená funkce

2.2 Monotónní funkce

Definice 2.2.1 Nechť je daná funkce f: D(f) → **R** a množina I ⊆ D(f). Pak nazveme funkci f:

- rostoucí na množině I, jestliže $\forall x_1, x_2 \in$ I, $x_1 < x_2$ platí, že $f(x_1) < f(x_2)$
- klesající na množině I, jestliže $\forall x_1, x_2 \in$ I, $x_1 < x_2$ platí, že $f(x_1) > f(x_2)$
- nerostoucí na množině I, jestliže $\forall x_1, x_2 \in$ I, $x_1 < x_2$ platí, že $f(x_1) \geq f(x_2)$
- neklesající na množině I, jestliže $\forall x_1, x_2 \in$ I $x_1 < x_2$ platí, že $f(x_1) \leq f(x_2)$

Funkce, která má některou z těchto vlastností se nazývá monotónní na množině I. Rostoucí nebo klesající funkce se nazývá ryze monotónní.



Obr. 2.2.1: Monotonost funkce

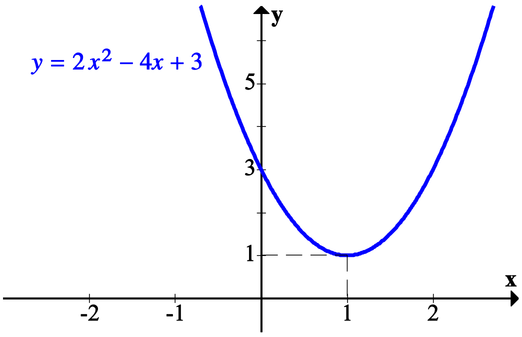
Praktické určování intervalů monotonnosti se provádí s využitím středoškolského diferenciálního počtu (první derivace funkce).

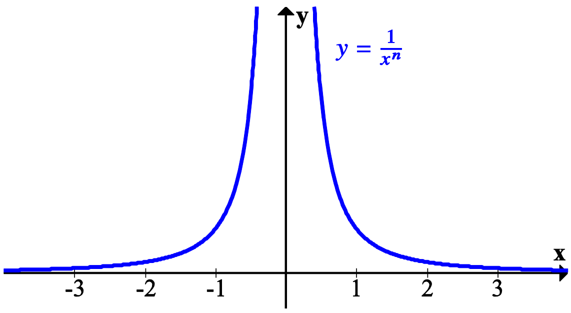
2.3 Spojitá, konvexní a konkávní funkce

V této práci jsou používány i další pojmy, jako např. spojitá funkce, nebo konvexní a konkávní funkce. Přesné definice těchto pojmů přesahují rámec bakalářské práce, protože by vyžadovaly vybudování rozsáhlého matematického aparátu. Pro jednoduchost se omezíme pouze na jistá zjednodušení a intuitivní představy o těchto pojmech. Praktické určování spojitosti funkce se provádí s využitím středoškolského pojmu limita funkce. Určování intervalů, na nichž je funkce konvexní a konkávní se provádí s využitím středoškolského diferenciálního počtu (druhá derivace funkce).

Spojitá funkce

Spojitá funkce je funkce, jejíž hodnoty se mění plynule, tzn. při libovolně malé změně hodnoty x se funkční hodnota $f(x)$ změní libovolně málo. Intuitivní a ne zcela přesná představa spojité funkce odpovídá funkci, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem, aniž by se tužka zvedla z papíru. Funkce, která není spojitá, se označuje jako nespojitá.





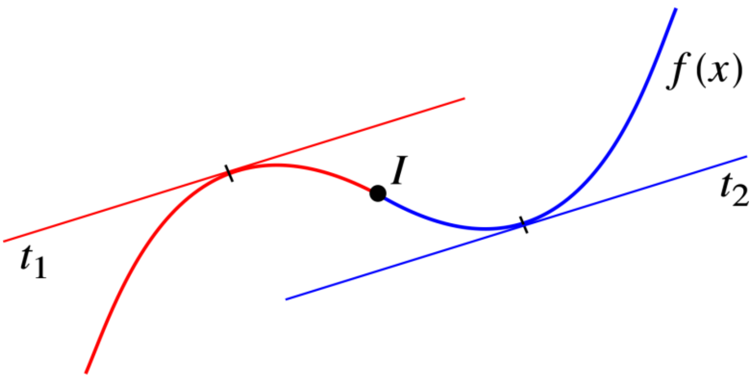
Obr. 2.3.1: Grafy spojité a nespojité funkce

Konvexní funkce

Graf spojité konvexní funkce na intervalu (a, b) leží nad každou tečnou ke grafu funkce, sestrojenou v libovolném bodě tohoto intervalu.

Konkávní funkce

Graf spojité konkávní funkce na intervalu (a, b) leží naopak pod každou tečnou ke grafu funkce, sestrojenou v libovolném bodě tohoto intervalu. V tzv. inflexním bodě dochází ke změně konvexnosti v konkávnost nebo naopak konkávnosti v konvexnost.



Obr. 2.3.2: Konkávnost a konvexnost funkce

Na obr. 2.3.2 je graf jisté funkce $f(x)$. Červeně je vyznačena část grafu, kde je funkce konkávní a modře, kde je funkce konvexní. Bod I je inflexním bodem, kde dochází ke změně konvexnosti v konkávnost.

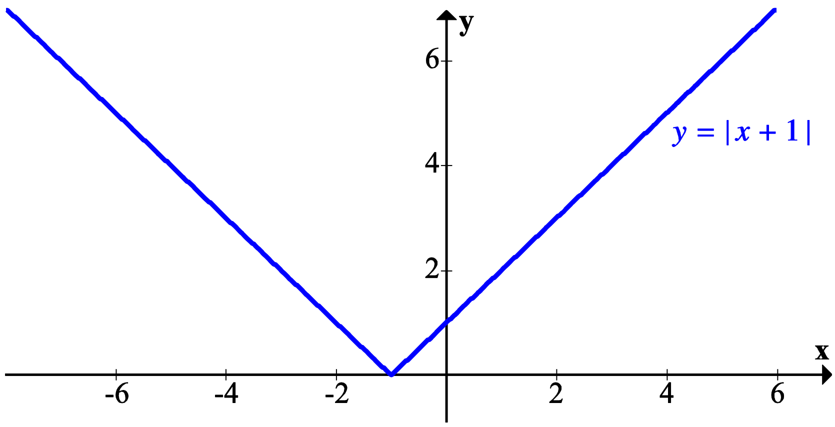
Poznámka V praktické části jsou využívány středoškolské znalosti limitního a diferenciálního počtu.

2.4 Prostá funkce

Definice 2.4.1 Řekneme, že funkce f je prostá, jestliže $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{D}(f)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Příklad 2.4.1 Rozhodněte, zda jsou funkce prosté na svém definičním oboru:

a) $f(x) = |x + 1|$



Obr. 2.4.1: Graf funkce $\boldsymbol{f(x) = |x + 1|}$

$f(-2) = f(0) = 1$

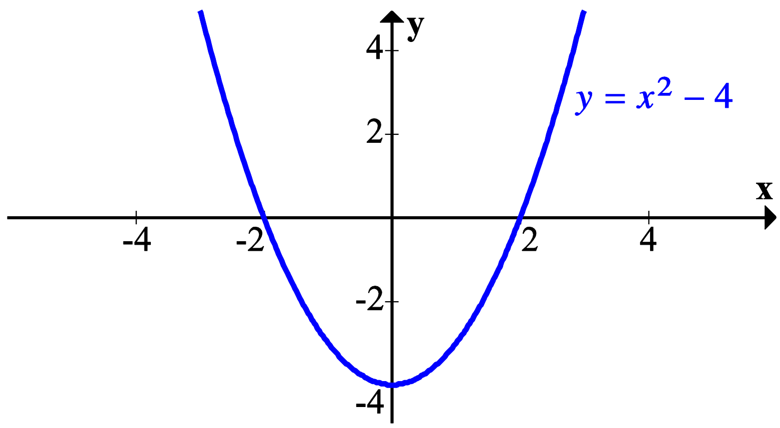
Funkce $f(x) = |x + 1|$ není prostá v **R**

b) $f(x) = x^2 - 4$

P$x[x;0]$: $0 = x^2 - 4$

$x = \pm 2$

P$y[0;y]$: $y = -4$



Obr. 2.4.2: Graf funkce $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4}$

Funkce $f(x) = x^2 - 4$ není prostá v **R**

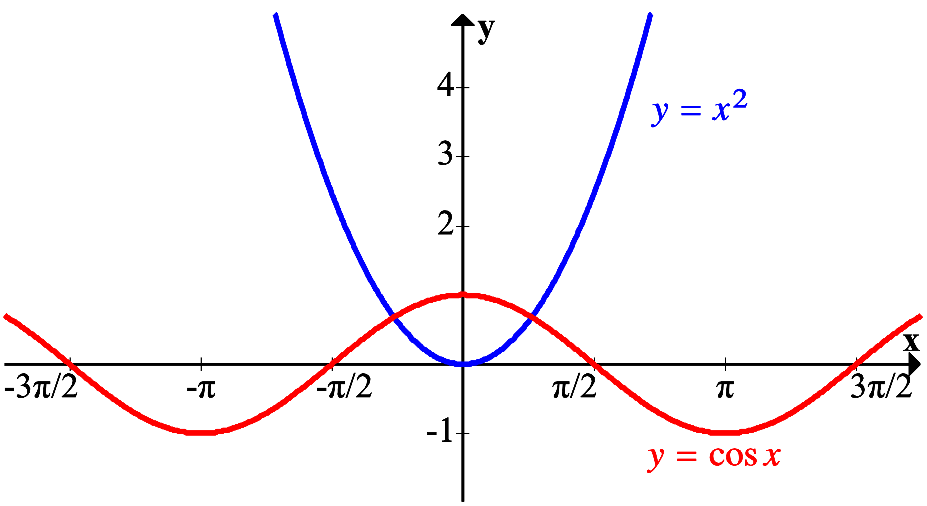
2.5 Sudá a lichá funkce

<u>Definice 2.5.1</u> Řekneme, že funkce f je sudá, jestliže $\forall x \in \mathrm{D}(f)$ platí, že $-x \in \mathrm{D}(f)$ a současně $f(-x) = f(x)$.

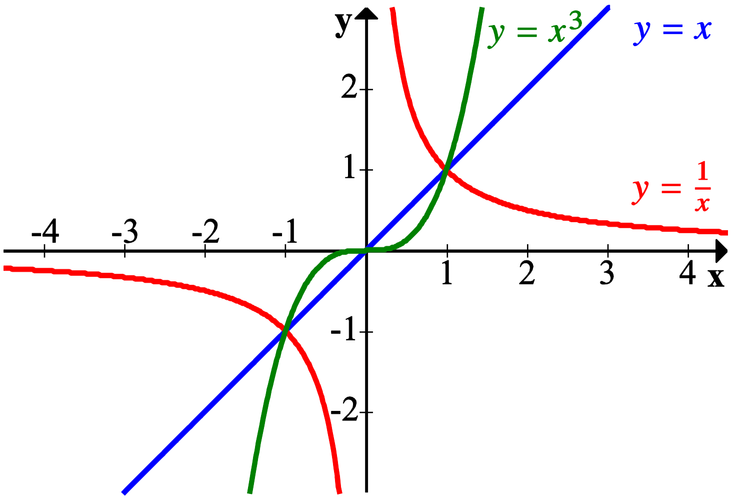
Z definice 2.5.1 vyplývá, že graf sudé funkce f je souměrný podle osy y.

<u>Definice 2.5.2</u> Řekneme, že funkce f je lichá, jestliže $\forall x \in \mathrm{D}(f)$ platí, že $-x \in \mathrm{D}(f)$ a současně $f(-x) = -f(x)$.

Z definice 2.5.2 vyplývá, že graf liché funkce f je souměrný podle počátku souřadného systému.



Obr. 2.5.1: Grafy sudých funkcí



Obr. 2.5.2: Grafy lichých funkcí

Příklad 2.5.1 Zjistěte, zda je funkce sudá či lichá:

a) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$

řešení:

a) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ $\qquad\wedge\qquad$ $D(f) = \mathbf{R}$

$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{-4x}{x^2+4} \neq f(x)$ $\quad\Rightarrow\quad$ tzn. funkce není sudá

$-f(x) = -\frac{4x}{x^2+4} = f(-x)$ $\quad\Rightarrow\quad$ tzn. funkce je lichá

Funkce $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ je lichá funkce.

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ $\qquad\wedge\qquad$ $D(f) = \mathbf{R}$

$f(-x) = \ln\left((-x)^2 - 2x + 2\right) = \ln(x^2 - 2x + 2) \neq f(x)$ $\Rightarrow$ tzn. funkce není sudá

$-f(x) = -\ln(x^2 + 2x + 2) \neq f(-x)$ $\Rightarrow$ tzn. funkce není lichá

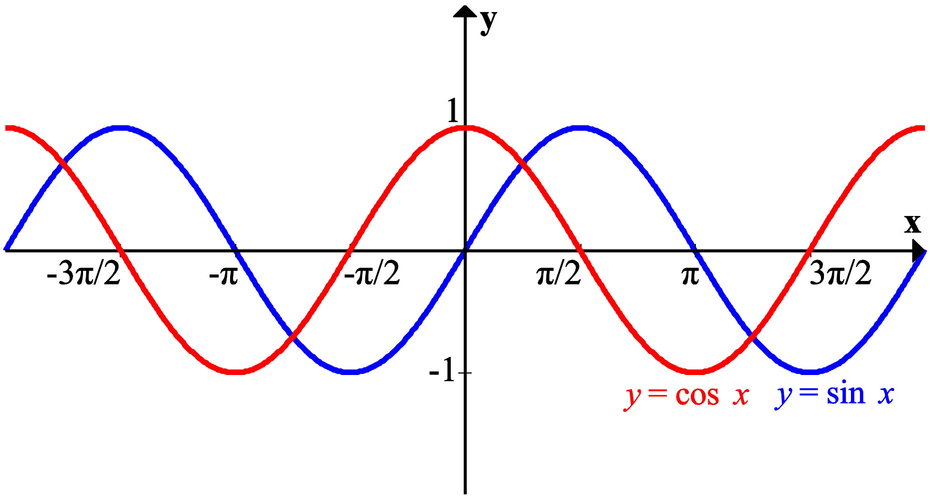
Funkce $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ není sudá ani lichá.

2.6 Periodická funkce

Definice 2.6.1 Funkce f se nazývá periodická s periodou $p \in \mathbf{R}^+$, jestliže platí:

1. $\forall x \in D(f), \forall k \in \mathbf{Z}$ platí, že $(x + k \cdot p) \in D(f)$
2. $\forall x \in D(f), \forall k \in \mathbf{Z}$ platí, že $f(x + k \cdot p) = f(x)$

Nejmenší perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.



Obr. 2.6.1: Grafy periodických funkcí

3 Elementární funkce

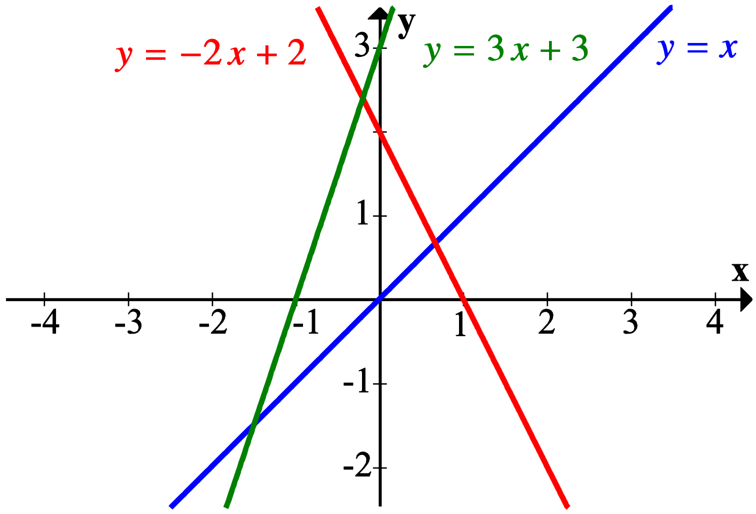
Mezi elementární funkce patří lineární, kvadratická, exponenciální a logaritmická funkce, dále pak mocninné a iracionální, goniometrické a cyklometrické funkce. Pomocí základních operací, jako je konečný počet sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí, lze vytvořit i velmi složité funkce. Elementární funkce tvoří základ středoškolské matematiky.

3.1 Lineární funkce

Lineární funkce má funkční předpis $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbf{R}$.

Vlastnosti lineární funkce

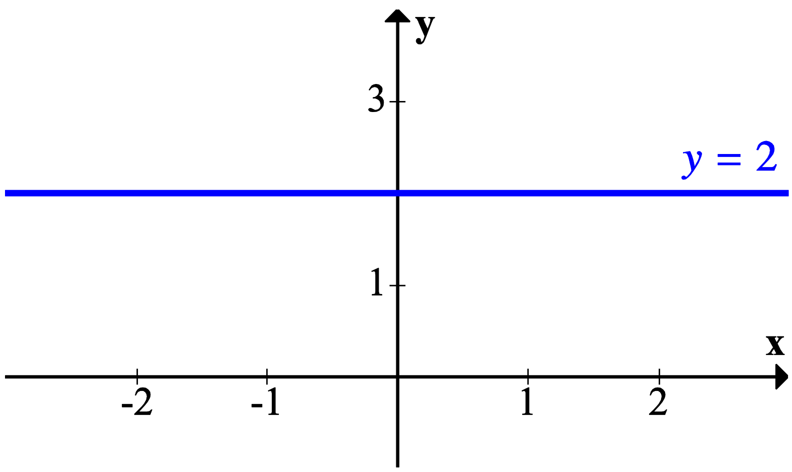
Definičním oborem je množina reálných čísel, obor hodnot je závislý na koeficientu a. Na koeficientu a také závisí, zda je funkce konstantní, klesající či rostoucí. Jestliže je koeficient a kladné číslo, jde o funkci rostoucí, v případě, že a je záporné, je funkce klesající. Lineární funkce je pro $a \neq 0$ prostá, není periodická a v žádném bodě nenabývá maxima ani minima. V případě, kdy $b \neq 0$ není funkce ani sudá ani lichá. Je-li $b = 0$, je pro $a \neq 0$ funkce lichá a pro $a = 0$ je funkce sudá i lichá zároveň. Grafem funkce je přímka. Pokud je $b = 0$, přímka prochází počátkem $[0; 0]$ a funkce je lichá pro libovolné $a \in \mathbf{R}$.



Obr. 3.1.1: Grafy lineárních funkcí

Konstantní funkce

Za zvláštní případ lineární funkce lze považovat funkci, pro $a = 0$, tzn. funkci $f\colon y = b$. Tato funkce se nazývá konstantní funkce. Funkce je sudá, definičním oborem $\mathrm{D}(f)$ je **R** a oborem hodnot $\mathrm{H}(f) = \{b\}$. Je-li $b = 0$, je funkce sudá i lichá zároveň. Jejím grafem je přímka, rovnoběžná s osou *x*. Osu *y* protíná v bodě b.



Obr. 3.1.2: Graf konstantní funkce $\boldsymbol{y = 2}$

Přímá úměrnost

Dalším zvláštním případem lineární funkce je **přímá úměrnost** pro $a \neq 0 \quad \wedge \quad b = 0$. Funkci zapisujeme ve tvaru $f\colon y = kx$, kde $k = \operatorname{tg} \alpha$ (k je tzv. směrnice grafu funkce, α je úhel, který svírá graf funkce s kladným směrem osy x). Grafem přímé úměrnosti je přímka, procházející počátkem souřadného systému. S přímou úměrností se setkávají žáci již na základní škole.

Přílad 3.1.1 Sestrojte graf funkce $y = 2x + 1$

řešení:

Pro sestrojení grafu funkce (přímky) postačí vypočítat průsečíky se souřadnými osami.

$y = 2x + 1$

P_y: $x = 0$, $y = 1$

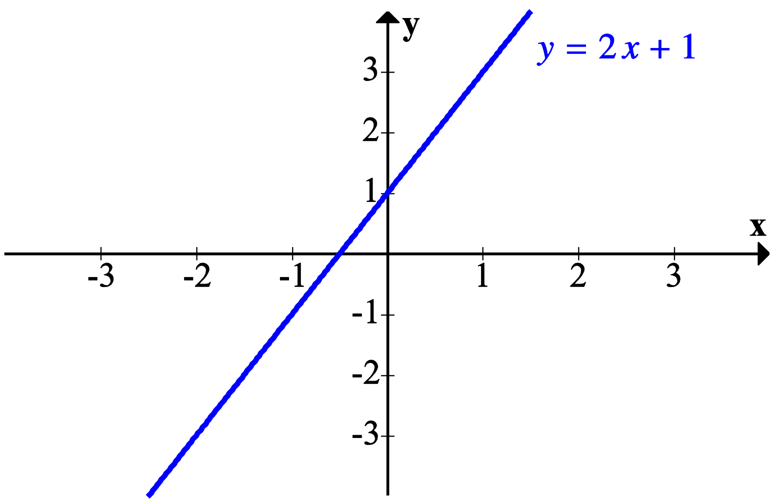
P_x: $y = 0$

$0 = 2x + 1$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

Graf funkce $f(x) = 2x + 1$ protíná osu y v bodě $[0; 1]$ a osu x v bodě $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$



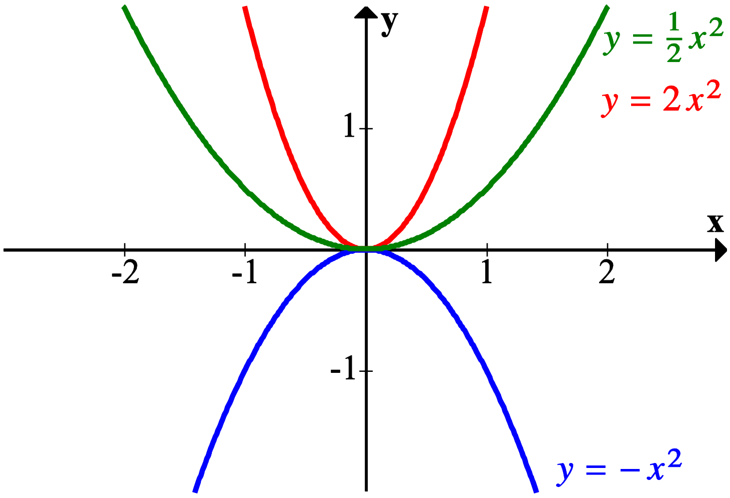
Obr. 3.1.3: Graf funkce $\boldsymbol{y = 2x + 1}$

3.2 Kvadratická funkce

Kvadratická funkce má funkční předpis $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Člen ax^2 se nazývá kvadratický, člen bx se nazývá lineární. Konstantní člen c se nazývá absolutní člen.

Vlastnosti kvadratické funkce

Definičním oborem je množina reálných čísel. Obor hodnot závisí na konkrétní funkci a je to vždy otevřený interval (buď do plus, nebo do minus nekonečna). Kvadratická funkce je na části definičního oboru rostoucí a na části klesající. Z grafu funkce je zřejmé, že funkce není nikdy na $\mathbf{R}$ prostá. Je-li lineární člen roven nule ($b = 0$), je kvadratická funkce sudá, v ostatních případech není funkce ani sudá, ani lichá. Vrcholem paraboly je bod, v němž funkce nabývá maxima, nebo minima. Grafem funkce je parabola.



Obr. 3.2.1: Grafy kvadratických funkcí

Omezenost, konvexnost a konkávnost funkce:

Kvadratická funkce je vždy omezená shora či zdola v závislosti na koeficientu a. Je-li koeficient a kladný, je funkce omezená zdola, je-li a záporný, je funkce omezená shora. Na koeficientu a závisí i to, zda je funkce konvexní či konkávní. Je-li $a > 0$, je parabola otevřená nahoru a funkce je konvexní. Konkávní je v případě, že $a < 0$. Pak je parabola otevřená dolů.

Příklad 3.1.2 Sestrojte graf funkce $y = 2x^2 - 4x + 3$

- Nejprve zjistíme vrchol paraboly:

  $y = 2x^2 - 4x + 3$

  $y = 2(x^2 - 2x) + 3$

  $y = 2(x-1)^2 - 2 + 3$

  $y = 2(x-1)^2 + 1$

Vrcholem paraboly je bod V[1; 1].

- Zjistíme průsečíky s osou x a y:

  $P_x[x; 0]$: $0 = 2x^2 - 4x + 3$

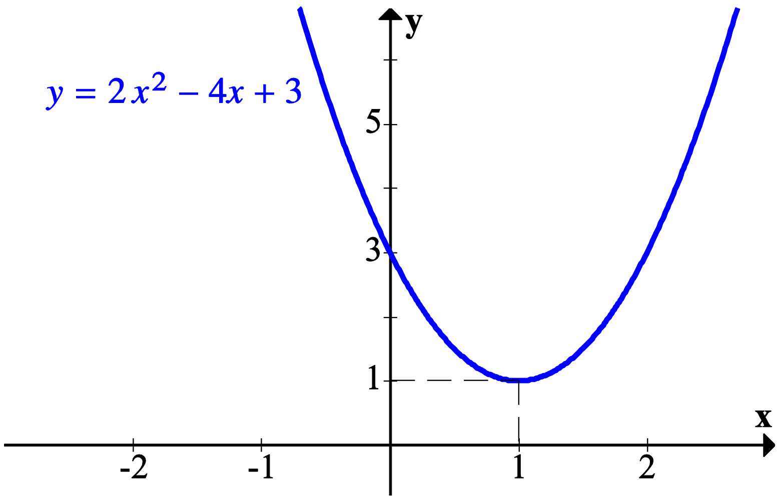
  $$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{4}$$

  Graf funkce neprotíná osu x.

  $P_y[0; y]$: $y = 3$

  Graf protíná osu y v bodě $P_y[0; 3]$

- Jelikož koeficient kvadratického členu $a = 2 > 0$, parabola bude otevřená nahoru.



Obr. 3.2.2: Graf funkce $\boldsymbol{y = 2x^2 - 4x + 3}$

Funkce je na intervalu $(-\infty; 1)$ klesající a na intervalu $(1; +\infty)$ rostoucí. Funkce není prostá, je konvexní a je omezená zdola.

3.3 Racionální lomená funkce

Definice 3.3.1 Buďte $P(x)$, $Q(x)$ nenulové polynomy proměnné x. Funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se nazývá racionální lomená funkce. Tuto funkci dále nazveme ryze lomenou, platí-li st $P(x)$ < st $Q(x)$ (stupeň polynomu značíme st.). Funkce je neryze lomená, je-li st $P(x)$ ≥ st $Q(x)$.

Ryze lomené funkce jsou např.: $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2+2}{x^5}$ a příkladem neryze lomených racionálních funkcí jsou funkce $\frac{x^2+2}{x}$ nebo $\frac{x^5+3x+5}{x^3+2}$.

Platí:

- Definičním oborem racionální lomené funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je množina

  D(R) = $(-\infty;\infty) - \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou všechny reálné kořeny polynomu $Q(x)$.
- Je-li $\frac{P(x)}{Q(x)}$ neryze lomená racionální funkce, pak dělením polynomů $P(x)$ a $Q(x)$ obdržíme součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Příklad 3.3.1 Určete definiční obor funkce $y = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$ a rozložte ji na součet polynomu a funkce racionální ryze lomené.

řešení:

D(f): protože $x^2 + 1 > 0$ je D(f) = **R**

$$\left(3x^3 - 1\right) : (x^2+1) = 3x - \frac{3x-1}{x^2+1}$$

$$\underline{-3x^3 - 3x}$$

$$0 - 3x - 1$$

Rozklad na parciální zlomky

Buď $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce, nechť polynomy $P(x)$, $Q(x)$ nemají společné kořeny a buď $Q(x) = a_n\,(x-\alpha)^k \cdot \dots \cdot (x-\lambda)^r \left[\left(x-a\right)^2 + b^2\right]^s \cdot \dots \cdot [(x-p)^2 + q^2]^v$ rozklad jmenovatele v **R**. Pak existuje n reálných čísel $A_1, \dots, A_k, \dots L_1, \dots, L_r, M_1, N_1, \dots, M_s, N_s, \dots, U_1, V_1, \dots, U_v, V_v$ takových, že pro každé $x \in$ **R**, pro něž $Q(x) \neq 0$, platí:

$R(x) = \Big[\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \frac{L_r}{(x-\lambda)^r} + \ldots + \frac{L_1}{x-\lambda} + \frac{M_s x+N_s}{[(x-a)^2+b^2]^s} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{[(x-a)^2+b^2]} +$

$\ldots + \frac{U_v x+V_v}{[(x-p)^2+q^2]^v} + \ldots + \frac{U_1 x+V_1}{(x-p)^2+q^2}\Big].$

Sčítance tohoto rozkladu nazýváme parciálními zlomky.

<u>Příklad 3.3.2</u> Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci:

a) $R(x) = \frac{12x+7}{x^2-9x+18}$

b) $R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$

řešení:

a) $R(x) = \frac{12x+7}{x^2-9x+18}$

Nejprve musíme rozložit jmenovatele: $x^2 - 9x + 18 = (x-6)(x-3)$

$\frac{12x+7}{x^2-9x+18} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x-3}$

$12x + 7 = A(x-3) + B(x-6)$

$\underline{12x + 7 = Ax - 3A + Bx - 6B}$

$12 = A + B \qquad \rightarrow \qquad A = 12 - B$

$\underline{7 = -3A - 6B} \qquad A = 12 + \frac{43}{3}$

$7 = -3(12 - B) - 6B \qquad A = \frac{79}{3}$

$7 = -36 + 3B - 6B$

$43 = -3B$

$B = -\frac{43}{3}$

$R(x) = \frac{79}{3(x-6)} - \frac{43}{3(x-3)}$

b) $R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)}$

$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$

$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$

$\underline{1 = Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C + Dx^3}$

x^3: $0 = A + D$ → $D = -1$

x^2: $0 = A + B$ → $A = 1$

x^1: $0 = B + C$ → $B = -1$

$\underline{x^0: \quad 1 = C}$

$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}$

Lineární lomená funkce

Zvláštním případem racionální lomené funkce je lineární lomená funkce tvaru $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde $c \neq 0 \quad \wedge \quad ad \neq bc$.

Grafem funkce je rovnoosá hyperbola se středem $S\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$, asymptoty grafu procházejí středem S tak, že jedna je rovnoběžná a osou x, druhá s osou y.

Příklad 3.3.3 Sestrojte graf funkce $f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$.

řešení:

Nejprve určíme definiční obor: D(f) = **R** – {1}

Dále musíme upravit tvar rovnice, abychom zjistili střed hyperboly: $y = \frac{2x-5}{x-1}$

$$\begin{array}{l} (2x-5):(x-1) = 2 \\ \underline{-2x+2} \\ \quad 0 - 3 \end{array}$$

$$y = \frac{2x-5}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1} \quad \rightarrow \quad y - 2 = \frac{-3}{x-1}$$

střed rovnoosé hyperboly je S[1;2]

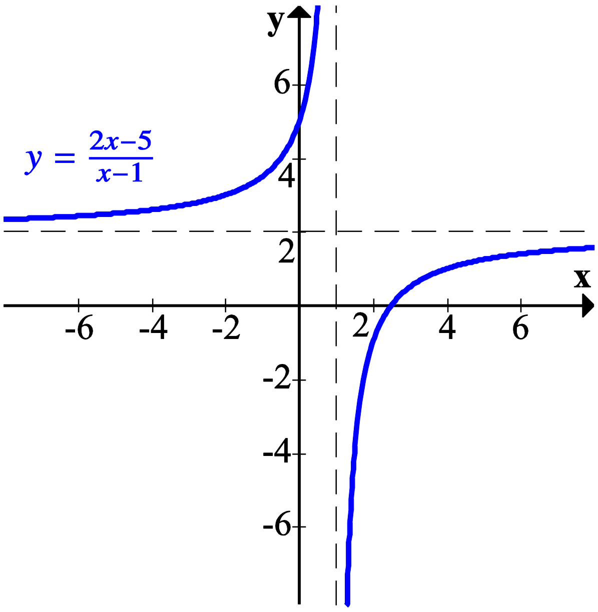
Dále určíme asymptoty: $x = 1,\ y = 2$

Nakonec vypočítáme průsečíky s osami x a y:

$P_x[x; 0]$: $0 = \frac{2x-5}{x-1}$

$x = \frac{5}{2}$ $P_x\left[\frac{5}{2}; 0\right]$

$P_y[0; y]$: $y = 5$ $P_y[0; 5]$

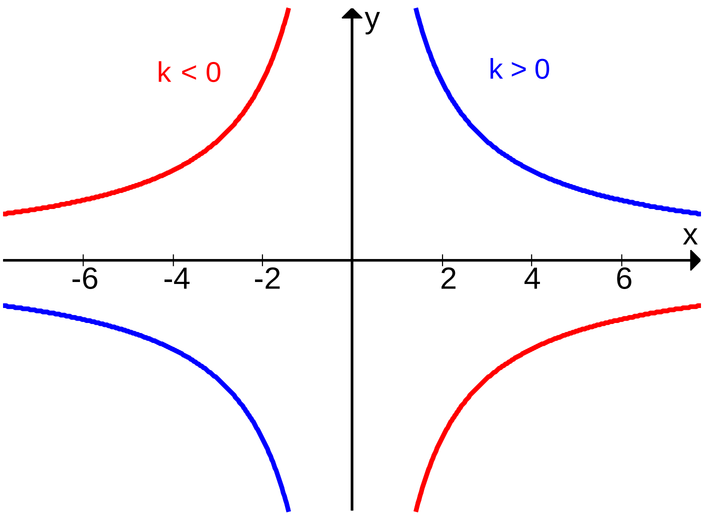


Obr. 3.3.1: Graf funkce $y = \frac{2x-5}{x-1}$

Speciálním případem lineární lomené funkce je **nepřímá úměrnost**. Její funkční předpis je $f(x) = \frac{k}{x},\ k \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Vlastnosti nepřímé úměrnosti

Definičním oborem nepřímé úměrnosti je $\mathbf{R} - \{0\}$, oborem hodnot taktéž $\mathbf{R} - \{0\}$. Funkce je lichá a není shora ani zdola omezená. Pro $k > 0$ je funkce klesající na $(-\infty; 0)$ a dále na $(0; +\infty)$. Pro $k < 0$ je funkce rostoucí na $(-\infty; 0)$ dále na $(0; +\infty)$. Nepřímá úměrnost je funkce prostá a nemá maximum ani minimum.



Obr. 3.3.2: Grafy nepřímé úměrnosti

S nepřímou úměrností se žáci setkávají již na základní škole. Při řešení slovních úloh se obvykle používá tzv. trojčlenka pro nepřímou úměrnost.

3.4 Exponenciální a logaritmická funkce

Exponenciální funkce

<u>Definice 3.4.1</u> Buď $a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$. Funkci f danou předpisem $f(x) = a^x$ nazveme exponenciální funkcí o základu a.

Významnou exponenciální funkcí je tzv. přirozená exponenciální funkce. Je to funkce o základu e. Tvar této funkce je $f(x) = \mathrm{e}^x$, kde e je Eulerovo číslo (e $\doteq 2{,}71828182$ ...).

<u>Poznámka</u> Přirozenou exponenciální funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ můžeme definovat pomocí nekonečné mocninné řady $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Exponenciální funkce o základu 10 se nazývá dekadická exponenciální funkce $f(x) = 10^x$.

Pravidla pro počítání s exponenciální funkcí:

$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$

$a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$

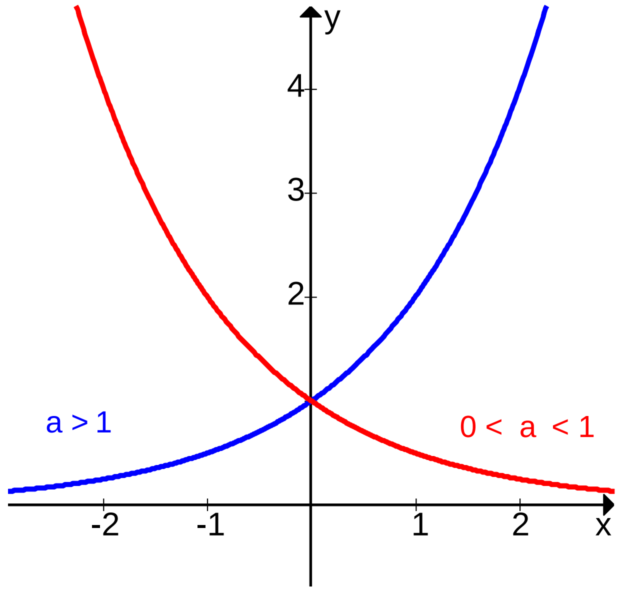
$(ab)^r = a^r \cdot b^r$

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

$(a^r)^s = a^{rs}$

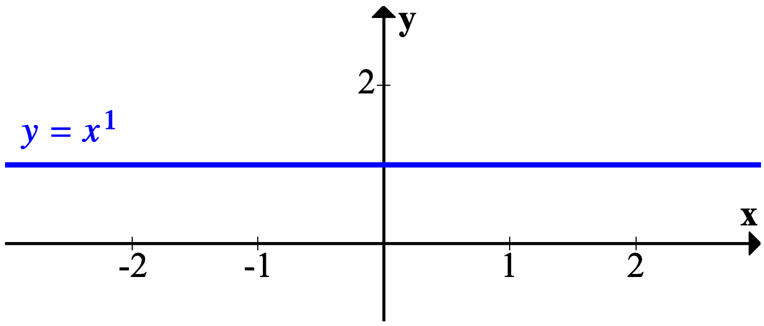
Vlastnosti exponenciální funkce

Definičním oborem funkce je **R** a oborem hodnot je interval $(0; +\infty)$. Funkce není ani sudá ani lichá. Exponenciální funkce je omezená zdola, shora nikoliv. Funkce nenabývá maxima ani minima a je prostá. Je-li $a > 1$ jedná se o funkci rostoucí, pro $0 < a < 1$ je funkce klesající. Exponenciální funkce je inverzní k funkci logaritmické, kterou zmíníme následně. Grafem exponenciální funkce je exponenciální křivka neboli exponenciála.



Obr. 3.4.1: Grafy exponenciální funkce

Pokud $a = 1$, jedná o funkci konstantní.



Obr. 3.4.2: Graf funkce $\boldsymbol{y = 1^x}$

Logaritmická funkce

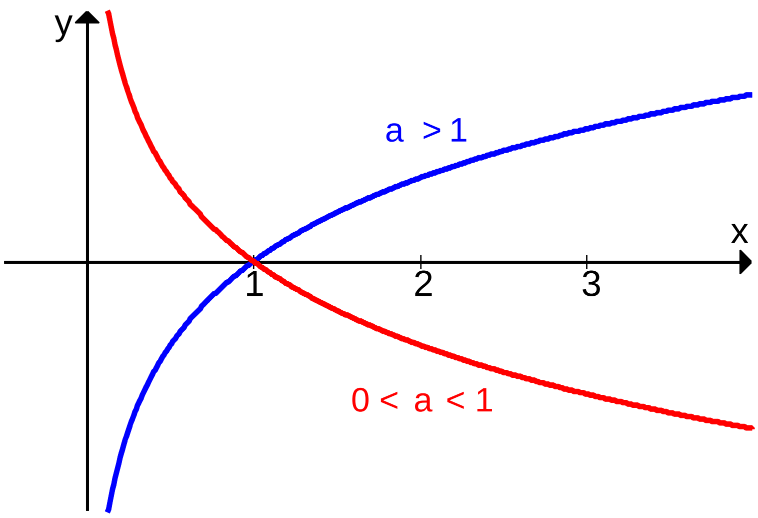
Definice 3.4.2 Buď $a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$. Funkce inverzní f^{-1} k funkci f: $y = a^x$ se nazývá logaritmická funkce o základu a, značí se $y = \log_a x$.

Jelikož je exponenciální funkce $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ ryze monotónní, existuje k ní funkce inverzní, a to funkce logaritmická.

Je-li $a = \mathrm{e}$, nazývá se logaritmická funkce $\log_{\mathrm{e}} x$ přirozený logaritmus, značí se $y = \ln x$.
Je-li $a = 10$, nazývá se logaritmická funkce $\log_{10} x$ dekadický logaritmus, značí se $y = \log x$.

Vlastnosti logaritmické funkce

Definičním oborem logaritmické funkce je interval $(0; +\infty)$ a oborem hodnot interval $(-\infty; +\infty)$. Logaritmická funkce je na intervalu $(0; +\infty)$ rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$. Funkce je prostá, není sudá ani lichá, není omezená shora ani zdola a nenabývá maxima ani minima. Logaritmická funkce je inverzní k funkci exponenciální. Grafem funkce je logaritmická křivka a funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají logaritmy.



Obr. 3.4.3: Grafy logaritmické funkce

Platí:

- $y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$, $\quad \forall x \in (0; \infty),\ y \in \mathbf{R},\ a > 0,\ a \neq 1$

- Nechť $a \in \mathbf{R}^+, a \neq 1$:
  - $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, pro $x, y \in (0; +\infty)$
  - $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, pro $x, y \in (0; +\infty)$
  - $\log_a x^s = s \cdot \log_a x$, pro $x, y \in (0; +\infty),\ s \in \mathbf{R}$

- Nechť $a \in \mathbf{R}^+,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$:

  $\log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$, pro $x \in (0; +\infty)$

- $\log_a a = 1$ $\quad \log_a \frac{1}{a} = -1$ $\quad \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

  Proto jsou grafy funkcí $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ a $y = \log_a x$ souměrné podle osy x.

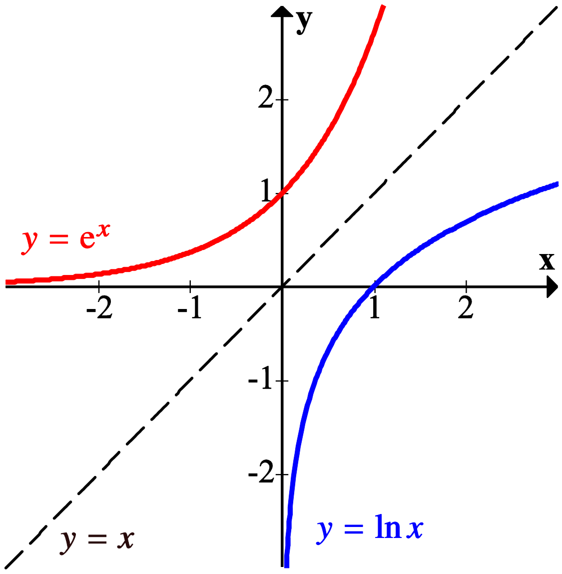
- Pro $a \in \mathbf{R}^+,\ a \neq 1$:

  $\log_a a^x = x$, pro $x \in \mathbf{R}$ $\qquad$ $a^{\log_a x} = x$, pro $x > 0$

Vztah mezi exponenciální funkcí o základu a a o základu e je dán rovností:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a} \qquad \text{pro } a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}$$

Graf logaritmické funkce o základu a je souměrný s grafem exponenciální funkce o témže základu podle přímky o rovnici $y = x$ (osa I. a III. kvadrantu).



Obr. 3.4.4: Grafy inverzních funkcí symetrické podle $\boldsymbol{y = x}$

3.5 Mocninná funkce

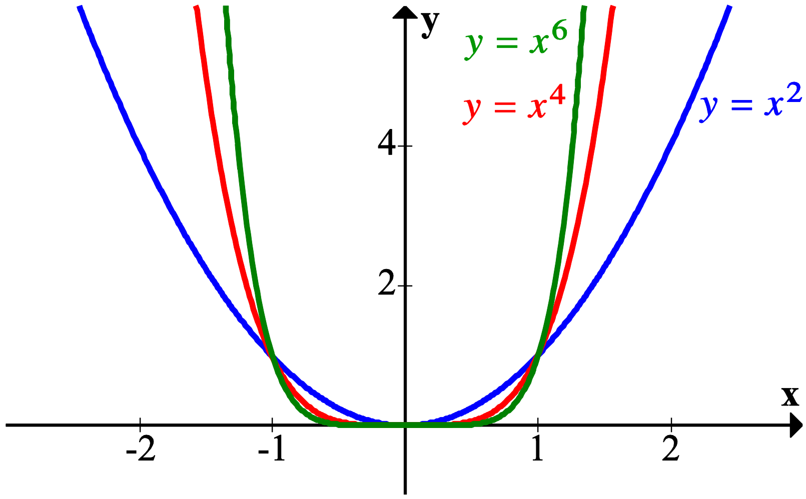
A. Mocninná funkce s přirozeným exponentem a funkce n-tá odmocnina

Definice 3.5.1 Nechť $n \in \mathbf{N}$. Funkci $f(x)$: $y = x^n,\ x \in \mathbf{R}$, kde $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-krát}}$,

nazýváme mocninnou funkcí s přirozeným exponentem.

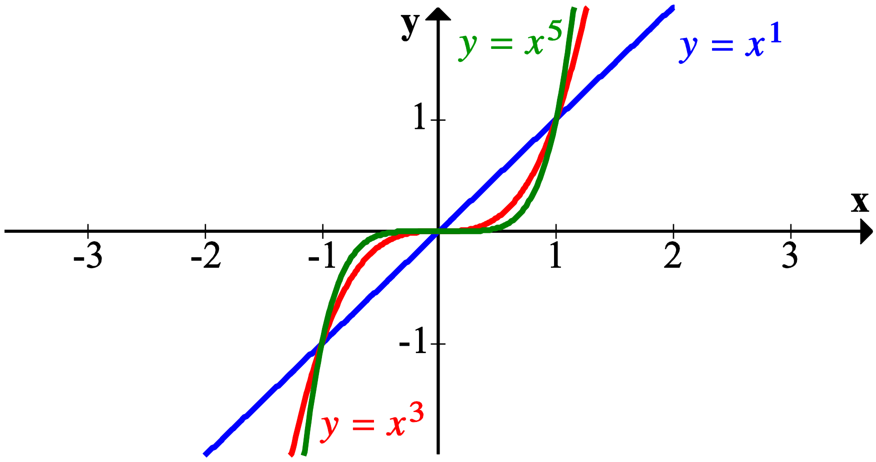
Vlastnosti mocninné funkce s přirozeným exponentem

Funkce $f(x) = x^n$, kde n je sudé má, definiční obor $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$ a obor hodnot $\mathrm{H}(f) = \langle 0;\ +\infty)$. Funkce je sudá, zdola omezená, na intervalu $(-\infty; 0\rangle$ je klesající a na intervalu $\langle 0; +\infty)$ je rostoucí. Funkce není prostá na celém $\mathrm{D}(f)$, avšak například na intervalu $\langle 0; +\infty)$, je funkce prostá a existuje k ní funkce inverzní.



Obr. 3.5.1: Grafy mocninných funkcí, pro sudé číslo $\boldsymbol{n}$

Funkce $f(x) = x^n$, kde n je liché, má definiční obor D(f) = **R** a obor hodnot H(f) = **R**. Funkce je lichá, není shora ani zdola omezená a je rostoucí na D(f). Funkce je prostá na celém svém D(f), existuje tedy k této funkci funkce inverzní.



Obr. 3.5.2: Grafy mocninných funkcí, pro liché číslo $\boldsymbol{n}$

Grafem mocninné funkce je pro $n = 1$ je přímka (osa I. a III. kvadrantu), pro $n > 1$ parabola n-tého stupně.

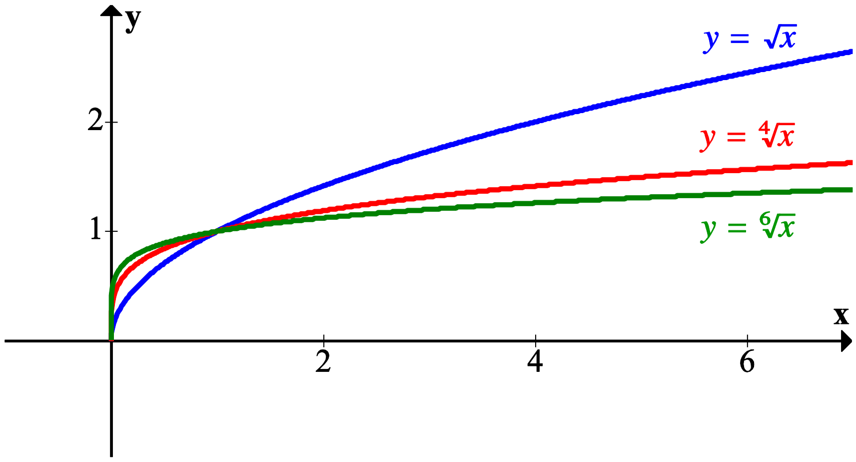
Funkci n-tá odmocnina ($n \in$ **N**, $n \geq 2$) definujeme:

- pro n sudé jako funkci inverzní k funkci $f(x) = x^n$, $x \in \langle 0; +\infty)$,
- pro n liché jako funkci inverzní k funkci $f(x) = x^n$, $x \in$ **R**

Funkci n-tá odmocnina značíme $f(x)$: $y = \sqrt[n]{x}$.

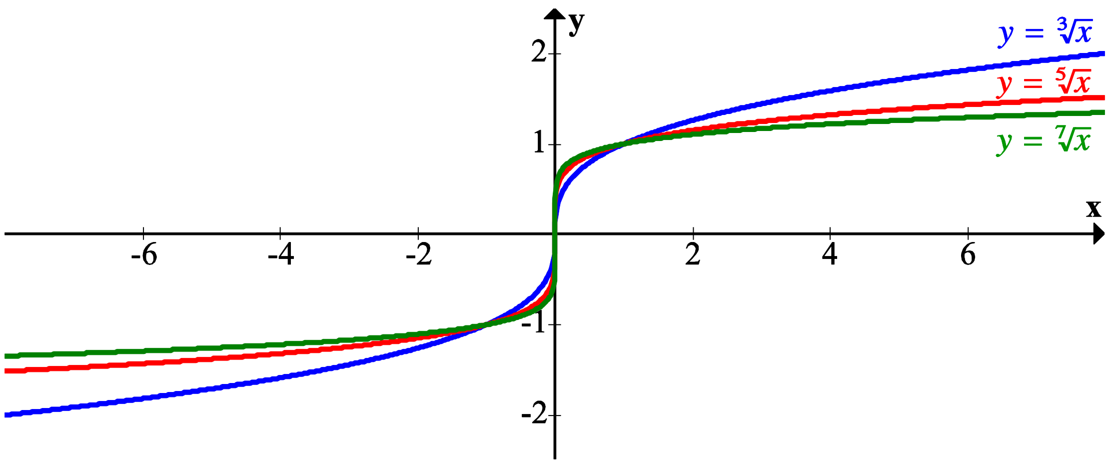
Vlastnosti funkce n-tá odmocnina

Funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$, kde n je sudé, má definiční obor D(f) = $\langle 0; +\infty)$ a obor hodnot H(f) = $\langle 0; +\infty)$. Funkce je zdola omezená, není sudá ani lichá a je rostoucí na svém D(f).



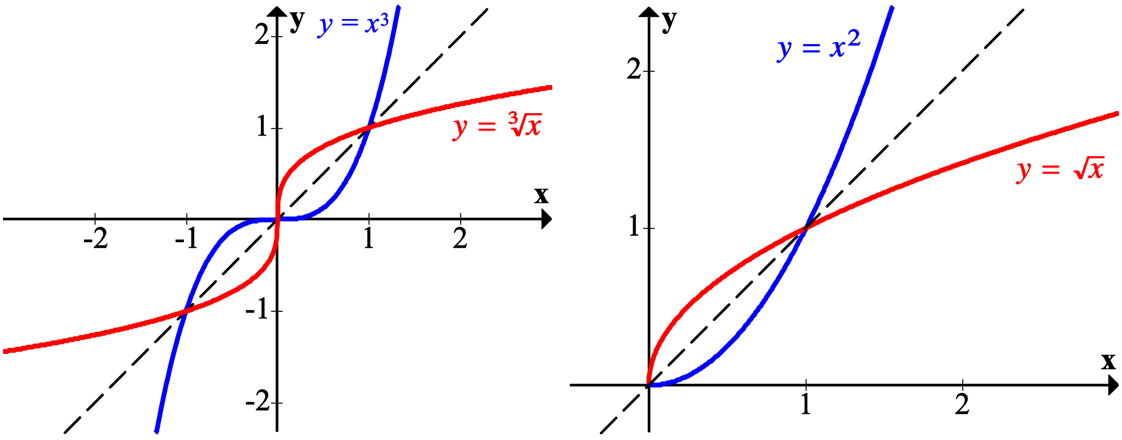
Obr. 3.5.3: Grafy funkcí $\boldsymbol{n}$-tá odmocnina, pro sudé číslo $\boldsymbol{n}$

Funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$, kde n je liché ($n \geq 3$), má definiční obor D(f) = **R** a obor hodnot H(f) = **R**. Funkce není shora ani zdola omezená, je lichá a je rostoucí na svém D(f).



Obr. 3.5.4: Grafy funkcí $\boldsymbol{n}$-tá odmocnina, pro liché číslo $\boldsymbol{n}$

Grafy navzájem inverzních funkcí jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu.



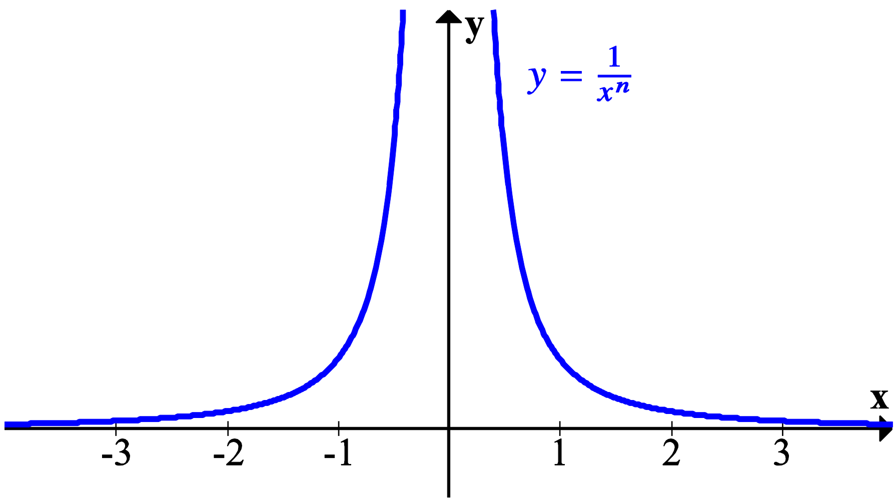
Obr. 3.5.5: Symetrie grafů inverzních funkcí

B. Mocninná funkce se záporným celým exponentem

<u>Definice 3.5.2</u> Nechť $n \in \mathbf{N}$. Funkci $f(x)$: $y = x^{-n}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, kde $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}$, nazýváme mocninnou funkcí se záporným celým exponentem.

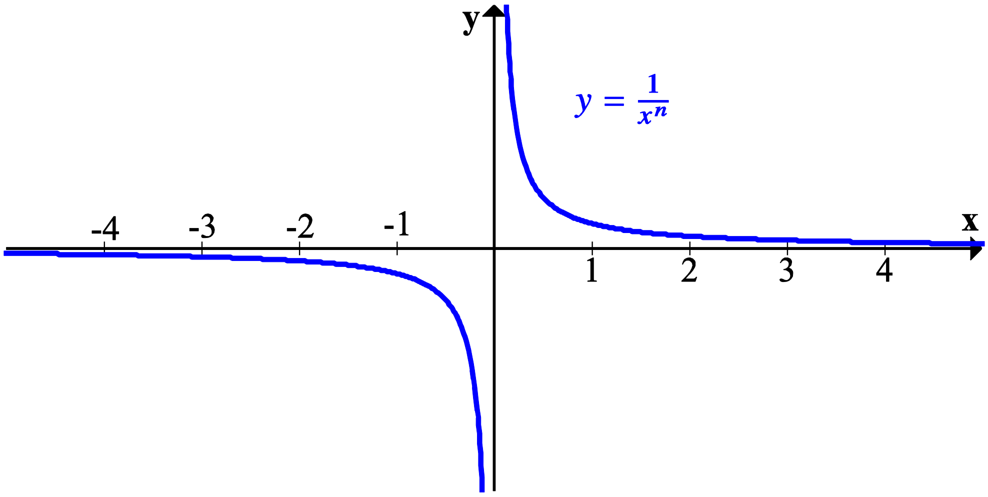
Vlastnosti mocninné funkce se záporným celým exponentem

Funkce $f(x) = x^{-n}$, kde n je sudé číslo, má definiční obor D (f) = **R** – $\{0\}$ a obor hodnot H(f) = $(0; +\infty)$. Funkce je omezená zdola, je sudá, na intervalu $(-\infty; 0)$ je rostoucí a na intervalu $(0; +\infty)$ klesající.



Obr. 3.5.6: Graf mocninné funkce $\boldsymbol{y = x^{-n}}$, pro sudé číslo $\boldsymbol{n}$

Funkce $f(x) = x^{-n}$, kde n je liché číslo, má definiční obor D(f) = **R** – {0} a obor hodnot H(f) = **R** – {0}. Funkce není shora ani zdola omezená, je lichá a je klesající na intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; +\infty)$.



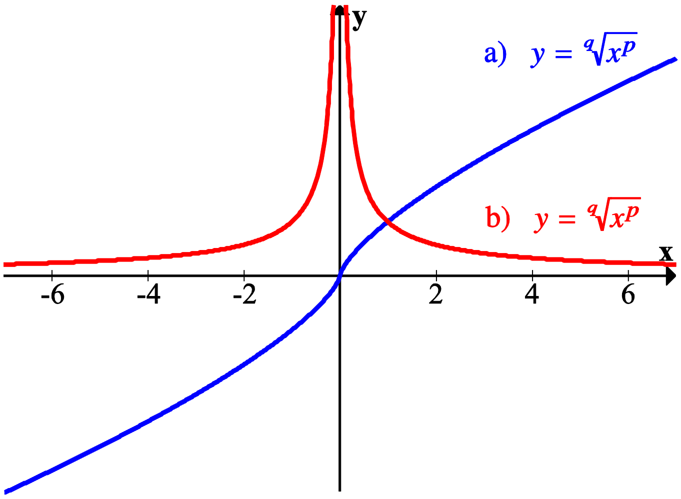
Obr. 3.5.7: Graf mocninné funkce $\boldsymbol{y = x^{-n}}$, pro liché číslo $\boldsymbol{n}$

C. Mocninná funkce s racionálním exponentem

<u>Definice 3.5.3</u> Nechť $r \in$ **Q** – **Z**, $r = \frac{m}{n}$ ($m \in$ **Z**, $n \in$ **N**, $n \geq 2$) a nechť $\frac{p}{q}$ je zlomek v základním tvaru (tj. $p \in$ **Z**, $q \in$ **N**, $q \geq 2$ a čísla p, q jsou nesoudělná) takový, že $r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$. Pak funkci $f(x)$: $y = x^r$, kde $x^r = x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, nazýváme mocninnou funkcí s racionálním exponentem $r \in$ **Q** – **Z**.

Definiční obor takto definované funkce závisí na číslech p, q:

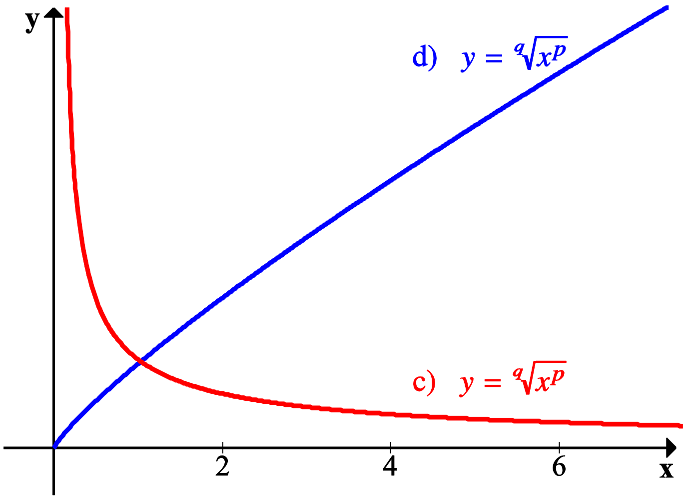
a) Je-li $p > 0$ a q je liché, pak D(f) = **R**
b) Je-li $p < 0$ a q je liché, pak D(f) = **R** – {0}



Obr. 3.5.8: Grafy mocninných funkcí I.

c) Je-li $p > 0$ a q je sudé, pak $D(f) = \langle 0; +\infty)$

d) Je-li $p < 0$ a q je sudé, pak $D(f) = (0; +\infty)$

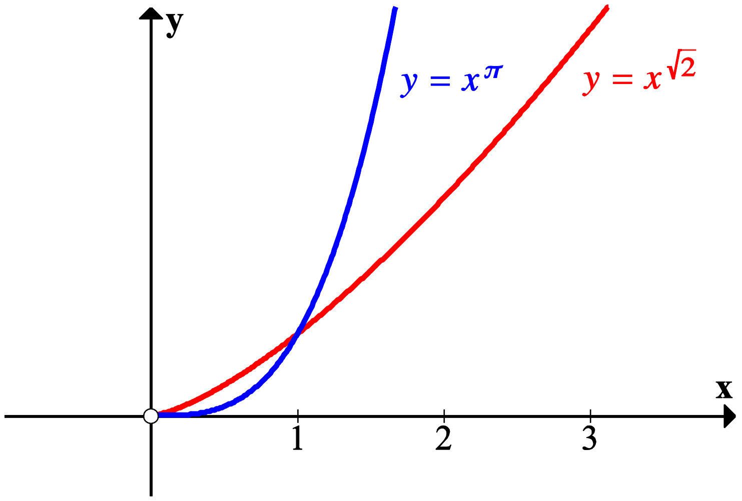


Obr. 3.5.9: Grafy mocninných funkcí II.

D. Mocninná funkce s reálným a nulovým exponentem

Mocninná funkce s reálným exponentem

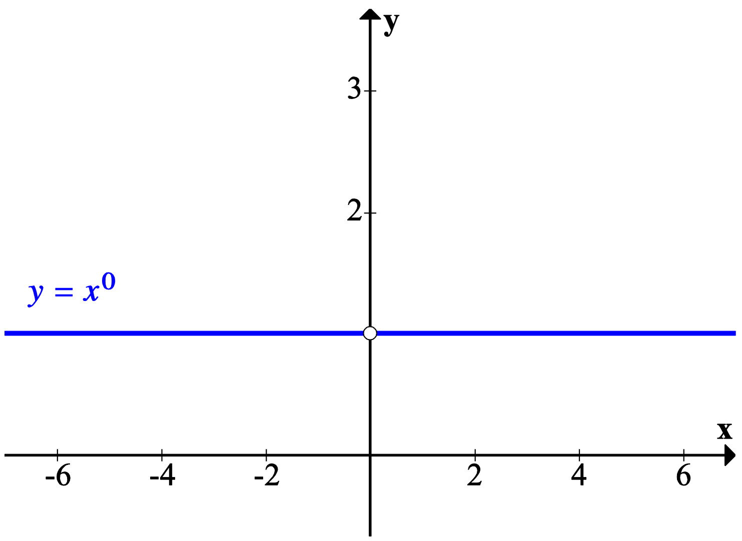
Definice 3.5.4 Nechť $r \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Funkci $f(x)$: $y = x^r$, $x \in \mathbf{R}^+$, nazýváme mocninnou funkcí s reálným exponentem r.



Obr. 3.5.10: Grafy funkcí s reálným exponentem

Mocninná funkce s nulovým exponentem

Pro každé $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ definujeme $x^0 = 1$.



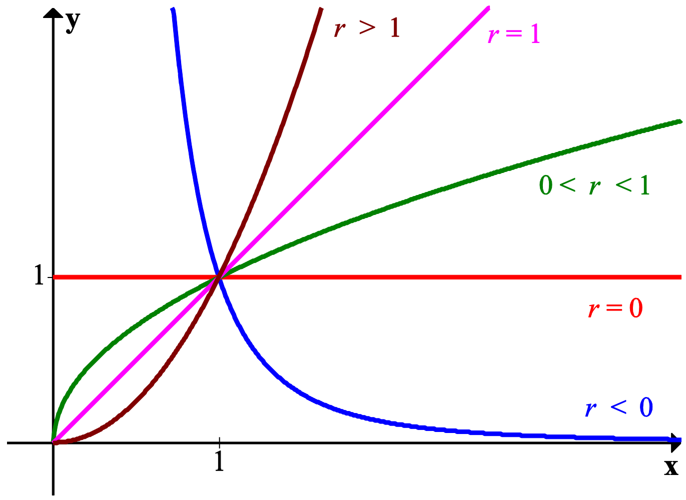
Obr. 3.5.11: Graf funkce $\boldsymbol{y = x^0}$

Pro $r = 0$, je mocninná funkce $f(x)$: $y = x^r$, $x \in$ **R** $-\{0\}$, je rovna konstantní funkci $f(x)$: $y = 1$. V bodě $x = 0$ není funkce definována.

Mocninnou funkci $f(x)$: $y = x^r$ jsme výše definovali pro různé podmnožiny **R**. Pro kladná reálná čísla je mocninná funkce definována pro všechny reálné exponenty. Pro speciálně volené exponenty je funkce definována i na širších intervalech.
Speciálně platí vztah $x^r = \mathrm{e}^{r \cdot \ln x}$, $x \in \mathbf{R}^+$, $r \in \mathbf{R}$.

Monotonie funkce $f(x)$: $y = x^r$, $x \in (0;\ +\infty)$ pro různé hodnoty exponentu r

- Je-li $r < 0$, je funkce klesající.
- Je-li $r = 0$, je funkce konstantní ($y = 1$).
- Je-li $0 < r < 1$, je funkce rostoucí.
- Je-li $r = 1$, jde o rostoucí lineární funkci $y = x$.
- Je-li $r > 1$, je funkce rostoucí.



Obr. 3.5.12: Monotonie funkce $y = x^r, x \in (0;\ +\infty)$

Základní pravidla pro počítání s mocninami

Nechť $x, y \in \mathbf{R}^+$, $a, b \in \mathbf{R}$:

$x^a \cdot y^a = (xy)^a$ $\qquad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$ $\qquad \frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ $\qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $\qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ $\qquad (x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Základní pravidla pro počítání s odmocninami

Nechť $x, y \in \mathbf{R}^+$, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq 2$:

$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ $\qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

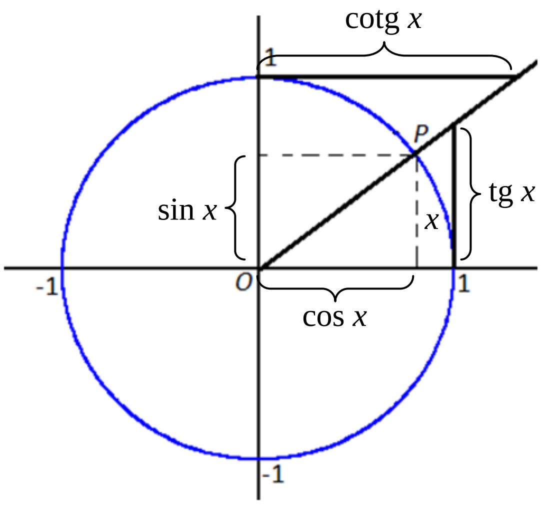
$\sqrt[n]{x^k} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^k$, $k \in \mathbf{Z}$ $\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ $\qquad \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{x^n}$

3.6 Goniometrické a cyklometrické funkce

A. Goniometrické funkce

<u>Definice 3.6.1</u> Buď $x \in \mathbf{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1,0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1,0]$ k bodu P orientován v protisměru (resp. ve směru) chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$ (resp. $x < 0$). Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujeme $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce goniometrické.

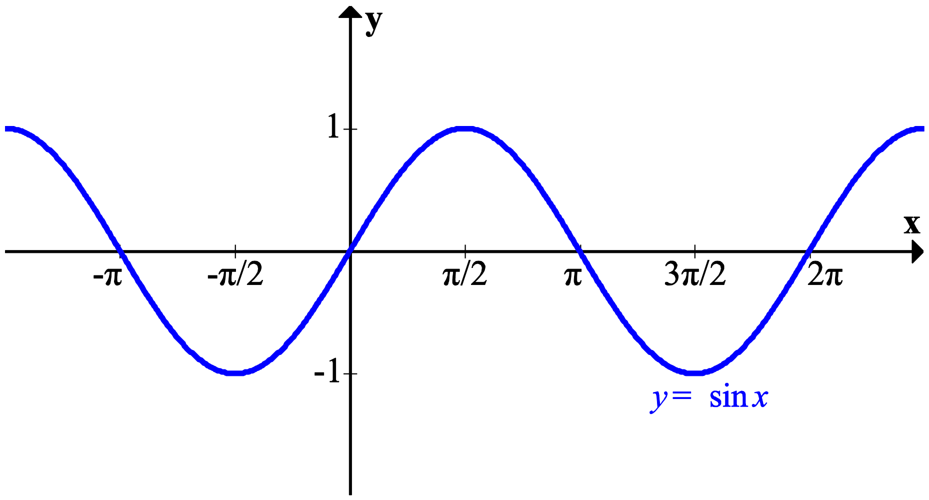


Obr. 3.6.1: Jednotková kružnice

Předchozí definice popisuje zobrazení množiny reálných čísel do jednotkové kružnice. Každému reálnému číslu x (určujícímu vlastně nějaký orientovaný úhel v radiánech) je v tomto zobrazení přiřazen bod P_x na jednotkové kružnici. Souřadnice tohoto bodu následně určují funkční hodnoty goniometrických funkcí sinus a kosinus. Z takto popsaného zobrazení je patrné, že se hodnoty x-ových a y-ových souřadnic bodu P_x budou pravidelně opakovat po otočení bodu P_x o $360°$. To zdůvodňuje, proč jsou periody funkcí sinus a kosinus právě 2π.

Funkce sinus

Funkci sinus značíme $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$



Obr. 3.6.2: Graf funkce $\boldsymbol{y = \sin x}$

Vlastnosti funkce $y = \sin x$

Definičním oborem funkce je **R** a oborem hodnot interval $\langle -1; 1\rangle$. Funkce je lichá, omezená a periodická. Její základní perioda je 2π, tj. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbf{Z}$. Funkce je rostoucí na intervalech $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$ a klesající na intervalech $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$. Dále je funkce konkávní na intervalech $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle$ a konvexní na intervalech $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

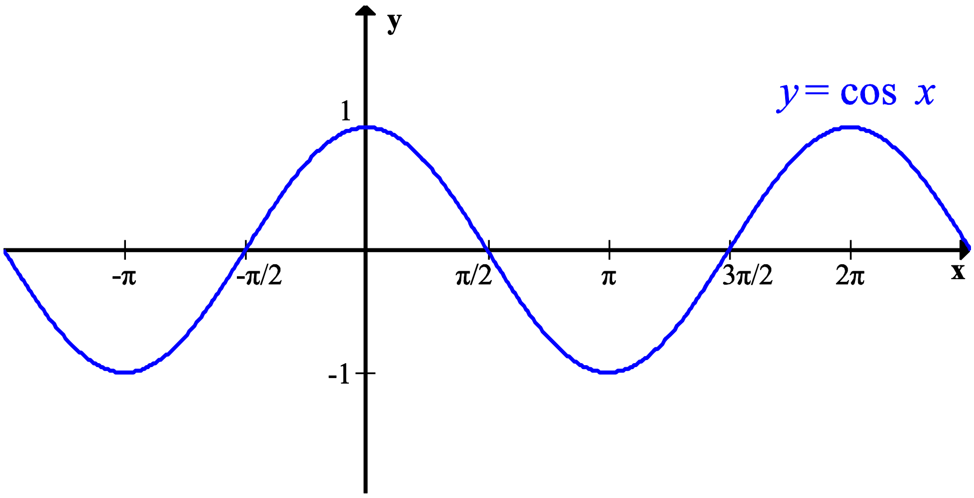
Tabulka hodnot funkce sinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Poznámka: Grafem funkce sinus je tzv. sinusoida.

Funkce kosinus

Funkci kosinus značíme $y = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$



Obr. 3.6.3: Graf funkce $\boldsymbol{y = \cos x}$

<u>Vlastnosti funkce $\cos x$</u>

Definičním oborem funkce je **R** a oborem hodnot interval $\langle -1; 1\rangle$. Funkce je sudá, omezená a periodická. Její základní perioda je 2π, tj. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbf{Z}$. Funkce je rostoucí na intervalech $\langle -\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$, a klesající na intervalech $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$. Dále je funkce konvexní na intervalech $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, a konkávní na intervalech $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ $k \in \mathbf{Z}$.

<u>Tabulka hodnot funkce kosinus</u>

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

<u>Poznámka:</u> Grafem funkce kosinus je tzv. kosinusoida, (posunutá sinusoida).

Základní vztahy a vzorce pro počítání s funkcemi sinus a kosinus

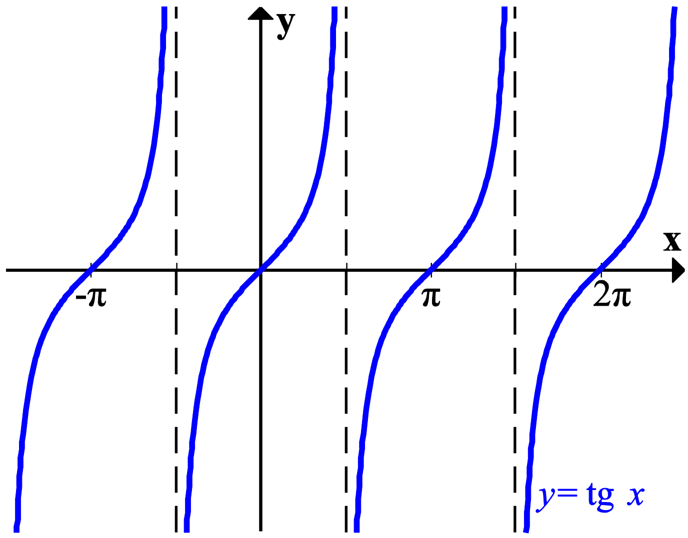
1. $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
2. $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
3. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
4. $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

Tyto vztahy nazýváme součtové vzorce pro funkci sinus a kosinus.

5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
6. $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
7. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
8. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
9. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
10. $\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
11. $\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
12. $\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
13. $\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
14. $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
15. $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

Funkce tangens

Funkci $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ nazýváme tangens a značíme $y = \operatorname{tg} x$. Platí tedy, že $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.



Obr. 3.6.4: Graf funkce $\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x}$

Vlastnosti funkce $y = \operatorname{tg} x$

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \bigcup_{k\in Z} \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ a oborem hodnot je $H(f) = (-\infty; +\infty)$. Funkce je lichá, neomezená a periodická, tj. $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x,\ k \in \mathbf{Z}$. Její základní perioda je π. Funkce je rostoucí na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

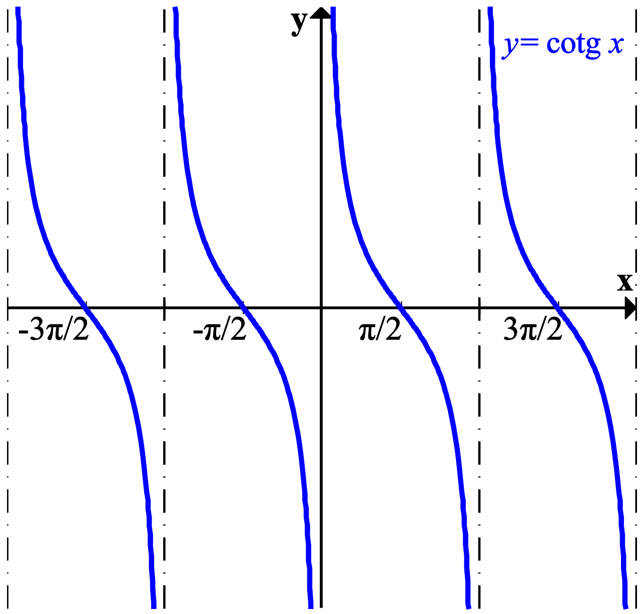
Tabulka hodnot funkce tangens

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Není def.	0	Není def.	0

Poznámka Podle normy ČSN ISO 80000-2 účinné od 1. 4. 2014 se funkce tangens správně značí symbolem **tan**. V české matematické literatuře však i nadále přetrvává historicky používaná zkratka **tg**. Graf funkce se nazývá tangentoida.

Funkce kotangens

Funkci $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ nazýváme kotangens a značíme $y = \operatorname{cotg} x$. Platí tedy, že $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



Obr. 3.6.5: Graf funkce $\boldsymbol{y = \operatorname{cotg} x}$

Vlastnosti funkce $y = \operatorname{cotg} x$

Definiční obor funkce je D(*f*) = **R** – $\bigcup_{k\in Z}$ {kπ, k ∈ **Z**} a obor hodnot **R**. Funkce je lichá, neomezená a periodická. Má základní periodu π. Funkce kotangens je klesající na intervalech $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, k ∈ **Z**.

Tabulka hodnot funkce kotangens

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\operatorname{cotg} x$	Není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Není def.	0	Není def.

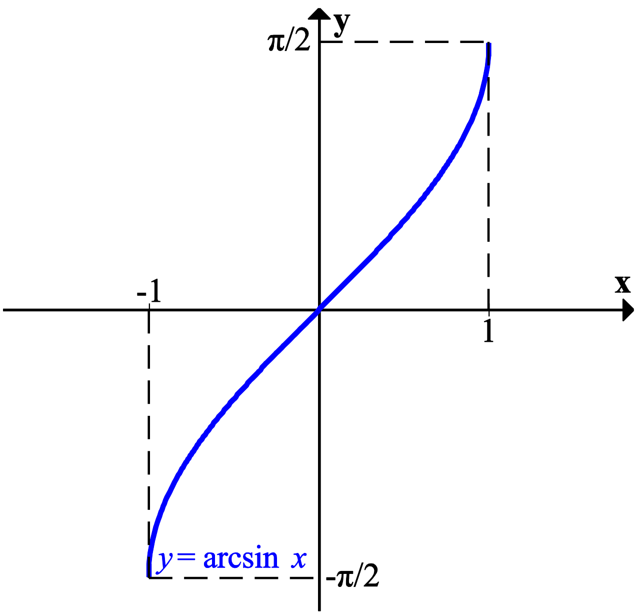
Poznámka Podle normy ČSN ISO 80000-2 účinné od 1. 4. 2014 se funkce kotangens správně značí symbolem **cot**. V české matematické literatuře však i nadále přetrvává historicky používaná zkratka **cotg**.

B. Cyklometrické funkce

Cyklometrickými funkcemi nazýváme funkce arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens a arkus kotangens. Periodické funkce $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ a $\mathrm{cotg}\, x$ nejsou prosté funkce na svých celých definičních oborech, tudíž k nim nemůžeme definovat funkce inverzní. Na vybraných podintervalech však goniometrické funkce prosté jsou. Funkce $y = \sin x$ je prostá například na intervalu $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ a funkce $y = \cos x$ je prostá např. na intervalu $x \in \langle 0; \pi \rangle$. Funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ je prostá např. na intervalu $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a funkce $y = \mathrm{cotg}\, x$ je prostá např. na intervalu $x \in (0;\ \pi)$. Na těchto intervalech k nim můžeme definovat funkce inverzní.

Funkce arkus sinus

Funkce $f\colon\ y = \sin x\,,\ x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ je prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá arkus sinus. Přitom $\mathrm{D}(f^{-1}) = \mathrm{H}(f) = \langle -1; 1 \rangle$. Funkci značíme $f^{-1}\colon\ y = \arcsin x,\ x \in \langle -1; 1 \rangle$.



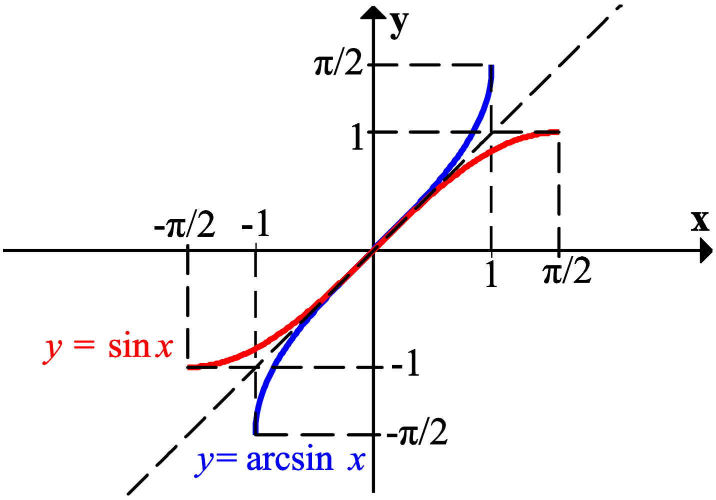
Obr. 3.6.6: Graf funkce $\boldsymbol{y = \arcsin x}$

<u>Vlastnosti funkce $f\colon\ y = \arcsin x$</u>

Definičním oborem funkce je $\mathrm{D}(f) = \langle -1; 1 \rangle$ a oborem hodnot je $\mathrm{H}(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. Funkce je lichá, není periodická a je rostoucí na celém svém definičním oboru.

Tabulka základních hodnot funkce arkus sinus

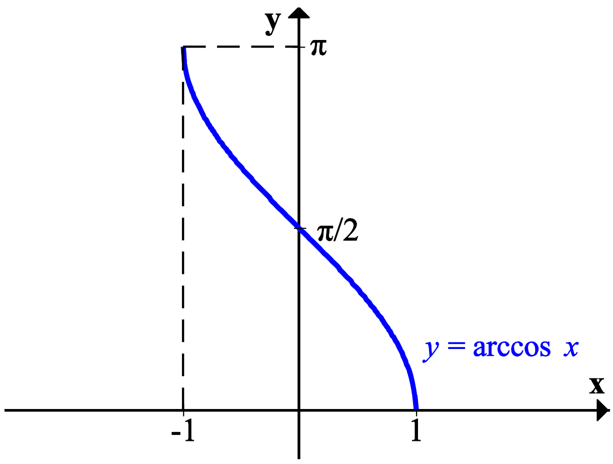
x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Obr. 3.6.7: Grafy funkcí $\boldsymbol{y = \sin x}$ a $\boldsymbol{y = \arcsin x}$

Funkce arkus kosinus

Funkce f: $y = \cos x$, $x \in \langle 0; \pi \rangle$ je prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá arkus kosinus. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1; 1 \rangle$. Funkci značíme f^{-1}: $y = \arccos x$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.



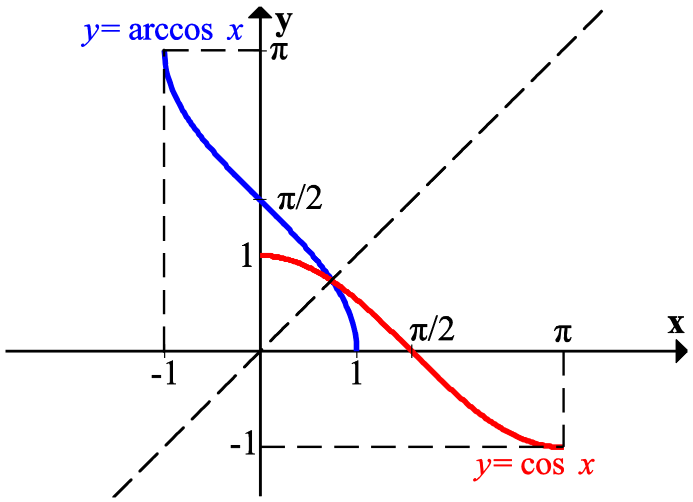
Obr. 3.6.8: Graf funkce $\boldsymbol{y = \arccos x}$

Vlastnosti funkce f: $y = \arccos x$

Definičním oborem funkce je D(f) = $\langle -1; 1\rangle$ a oborem hodnot je H(f) = $\langle 0; \pi\rangle$. Funkce není sudá ani lichá, není periodická a je klesající na celém svém definičním oboru.

Tabulka hodnot funkce arkus kosinus

x	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

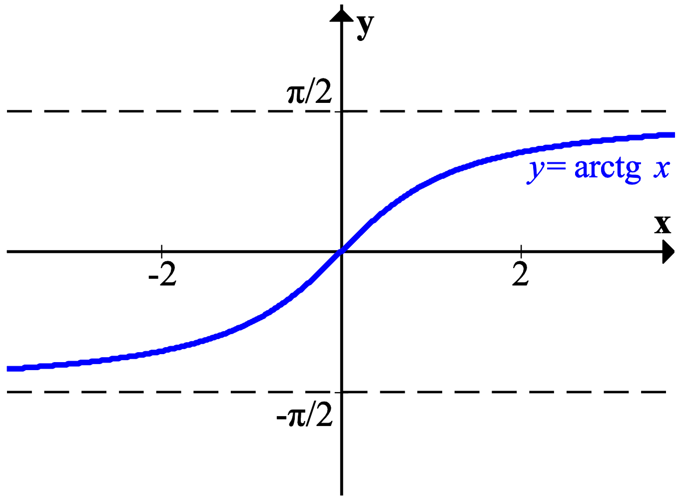


Obr. 3.6.9: Graf funkce $\boldsymbol{y = \cos x}$ a $\boldsymbol{y = \arccos x}$

Pro všechna $x \in \langle -1; 1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Funkce arkus tangens

Funkce f: $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ je prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá arkus tangens. D(f^{-1}) = H(f) = $(-\infty; +\infty)$. Funkci značíme f^{-1}: $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.



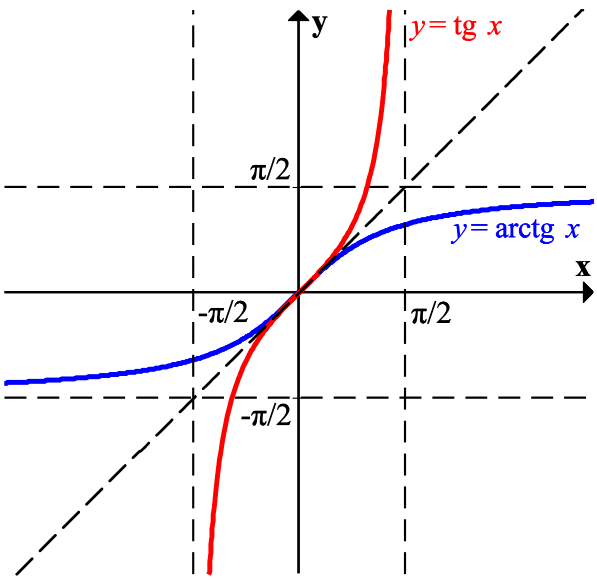
Obr. 3.6.10: Graf funkce $\boldsymbol{y = \mathrm{arctg}\, x}$

<u>Vlastnosti funkce f: $y = \mathrm{arctg}\, x$</u>

Definičním oborem funkce je D(f) = $(-\infty; +\infty)$ a oborem hodnot je H(f) = $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Funkce je omezená, lichá, není periodická a je rostoucí na celém svém definičním oboru.

<u>Tabulka hodnot funkce arkustangens</u>

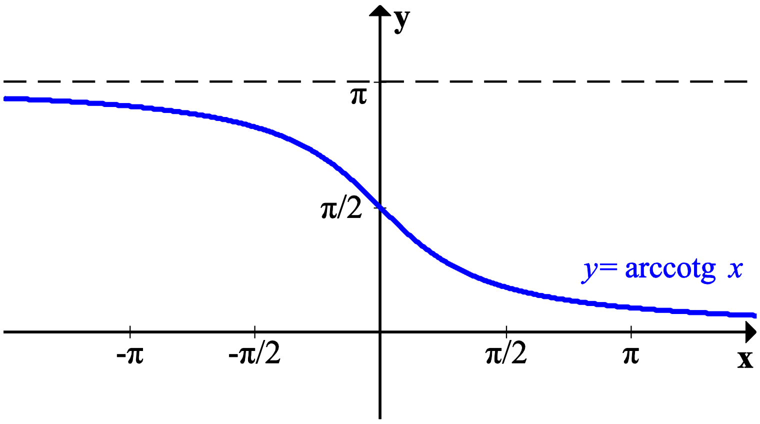
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
arctg x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



Obr. 3.6.11: Graf funkce $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$ a $\boldsymbol{y = \mathrm{arctg}\, x}$

Funkce arkus kotangens

Funkce f: $y = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0;\ \pi)$ je prostá. Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se nazývá arkus kotangens. D(f^{-1}) = H(f) = $(-\infty; +\infty)$. Funkční předpis funkce arkus kotangens zapisujeme f^{-1}: $y = \operatorname{arccotg} x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.



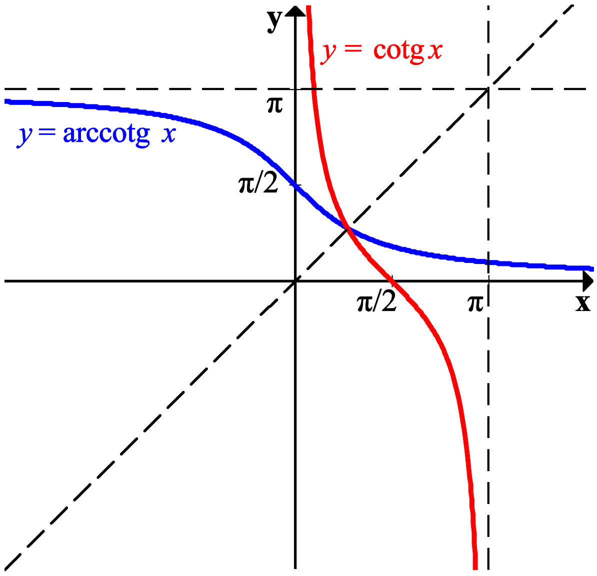
Obr. 3.6.12: Graf funkce $\boldsymbol{y = \operatorname{arccotg} x}$

Vlastnosti funkce f: $y = \operatorname{arccotg} x$

Definičním oborem funkce je D(f) = $(-\infty; +\infty)$ a oborem hodnot je H(f) = $(0;\ \pi)$. Funkce je omezená, není ani sudá ani lichá, není periodická a je klesající na celém definičním oboru.

Tabulka hodnot funkce arkus kotangens

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{arccotg} x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



Obr. 3.6.13: Graf funkce $\boldsymbol{y = \mathrm{cotg}\, x}$ a $\boldsymbol{y = \mathrm{arccotg}\, x}$

Pro všechna $x \in (-\infty; +\infty)$ platí $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$.

4 Praktická část

4.1 Vyšetřování průběhu funkce

V této podkapitole praktické části se budeme věnovat vyšetřování průběhu funkce, tzn. získáváním jistého souhrnu informací o vlastnostech funkce, které nám následně umožní správně sestrojit graf funkce.

1) Určení maximálního definičního oboru

   Definiční obor určujeme pomocí těchto základních pravidel:

   a) jmenovatel zlomku musí být nenulový
   b) výraz pod odmocninou se sudým odmocnitelem musí být nezáporný
   c) argument logaritmu musí být kladný
   d) argument funkce $\operatorname{tg} x$ musí být různý od lichých násobků $\frac{\pi}{2}$
   e) argument funkce $\operatorname{cotg} x$ musí být různý od celých násobků čísla π
   f) argument funkcí $\arcsin x$ a $\arccos x$ musí být z intervalu $\langle -1; 1\rangle$

2) Určení sudosti a lichosti, popř. periodičnosti funkce

   Při určování sudosti, lichosti a periodičnosti funkce prakticky užíváme definice 2.5.1, 2.5.2 a 2.6.1. Zjištění skutečnosti, že je funkce sudá, lichá nebo periodická má zásadní význam pro následné výpočty a výsledné zakreslování grafu (symetrie grafů).

3) Zjištění průsečíků grafu s osou x a y

   Průsečík s osou x zjistíme tak, že do funkčního předpisu dosadíme za $y = 0$ a vyřešíme rovnici. Obdobně průsečík s osou y zjistíme tak, že do funkčního předpisu dosadíme za $x = 0$ a vyřešíme rovnici.

4) Určení monotonie

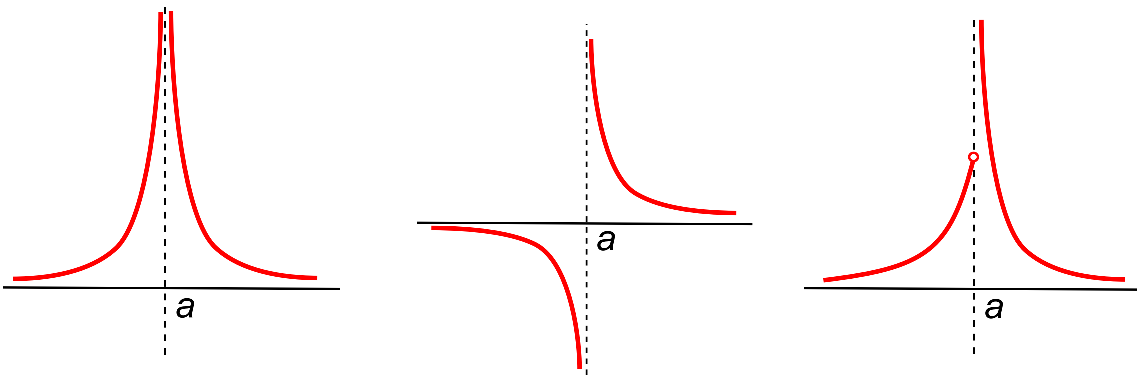
   Monotonnost funkce určujeme pomocí první derivace, kterou položíme rovnu nule. Pro stanovení znamének můžeme použít tabulku – znaménkový diagram (angl. sign chart). Pokud je první derivace záporná, je funkce klesající, je-li kladná, je funkce rostoucí. Z diagramu taktéž určíme body, ve kterých nastává minimum či maximum a dopočítáme y-ové souřadnice extrémů.

5) Určení konvexnosti a konkávnosti

   Konvexnost či konkávnost určujeme pomocí druhé derivace, kterou položíme rovnu nule. Tak jako u určování monotonie použijeme pro určení znaménka druhé derivace znaménkový diagram. Je-li druhá derivace záporná, je funkce na daném intervalu konkávní.

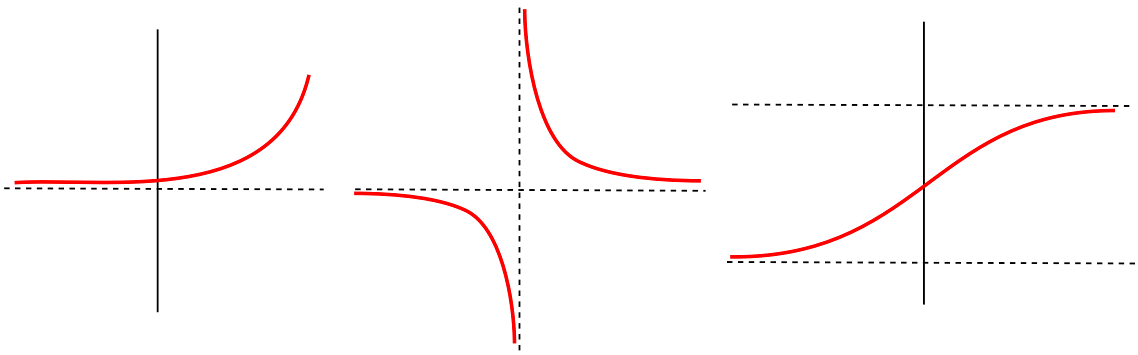
Jestliže je druhá derivace kladná, je funkce na daném intervalu konvexní. Nakonec určíme inflexní body, tedy body, ve kterých přechází konvexní funkce v konkávní a naopak a dopočítáme y-ové souřadnice inflexních bodů (dosazením do funkčního předpisu funkce).

6) Zjištění existence asymptot grafu funkce
   a) Svislá asymptota (tj. asymptota bez směrnice)
      Svislé asymptoty s rovnicí $x = a$ hledáme v bodech, které nejsou v definičním oboru funkce. Funkce má v bodě a svislou asymptotu, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce v bodě a nevlastní.



Obr. 4.1.1 : Příklady svislých asymptot.

   b) Vodorovná asymptota (asymptota s nulovou směrnicí)
      Vodorovnou asymptotu má smysl hledat, je-li alespoň jeden nevlastní bod $+\infty$ nebo $-\infty$ v definičním oboru. Asymptota existuje, pokud existuje vlastní limita v alespoň jednom z nevlastních bodů.



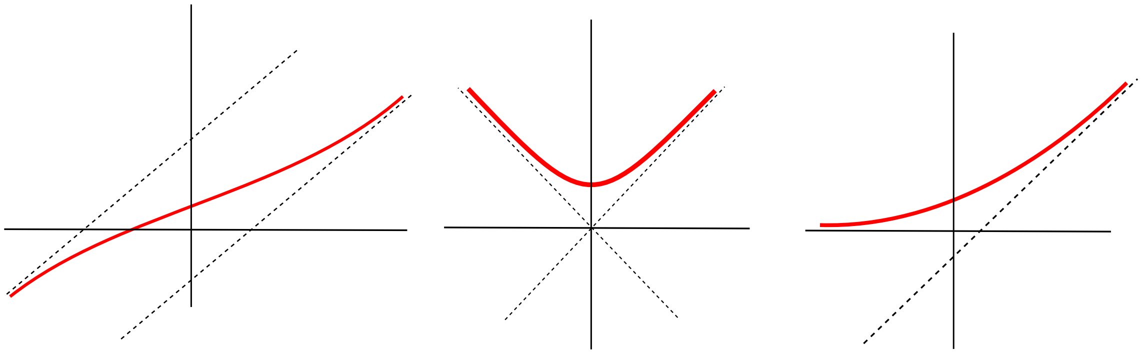
Obr. 4.1.2 : Příklady vodorovných asymptot.

c) Šikmá asymptota (asymptota s nenulovou směrnicí) $y = kx + q$

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - k \cdot x$

Šikmá asymptota existuje, jsou-li obě limity vlastní.



Obr. 4.1.3 : Příklady šikmých asymptot.

7) Sestrojení grafu funkce

S využitím výsledků z 1. – 6. kroku sestrojíme následně graf funkce. Všechny zjištěné informace dávají dohromady pomyslnou skládanku, v níž všechny výsledky musí do sebe navzájem zapadat a neodporovat si.

Praktická ukázka užití předchozího postupu při vyšetřování průběhů funkcí je předvedena na následujících stránkách na několika podrobně řešených příkladech.

Příklad 4.1.1

Určete průběh funkce f: $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$

řešení:

a) Definiční obor $\mathscr{D}(f)$:

$x^2 + 2x + 2 > 0$

$D < 0$ diskriminant kvadratického trojčlenu je nezáporný, tzn. neexistují nulové body. Výraz $x^2 + 2x + 2$ bude vždy kladný.

$D(f) = \mathbb{R}$.

b) Sudost, lichost:

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$$
$$f(-x) = \ln((-x)^2 - 2x + 2)$$
$$-f(x) = -\ln(x^2 + 2x + 2)$$

Funkce není sudá ani lichá.

c) Průsečíky grafu se souřadnými osami:

$P_x[x; 0]$:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 0 &= \ln(x^2 + 2x + 2) \\ \ln 1 &= \ln(x^2 + 2x + 2) \\ 1 &= x^2 + 2x + 2 \\ 0 &= x^2 + 2x + 1 \\ 0 &= (x+1)^2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$P_x[-1; 0]$

$P_y[0; y]$:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \ln 2 \end{aligned}$$

$P_y[0; \ln 2]$

d) Monotonnost:

$$f\colon\ y = \ln(x^2 + 2x + 2)$$
$$f'\colon\ y' = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$$
$$f' = 0\colon\ 0 = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$$
$$0 = 2(x+1)$$
$$x = -1$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; \infty)$
$2(x+1)$	$-$	$+$
$x^2 + 2x + 2$	$+$	$+$
f':	$\ominus$	$\oplus$
f:	$\searrow$	$\nearrow$

Bod $M[-1; 0]$ je absolutní minimum

e) Konvexnost, konkávnost:

$$f'\colon\ y' = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$$

$$f''\colon\ y'' = \frac{2(x^2+2x+2) - (2x+2)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+4-4x^2-8x-4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x(x-2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$
\begin{aligned}
f'' = 0\colon\ 0 &= -2x(x+2)\\
x_1 &= 0\\
x_2 &= -2
\end{aligned}
$$

	$(-\infty;-2)$	$(-2;0)$	$(0;+\infty)$
$-2x(x+2)$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+2x+2)^2$	$+$	$+$	$+$
f'':	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
f:	$\frown$	$\smile$	$\frown$

Inflexní body jsou $I_1 = [-2; \ln 2]$, $I_2 = [0, \ln 2]$. Funkce je konkávní na intervalech $(-\infty; -2)$ a $(0; +\infty)$, na intervalu $(-2; 0)$ je konvexní.

f) Asymptoty:

- Svislá asymptota grafu funkce neexistuje.
- Vodorovná asymptota:

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2 + 2x + 2\right) = +\infty$

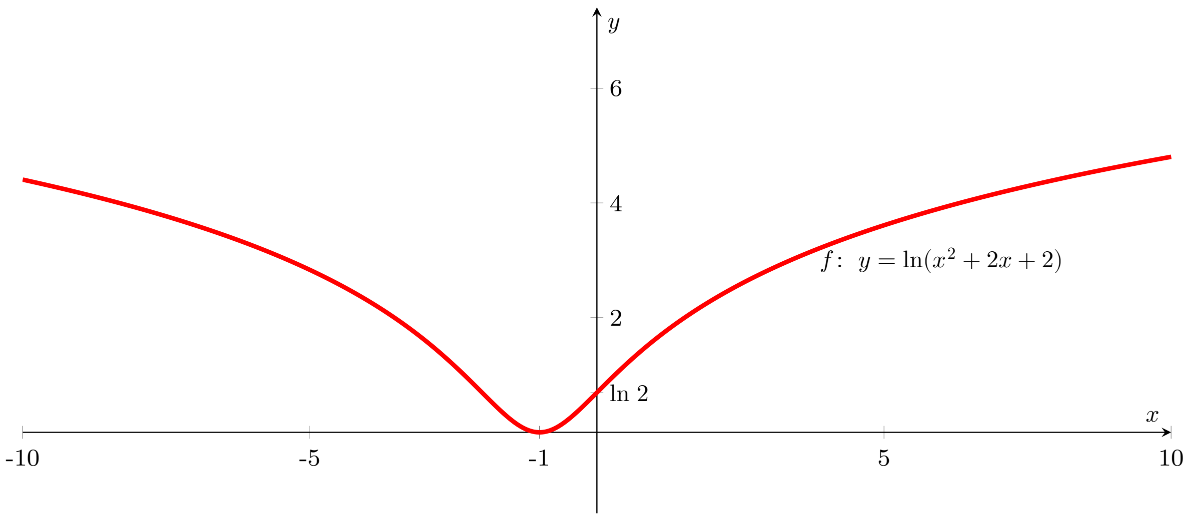
  Graf funkce nemá vodorovnou asymptotu.
- Šikmá asymptota: $y = k \cdot x + q$

  $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\left(x^2+2x+2\right)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2x+2} = 0$

  $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2 + 2x + 2\right) - 0 \cdot x = +\infty$

  Šikmá asymptota grafu funkce neexistuje.

g) Graf funkce:



Obr. 4.1.4: Graf funkce $f\colon\ y = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

Příklad 4.1.2

Určete průběh funkce f: $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x}$

řešení:

a) Definiční obor $\mathscr{D}(f)$:

$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}.$

b) Sudost, lichost:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x}$$

$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{-x}{2-x}$$

$$-f(x) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{2+x}$$

Funkce není sudá ani lichá.

c) Průsečíky grafu se souřadnými osami:

$P_x[x;0]$:

$$y = 0$$

$$0 = \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x}$$

$$0 = \frac{x}{2+x}$$

$$x = 0$$

$P_x[0;0] = P_y$

d) Monotonnost:

$$f\colon\ y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x}$$

$$f'\colon\ y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2+x}\right)^2} \cdot \frac{2+x-x}{(2+x)^2} = \frac{2}{\frac{(2+x)^2+x^2}{(2+x)^2} \cdot (2+x)^2} = \frac{2}{(2+x)^2+x^2}$$

$$f' = 0\colon\ 0 = \frac{2}{(2+x)^2+x^2}$$

$f' \neq 0$

	$(-\infty; -2)$	$(-2; \infty)$
$(2+x)^2+x^2$	$+$	$+$
f':	$\oplus$	$\oplus$
f:	$\nearrow$	$\nearrow$

Funkce je rostoucí a nenabývá maxima ani minima.

e) Konvexnost, konkávnost:

$$f'\colon\ y' = \frac{2}{(2+x)^2 + x^2} = \frac{2}{4+4x+x^2+x^2} = \frac{2}{2(x^2+2x+2)} = \left(x^2+2x+2\right)^{-1}$$

$$f''\colon\ y'' = -\left(x^2+2x+2\right)^{-2} \cdot (2x+2) = -\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$$

$$f''=0\colon\ 0 = -\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$$

$$0 = -2x-2$$

$$x = -1$$

$-2x-2$	$+$		$+$		$-$
$\left(x^2+2x+2\right)^2$	$+$		$+$		$+$
f'':	$\oplus$		$\oplus$		$\ominus$
f:	$\smile$		$\smile$		$\frown$
		-2		-1	

Inflexní bod:

$I[-1; y]$: $y = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Inflexní bod $I[-1; -\frac{\pi}{4}]$. Funkce je konvexní na intervalech $(-\infty; -2)$ a $(-2; -1\rangle$, na intervalu $\langle -1; +\infty)$ je konkávní.

f) Asymptoty:

- Svislá asymptota:

  $\lim\limits_{x\to -2^{\mp}} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} = \pm\frac{\pi}{2}$

  Svislá asymptota grafu funkce neexistuje.

- Vodorovná asymptota:

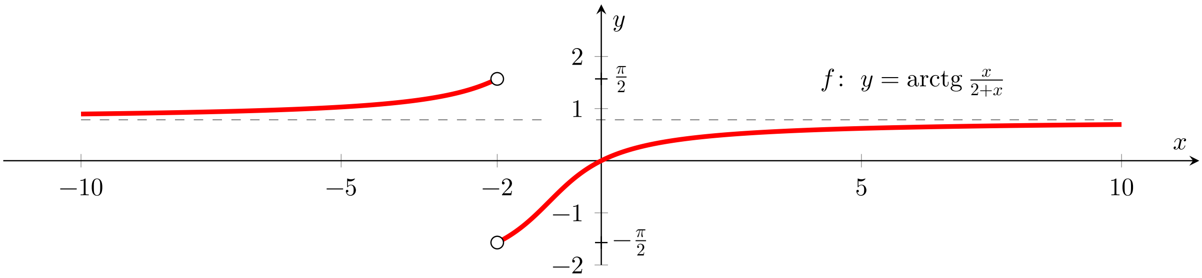
  $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x} = \frac{\pi}{4}$

  Graf má vodorovnou asymptotu a: $y = \frac{\pi}{4}$.

- Šikmá asymptota:

  Šikmá asymptota nemůže existovat, jestliže má funkce v obou nevlastních bodech $\pm\infty$ vodorovnou asymptotu. Asymptota grafu funkce s nenulovou směrnicí tedy neexistuje.

g) Graf funkce:



Obr. 4.1.5 : Graf funkce $f\colon\ y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2+x}$.

Příklad 4.1.3

Určete průběh funkce f: $y = \frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}$

řešení:

a) Definiční obor $\mathcal{D}(f)$:

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}.$

b) Sudost, lichost:

Funkce není sudá ani lichá.

c) Průsečíky grafu se souřadnými osami:

$P_x[x; 0]$:

$$y = 0$$

$$0 = \frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}$$

$$x = 0$$

$P_x[0; 0] = P_y$

d) Monotonnost:

$$f\colon\ y = \frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}$$

$$f'\colon\ y' = \frac{3x^2\cdot\left[2\,(x+1)^2\right] - x^3\cdot 4(x+1)}{4\,(x+1)^4} = \frac{2x^2\,(x+1)\,[3(x+1)-2x]}{4\,(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2\,(x+1)^3}$$

$$f' = 0\colon\ 0 = \frac{x^2(x+3)}{2\,(x+1)^3}$$

$$0 = x^2(x+3)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
x^2	+	+	+	+
$x+3$	−	+	+	+
$(x+1)^3$	−	−	+	+
f':	⊕	⊖	⊕	⊕
f:	↗	↘	↗	↗

$-3 \qquad -1 \qquad 0$

$M[-3; y]$: $y = \frac{(-3)^3}{8} = -\frac{27}{8}$. V bodě $M[-3; -\frac{27}{8}]$ nastává maximum.

Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3\rangle$ a $(-1, +\infty)$. Na intervalu $\langle -3, -1)$ je funkce klesající. V bodě $M[-3; -\frac{27}{8}]$ má funkce lokální maximum.

e) Konvexnost, konkávnost:

f': $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2\,(x+1)^3}$

f'': $y'' = \dfrac{\left[2x(x+3)+x^2\right]\cdot 2\,(x+1)^3 - x^2(x+3)\cdot 6\,(x+1)^2}{4\,(x+1)^6} =$

$= \dfrac{3x(x+2)\cdot 2\,(x+1)^3 - 6x^2\,(x+1)^2\cdot(x+3)}{4\,(x+1)^6} =$

$= \dfrac{6x\,(x+1)^2\cdot\left[(x+2)(x+1) - x(x+3)\right]}{4\,(x+1)^6} = \dfrac{3x(x^2+3x+2-x^2-3x)}{2\,(x+1)^4} = \dfrac{6x}{2\,(x+1)^4} = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$

$f'' = 0$: $0 = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$

$0 = 3x$

$x = 0$

	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; +\infty)$
$3x$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)^4$	$+$	$+$	$+$
f'':	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
f:	$\frown$	$\frown$	$\smile$

Inflexní bod:

Inflexe nastává v bodě I$[0;0]$, konvexní je funkce na intervalu $\langle 0; +\infty)$. Na intervalech $(-\infty; -1)$ a $(-1; 0\rangle$ je funkce konkávní.

f) Asymptoty:

- Svislá asymptota:

  $\lim\limits_{x\to -1^{\mp}} \frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2} = -\infty$

  Svislá asymptota grafu funkce: $a_1 : x = -1$

- Vodorovná asymptota:

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2} = \pm\infty$

  Vodorovná asymptota grafu neexistuje.

- Šikmá asymptota (asymptota s nenulovou směrnicí):

  a: $y = k\cdot x + q$

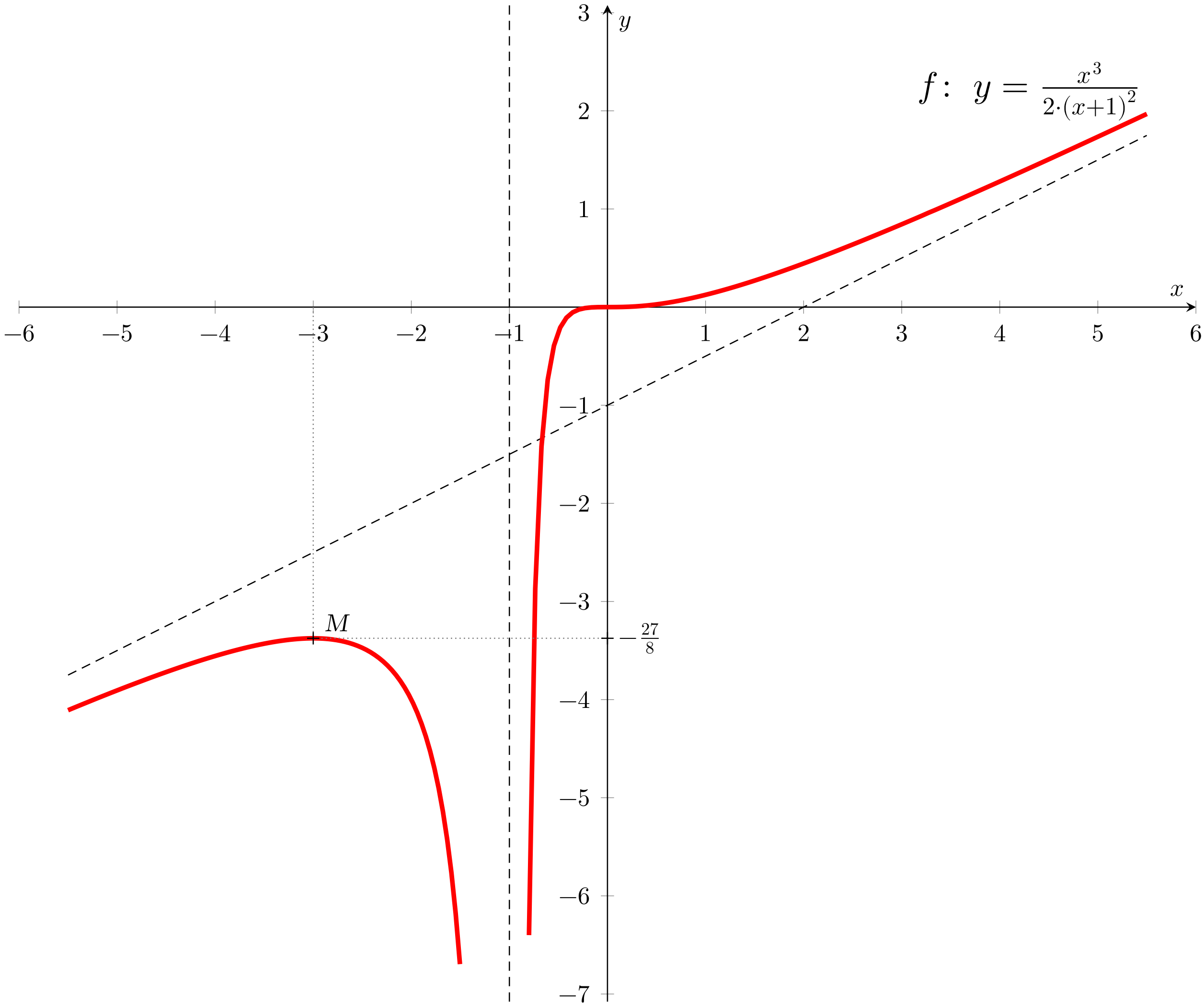
  $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}}{x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$

  $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot x = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - x\cdot(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2} =$

  $= \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-4x-1}{2(x+1)} = -1$

  Šikmá asymptota grafu funkce: a_2: $y = \frac{1}{2}x - 1$

g) Graf funkce:



Obr. 4.1.6 : Graf funkce $f\colon\ y = \frac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}$.

Příklad 4.1.4

Určete průběh funkce f: $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

řešení:

a) Definiční obor $\mathscr{D}(f)$:

$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Sudost, lichost:

Funkce není ani sudá ani lichá, protože definiční obor není symetrický.

c) Průsečíky grafu se souřadnými osami:

$P_x[x;0]$: $\quad y = 0$

$$0 = \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$0 = x^2 + 1$$

$$-1 = x^2$$

$P_y[0;y]$: $\quad x = 0$

$$y = -1$$

$P_y[0;1]$

Průsečík s osou x neexistuje.

d) Monotonnost:

$$f: \quad y = \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$f': \quad y' = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$f' = 0: \quad 0 = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$0 = x^2 - 2x - 1$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$x^2 - 2x - 1$	+	−	−	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+
f':	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
f:	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$1-\sqrt{2}$ $\qquad 1 \qquad$ $1+\sqrt{2}$

$$M[1-\sqrt{2}; y_1]: \quad y_1 = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{-\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{-2} = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$N[1+\sqrt{2}; y_2]: \quad y_2 = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+1}{\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+4}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

V bodě $M[1-\sqrt{2}; 2-2\sqrt{2}]$ má funkce lokální maximum, v bodě $N[1+\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2}]$ nastává lokální minimum.

Funkce je rostoucí na intervalech $\left(-\infty; 1-\sqrt{2}\right\rangle$ a $\left\langle 1+\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Na intervalech $\left\langle 1-\sqrt{2}; 1\right)$ a $\left(1; 1+\sqrt{2}\right\rangle$ je funkce klesající.

e) Konvexnost, konkávnost:

f': $\quad y' = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

f'': $\quad y'' = \dfrac{(2x-2)\,(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} =$

$$= \frac{2(x-1)[(x-1)(x-1)-(x^2-2x-1)]}{(x-1)^3} = \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$f''=0$: $\quad 0 \neq \dfrac{4}{(x-1)^3}$

$(x-1)^3$	$-$	$+$
f'':	$\ominus$	$\oplus$
f:	$\frown$	$\smile$
	1	

Funkce je konkávní na intervalu $(-\infty; 1)$, na intervalu $(1; +\infty)$ je funkce konvexní.

Inflexní body funkce nemá.

f) Asymptoty:

- Svislá asymptota:

  $\lim\limits_{x\to 1^{\mp}} \frac{x^2+1}{x-1} = \mp\infty$

  Svislá asymptota grafu funkce: $a_1 : x = 1$

- Vodorovná asymptota:

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \pm\infty$

  Vodorovná asymptota grafu neexistuje.

- Šikmá asymptota (asymptota s nenulovou směrnicí):

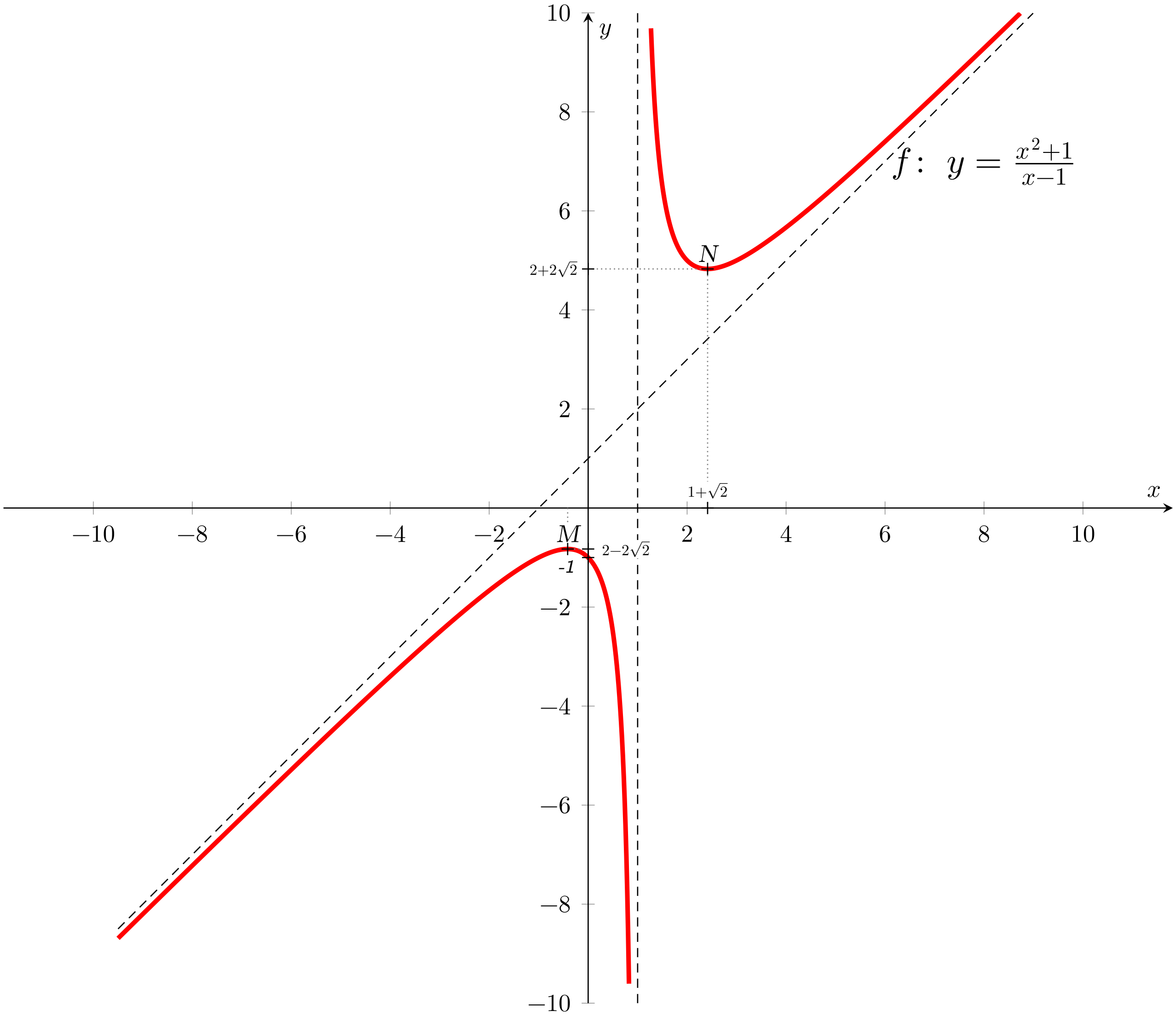
  a: $y = k \cdot x + q$

  $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x-1} \cdot \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x-1} = 1$

  $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - 1\cdot x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

  Šikmá asymptota grafu funkce: a_2: $y = x + 1$

g) Graf funkce:



Obr. 4.1.7 : Graf funkce $f\colon\; y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Příklad 4.1.5

Určete průběh funkce f: $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$

řešení:

a) Definiční obor $\mathscr{D}(f)$:

$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}.$

b) Sudost, lichost:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$$

$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\cdot(-x)}{1-(-x)^2} = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$$

$$-f(x) = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Funkce f: $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$ je lichá.

c) Průsečíky grafu se souřadnými osami:

$P_x[x; 0]$:

$$y = 0$$

$$0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$$

$$x = 0$$

$P_x[0; 0] = P_y$

d) Monotonnost:

$$f\colon \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$$

$$f'\colon \quad y' = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot(1-x^2) - \sqrt{3}\cdot x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1-x^2)^2+3x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}x^2}{(1-x^2)^2+3x^2} = \frac{\sqrt{3}(1+x^2)}{(1-x^2)^2+3x^2}$$

$$f' = 0\colon \quad 0 = \frac{\sqrt{3}(1+x^2)}{(1-x^2)^2+3x^2}$$

$$0 \neq \frac{\sqrt{3}(1+x^2)}{(1-x^2)^2+3x^2}$$

	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;+\infty)$
$(1+x^2)$	+	+	+
$(1-x^2)^2+3x^2$	+	+	+
f':	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
f:	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Funkce je na všech podintervalech $(\infty;-1)$, $(-1;1)$ i $(1;+\infty)$ rostoucí a nenabývá lokálního maxima ani lokálního minima.

e) Konvexnost, konkávnost:

f': $y' = \frac{\sqrt{3}(1+x^2)}{(1-x^2)^2+3x^2}$

$$f'':\quad y'' = \frac{2\sqrt{3}x\cdot\left((1-x^2)^2+3x^2\right)-\left(\sqrt{3}(1+x^2)\right)\cdot(2\cdot(1-x^2)(-2x)+6x)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}x\cdot(1-2x^2+x^4+3x^2)-\left(\sqrt{3}\cdot(1+x^2)\right)\cdot(-4x+4x^3+6x)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}x\cdot(x^4+x^2+1)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}x^2\right)(4x^3+2x)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}x(2x^4+2x^2+2)-\sqrt{3}x\cdot(1+x^2)\cdot(4x^2+2)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2} = \frac{\sqrt{3}x(2x^4+2x^2+2-4x^2-2-4x^4-2x^2)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2} = \frac{-2\sqrt{3}x(x^4+2x^2)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{3}x^3(x^2+2)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2}$$

$$f''=0:\quad 0 = \frac{-2\sqrt{3}x^3\,(x^2+2)}{\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2}$$

$$0 = -2\sqrt{3}x^3\left(x^2+2\right)$$

$$x = 0$$

	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
$-2\sqrt{3}x^3$	+	+	−	−
x^2+2	+	+	+	+
$\left((1-x^2)^2+3x^2\right)^2$	+	+	+	+
f'':	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
f:	$\smile$	$\smile$	$\frown$	$\frown$

Inflexní bod:

$I[-1;y]$: $y = \operatorname{arctg}(0) = 0$

Inflexní bod $I[-1;0]$. Funkce je konvexní na intervalech $(-\infty;-1)$ a $(-1;0\rangle$, na intervalech $\langle 0;1)$ a $(1;+\infty)$ je konkávní.

f) Asymptoty:

- Svislá asymptota:

  $\lim\limits_{x\to -1^{\mp}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2} = \pm\frac{\pi}{2}$

  $\lim\limits_{x\to 1^{\mp}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2} = \pm\frac{\pi}{2}$

  Svislá asymptota grafu funkce neexistuje.

- Vodorovná asymptota:

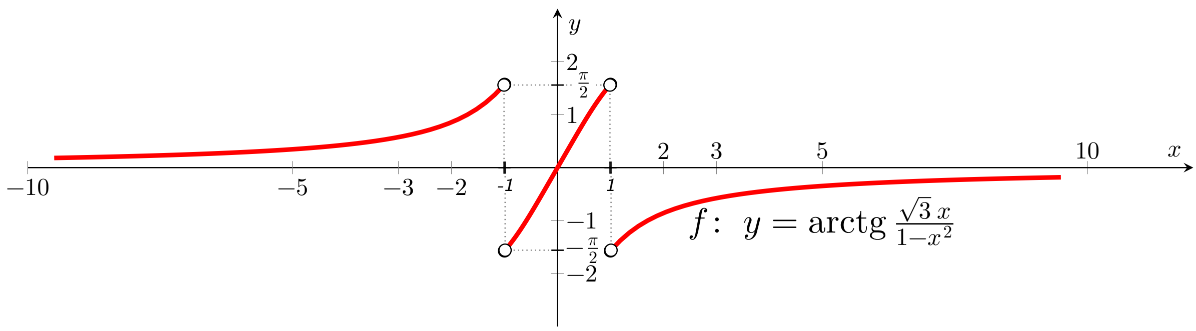
  $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2} = 0$

  Graf má vodorovnou asymptotu a: $y = 0$.

- Šikmá asymptota:

  Šikmá asymptota nemůže existovat, neboť existuje vodorovná asymptota.

g) Graf funkce:



Obr. 4.1.8 : Graf funkce f: $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$.

4.2 Využití funkcí při řešení praktických úloh

Příklad 4.2.1

Zákazník chce zakoupit větší množství určitého druhu zboží, maximálně však 70 kg. Má na výběr dvě možnosti:

a) Zboží zakoupí v obchodě u domu kde bydlí za cenu 27,50 Kč za 1 kg zboží.

b) Zboží zajede zakoupit přímo k výrobci, kde sice 1 kg stojí jen 16,90 Kč, ale zpáteční cesta autem ho přijde na 350,- Kč.

Při jakém množství se zákazníkovi vyplatí zajet nakoupit k výrobci?

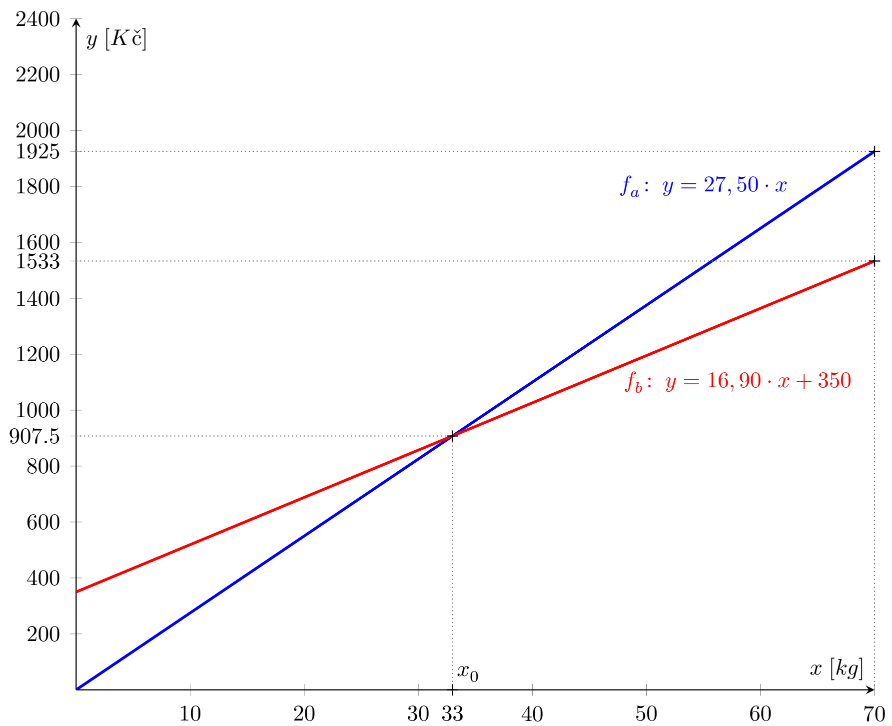
řešení:

Označíme-li x - množství zboží, y - celková cena za zboží, můžeme sestavit funkční závislosti pro obě možnosti takto:

f_a: $y = 27,50 \cdot x$, $x \in (0; 70\rangle$

f_b: $y = 16,90 \cdot x + 350$, $x \in (0; 70\rangle$

Sestrojíme grafy funkcí f_a a f_b:



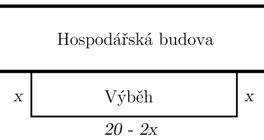
Obr. 4.2.1 : Grafické řešení slovní úlohy.

Grafy se protnou v bodě $x_0 \doteq 33$.

Pro každé $x \in (x_0; 70\rangle$ platí $f_b(x) < f_a(x)$, tedy $16,9 \cdot x + 350 < 27,5 \cdot x$. Pro zákazníka je tedy výhodnější zajet k výrobci, pokud chce nakoupit více než 33 kg zboží.

Příklad 4.2.2

Hospodář chce postavit pro kuřata co nejjednodušší výběh, přitom jedna stěna oplocení bude tvořena částí hospodářské budovy (viz Obr. 1.5.2.). Určete, jaké rozměry má mít výběh, aby jeho obsah byl co největší, pokud je k dispozici pouze 20 metrů pletiva.



Obr. 4.2.2 : Nákres výběhu pro slepice.

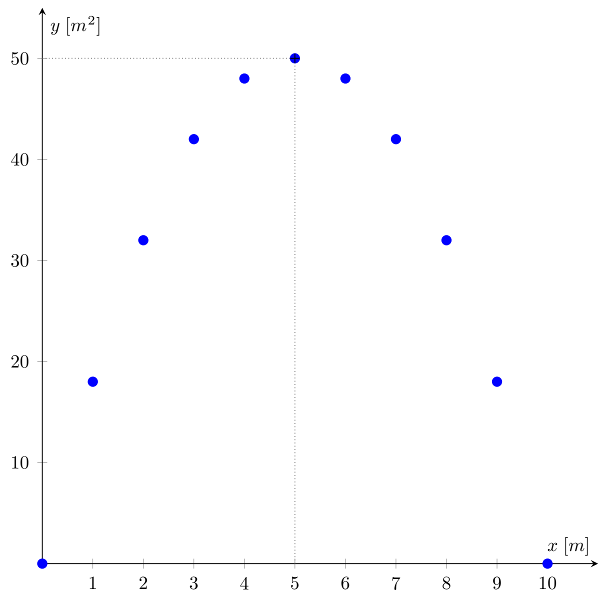
řešení:

Z obrázku je patrné, že plot má mít tvar obdélníka (nebo čtverce). Mají-li „boční" strany plotu délku x, pak třetí strana výběhu bude mít $(20 - 2x)$ viz Obr. ??. Obsah obdélníku je $(20 - 2x) \cdot x$, kde $x \in (0; 10)$.

Vypočítáme hodnotu výrazu $(20 - 2x) \cdot x$ pro $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$:

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
$(20 - 2x) \cdot x$	*18*	*32*	*42*	*48*	*50*	*48*	*42*	*32*	*18*

Z tabulky je patrné, že hodnoty výrazu $(20 - 2x) \cdot x$ kulminují pro $x = 5$.



Obr. 4.2.3 : Grafické znázornění tabulky.

Ověřme, platnost naší hypotézy, že maximum funkce nabývá pro x=5. Výraz určuje kvadratickou funkci (se záporným koeficientem kvadratického členu), která nabývá maxima ve vrcholu paraboly. Vypočítáme souřadnice vrcholu paraboly:

$(20-2x)\cdot x = -2x^2+20x = -2(x^2-10) = -2\left[(x-5)^2-25\right] = -2(x-5)^2+50$

Vrcholem paraboly je bod $V\,[5;50]$. Z orientace paraboly plyne, že pro $x=5$ nabývá funkce maximální hodnoty, a tudíž bude mít výběh pro tuto hodnotu opravdu největší plochu. Rozměry největšího možného výběhu jsou tedy 5×10 metrů.

Příklad 4.2.3

Vodní nádrž by se naplnila za 12 minut, pokud by se napouštěla pouze prvním přívodem. Napouštěla-li by se pouze druhým přívodem, trvalo by to 24 minut. Kolik minut by se nádrž napouštěla, jestliže první tři minuty by do ní přitékala voda pouze prvním přívodem a zbytek času by byl puštěn i druhý přívod?

řešení:

napouštění pouze prvním přívodem .... 12 minut

napouštění pouze druhým přívodem .... 24 minut

doba společného napouštění .... x minut

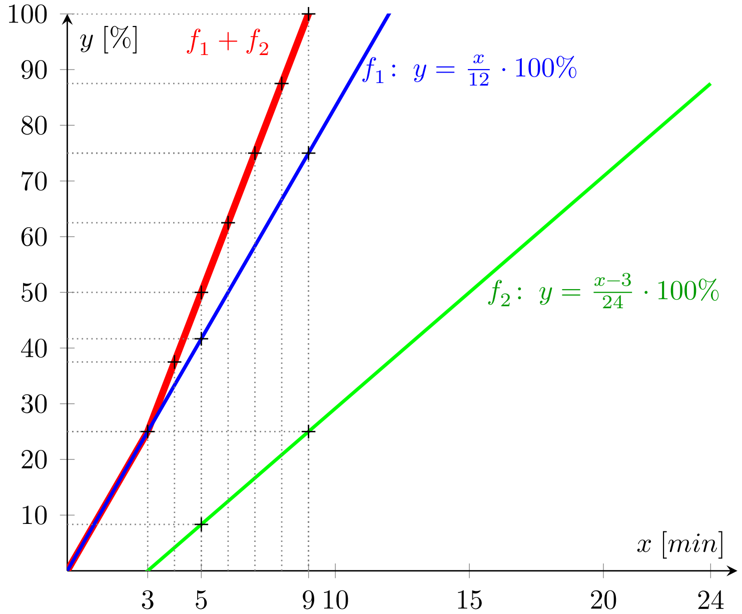
$\frac{x}{12}+\frac{x-3}{24}=1$

$2x+x-3=24$

$3x=27$

$x=9$

Daným způsobem se nádrž napustí za 9 minut.



Obr. 4.2.4 : Grafické řešení slovní úlohy.

Příklad 4.2.4

Čtyři dlaždiči vydláždí chodník za 20 hodin. Určete jak závisí doba, potřebná k vydláždění chodníku na počtu pracovníků, kteří se podílejí na této práci. Vypočítejte dobu potřebnou k vydláždění chodníku deseti dlaždiči. Načrtněte graf funkční závislosti.

řešení:

Slovní úloha řešená nepřímou úměrností (čím více pracovníků, tím kratší doba práce).

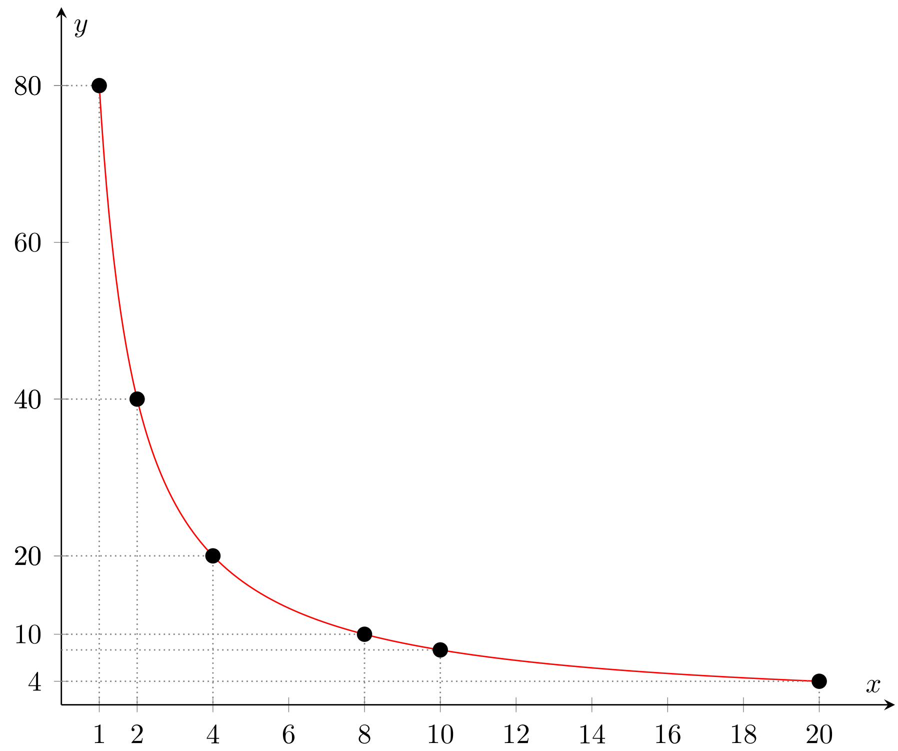
Označme:

x .... počet dlaždičů

y .... doba práce (hod.)

x	*1*	*2*	*4*	*8*	*10*	*20*
y	*80*	*40*	*20*	*10*	*8*	*4*

$f\colon\ y = \frac{80}{x}$



Obr. 4.2.5 : Grafické znázornění řešení slovní úlohy.

Deset dlaždičů vydláždí chodník za 8 hodin.

Příklad 4.2.5

Intenzita záření rentgenových paprsků I_0 se sníží na polovinu při průchodu vrstvou olova o tloušťce 13,5 mm. Jak se změní intenzita rentgenového záření po průchodu olověnou deskou tlustou 60 mm?

řešení:

po průchodu 0 mm tlustou deskou . . . . I_0

po průchodu 13,5 mm . . . . $I_0 \cdot \frac{1}{2}$

po průchodu 2·13,5 mm . . . . $I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

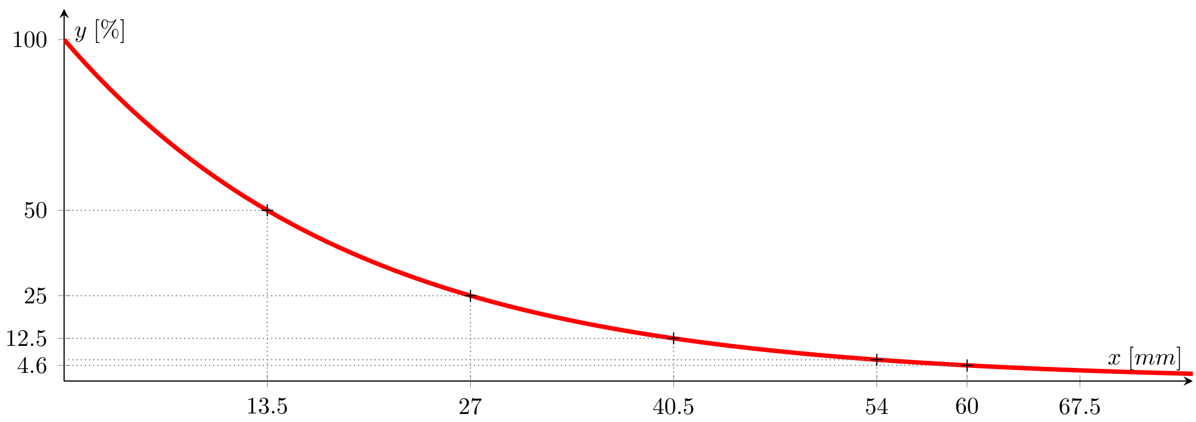
$\vdots$

po průchodu x mm . . . . $I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{13,5}}$

po průchodu x=60mm $\Longrightarrow I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{13,5}} \doteq 0,046$

Po průchodu rentgenového záření olověnou vrstvou o tloušťce 60mm se intenzita záření sníží na zhruba 4,6% původní hodnoty I_0.

Útlum intenzity záření má charakter exponenciální funkce.



Obr. 4.2.6 : Útlum intenzity radioaktivního záření.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit ucelený soubor informací, které se týkají elementárních funkcí, jejich vlastností a grafů. Ačkoliv si to ani neuvědomujeme, funkce nás provází v průběhu celého vzdělávacího procesu. S nejjednoduššími funkcemi se setkáváme již na základní škole, na střední škole se pak studenti seznámí s elementárními funkcemi podrobně. Na některých středních školách, ale zejména ve vysokoškolské matematice se v rámci matematické analýzy setkáváme s podrobným vyšetřováním průběhu funkcí. Vzhledem k tomu, že vyšetřování průběhů funkcí bylo mojí oblíbenou látkou, rozhodla jsem se o toto téma rozšířit praktickou část bakalářské práce. Dále jsem do praktické části zařadila několik příkladů, které představují využití funkcí při řešení praktických slovních úloh pro základní i střední školu. Mojí snahou bylo zpracovat bakalářskou práci takovým způsobem, aby mohla sloužit jako zdroj základních informací a studijní materiál pro středoškolské i vysokoškolské studenty.

Při psaní bakalářské práce jsem se seznámila s několika novými grafickými programy. Na vykreslení grafů jsem využila program Graph (viz `https://www.padowan.dk/`). Korekce a doplnění grafů, vyexportovaných do formátu SVG, jsem prováděla pomocí programu Inkscape (viz `https://inkscape.org/`). Nové znalosti a zkušenosti s těmito programy jistě využiji i při dalším studiu, ale také v praxi.

Díky bakalářské práci jsem se také začala postupně seznamovat také s programem pro počítačovou sazbu ConTeXt. Praktická část je tak pro ukázku možností v ConTeXtu vysázena. Jelikož jsem se s tímto programem začala seznamovat teprve nedávno, neobešla jsem se bez pomoci a velmi četných konzultací.

Do budoucna bych ConTeXt ráda využila pro kompletní napsání diplomové práce. ConTeXt je, na rozdíl od MS Wordu, pro sazbu matematiky přímo určený.

Seznam obrázků

Seznam použité literatury a zdrojů

Seznam literatury

1. **Delventhal, Katka Maria, Kissner, Alfred a Kulick, Malte.** *Kompendium matematiky*. Praha: Euromedia Group k.s., 2013. str. 720. ISBN: 9788024239460.

2. **Došlá, Zuzana a Kuben, Jaromír**. *Diferenciální počet jedné proměnné*. Brno : Masarkova univerzita, 2004. str. 209. ISBN:8021031212.

3. **Klaška, Jiří**. *Cvičení z matematické analýzy* I. Brno : Vysoké učení technické v Brně, 2000. str. 134. ISBN: 802141636X.

4. **Kopáček, Jiří**. *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*. Praha : Matfyzpress, 2004. str. 187. ISBN: 8086732258.

5. **Kuben, Jaromír a Šarmanová, Petra.** *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava : VŠB - Technická univerzita, 2006. str. 345. ISBN 80-248-1192-8.

6. **Mádrová, Vladimíra a Marek, Jaroslav**. *Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I*. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2004. str. 321. ISBN:8024409585.

7. **Mošová, Vratislava**. *Matematická analýza* I. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2002. str. 126. ISBN:8024404648.

8. **Odvárko, Oldřich**. *Matematika pro gymnázia*. Funkce. Praha : Prometheus, 2008. str. 168. ISBN: 9788071963578.

9. **Pelantová, Edita a Vondráčková, Jana**. *Matematická analýza 1*. Praha : České vysoké učeni technické v Praze, 2004. str. 122. ISBN: 8001030113.

10. **Petáková, Jindra**. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha : Prometheus, 1998. str. 303. ISBN: 80-7196-099-3.

11. **Polák, Josef**. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha : Prometheus, 1998. str. 608. ISBN:808584978X.

12. **Trávníček, Stanislav, Calábek, Pavel a Švrček, Jaroslav**. *Matematická analýza I (pro učitelské obory)*. Olomouc : Univerzita Palackého, 2014. ISBN: 9788024441177.

13. **Vošický, Zdeněk**. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod : Fragment, 2007. str. 196. ISBN:9788025301193.

Internetové zdroje

1. **Burda, Pavel, a další**. Matematika I. [Online] Technická univerzita Ostrava. http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/MI.html.

2. **Čepička, Jan, a další**. Herbář funkcí. [Online] 2011. http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/herbar_funkci.pdf.

3. **Fradkin, Larissa**. Elementary Functions and Complex Numbers Made Simple . [Online] 2013. http://www.soundmathematics.com/wp-content/uploads/2013/09/Elementary-Functions-and-Complex-Numbers-Made-Simple.pdf.

4. **Havrlant, Lukáš**. Matematika.cz. [Online] Vydavatelství Nová média. http://matematika.cz/.

5. **Kopáčková, Alena**. Czech Digital Mathematics Library. *Matematika v proměnách věků. II*. [Online] 2001. http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/402125/DejinyMat_16-2001-1_6.pdf.

6. **Krynický, Martin**. realisticky.cz. [Online] http://www.realisticky.cz/.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Jana Hajtmarová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, PhD.
Rok obhajoby:	2015

Název práce:	Zobrazení a elementární funkce v matematice
Název v angličtině:	Mapping and elementary functions in mathematic
Anotace práce:	Bakalářská práce se zabývá elementárními funkcemi, jejich vlastnostmi a grafy. Text práce je doplněn řešenými příklady, které mohou sloužit jako návod k řešení podobných typů úloh. Praktická část se zabývá vyšetřováním průběhu funkce a úlohami na využití funkcí při řešení praktických úloh pro základní i střední školu.
Klíčová slova:	Zobrazení, funkce, vlastnosti funkcí, grafy funkcí, funkce jedné proměnné, průběh funkce
Anotace v angličtině:	The bachelor thesis deals with basic functions, their properties and graphs. The text is enriched with solved exercises, which can be a guide to solve the similar types. The practical part looks into behavior investigation of the functions and using the functions to solve practical problems for primary and secondary school.
Klíčová slova v angličtině:	Mapping, elementary functions, properties of functions, function of a single variable, behavior of functions
Přílohy vázané v práci:	Nejsou
Rozsah práce:	80
Jazyk práce:	český jazyk