

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

VÝZNAM INTEGRÁLU CAUCHYHO TYPU
O PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ HUSTOTĚ VE VÝVOJI
KOMPLEXNÍ METODY HRANIČNÍCH PRVKŮ

(THE IMPORTANCE OF THE CAUCHY-TYPE INTEGRAL
HAVING A PIECEWISE LINEAR DENSITY IN THE
DEVELOPEMENT OF THE COMPLEX VARIABLE
BOUNDARY ELEMENT METHOD)



Vypracoval: Mgr. Jaroslav Drobek
Studijní program: P1103 – aplikovaná matematika
Studijní obor: aplikovaná matematika
Zaměření: teorie analytických funkcí a její aplikace
Školitel: doc. RNDr. Luděk Jokl, CSc.,
doc. Mgr. Karel Pastor, Ph. D.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a uvedl veškerý použitý materiál.

24. června 2011

Jaroslav Drobek

Anotace

T. V. Hromadka II a jeho spolupracovníci od poloviny 80-tých let vyvíjejí novou metodu umožňující přibližně řešit některé rovinné okrajové úlohy – KOMPLEXNÍ METODU HRANIČNÍCH PRVKŮ, zkráceně KMHP, viz [29, 31, 58] a další. Předložená disertační práce představuje příspěvek ke KMHP. Je zaměřena na rovinné Jordanovy oblasti mající po částech regulární hranice bez ostnů.

V prezentovaném vývoji KMHP se významně uplatňují výsledky z teorie INTEGRÁLU CAUCHYHO TYPU, zkráceně ICT, viz [15, 43, 46] a další. Některé z těchto výsledků jsou původní a představují témata autorových publikací. Vztahují se k hraničnímu chování ICT za specifických předpokladů o jeho hustotě. V případě lipschitzovské hustoty je odvozen vyčíslitelný odhad pro modul spojitosti hraničních hodnot ICT, včetně jeho algoritmické realizace demonstrované na úloze pro jednotkovou kružnici. Podobný výsledek vztahující na reálnou část ICT je odvozen v případě hustoty spojitě v Diniho smyslu. Dále je uvažována hustota spojitá v Diniho smyslu, jejíž modul spojitosti $\omega(\cdot)$ splňuje podmínku

$$\limsup_{s \downarrow 0} \omega(s) \ln \frac{1}{s} = 0.$$

Takovou hustotou je například každá funkce splňující na hranici Hölderovu podmínku s exponentem α , kde $0 < \alpha \leq 1$. ICT o takové hustotě lze stejnoměrně aproximovat prostřednictvím ICT, jehož hustota je po částech lineárním interpolantem původní hustoty, za předpokladu, že síť interpolačních uzlů je dostatečně jemná a stejnoměrná.

Systematicky je studován ICT o po částech lineární hustotě. Jeho vlastnosti, zejména možnosti spojitě a holomorfně rozšíření, dávají podnět k volbě vhodných tzv. „bázových funkcí“, které generují prostor aproximací ve smyslu KMHP. Jako aplikace je představen nový algoritmický přístup k hledání přibližného řešení Dirichletovy úlohy pro všechny oblasti s výše popsanými vlastnostmi. Zmíněné výsledky z teorie ICT mají hlavní podíl na přednostech tohoto přístupu ve srovnání s doposud publikovanými algoritmy KMHP. Jde především o teoretickou možnost stejnoměrně aproximovat přesné řešení, diskuzi řešitelnosti nezbytné soustavy lineárních algebraických rovnic, snadné odvození matice soustavy a dostupnost jejích prvků, korektnost použití pro složitější nekonvexní oblasti a s tím související řádově větší přesnost pro tyto oblasti, dostupnost aposteriorních odhadů chyby přibližného řešení. Nově navržený přístup je opatřen testováním přesnosti pro některé úlohy se známým přesným řešením a příklady pro vyčíslení odvozených odhadů.

Annotation

From the middle of the 1980s, T. V. Hromadka II and his cooperators develop a new method allowing to approximately solve some planar boundary value problems – the COMPLEX VARIABLE BOUNDARY ELEMENT METHOD, shortly CVBEM, see for [29, 31, 58] etc. The introduced dissertation presents a contribution to the CVBEM. It is focused on planar Jordan regions having piecewise regular boundaries without cusps.

Results from the theory of the CAUCHY-TYPE INTEGRAL, shortly CTI, see for [15, 43, 46] etc., are significantly promoted in the presented development of the CVBEM. Some of these results are original and represent the topics of author's publications. They are related to the boundary behaviour of the CTI under specific assumptions about its density. In the case of the Lipschitz-continuous density there is derived a quantifiable estimate for the modulus of continuity of boundary values of the CTI, including its algorithmic realization demonstrated on a problem for the unit circle. A similar result related to the real part of the CTI is derived in the case of the Dini-continuous density. Further, the Dini-continuous density whose modulus of continuity $\omega(\cdot)$ satisfies the condition

$$\limsup_{s \downarrow 0} \omega(s) \ln \frac{1}{s} = 0$$

is considered. For instance, every function satisfying the Hölder condition with exponent α , where $0 < \alpha \leq 1$, on the boundary is such a density. Any CTI with such a density can be uniformly approximated through a CTI whose density is a piecewise linear interpolant of the original one under the assumption that the mesh of the interpolation nodes is sufficiently fine and uniform.

The Cauchy-type integral having a piecewise linear density is systematically researched. Its properties, especially opportunities of continuous and holomorphic extension, suggest the choice of suitable so called “basis” functions that generate the approximation space in the sense of the CVBEM. As an application it is presented a new algorithmic approach for searching of an approximate solution of Dirichlet problem. This approach is applicable for all regions having above described properties. The above mentioned results from the theory of the CTI have the major share of advantages of this approach in comparison with till now published algorithms of the CVBEM. In particular, a theoretical possibility to uniformly approximate the exact solution, a discussion of the solvability of an essential system of linear algebraic equations, an easy derivation of the system matrix and the availability of its elements, the correctness of use for more complicated non-convex regions and the related higher-order accuracy for these regions, the availability of a posteriori estimates of the approximate solution error. The newly proposed approach is equipped with testing of the precision for some problems with a known exact solution and with examples for the quantifying of the derived estimates.

Věnováno památce docenta Jokla

V osudech tohoto díla jakož i v jiných osudech nezaměnitelně cítím projev Boží vůle – Bohu děkuji přede všemi. Děkuji své alma mater za poskytnutí prostoru k poznání. Děkuji své nezlomnosti a houževnatosti vyvažující nedostatek talentu a neznalost míry a děkuji za trpělivost všem, kteří na to dopláceli, především své snoubence Mgr. Lence Gavlasové. Děkuji své rodině, a to i nastávající, za podporu, pochopení a rozptýlení. Děkuji svému zaměstnavateli v osobě doc. RNDr. Pavla Burdy, CSc., za vytvoření podmínek ke studiu.

Obzvláštní poděkování patří zesnulému školiteli doc. RNDr. Ludku Joklovi, CSc., za jeho shovívavost a neobyčejně obětavý a nezištný přístup při poskytování cenných rad a připomínek během plnění zadaného úkolu, často nad rámec povinností školitele. Děkuji následnému školiteli doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D., který se s velkou vstřícností aktivně zapojil do nevděčného úkolu.

Obsah

Úvod	7
Přehled o vývoji a současném stavu problematiky, literatura	9
1. Základní pojmy	10
2. Princip a algoritmická realizace komplexní metody hraničních prvků	10
3. Odhady	14
4. Věty o konvergenci	15
Použité prostředky	16
5. Množiny a funkce	16
6. Cesty	17
7. Analytické pokračování podél cesty	19
8. Integrál podél cesty	20
9. Integrál Cauchyho typu	21
10. Další motivy	22
Výsledky disertační práce s uvedením nových poznatků	24
I. Příprava	24
11. Jedna úloha	24
12. Omezenost spojitě větve argumentu	25
13. Charakterizace lineárně nezávislých funkcí	27
14. Další pomocná tvrzení	29
II. Cesty	31
15. Vlastnosti cest	31
16. Cesta Γ	35
17. Charakteristiky cesty Γ	40
III. Integrál Cauchyho typu	48
18. Výběr funkcí definovaných na $[\Gamma]$	48
19. Hraniční hodnoty integrálu Cauchyho typu	49
20. Po částech lineární funkce	55
21. Integrál Cauchyho typu o po částech lineární hustotě	57
22. Konvergence	59
23. Holomorfní rozšíření	61
24. Spojité rozšíření	66
25. Vlastnosti funkcí f_0, \dots, f_{m-1}	68
IV. Vývoj komplexní metody hraničních prvků	72
26. Přibližné řešení Dirichletovy úlohy	72
27. Řešitelnost soustavy	74
28. Algoritmická realizace	80
29. Testování přesnosti	85
30. Odhady	95
Shrnutí a závěry pro další rozvoj problematiky	100
Příloha A. Zdrojové soubory	105
Příloha B. Elektronická dokumentace disertační práce	109
Publikované práce	111
Příspěvky na konferencích	111
Použitá literatura	112

Úvod

Matematické modelování hraje v dnešní době klíčovou roli ve výzkumu napříč spektrem všech přírodních věd. Mnoho přírodních jevů a procesů lze popsat prostřednictvím parciálních diferenciálních rovnic. Řešení okrajových úloh pro takové rovnice má proto v matematickém modelování zásadní význam. Numerické metody umožňují přibližně řešit i takové okrajové úlohy, jejichž přesné řešení nelze určit analyticky. Nástup výpočetní techniky ve druhé polovině 20. století otevřel rozsáhlé možnosti realizace numerických metod a motivoval tak jejich prudký rozvoj.

Vedle METODY KONEČNÝCH DIFERENCÍ a populární METODY KONEČNÝCH PRVKŮ, které jsou založené na diskretizaci oblasti okrajové úlohy, se tak rychle začala rozvíjet další skupina metod – tzv. *hraniční metody* (viz [6]), které zahrnují pouze diskretizaci hranice uvažované oblasti. K nejvýznamnějším přednostem hraničních metod patří právě zmenšení dimenze diskretizace o jednu, což vede k výraznému zmenšení počtu lineárních algebraických rovnic v soustavě, kterou je potřeba vyřešit. Příslušná matice soustavy však zpravidla není řídká, jak je to obvyklé u prvních dvou jmenovaných metod. Přes tento nedostatek je počítačová realizace hraničních metod často efektivnější ([5, 42, 47]).

Předmětem výzkumu, o němž pojednává předložená disertační práce, je KOMPLEXNÍ METODA HRANIČNÍCH PRVKŮ, zkráceně KMHP (v originále COMPLEX VARIABLE BOUNDARY ELEMENT METHOD, zkráceně CVBEM), viz [29]. V rámci této hraniční metody hraje klíčovou roli integrální reprezenace holomorfní funkce komplexní proměnné. Je tedy přirozené, že byla původně navržena pro přibližné řešení dvojrozměrných okrajových úloh. Ve srovnání se známější příbuznou METODOU HRANIČNÍCH PRVKŮ (viz např. [8]), která je formulovaná prostřednictvím reálných proměnných, se aproximační techniky KMHP vztahují výhradně k hranici a veškeré integrování probíhá analyticky.

Za účelem objasnění principu KMHP je vhodné uvažovat dvojrozměrnou okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici. Přesné řešení je v takovém případě funkce harmonická v uvažované oblasti a spojitá až do hranice této oblasti. Jde tedy o reálnou část nějaké funkce, která je holomorfní (neboli jednoznačná analytická) v uvažované oblasti a kterou lze za této situace vyjádřit ve tvaru integrálu Cauchyho typu, zkráceně ICT, podél příslušné hranice. Podstatou KMHP je nalezení aproximantu ve tvaru podobného ICT, jehož hustota je obvykle po částech lineární interpolant hustoty původní, a zpřístupnění jeho hodnot. Takový aproximant lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace

$$\sum_{j=0}^{m-1} l_j f_j,$$

funkcí f_0, \dots, f_{m-1} , které jsou holomorfní v uvažované oblasti a spojitě až do hranice této oblasti. Jsou-li hodnoty těchto funkcí dostupné, vypočítají se koeficienty l_0, \dots, l_{m-1} z vhodné soustavy lineárních algebraických rovnic. Za příznivých okolností představuje reálná část aproximantu přibližné řešení okrajové úlohy ve smyslu KMHP. Přesnost případného přibližného řešení je zásadním způsobem ovlivněna tím, jak příslušná soustava zohledňuje požadavek, aby spojitě rozšíření aproximantu co nejpřesněji splňovalo hraniční podmínky uvažované okrajové úlohy.

Zadání disertační práce bylo motivováno nedostatky publikace [29], která obsahuje první ucelenou matematickou formulaci KMHP. Autor zadání – doc. RNDr. Luděk Jokl, CSc. – vycházel z opodstatněné hypotézy, že doposud publikované výsledky o vlastnostech této metody lze výrazně vylepšit v oblasti existence, přesnosti, odhadu chyby a konvergence přibližných řešení, a to zejména korektním využitím stěžejních nástrojů komplexní analýzy. Tato práce má přirozené ambice dokázat, že výchozí hypotéza je pravdivým výrokiem. Její autor pod vedením doc. Jokla

obhájil v roce 2001 diplomovou práci [11], která obsahuje první výsledky společného dlouholetého výzkumu věnovaného KMHP. Předkládaná disertační práce dokumentuje výsledky za další období spolupráce. Jsou rozděleny do těchto kapitol:

- I. Příprava.** Jde o souhrn specifických pomocných tvrzení, která jsme v odborné literatuře nezaznamenali, a proto jsou uvedena i s původními vesměs netriviálními důkazy.
- II. Cesty.** Zde se věnujeme zejména vlastnostem a charakteristikám parametrizace po částech regulárních bezostných hranic rovinných Jordanových oblastí, včetně odvození důležitých odhadů.
- III. Integrál Cauchyho typu.** Do této kapitoly jsou zařazeny výsledky vztahující se k chování ICT na hranici. Dále jsou zde podrobně zkoumány vlastnosti ICT o po částech lineární hustotě, zejména možnosti jeho spojitého a holomorfního rozšíření a jeho schopnost stejnoměrně aproximovat jiný ICT. Z těchto vlastností vycházíme při návrhu funkcí f_0, \dots, f_{m-1} a při odvozování jejich vlastností.
- IV. Vývoj komplexní metody hraničních prvků.** Zde jsou navrženy dva nové postupy přibližného řešení rovinné Dirichletovy úlohy využívající reálné části g_0, \dots, g_{m-1} navržených funkcí f_0, \dots, f_{m-1} . Tyto postupy jsou algoritmicky i softwarově zpracovány a jsou testovány na přesnost. Je zkoumána řešitelnost nezbytné soustavy lineárních algebraických rovnic a jsou odvozeny aposteriorní odhady chyby přibližného řešení se speciálními numerickými výsledky pro jednotkovou kružnici.

Součástí disertační práce je elektronická dokumentace; u vázané verze je k dispozici na kompaktním disku v kapse zadní desky.

Přehled o vývoji a současném stavu problematiky, literatura

Se základním principem hraničních metod se setkáváme již v publikacích o singulárních integrálních rovnicích z poloviny 20. století – v [39, § 29] je například řešena Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici způsobem, který koresponduje s METODOU HRANIČNÍCH PRVKŮ. K nejvýznamnějším monografiím o singulárních integrálních rovnicích patří bezesporu [43], která spolu s [15] poskytuje také kvalitní přehled o možnostech využití ICT. Autoři těchto monografií vyjádřili přesvědčení o velkém potenciálu dalšího výzkumu přibližných metod řešení singulárních integrálních rovnic vzhledem k jejich vazbě na okrajové úlohy parciálních diferenciálních rovnic. Z množství prací reagujících na tuto výzvu připomeňme alespoň monografii [20, 21, 22] znamenající zároveň významný posun směrem k počítačové realizaci přibližných metod vycházejících z komplexní analýzy. Přibližné řešení singulární integrální rovnice je podstatně závislé na způsobu aproximace ICT obsaženého v její formulaci. Zřejmě nejaktuálnější přehled aproximačních technik včetně některých numerických aspektů přináší [9]. Najdeme zde mimo jiné aproximant ve tvaru ICT o po částech lineární hustotě, který se používá v rámci KMHP.

Za autora původní formulace KMHP je všeobecně považován T. V. Hromadka II, hydrolog specializující se především na problematiku vodních zdrojů, podzemních vod a regulace vodních toků s déle než třicetiletou inženýrskou praxí a rozsáhlou publikační činností (více na stránkách <http://www.hromadka.net>).

Vůbec první použití KMHP však lze zřejmě vysledovat při řešení úlohy z problematiky podzemních vod v článku [36] z roku 1981. Vzápětí se tato metoda začala pravidelně vyskytovat v pracích Hromadky a jeho spolupracovníků; v [28] je použita k modelování hranice zamrzání v půdě, v [23] je představena jako zobecnění METODY ANALYTICKÝCH FUNKCÍ ([52]). Kniha [29] z roku 1987 obsahuje vedle cenných informací z oblasti matematického modelování a počítačové realizace také první snahu o vybudování matematického aparátu KMHP. Mnohé další výsledky spolu s obsahem předchozí knihy jsou zařazeny do publikace [31] z roku 1998. Teoretický vývoj za další období shrnuje příspěvek [58] z roku 2006. Z publikací T. V. Hromadky II a jeho spolupracovníků vycházíme při mapování vývoje a současného stavu KMHP v následujících oddílech.

KMHP byla původně spjata výhradně s okrajovými úlohami teorie potenciálu pro Laplaceovu rovnici na dvojrozměrných omezených jednoduše souvislých oblastech. Později se začala uplatňovat také v případě dalších eliptických parciálních diferenciálních rovnic ([3, 44]) na oblastech vícenásobně souvislých ([24, 33]), neomezených ([18, 41]), trojrozměrných ([26]). Původní formulace KMHP se neobejde bez polygonální aproximace hranice. V [4, 32] bylo experimentováno s aproximací hranice pomocí kvadratických a kubických prvků. Modelování přibližné hranice se brzy stalo nástrojem pro redukci chyby aproximace ([59]). Za posledních třicet let byla tato metoda úspěšně aplikována na mnoho problémů z teorie potenciálu jako je obtékání ([18, 50]), tok podzemních vod ([48]), hydrodynamika ([45]), vedení tepla ([14, 37]), difuze ([27]), či kroucení ([12]) a na další problémy z teorie pružnosti ([2, 34, 35, 40]).

O praktických výhodách a nevýhodách KMHP si lze vytvořit představu na základě srovnání s METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ v [31] a s dalšími hraničními metodami – METODOU KOMPLEXNÍCH POLYNOMŮ a METODOU HRANIČNÍCH PRVKŮ – v [1]. Autoři těchto prací diskutují přednosti jednotlivých metod pro vybrané úlohy z oblasti vedení tepla, filtrace a kroucení. Hraniční metody zde vykazují srovnatelnou přesnost jako METODA KONEČNÝCH PRVKŮ při podstatně menším počtu elementárních výpočetních operací. Ucelený aktuální přehled literatury a vývoje hraničních metod včetně KMHP nabízí [60].

Odkazy na další odbornou literaturu uvádíme níže v souvislosti s tématy, která jsou předmětem našeho výzkumu.

1. Základní pojmy

Vzhledem k nepřesnostem zaznamenaným v [29] budeme při interpretaci základních pojmů vycházet z pozdější práce [54] obsahující již korigované informace.

V Gaussově rovině \mathbb{C} je uvažována jednoduše souvislá oblast Ω , jejíž hranici tvoří Jordanova křivka bez ostnů parametrizovaná prostřednictvím spojitého a po částech regulárního zobrazení $\Gamma : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ (viz definici 1, str. 35). Pro hranici uvažované oblasti je vhodné zavést označení $[\Gamma]$, tj.

$$[\Gamma] = \{\Gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Dále je uvažován rozklad hranice $[\Gamma]$ na úseky

$$[\Gamma_j] = \{\Gamma_j(t) : t_j \leq t \leq t_{j+1}\}, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

kde

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1, \\ \Gamma_j = \Gamma|_{(t_j, t_{j+1})}, \quad j = 0, \dots, m-1$$

(viz definici 14, str. 55). Tyto úseky jsou odděleny uzly rozkladu

$$z_j = \Gamma(t_j), \quad j = 0, \dots, m.$$

Přirozeně platí $z_m = z_0$. K rozkladu hranice $[\Gamma]$ a ke komplexním koeficientům l_0, \dots, l_m je vztažena po částech lineární funkce $l : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ (viz definici 15, str. 56), kterou lze vyjádřit předpisem

$$(1) \quad l(z) = \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} l_j + \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j} l_{j+1}, \quad z \in [\Gamma_j], \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Pokud

$$(2) \quad l_j = f(z_j), \quad j = 0, \dots, m-1,$$

kde f je nějaká funkce definovaná na hranici $[\Gamma]$, potom l je po částech lineární interpolant funkce f vzhledem k uvažovanému rozkladu.

Nyní lze prostřednictvím ICT o hustotě l definovat funkci

$$\mathcal{C}(l)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{l(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma].$$

Dále se pracuje se spojitým rozšířením funkce $\mathcal{C}(l)$ definovaným na množině $\Omega \cup [\Gamma]$, tj. s funkcí $\mathcal{C}^-(l) : \Omega \cup [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$\mathcal{C}^-(l)(z) := \mathcal{C}(l)(z), \quad z \in \Omega, \\ \mathcal{C}^-(l)(z) := \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} \mathcal{C}(l)(w), \quad z \in [\Gamma].$$

Funkce $\mathcal{C}^-(l)$ je holomorfní v Ω a spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$. Funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ je harmonická v Ω a spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$.

Hlavním cílem KMHP je zpřístupnit hodnoty takové funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$, která popisuje přibližné řešení okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici v Ω . Uvažujme spojitou funkci $h : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$. V teorii KMHP jsou přednostně řešeny problémy související s Dirichletovou úlohou

$$(D) \quad \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad u = h \quad \text{na } [\Gamma].$$

2. Princip a algoritmická realizace komplexní metody hraničních prvků

Uvažujme nějakou okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici v Ω a označme symbolem u přesné řešení této okrajové úlohy. Potom u je funkce harmonická v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$, a tedy u je reálnou částí nějaké funkce f , která je holomorfní v Ω a spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$.

Nyní je využita skutečnost, že funkci f lze reprezentovat prostřednictvím ICT podél $[\Gamma]$ (např. na základě Cauchyho integrálního vzorce, viz níže), a místo hustoty tohoto ICT je uvažován její po částech lineární interpolant l . Potom $\mathcal{C}^-(l)$ je aproximantem funkce f , tj.

$$(3) \quad \mathcal{C}^-(l) \approx f \quad \text{na } \Omega \cup [\Gamma],$$

a $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ aproximuje funkci u . Je-li tedy veličina

$$(4) \quad \max_{z \in \Omega \cup [\Gamma]} |u(z) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z)|$$

malá, popisuje funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ přibližné řešení uvažované okrajové úlohy.

Za účelem určení a zpřístupnění vhodné funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ je potřeba nejdříve stanovit uzly z_0, \dots, z_{m-1} vhodného rozkladu. To probíhá v podstatě intuitivně. Osvědčuje se jejich rovnoměrné rozložení, které se doporučuje zahustit v těch částech hranice, které obsahují ostré hroty, nebo tam, kde dochází k prudkým změnám hodnot funkce zadané hraniční podmínkou. V rámci redukce chyby aproximace jsou v [29, oddíl 6.5] vloženy některé interaktivní strategie pro vkládání dodatečných uzlů rozkladu. Následně lze z odborné literatury vysledovat dva postupy, z kterých vychází algoritmická realizace KMHP:

Postup podle [29]

Tento postup spočívá ve stanovení zbývajících konstant v (1) popisujících hustotu l , tj. komplexních koeficientů l_0, \dots, l_{m-1} (zřejmě $l_m = l_0$). Při vyčíslení hodnot funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ se pak vychází z výrazu odvozeného na základě (1) – pro $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ platí

$$(5) \quad \mathcal{C}(l)(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma_j} \frac{l(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} l_j \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \int_{\Gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \int_{\Gamma_{j+1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right).$$

Na základě (3) se uvažuje soustava rovnic

$$\mathcal{C}^-(l)(z_k) = f(z_k), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

a dále se uvažují reálná čísla $a_{k,j}, b_{k,j}$, kde $k, j \in \{0, \dots, m-1\}$, taková, že

$$a_{k,j} + ib_{k,j} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{w \rightarrow z_k \\ w \in \Omega}} \left(\frac{w - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \int_{\Gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - w} + \frac{w - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \int_{\Gamma_{j+1}} \frac{d\zeta}{\zeta - w} \right).$$

Potom každou rovnicí uvažované soustavy lze s ohledem na (5) vyjádřit postupně ve tvarech

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} l_j (a_{k,j} + i b_{k,j}) &= f(z_k), \\ \sum_{j=0}^{m-1} (a_{k,j} \operatorname{Re} l_j - b_{k,j} \operatorname{Im} l_j) + i \sum_{j=0}^{m-1} (b_{k,j} \operatorname{Re} l_j + a_{k,j} \operatorname{Im} l_j) &= f(z_k) \end{aligned}$$

a samotnou soustavu lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \quad -\mathbf{B}][\operatorname{Re} l_0, \dots, \operatorname{Re} l_{m-1}, \operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T + \\ + i[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}][\operatorname{Re} l_0, \dots, \operatorname{Re} l_{m-1}, \operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T = [f(z_0), \dots, f(z_{m-1})]^T, \end{aligned}$$

kde $[\mathbf{A} \quad -\mathbf{B}]$ resp. $[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}]$ jsou blokové matice sestavené z matic

$$\mathbf{A} = \{a_{k,j}\}_{\substack{k=0,\dots,m-1, \\ j=0,\dots,m-1}}, \quad \mathbf{B} = \{b_{k,j}\}_{\substack{k=0,\dots,m-1, \\ j=0,\dots,m-1}}.$$

V závislosti na volbě integrální reprezentace funkce f se ještě upraví vektor na pravé straně. V pracích T. V. Hromadky a jeho spolupracovníků se za účelem integrální reprezentace využívá známý Cauchyho integrální vzorec, podle něhož platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega.$$

V souladu s výše uvedeným představuje nyní l po částech lineární interpolant funkce f vzhledem k uvažovanému rozkladu hranice $[\Gamma]$. Na základě (2) lze potom soustavu vyjádřit ve tvaru

$$(6) \quad [\mathbf{A} \quad -\mathbf{B}][\operatorname{Re} l_0, \dots, \operatorname{Re} l_{m-1}, \operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T + \\ + i[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}][\operatorname{Re} l_0, \dots, \operatorname{Re} l_{m-1}, \operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T = [\operatorname{Re} l_0, \dots, \operatorname{Re} l_{m-1}]^T + i[\operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T.$$

Za předpokladu dostupnosti prvků matic \mathbf{A}, \mathbf{B} figuruje v této soustavě právě $2m$ neznámých

$$\operatorname{Re} l_0, \dots, \operatorname{Re} l_{m-1}, \operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1},$$

o jejichž stanovení nám jde. V závislosti na uvažované okrajové úloze je polovina těchto neznámých předepsána hraničními podmínkami a druhá polovina těchto neznámých je následně dopočítána jako řešení soustavy lineárních algebraických rovnic sestavené na základě (6).

Demonstrujeme tento postup na Dirichletově úloze (D), kdy jsou dostupné hodnoty

$$\operatorname{Re} f(z_j) = h(z_j), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Potom na základě (2) platí

$$\operatorname{Re} l_j = h(z_j), \quad j = 0, \dots, m-1,$$

načež lze sestavit soustavu m rovnic o m neznámých $\operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}$

I. porovnáním reálných částí levé a pravé strany v (6):

$$[\mathbf{A} \quad -\mathbf{B}][h(z_0), \dots, h(z_{m-1}), \operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T = [h(z_0), \dots, h(z_{m-1})]^T$$

neboli

$$\mathbf{B}[\operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T = (\mathbf{A} - \mathbf{I})[h(z_0), \dots, h(z_{m-1})]^T,$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice typu $m \times m$.

II. porovnáním imaginárních částí levé a pravé strany v (6):

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}][h(z_0), \dots, h(z_{m-1}), \operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T = [\operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T$$

neboli

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})[\operatorname{Im} l_0, \dots, \operatorname{Im} l_{m-1}]^T = \mathbf{B}[h(z_0), \dots, h(z_{m-1})]^T.$$

Poznamenejme, že v [29] se používá těchto označení:

$$\mathbf{C}_{R,\phi} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{C}_{R,\psi} = -\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_{I,\phi} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_{I,\psi} = \mathbf{A}.$$

Na této ukázce je názorně vidět problém, který je třeba řešit i v případě dalších okrajových úloh – vyčíslení hraničních hodnot integrálů v (5). Na něm je totiž závislá jak dostupnost hraničních hodnot funkce $\mathcal{C}^-(l)$, tak dostupnost prvků matic \mathbf{A}, \mathbf{B} , a potažmo prvků matic výše uvedených soustav. Hromadka a jeho spolupracovníci řeší tento problém použitím jednoznačných větví logaritmu. To vyžaduje ke každému uzlu rozkladu

- stanovit výřez – křivku bez samoprůsečíků spojující uzel rozkladu s komplexním nekonečnem ∞ a s výjimkou tohoto uzlu ležící v množině $\mathbb{C} \setminus (\Omega \cup [\Gamma])$,
- vybrat vhodnou jednoznačnou větev logaritmu definovanou na množině, která vznikne z \mathbb{C} odstraněním uvažovaného výřezu,
- správně vyčíslit hodnoty uvažované jednoznačné větve.

Původní publikace [29] spolu s [54] slouží v tomto ohledu jako náhled do problematiky a ukázka strategie, jak postupovat v případě, že $[\Gamma]$ je hranice konvexní oblasti nebo oblasti hvězdicovitého typu (v oblasti Ω existuje bod, který lze s libovolným jiným bodem této oblasti spojit úsečkou ležící v Ω). V takovém případě se výřezy volí jako vhodné polopřímky začínající v uzlech rozkladu. Problémy však mohou nastat u složitějších hranic, kdy nelze vystačit s výřezy ve tvaru polopřímky nebo kdy není triviální určit vhodnou jednoznačnou větev logaritmu. Algoritmy používané Hromadkou a jeho spolupracovníky nejsou pro tuto situaci ošetřeny, a tedy nemusí poskytovat korektní výstupy. Pro mnohé oblasti však tato metoda vykazuje relativně vysokou přesnost, což bylo demonstrováno již v původní publikaci [29] na testovacích úlohách se známým řešením, přičemž zajímavých výsledků bylo dosaženo pro relativně malý počet uzlů rozkladu (m je mezi 20 a 40), a tedy pro nepřiliš rozměrné matice soustavy.

Kromě několika dílčích informací v [29] nebyla doposud v literatuře zaznamenána seriózní studie řešitelnosti příslušné soustavy rovnic (např. některé ze soustav ve výše uvedených případech I a II pro Dirichletovu úlohu). Potenciál změnit tento nelichotivý atribut KMHP měla následující informace obsažená v [45]: autor zde zavádí funkce typu

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \int_{\Gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \int_{\Gamma_{j+1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right), \quad j = 0, \dots, m-1,$$

(srovnej s (5)), což znamená, že

$$a_{k,j} + ib_{k,j} = \lim_{\substack{w \rightarrow \zeta_k \\ w \in \Omega}} f_j(w),$$

a tedy prvky matice soustavy lze vyjádřit prostřednictvím limitních hodnot funkcí f_j . V odborné literatuře nezaznamenala tato informace výraznější ohlas. Přesto vzbudila naši pozornost, protože nezávisle na ní s uvedenými funkcemi f_j již delší dobu pracujeme, a předesíláme, že důsledné studium vlastností těchto funkcí v této disertační práci vedlo k zajímavým výsledkům.

Postup podle [25]

Tento postup je spjat s využitím metody nejmenších čtverců. Funkce $\mathcal{C}(l)$ je upravena do tvaru

$$(7) \quad a_0 + a_1 z + \sum_{j=0}^{m-1} c_j (z - z_j) \log_{z_j}(z - z_j),$$

kde $a_0, a_1, c_0, \dots, c_{m-1}$ jsou komplexní koeficienty a funkce

$$z \longmapsto \log_{z_j}(z - z_j)$$

představuje jistou jednoznačnou větev logaritmu výrazu $z - z_j$ definovanou na množině \mathbb{C} zbavené výše popsaného výřezu (detaily odvození viz [25, appendix A]). Zavedou-li se reálné konstanty

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \text{Im } a_0, & \gamma_1 &= \text{Re } a_0, & \gamma_2 &= \text{Re } a_1, & \gamma_3 &= \text{Im } a_1, \\ \gamma_{2j+4} &= \text{Re } c_j, & \gamma_{2j+5} &= \text{Im } c_j, & j &= 0, \dots, m-1, \end{aligned}$$

a funkce

$$\begin{aligned} f_0(z) &= i, & f_1(z) &= 1, & f_2(z) &= z, & f_3(z) &= iz, \\ f_{2j+4}(z) &= (z - z_j) \log_{z_j}(z - z_j), & f_{2j+5}(z) &= i(z - z_j) \log_{z_j}(z - z_j), & j &= 0, \dots, m-1, \end{aligned}$$

potom pro $z \in \Omega$ platí

$$(8) \quad \mathcal{C}(l)(z) = \sum_{j=0}^{2m+3} \gamma_j f_j(z).$$

Zavedou se hraniční body $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1} \in [\Gamma]$, obvykle rovnoměrně rozložené. Na základě (3) se uvažuje soustava rovnic

$$\mathcal{C}^-(l)(\zeta_k) = f(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

kteřou lze s ohledem na (8) a s využitím označení $f_j^-(\zeta_k) = \lim_{\substack{w \rightarrow \zeta_k \\ w \in \Omega}} f_j(w)$ vyjádřit ve tvaru

$$(9) \quad \sum_{j=0}^{2m+3} \gamma_j f_j^-(\zeta_k) = f(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Za předpokladu dostupnosti použitých limitních hodnot funkcí f_0, \dots, f_{2m+3} figuruje v soustavě (9) právě $2m+4$ neznámých $\gamma_0, \dots, \gamma_{2m+3}$. V závislosti na hraniční podmínce se na základě (9) sestaví soustava n lineárních algebraických rovnic o $2m+3$ neznámých, která se následně řeší metodou nejmenších čtverců. Vypočtené neznámé umožní vyčíslení hodnot funkce $\text{Re } \mathcal{C}(l)$ na základě (8).

V případě Dirichletovy úlohy (D) lze očekávat dostupnost hodnot

$$\text{Re } f(\zeta_k) = h(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

načež se porovnáním reálných částí levé a pravé strany v (9) sestaví soustava n rovnic o $2m + 3$ neznámých $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+3}$:

$$\sum_{j=1}^{2m+3} \gamma_j \operatorname{Re} f_j^-(\zeta_k) = h(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

Dostupnost prvků matice této soustavy stejně jako dostupnost hraničních hodnot funkce $\mathcal{C}^-(l)$ je závislá na vyčíslení hraničních hodnot výrazů $(z - z_j) \log_{z_j}(z - z_j)$, které se opět neobejde bez použití jednoznačných větví logaritmu. Vznikají tedy stejné problémy jako u předchozího postupu.

Jediný zaznamenaný výsledek, který se vztahuje k řešitelnosti příslušné soustavy rovnic v tomto případě, je lineární nezávislost funkcí f_0, \dots, f_{2m+3} (viz [25, Věta 7.3.11]).

3. Odhady

Uvažujme opět situaci popsanou v úvodu předchozího oddílu. Vzhledem k (3) je jistě důležitým ukazatelem praktického využití KMHP hodnota veličiny

$$\max_{z \in \Omega \cup [\Gamma]} |f(z) - \mathcal{C}^-(l)(z)|,$$

popřípadě hodnota jejího odhadu. Za zesíleného a obecně nepřijatelného předpokladu, že funkce f je holomorfní v nějaké otevřené množině obsahující $\Omega \cup [\Gamma]$, jsou v [56] a [30] odvozeny odhady této veličiny, které Hromadka a jeho spolupracovníci používají v důkazech vět o konvergenci a v experimentech intuitivního charakteru. Jedná se však o kvalitativní výsledky, které neposkytují možnost vyčíslení. Totéž platí pro odhady uvedené v [9].

U okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici je podstatná veličina (4). Na základě principu maxima modulu pro harmonické funkce však výraz $|u(z) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z)|$ nabývá maxima na hranici $[\Gamma]$. V případě Dirichletovy úlohy (D) nás tedy zajímá veličina

$$(10) \quad \max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z)|,$$

kteou lze *a posteriori* odhadnout na základě následující strategie. Pro každé $z \in [\Gamma]$ lze psát

$$|h(z) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z)| \leq |h(z) - h(z_j)| + |h(z_j) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z_j)| + |\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z_j) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z)|,$$

kde z_j je uzel rozkladu nejbližší bodu z (tj. $z \in [\Gamma_j]$ nebo $z \in [\Gamma_{j+1}]$). Odhad výrazu $|h(z) - h(z_j)|$ je zcela závislý na vlastnostech funkce h dané hraniční podmínkou. Patří-li h například do třídy hölderovských funkcí, stačí znát příslušné hölderovské konstanty. Výraz $|h(z_j) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z_j)|$ lze odhadnout prostřednictvím veličiny

$$\max_{0 \leq k \leq m-1} |h(z_k) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z_k)|,$$

kteou lze vyčísřit *a posteriori*. Konečně $|\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z_j) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z)|$ lze odhadnout na základě skutečnosti, že l je lipschitzovská funkce (viz definici 10, str. 48), podle následujícího tvrzení, které je speciálním případem známé Privalovovy věty:

Tvrzení 1. [46, str. 199, 4.5]

Nechť $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je lipschitzovská funkce. Nechť $\delta \in (0, 1)$. Potom existují reálná čísla $c_1(\delta), c_2$ taková, že pro libovolná $z, w \in [\Gamma]$ splňující $0 < |z - w| \leq \delta$ platí

$$|\mathcal{C}^-(g)(z) - \mathcal{C}^-(g)(w)| \leq c_1(\delta) |z - w| \ln \frac{1}{|z - w|} + c_2 |z - w|.$$

Tvrzení 1 popisuje odhad modulu spojitosti funkce $\mathcal{C}^-(g)|_{[\Gamma]}$, který je rovněž předmětem zájmu řady dalších klasických monografií ([15, 43]), novějších knih ([16, 22, 38, 51]) a článků ([7, 13, 17, 19, 49]). V těchto pracích stejně jako v tvrzení 1 nalezneme kvalitativní odhady odvozené převážně za obecnějších předpokladů o hranici $[\Gamma]$ a hustotě g ovšem bez možnosti vyčíslení. Vzhledem k našim poměrně specifickým předpokladům vzniká otázka, zda nelze odvodit také nějaký vyčíslitelný odhad.

4. Věty o konvergenci

Viděli jsme, že funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ mohou popisovat přibližné řešení úlohy (D). Vzniká tedy přirozená otázka, zda lze funkcemi $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ s libovolnou přesností aproximovat přesné řešení u této úlohy. Ideální by bylo, kdybychom k libovolnému $\varepsilon > 0$ dokázali zkonstruovat funkci $\mathcal{C}^-(l)$, pro kterou by veličina (10) byla menší než ε .

V původní publikaci [29] nalezneme

Tvrzení 2. [29, str. 121, Věta 6]

Nechť $[\Gamma]$ je po částech lomená čára a f je funkce holomorfní v nějaké otevřené množině obsahující mnohoúhelník $\Omega \cup [\Gamma]$. Pro každý rozklad hranice $[\Gamma]$ nechť l představuje po částech lineární interpolant funkce f vzhledem k tomuto rozkladu a nechť

$$\delta = \max\{|z_{j+1} - z_j| : 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Potom pro každé $z \in \Omega$ platí

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{C}^-(l)(z) = f(z).$$

Je-li tedy přesné řešení u úlohy (D) reálnou částí nějaké funkce holomorfní v otevřené množině obsahující mnohoúhelník $\Omega \cup [\Gamma]$, potom lze zkonstruovat funkce $\mathcal{C}^-(l)$, jejichž reálné části v Ω bodově konvergují k u . O řešení u však obecně víme jen to, že je, coby funkce harmonická v Ω , reálnou částí nějaké funkce, která je holomorfní pouze v Ω . Další nevýhodou tvrzení 2 je, že se z něj nic nedozvíme o situaci na hranici $[\Gamma]$. Relativní pokrok představuje následující

Tvrzení 3. [55, Věta 1]

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje funkce g ve tvaru (7) s vlastností

$$\max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \operatorname{Re} g(z)| < \varepsilon.$$

Z důkazu tohoto tvrzení však není zřejmé, zda uvažovaná funkce g je aproximací ve tvaru $\mathcal{C}^-(l)$ a jak by případně měla být zkonstruována. Tento nedostatek nenajdeme u

Tvrzení 4. [56, Věta 1]

Nechť f je funkce holomorfní v nějaké otevřené množině obsahující množinu $\Omega \cup [\Gamma]$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozklad hranice $[\Gamma]$ takový, že pro po částech lineární interpolant l funkce f vzhledem k tomuto rozkladu platí

$$\max_{z \in \Omega \cup [\Gamma]} |f(z) - \mathcal{C}^-(l)(z)| < \varepsilon.$$

Stejně jako tvrzení 2 je také tvrzení 4 odvozeno za silného předpokladu o holomorfnosti funkce f . Uvažuje se v něm ale obecná oblast Ω tak, jak zde byla popsána, a stejnoměrná konvergence. Z tvrzení 4 plyne, že lze zkonstruovat funkce $\mathcal{C}^-(l)$ tak, aby funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovaly přesné řešení u úlohy (D). Ovšem opět za nepřirozeného předpokladu, že u je reálnou částí nějaké funkce holomorfní v otevřené množině obsahující množinu $\Omega \cup [\Gamma]$.

Tvrzení 4 vymezuje funkce, které lze na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat prostřednictvím ICT o po částech lineární hustotě. Jde o funkce holomorfní v nějaké otevřené množině obsahující množinu $\Omega \cup [\Gamma]$. Z [38, str. 450–452] plyne, že tímto způsobem lze aproximovat libovolný ICT, jehož hustota splňuje Hölderovu podmínku s exponentem α , kde $0 < \alpha \leq 1$.

Na základě tvrzení 4 je v [56] představen alternativní důkaz k tvrzení 3 (ovšem za zesíleného předpokladu: Γ je dvakrát spojitě diferencovatelné zobrazení), který opět není zcela konstruktivní. Totéž platí pro důkaz následujícího tvrzení, v němž v roli g figuruje jisté zobecnění výrazu (7):

Tvrzení 5. [57, Věta 2]

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ a funkce F je holomorfní v množině $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$, která není polynomem. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje funkce

$$g(z) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j F(\alpha_j z + z_0),$$

holomorfní v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$ s vlastností

$$\max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \operatorname{Re} g(z)| < \varepsilon.$$

Použité prostředky

Následuje přehled motivů spjatých především s analýzou v komplexním oboru. Symbolem \mathbb{C} zde označujeme Gaussovu rovinu, tj. množinu všech komplexních čísel, a symbolem ∞ označujeme komplexní nekonečno.

5. Množiny a funkce

Je-li $M \subset \mathbb{C}$, potom množina $D \subset M$ je *komponenta množiny* M , jestliže je souvislá a platí

$$(D \subset D' \subset M \quad \wedge \quad D' \text{ je souvislá}) \implies D' = D.$$

Tvrzení 6. [53, str. 731, Věta III,4,1; str. 734, Důsledek věty III,4,6]

Komponenty neprázdné množiny jsou neprázdné. Jsou-li D, D' dvě komponenty otevřené množiny $M \subset \mathbb{C}$, potom platí

$$D = D' \quad \text{nebo} \quad D \cap D' = \emptyset.$$

Každá otevřená množina je sjednocením svých komponent, přičemž tyto komponenty jsou oblasti.

Je-li $K \subset \mathbb{C}$ kompaktní množina, řekneme, že body z a w jsou *K -ekvivalentní*, jestliže existuje oblast $D \subset \mathbb{C}$ s vlastností

$$\{z, w\} \subset D \subset \mathbb{C} \setminus K.$$

K -ekvivalence je relace ekvivalence na množině $\mathbb{C} \setminus K$.

Janiszewského věta. [10, str. 251]

Nechť $A, B \subset \mathbb{C}$ jsou kompaktní množiny. Potom body z a w jsou $A \cup B$ -ekvivalentní, jestliže množina $A \cap B$ je souvislá a body z a w jsou současně A -ekvivalentní a B -ekvivalentní.

Argument nenulového komplexního čísla z je množina

$$\arg z = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|e^{it}\}.$$

Spojité větve argumentu v oblasti $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá funkce $A : D \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastností

$$A(z) \in \arg z, \quad z \in D.$$

Oblast $D \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je *jednoduše souvislá*, jestliže její hranice ∂D je souvislá množina.

Tvrzení 7. [53, str. 356, Věta 12,3,4]

Je-li $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ neprázdna jednoduše souvislá oblast, potom existuje spojitá větev argumentu v D .

Nechť $M \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je otevřená množina. Potom funkce $f : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je *holomorfní* v M , jestliže pro každé $z \in M$ existuje derivace zobrazení f v bodě z , tj. limita

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Hovoří-li se o funkci holomorfní na nějaké uzavřené množině, vyjadřuje se tím skutečnost, že tato funkce je holomorfní v nějakém otevřeném okolí uvažované uzavřené množiny.

Věta o jednoznačnosti. [53, str. 291, Věta 10,2,2]

Nechť M je podmnožina oblasti $D \subset \mathbb{C}$. Nechť aspoň jeden hromadný bod množiny M leží v D . Nechť f a g jsou funkce holomorfní v D . Je-li f rovna g v M , potom f je rovna g také v D .

Věta o otevřenosti holomorfního zobrazení. [53, str. 308, Věta 10,4,4]

Funkce f , která je holomorfní v otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$ a která není konstantní v žádné komponentě množiny M , zobrazuje otevřené podmnožiny množiny M na otevřené množiny.

Princip maxima modulu pro holomorfní funkce. [53, str. 309, Věta 10,4,6]

Nechť funkce f je holomorfní v neprázdné oblasti $D \subset \mathbb{C}$ a spojitá na množině $D \cup \partial D$. Potom

$$\max\{|f(z)| : z \in D \cup \partial D\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial D\}.$$

Uvažujme otevřenou množinu $M \subset \mathbb{C}$ a ztotožněme komplexní číslo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ s dvojicí $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Funkce $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ je *harmonická* v M , jestliže v M má spojitě druhé derivace a splňuje Laplaceovu rovnici $\Delta u = 0$, kde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Je dobře známo, že reálná část funkce holomorfní v M je harmonická v M . Stejně tak je známo následující tvrzení:

Princip maxima modulu pro harmonické funkce. [53, str. 223, (11)]

Nechť funkce u je harmonická v neprázdné oblasti $D \subset \mathbb{C}$ a spojitá na množině $D \cup \partial D$. Potom

$$\max\{|u(z)| : z \in D \cup \partial D\} = \max\{|u(z)| : z \in \partial D\}$$

Uvažujme neprázdnou oblast $D \subset \mathbb{C}$ a spojitou funkci $h : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. *Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici* je úloha najít funkci u , která je harmonická v D , spojitá na $D \cup \partial D$ a splývá s funkcí h na ∂D . Symbolicky budeme tuto úlohu vyjadřovat obvyklým zápisem

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } D, \quad u = h \quad \text{na } \partial D,$$

Zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je *konformní*, jestliže je holomorfní a prosté. Zobrazení f je *homeomorfní*, jestliže je vzájemně jednoznačné, spojitě a také k němu inverzní zobrazení je spojitě.

Riemannova věta. [53, str. 361, Věta 12,4,1]

Nechť každá z neprázdných oblastí $D, D' \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ má tu vlastnost, že její doplněk je kompaktní souvislá množina obsahující alespoň dva body. Potom pro libovolné dva body $z \in D$, $z' \in D'$ existuje konformní zobrazení f , které zobrazuje oblast D na oblast D' a pro které platí $f(z) = z'$.

Carathéodoryho věta. [53, str. 413, Věta 13,5,5]

Nechť každá z neprázdných oblastí $D, D' \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ má tu vlastnost, že její hranice je obrazem nějaké Jordanovy cesty (viz str. 18). Nechť f je konformní zobrazení, které zobrazuje oblast D na oblast D' . Potom existuje rozšíření zobrazení f zobrazující homeomorfně uzávěr oblasti D na uzávěr oblasti D' .

6. Cesty

Termín *cesta* v této práci označuje libovolné zobrazení kompaktního nedegenerovaného intervalu do \mathbb{C} , které je spojitě a po částech regulární ([20, str. 166]). Uvažujme cestu

$$\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C},$$

tzn. $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, γ je spojitě zobrazení a existuje $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{d_j\}_{j=0}^n$ tak, že

$$\alpha = d_0 < \dots < d_n = \beta$$

a že pro každé $j \in \{0, \dots, n-1\}$ je derivace γ' zobrazení γ spojitá a nenulová na intervalu $\langle d_j, d_{j+1} \rangle$. Řekneme, že cesta γ začíná v bodě $\gamma(\alpha)$ a končí v bodě $\gamma(\beta)$; bod $\gamma(\alpha)$ resp. $\gamma(\beta)$ budeme nazývat počáteční resp. koncový bod cesty γ . Křivku

$$[\gamma] = \{\gamma(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$$

budeme nazývat *obrazem* cesty γ . Řekneme, že cesta γ leží v množině $M \subset \mathbb{C}$, jestliže $[\gamma] \subset M$. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}$ je *parametrizována* prostřednictvím cesty γ , jestliže $[\gamma] = M$. Řekneme, že γ je *cesta s délkovým parametrem*, jestliže $|\gamma'(t)| = 1$ na každém intervalu $\langle d_j, d_{j+1} \rangle$; v takovém případě vyjadřuje číslo $\beta - \alpha$ délku křivky $[\gamma]$.

Opačná cesta k cestě γ je cesta $\ast\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$(\ast\gamma)(t) := \gamma(\beta + \alpha - t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Spojení cest $\gamma_0 : \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1 : \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ splňujících

$$\gamma_0(\beta_0) = \gamma_1(\alpha_1)$$

je cesta $\gamma_0 \vee \gamma_1 : \langle \alpha_0, \beta_0 + \beta_1 - \alpha_1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\begin{aligned} (\gamma_0 \vee \gamma_1)(t) &:= \gamma_0(t), & t \in \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle, \\ (\gamma_0 \vee \gamma_1)(t) &:= \gamma_1(t - \beta_0 + \alpha_1), & t \in \langle \beta_0, \beta_0 + \beta_1 - \alpha_1 \rangle. \end{aligned}$$

Přirozeným zobecněním definice spojení dvou cest obdržíme definici spojení cest $\gamma_0, \dots, \gamma_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, které označíme symbolem $\bigvee_{j=0}^n \gamma_j$. Cesta γ je *konstantní*, jestliže platí

$$\gamma(t) = \gamma(\alpha), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Cesta γ je *jednoduchý oblouk od $\gamma(\alpha)$ do $\gamma(\beta)$* , jestliže zobrazení γ je prosté. Je-li $f : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá a po částech regulární funkce mající kladnou derivaci v každém intervalu, v němž je tato derivace spojitá, a jsou-li a, b dvě různá komplexní čísla, potom cesta $\sigma : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\sigma(t) := \frac{f(\beta) - f(t)}{f(\beta) - f(\alpha)} a + \frac{f(t) - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} b, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

realizuje jednoduchý oblouk od a do b a jejím obrazem je úsečka s koncovými body a, b . Tuto cestu budeme nazývat *orientovanou úsečkou od a do b* a v některých případech budeme uvažovat tento její tvar:

$$\sigma(t) = a + \frac{f(t) - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} (b - a), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Jestliže platí

$$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta),$$

potom cesta γ je *uzavřená*; v takovém případě existuje podle tvrzení 16 periodické rozšíření zobrazení γ , které budeme označovat stejným symbolem, tj. γ . Je-li γ uzavřená cesta, potom *index bodu* $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ *vzhledem k cestě γ* je číslo

$$I(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg(\zeta - z),$$

kde $\Delta_\gamma \arg(\zeta - z)$ je přírůstek argumentu výrazu $\zeta - z$ za předpokladu, že ζ probíhá cestu γ .

Tvrzení 8. [53, str. 89, (2); str. 92, Věta 3,3,5]

Je-li γ uzavřená cesta, potom funkce

$$\mathbb{C} \setminus [\gamma] \ni z \mapsto I(z, \gamma)$$

nabývá celočíselných hodnot a je konstantní na každé komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Cesta γ je *Jordanova*, jestliže je uzavřená a pro libovolná $t, t' \in \mathbb{R}$ platí

$$0 < |t - t'| < \beta - \alpha \implies \gamma(t) \neq \gamma(t').$$

Jordanova věta. [53, str. 138, Věta 5,4,1]

Je-li γ Jordanova cesta, potom otevřená množina $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ má právě dvě komponenty se společnou hranicí $[\gamma]$.

Zápisem $\text{Int } \gamma$ resp. $\text{Ext } \gamma$ budeme označovat omezenou resp. neomezenou komponentu množiny $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, tj. *vnitřek* resp. *vnějšek* Jordanovy cesty γ .

Tvrzení 9. [53, str. 141, Věta 5,5,2]

Je-li γ Jordanova cesta, potom $\text{Int } \gamma$ a $\text{Ext } \gamma$ jsou disjunktní neprázdné oblasti splňující

$$\mathbb{C} \setminus [\gamma] = \text{Int } \gamma \cup \text{Ext } \gamma.$$

Přitom platí

$$\text{Ext } \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma] : I(z, \gamma) = 0\}$$

a dále buď

$$(11) \quad \text{Int } \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma] : I(z, \gamma) = 1\}$$

nebo

$$(12) \quad \text{Int } \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma] : I(z, \gamma) = -1\}.$$

Platí-li (11), říkáme, že γ je *kladně orientovaná*, platí-li (12), říkáme, že γ je *záporně orientovaná*. Při průběhu podél kladně orientované Jordanovy cesty zůstává její vnitřek po levé straně, zatímco při průběhu podél záporně orientované Jordanovy cesty zůstává po pravé straně.

Označme $\gamma'_+(t)$ resp. $\gamma'_-(t)$ derivaci zprava resp. zleva zobrazení γ v bodě t . Potom γ je cesta bez bodů úvratu, jestliže

$$\frac{\gamma'_+(t)}{\gamma'_-(t)} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$$

platí pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ a v případě, že γ je uzavřená cesta, pro každé $t \in \mathbb{R}$. Uvedený vztah zajišťuje, že vektory $\gamma'_+(t)$, $\gamma'_-(t)$ nemají opačný směr. Tím je vyloučeno, aby bod $\gamma(t)$ byl *ostnem* na obrazu cesty γ ; může však být *hrotem*.

7. Analytické pokračování podél cesty

Uvažujme funkci f holomorfní v oblasti $D \subset \mathbb{C}$. Potom dvojice (f, D) je *holomorfní element*. Je-li oblast D obsažena v jiné oblasti $\tilde{D} \subset \mathbb{C}$, potom funkce $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ je *spojitým resp. holomorfním rozšířením holomorfního elementu (f, D)* , jestliže je spojitá resp. holomorfní v \tilde{D} a platí

$$\tilde{f}(z) = f(z), \quad z \in D.$$

Řekneme, že holomorfní element (f, D) lze *analyticky pokračovat podél cesty γ začínající v některém bodě oblasti D* , jestliže existuje posloupnost $\{\tau_j\}_{j=0}^n$ s vlastností

$$\alpha = \tau_0 < \dots < \tau_n = \beta$$

a posloupnost holomorfních elementů $\{(f_j, D_j)\}_{j=0}^n$ taková, že $(f_0, D_0) = (f, D)$ a že pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} \gamma(\langle \tau_{j-1}, \tau_j \rangle) &\subset D_j \\ f_{j-1}(z) &= f_j(z), \quad z \in D_{j-1} \cap D_j. \end{aligned}$$

Holomorfní element (f_n, D_n) je potom *výsledek analytického pokračování holomorfního elementu (f, D) podél cesty γ* . Důkaz následujícího tvrzení je triviální.

Tvrzení 10. *Existuje-li holomorfní rozšíření holomorfního elementu (f, D) definované v oblasti $\tilde{D} \supset D$, potom (f, D) lze analyticky pokračovat podél libovolné cesty začínající v některém bodě oblasti D a ležící v oblasti \tilde{D} . Je-li tato cesta uzavřená a je-li (f_n, D_n) výsledek příslušného analytického pokračování, potom platí*

$$f_n(z) = f(z), \quad z \in D_n \cap D.$$

8. Integrál podél cesty

Je-li $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ cesta a $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, potom *integrál z funkce f podél cesty γ* je číslo

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\gamma'(s) ds.$$

Tímto způsobem lze podél cesty γ integrovat kromě spojitě funkce také libovolnou funkci f pro kterou je zobrazení $f \circ \gamma$ spojitě a omezené skoro všude na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Při integrování podél cesty budeme využívat zejména vlastnosti vyjádřené následujícími vztahy:

$$\int_{\gamma_0 \vee \gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta, \quad \int_{\bigvee_{j=0}^n \gamma_j} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j} f(\zeta) d\zeta,$$

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(\zeta) d\zeta = - \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

$$\left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\gamma(s))| \cdot |\gamma'(s)| ds.$$

Je-li γ uzavřená, potom pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_t^{t+\beta-\alpha} f(\gamma(s))\gamma'(s) ds.$$

Uvažujme oblast $D \subset \mathbb{C}$. Potom cesty $\gamma_0 : \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \rightarrow D$, $\gamma_1 : \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \rightarrow D$, které

(i) mají společný počáteční bod a společný koncový bod

nebo

(ii) jsou obě uzavřené,

jsou *homotopické vzhledem k oblasti D* , jestliže existuje spojitě zobrazení

$$\mathcal{H} : \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow D$$

s těmito vlastnostmi:

(a) platí

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, 0) &= \gamma_0(t), & t &\in \langle \alpha, \beta \rangle \\ \mathcal{H}(t, 1) &= \gamma_1(t), & t &\in \langle \alpha, \beta \rangle, \end{aligned}$$

(b_i) jestliže platí (i), potom zobrazení

$$\langle 0, 1 \rangle \ni s \longmapsto \mathcal{H}(\alpha, s), \quad \langle 0, 1 \rangle \ni s \longmapsto \mathcal{H}(\beta, s)$$

jsou konstantní,

(b_{ii}) jestliže platí (ii), potom

$$\mathcal{H}(\alpha, s) = \mathcal{H}(\beta, s), \quad s \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Uzavřená cesta γ_0 je *homotopická s nulou vzhledem k oblasti $D \subset \mathbb{C}$* , jestliže existuje konstantní cesta γ_1 taková, že cesty γ_0, γ_1 jsou homotopické vzhledem k D .

Tvrzení 11. [53, str. 356, Věta 12,3,4]

Nepřázdňá oblast $D \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá právě tehdy, když každá uzavřená cesta ležící v D je homotopická s nulou vzhledem k D .

Vyslovme nyní klíčové tvrzení analýzy v komplexním oboru:

Cauchyho věta. [53, str. 205, Věta 7,5,4]

Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a γ je uzavřená cesta homotopická s nulou vzhledem k D . Potom

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Cauchyho větu budeme používat také v tomto tvaru (viz [53, str. 206, Věta 7,5,6]):

Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a γ_0, γ_1 jsou cesty homotopické vzhledem k D . Potom

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta.$$

9. Integrál Cauchyho typu

Je-li γ cesta, $g : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce a $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$, potom *integrál Cauchyho typu o hustotě g podél cesty γ* je číslo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Z věty o derivování křivkového integrálu podle komplexního parametru (viz [53, str. 157, Věta 6,2,7]) plyne, že funkce

$$(13) \quad \mathbb{C} \setminus [\gamma] \ni z \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

je holomorfní a platí

$$\frac{d}{dz} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma].$$

V literatuře se termínem „integrál Cauchyho typu“ resp. „hraniční hodnoty integrálu Cauchyho typu“ označuje také funkce (13) resp. její limitní hodnoty na množině $[\gamma]$.

Tvrzení 12. [39, str. 136]

Nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta bez bodů úvratu a $h : [\gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom řešení Dirichletovy úlohy

$$\Delta u = 0 \quad \text{v Int } \gamma, \quad u = h \quad \text{na } [\gamma]$$

lze v Int γ vyjádřit jako reálnou část integrálu Cauchyho typu o reálné hustotě podél cesty γ .

O hraničních hodnotách integrálu Cauchyho typu pojednává následující

Tvrzení 13. [46, str. 191]

Nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta bez bodů úvratu. Nechť $g : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je taková spojitá funkce, že integrál

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

konverguje absolutně pro každé $z \in [\gamma]$. Potom platí

$$\lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \text{Int } \gamma}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = g(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in [\gamma].$$

Pro cestu $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ budeme uvažovat funkci

$$\gamma[z] = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma].$$

Z výše uvedeného je zřejmé, že jde o funkci holomorfní a že platí

$$(14) \quad \frac{d}{dz} \gamma[z] = \frac{1}{\gamma(\alpha) - z} - \frac{1}{\gamma(\beta) - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma].$$

Dále

$$(15) \quad \gamma[z] = \ln \left| \frac{\gamma(\beta) - z}{\gamma(\alpha) - z} \right| + i \Delta_{\gamma} \arg(\zeta - z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma].$$

Je-li tedy γ uzavřená, potom

$$\gamma[z] = 2\pi i I(z, \gamma), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma].$$

Tvrzení 14. [53, str. 87, Věta 3,2,2]

Jestliže pro některé $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ a pro nějakou oblast D splňující podmínku $[\gamma] \subset D \subset \mathbb{C} \setminus \{z\}$ existuje spojitá funkce $A : D \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastností

$$A(w) \in \arg(w - z), \quad w \in D,$$

potom

$$\operatorname{Im} \gamma[z] = A(\gamma(\beta)) - A(\gamma(\alpha)).$$

Předpokládejme nyní, že $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je Jordanova cesta nebo jednoduchý oblouk, a uvažujme bod $\zeta \in [\gamma]$. V případě jednoduchého oblouku navíc předpokládejme, že

$$\gamma(\alpha) \neq \zeta \neq \gamma(\beta).$$

Podle [20, Lemma 4.6.i, str. 238] každý dostatečně malý otevřený kruh D opsaný kolem bodu ζ má tu vlastnost, že otevřená množina $D \setminus [\gamma]$ má právě dvě komponenty. Symbolem D^{ℓ} označíme tu komponentu, která je vlevo od cesty γ . Nyní definujeme

$$\gamma^{\ell}[\zeta] := \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in D^{\ell}}} \gamma[z].$$

Je-li γ kladně orientovaná Jordanova cesta, platí $D^{\ell} \subset \operatorname{Int} \gamma$ a

$$\gamma^{\ell}[\zeta] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \operatorname{Int} \gamma}} \gamma[z] = 2\pi i.$$

Je-li γ záporně orientovaná Jordanova cesta, platí $D^{\ell} \subset \operatorname{Ext} \gamma$ a

$$\gamma^{\ell}[\zeta] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \operatorname{Ext} \gamma}} \gamma[z] = 0.$$

10. Další motivy

Uvažujme neprázdou množinu $M \subset \mathbb{C}$. Modul spojitosti funkce $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(z) - f(w)| : |z - w| \leq \delta; z, w \in M\}, \quad \delta \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Funkce $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá v Dirichletově smyslu, existuje-li číslo $\delta > 0$ takové, že

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_f(s)}{s} ds < +\infty.$$

Budeme používat triviální

Tvrzení 15. Modul spojitosti je neklesající funkce. Funkce f je stejnoměrně spojitá na M právě tehdy, když

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Uvažujme $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Lagrangeova věta (o přírůstku funkce nebo o střední hodnotě).

Nechť $f : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce mající derivaci f' v intervalu (α, β) . Potom existuje $c \in (\alpha, \beta)$ tak, že

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha).$$

Periodické rozšíření zobrazení $f : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je $(\beta - \alpha)$ -periodické zobrazení $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ s vlastností

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Tvrzení 16. Pro zobrazení $f : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) platí $f(\alpha) = f(\beta)$,
- (ii) existuje periodické rozšíření zobrazení f .

Je-li některá z těchto podmínek splněna, je periodické rozšíření určeno jednoznačně.

Tvrzení 17. Nechť \mathbf{A} je reálná matice typu $n \times m$, kde $n \geq m$, a necht' \mathbf{b} je reálný n -rozměrný vektor. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) z řádků matice \mathbf{A} lze sestavit regulární čtvercovou matici,
- (ii) matice \mathbf{A} má nulový defekt,
- (iii) úloha řešit soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců má právě jedno řešení.

\mathbf{x} je řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ metodou nejmenších čtverců právě tehdy, když je řešením soustavy normálních rovnic $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$.

Lebesgueovo lemma. [10, str. 58]

Nechť (X, d) je kompaktní metrický prostor a \mathcal{G} je jeho otevřené pokrytí. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že každá množina $M \subset X$ splňující

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in M\} < \varepsilon$$

je podmnožinou nějaké množiny $G \in \mathcal{G}$. Číslo ε je tzv. Lebesgueovo číslo pokrytí \mathcal{G} .

Funkce f_0, \dots, f_{m-1} , kde $m \in \mathbb{N}$, uvažované na množině $M \subset \mathbb{C}$, jsou lineárně nezávislé nad tělesem \mathbb{R} (nad tělesem \mathbb{C}), jestliže pro libovolná $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$) z identity

$$\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j f_j(z) = 0, \quad z \in M,$$

plyne, že $\lambda_0 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$.

Výsledky disertační práce s uvedením nových poznatků

I. Příprava

11. Jedna úloha

Uvažujme čísla $a, b \in \mathbb{C}$ a označme \hat{s} řešení úlohy

$$(U) \quad |(1-s)a + sb| \longrightarrow \min, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Funkce

$$(16) \quad \mathbb{R} \ni s \longmapsto |(1-s)a + sb|$$

je spojitá, a tedy úloha (U) je řešitelná. V závislosti na a, b vyjádříme řešení \hat{s} a hodnotu

$$\hat{c} = |(1 - \hat{s})a + \hat{s}b|.$$

I. Nechť $a = b$. Potom funkce (16) je konstantní, řešením úlohy (U) je každé číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a pro každé řešení \hat{s} platí

$$\hat{c} = |a| = |b|.$$

II. Nechť $a \neq b$. Potom funkce (16) klesá v intervalu $(-\infty, s_0)$ a roste v intervalu $\langle s_0, +\infty \rangle$, kde

$$s_0 = \frac{\operatorname{Re}(\bar{a}(a-b))}{|a-b|^2} = \frac{|a-b|^2 + \operatorname{Re}(\bar{b}(a-b))}{|a-b|^2}.$$

Za stávajícího předpokladu $a \neq b$ uvažujme tři komplementární situace:

II₁. Nechť

$$\operatorname{Re}(\bar{a}(a-b)) \leq 0.$$

Potom $s_0 \leq 0$, a tedy funkce (16) roste v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, odkud plyne, že $\hat{s} = 0$ je jediným řešením úlohy (U) a platí

$$\hat{c} = |a|.$$

II₂. Nechť

$$\operatorname{Re}(\bar{a}(a-b)) > 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(\bar{b}(a-b)) \geq 0.$$

Potom $s_0 \geq 1$, a tedy funkce (16) klesá v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, odkud plyne, že $\hat{s} = 1$ je jediným řešením úlohy (U) a platí

$$\hat{c} = |b|.$$

II₃. Nechť

$$\operatorname{Re}(\bar{a}(a-b)) > 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(\bar{b}(a-b)) < 0.$$

Potom $0 < s_0 < 1$, a tedy $\hat{s} = s_0$ je jediným řešením úlohy (U) a platí

$$\hat{c} = \left| \frac{\operatorname{Im}(\bar{a}b)}{a-b} \right|.$$

Lemma 1. *Nechť pro čísla $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$. Potom $\hat{c} > 0$.*

Důkaz: Nastane-li některá z výše popsaných situací I, II₁, II₂, je důkaz triviální. Uvědomme si nyní, že předpoklad $\frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ je ekvivalentní s podmínkou $\bar{a}b \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$, a tedy na základě triviální ekvivalence

$$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0) \iff \operatorname{Re} z > -|z|$$

platí

$$(17) \quad \operatorname{Re}(\bar{a}b) > -|\bar{a}b| = -|a| \cdot |b|.$$

Uvažujme situaci II₃. Potom

$$(\operatorname{Re}(\bar{a}b) - |a|^2)(|b|^2 - \operatorname{Re}(\bar{a}b)) = \operatorname{Re}(\bar{a}(a-b)) \operatorname{Re}(\bar{b}(a-b)) < 0.$$

Dále nutně $\operatorname{Re}(\bar{a}b) < |a| \cdot |b|$. V opačném případě totiž $\operatorname{Re}(\bar{a}b) = |a| \cdot |b|$, což má za následek spor:

$$(\operatorname{Re}(\bar{a}b) - |a|^2)(|b|^2 - \operatorname{Re}(\bar{a}b)) = (|a| \cdot |b| - |a|^2)(|b|^2 - |a| \cdot |b|) = |a| \cdot |b| (|b| - |a|)^2 \geq 0.$$

Spolu s nerovností (17) tedy dostáváme $|\operatorname{Re}(\bar{a}b)| < |a| \cdot |b|$, načež

$$(\operatorname{Im}(\bar{a}b))^2 = |a|^2 |b|^2 - (\operatorname{Re}(\bar{a}b))^2 > 0,$$

odkud $\hat{c} > 0$. □

12. Omezenost spojité větve argumentu

Uvažujme spojité zobrazení $p : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ s vlastnostmi

- (i) $p(0) = 0$,
- (ii) $0 \leq t < t' < +\infty \implies p(t) \neq p(t')$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \infty$

a množiny

$$[p] = \{p(t) : 0 \leq t < +\infty\}, \quad R = \mathbb{C} \setminus [p].$$

Množina R je oblast, a to jednoduše souvislá, neboť její hranicí je souvislá množina $[p]$. Jelikož

$$\emptyset \neq R \subset \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

podle tvrzení 7 existuje spojité větve argumentu v R .

Příklad 1. Je-li

$$p(0) = 0$$

$$p(t) = t \exp\left(\frac{i}{t}\right), \quad t \in (0, +\infty),$$

potom každá spojité větve argumentu v R je neomezená na každé množině tvaru $N \cap R$, kde N je okolí bodu $0 \in \mathbb{C}$.

Věta 1. *Nechť $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a nechť*

$$\{tw : 0 < t < 1\} \subset R.$$

Potom existuje okolí N bodu $0 \in \mathbb{C}$ takové, že každá spojité větve argumentu v R je omezená na množině $N \cap R$.

Důkaz: V důkazu opakovaně využijeme tvrzení 6. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že

$$(0, 1) \subset R.$$

Množina

$$K = \{t \in \langle 0, +\infty \rangle : |p(t)| = 1\}$$

je neprázdná a kompaktní, a tedy existují čísla

$$t_{\min} = \min K, \quad t_{\max} = \max K, \quad r = \min\{|p(t)| : t_{\min} \leq t \leq t_{\max}\}.$$

Zřejmě

$$0 < r \leq 1.$$

Definujeme okolí

$$N := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

bodů $0 \in \mathbb{C}$ a zavedeme kompaktní množiny

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \\ A = \{p(t) : 0 \leq t \leq t_{\min}\}, \quad B = U \cup \{p(t) : t_{\min} \leq t \leq t_{\max}\}.$$

Protože interval $(0, 1)$ je souvislá podmnožina otevřené množiny $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$, existuje právě jedna komponenta G množiny $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ taková, že

$$(18) \quad (0, 1) \subset G \subset \mathbb{C} \setminus (A \cup B).$$

Spojité zobrazení $z \mapsto |z|$ zobrazuje oblast G na nějaký interval I . Na základě (18) platí $(0, 1) \subset I$. Protože $0 \in A$, na základě (18) platí $0 \notin G$, a tedy $0 \notin I$. Protože $U \subset B$, na základě (18) platí $U \cap G = \emptyset$, a tedy $1 \notin G$, odkud $1 \notin I$. Potom musí být $I = (0, 1)$. To znamená, že

$$G \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

což spolu s (18) dává

$$(19) \quad G \cap (0, +\infty) = (0, 1).$$

Dále platí

$$G \cap \{p(t) : 0 \leq t \leq t_{\max}\} \subset (\mathbb{C} \setminus (A \cup B)) \cap (A \cup B) = \emptyset, \\ G \cap \{p(t) : t > t_{\max}\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} = \emptyset.$$

Potom $G \cap [p] = \emptyset$, a tedy

$$G \subset \mathbb{C} \setminus [p] = R.$$

Nechť nyní $a : R \rightarrow \mathbb{R}$ je nějaká spojitá větev argumentu v R . Definujme funkci

$$b(z) := \frac{a(z)}{2\pi}, \quad z \in R.$$

Potom $\{b(z) : z \in (0, 1)\}$ je neprázdná souvislá podmnožina \mathbb{R} obsahující pouze celá čísla, a tedy existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$(20) \quad b(z) = k, \quad z \in (0, 1).$$

Spojité funkce $b : R \rightarrow \mathbb{R}$ zobrazuje oblast G na nějaký interval J , který na základě (18) a (20) obsahuje číslo k . Je-li $b(z) \in J \cap \mathbb{Z}$ pro nějaké $z \in G$, potom z je kladné, protože $b(z) \in \mathbb{Z}$, a tedy na základě (19) platí $z \in (0, 1)$, odkud na základě (20) plyne, že $b(z) = k$. Platí tedy

$$J \cap \mathbb{Z} = \{k\}.$$

Odtud plyne, že

$$J \subset (k - 1, k + 1),$$

a tedy funkce a je omezená na G . Zbývá ověřit inkluzi

$$(21) \quad N \cap R \subset G.$$

Nechť $z \in N \cap R$. Definujme

$$d := |z|.$$

Protože

$$\{z, d\} \subset N \subset \mathbb{C} \setminus B,$$

jsou z a d B -ekvivalentní. Protože

$$\{z, d\} \subset \mathbb{C} \setminus A$$

a $\mathbb{C} \setminus A$ je oblast, jsou z a d A -ekvivalentní. Protože

$$A \cap B = \{p(t_{\min})\},$$

je množina $A \cap B$ souvislá. Potom z Janiszewského věty plyne, že z a d jsou $A \cup B$ -ekvivalentní, a tedy existuje oblast $D \subset \mathbb{C}$ taková, že

$$\{z, d\} \subset D \subset \mathbb{C} \setminus (A \cup B).$$

Existuje právě jedna komponenta G' množiny $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ taková, že $D \subset G'$. S použitím (18) dostáváme

$$d \in D \cap (0, 1) \subset G' \cap G,$$

a tedy G, G' jsou dvě komponenty množiny $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ s neprázdným průnikem, což znamená, že $G' = G$, načež

$$z \in D \subset G' = G.$$

Tím je ověření inkluze (21) zakončeno. □

13. Charakterizace lineárně nezávislých funkcí

Následující lemma 2 je intuitivně jasné. Není nám však známo, že by v literatuře byla dokázána jeho netriviální část, proto ji pro úplnost dokážeme na tomto místě. V důkazu budeme v jistém okamžiku uvažovat situaci, kdy počet lineárně nezávislých funkcí je 1. V takové situaci je možno lineární nezávislost jediné funkce, řekněme $g_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$, charakterizovat prostřednictvím podmínky „ g_0 je nenulová“. Je-li totiž g_0 lineárně nezávislá a předpokládáme-li současně, že je nulová, potom pro libovolné $\lambda_0 \neq 0$ platí

$$\lambda_0 g_0(z) = 0, \quad z \in M,$$

načež z lineární nezávislosti plyne, že $\lambda_0 = 0$, což je spor, a tedy g_0 je nenulová. Naopak, je-li g_0 nenulová, tj. existuje-li $z_0 \in M$ takové, že $g_0(z_0) \neq 0$, potom z identity

$$\lambda_0 g_0(z) = 0, \quad z \in M,$$

musí plynout $\lambda_0 = 0$, neboť v opačném případě by platilo $\lambda_0 g_0(z_0) \neq 0$, což by byl spor. To ovšem znamená, že g_0 je lineárně nezávislá.

Lemma 2. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a g_0, \dots, g_{m-1} jsou reálné funkce uvažované na množině $M \subset \mathbb{C}$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) *funkce g_0, \dots, g_{m-1} jsou lineárně nezávislé nad tělesem \mathbb{R} ,*
- (ii) *existují body $w_0, \dots, w_{m-1} \in M$ takové, že matice*

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} g_0(w_0) & \cdots & g_{m-1}(w_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(w_{m-1}) & \cdots & g_{m-1}(w_{m-1}) \end{bmatrix} \quad \text{je regulární.}$$

Důkaz: Implikace (ii) \Rightarrow (i) je triviální. Implikaci (i) \Rightarrow (ii) dokážeme indukcí podle $m \in \mathbb{N}$.

Nechť $m = 1$ a funkce g_0 je lineárně nezávislá nad \mathbb{R} . Podle výše uvedeného existuje bod $w_0 \in M$ takový, že $g_0(w_0) \neq 0$, načež matice \mathbf{A}_1 je regulární.

Předpokládejme, že implikace (i) \Rightarrow (ii) platí pro nějaké $m > 1$ a dokažme její platnost pro $m + 1$ sporem. Nechť g_0, \dots, g_m jsou lineárně nezávislé nad \mathbb{R} a matice \mathbf{A}_{m+1} je singulární pro libovolnou volbu bodů $w_0, \dots, w_m \in M$. Zřejmě g_0, \dots, g_{m-1} jsou lineárně nezávislé nad \mathbb{R} a podle předpokladu existují body $w_0, \dots, w_{m-1} \in M$ takové, že matice \mathbf{A}_m je regulární. Potom existuje jediný vektor $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}]^T \in \mathbb{R}^m$ splňující

$$(22) \quad \mathbf{A}_m \boldsymbol{\lambda} = [g_m(w_0), \dots, g_m(w_{m-1})]^T.$$

Uvažujme libovolný bod $w \in M$. Zřejmě matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} g_0(w_0) & \cdots & g_{m-1}(w_0) & g_m(w_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_0(w_{m-1}) & \cdots & g_{m-1}(w_{m-1}) & g_m(w_{m-1}) \\ g_0(w) & \cdots & g_{m-1}(w) & g_m(w) \end{bmatrix} \quad \text{je singulární.}$$

Symbolem \mathbf{a}_j označme j -tý sloupec matice \mathbf{A}_m a symbolem \mathbf{b}_j označme j -tý sloupec matice \mathbf{B} . Potom existuje vektor $\boldsymbol{\lambda}' = [\lambda'_0, \dots, \lambda'_{m-1}]^T \in \mathbb{R}^m$ takový, že

$$\mathbf{b}_m = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda'_j \mathbf{b}_j,$$

odkud

$$\mathbf{A}_m \boldsymbol{\lambda}' = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda'_j \mathbf{a}_j = [g_m(w_0), \dots, g_m(w_{m-1})]^T.$$

Potom na základě (22) platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}'$. Položíme-li $\lambda_m := -1$, platí

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(w) = -g_m(w) + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j g_j(w) = -g_m(w) + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda'_j g_j(w) = 0.$$

Z poslední rovnosti platné pro libovolný bod $w \in M$ plyne, že $\lambda_0 = \dots = \lambda_m = 0$, což je spor. Tím je důkaz indukci zakončen. \square

Na základě lemmatu 2 lze dokázat důležité

Lemma 3. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a g_0, \dots, g_{m-1} jsou spojité reálné funkce uvažované na množině $M \subset \mathbb{C}$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) *funkce g_0, \dots, g_{m-1} jsou lineárně nezávislé nad tělesem \mathbb{R} ,*
- (ii) *existují body $w_0, \dots, w_{m-1} \in M$ a číslo $\eta > 0$ takové, že pro všechny vektory $[w_0^*, \dots, w_{m-1}^*]^T$, kde*

$$(23) \quad w_k^* \in M \quad \wedge \quad |w_k^* - w_k| < \eta, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

je matice

$$\mathbf{A}_m^* = \begin{bmatrix} g_0(w_0^*) & \dots & g_{m-1}(w_0^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(w_{m-1}^*) & \dots & g_{m-1}(w_{m-1}^*) \end{bmatrix} \quad \text{regulární.}$$

Důkaz: Nechť platí (i). Na základě lemmatu 2 existují $w_0, \dots, w_{m-1} \in M$ taková, že matice \mathbf{A}_m je regulární, a tedy $\det \mathbf{A}_m \neq 0$. Spojitost funkcí g_j implikuje spojitost zobrazení

$$[w_0^*, \dots, w_{m-1}^*]^T \longmapsto \det \mathbf{A}_m^*.$$

Potom existuje $\eta > 0$ takové, že pro všechny vektory $[w_0^*, \dots, w_{m-1}^*]^T$ splňující (23) platí

$$\det \mathbf{A}_m^* \neq 0,$$

tj. matice \mathbf{A}_m^* je regulární. Tím je dokázána implikace (i) \Rightarrow (ii).

Platí-li (ii), potom speciálně matice \mathbf{A}_m je regulární, a tedy na základě lemma 2 platí (i). \square

Z lemmatu 2 rovněž okamžitě plyne

Lemma 4. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $\alpha < \beta$. Spojité reálné funkce $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$ uvažované na polootevřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ jsou lineárně nezávislé nad tělesem \mathbb{R} právě tehdy, když existují dvě posloupnosti $\{\alpha_r\}_{r=0}^{m-1}$ a $\{\beta_r\}_{r=0}^{m-1}$ takové, že platí*

- (i) $\alpha \leq \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_{m-1} < \beta_{m-1} < \beta$,
- (ii) *pro všechna $[t_0, \dots, t_{m-1}] \in \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \times \dots \times \langle \alpha_{m-1}, \beta_{m-1} \rangle$ je čtvercová matice*

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t_0) & \dots & \varphi_{m-1}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(t_{m-1}) & \dots & \varphi_{m-1}(t_{m-1}) \end{bmatrix} \quad \text{regulární.}$$

14. Další pomocná tvrzení

Pro potřeby následujících tří lemmat uvažujme čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že $\alpha < \beta$, funkci $f : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, trojici $[t', t, t''] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňující podmínku

$$\alpha \leq t' \leq t \leq t'' \leq \beta \quad \wedge \quad 0 < t'' - t'$$

a označme

$$\lambda(t) = f(t') + \frac{f(t'') - f(t')}{t'' - t'}(t - t').$$

Lemma 5. *Platí*

$$|f(t) - \lambda(t)| \leq \omega_f \left(\frac{t'' - t'}{2} \right) + \frac{\omega_f(t'' - t')}{2}.$$

Důkaz: Nejdříve odvodíme výchozí nerovnost:

$$\begin{aligned} (24) \quad |f(t) - \lambda(t)| &= \left| f(t) - \frac{t'' - t}{t'' - t'} f(t') - \frac{t - t'}{t'' - t'} f(t'') \right| \\ &= \left| \frac{t'' - t}{t'' - t'} (f(t) - f(t')) + \frac{t - t'}{t'' - t'} (f(t) - f(t'')) \right| \\ &\leq \frac{t'' - t}{t'' - t'} |f(t) - f(t')| + \frac{t - t'}{t'' - t'} |f(t) - f(t'')| \\ &\leq \frac{t'' - t}{t'' - t'} \omega_f(t - t') + \frac{t - t'}{t'' - t'} \omega_f(t'' - t). \end{aligned}$$

Je-li $t - t' \leq t'' - t$, platí

$$\frac{t - t'}{t'' - t'} = \frac{t - t'}{t'' - t + t - t'} \leq \frac{t - t'}{2(t - t')} = \frac{1}{2},$$

odkud

$$\frac{t'' - t}{t'' - t'} \omega_f(t - t') + \frac{t - t'}{t'' - t'} \omega_f(t'' - t) \leq \omega_f \left(\frac{t'' - t'}{2} \right) + \frac{\omega_f(t'' - t')}{2}.$$

Je-li $t - t' \geq t'' - t$, platí

$$\frac{t'' - t}{t'' - t'} = \frac{t'' - t}{t'' - t + t - t'} \leq \frac{t'' - t}{2(t'' - t)} = \frac{1}{2},$$

odkud

$$\frac{t'' - t}{t'' - t'} \omega_f(t - t') + \frac{t - t'}{t'' - t'} \omega_f(t'' - t) \leq \frac{\omega_f(t'' - t')}{2} + \omega_f \left(\frac{t'' - t'}{2} \right).$$

□

Lemma 6. *Nechť $\omega^* : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce neklesající a konkávní na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ a nechť platí*

$$\omega_f(s) \leq \omega^*(s), \quad s \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Potom

$$|f(t) - \lambda(t)| \leq \omega^* \left(\frac{t'' - t'}{2} \right).$$

Důkaz: Využijeme této triviální vlastnosti kvadratické funkce:

$$(t - t')(t'' - t) \leq \frac{(t'' - t')^2}{4}.$$

Stejně jako v důkaze lemmatu 5 vycházíme z nerovnosti (24):

$$\begin{aligned} |f(t) - \lambda(t)| &\leq \frac{t'' - t}{t'' - t'} \omega_f(t - t') + \frac{t - t'}{t'' - t'} \omega_f(t'' - t) \leq \frac{t'' - t}{t'' - t'} \omega^*(t - t') + \frac{t - t'}{t'' - t'} \omega^*(t'' - t) \\ &\leq \omega^* \left(\frac{t'' - t}{t'' - t'} (t - t') + \frac{t - t'}{t'' - t'} (t'' - t) \right) = \omega^* \left(\frac{2(t'' - t)(t - t')}{t'' - t'} \right) \leq \omega^* \left(\frac{t'' - t'}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Lemma 7. *Nechť funkce f má spojitou derivaci f' na intervalu $\langle t', t'' \rangle$ a necht existuje $M > 0$ takové, že*

$$|f''(s)| \leq M, \quad s \in (t', t'').$$

Potom

$$|f(t) - \lambda(t)| \leq \frac{M}{2}(t'' - t')^2.$$

Důkaz: Je-li $t = t'$ nebo $t = t''$, je důkaz triviální. Nechť $t' < t < t''$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že t není ve větší vzdálenosti od t' než od t'' , neboli $t - t' \leq (t'' - t')/2$. Podle Lagrangeovy věty existují čísla $c_1 \in (t', t)$, $c_2 \in (t', t'')$ taková, že

$$\frac{f(t) - f(t')}{t - t'} = f'(c_1), \quad \frac{f(t'') - f(t')}{t'' - t'} = f'(c_2).$$

Potom

$$f(t) - \lambda(t) = \left(\frac{f(t) - f(t')}{t - t'} - \frac{f(t'') - f(t')}{t'' - t'} \right) (t - t') = (f'(c_1) - f'(c_2))(t - t').$$

Je-li $c_1 = c_2$, je zbytek důkazu triviální. Nechť $c_1 \neq c_2$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c_1 < c_2$. Podle Lagrangeovy věty existuje číslo $c_3 \in (c_1, c_2)$ takové, že

$$\frac{f'(c_1) - f'(c_2)}{c_1 - c_2} = f''(c_3).$$

Potom

$$f(t) - \lambda(t) = f''(c_3)(c_1 - c_2)(t - t'),$$

odkud

$$|f(t) - \lambda(t)| \leq M(c_2 - c_1)(t - t') \leq \frac{M}{2}(t'' - t')^2.$$

□

Lemma 8. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Nechť*

$$x : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

jsou spojitě funkce a necht x roste v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom zobrazení

$$H(t, u) = x(t) + i(y(t) + u), \quad [t, u] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R},$$

je homeomorfismus pásu

$$P = \langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R}$$

na pás

$$Q = \{\xi + i\eta : x(\alpha) \leq \xi \leq x(\beta), \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Důkaz: Podle věty o inverzní funkci existuje rostoucí spojitá funkce

$$x^{-1} : \langle x(\alpha), x(\beta) \rangle \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle$$

taková, že pro všechny dvojice

$$[t, \xi] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle x(\alpha), x(\beta) \rangle$$

platí

$$x^{-1}(\xi) = t \iff x(t) = \xi.$$

Zavedme zobrazení

$$G(\xi + i\eta) := [x^{-1}(\xi), \eta - y(x^{-1}(\xi))], \quad \xi + i\eta \in Q.$$

Potom G je spojitě a zobrazuje pás Q do pásu P . Pro $[t, u] \in P$ platí

$$G(H(t, u)) = [x^{-1}(x(t)), y(t) + u - y(x^{-1}(x(t)))] = [t, u],$$

a tedy $G \circ H$ je identické zobrazení v P . Pro $\xi + i\eta \in Q$ platí

$$H(G(\xi + i\eta)) = x(x^{-1}(\xi)) + i(y(x^{-1}(\xi)) + \eta - y(x^{-1}(\xi))) = \xi + i\eta,$$

a tedy $H \circ G$ je identické zobrazení v Q . Potom G je inverzní k H , a tedy H je homeomorfismus pásu P na pás Q .

□

II. Cesty

15. Vlastnosti cest

Příklad 2. Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ a σ je orientovaná úsečka od a do b . Nechť nejdříve

$$z \in \mathbb{C} \setminus [\sigma].$$

Určeme $\varphi \in \mathbb{R}$ podmínkami

$$\operatorname{Im} \frac{b-z}{a-z} > 0 \implies \varphi \in (0, \pi) \cap \arg \frac{b-z}{a-z},$$

$$\operatorname{Im} \frac{b-z}{a-z} = 0 \implies \varphi = 0,$$

$$\operatorname{Im} \frac{b-z}{a-z} < 0 \implies \varphi \in (-\pi, 0) \cap \arg \frac{b-z}{a-z}.$$

Potom na základě (15) platí

$$\sigma[z] = \ln \left| \frac{b-z}{a-z} \right| + i\varphi.$$

Nyní předpokládejme, že

$$\zeta \in [\sigma] \quad \wedge \quad a \neq \zeta \neq b.$$

Potom $\frac{b-\zeta}{a-\zeta} < 0$ a

$$\sigma^\ell[\zeta] = \ln \frac{b-\zeta}{\zeta-a} + i\pi.$$

Příklad 3. Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ a γ je jednoduchý oblouk od a do b . Nechť

$$\zeta \in [\gamma] \quad \wedge \quad a \neq \zeta \neq b.$$

Jestliže platí

$$[\gamma] \cap [\sigma] = \{a, b\},$$

kde σ je orientovaná úsečka od a do b , potom

$$\eta = \gamma \vee (\overset{\circ}{\sigma})$$

je Jordanova cesta. Protože $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [\sigma]$ a protože funkce $\sigma[\cdot]$ je holomorfní a tedy spojitá v $\mathbb{C} \setminus [\sigma]$, platí

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \sigma[z] = \sigma[\zeta].$$

Potom

$$\gamma^\ell[\zeta] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in D^\ell}} \gamma[z] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in D^\ell}} (\sigma[z] + \eta[z]) = \sigma[\zeta] + \eta^\ell[\zeta],$$

odkud

$$\gamma^\ell[\zeta] = \begin{cases} \sigma[\zeta] + 2\pi i, & \text{je-li } \eta \text{ kladně orientovaná,} \\ \sigma[\zeta], & \text{je-li } \eta \text{ záporně orientovaná.} \end{cases}$$

Příklad 4. Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Nechť

$$(25) \quad a \neq \zeta \neq b, \quad \wedge \quad \frac{b-\zeta}{a-\zeta} \in \mathbb{C} \setminus \langle 0, +\infty \rangle, \\ \gamma = \sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b},$$

kde $\sigma_{a\zeta}$ je orientovaná úsečka od a do ζ a $\sigma_{\zeta b}$ je orientovaná úsečka od ζ do b . Zřejmě $\zeta \in [\gamma]$. Jestliže $\frac{b-\zeta}{a-\zeta} < 0$, potom γ je orientovaná úsečka od a do b a na základě příkladu 2 platí

$$\gamma^\ell[\zeta] = \ln \left| \frac{b-\zeta}{a-\zeta} \right| + i\varphi, \quad \text{kde } \varphi = \pi \in (0, 2\pi) \cap \arg \frac{b-\zeta}{a-\zeta}.$$

Předpokládejme nyní, že $\operatorname{Im} \frac{b-\zeta}{a-\zeta} \neq 0$. Potom γ je jednoduchý oblouk od a do b a platí

$$[\gamma] \cap [\sigma] = \{a, b\},$$

kde σ je orientovaná úsečka od a do b . Zřejmě $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [\sigma]$. Je-li $\operatorname{Im} \frac{b-\zeta}{a-\zeta} < 0$, je cesta $\gamma \vee (\cdot\sigma)$ kladně orientovaná a na základě příkladů 3 a 2 dostáváme

$$\gamma^\ell[\zeta] = \sigma[\zeta] + 2\pi i = \ln \left| \frac{b-\zeta}{a-\zeta} \right| + i\varphi, \quad \text{kde } \varphi \in (\pi, 2\pi) \cap \arg \frac{b-\zeta}{a-\zeta}.$$

Je-li $\operatorname{Im} \frac{b-\zeta}{a-\zeta} > 0$, je cesta $\gamma \vee (\cdot\sigma)$ záporně orientovaná a na základě příkladů 3 a 2 dostáváme

$$\gamma^\ell[\zeta] = \sigma[\zeta] = \ln \left| \frac{b-\zeta}{a-\zeta} \right| + i\varphi, \quad \text{kde } \varphi \in (0, \pi) \cap \arg \frac{b-\zeta}{a-\zeta}.$$

Tím je dokázáno, že pro libovolné $\zeta \in \mathbb{C}$ splňující (25) platí

$$(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})^\ell[\zeta] = \ln \left| \frac{b-\zeta}{a-\zeta} \right| + i\varphi, \quad \text{kde } \varphi \in (0, 2\pi) \cap \arg \frac{b-\zeta}{a-\zeta}.$$

Věta 2. Nechť $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Nechť $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je cesta a nechť funkce

$$x(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}\gamma(t)), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

kde \bar{c} je číslo komplexně sdružené k číslu c , roste v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom platí

(i) γ je jednoduchý oblouk a zobrazení

$$H(t, u) = \gamma(t) + iuc, \quad [t, u] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R},$$

je orientaci zachovávající homeomorfismus pásu

$$P = \langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R}$$

na pás

$$Q = \{c(\xi + i\eta) : x(\alpha) \leq \xi \leq x(\beta), \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Zejména oblast

$$\{H(t, u) : \alpha < t < \beta, u > 0\}$$

je vlevo a oblast

$$\{H(t, u) : \alpha < t < \beta, u < 0\}$$

je vpravo od cesty γ .

(ii) Položíme-li

$$a := \gamma(\alpha), \quad b := \gamma(\beta),$$

potom pro každý bod $\zeta = \gamma(\tau)$, kde $\alpha < \tau < \beta$, platí $\frac{b-\zeta}{a-\zeta} \in \mathbb{C} \setminus \langle 0, +\infty \rangle$ a

$$(26) \quad \gamma^\ell[\zeta] = \ln \left| \frac{b-\zeta}{a-\zeta} \right| + i\varphi,$$

kde číslo φ je jednoznačně určeno podmínkou

$$(27) \quad \varphi \in (0, 2\pi) \cap \arg \frac{b-\zeta}{a-\zeta}.$$

(iii) Zavedeme-li funkci

$$y(t) = \operatorname{Im}(\bar{c}\gamma(t)), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

potom ke každému $\Delta > 0$ existuje $d > 0$ takové, že pro každou trojici $[t', t, t''] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňující podmínku

$$\alpha \leq t' \leq t \leq t'' \leq \beta \quad \wedge \quad 0 < t'' - t' \leq d$$

platí

$$\left| y(t) - y(t') - \frac{y(t'') - y(t')}{x(t'') - x(t')} (x(t) - x(t')) \right| \leq \Delta.$$

Důkaz: Pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$\gamma(t) = |c| \gamma(t) = c \bar{c} \gamma(t) = c(x(t) + iy(t)).$$

Pro $t, t' \in \langle \alpha, \beta \rangle$ taková, že $t \neq t'$, platí $x(t) \neq x(t')$, odkud

$$\gamma(t) - \gamma(t') = c \left((x(t) - x(t')) + i(y(t) - y(t')) \right) \neq 0,$$

a tedy γ je jednoduchý oblouk. Pro $[t, u] \in P$ platí

$$H(t, u) = c(x(t) + i(y(t) + u)),$$

což na základě lemmatu 8 znamená, že H je homeomorfismus pásu P na pás Q . Uvažujme libovolný čtverec

$$\langle t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon \rangle \times \langle u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon \rangle \subset P.$$

Označme q kladně orientovanou Jordanovu cestu, jejíž obraz je hranicí tohoto čtverce a položme

$$z_0 = H(t_0, u_0).$$

Je pouze věcí rutiny ukázat, že

$$\Delta_{H \circ q} \arg(\zeta - z_0) = 2\pi.$$

Tedy homeomorfismus H zachovává orientaci. Tím je vlastnost (i) dokázána.

Nechť

$$\zeta = \gamma(\tau), \quad \text{kde } \alpha < \tau < \beta.$$

Protože γ je jednoduchý oblouk od a do b , platí

$$a \neq \zeta \neq b.$$

Zřejmě $\frac{b-\zeta}{a-\zeta} \neq 0$. Předpokládejme na okamžik, že $\frac{b-\zeta}{a-\zeta} > 0$. Potom

$$0 > \frac{x(\beta) - x(\tau)}{x(\alpha) - x(\tau)} = \frac{\operatorname{Re}(\bar{c}\gamma(\beta)) - \operatorname{Re}(\bar{c}\gamma(\tau))}{\operatorname{Re}(\bar{c}\gamma(\alpha)) - \operatorname{Re}(\bar{c}\gamma(\tau))} = \frac{\operatorname{Re}(\bar{c}(b - \zeta))}{\operatorname{Re}(\bar{c}(a - \zeta))} = \frac{b - \zeta}{a - \zeta} \cdot \frac{\operatorname{Re}(\bar{c}(a - \zeta))}{\operatorname{Re}(\bar{c}(a - \zeta))} = \frac{b - \zeta}{a - \zeta},$$

což je spor. Musí tedy být

$$\frac{b - \zeta}{a - \zeta} \in \mathbb{C} \setminus \langle 0, +\infty \rangle.$$

Nechť dále

$$u > 0, \quad M = \{\zeta + ivc : u \leq v < +\infty\}.$$

Zřejmě

$$\gamma(\tau) = \zeta \in \mathbb{C} \setminus M.$$

Uvažujme $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ splňující $t \neq \tau$. Předpokládejme na okamžik, že $\gamma(t) \in M$. Potom existuje $v_0 \geq u$ takové, že

$$\gamma(t) = \zeta + iv_0c,$$

odkud

$$x(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}(\zeta + iv_0c)) = x(\tau) + \operatorname{Re}(iv_0\bar{c}c) = x(\tau),$$

což je spor, protože x je rostoucí, a tedy prostá v $\langle \alpha, \beta \rangle$. Musí tedy být

$$\gamma(t) \in \mathbb{C} \setminus M.$$

Tím je dokázáno, že cesta γ leží v $\mathbb{C} \setminus M$. Uvažujme orientované úsečky

$$\begin{aligned}\sigma_{a\zeta}(t) &= (1-t)a + t\zeta, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \sigma_{\zeta b}(t) &= (1-t)\zeta + tb, & t \in \langle 0, 1 \rangle.\end{aligned}$$

Potom pro $0 \leq t < t' \leq 1$ platí

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{a\zeta}(t')) - \operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{a\zeta}(t)) &= \operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{a\zeta}(t' - t)) \\ &= (t' - t)\operatorname{Re}(\bar{c}(\zeta - a)) = (t' - t)(x(\tau) - x(\alpha)) > 0, \\ \operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{\zeta b}(t')) - \operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{\zeta b}(t)) &= \operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{\zeta b}(t' - t)) \\ &= (t' - t)\operatorname{Re}(\bar{c}(b - \zeta)) = (t' - t)(x(\beta) - x(\tau)) > 0,\end{aligned}$$

a tedy funkce

$$\begin{aligned}\langle 0, 1 \rangle \ni t &\longmapsto \operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{a\zeta}(t)), \\ \langle 0, 1 \rangle \ni t &\longmapsto \operatorname{Re}(\bar{c}\sigma_{\zeta b}(t))\end{aligned}$$

jsou rostoucí. Potom zajisté také funkce

$$x^*(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})(t)), \quad t \in \langle 0, 2 \rangle,$$

roste v intervalu $\langle 0, 2 \rangle$. Zřejmě

$$(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})(1) = \zeta \in \mathbb{C} \setminus M.$$

Uvažujme $t \in \langle 0, 2 \rangle$ splňující $t \neq 1$. Předpokládejme na okamžik, že $(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})(t) \in M$. Potom existuje $v_0 \geq u$ takové, že

$$(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})(t) = \zeta + iv_0c,$$

odkud

$$x^*(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}(\zeta + iv_0c)) = x^*(1) + \operatorname{Re}(iv_0\bar{c}c) = x^*(1),$$

což je spor, protože x^* je rostoucí, a tedy prostá v $\langle 0, 2 \rangle$. Musí tedy být

$$(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})(t) \in \mathbb{C} \setminus M.$$

Tím je dokázáno, že cesta $\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b}$ leží v $\mathbb{C} \setminus M$. Cesta $\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b} \vee (\cdot\gamma)$ je uzavřená, leží v neprázdné jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{C} \setminus M$, a tedy v důsledku Cauchyho věty platí

$$(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})[\zeta + iuc] - \gamma[\zeta + iuc] = \left(\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b} \vee (\cdot\gamma)\right)[\zeta + iuc] = 0,$$

odkud

$$\gamma^\ell[\zeta] = \lim_{u \downarrow 0} \gamma[\zeta + icu] = \lim_{u \downarrow 0} (\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})[\zeta + iuc] = (\sigma_{a\zeta} \vee \sigma_{\zeta b})^\ell[\zeta].$$

Potom na základě příkladu 4 platí (26), kde φ je jednoznačně určeno podmínkou (27). Tím je vlastnost (ii) dokázána.

Podle věty o inverzní funkci existuje rostoucí spojitá funkce

$$x^{-1} : \langle x(\alpha), x(\beta) \rangle \longrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle$$

taková, že pro všechny dvojice

$$[t, \xi] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle x(\alpha), x(\beta) \rangle$$

platí

$$x^{-1}(\xi) = t \iff x(t) = \xi.$$

Zavedme funkci

$$f(\xi) = y(x^{-1}(\xi)), \quad \xi \in \langle x(\alpha), x(\beta) \rangle.$$

Potom f je stejnoměrně spojitá. Necht $\Delta > 0$. Na základě tvrzení 15 existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\omega_f\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\omega_f(s)}{2} \leq \Delta, \quad s \in (0, \delta).$$

Protože funkce x je stejnoměrně spojitá na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, existuje $d > 0$ takové, že platí implikace

$$\left(\alpha \leq \tau \leq \tau' \leq \beta, \quad \tau' - \tau \leq d\right) \implies x(\tau') - x(\tau) \leq \delta.$$

Nechť trojice $[t', t, t''] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňuje podmínku

$$\alpha \leq t' \leq t \leq t'' \leq \beta \quad \wedge \quad 0 < t'' - t' \leq d.$$

Položme

$$\xi' = x(t'), \quad \xi = x(t), \quad \xi'' = x(t'').$$

Potom

$$x(\alpha) \leq \xi' \leq \xi \leq \xi'' \leq x(\beta) \quad \wedge \quad 0 < \xi'' - \xi' \leq \delta.$$

Protože

$$\begin{aligned} \left| y(t) - y(t') - \frac{y(t'') - y(t')}{x(t'') - x(t')} (x(t) - x(t')) \right| &= \left| y(x^{-1}(\xi)) - y(x^{-1}(\xi')) - \frac{y(x^{-1}(\xi'')) - y(x^{-1}(\xi'))}{\xi'' - \xi'} (\xi - \xi') \right| \\ &= \left| f(\xi) - f(\xi') - \frac{f(\xi'') - f(\xi')}{\xi'' - \xi'} (\xi - \xi') \right|, \end{aligned}$$

na základě lemmatu 5 platí

$$\left| y(t) - y(t') - \frac{y(t'') - y(t')}{x(t'') - x(t')} (x(t) - x(t')) \right| \leq \omega_f \left(\frac{\xi'' - \xi'}{2} \right) + \frac{\omega_f(\xi'' - \xi')}{2} \leq \Delta.$$

Tím je vlastnost (iii) dokázána. □

16. Cesta Γ

Definice 1. Buď Γ kladně orientovaná Jordanova cesta bez bodů úvratu, která je definovaná na kompaktním intervalu délky $T > 0$. Buď Ω resp. Ω_∞ vnitřek resp. vnějšek cesty Γ .

Z definice plyne, že existuje $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{d_j\}_{j=0}^n$ tak, že

$$d_0 < \dots < d_n = d_0 + T$$

a že pro každé $j \in \{0, \dots, n-1\}$ je derivace Γ' zobrazení Γ spojitá a nenulová na intervalu $\langle d_j, d_{j+1} \rangle$.

Poznámka 1. Posloupnost $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ rozšíříme do souboru $\{d_k : k \in \mathbb{Z}\}$ tak, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ položíme $d_k := d_j + pT$, kdykoli $j \in \{0, \dots, n-1\}$ a $p \in \mathbb{Z}$ splňuje $pn = k - j$. Potom pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je derivace Γ' zobrazení Γ spojitá a nenulová na intervalu $\langle d_k, d_{k+1} \rangle$ a platí

$$(28) \quad d_{k+n} = d_k + T.$$

Z definice dále plyne, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(29) \quad \frac{\Gamma'_+(t)}{\Gamma'_-(t)} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0).$$

Lemma 9. Pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ existuje čtveřice $[\alpha_\tau, \beta_\tau, \Delta, c] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ splňující tyto podmínky:

- (i) $\alpha_\tau < \tau < \beta_\tau$, $\Delta > 0$, $|c| = 1$,
- (ii) funkce $x(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}\Gamma(t))$ roste v intervalu $\langle \alpha_\tau, \beta_\tau \rangle$,
- (iii) pro každou dvojici $[t, u] \in \langle \alpha_\tau, \beta_\tau \rangle \times (0, \Delta)$ platí

$$\Gamma(t) + iuc \in \Omega, \quad \Gamma(t) - iuc \in \Omega_\infty,$$

- (iv) pro funkci $y(t) = \operatorname{Im}(\bar{c}\Gamma(t))$ a pro každou trojici $[t', t, t''] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s vlastnostmi

$$\alpha_\tau \leq t' \leq t \leq t'' \leq \beta_\tau, \quad 0 < t'' - t'$$

platí

$$\left| y(t) - y(t') - \frac{y(t'') - y(t')}{x(t'') - x(t')} (x(t) - x(t')) \right| \leq \Delta.$$

Důkaz: Nechť $\tau \in \mathbb{R}$. V souladu s (29) existují čísla $\varphi^+ \in \arg \Gamma'_+(\tau)$ a $\varphi^- \in \arg \Gamma'_-(\tau)$ splňující

$$|\varphi^+ - \varphi^-| < \pi.$$

Nyní položíme

$$c := e^{i \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}}.$$

Existují čísla $\alpha^*, \beta^* \in \mathbb{R}$ taková, že $\alpha^* < \tau < \beta^*$ a že funkce $x(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}\Gamma(t))$ má spojitou derivaci v intervalu $\langle \alpha^*, \tau \rangle$ a také v intervalu $\langle \tau, \beta^* \rangle$. Označme $x'_+(\tau)$ a $x'_-(\tau)$ derivaci funkce x zprava a zleva v bodě τ . Potom platí

$$x'_+(\tau) = \operatorname{Re}(\bar{c}\Gamma'_+(\tau)) = |\Gamma'_+(\tau)| \cos \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2} > 0,$$

$$x'_-(\tau) = \operatorname{Re}(\bar{c}\Gamma'_-(\tau)) = |\Gamma'_-(\tau)| \cos \frac{\varphi^- - \varphi^+}{2} > 0,$$

a tedy existují čísla $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\alpha^* \leq \alpha_0 < \tau < \beta_0 \leq \beta^*$$

a že funkce x má kladnou derivaci v intervalu $\langle \alpha_0, \tau \rangle$ a také v intervalu $\langle \tau, \beta_0 \rangle$. To znamená, že funkce x roste v intervalu $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$. Protože funkce x je spojitá a T -periodická, musí být

$$\beta_0 - \alpha_0 < T.$$

Potom $\mathbb{C} \setminus \{\Gamma(t) : \beta_0 \leq t \leq \alpha_0 + T\}$ je otevřená množina obsahující bod $\Gamma(\tau)$. Podle tvrzení (i) z věty 2 tvoří množiny

$$\{\Gamma(t) + iuc : \alpha' \leq t \leq \beta', |u| \leq \Delta'\}, \quad \text{kde } \alpha_0 \leq \alpha' < \tau < \beta' \leq \beta_0, \Delta' > 0,$$

fundamentální systém okolí bodu $\Gamma(\tau)$. Odtud plyne, že existují α, β a Δ s vlastnostmi

$$(30) \quad \alpha_0 \leq \alpha < \tau < \beta \leq \beta_0, \quad \Delta > 0, \\ \{\Gamma(t) + iuc : \alpha \leq t \leq \beta, |u| \leq \Delta\} \subset \mathbb{C} \setminus \{\Gamma(t) : \beta_0 \leq t \leq \alpha_0 + T\}.$$

Nyní dokážeme, že platí

$$(31) \quad \left(\alpha \leq t \leq \beta \quad \wedge \quad |u| \leq \Delta \quad \wedge \quad \Gamma(t) + iuc \in [\Gamma] \right) \implies u = 0.$$

Nechť tedy $\alpha \leq t \leq \beta$, $|u| \leq \Delta$, a $\Gamma(t) + iuc \in [\Gamma]$. Existuje $s \in \langle \alpha_0, \alpha_0 + T \rangle$ takové, že

$$(32) \quad \Gamma(t) + iuc = \Gamma(s).$$

Protože v důsledku (30) je vyloučena situace $\beta_0 \leq s \leq \alpha_0 + T$, musí být $\alpha_0 \leq s < \beta_0$. Potom pro zobrazení

$$H(t', u') = \Gamma(t') + iu'c, \quad [t', u'] \in \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \times \mathbb{R},$$

na základě (32) platí

$$H(t, u) = H(s, 0).$$

Navíc zobrazení H je na základě tvrzení (i) z věty 2 injektivní, a tedy $[t, u] = [s, 0]$, odkud $u = 0$. Tím je dokázána implikace (31), z níž plyne, že

$$Q^+ := \{\Gamma(t) + iuc : \alpha \leq t \leq \beta, 0 < u \leq \Delta\} \subset \mathbb{C} \setminus [\Gamma],$$

$$Q^- := \{\Gamma(t) - iuc : \alpha \leq t \leq \beta, 0 < u \leq \Delta\} \subset \mathbb{C} \setminus [\Gamma].$$

Protože množiny Q^+ a Q^- jsou souvislé, na základě tvrzení 6 existuje právě jedna komponenta otevřené množiny $\mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ obsahující množinu Q^+ a existuje právě jedna komponenta množiny $\mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ obsahující množinu Q^- . Potom podle tvrzení 8 je funkce $z \mapsto I(z, \Gamma)$ konstantní na každé z těchto dvou množin. Nyní položíme

$$a = \Gamma(\tau) + i\Delta c \in Q^+, \quad b = \Gamma(\tau) - i\Delta c \in Q^-$$

a dokážeme, že

$$(33) \quad I(a, \Gamma) - I(b, \Gamma) = 1.$$

Za tím účelem zavedme cesty

$$\begin{aligned}\gamma(t) &:= \Gamma(t), & t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \\ \Gamma^*(t) &:= \Gamma(t), & t \in \langle \beta, \alpha + T \rangle.\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\gamma \vee \Gamma^* = \Gamma.$$

Dále zavedme cesty

$$\begin{aligned}\gamma^+(t) &:= \Gamma(t) + i\Delta c, & t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \\ \gamma^-(t) &:= \Gamma(t) - i\Delta c, & t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \\ \gamma_\alpha^+(u) &:= \Gamma(\alpha) + iuc, & u \in \langle 0, \Delta \rangle, \\ \gamma_\alpha^-(u) &:= \Gamma(\alpha) - iuc, & u \in \langle 0, \Delta \rangle, \\ \gamma_\beta^+(u) &:= \Gamma(\beta) + iuc, & u \in \langle 0, \Delta \rangle, \\ \gamma_\beta^-(u) &:= \Gamma(\beta) - iuc, & u \in \langle 0, \Delta \rangle.\end{aligned}$$

Užitím vlastností homeomorfismu H lze ukázat, že

$$\gamma_0 = \gamma_\alpha^- \vee \gamma^- \vee (\dot{\gamma}_\beta^-) \vee \gamma_\beta^+ \vee (\dot{\gamma}^+) \vee (\dot{\gamma}_\alpha^+)$$

je kladně orientovaná Jordanova cesta a že

$$\text{Int } \gamma_0 = \{\Gamma(t) + iuc : \alpha < t < \beta, |u| < \Delta\}.$$

Protože $\Gamma(\tau) \in \text{Int } \gamma_0$, platí $\gamma_0[\Gamma(\tau)] = 2\pi i$, a tedy

$$(34) \quad \gamma_\alpha^-[\Gamma(\tau)] + \gamma^-[\Gamma(\tau)] - \gamma_\beta^-[\Gamma(\tau)] + \gamma_\beta^+[\Gamma(\tau)] - \gamma^+[\Gamma(\tau)] - \gamma_\alpha^+[\Gamma(\tau)] = \gamma_0[\Gamma(\tau)] = 2\pi i.$$

Podobně

$$\gamma_1 = \gamma_\alpha^- \vee \gamma^- \vee (\dot{\gamma}_\beta^-) \vee (\dot{\gamma})$$

je kladně orientovaná Jordanova cesta, $a \in \text{Ext } \gamma_1$, podle tvrzení 9 platí $\gamma_1[a] = 0$, a tedy

$$\gamma[a] = \gamma_\alpha^-[a] + \gamma^-[a] - \gamma_\beta^-[a] - \gamma_1[a] = \gamma_\alpha^-[a] + \gamma^-[a] - \gamma_\beta^-[a].$$

Cesta

$$\gamma_2 = \gamma_\alpha^- \vee \gamma^- \vee (\dot{\gamma}_\beta^-) \vee \Gamma^*$$

je uzavřená a platí

$$2\pi i I(a, \Gamma) = \Gamma[a] = \gamma[a] + \Gamma^*[a] = \gamma_\alpha^-[a] + \gamma^-[a] - \gamma_\beta^-[a] + \Gamma^*[a] = \gamma_2[a] = 2\pi i I(a, \gamma_2).$$

Souvislá množina $C = \{\Gamma(\tau) + iuc : 0 \leq u \leq \Delta\}$ splňuje podmínku

$$\{a, \Gamma(\tau)\} \subset C \subset \mathbb{C} \setminus [\gamma_2].$$

Na základě tvrzení 6 a 8 opět existuje jediná komponenta otevřené množiny $\mathbb{C} \setminus [\gamma_2]$ obsahující množinu C a funkce $z \mapsto I(z, \gamma_2)$ je konstantní na C . Potom

$$2\pi i I(a, \gamma_2) = 2\pi i I(\Gamma(\tau), \gamma_2) = \gamma_2[\Gamma(\tau)] = \gamma_\alpha^-[\Gamma(\tau)] + \gamma^-[\Gamma(\tau)] - \gamma_\beta^-[\Gamma(\tau)] + \Gamma^*[\Gamma(\tau)].$$

Právě jsme dokázali

$$2\pi i I(a, \Gamma) = \gamma_\alpha^-[\Gamma(\tau)] + \gamma^-[\Gamma(\tau)] - \gamma_\beta^-[\Gamma(\tau)] + \Gamma^*[\Gamma(\tau)].$$

Stejným způsobem lze dokázat

$$2\pi i I(b, \Gamma) = \gamma_\alpha^+[\Gamma(\tau)] + \gamma^+[\Gamma(\tau)] - \gamma_\beta^+[\Gamma(\tau)] + \Gamma^*[\Gamma(\tau)].$$

Potom na základě (34) platí

$$\begin{aligned}2\pi i (I(a, \Gamma) - I(b, \Gamma)) &= \gamma_\alpha^-[\Gamma(\tau)] + \gamma^-[\Gamma(\tau)] - \gamma_\beta^-[\Gamma(\tau)] + \gamma_\beta^+[\Gamma(\tau)] - \gamma^+[\Gamma(\tau)] - \gamma_\alpha^+[\Gamma(\tau)] \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

Tím je dokázána rovnost (33), z níž plyne, že $a \in \Omega$, $b \in \Omega_\infty$, neboť Γ je kladně orientovaná Jordanova cesta. Potom

$$Q^+ \subset \Omega, \quad Q^- \subset \Omega_\infty.$$

Podle tvrzení (iii) z věty 2 existuje $d > 0$ takové, že pro každou trojici $[t', t, t''] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňující podmínku

$$\alpha \leq t' \leq t \leq t'' \leq \beta \quad \wedge \quad 0 < t'' - t' \leq d$$

platí

$$\left| y(t) - y(t') - \frac{y(t'') - y(t')}{x(t'') - x(t')} (x(t) - x(t')) \right| \leq \Delta.$$

Jestliže nyní položíme

$$\alpha_\tau := \max \left\{ \alpha, \tau - \frac{d}{2} \right\}, \quad \beta_\tau := \min \left\{ \beta, \tau + \frac{d}{2} \right\},$$

splňuje čtveřice $[\alpha_\tau, \beta_\tau, \Delta, c]$ podmínky (i)–(iv) dokazovaného lemmatu. □

Věta 3. Existuje $\varepsilon \in (0, \frac{T}{2})$ s následujícími vlastnostmi. Pro každou dvojici $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kde

$$0 < \beta - \alpha \leq \varepsilon,$$

existuje dvojice $[\Delta, c] \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, kde $\Delta > 0$, $|c| = 1$, taková, že

$$(35) \quad \Gamma(t) + iuc \in \Omega, \quad \Gamma(t) - iuc \in \Omega_\infty$$

platí pro každou dvojici $[t, u] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times (0, \Delta)$ a že funkce

$$(36) \quad x(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}\Gamma(t)), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

$$(37) \quad y(t) = \operatorname{Im}(\bar{c}\Gamma(t)), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

mají tyto vlastnosti:

(i) funkce x roste v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$,

(ii) pro každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$\left| y(t) - y(\alpha) - \frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} (x(t) - x(\alpha)) \right| \leq \Delta.$$

Důkaz: Uvažujme funkci

$$e(t) = e^{i\frac{2\pi t}{T}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a pro každou dvojici $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňující $\alpha < \beta$ označme

$$e(\langle \alpha, \beta \rangle) = \{e(t) : \alpha < t < \beta\}, \quad e(\langle \alpha, \beta \rangle) = \{e(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}.$$

Pro libovolné $\tau \in \mathbb{R}$ budeme uvažovat čtveřici $[\alpha_\tau, \beta_\tau, \Delta, c] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ z lemmatu 9. Potom množiny

$$e(\langle \alpha_\tau, \beta_\tau \rangle), \quad \text{kde } \tau \in \mathbb{R},$$

tvoří otevřené pokrytí jednotkové kružnice. Na základě Lebesqueova lemmatu potom existuje $\varepsilon \in (0, \frac{T}{2})$ takové, že každá množina

$$e(\langle \alpha, \beta \rangle), \quad \text{kde } 0 < \beta - \alpha \leq \varepsilon,$$

je obsažena aspoň v jednom členu tohoto pokrytí. Nechť dvojice $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ splňuje podmínku

$$0 < \beta - \alpha \leq \varepsilon.$$

Potom existuje $\tau \in \mathbb{R}$ takové, že

$$e(\langle \alpha, \beta \rangle) \subset e(\langle \alpha_\tau, \beta_\tau \rangle).$$

Následně existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$\langle \alpha + kT, \beta + kT \rangle \subset \langle \alpha_\tau, \beta_\tau \rangle.$$

Na základě lemmatu 9 pro každou dvojici $[t, u] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times (0, \Delta)$ platí

$$\Gamma(t + kT) + iuc \in \Omega, \quad \Gamma(t + kT) - iuc \in \Omega_\infty,$$

funkce x roste v intervalu $\langle \alpha + kT, \beta + kT \rangle$ a pro každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$\left| y(t + kT) - y(\alpha + kT) - \frac{y(\beta + kT) - y(\alpha + kT)}{x(\beta + kT) - x(\alpha + kT)} (x(t + kT) - x(\alpha + kT)) \right| \leq \Delta.$$

Na základě T -periodicity zobrazení Γ a funkcí x, y dostáváme dokazované tvrzení. □

Věta 4. Necht $\varepsilon \in (0, \frac{T}{2})$ má stejný význam jako ve větě 3 a necht $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je dvojice splňující

$$0 < \beta - \alpha \leq \varepsilon.$$

Necht σ je orientovaná úsečka od $\Gamma(\alpha)$ do $\Gamma(\beta)$. Potom každá z cest

$$\gamma = \Gamma|_{\langle \alpha, \beta \rangle}, \quad \eta = \Gamma|_{\langle \beta, \alpha+T \rangle}$$

je jednoduchý oblouk a platí

- (i) $\gamma[z] = \sigma[z]$, $z \in [\Gamma] \setminus [\gamma]$,
- (ii) $\Delta_\eta \arg(\zeta - z) = 2\pi - \varphi$, $z \in [\Gamma] \setminus [\eta]$,

kde číslo φ je jednoznačně určeno podmínkou

$$(38) \quad \varphi \in (0, 2\pi) \cap \arg \frac{\Gamma(\beta) - z}{\Gamma(\alpha) - z}.$$

Důkaz: Protože $\beta - \alpha < T$, je každá z cest γ, η jednoduchý oblouk. Uvažujme dvojici $[\Delta, c] \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, která v této situaci existuje podle věty 3. Uvažujme dále funkce x, y definované předpisy (36), (37), orientovanou úsečku

$$\sigma^*(t) = \Gamma(\alpha) + \frac{x(t) - x(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)}(\Gamma(\beta) - \Gamma(\alpha)), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

od $\Gamma(\alpha)$ do $\Gamma(\beta)$ a zobrazení

$$\mathcal{H}(t, s) = \Gamma(t) + isc \left(y(\alpha) - y(t) + \frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)}(x(t) - x(\alpha)) \right), \quad [t, s] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle 0, 1 \rangle.$$

Zřejmě \mathcal{H} je spojité. Pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$\mathcal{H}(t, 0) = \gamma(t),$$

a protože

$$\Gamma(t) = |c| \Gamma(t) = c\bar{c} \Gamma(t) = c(x(t) + iy(t)),$$

platí ještě

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, 1) &= \Gamma(t) + ic(y(\alpha) - y(t)) - c(x(t) - x(\alpha)) + \left(c + ic \frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} \right) (x(t) - x(\alpha)) \\ &= \Gamma(t) - c(x(t) + iy(t)) + c(x(\alpha) + iy(\alpha)) + \frac{c(x(\beta) + iy(\beta)) - c(x(\alpha) + iy(\alpha))}{x(\beta) - x(\alpha)} (x(t) - x(\alpha)) \\ &= \Gamma(\alpha) + \frac{\Gamma(\beta) - \Gamma(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} (x(t) - x(\alpha)) = \sigma^*(t). \end{aligned}$$

Dále pro každé $s \in \langle 0, 1 \rangle$ dostáváme

$$\mathcal{H}(\alpha, s) = \gamma(\alpha), \quad \mathcal{H}(\beta, s) = \gamma(\beta),$$

a tedy zobrazení

$$\langle 0, 1 \rangle \ni s \mapsto \mathcal{H}(\alpha, s), \quad \langle 0, 1 \rangle \ni s \mapsto \mathcal{H}(\beta, s)$$

jsou konstantní. Na základě vlastnosti (ii) z věty 3 platí

$$\{\mathcal{H}(t, s) : [t, s] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle 0, 1 \rangle\} \subset \{\Gamma(t) + iuc : [t, u] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle -\Delta, \Delta \rangle\}.$$

Necht nyní $z \in [\Gamma] \setminus [\gamma]$. Z (35) plyne, že

$$\{\Gamma(t) + iuc : [t, u] \in \langle \alpha, \beta \rangle \times \langle -\Delta, \Delta \rangle\} \subset \mathbb{C} \setminus \{z\}.$$

Potom \mathcal{H} zobrazuje množinu $\langle \alpha, \beta \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ do oblasti $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, a tedy cesty γ a σ^* jsou homotopické vzhledem k $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. V důsledku Cauchyho věty platí

$$\gamma[z] = \sigma^*[z].$$

V příkladě 2 je vidět, že hodnota $\sigma[z]$ je invariantní vzhledem k volbě orientované usečky σ od $\Gamma(\alpha)$ do $\Gamma(\beta)$, odkud ihned dostáváme

$$\gamma[z] = \sigma[z].$$

Tím je vlastnost (i) dokázána. Nechť $z \in [\Gamma] \setminus [\eta]$. Potom

$$z = \gamma(\tau), \quad \text{kde } \alpha < \tau < \beta.$$

Protože funkce $\eta[\cdot]$ je holomorfní, a tedy spojitá v $\mathbb{C} \setminus [\eta]$, platí

$$\eta[z] = \lim_{\zeta \rightarrow z} \eta[\zeta] = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ z \in \Omega}} \eta[\zeta].$$

Zřejmě

$$\gamma[\zeta] + \eta[\zeta] = (\gamma \vee \eta)[\zeta] = \Gamma[\zeta], \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma].$$

Protože Γ je kladně orientovaná Jordanova cesta, na základě tvrzení 9 platí

$$\Gamma[\zeta] = 2\pi i I(\zeta, \Gamma) = 2\pi i, \quad \zeta \in \Omega.$$

Protože na základě vlastnosti (i) z věty 3 funkce x roste v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, na základě vlastnosti (ii) z věty 2 platí

$$\gamma^\ell[z] = \ln \left| \frac{\gamma(\beta) - z}{\gamma(\alpha) - z} \right| + i\varphi,$$

kde číslo φ je jednoznačně určeno podmínkou (38). Na základě výše uvedených tvrzení dostáváme

$$\eta[z] = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ z \in \Omega}} \eta[\zeta] = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ z \in \Omega}} (\Gamma[\zeta] - \gamma[\zeta]) = 2\pi i - \gamma^\ell[z] = \ln \left| \frac{\gamma(\alpha) - z}{\gamma(\beta) - z} \right| + i(2\pi - \varphi),$$

odkud na základě (15) plyne, že

$$\Delta_\eta \arg(\zeta - z) = \text{Im } \eta[z] = 2\pi - \varphi.$$

Tím je vlastnost (ii) dokázána. □

17. Charakteristiky cesty Γ

Definice 2. Bud' $V = \sup \{ |\Gamma'(t)| : t \in \mathbb{R} \setminus \{d_k : k \in \mathbb{Z}\} \}$.

Je-li Γ cesta s délkovým parametrem, platí $V = 1$ a číslo T vyjadřuje délku křivky $[\Gamma]$. Dále

$$(39) \quad |\Gamma(t) - \Gamma(t')| = \left| \int_t^{t'} \Gamma'(s) ds \right| \leq V |t - t'|, \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Definice 3. Bud' r funkce definovaná předpisem

$$r(s) = \min\{|\Gamma(t) - \Gamma(t+s)| : 0 \leq t \leq T\}, \quad s \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle.$$

Protože pro libovolné pevné $s \in \mathbb{R}$ je funkce

$$t \longmapsto |\Gamma(t) - \Gamma(t+s)|$$

T -periodická, platí

$$\begin{aligned} \{|\Gamma(t) - \Gamma(t+s)| : 0 \leq t \leq T\} &= \{|\Gamma(t) - \Gamma(t+s)| : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{|\Gamma(t) - \Gamma(t')| : |t - t'| = s; t, t' \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$(40) \quad r(s) = \min\{|\Gamma(t) - \Gamma(t')| : |t - t'| = s; t, t' \in \mathbb{R}\}, \quad s \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle.$$

Lemma 10. *Funkce r je stejnoměrně spojitá na $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$ a kladná v $(0, \frac{T}{2})$.*

Důkaz: Uvažujme množinu

$$M = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq T, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{T}{2}\}$$

a funkci

$$f(z) = |\Gamma(\operatorname{Re} z) - \Gamma(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)|, \quad z \in M.$$

Funkce f je spojitá na kompaktní množině M , a tedy stejnoměrně spojitá na M . Zřejmě

$$r(s) = \min\{f(t + is) : 0 \leq t \leq T\}, \quad s \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle.$$

Nechť $s, s' \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle$. Potom pro $t \in \langle 0, T \rangle$ platí

$$\begin{aligned} r(s) - f(t + is') &\leq f(t + is) - f(t + is') \leq \omega_f(|s - s'|), \\ r(s') - f(t + is) &\leq f(t + is') - f(t + is) \leq \omega_f(|s - s'|), \end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned} r(s) - r(s') &= \max\{r(s) - f(t + is') : 0 \leq t \leq T\} \leq \omega_f(|s - s'|), \\ r(s') - r(s) &= \max\{r(s') - f(t + is) : 0 \leq t \leq T\} \leq \omega_f(|s - s'|). \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že

$$|r(s) - r(s')| \leq \omega_f(|s - s'|), \quad s, s' \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle.$$

Z této nerovnosti a z tvrzení 15 plyne, že funkce r je stejnoměrně spojitá na $\langle 0, \frac{T}{2} \rangle$. Protože Γ je Jordanova cesta, pro libovolná $t, t' \in \mathbb{R}$ platí

$$(41) \quad 0 < |t - t'| < T \implies \Gamma(t) \neq \Gamma(t').$$

Funkce r je nezáporná. Je-li $r(s) = 0$, potom na základě (40) existují čísla $t, t' \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\Gamma(t) = \Gamma(t') \quad \wedge \quad |t - t'| = s,$$

odkud na základě (41) dostáváme, že $s = 0$. Tedy funkce r je kladná v $(0, \frac{T}{2})$. □

Definice 4. Nechť $t \in \mathbb{R}$ a nechť s_t je libovolné řešení úlohy

$$|(1 - s)\Gamma'_-(t) + s\Gamma'_+(t)| \longrightarrow \min, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Bud'

$$\Gamma^\circ(t) = (1 - s_t)\Gamma'_-(t) + s_t\Gamma'_+(t).$$

Číslo $|\Gamma^\circ(t)|$ vyjadřuje vzdálenost úsečky o koncových bodech $\Gamma'_-(t)$, $\Gamma'_+(t)$ od počátku. Protože (29) zajišťuje, že tato úsečka neprochází počátkem, je $|\Gamma^\circ(t)|$ kladné (více v příloze 11). Navíc platí

$$(42) \quad |\Gamma^\circ(t)| \leq |(1 - s)\Gamma'_-(t) + s\Gamma'_+(t)|, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle,$$

odkud speciálně dostáváme

$$(43) \quad |\Gamma^\circ(t)| \leq \min\{|\Gamma'_-(t)|, |\Gamma'_+(t)|\}.$$

Zřejmě

$$(44) \quad |\Gamma^\circ(t)| = |\Gamma'_-(t)| = |\Gamma'_+(t)|, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{d_k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Lemma 11. *Existuje kladné číslo*

$$v^* = \min\{|\Gamma^\circ(t)| : t \in \mathbb{R}\}.$$

Důkaz: Uvažujme $k \in \mathbb{Z}$ a $t \in (d_k, d_{k+1})$. Protože $\Gamma'_-(t) = \Gamma'_+(t) = \Gamma'(t)$, platí $|\Gamma^\circ(t)| = |\Gamma'(t)|$. Navíc na základě (43) platí

$$|\Gamma^\circ(d_k)| \leq |\Gamma'_+(d_k)|, \quad |\Gamma^\circ(d_{k+1})| \leq |\Gamma'_-(d_{k+1})|.$$

Vidíme, že existuje číslo

$$v_k = \min\{|\Gamma^\circ(t)| : d_k \leq t \leq d_{k+1}\},$$

a je zřejmé, že toto číslo je kladné. Na základě (28) a T -periodicity zobrazení

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \Gamma^\circ(t)$$

platí $v_{k+n} = v_k$. Potom

$$\{v_j : 0 \leq j \leq n-1\} = \{v_k : k \in \mathbb{Z}\},$$

a tedy existuje

$$v^* = \min\{v_k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zřejmě $v^* > 0$ a existují čísla $k \in \mathbb{Z}$, $\tau \in \langle d_k, d_{k+1} \rangle$ taková, že

$$v^* = v_k = |\Gamma^\circ(\tau)|.$$

Navíc pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ existuje jediné $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $t \in \langle d_k, d_{k+1} \rangle$, a tedy

$$|\Gamma^\circ(t)| \geq v_k \geq v^*.$$

To znamená, že $v^* = \min\{|\Gamma^\circ(t)| : t \in \mathbb{R}\}$.

□

Definice 5. Bud' Q množina všech kladných čísel q , pro která existuje $\delta \in (0, \frac{T}{2})$ takové, že platí

$$(45) \quad 0 \leq s \leq \delta \implies r(s) \geq qs,$$

tj.

$$Q = \{q > 0 : \exists \delta \in (0, \frac{T}{2}) \text{ splňující (45)}\}.$$

Lemma 12. Platí $(0, v^*) \subseteq Q \subseteq (0, v^*)$.

Důkaz: Uvažujme $k \in \mathbb{Z}$. Funkce

$$\Gamma'_k = \Gamma'|_{\langle d_k, d_{k+1} \rangle}$$

je stejnoměrně spojitá na $\langle d_k, d_{k+1} \rangle$. Na základě (28) a T -periodicity zobrazení Γ platí $\omega_{\Gamma_{k+n}}' = \omega_{\Gamma_k}'$, odkud pro každé $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$ plyne, že

$$\{\omega_{\Gamma'_j}(\delta) : 0 \leq j \leq n-1\} = \{\omega_{\Gamma'_k}(\delta) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Lze tedy definovat funkci

$$\omega(\delta) := \max\{\omega_{\Gamma'_k}(\delta) : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \delta \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Na základě tvrzení 15 je funkce ω neklesající a platí

$$(46) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \omega(\delta) = 0.$$

Jako první dokážeme inkluzi $(0, v^*) \subseteq Q$. Necht' $q \in (0, v^*)$. Na základě (46) existuje $\delta_0 \in (0, \frac{T}{2})$ takové, že

$$\omega(\delta_0) \leq v^* - q.$$

Položme

$$\delta := \min\{\delta_0, \min\{d_{j+1} - d_j : 0 \leq j \leq n-1\}\}$$

a uvažujme $t, t' \in \mathbb{R}$ splňující

$$0 < t' - t \leq \delta.$$

Existuje jediné $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$t' \in \langle d_k, d_{k+1} \rangle.$$

Je-li $t \geq d_k$, potom $d_k \leq t < t' \leq d_{k+1}$ a platí

$$(47) \quad \begin{aligned} \Gamma(t') - \Gamma(t) &= \int_t^{t'} \Gamma'(s) ds = \Gamma'_+(t)(t' - t) + \int_t^{t'} (\Gamma'(s) - \Gamma'_+(t)) ds \\ &= \Gamma'_+(t)(t' - t) + \int_t^{t'} (\Gamma'_k(s) - \Gamma'_k(t)) ds, \end{aligned}$$

odkud na základě (43) plyne, že

$$|\Gamma(t) - \Gamma(t')| \geq |\Gamma^\circ(t)| (t' - t) - \omega(t' - t) \int_t^{t'} ds \geq (v^* - \omega(\delta_0))(t' - t) \geq q(t' - t).$$

Je-li $t < d_k$, potom $d_{k-1} < t < d_k < t' < d_{k+1}$ a platí

$$\begin{aligned} (48) \quad \Gamma(t') - \Gamma(t) &= \int_t^{d_k} \Gamma'(s) ds + \int_{d_k}^{t'} \Gamma'(s) ds \\ &= \Gamma'_-(d_k)(d_k - t) + \int_t^{d_k} (\Gamma'(s) - \Gamma'_-(d_k)) ds \\ &\quad + \Gamma'_+(d_k)(t' - d_k) + \int_{d_k}^{t'} (\Gamma'(s) - \Gamma'_+(d_k)) ds \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{t' - d_k}{t' - t}\right) \Gamma'_-(d_k) + \frac{t' - d_k}{t' - t} \Gamma'_+(d_k) \right\} (t' - t) \\ &\quad + \int_t^{d_k} (\Gamma'_{k-1}(s) - \Gamma'_{k-1}(d_k)) ds + \int_{d_k}^{t'} (\Gamma'_k(s) - \Gamma'_k(d_k)) ds, \end{aligned}$$

odkud na základě (42) plyne, že

$$\begin{aligned} |\Gamma(t) - \Gamma(t')| &\geq |\Gamma^\circ(d_k)| (t' - t) - \omega(d_k - t) \int_t^{d_k} ds - \omega(t' - d_k) \int_{d_k}^{t'} ds \\ &\geq (v^* - \omega(\delta_0))(t' - t) \geq q(t' - t). \end{aligned}$$

Stejný výsledek lze analogicky odvodit pro $t, t' \in \mathbb{R}$ splňující

$$0 < t - t' \leq \delta$$

a platí triviálně v případě, že $t = t'$. Dohromady potom platí

$$|t - t'| \leq \delta \implies |\Gamma(t) - \Gamma(t')| \geq q|t - t'|,$$

což je na základě (40) ekvivalentní s (45), a tedy $q \in Q$.

Za účelem důkazu inkluze $Q \subseteq (0, v^*)$ dokážeme ekvivalentní tvrzení ve tvaru implikace

$$q \notin (0, v^*) \implies q \notin Q.$$

Je-li $q \leq 0$, je $q \notin Q$ splněno triviálně. Nechť

$$q > v^*.$$

Dokážeme, že platí

$$(49) \quad \left(\forall \delta \in \left(0, \frac{T}{2}\right) \right) \left(\exists t, t' \in \mathbb{R} \right) : |t - t'| \leq \delta \quad \wedge \quad |\Gamma(t) - \Gamma(t')| < q|t - t'|,$$

což je na základě (40) podmínka ekvivalentní s podmínkou $q \notin Q$. Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$v^* + \varepsilon < q,$$

a na základě (46) existuje $\delta_1 > 0$ takové, že

$$\omega(\delta_1) < \varepsilon.$$

Dále existuje $t^* \in \mathbb{R}$ takové, že

$$|\Gamma^\circ(t^*)| = v^*,$$

a existuje jediné $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$t^* \in \langle d_k, d_{k+1} \rangle.$$

Nechť nyní $\delta \in (0, \frac{T}{2})$. Je-li $t^* > d_k$, položíme

$$c := \min\{\delta, \delta_1, d_{k+1} - t^*\}, \quad t := t^*, \quad t' := t^* + c.$$

Potom $d_k < t < t' \leq d_{k+1}$, načež z (47) a (44) plyne, že

$$\begin{aligned} |\Gamma(t) - \Gamma(t')| &\leq |\Gamma^\circ(t)|(t' - t) + \omega(t' - t) \int_t^{t'} ds \\ &\leq (v^* + \omega(\delta_1))(t' - t) < (v^* + \varepsilon)(t' - t) < q(t' - t). \end{aligned}$$

Je-li $t^* = d_k$, položíme

$$c := \min\{\delta, \delta_1, d_{k+1} - d_k, d_k - d_{k-1}\}, \quad t := d_k - c(1 - s_{d_k}), \quad t' := d_k + cs_{d_k}.$$

Potom $d_{k-1} \leq t \leq d_k \leq t' \leq d_{k+1}$ a také

$$\left(1 - \frac{t' - d_k}{t' - t}\right) \Gamma'_-(d_k) + \frac{t' - d_k}{t' - t} \Gamma'_+(d_k) = (1 - s_{d_k}) \Gamma'_-(d_k) + s_{d_k} \Gamma'_+(d_k) = \Gamma^\circ(d_k).$$

Z této identity a z (48) plyne, že

$$\begin{aligned} |\Gamma(t) - \Gamma(t')| &\leq |\Gamma^\circ(d_k)|(t' - t) + \omega(d_k - t) \int_t^{d_k} ds + \omega(t' - d_k) \int_{d_k}^{t'} ds \\ &\leq (v^* + \omega(\delta_1))(t' - t) < (v^* + \varepsilon)(t' - t) < q(t' - t). \end{aligned}$$

Tím je dokázána platnost (49), a tedy důkaz je završen. \square

Věta 5. *Existují čísla $q > 0$, $\widehat{\Delta} \in (0, \frac{T}{2})$ taková, že pro každé $\Delta \in (0, \widehat{\Delta})$ a pro všechna $t, t' \in \mathbb{R}$ platí*

$$(50) \quad |t - t'| \leq \Delta \implies |\Gamma(t) - \Gamma(t')| \geq q|t - t'|,$$

$$(51) \quad \Delta \leq |t - t'| \leq \frac{T}{2} \implies |\Gamma(t) - \Gamma(t')| \geq q\Delta.$$

Důkaz: Na základě lemmat 11 a 12 je množina Q neprázdná a její libovolný prvek je kladné číslo. Uvažujme tedy libovolné $q \in Q$. Potom existuje $\delta \in (0, \frac{T}{2})$ splňující (45) a na základě lemmatu 10 existuje kladné číslo

$$c = \min\{r(s) : \delta \leq s \leq \frac{T}{2}\}.$$

Položme

$$\widehat{\Delta} := \min\{\delta, \frac{c}{q}\}.$$

Nechť nyní $\Delta \in (0, \widehat{\Delta})$ a $t, t' \in \mathbb{R}$. Potom z (45) a (40) plyne (50) a také

$$\Delta \leq |t - t'| \leq \delta \implies |\Gamma(t) - \Gamma(t')| \geq q|t - t'| \geq q\Delta,$$

$$\delta \leq |t - t'| \leq \frac{T}{2} \implies |\Gamma(t) - \Gamma(t')| \geq c \geq q\widehat{\Delta} \geq q\Delta.$$

Poslední dvě implikace dávají (51). \square

Definice 6. Bud' $\mathcal{M} = \{[\Delta, q] \in (0, \frac{T}{2}) \times (0, +\infty) : \Delta, q \text{ splňují (50), (51)}\}$.

Na základě věty 5 je množina \mathcal{M} neprázdná.

Lemma 13. *Nechť $\Delta \in (0, \frac{T}{2})$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) $[\Delta, \frac{r(\Delta)}{\Delta}] \in \mathcal{M}$,
- (ii) $\frac{r(\Delta)}{\Delta} = \max\{q \in (0, +\infty) : [\Delta, q] \in \mathcal{M}\}$.

Důkaz: Nechť platí (i). Potom

$$\frac{r(\Delta)}{\Delta} \in \{q \in (0, +\infty) : [\Delta, q] \in \mathcal{M}\}.$$

Uvažujeme-li navíc $q \in (0, +\infty)$ takové, že $[\Delta, q] \in \mathcal{M}$, a vezmeme-li v úvahu (40) a (51), obdržíme

$$r(\Delta) = \min\{|\Gamma(t) - \Gamma(t')| : |t - t'| = \Delta; t, t' \in \mathbb{R}\} \geq q\Delta,$$

což znamená, že $\frac{r(\Delta)}{\Delta} \geq q$, a tedy platí (ii). Důkaz implikace (ii) \Rightarrow (i) je triviální. □

Definice 7. Buďte

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, \Delta) &= \int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\Delta} \frac{(t-s)|\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2} ds + \int_{t+\Delta}^{t+\frac{T}{2}} \frac{(s-t)|\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2} ds, \quad [t, \Delta] \in \mathbb{R} \times (0, \frac{T}{2}), \\ \mathcal{B}(t, \Delta) &= \int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\Delta} \frac{|\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2} ds + \int_{t+\Delta}^{t+\frac{T}{2}} \frac{|\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2} ds, \quad [t, \Delta] \in \mathbb{R} \times (0, \frac{T}{2}). \end{aligned}$$

Lemma 14. *Nechť $t \in \mathbb{R}$.*

- (i) *Je-li $\Delta \in (0, \frac{T}{2})$, potom*

$$\mathcal{A}(t, \Delta) \leq 2V \int_{\Delta}^{\frac{T}{2}} \frac{s}{r^2(s)} ds, \quad \mathcal{B}(t, \Delta) \leq 2V \int_{\Delta}^{\frac{T}{2}} \frac{ds}{r^2(s)}.$$

- (ii) *Je-li $[\Delta, q] \in \mathcal{M}$, potom*

$$\mathcal{A}(t, \Delta) \leq \frac{V}{q^2 \Delta^2} \left(\frac{T^2}{4} - \Delta^2 \right), \quad \mathcal{B}(t, \Delta) \leq \frac{2V}{q^2 \Delta^2} \left(\frac{T}{2} - \Delta \right).$$

Důkaz: Nechť $\Delta \in (0, \frac{T}{2})$. Zřejmě

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, \Delta) &\leq V \left(\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\Delta} \frac{t-s}{r^2(t-s)} ds + \int_{t+\Delta}^{t+\frac{T}{2}} \frac{s-t}{r^2(s-t)} ds \right) = 2V \int_{\Delta}^{\frac{T}{2}} \frac{s}{r^2(s)} ds, \\ \mathcal{B}(t, \Delta) &\leq V \left(\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\Delta} \frac{ds}{r^2(t-s)} + \int_{t+\Delta}^{t+\frac{T}{2}} \frac{ds}{r^2(s-t)} \right) = 2V \int_{\Delta}^{\frac{T}{2}} \frac{ds}{r^2(s)}, \end{aligned}$$

a tedy platí (i). Nechť $[\Delta, q] \in \mathcal{M}$. Na základě (i) a (51) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, \Delta) &\leq \frac{2V}{q^2 \Delta^2} \int_{\Delta}^{\frac{T}{2}} s ds = \frac{V}{q^2 \Delta^2} \left(\frac{T^2}{4} - \Delta^2 \right), \\ \mathcal{B}(t, \Delta) &\leq \frac{2V}{q^2 \Delta^2} \int_{\Delta}^{\frac{T}{2}} ds = \frac{2V}{q^2 \Delta^2} \left(\frac{T}{2} - \Delta \right), \end{aligned}$$

a tedy platí (ii). □

Definice 8. Buď

$$\mathcal{J}(t, s) = \left| \int_{\mathbb{F}_{t,s}} \frac{d\zeta}{\zeta - \Gamma(t)} \right|, \quad [t, s] \in \mathbb{R} \times (0, \frac{T}{4}),$$

kde $\mathbb{F}_{t,s} = \Gamma|_{(t+s, t-s+T)}$.

Lemma 15. Necht $\varepsilon \in (0, \frac{T}{2})$ má stejný význam jako ve větě 3. Necht

$$[\Delta, q] \in \mathcal{M}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < s \leq \min \left\{ \Delta, \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Potom

$$\mathcal{J}(t, s) < \sqrt{\ln^2 \frac{V}{q} + 4\pi^2}.$$

Důkaz: Z průběhu funkce $x \mapsto \ln^2 x$ plyne, že pro libovolné $c \geq 1$ platí

$$(52) \quad \frac{1}{c} \leq x \leq c \implies \ln^2 x \leq \ln^2 c.$$

Na základě (50) a (39) platí

$$\frac{q}{V} = \frac{qs}{Vs} \leq \left| \frac{\Gamma(t) - \Gamma(t-s)}{\Gamma(t) - \Gamma(t+s)} \right| \leq \frac{Vs}{qs} = \frac{V}{q},$$

což mimo jiné znamená, že $\frac{q}{V} \leq \frac{V}{q}$, odkud $\frac{V}{q} \geq 1$. Potom podle (52) platí

$$\ln^2 \left| \frac{\Gamma(t) - \Gamma(t-s)}{\Gamma(t) - \Gamma(t+s)} \right| \leq \ln^2 \frac{V}{q}.$$

Na základě vlastnosti (ii) z věty 4 platí

$$\Delta_{\mathbb{F}_{t,s}} \arg(\zeta - \Gamma(t)) < 2\pi.$$

Využijeme-li nyní (15) a T -periodicitu zobrazení Γ , dostáváme

$$\mathcal{J}^2(t, s) = \ln^2 \left| \frac{\Gamma(t) - \Gamma(t-s)}{\Gamma(t) - \Gamma(t+s)} \right| + \Delta_{\mathbb{F}_{t,s}}^2 \arg(\zeta - \Gamma(t)) < \ln^2 \frac{V}{q} + 4\pi^2,$$

odkud plyne dokazovaná nerovnost. □

Lemmata 14 a 15 nám ukazují, jak lze obecně postupovat při odhadování funkcí \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{J} , známe-li některé další charakteristiky cesty Γ . V budoucím příkladě 5 ukážeme mimo jiné přímo explicitní tvar funkcí \mathcal{A} , \mathcal{B} v případě jednotkové kružnice.

Definice 9. Je-li $[t, t'] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ taková dvojice, že $\Gamma(t) \neq \Gamma(t')$ a že existuje $\Gamma'(t)$, buď

$$\Phi(t, t') = \operatorname{Im} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - \Gamma(t')}.$$

Buď

$$\varphi_\Gamma = \max \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T} \Phi(s, t) ds : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poznámka 2. Existuje-li spojitá první derivace Γ' zobrazení Γ , potom pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí $\int_t^{t+T} \Phi(s, t) ds = \pi$, odkud

$$\varphi_\Gamma = \frac{1}{2}.$$

Existuje-li spojitá druhá derivace Γ'' zobrazení Γ , lze funkci Φ spojitě dodefinovat v libovolném bodě $[t', t'] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prostřednictvím limity

$$\lim_{t \rightarrow t'} \Phi(t, t') = \operatorname{Im} \frac{\Gamma''(t')}{2\Gamma'(t')},$$

což na základě T -periodicity funkce Φ v obou proměnných znamená, že existuje spojité rozšíření této funkce definované v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, které budeme označovat stejným symbolem, tj. Φ . Podstatné je, že v této situaci podle tvrzení 11 automaticky platí

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \omega_{\Phi}(\delta) = 0,$$

kde

$$\omega_{\Phi}(\delta) = \sup\{|\Phi(t, t') - \Phi(\tau, \tau')| : |t + it' - (\tau + i\tau')| \leq \delta; [t, t'], [\tau, \tau'] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}, \quad \delta \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

V následujícím příkladě ukážeme některé charakteristiky zavedené v tomto oddíle, které se vztahují k cestě

$$(KR) \quad \Gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

jejímž obrazem je jednotková kružnice a vnitřkem je otevřený jednotkový kruh.

Příklad 5. Uvažujme cestu (KR). Zřejmě $T = 2\pi$. Protože pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí

$$|\Gamma'(t)| = |ie^{it}| = 1,$$

jde o cestu s délkovým parametrem, a tedy $V = 1$. Pro každou dvojici $[t, s] \in \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle$ platí

$$|\Gamma(t) - \Gamma(t+s)| = |e^{i(t+s)} - e^{it}| = |2 \sin(\frac{s}{2})| = 2 \sin \frac{|s|}{2}.$$

Potom

$$r(s) = 2 \sin \frac{s}{2}, \quad s \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Pro každé $\Delta \in (0, \pi)$ platí

$$0 \leq s \leq \Delta \implies r(s) = \left(\frac{2}{s} \sin \frac{s}{2}\right) s \geq \left(\frac{2}{\Delta} \sin \frac{\Delta}{2}\right) s = \frac{r(\Delta)}{\Delta} s,$$

$$\Delta \leq s \leq \pi \implies r(s) \geq 2 \sin \frac{\Delta}{2} = \frac{r(\Delta)}{\Delta} \Delta,$$

a tedy $\left[\Delta, \frac{r(\Delta)}{\Delta}\right] \in \mathcal{M}$, vezmeme-li v úvahu (40). Pro každou dvojici $[t, \Delta] \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$ platí

$$\mathcal{A}(t, \Delta) = \int_{t-\pi}^{t-\Delta} \frac{t-s}{(2 \sin \frac{t-s}{2})^2} ds + \int_{t+\Delta}^{t+\pi} \frac{s-t}{(2 \sin \frac{s-t}{2})^2} ds = 2 \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{s}{\sin^2 s} ds = \Delta \cot \frac{\Delta}{2} - 2 \ln \left(\sin \frac{\Delta}{2}\right),$$

$$\mathcal{B}(t, \Delta) = \int_{t-\pi}^{t-\Delta} \frac{ds}{(2 \sin \frac{t-s}{2})^2} + \int_{t+\Delta}^{t+\pi} \frac{ds}{(2 \sin \frac{s-t}{2})^2} = \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{\sin^2 s} = \cot \frac{\Delta}{2}.$$

Na základě (15) pro každou dvojici $[t, s] \in \mathbb{R} \times (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\mathcal{J}(t, s) = |\ln 1 + i \Delta_{\Gamma, s} \arg(\zeta - \Gamma(t))| = \pi - s < \pi.$$

Protože $\Gamma'(t) = ie^{it}$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$, na základě poznámky 2 platí

$$\varphi_{\Gamma} = \frac{1}{2}.$$

Je-li $t' < t < t' + 2\pi$, platí

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - \Gamma(t')} &= \frac{ie^{it}}{e^{it} - e^{it'}} = \frac{ie^{it}}{e^{i\frac{t+t'}{2}} \left(e^{i\frac{t-t'}{2}} - e^{-i\frac{t-t'}{2}}\right)} \\ &= \frac{e^{i\frac{t-t'}{2}}}{2 \sin \frac{t-t'}{2}} = \frac{i \sin \frac{t-t'}{2} + \cos \frac{t-t'}{2}}{2 \sin \frac{t-t'}{2}} = \frac{1}{2} \left(i + \cot \frac{t-t'}{2} \right), \end{aligned}$$

odkud

$$\operatorname{Im} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - \Gamma(t')} = \frac{1}{2}.$$

Na základě T -periodicity zobrazení Γ potom dostáváme

$$\Phi(t, t') = \frac{1}{2}, \quad [t, t'] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

III. Integrál Cauchyho typu

18. Výběr funkcí definovaných na $[\Gamma]$

Obecně budeme na množině $[\Gamma]$ uvažovat funkce spojitě v Diniho smyslu. Zvláštní roli budou ovšem hrát funkce lipschitzovské, které zavedeme prostřednictvím charakterizace z lemmatu 16.

Lemma 16. Pro funkci $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou tyto podmínky ekvivalentní:

$$(53) \quad \left(\exists K > 0 \right) \left(\forall t, t' \in \mathbb{R} \right) : |g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))| \leq K |t - t'|,$$

$$(54) \quad \left(\exists \delta > 0, K^* > 0 \right) \left(\forall z, w \in [\Gamma] \right) : |z - w| \leq \delta \implies |g(z) - g(w)| \leq K^* |z - w|.$$

Důkaz: Nechť platí (53). Uvažujme libovolnou dvojici $[\Delta, q] \in \mathcal{M}$, zvolme libovolné $\delta < q\Delta$ a položme $K^* := \frac{K}{q}$. Nechť nyní $z, w \in [\Gamma]$ jsou čísla splňující $|z - w| \leq \delta$. Potom existují $t, t' \in \mathbb{R}$ taková, že

$$z = \Gamma(t), \quad w = \Gamma(t'), \quad |t - t'| \leq \frac{T}{2}.$$

Protože $|\Gamma(t) - \Gamma(t')| < q\Delta$, z (51) plyne, že $|t - t'| < \Delta$. Potom na základě (50) dostáváme

$$|g(z) - g(w)| \leq K |t - t'| \leq K^* |z - w|.$$

Nechť platí (54). Položme $K := K^*V$. Nechť nyní $t, t' \in \mathbb{R}$. Je-li $|t - t'| \leq \frac{\delta}{V}$, potom na základě (39) platí

$$|\Gamma(t) - \Gamma(t')| \leq V |t - t'| \leq \delta,$$

a tedy

$$|g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))| \leq K^* |\Gamma(t) - \Gamma(t')| \leq K |t - t'|.$$

Je-li $|t - t'| > \frac{\delta}{V}$ (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $t < t'$), potom existuje přirozené číslo p a posloupnost $\{\tau_j\}_{j=0}^p$ taková, že

$$t = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = t', \\ \tau_{j+1} - \tau_j \leq \frac{\delta}{V}, \quad j = 0, \dots, p-1,$$

načež

$$|g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))| \leq \sum_{j=0}^{p-1} |g(\Gamma(\tau_j)) - g(\Gamma(\tau_{j+1}))| \leq K \sum_{j=0}^{p-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) = K |t - t'|.$$

□

Definice 10. Funkce $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je *lipschitzovská*, jestliže je splněna některá z podmínek (53), (54).

Poznámka 3. Často budeme využívat skutečnost, že lipschitzovská funkce $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá v Diniho smyslu. Skutečně,

$$\int_0^\delta \frac{\omega_g(s)}{s} ds \leq \int_0^\delta K^* ds = K^* \delta < +\infty.$$

19. Hraniční hodnoty integrálu Cauchyho typu

Definice 11. Je-li $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, buď

$$\mathcal{C}(g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma].$$

Existuje-li navíc pro každé $z \in [\Gamma]$ limita $\lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} \mathcal{C}(g)(w)$, buď

$$\mathcal{C}^-(g)(z) = \begin{cases} \mathcal{C}(g)(z), & z \in \Omega, \\ \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} \mathcal{C}(g)(w), & z \in [\Gamma]. \end{cases}$$

Poznámka 4. Funkce $\mathcal{C}(g) : \mathbb{C} \setminus [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní (viz str. 21) a funkce $\mathcal{C}^-(g) : \Omega \cup [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitým rozšířením holomorfního elementu $(\mathcal{C}(g), \Omega)$. Je-li funkce g spojitá v Diniho smyslu, potom integrál

$$\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

konverguje absolutně pro každé $z \in [\Gamma]$, a tedy na základě tvrzení 13 platí

$$(55) \quad \mathcal{C}^-(g)(z) = g(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in [\Gamma].$$

Následující věta je stejně jako tvrzení 1 příspěvkem k Privalovově větě. Narozdíl od tvrzení 1 však poskytuje vyčísitelný odhad modulu spojitosti funkce $\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma$ pro lipschitzovskou funkci g .

Věta 6. Necht' $q, \lambda, \widehat{\Delta}, \Delta$ jsou čísla splňující

$$(56) \quad [\widehat{\Delta}, q] \in \mathcal{M}, \quad \lambda \geq \frac{V}{2q},$$

$$(57) \quad 0 < \Delta < \widehat{\Delta}.$$

Necht' $A(\Delta), B(\Delta), J(\Delta)$ jsou čísla splňující

$$(58) \quad \mathcal{A}(t, \Delta) \leq A(\Delta), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(59) \quad \mathcal{B}(t, \Delta) \leq B(\Delta), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(60) \quad \mathcal{J}(t, s) \leq J(\Delta), \quad [t, s] \in \mathbb{R} \times (0, \frac{\Delta}{2}).$$

Necht' $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce, pro kterou platí (53). Označme

$$c_1 = \frac{V^2 K}{\pi q^2},$$

$$c_2 = \frac{K}{2\pi} \left(2\pi + \frac{2V}{q} \left(2\lambda + \frac{V}{q} \ln \frac{\Delta}{\lambda} \right) + VA(\Delta) + J(\Delta) \right),$$

$$c_3(\delta) = \frac{VK}{2\pi} \cdot \frac{2\lambda A(\Delta) + \Delta B(\Delta)}{\Delta - 2\lambda\delta}, \quad 0 < \delta < \frac{\Delta}{2\lambda}.$$

Potom pro libovolná $t, t' \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ taková, že

$$(61) \quad 0 < |t - t'| \leq \delta < \min \left\{ e^{\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right)}, \frac{\widehat{\Delta}}{\lambda + 1}, \frac{\Delta}{2\lambda}, \widehat{\Delta} - \Delta \right\},$$

platí

$$|\mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t'))| \leq \omega_{\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma}(\delta) \leq c_1 \delta \ln \frac{1}{\delta} + c_2 \delta + c_3(\delta) \delta^2.$$

Důkaz: Uvažujme taková $t, t' \in \mathbb{R}$, že platí (61). Označme

$$\gamma_1 = \Gamma|_{\langle t-\lambda|t-t'|, t+\lambda|t-t' \rangle}, \quad \gamma_2 = \Gamma|_{\langle t+\lambda|t-t', t-\lambda|t-t'|+T \rangle} (= \Gamma_{t, \lambda|t-t'}).$$

Potom

$$(62) \quad \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t))}{\zeta - \Gamma(t)} d\zeta - \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t'))}{\zeta - \Gamma(t')} d\zeta = I_1 + I_2 + I_3,$$

kde

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \left(\frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t))}{\zeta - \Gamma(t)} - \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t'))}{\zeta - \Gamma(t')} \right) d\zeta,$$

$$I_2 = (\Gamma(t) - \Gamma(t')) \int_{\gamma_2} \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t'))}{(\zeta - \Gamma(t))(\zeta - \Gamma(t'))} d\zeta,$$

$$I_3 = (g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))) \mathcal{J}(t, \lambda|t-t').$$

Zřejmě $[\Delta, q] \in \mathcal{M}$. Z (50) a (53) plyne

$$|I_1| \leq \frac{V}{q} \int_{t-\lambda|t-t'}^{t+\lambda|t-t'} \left(\frac{|g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t))|}{|s-t|} + \frac{|g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))|}{|s-t'|} \right) ds \leq \frac{4VK\lambda}{q} |t-t'|.$$

Označme

$$L(s) = \frac{|g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)| \cdot |\Gamma(s) - \Gamma(t')|} |\Gamma'(s)|.$$

Potom

$$|I_2| \leq V |t-t'| \left(\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\Delta} L(s) ds + \int_{t-\Delta}^{t-\lambda|t-t'} L(s) ds + \int_{t+\lambda|t-t'}^{t+\Delta} L(s) ds + \int_{t+\Delta}^{t+\frac{T}{2}} L(s) ds \right).$$

Nejdříve s pomocí (50) a (53) dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{t-\Delta}^{t-\lambda|t-t'} L(s) ds + \int_{t+\lambda|t-t'}^{t+\Delta} L(s) ds \\ & \leq \frac{V}{q^2} \left(\int_{t-\Delta}^{t-\lambda|t-t'} \frac{|g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))|}{|s-t||s-t'|} ds + \int_{t+\lambda|t-t'}^{t+\Delta} \frac{|g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))|}{|s-t||s-t'|} ds \right) \\ & \leq \frac{VK}{q^2} \left(\int_{t-\Delta}^{t-\lambda|t-t'} \frac{ds}{t-s} + \int_{t+\lambda|t-t'}^{t+\Delta} \frac{ds}{s-t} \right) = \frac{2VK}{q^2} \left(\ln \frac{\Delta}{\lambda} + \ln \frac{1}{|t-t'|} \right). \end{aligned}$$

Následně za předpokladu $\Delta \leq |s-t| \leq \frac{T}{2}$ z (39), (51) a (61) plyne

$$|\Gamma(s) - \Gamma(t')| \geq |\Gamma(s) - \Gamma(t)| \left(1 - \frac{|\Gamma(t) - \Gamma(t')|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|} \right) \geq |\Gamma(s) - \Gamma(t)| \left(1 - \frac{V|t-t'|}{q\Delta} \right) > 0,$$

což spolu s (53) umožňuje učinit následující odhad

$$\begin{aligned} L(s) & \leq \frac{K|s-t'| |\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2 (1 - \frac{2\lambda}{\Delta} |t-t'|)} = \frac{\Delta K}{\Delta - 2\lambda|t-t'|} \cdot \frac{|s-t'| |\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2} \\ & \leq \frac{\Delta K}{\Delta - 2\lambda|t-t'|} \left(\frac{|s-t| |\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2} + |t-t'| \frac{|\Gamma'(s)|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|^2} \right). \end{aligned}$$

Na základě tohoto odhadu, (58) a (59) obdržíme

$$\int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t-\Delta} L(s) ds + \int_{t+\Delta}^{t+\frac{\Delta}{2}} L(s) ds \leq \frac{\Delta K(A(\Delta) + |t-t'|B(\Delta))}{\Delta - 2\lambda|t-t'|}.$$

Potom

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq V|t-t'| \left(\frac{2VK}{q^2} \left(\ln \frac{\Delta}{\lambda} + \ln \frac{1}{|t-t'|} \right) + \frac{\Delta K(A(\Delta) + |t-t'|B(\Delta))}{\Delta - 2\lambda|t-t'|} \right) \\ &= \frac{2V^2K}{q^2} |t-t'| \ln \frac{1}{|t-t'|} \\ &\quad + VK \left(\frac{2V}{q^2} \ln \frac{\Delta}{\lambda} + A(\Delta) \right) |t-t'| + \frac{VK(2\lambda A(\Delta) + \Delta B(\Delta))}{\Delta - 2\lambda|t-t'|} |t-t'|^2. \end{aligned}$$

Z (53) a (60) plyne

$$|I_3| \leq KJ(\Delta) |t-t'|.$$

Na základě (55), (62) a (53) platí

$$\begin{aligned} &|\mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t'))| \\ &\leq |g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t))}{\zeta - \Gamma(t)} d\zeta - \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t'))}{\zeta - \Gamma(t')} d\zeta \right| \\ &\leq K|t-t'| + \frac{1}{2\pi} (|I_1| + |I_2| + |I_3|). \end{aligned}$$

Aplikujeme-li nyní odhady odvozené pro $|I_1|$, $|I_2|$, $|I_3|$, dostáváme

$$|\mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t'))| \leq c_1 |t-t'| \ln \frac{1}{|t-t'|} + c_2 |t-t'| + c_3 (|t-t'|) |t-t'|^2,$$

a protože funkce

$$\begin{aligned} \left(0, e^{\left(\frac{c_2}{c_1}-1\right)}\right) \ni x &\mapsto c_1 x \ln \frac{1}{x} + c_2 x, \\ \left(0, \frac{\Delta}{2\lambda}\right) \ni x &\mapsto c_3(x)x^2 \end{aligned}$$

jsou rostoucí, pro δ splňující (61) platí

$$\omega_{\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma}(\delta) \leq c_1 \delta \ln \frac{1}{\delta} + c_2 \delta + c_3(\delta) \delta^2.$$

□

Poznámka 5. Hodnoty $c_2, c_3(\delta)$, a potažmo hodnoty celého odhadu

$$(63) \quad c_1 \delta \ln \frac{1}{\delta} + c_2 \delta + c_3(\delta) \delta^2,$$

z věty 6, se snižují, jestliže se snižují hodnoty $A(\Delta), B(\Delta), J(\Delta)$. Může však nastat situace, kdy volba nízkých hodnot $A(\Delta), J(\Delta)$ významně omezí možnosti při volbě δ splňujícího (61).

Poznámka 6. Hodnota výrazu $2\lambda + \frac{V}{q} \ln \frac{\Delta}{\lambda}$, obsaženého v předpisu pro konstantu c_2 , je minimální pro

$$\lambda = \frac{V}{2q}.$$

Odhady výrazů $|I_1|$ a $|I_2|$ v důkazu věty 6 jsou mimo jiné založeny na implikaci (50), která pro pevné $\hat{\Delta} \in (0, \frac{T}{2})$ poskytuje tím přesnější odhady hodnot $|\Gamma(s) - \Gamma(t)|$, $|\Gamma(s) - \Gamma(t')|$, čím větší

je číslo q splňující $[\widehat{\Delta}, q] \in \mathcal{M}$. Je-li $[\widehat{\Delta}, \frac{r(\widehat{\Delta})}{\widehat{\Delta}}] \in \mathcal{M}$, lze na základě lemmatu 13 dosáhnout nejlepších odhadů volbou

$$q = \frac{r(\widehat{\Delta})}{\widehat{\Delta}}.$$

Jedna z cest, pro kterou lze takto docílit nejlepších odhadů, je cesta (KR), jak je vidět z příkladu 5.

Poznámka 7. Čísla $q, \lambda, \widehat{\Delta}, \Delta$ lze považovat za parametry ve výrazu (63) (viz strukturu $c_1, c_2, c_3(\delta)$). Splňují-li tyto parametry podmínky (56)-(61), potom výraz (63) podle věty 6 představuje odhad pro $\omega_{\mathcal{G}-(g) \circ \Gamma}(\delta)$. Poznámka 6 nám dává návod, jak lze za jistých okolností na základě teoretických poznatků stanovit parametry q, λ . Následující procedura realizuje vhodnou volbu zbývajících parametrů $\widehat{\Delta}, \Delta$ na základě experimentu.

V příloze A je umístěn výpis souboru `oml.m` zajišťujícího realizaci následující procedury v prostředí MATLAB.

Procedura OML

Účelem této procedury je pro zvolené $\delta \in (0, \frac{T}{2})$ vyčíslit co nejpřesnější odhad modulu spojitosti $\omega_{\mathcal{G}-(g) \circ \Gamma}(\delta)$ podle věty 6. Na základě poznámky 6 se uvažuje výchozí situace popsaná vztahy

$$(64) \quad q = \frac{r(\widehat{\Delta})}{\widehat{\Delta}}, \quad \lambda = \frac{V}{2q} = \frac{V\widehat{\Delta}}{2r(\widehat{\Delta})}$$

a korektnost procedury je podmíněna splněním následujících požadavků:

- I. pro uvažovanou cestu Γ jsou známa čísla T, V a explicitní předpis
 - I_r funkce r , pro kterou musí platit $[\Delta, \frac{r(\Delta)}{\Delta}] \in \mathcal{M}$, kdykoliv $\widehat{\Delta} \in (0, \frac{T}{2})$,
 - I_A takové funkce $\Delta \mapsto A(\Delta)$, pro kterou platí (58), kdykoliv $\Delta \in (0, \frac{T}{2})$,
 - I_B takové funkce $\Delta \mapsto B(\Delta)$, pro kterou platí (59), kdykoliv $\Delta \in (0, \frac{T}{2})$,
 - I_J takové funkce $\Delta \mapsto J(\Delta)$ pro kterou platí (60), kdykoliv $\Delta \in (0, \frac{T}{2})$.

- II. pro uvažovanou funkci $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je známo číslo K z (53).

V proceduře resp. v jejím výkladu použijeme tato značení:

$$\begin{aligned} c_1(\widehat{\Delta}) &= \frac{V^2 K \widehat{\Delta}^2}{\pi r^2(\widehat{\Delta})}, \\ c_2(\widehat{\Delta}, \Delta) &= \frac{K}{2\pi} \left(2\pi + \frac{2V\widehat{\Delta}}{r(\widehat{\Delta})} \left(\frac{V\widehat{\Delta}}{r(\widehat{\Delta})} + \frac{V\widehat{\Delta}}{r(\widehat{\Delta})} \ln \frac{2\Delta r(\widehat{\Delta})}{V\widehat{\Delta}} \right) + VA(\Delta) + J(\Delta) \right), \\ c_3(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) &= \frac{VK}{2\pi} \cdot \frac{V\widehat{\Delta}A(\Delta) + r(\widehat{\Delta})\Delta B(\Delta)}{r(\widehat{\Delta})\Delta - V\widehat{\Delta}\delta}, \\ S(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) &\iff \delta < \min \left\{ e^{\left(\frac{c_2(\widehat{\Delta}, \Delta)}{c_1(\widehat{\Delta})} - 1\right)}, \frac{2\Delta r(\widehat{\Delta})}{V\widehat{\Delta} + 2r(\widehat{\Delta})}, \frac{\Delta r(\widehat{\Delta})}{V\widehat{\Delta}}, \widehat{\Delta} - \Delta \right\}, \\ o(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) &= c_1(\widehat{\Delta})\delta \ln \frac{1}{\delta} + c_2(\widehat{\Delta}, \Delta)\delta + c_3(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta)\delta^2, \\ M(\delta) &= \left\{ [\widehat{\Delta}, \Delta] \in (0, \frac{T}{2}) \times (0, \frac{T}{2}) : S(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) \text{ holds} \right\}, \\ G(p) &= \left\{ \left[\frac{kT}{2p}, \frac{mT}{2p} \right] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : k, m \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Je-li $\widehat{\Delta} \in (0, \frac{T}{2})$, potom na základě (64) a I_r platí (56). Je-li $\Delta \in (0, \frac{T}{2})$, potom na základě I_A, I_B, I_J platí (58), (59), (60). Navíc z (64) ještě plyne

$$\begin{aligned} c_1(\widehat{\Delta}) &= c_1, & c_2(\widehat{\Delta}, \Delta) &= c_2, & c_3(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) &= c_3(\delta), \\ S(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) &\iff & (61). \end{aligned}$$

To znamená, že (61), stejně jako (57), platí, kdykoliv $[\widehat{\Delta}, \Delta] \in M(\delta)$. Potom na základě věty 6 dostáváme

$$\omega_{\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma}(\delta) \leq \mathfrak{o}(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta), \quad [\widehat{\Delta}, \Delta] \in M(\delta),$$

a vidíme, že každý prvek množiny

$$(65) \quad \left\{ \mathfrak{o}(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) : [\widehat{\Delta}, \Delta] \in M(\delta) \right\}$$

představuje odhad pro $\omega_{\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma}(\delta)$ podle věty 6.

Krok 1: vstup δ, K ,

Krok 2: polož $p := 500, O := 1000$,

Krok 3: pro $k := 2, \dots, p$ proved'

3.1: polož $\widehat{\Delta} := \frac{kT}{2p}$,

3.2: pro $m := 1, \dots, k-1$ proved'

3.2.1: polož $\Delta := \frac{mT}{2p}$,

3.2.2: platí-li $S(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta)$, polož $O := \min \left\{ O, \mathfrak{o}(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) \right\}$,

Krok 4: výstup O .

Je-li množina $M(\delta) \cap G(p)$ neprázdná, potom výstupní údaj O představuje minimální prvek konečné podmnožiny

$$(66) \quad \left\{ \mathfrak{o}(\widehat{\Delta}, \Delta, \delta) : [\widehat{\Delta}, \Delta] \in M(\delta) \cap G(p) \right\}$$

množiny (65). Je-li množina $M(\delta) \cap G(p)$ prázdná, potom hodnota výstupního údaje O je 1000, přičemž tato hodnota nemá z hlediska zamýšleného účelu procedury žádný význam. Tím je vlastně dokázána následující věta, kterou je třeba chápat jako praktický důsledek věty 6.

Věta 7. *Nechť $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce, pro kterou platí (53). Nechť $\delta \in (0, \frac{T}{2})$ a $\text{OML}(\delta, K)$ je výstupní údaj korektně použité procedury OML. Je-li $\text{OML}(\delta, K) < 1000$, potom pro libovolná $t, t' \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$0 < |t - t'| \leq \delta,$$

platí

$$\left| \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t')) \right| \leq \omega_{\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma}(\delta) \leq \text{OML}(\delta, K).$$

Příklad 6. Pro vybraná $\delta \in (0, \frac{T}{2})$ vyčíslíme $\text{OML}(\delta, K)$ v případě cesty (KR) a libovolné funkce $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$, pro kterou platí (53) s $K = 1$ (požadavek II). Na základě příkladu 5 známe T, V , víme, že je splněn požadavek I_r a položíme

$$\begin{aligned} (0, \pi) \ni \Delta &\longmapsto A(\Delta) := \Delta \cot \frac{\Delta}{2} - 2 \ln \sin \frac{\Delta}{2}, \\ (0, \pi) \ni \Delta &\longmapsto B(\Delta) := \cot \frac{\Delta}{2}, \\ (0, \pi) \ni \Delta &\longmapsto J(\Delta) := \pi. \end{aligned}$$

Potom jsou splněny také požadavky I_A, I_B, I_J a můžeme přistoupit k aplikaci procedury OML :

δ	$\text{OML}(\delta, 1)$
$\frac{T}{24}$	0.88414176
$\frac{T}{48}$	0.45235452
$\frac{T}{78}$	0.30824116

Věta 8. *Nechť $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce spojitá v Dirichého smyslu. Potom pro libovolná $t, t' \in \mathbb{R}$ platí*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t')) &= (g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))) \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T} \Phi(s, t) \, ds \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{t'}^{t'+T} (g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))) (\Phi(s, t) - \Phi(s, t')) \, ds, \\ |\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t'))| &\leq \varphi_\Gamma |g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \omega_\Phi(|t - t'|) \int_{t'}^{t'+T} |g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))| \, ds. \end{aligned}$$

Důkaz: Nechť $t, t' \in \mathbb{R}$. Protože

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t))}{\zeta - \Gamma(t)} \, d\zeta - \int_\Gamma \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t'))}{\zeta - \Gamma(t')} \, d\zeta \\ &= \int_\Gamma \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t)) - g(\zeta) + g(\Gamma(t'))}{\zeta - \Gamma(t)} \, d\zeta + \int_\Gamma (g(\zeta) - g(\Gamma(t'))) \left(\frac{1}{\zeta - \Gamma(t)} - \frac{1}{\zeta - \Gamma(t')} \right) \, d\zeta \\ &= (g(\Gamma(t')) - g(\Gamma(t))) \int_t^{t+T} \frac{\Gamma'(s) \, ds}{\Gamma(s) - \Gamma(t)} \\ &\quad + \int_{t'}^{t'+T} (g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))) \left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s) - \Gamma(t)} - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s) - \Gamma(t')} \right) \, ds, \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t))}{\zeta - \Gamma(t)} \, d\zeta - \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t'))}{\zeta - \Gamma(t')} \, d\zeta \\ &= (g(\Gamma(t')) - g(\Gamma(t))) \int_t^{t+T} \Phi(s, t) \, ds + \int_{t'}^{t'+T} (g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))) (\Phi(s, t) - \Phi(s, t')) \, ds. \end{aligned}$$

Potom na základě (55) platí

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t')) \\ &= g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t')) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t))}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{g(\zeta) - g(\Gamma(t'))}{\zeta - z} \, d\zeta \\ &= (g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))) \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T} \Phi(s, t) \, ds \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{t'}^{t'+T} (g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t'))) (\Phi(s, t) - \Phi(s, t')) \, ds. \end{aligned}$$

Následný odhad je triviálním důsledkem této rovnosti. □

Důsledek 1. Uvažujme cestu (KR). Nechť $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce spojitá v Diniho smyslu. Potom pro libovolná $t, t' \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t)) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(g)(\Gamma(t')) = \frac{1}{2}(g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t'))).$$

Důkaz: Stačí si uvědomit, že

$$\int_t^{t+T} \Phi(s, t) ds = \pi, \quad \Phi(t, t') = \frac{1}{2}$$

pro libovolná $t, t' \in \mathbb{R}$ (viz příklad 5), a uplatnit tyto identity v rovnosti z věty 8. \square

20. Po částech lineární funkce

Definice 12. Funkce $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je *lineární*, jestliže existuje konstanta $c \in \mathbb{C}$ taková, že platí

$$L(w) - L(z) = c(w - z), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Je-li funkce $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lineární, potom pro cestu γ začínající v bodě $a \in \mathbb{C}$ a končící v bodě $b \in \mathbb{C}$ platí

$$(67) \quad \int_{\gamma} \frac{L(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{L(\zeta) - L(z)}{\zeta - z} d\zeta + L(z) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = L(b) - L(a) + L(z)\gamma[z], \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma],$$

a je-li $a \neq b$, potom

$$(68) \quad L(z) = \frac{b - z}{b - a}L(a) + \frac{z - a}{b - a}L(b), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definice 13. Nechť γ je cesta. Funkce $l : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je *lineární na $[\gamma]$* , jestliže existuje lineární funkce $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ taková, že

$$l = L|_{[\gamma]}.$$

Definice 14. Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Posloupnost $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ je *rozklad cesty Γ* , jestliže existuje posloupnost $\{t_j\}_{j=0}^m$ taková, že

$$t_0 < \dots < t_m = t_0 + T$$

a že pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ platí

$$\Gamma_j = \Gamma|_{\langle t_j, t_{j+1} \rangle}.$$

Body

$$z_j = \Gamma(t_j), \quad j = 0, \dots, m-1,$$

jsou *uzly rozkladu \mathcal{P}* a číslo

$$\nu(\mathcal{P}) = \max\{t_{j+1} - t_j : 0 \leq j \leq m-1\}$$

je *norma rozkladu \mathcal{P}* .

Poznámka 8. Posloupnost $\{t_j\}_{j=0}^{m-1}$ rozšíříme do souboru $\{t_k : k \in \mathbb{Z}\}$ tak, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ položíme $t_k := t_j + pT$, kdykoli $j \in \{0, \dots, m-1\}$ a $p \in \mathbb{Z}$ splňuje $pm = k - j$. Potom platí

$$t_{k+m} = t_k + T, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Každou posloupnost $\{O_j\}_{j=0}^{m-1}$ jiných objektů (zejména pak posloupnosti $\{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ a $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$) rozšíříme do souboru $\{O_k : k \in \mathbb{Z}\}$ tak, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ položíme $O_k := O_j$, kdykoli $j \in \{0, \dots, m-1\}$ a $k - j$ je dělitelné m . Potom platí

$$O_{k+m} = O_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z definice rozkladu vyplývá, že Γ_j je jednoduchý oblouk od z_j do z_{j+1} a že platí

$$(69) \quad \bigvee_{j=0}^{m-1} \Gamma_j = \Gamma.$$

Definice 15. Necht $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ je rozklad cesty Γ . Funkce $l : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je *po částech lineární na $[\Gamma]$ vzhledem k rozkladu \mathcal{P}* , jestliže pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ je funkce $l|_{[\Gamma_j]}$ lineární na $[\Gamma_j]$. Buď $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ množina všech funkcí $l : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$, které jsou po částech lineární na $[\Gamma]$ vzhledem k rozkladu \mathcal{P} . Pro funkci $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ buď $g_{\mathcal{P}}$ taková funkce z množiny $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, pro kterou platí

$$g_{\mathcal{P}}(z_j) = g(z_j), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

V následujícím textu budeme uvažovat libovolný rozklad $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ cesty Γ .

Je-li $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, existuje pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ lineární funkce $L_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ s vlastností

$$(70) \quad L_j|_{[\Gamma_j]} = l|_{[\Gamma_j]}$$

a na základě (68) platí

$$(71) \quad L_j(z) = \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} l(z_j) + \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j} l(z_{j+1}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definice 16. Necht $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$. Posloupnost $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ je *generující posloupnost pro funkci l* , jestliže pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ je $L_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lineární funkce s vlastností (70).

Poznámka 9. Necht $k \in \mathbb{Z}$. Na základě poznámky 8 lze rozklad $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ vyjádřit ve tvaru $\{\Gamma_j\}_{j=k-1}^{k+m-2}$ nebo $\{\Gamma_j\}_{j=k}^{k+m-1}$ atd. Podobně lze vyjádřit generující posloupnost $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ pro funkci $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ ve tvaru $\{L_j\}_{j=k-1}^{k+m-2}$ nebo $\{L_j\}_{j=k}^{k+m-1}$ atd. Bude-li potřeba, budeme tyto tvary v následujícím textu používat zcela automaticky.

Lemma 17. *Funkce $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ je spojitá v Diniho smyslu a pro*

$$K = V \max_{0 \leq j \leq m-1} \left| \frac{l(z_{j+1}) - l(z_j)}{z_{j+1} - z_j} \right| \quad \left(= V \max_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{l(z_{k+1}) - l(z_k)}{z_{k+1} - z_k} \right| \right)$$

platí

$$|l(\Gamma(t)) - l(\Gamma(t'))| \leq K |t - t'|, \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Důkaz: Necht $t, t' \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $t \leq t'$. Potom

$$t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle, \quad t' \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$$

pro nějaká $j, k \in \mathbb{Z}$, kde $j \leq k$. Je-li $j = k$, potom

$$t_k \leq t \leq t' \leq t_{k+1}$$

a na základě (70) a (71) platí

$$l(\Gamma(t)) - l(\Gamma(t')) = L_k(\Gamma(t)) - L_k(\Gamma(t')) = \frac{l(z_{k+1}) - l(z_k)}{z_{k+1} - z_k} (\Gamma(t) - \Gamma(t')),$$

odkud za pomoci (39) dostáváme

$$|l(\Gamma(t)) - l(\Gamma(t'))| \leq K(t' - t).$$

Je-li $j < k$, potom

$$t_j \leq t \leq t_{j+1} \leq t_k \leq t' \leq t_{k+1}$$

a na základě předchozího případu ($j = k$) dostáváme

$$\begin{aligned} |l(\Gamma(t)) - l(\Gamma(t'))| &\leq |l(\Gamma(t)) - l(\Gamma(t_{j+1}))| + |l(\Gamma(t_{j+1})) - l(\Gamma(t_{j+2}))| + \dots \\ &\quad \dots + |l(\Gamma(t_{k-1})) - l(\Gamma(t_k))| + |l(\Gamma(t_k)) - l(\Gamma(t'))| \\ &\leq K(|t - t_{j+1}| + |t_{j+1} - t_{j+2}| + \dots + |t_{k-1} - t_k| + |t_k - t'|) = K(t' - t). \end{aligned}$$

Spojitosť funkce l v Diniho smyslu nyní plyne z poznámky 3. □

21. Integrál Cauchyho typu o po částech lineární hustotě

Definice 17. Funkci $\mathcal{C}(l)$, kde $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, nazveme *integrál Cauchyho typu o po částech lineární hustotě*.

Lemma 18. *Nechť $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a nechtě $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ je generující posloupnost pro funkci l . Potom*

$$\mathcal{C}(l)(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} L_j(z) \Gamma_j[z], \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma].$$

Důkaz: Na základě (69) a (67) pro $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(l)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma_j} \frac{l(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma_j} \frac{L_j(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(L_j(z_{j+1}) - L_j(z_j) + L_j(z) \Gamma_j[z] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(l(z_{j+1}) - l(z_j) \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} L_j(z) \Gamma_j[z] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} L_j(z) \Gamma_j[z]. \end{aligned}$$

□

Informace z lemmatu 18 bude použita mimo jiné k důkazu budoucích důležitých vět 12 a 14–17. Lze ji ovšem využít také k důkazu následujícího lemmatu.

Lemma 19. *Je-li $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, platí*

$$(55) \quad \mathcal{C}^-(l)(z) = l(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{l(\zeta) - l(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in [\Gamma].$$

Poznámka 10. Podle lemmatu 17 je funkce $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ spojitá v Diniho smyslu, a tedy (55) okamžitě plyne z poznámky 4. Lemma 18 nám však umožňuje provést důkaz nezávisle na obecném tvrzení 13, na kterém je poznámka 4 postavena. Důkaz, který nyní ukážeme, lze tedy pojmtout jako cvičení.

Důkaz: V úpravách použijeme (67), (68), (69) a také tvrzení 9, na základě kterého $\Gamma[w] = 2\pi i$ pro $w \in \Omega$. Nechtě $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ je generující posloupnost pro funkci $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a nechtě $k \in \mathbb{Z}$. Je-li $z \in [\Gamma_k] \setminus \{z_k, z_{k+1}\}$, potom

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{l(\zeta) - l(z)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\Gamma_k} \frac{L_k(\zeta) - L_k(z)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{j=k+1}^{k+m-1} \int_{\Gamma_j} \frac{L_j(\zeta) - L_k(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= L_k(z_{k+1}) - L_k(z_k) + \sum_{j=k+1}^{k+m-1} \left(L_j(z_{j+1}) - L_j(z_j) + L_j(z) \Gamma_j[z] - L_k(z) \Gamma_j[z] \right) \\ &= \sum_{j=k}^{k+m-1} (L_j(z_{j+1}) - L_j(z_j)) + \sum_{j=k+1}^{k+m-1} (L_j(z) - L_k(z)) \Gamma_j[z] \\ &= \sum_{j=k}^{k+m-1} (l(z_{j+1}) - l(z_j)) + \sum_{j=k+1}^{k+m-1} (L_j(z) - L_k(z)) \Gamma_j[z] \\ &= \sum_{j=k+1}^{k+m-1} (L_j(z) - L_k(z)) \Gamma_j[z], \end{aligned}$$

načež na základě lemmatu 18 dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^-(l)(z) &= \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k}^{k+m-1} L_j(w) \Gamma_j[w] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} L_k(w) \Gamma_k[w] + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-1} L_j(z) \Gamma_j[z] \\
&= \frac{1}{2\pi i} L_k(z) \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} \left(\Gamma[w] - \sum_{j=k+1}^{k+m-1} \Gamma_j[w] \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-1} L_j(z) \Gamma_j[z] \\
&= L_k(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-1} L_k(z) \Gamma_j[z] + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-1} L_j(z) \Gamma_j[z] \\
&= l(z) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-1} (L_j(z) - L_k(z)) \Gamma_j[z] = l(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{l(\zeta) - l(z)}{\zeta - z} d\zeta.
\end{aligned}$$

Je-li $z = z_k$, potom

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{l(\zeta) - l(z_k)}{\zeta - z_k} d\zeta &= \int_{\Gamma_{k-1}} \frac{L_{k-1}(\zeta) - L_{k-1}(z_k)}{\zeta - z_k} d\zeta + \int_{\Gamma_k} \frac{L_k(\zeta) - L_k(z_k)}{\zeta - z_k} d\zeta \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{k+m-2} \int_{\Gamma_j} \frac{L_j(\zeta) - L_k(z_k)}{\zeta - z_k} d\zeta \\
&= L_{k-1}(z_k) - L_{k-1}(z_{k-1}) + L_k(z_{k+1}) - L_k(z_k) \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{k+m-2} \left(L_j(z_{j+1}) - L_j(z_j) + L_j(z_k) \Gamma_j[z_k] - L_k(z_k) \Gamma_j[z_k] \right) \\
&= \sum_{j=k}^{k+m-1} (L_j(z_{j+1}) - L_j(z_j)) + \sum_{j=k+1}^{k+m-2} (L_j(z_k) - L_k(z_k)) \Gamma_j[z_k] \\
&= \sum_{j=k}^{k+m-1} (l(z_{j+1}) - l(z_j)) + \sum_{j=k+1}^{k+m-2} (L_j(z_k) - L_k(z_k)) \Gamma_j[z_k] \\
&= \sum_{j=k+1}^{k+m-2} (L_j(z_k) - L_k(z_k)) \Gamma_j[z_k],
\end{aligned}$$

načež na základě lemmatu 18 dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^-(l)(z_k) &= \lim_{\substack{w \rightarrow z_k \\ w \in \Omega}} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k-1}^{k+m-2} L_j(w) \Gamma_j[w] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{w \rightarrow z_k \\ w \in \Omega}} (L_{k-1}(w) \Gamma_{k-1}[w] + L_k(w) \Gamma_k[w]) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-2} L_j(z_k) \Gamma_j[z_k] \\
&= \frac{1}{2\pi i} L_k(z_k) \lim_{\substack{w \rightarrow z_k \\ w \in \Omega}} \left(\Gamma[w] - \sum_{j=k+1}^{k+m-2} \Gamma_j[w] \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-2} L_j(z_k) \Gamma_j[z_k] \\
&= L_k(z_k) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-2} L_k(z_k) \Gamma_j[z_k] + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-2} L_j(z_k) \Gamma_j[z_k] \\
&= l(z_k) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=k+1}^{k+m-2} (L_j(z_k) - L_k(z_k)) \Gamma_j[z_k] = l(z_k) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{l(\zeta) - l(z_k)}{\zeta - z_k} d\zeta.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz zakončen. □

22. Konvergence

V tomto oddíle stanovíme množinu funkcí $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ takových, že funkci $\mathcal{C}^-(g)$ lze na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat funkcemi $\mathcal{C}^-(l)$, kde $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$,

Budeme uvažovat libovolné $\mu \in (0, 1)$.

Definice 18. Bud' \mathcal{P} množina všech rozkladů \mathcal{P} cesty Γ splňujících podmínku

$$t_{j+1} - t_j \geq \mu\nu(\mathcal{P}), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Je-li $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ funkce spojitá v Diniho smyslu a je-li $[\Delta, q] \in \mathcal{M}$, potom buďte \mathcal{A}, \mathcal{B} funkce definované pro $\tau \in (0, +\infty)$ předpisy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tau) &= \omega_{g \circ \Gamma}\left(\frac{\tau}{2}\right) + \frac{V}{2q\mu}\omega_{g \circ \Gamma}(\tau), \\ \mathcal{B}(\tau) &= \frac{2V}{q} \left(\int_0^\tau \frac{\omega_{g \circ \Gamma}(s)}{s} ds + \frac{V}{q\mu}\omega_{g \circ \Gamma}(\tau) + 2\mathcal{A}(\tau) \left(\ln \frac{\Delta}{\tau} + \frac{T}{2\Delta} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Lemma 20. Nechť $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce spojitá v Diniho smyslu. Nechť

$$[\Delta, q] \in \mathcal{M}, \quad \mathcal{P} \in \mathcal{P}, \quad \nu(\mathcal{P}) \leq \Delta.$$

Potom pro každé $z \in [\Gamma]$ platí

$$(72) \quad |(g - g_{\mathcal{P}})(z)| \leq \mathcal{A}(\nu(\mathcal{P})),$$

$$(73) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{(g - g_{\mathcal{P}})(\zeta) - (g - g_{\mathcal{P}})(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \mathcal{B}(\nu(\mathcal{P})).$$

Důkaz: Na základě (50) pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ platí

$$\left| \frac{g_{\mathcal{P}}(z_{j+1}) - g_{\mathcal{P}}(z_j)}{z_{j+1} - z_j} \right| = \left| \frac{g(\Gamma(t_{j+1})) - g(\Gamma(t_j))}{\Gamma(t_{j+1}) - \Gamma(t_j)} \right| \leq \frac{\omega_{g \circ \Gamma}(t_{j+1} - t_j)}{q(t_{j+1} - t_j)} \leq \frac{\omega_{g \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{q\mu\nu(\mathcal{P})},$$

odkud

$$V \max_{0 \leq j \leq m-1} \left| \frac{g_{\mathcal{P}}(z_{j+1}) - g_{\mathcal{P}}(z_j)}{z_{j+1} - z_j} \right| \leq \frac{V\omega_{g \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{q\mu\nu(\mathcal{P})},$$

a tedy na základě lemmatu 17 platí

$$(74) \quad |g_{\mathcal{P}}(\Gamma(t)) - g_{\mathcal{P}}(\Gamma(t'))| \leq \frac{V\omega_{g \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{q\mu\nu(\mathcal{P})} |t - t'|, \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Nechť nyní $z \in [\Gamma]$. Existuje jediné $t \in \langle t_0, t_m \rangle$ takové, že $z = \Gamma(t)$ a existuje jediné $j \in \{0, \dots, m-1\}$ takové, že $t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že t není ve větší vzdálenosti od t_j než od t_{j+1} , neboli

$$t - t_j \leq \frac{t_{j+1} - t_j}{2}.$$

Potom na základě (74) platí

$$\begin{aligned} |(g - g_{\mathcal{P}})(z)| &= |g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t_j)) + g_{\mathcal{P}}(\Gamma(t_j)) - g_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))| \\ &\leq |g(\Gamma(t)) - g(\Gamma(t_j))| + |g_{\mathcal{P}}(\Gamma(t_j)) - g_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))| \\ &\leq \omega_{g \circ \Gamma}(t - t_j) + \frac{V\omega_{g \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{q\mu\nu(\mathcal{P})}(t - t_j) \leq \omega_{g \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right) + \frac{V\omega_{g \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{2q\mu} = \mathcal{A}(\nu(\mathcal{P})). \end{aligned}$$

Tím je dokázána nerovnost (72). Označme

$$L(s) = \frac{|(g - g_{\mathcal{P}})(\Gamma(s)) - (g - g_{\mathcal{P}})(\Gamma(t))|}{|\Gamma(s) - \Gamma(t)|} |\Gamma'(s)|.$$

Potom platí

$$(75) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{(g - g_{\mathcal{P}})(\zeta) - (g - g_{\mathcal{P}})(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} L(s) ds.$$

Dále na základě (50) a (74) platí

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\nu(\mathcal{P})} L(s) ds &\leq \frac{V}{q} \int_t^{t+\nu(\mathcal{P})} \frac{|g(\Gamma(s)) - g(\Gamma(t))| + |g_{\mathcal{P}}(\Gamma(s)) - g_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))|}{s-t} ds \\ &\leq \frac{V}{q} \left(\int_t^{t+\nu(\mathcal{P})} \frac{\omega_{g \circ \Gamma}(s-t)}{s-t} ds + \frac{V\omega_{g \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{q\mu\nu(\mathcal{P})} \int_t^{t+\nu(\mathcal{P})} ds \right) \\ &= \frac{V}{q} \left(\int_0^{\nu(\mathcal{P})} \frac{\omega_{g \circ \Gamma}(s)}{s} ds + \frac{V}{q\mu} \omega_{g \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P})) \right), \end{aligned}$$

na základě (50) a (72) platí

$$\int_{t+\nu(\mathcal{P})}^{t+\Delta} L(s) ds \leq \frac{V}{q} \int_{t+\nu(\mathcal{P})}^{t+\Delta} \frac{|(g - g_{\mathcal{P}})(\Gamma(s))| + |(g - g_{\mathcal{P}})(\Gamma(t))|}{s-t} ds \leq \frac{2V}{q} \mathcal{A}(\nu(\mathcal{P})) \ln \frac{\Delta}{\nu(\mathcal{P})}$$

a na základě (51) a (72) platí

$$\int_{t+\Delta}^{t+\frac{T}{2}} L(s) ds \leq \frac{V}{q\Delta} \int_{t+\Delta}^{t+\frac{T}{2}} \left(|(g - g_{\mathcal{P}})(\Gamma(s))| + |(g - g_{\mathcal{P}})(\Gamma(t))| \right) ds \leq \frac{2V}{q\Delta} \mathcal{A}(\nu(\mathcal{P})) \left(\frac{T}{2} - \Delta \right).$$

Tím je dokázáno, že

$$\int_t^{t+\frac{T}{2}} L(s) ds \leq \frac{1}{2} \mathcal{B}(\nu(\mathcal{P})).$$

Analogicky lze dokázat, že $\int_{t-\frac{T}{2}}^t L(s) ds \leq \frac{1}{2} \mathcal{B}(\nu(\mathcal{P}))$, a tedy na základě (75) platí (73). □

Lemma 21. *Nechť funkce g je spojitá v Diniho smyslu. Potom platí*

$$(i) \quad \liminf_{s \downarrow 0} \omega_g(s) \ln \frac{1}{s} = 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{\tau \downarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{\omega_g(s)}{s} ds = 0.$$

Důkaz: Je-li $\liminf_{s \downarrow 0} \omega_g(s) \ln \frac{1}{s} > 0$, potom pro všechna dostatečně malá kladná čísla s, ε platí $\frac{\omega_g(s)}{s} \geq \frac{\varepsilon}{s \ln \frac{1}{s}}$ a následně z divergence integrálu $\int_0^{\delta} \frac{\varepsilon}{s \ln \frac{1}{s}} ds$ pro libovolné $\delta > 0$ plyne divergence integrálu $\int_0^{\delta} \frac{\omega_g(s)}{s} ds$, což je spor se spojitostí funkce g v Diniho smyslu. Tím je dokázána vlastnost (i). Důkaz vlastnosti (ii) je triviální. □

Věta 9. *Nechť $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce spojitá v Diniho smyslu a splňující*

$$(76) \quad \limsup_{s \downarrow 0} \omega_g(s) \ln \frac{1}{s} = 0.$$

Potom $\lim_{\substack{\nu(\mathcal{P}) \downarrow 0 \\ \mathcal{P} \in \mathcal{P}}} \mathcal{C}^-(g_{\mathcal{P}})(z) = \mathcal{C}^-(g)(z)$ *stejněměrně vzhledem k $z \in \Omega \cup [\Gamma]$.*

Důkaz: Pro libovolný rozklad \mathcal{P} cesty Γ na základě (55) platí

$$\mathcal{C}^-(g)(z) - \mathcal{C}^-(g_{\mathcal{P}})(z) = (g - g_{\mathcal{P}})(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(g - g_{\mathcal{P}})(\zeta) - (g - g_{\mathcal{P}})(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in [\Gamma].$$

Je-li tedy $[\Delta, q] \in \mathcal{M}$, $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ a $\nu(\mathcal{P}) \leq \Delta$, potom na základě lemmatu 20 dostáváme

$$|\mathcal{C}^-(g)(z) - \mathcal{C}^-(g_{\mathcal{P}})(z)| \leq \mathcal{A}(\nu(\mathcal{P})) + \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}(\nu(\mathcal{P}))$$

pro $z \in [\Gamma]$ a na základě principu maxima pro holomorfní funkce platí totéž dokonce pro $z \in \Omega \cup [\Gamma]$. Nyní stačí dokázat, že

$$\lim_{\tau \downarrow 0} (\mathcal{A}(\tau) + \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}(\tau)) = 0.$$

Protože funkce $g \circ \Gamma$ je stejnoměrně spojitá, na základě tvrzení 15 platí $\lim_{\tau \downarrow 0} \omega_{g \circ \Gamma}(\tau) = 0$. Potom také

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \mathcal{A}(\tau) = 0.$$

Protože

$$\omega_{g \circ \Gamma}(\tau) \leq \omega_g(V\tau), \quad \tau \in (0, +\infty),$$

na základě lemmatu 21 dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \downarrow 0} \omega_{g \circ \Gamma}(\tau) \ln \frac{1}{\tau} &\leq \lim_{\tau \downarrow 0} \omega_g(V\tau) \ln \frac{1}{\tau} = \lim_{\tau \downarrow 0} \omega_g(V\tau) (\ln V + \ln \frac{1}{V\tau}) = \lim_{\tau \downarrow 0} \omega_g(V\tau) \ln \frac{1}{V\tau} = 0, \\ \lim_{\tau \downarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{\omega_{g \circ \Gamma}(s)}{s} ds &\leq \lim_{\tau \downarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{\omega_g(Vs)}{s} ds = \lim_{\tau \downarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{\omega_g(s)}{s} ds = 0. \end{aligned}$$

Z předchozích limitních vztahů plyne, že také

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \mathcal{B}(\tau) = 0,$$

čímž je důkaz završen. □

Věta 9 říká, že prostřednictvím funkcí $\mathcal{C}^-(l)$, kde $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, lze na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat libovolnou funkci, kterou lze vyjádřit ve tvaru $\mathcal{C}^-(g)$, kde $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce spojitá v Diniho smyslu a splňující (76). Poznamenejme, že množina všech takových funkcí g obsahuje funkce splňující Hölderovu podmínku s exponentem α , kde $0 < \alpha \leq 1$, a tedy věta 9 představuje zobecnění výsledku z [38, str. 450–452].

23. Holomorfní rozšíření

Jestliže funkce $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ je lineární na $[\Gamma]$, potom existuje lineární funkce $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ s vlastností $l = L|_{[\Gamma]}$, na základě (67) a tvrzení 9 platí

$$(77) \quad \mathcal{C}(l)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{L(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} L(z) \Gamma[z] = L(z), \quad z \in \Omega,$$

a tedy holomorfní element $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ má holomorfní rozšíření L definované v \mathbb{C} . V budoucím lemmatu 25 doplníme tuto informaci o opačnou implikaci – existuje-li holomorfní rozšíření holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ definované v \mathbb{C} , potom l je lineární na $[\Gamma]$. K jejímu důkazu vedou následující pomocná lemmata.

Lemma 22. *Nechť $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $a \in \Omega$ a pro každé $z \in \Omega$ je γ_z cesta začínající v bodě a , končící v bodě z a ležící v Ω . Potom funkce*

$$\Omega \ni z \longmapsto \gamma_z[w]$$

je holomorfní a platí

$$(78) \quad \frac{d}{dz} \gamma_z[w] = \frac{1}{z - w}, \quad z \in \Omega.$$

Poznámka 11. Za předpokladů z lemmatu 22 existuje ke každému $z \in \Omega$ jediné komplexní číslo $\gamma_z[w]$ nezávislé na výběru cesty γ_z s popsány vlastnostmi. Je-li totiž γ jiná cesta začínající v bodě a , končící v bodě z a ležící v Ω , potom $\gamma_z \vee (\dot{\gamma})$ je uzavřená cesta ležící v neprázdné jednoduše souvislé oblasti Ω , a tedy v důsledku tvrzení 11 a Cauchyho věty platí

$$\gamma_z[w] - \gamma[w] = \left(\gamma_z \vee (\dot{\gamma}) \right)[w] = 0.$$

Důkaz: Nechť $z \in \Omega$. Existuje $r > 0$ tak, že

$$K := \{ \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| \leq r \} \subset \Omega.$$

Pro libovolné $c \in \mathbb{C}$ splňující

$$0 < |c| \leq r$$

uvažujme cestu

$$\sigma(t) := z + tc, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Potom $\gamma_z \vee \sigma \vee (\dot{\gamma}_{z+c})$ je uzavřená cesta ležící v neprázdné jednoduše souvislé oblasti Ω , a tedy

$$\gamma_z[w] + \sigma[w] - \gamma_{z+c}[w] = \left(\gamma_z \vee \sigma \vee (\dot{\gamma}_{z+c}) \right)[w] = 0$$

v důsledku tvrzení 11 a Cauchyho věty. Dále

$$\frac{1}{c} \left(\gamma_{z+c}[w] - \gamma_z[w] \right) = \frac{1}{c} \sigma[w] = \int_0^1 \frac{ds}{z + sc - w}.$$

Protože funkce $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - w}$ je stejnoměrně spojitá v K , platí

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{z + sc - w} = \frac{1}{z - w}$$

stejnoměrně vzhledem k $s \in \langle 0, 1 \rangle$, odkud

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{ds}{z + sc - w} = \int_0^1 \frac{ds}{z - w} = \frac{1}{z - w},$$

což znamená, že

$$\frac{d}{dz} \gamma_z[w] = \frac{1}{z - w}.$$

□

Lemma 23. Nechť $a \in \Omega$ a necht' pro každé $z \in \Omega$ je γ_z cesta začínající v bodě a , končící v bodě z a ležící v Ω . Necht' $j \in \mathbb{Z}$. Potom

$$\Gamma_j[z] = \Gamma_j[a] + \gamma_z[z_{j+1}] - \gamma_z[z_j], \quad z \in \Omega.$$

Důkaz: Na základě lemmatu 22 je funkce

$$f(z) = \Gamma_j[z] - \Gamma_j[a] - \gamma_z[z_{j+1}] + \gamma_z[z_j], \quad z \in \Omega,$$

holomorfní a na základě (14) a (78) platí

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left(\Gamma_j[z] - \gamma_z[z_{j+1}] + \gamma_z[z_j] \right) = 0, \quad z \in \Omega.$$

Funkce f je tedy konstantní, což znamená, že

$$f(z) = f(a), \quad z \in \Omega.$$

Protože γ_a je uzavřená cesta ležící v neprázdné jednoduše souvislé oblasti Ω , v důsledku tvrzení 11 a Cauchyho věty dostáváme

$$\gamma_a[z_{j+1}] = 0 = \gamma_a[z_j],$$

odkud $f(a) = 0$. Potom f je nulová funkce, což má za následek dokazovanou identitu.

□

Uvažujme nyní pevně zvolený bod $a \in \Omega$, libovolné $j \in \mathbb{Z}$ a cestu γ_z začínající v bodě a , končící v bodě z a ležící v $\mathbb{C} \setminus \{z_j, z_{j+1}\}$. Označme (F, D) holomorfní element, který je výsledkem analytického pokračování holomorfního elementu $(\Gamma_j[\cdot], \Omega)$ podél cesty γ_z . Potom na základě lemmatu 23 platí

$$F(z) = \Gamma_j[a] + \gamma_z[z_{j+1}] - \gamma_z[z_j].$$

Příklad 7. Nechť $j \in \mathbb{Z}$. Protože $z_j \in \partial\Omega$, můžeme zvolit bod $a \in \Omega$ tak blízko bodu z_j , aby body z_{j-1} a $z_{j+1}, \dots, z_{j+m-2}$ ležely ve vnějšku kladně orientované kružnice γ_a o středu z_j , která začíná a končí v bodě a . Potom

$$\begin{aligned} \gamma_a[z_{j-1}] &= 0, & \gamma_a[z_j] &= 2\pi i, \\ \gamma_a[z_k] &= 0, & k &= j+1, \dots, j+m-2. \end{aligned}$$

Následující schéma popisuje některé výsledky analytického pokračování podél cesty γ_a :

$$\begin{aligned} (\Gamma_{j-1}[\cdot], \Omega) &\xrightarrow{\gamma_a} (\Gamma_{j-1}[\cdot] + 2\pi i, \Omega), \\ (\Gamma_j[\cdot], \Omega) &\xrightarrow{\gamma_a} (\Gamma_j[\cdot] - 2\pi i, \Omega), \\ (\Gamma_k[\cdot], \Omega) &\xrightarrow{\gamma_a} (\Gamma_k[\cdot], \Omega), \quad k = j+1, \dots, j+m-2. \end{aligned}$$

Lemma 24. Nechť $j \in \mathbb{Z}$, $a \in \Omega$ a γ_a je kladně orientovaná kružnice o středu z_j , která začíná a končí v bodě a a jejíž vnějšek obsahuje body z_{j-1} a $z_{j+1}, \dots, z_{j+m-2}$. Nechť $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a nechť $\{L_k\}_{k=0}^{m-1}$ je generující posloupnost pro funkci l . Potom holomorfní element $(\mathcal{C}(l) + L_{j-1} - L_j, \Omega)$ je výsledek analytického pokračování holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ podél cesty γ_a , tj.

$$(\mathcal{C}(l), \Omega) \xrightarrow{\gamma_a} (\mathcal{C}(l) + L_{j-1} - L_j, \Omega).$$

Důkaz: Na základě lemmatu 18 pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ platí

$$\mathcal{C}(l)(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(L_{j-1}(z)\Gamma_{j-1}[z] + L_j(z)\Gamma_j[z] \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=j+1}^{j+m-2} L_k(z)\Gamma_k[z],$$

načež stačí aplikovat výsledky z příkladu 7. □

Lemma 25. Nechť $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) existuje holomorfní rozšíření holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ definované v \mathbb{C} ,
- (ii) funkce l je lineární na $[\Gamma]$.

Důkaz: Nechť platí (i) a nechť $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ je generující posloupnost pro funkci l . Potom výsledek analytického pokračování holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ podél cesty γ_a popsané v lemmatu 24 splývá s $(\mathcal{C}(l), \Omega)$, a tedy na základě lemmatu 24 pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$L_{j-1}(z) = L_j(z), \quad z \in \Omega,$$

odkud na základě věty o jednoznačnosti dostáváme $L_{j-1} = L_j$. Zřejmě tedy

$$L_0 = L_1 = \dots = L_{m-1}.$$

Potom pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ platí

$$l|_{[\Gamma_j]} = L_j|_{[\Gamma_j]} = L_0|_{[\Gamma_j]},$$

odkud na základě (69) plyne, že $l = L_0|_{[\Gamma]}$, a tedy l je lineární na $[\Gamma]$. Tím je dokázána implikace (i) \Rightarrow (ii). Na začátku tohoto oddílu jsme ukázali, že platí také opačná implikace. □

Nyní zkonstruujeme maximální oblast $S \subset \mathbb{C}$ takovou, že pro libovolnou funkci $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ existuje holomorfní rozšíření holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ definované v S . Podle Riemannovy věty existuje konformní zobrazení \varkappa , které zobrazuje oblast $\Omega_\infty \cup \{\infty\}$ na oblast

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} \cup \{\infty\}$$

a pro které platí $\varkappa(\infty) = \infty$. Podle Carathéodoryho věty existuje rozšíření \mathcal{H} zobrazení \varkappa , které zobrazuje homeomorfně množinu $[\Gamma] \cup \Omega_\infty \cup \{\infty\}$ na množinu

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| \geq 1\} \cup \{\infty\}.$$

Označme \mathcal{H}^- inverzní homeomorfismus k homeomorfismu \mathcal{H} a pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ položme

$$\begin{aligned} w_j &:= \mathcal{H}(z_j), \\ p_j(t) &:= \mathcal{H}^-(tw_j), \quad t \in \langle 1, +\infty \rangle, \end{aligned}$$

Potom $|w_j| = 1$ a p_j je spojitě zobrazení s vlastnostmi

- (i) $p_j(1) = z_j$,
- (ii) $1 \leq t' < t'' < +\infty \implies p_j(t') \neq p_j(t'')$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_j(t) = \infty$,
- (iv) $t > 1 \implies p_j(t) \in \Omega_\infty$.

Definice 19. Pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ buďte

$$[p_j] = \{p_j(t) : 1 \leq t < +\infty\}, \quad R_j = \mathbb{C} \setminus [p_j].$$

Množiny $[p_0], \dots, [p_{m-1}]$ jsou disjunktní a představují výřezy z Gaussovy roviny. Přitom výřez $[p_j]$ spojuje uzel z_j s komplexním nekonečnem ∞ a s výjimkou uzlu z_j leží v množině $\mathbb{C} \setminus (\Omega \cup [\Gamma])$. Množina R_j je oblast, a to jednoduše souvislá, neboť její hranicí je souvislá množina $[p_j]$. S pomocí (i) a (iv) dostáváme, že

$$\Omega \subset R_j \subset \mathbb{C} \setminus \{z_j\}.$$

Potom podle tvrzení 7 existuje spojitá funkce $A_j : R_j \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastností

$$A_j(w) \in \arg(w - z_j), \quad w \in R_j.$$

Věta 10. Necht' $j \in \mathbb{Z}$. Existuje okolí N_j bodu z_j takové, že funkce A_j je omezená na množině

$$N_j \cap R_j.$$

Důkaz: Podle věty 3 existují čísla $\Delta \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\Delta > 0, \quad |c| = 1, \quad \{z_j + iuc : 0 < u \leq \Delta\} \subset \Omega.$$

Potom pro $w = z_j + i\Delta c$ dostáváme

$$\{(1-t)z_j + tw : 0 < t < 1\} = \{z_j + iuc : 0 < u \leq \Delta\} \subset R_j,$$

načež stačí aplikovat větu 1. □

Důsledek 2. Necht' $j \in \mathbb{Z}$. Potom

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in R_j}} (z - z_j)A_j(z) = 0.$$

Později uvidíme, že důsledek 2 je základním pilířem korektního odvození vyčíslitelných výrazů pro hraniční hodnoty $\mathcal{C}^-(l)(z_j)$, jejichž dostupnost je nezbytná pro algoritmickou realizaci komplexní metody hraničních prvků.

Definice 20. Buď $S = \bigcap_{j=0}^{m-1} R_j$.

Množina S je oblast, a to jednoduše souvislá, neboť její hranicí v $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je souvislá množina $\{\infty\} \cup \left(\bigcup_{j=0}^{m-1} [p_j] \right)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \Omega &\subset S, \\ \Omega \cup [\Gamma] &\subset \bigcap_{j=0}^{m-1} (R_j \cup [\Gamma]) = \bigcap_{j=0}^{m-1} (R_j \cup \{z_j\}) = S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}. \end{aligned}$$

Uvažujme pevně zvolený bod $a \in \Omega$ a pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ zavedme funkci

$$\Phi_j(z) = \ln \left| \frac{z - z_j}{a - z_j} \right| + i(A_j(z) - A_j(a)), \quad z \in R_j.$$

Funkce Φ_j je holomorfní v oblasti R_j , protože pro každou cestu γ_z začínající v bodě a , končící v bodě z a ležící v R_j na základě (15) a tvrzení 14 platí

$$(79) \quad \Phi_j(z) = \gamma_z[z_j].$$

Věta 11. *Nechť $a \in \Omega$, $j \in \mathbb{Z}$. Potom funkce*

$$\tilde{\Gamma}_j[z] = \Gamma_j[a] + \Phi_{j+1}(z) - \Phi_j(z), \quad z \in R_j \cap R_{j+1},$$

představuje holomorfní rozšíření holomorfního elementu $(\Gamma_j[\cdot], \Omega)$.

Důkaz: Funkce $\tilde{\Gamma}_j[\cdot]$ je zřejmě holomorfní v $R_j \cap R_{j+1}$ a na základě (79) a lemmatu 23 platí

$$\tilde{\Gamma}_j[z] = \Gamma_j[a] + \gamma_z[z_{j+1}] - \gamma_z[z_j] = \Gamma_j[z], \quad z \in \Omega. \quad \square$$

Poznámka 12. Z definice oblasti S plyne, že pro každé $j \in \mathbb{Z}$ jsou následující operátory identické:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in R_j \cap R_{j+1}}} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in R_j}}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}}.$$

Lemma 26. *Nechť $j \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}} (z - z_j) \tilde{\Gamma}_j[z] = 0, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_{j+1} \\ z \in S}} (z - z_{j+1}) \tilde{\Gamma}_j[z] = 0.$$

Důkaz: Protože funkce Φ_{j+1} je holomorfní a tedy spojitá v oblasti S obsahující bod z_j , platí

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}} (z - z_j) \tilde{\Gamma}_j[z] = \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}} (z - z_j) (\Gamma_j[a] + \Phi_{j+1}(z) - \Phi_j(z)) = - \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}} (z - z_j) \Phi_j(z)$$

a poslední limita je rovna nule, což plyne okamžitě z důsledku 2 a z toho faktu, že

$$\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) \ln |z - z_j| = 0.$$

Druhá rovnost se dokáže analogicky. □

Lemma 27. *Nechť $j \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}} (\tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \tilde{\Gamma}_j[z]) = (\Gamma_{j-1} \vee \Gamma_j)^\ell[z_j].$$

Důkaz: Funkce

$$F(z) = \Gamma_{j-1}[a] + \Gamma_j[a] + \Phi_{j+1}(z) - \Phi_{j-1}(z), \quad z \in R_{j-1} \cap R_{j+1},$$

je zřejmě holomorfní a pro každé $z \in R_{j-1} \cap R_j \cap R_{j+1}$ platí

$$F(z) = \Gamma_{j-1}[a] + \Phi_j(z) - \Phi_{j-1}(z) + \Gamma_j[a] + \Phi_{j+1}(z) - \Phi_j(z) = \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \tilde{\Gamma}_j[z].$$

F je tedy holomorfním rozšířením holomorfního elementu

$$(\tilde{\Gamma}_{j-1}[\cdot] + \tilde{\Gamma}_j[\cdot], R_{j-1} \cap R_j \cap R_{j+1}).$$

Protože $z_j \in R_{j-1} \cap R_{j+1}$, existuje limita $\lim_{z \rightarrow z_j} F(z)$, a protože $S \subset R_{j-1} \cap R_j \cap R_{j+1}$, platí

$$\lim_{z \rightarrow z_j} F(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}} F(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in S}} (\tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \tilde{\Gamma}_j[z]) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in \Omega}} (\tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \tilde{\Gamma}_j[z]).$$

Na základě věty 11 dostáváme

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in \Omega}} (\tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \tilde{\Gamma}_j[z]) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in \Omega}} (\Gamma_{j-1}[z] + \Gamma_j[z]) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in \Omega}} (\Gamma_{j-1} \vee \Gamma_j)[z] = (\Gamma_{j-1} \vee \Gamma_j)^\ell[z_j]. \quad \square$$

Lemma 28. *Nechť $j \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_j]$. Potom*

$$\tilde{\Gamma}_j[\zeta] = \Gamma_j[\zeta].$$

Důkaz: Protože na základě věty 11 je funkce $\tilde{\Gamma}_j[\cdot]$ holomorfní a tedy spojitá v oblasti $R_j \cap R_{j+1}$ obsahující bod ζ , platí

$$\tilde{\Gamma}_j[\zeta] = \lim_{z \rightarrow \zeta} \tilde{\Gamma}_j[z].$$

Dále s pomocí věty 11 dostáváme

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \tilde{\Gamma}_j[z] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega}} \tilde{\Gamma}_j[z] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega}} \Gamma_j[z].$$

Protože funkce $\Gamma_j[\cdot]$ je holomorfní a tedy spojitá v oblasti $\mathbb{C} \setminus [\Gamma_j]$ obsahující bod ζ , platí dále

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega}} \Gamma_j[z] = \lim_{z \rightarrow \zeta} \Gamma_j[z] = \Gamma_j[\zeta].$$

□

Lemma 29. *Nechť $j \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in [\Gamma_j] \setminus \{z_j, z_{j+1}\}$. Potom*

$$\tilde{\Gamma}_j[\zeta] = \Gamma_j^\ell[\zeta].$$

Důkaz: Stejně jako v důkazu lemmatu 28 platí

$$\tilde{\Gamma}_j[\zeta] = \lim_{z \rightarrow \zeta} \tilde{\Gamma}_j[z] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega}} \tilde{\Gamma}_j[z] = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega}} \Gamma_j[z],$$

kde poslední limita představuje výraz $\Gamma_j^\ell[\zeta]$.

□

Definice 21. Nechť $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a necht' $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ je generující posloupnost pro funkci l . Buď

$$(80) \quad \tilde{\mathcal{E}}(l)(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} L_j(z) \tilde{\Gamma}_j[z], \quad z \in S.$$

Poznámka 13. Formule (80) současně definuje operátor

$$\tilde{\mathcal{E}} : \mathcal{L}_m(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{H}(S),$$

kde $\mathcal{H}(S)$ je komplexní vektorový prostor všech funkcí holomorfních v S .

Věta 12. *Funkce $\tilde{\mathcal{E}}(l)$, kde $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, je holomorfním rozšířením holomorfního elementu $(\mathcal{E}(l), \Omega)$.*

Důkaz: Na základě věty 11 je funkce $\tilde{\mathcal{E}}(l)$ holomorfní v S a na základě stejné věty a lemmatu 18 pro libovolné $z \in \Omega$ platí

$$\tilde{\mathcal{E}}(l)(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} L_j(z) \Gamma_j[z] = \mathcal{E}(l)(z).$$

□

24. Spojité rozšíření

Budeme používat standardní komplexní vektorový prostor \mathbb{C}^m a jeho standardní bázi

$$e_j = [\delta_{0,j}, \dots, \delta_{m-1,j}]^T, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Uvažujme $l_1 \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, $l_2 \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom funkce $l_1 + l_2 : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\lambda l_1 : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ definované podmínkami

$$(81) \quad \begin{aligned} (l_1 + l_2)(z) &= l_1(z) + l_2(z), & z \in [\Gamma], \\ (\lambda l_1)(z) &= \lambda l_1(z), & z \in [\Gamma], \end{aligned}$$

patří do $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, a tedy $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ je komplexní vektorový prostor vzhledem k operacím vyjádřeným v (81). Zobrazení $I : \mathcal{L}_m(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{C}^m$ definované předpisem

$$I(l) := [l(z_0), \dots, l(z_{m-1})]^T, \quad l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}),$$

je izomorfismus vektorového prostoru $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ na vektorový prostor \mathbb{C}^m . Označme J příslušný inverzní izomorfismus a definujme

$$b_j := J(e_j), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Prvek b_j je charakterizován podmínkou

$$b_j \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}) \quad \wedge \quad (b_j(z_k) = \delta_{j,k}, \quad k = 0, \dots, m-1).$$

Prvky b_0, \dots, b_{m-1} tvoří bázi prostoru $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a pro každé $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ platí

$$l = \sum_{j=0}^{m-1} l(z_j) b_j.$$

Operátor $\tilde{\mathcal{E}} : \mathcal{L}_m(\mathcal{P}) \rightarrow H(S)$ zavedený v poznámce 13 je lineární, a tedy

$$(82) \quad \tilde{\mathcal{E}}(l) = \sum_{j=0}^{m-1} l(z_j) \tilde{\mathcal{E}}(b_j).$$

Uvažujme $j \in \mathbb{Z}$. Generující posloupnost pro prvek b_j může být vyjádřena ve tvaru $\{L_k\}_{k=j-1}^{j+m-2}$ (viz poznámku 9), kde

$$\begin{aligned} L_{j-1}(z) &= \frac{z_j - z}{z_j - z_{j-1}} b_j(z_{j-1}) + \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} b_j(z_j) = \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}}, \quad z \in \mathbb{C}, \\ L_j(z) &= \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} b_j(z_j) + \frac{z - z_j}{z_{j+1} - z_j} b_j(z_{j+1}) = \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}}, \quad z \in \mathbb{C}, \\ L_k(z) &= 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad k = j+1, \dots, j+m-2, \end{aligned}$$

načež na základě (80) platí

$$(83) \quad \tilde{\mathcal{E}}(b_j)(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[z] \right), \quad z \in S.$$

Definice 22. Pro $j \in \{0, \dots, m-1\}$ buď

$$D_j = R_{j-1} \cap R_j \cap R_{j+1}$$

a $f_j : D_j \cup \{z_{j-1}, z_j, z_{j+1}\} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitým rozšířením holomorfního elementu

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[z] \right), D_j \right).$$

Pro $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ buď

$$(84) \quad \mathcal{E}(l)(z) = \sum_{j=0}^{m-1} l(z_j) f_j(z), \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\},$$

Poznámka 14. Definice je korektní, neboť funkce

$$D_j \ni z \quad \longmapsto \quad \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[z] \right)$$

je na základě věty 11 holomorfní a na základě lemmat 26 – 28 platí

$$\begin{aligned} f_j(z_{j-1}) &= \lim_{\substack{z \rightarrow z_{j-1} \\ z \in D_j}} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[z] \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{z_{j-1} - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \Gamma_j[z_{j-1}], \\ f_j(z_j) &= \lim_{\substack{z \rightarrow z_j \\ z \in D_j}} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[z] \right) = \frac{1}{2\pi i} (\Gamma_{j-1} \vee \Gamma_j)^\ell[z_j], \\ f_j(z_{j+1}) &= \lim_{\substack{z \rightarrow z_{j+1} \\ z \in D_j}} \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[z] \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \Gamma_{j-1}[z_{j+1}]. \end{aligned}$$

Poznámka 15. Formule (84) současně definuje lineární operátor

$$\mathcal{E} : \mathcal{L}_m(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{C}(S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}),$$

kde $\mathcal{C}(S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\})$ je komplexní vektorový prostor všech funkcí spojitých v $S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}$.

Věta 13. Pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ je funkce f_j spojitým rozšířením holomorfního elementu $(\tilde{\mathcal{C}}(b_j), S)$. Funkce $\mathcal{E}(l)$, kde $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, je spojitým rozšířením holomorfního elementu $(\tilde{\mathcal{C}}(l), S)$.

Důkaz: První část tvrzení plyne okamžitě z (83). Funkce $\mathcal{E}(l)$ je spojitá, neboť

$$S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\} = \bigcap_{j=0}^{m-1} (D_j \cup \{z_{j-1}, z_j, z_{j+1}\}).$$

Navíc na základě první části tvrzení a (82) pro každé $z \in S$ platí

$$\mathcal{E}(l)(z) = \sum_{j=0}^{m-1} l(z_j) \tilde{\mathcal{C}}(b_j)(z) = \tilde{\mathcal{C}}(l)(z).$$

□

Poznámka 16. Z vět 12, 13 a z poznámky 4 je zřejmé, že pro $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ platí

$$\mathcal{E}(l)(z) = \mathcal{C}^-(l)(z), \quad z \in \Omega \cup [\Gamma].$$

25. Vlastnosti funkcí f_0, \dots, f_{m-1}

Věta 14. $\sum_{j=0}^{m-1} f_j(z) = 1, \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$

Důkaz: Položme $l := \sum_{j=0}^{m-1} b_j$. Potom $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a

$$l(z_j) = 1, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

odkud na základě (70) a (71) dostáváme, že $l(\zeta) = 1$ pro všechna $\zeta \in [\Gamma]$, a tedy na základě tvrzení 9 platí

$$\mathcal{C}(l)(z) = \frac{1}{2\pi i} \Gamma[z] = I(z, \Gamma) = 1, \quad z \in \Omega.$$

Na základě věty 12 a věty o jednoznačnosti platí

$$\tilde{\mathcal{C}}(l)(z) = 1, \quad z \in S,$$

a na základě věty 13 je

$$\mathcal{E}(l)(z) = 1, \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$$

Ale

$$\mathcal{E}(l)(z) = \sum_{j=0}^{m-1} l(z_j) f_j(z) = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(z), \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$$

□

Definice 23. Buď $\mathcal{Tr} : \mathcal{L}_m(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{C}([\Gamma])$ operátor definovaný předpisem

$$\mathcal{Tr}(l) = \mathcal{E}(l)|_{[\Gamma]}, \quad l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P}).$$

Lemma 30. *Nechť $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ je lineární na $[\Gamma]$. Potom $\mathcal{T}r(l) = l$.*

Důkaz: Podle (77) funkce $\mathcal{C}(l)$ splývá na Ω s lineární funkcí $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, pro kterou platí $l = L|_{[\Gamma]}$. Potom pro $z \in [\Gamma]$ na základě vět 13 a 12 platí

$$\mathcal{T}r(l)(z) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in S}} \tilde{\mathcal{C}}(l)(w) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} \mathcal{C}(l)(w) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega}} L(w) = L(z) = l(z).$$

□

Lemma 31. *Nechť oblast S obsahuje aspoň jeden hromadný bod množiny*

$$M \subset S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$$

Nechť $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ a nechť

$$\mathcal{E}(l)(z) = 0, \quad z \in M.$$

Potom

$$l(z) = 0, \quad z \in [\Gamma].$$

Důkaz: Položme $M_S := M \cap S$. Potom $M_S \subset S$, oblast S obsahuje aspoň jeden hromadný bod množiny M_S a na základě věty 13 platí

$$\tilde{\mathcal{C}}(l)(z) = 0, \quad z \in M_S.$$

Potom podle věty o jednoznačnosti platí

$$(85) \quad \tilde{\mathcal{C}}(l)(z) = 0, \quad z \in S,$$

odkud opět na základě věty 13 dostáváme

$$\mathcal{E}(l)(z) = 0, \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$$

Následně

$$(86) \quad \mathcal{T}r(l)(z) = 0, \quad z \in [\Gamma].$$

Na základě věty 12 a identity (85) platí

$$\mathcal{C}(l)(z) = 0, \quad z \in \Omega,$$

což znamená, že nulová funkce představuje holomorfní rozšíření holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ definované v \mathbb{C} . Podle lemmatu 25 je funkce l lineární na $[\Gamma]$. Potom na základě lemmatu 30 a identity (86) pro $z \in [\Gamma]$ platí

$$l(z) = \mathcal{T}r(l)(z) = 0.$$

□

Věta 15. *Nechť oblast S obsahuje aspoň jeden hromadný bod množiny*

$$M \subset S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$$

Potom funkce f_0, \dots, f_{m-1} uvažované pouze na množině M jsou lineárně nezávislé nad tělesem \mathbb{C} .

Důkaz: Uvažujme $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{C}$ a předpokládejme, že

$$\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j f_j(z) = 0, \quad z \in M.$$

Potom pro prvek $l = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j b_j$ platí

$$\mathcal{E}(l)(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \mathcal{E}(b_j)(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j f_j(z) = 0, \quad z \in M.$$

Z lemmatu 31 plyne

$$\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j b_j(z) = l(z) = 0, \quad z \in [\Gamma],$$

a tedy na základě lineární nezávislosti prvků b_0, \dots, b_{m-1} dostáváme

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{m-1} = 0.$$

□

Definice 24. Bud'

$$g_j = \operatorname{Re} f_j, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Věta 16. $\sum_{j=0}^{m-1} g_j(z) = 1, \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$

Důkaz: Tvrzení plyne okamžitě z věty 14.

□

Lemma 32. *Nechť $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$,*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{T}r(l)(z)) = 0, \quad z \in [\Gamma],$$

a necht' existuje $z' \in [\Gamma]$ s vlastností $\operatorname{Im}(l(z')) = 0$. Potom

$$l(z) = 0, \quad z \in [\Gamma].$$

Důkaz: Funkce $\operatorname{Re} \mathcal{E}(l)$ je harmonická v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$ a nulová na $[\Gamma]$. Na základě principu maxima modulu pro harmonické funkce je tedy nulová také v Ω . Potom na základě vět 12 a 13 platí

$$\operatorname{Re}(\mathcal{C}(l)(z)) = \operatorname{Re}(\tilde{\mathcal{C}}(l)(z)) = \operatorname{Re}(\mathcal{E}(l)(z)) = 0, \quad z \in \Omega.$$

Vidíme, že holomorfní funkce $\mathcal{C}(l)$ zobrazuje oblast Ω do množiny

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0\}.$$

Potom na základě věty o otevřenosti holomorfního zobrazení existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$(87) \quad \mathcal{C}(l)(z) = i\lambda, \quad z \in \Omega,$$

což znamená, že konstantní funkce $z \mapsto i\lambda$ představuje holomorfní rozšíření holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ definované v \mathbb{C} . Na základě lemmatu 25 je funkce l lineární na $[\Gamma]$, odkud na základě lemmatu 30 plyne, že $\mathcal{T}r(l) = l$. Potom pro $z \in [\Gamma]$ na základě vět 13, 12 a identity (87) dostáváme

$$\mathcal{T}r(l)(z) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \tilde{S}}} \tilde{\mathcal{C}}(l)(w) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \tilde{\Omega}}} \mathcal{C}(l)(w) = i\lambda,$$

odkud

$$0 = \operatorname{Im}(l(z')) = \operatorname{Im}(\mathcal{T}r(l)(z')) = \lambda,$$

a tedy

$$l(z) = \mathcal{T}r(l)(z) = i\lambda = 0, \quad z \in [\Gamma].$$

□

Věta 17. *Funkce g_0, \dots, g_{m-1} uvažované pouze na množině $[\Gamma]$ jsou lineárně nezávislé nad tělesem \mathbb{R} .*

Důkaz: Uvažujme $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$ a předpokládejme, že

$$\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j g_j(z) = 0, \quad z \in [\Gamma].$$

Potom pro prvek $l = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j b_j$ platí

$$\operatorname{Re}(\mathcal{T}r(l)(z)) = \operatorname{Re}(\mathcal{E}(l)(z)) = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j \mathcal{E}(b_j)(z) \right) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j g_j(z) = 0, \quad z \in [\Gamma],$$

$$\operatorname{Im}(l(z_0)) = \operatorname{Im}(\lambda_0 b_0(z_0)) = \operatorname{Im} \lambda_0 = 0.$$

Jsou tedy splněny předpoklady lemmatu 32, z něhož plyne

$$\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j b_j(z) = l(z) = 0, \quad z \in [\Gamma],$$

a tedy na základě lineární nezávislosti prvků b_0, \dots, b_{m-1} dostáváme

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{m-1} = 0.$$

□

Definice funkcí f_0, \dots, f_{m-1} resp. g_0, \dots, g_{m-1} je založena na znalosti uzlů z_0, \dots, z_{m-1} , které lze jednoduše stanovit například tak, že zvolíme libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a položíme

$$(88) \quad z_j := \Gamma \left(\alpha + \frac{T}{m} j \right), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Pro budoucí potřeby zařadíme na toto místo definici rozkladu \mathcal{P} cesty Γ odpovídajícího uzlům (88).

Definice 25. Rozklad $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ cesty Γ je *rovnoměrný*, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ platí

$$\Gamma_j = \Gamma \Big|_{\langle \alpha + \frac{T}{m} j, \alpha + \frac{T}{m} (j+1) \rangle}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

IV. Vývoj komplexní metody hraničních prvků

Náš příspěvek k vývoji komplexní metody hraničních prvků spočívá v návrhu a diskuzi dvou nových postupů pro přibližné řešení Dirichletovy úlohy

$$(D) \quad \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad u = h \quad \text{na } [\Gamma],$$

kde $h : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. V návrhu obou postupů se k sestavení přibližného řešení používají funkce g_0, \dots, g_{m-1} , jejichž vlastnosti spolu se všemi doposud odvozenými výsledky zhodnocují tyto postupy v diskuzi aspektů důležitých z pohledu numerických metod. Přestože se zabýváme výhradně úlohou (D), domníváme se, že obdobného zhodnocení lze dosáhnout použitím funkcí g_0, \dots, g_{m-1} také v jiných okrajových úlohách, jejichž přibližným řešením se komplexní metoda hraničních prvků zabývá.

26. Přibližné řešení Dirichletovy úlohy

První postup

Uvažujme $n \geq m$, posloupnost

$$(89) \quad \{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}, \quad \text{kde } \zeta_0, \dots, \zeta_{n-1} \in [\Gamma],$$

a k této posloupnosti uvažujme matici

$$(90) \quad \{g_j(\zeta_k)\}_{\substack{k=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, m-1}} = \begin{bmatrix} g_0(\zeta_0) & \dots & g_{m-1}(\zeta_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(\zeta_{n-1}) & \dots & g_{m-1}(\zeta_{n-1}) \end{bmatrix}$$

a soustavu

$$(91) \quad \sum_{j=0}^{m-1} l_j g_j(\zeta_k) = h(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

n lineárních algebraických rovnic o m neznámých l_0, \dots, l_{m-1} . Na základě tvrzení 17 platí

Lemma 33. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *existuje posloupnost $\{\xi_r\}_{r=0}^{m-1}$ vybraná z posloupnosti (89) tak, že čtvercová matice*

$$\{g_j(\xi_r)\}_{\substack{r=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, m-1}} \quad \text{je regulární,}$$

(ii) *úloha řešit soustavu (91) metodou nejmenších čtverců má právě jedno řešení.*

Definice 26. Řekneme, že posloupnost (89) je *vztažná*, je-li splněna některá z podmínek (i), (ii) vyjádřených v lemmatu 33.

Analýze vztažných posloupností se hlouběji věnujeme v následujícím oddíle.

Definice 27. Nechť posloupnost (89) je vztažná a $[\hat{l}_0, \dots, \hat{l}_{m-1}]^T$ je řešení soustavy (91) metodou nejmenších čtverců. Buďte

$$\hat{l} = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}_j b_j, \quad \hat{K} = V \max_{0 \leq j \leq m-1} \left| \frac{\hat{l}_{j+1} - \hat{l}_j}{z_{j+1} - z_j} \right|,$$

$$\hat{u}(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}_j g_j(z), \quad z \in \Omega \cup [\Gamma].$$

Funkce \hat{l} patří do množiny $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$. Protože

$$\hat{l}(z_j) = \hat{l}_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

na základě lemmatu 17 platí

$$(92) \quad \left| \hat{l}(\Gamma(t)) - \hat{l}(\Gamma(t')) \right| \leq \hat{K} |t - t'|, \quad t, t' \in \mathbb{R}.$$

Na základě lemmatu 16 je funkce \hat{l} spojitá v Diniho smyslu a na základě poznámky 16 dostáváme

$$(93) \quad \hat{u} = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}(z_j) \operatorname{Re} f_j = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}(z_j) f_j \right) = \operatorname{Re} \mathcal{E}(\hat{l}) = \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(\hat{l}).$$

Funkce \hat{u} je harmonická v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$, a splňuje podmínky

$$\hat{u}(\zeta_k) = h(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

ve smyslu nejmenších čtverců. Je-li veličina

$$(94) \quad \max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \hat{u}(z)|$$

malá, potom na základě principu maxima modulu pro harmonické funkce je možné funkci \hat{u} považovat za přibližné řešení úlohy (D). Vezmeme-li v úvahu tvrzení 12, (93) a větu 9, vidíme, že za příznivých okolností lze funkcemi \hat{u} na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat řešení úlohy (D).

Poznámka 17. Všimněme si, že soustava (91), jejíž řešení je nezbytné pro práci s funkcí \hat{u} , má m neznámých. V oddíle 2 jsme viděli, že původní postup využívající metodu nejmenších čtverců vede při stejných uzlech rozkladu z_0, \dots, z_{m-1} na řešení soustavy o $2m + 3$ neznámých. V našem případě se tedy jedná o úsporu více než poloviny neznámých.

Druhý postup – speciální případ

Poznámka 18. Je-li $n = m$, potom posloupnost (89) je vztažná právě tehdy, když je splněna některá z ekvivalentních podmínek

- (i') matice (90) je regulární,
- (ii') soustava (91) má právě jedno řešení.

Definice 28. Necht' posloupnost $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$ je vztažná a $[\hat{l}_0, \dots, \hat{l}_{m-1}]^T$ je řešení soustavy

$$(95) \quad \sum_{j=0}^{m-1} l_j g_j(z_k) = h(z_k), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Buďte

$$\hat{l}_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}_j b_j, \quad \hat{K}_{\mathcal{P}} = V \max_{0 \leq j \leq m-1} \left| \frac{\hat{l}_{j+1} - \hat{l}_j}{z_{j+1} - z_j} \right|,$$

$$\hat{u}_{\mathcal{P}}(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}_j g_j(z), \quad z \in \Omega \cup [\Gamma].$$

Stejně jako v obecném případě patří funkce $\hat{l}_{\mathcal{P}}$ do množiny $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, platí

$$(96) \quad \left| \hat{l}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t)) - \hat{l}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t')) \right| \leq \hat{K}_{\mathcal{P}} |t - t'|, \quad t, t' \in \mathbb{R},$$

funkce \hat{l} je spojitá v Diniho smyslu a

$$(97) \quad \hat{u}_{\mathcal{P}} = \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(\hat{l}_{\mathcal{P}}).$$

Funkce $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ je harmonická v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$ a splňuje podmínky

$$(98) \quad \hat{u}_{\mathcal{P}}(z_j) = h(z_j), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Je-li veličina

$$(99) \quad \max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(z)|$$

malá, potom na základě principu maxima modulu pro harmonické funkce je možné funkci $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ považovat za přibližné řešení úlohy (D). Vezmeme-li v úvahu tvrzení 12, (97) a větu 9, vidíme, že za příznivých okolností lze funkcemi $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat řešení úlohy (D).

27. Řešitelnost soustavy

Z definic 27 a 28 je zřejmé, že funkce \hat{u} a $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ lze uvažovat jen za předpokladu řešitelnosti příslušné soustavy lineárních algebraických rovnic. Výsledky, které se vztahují k řešitelnosti těchto soustav, můžeme na základě definice 26 popřípadě poznámky 18 formulovat prostřednictvím vztažných posloupností:

Věta 18. *Existují body $w_0, \dots, w_{m-1} \in [\Gamma]$ a číslo $\eta > 0$ takové, že každá posloupnost $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$, z níž lze vybrat posloupnost $\{\zeta_r^*\}_{r=0}^{m-1}$ s vlastností*

$$(100) \quad \zeta_r^* \in [\Gamma] \quad \wedge \quad |\zeta_r^* - w_r| < \eta, \quad r = 0, \dots, m-1,$$

je vztažná.

Důkaz: Na základě věty 17 a lemmatu 3 existují body $w_0, \dots, w_{m-1} \in [\Gamma]$ a číslo $\eta > 0$ takové, že matice $\{g_j(\zeta_r^*)\}_{\substack{r=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, m-1}}$ je regulární pro každou posloupnost $\{\zeta_r^*\}_{r=0}^{m-1}$ s vlastností (100), což podle poznámky 18 znamená, že taková posloupnost je vztažná. Jistě je potom vztažná také každá posloupnost $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$, z níž lze vybrat posloupnost $\{\zeta_r^*\}_{r=0}^{m-1}$ s vlastností (100) \square

Následující věta popisuje automatický způsob produkce vztažných posloupností.

Věta 19. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, kde $n \geq n_0$, je*

$$\left\{ \Gamma \left(\alpha + \frac{kT}{n} \right) \right\}_{k=0}^{n-1}$$

vztažná posloupnost.

Důkaz: Položme $\beta := \alpha + T$ a na polootevřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ uvažujme funkce

$$\varphi_0 = g_0 \circ \Gamma, \dots, \varphi_{m-1} = g_{m-1} \circ \Gamma.$$

Tyto funkce jsou spojité a na základě věty 17 také lineárně nezávislé nad tělesem \mathbb{R} . Potom na základě lemmatu 4 existují dvě posloupnosti $\{\alpha_r\}_{r=0}^{m-1}$ a $\{\beta_r\}_{r=0}^{m-1}$ takové, že platí

- (i) $\alpha \leq \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_{m-1} < \beta_{m-1} < \beta$,
- (ii) pro všechna $[t_0, \dots, t_{m-1}] \in \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \times \dots \times \langle \alpha_{m-1}, \beta_{m-1} \rangle$ je čtvercová matice

$$\left\{ \varphi_j(t_r) \right\}_{\substack{r=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, m-1}} \quad \text{regulární.}$$

Nyní definujeme

$$\varepsilon := \min\{\beta_r - \alpha_r : 0 \leq r \leq m-1\}$$

a zavedeme množinu

$$M := \{n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{T}{\varepsilon}\}.$$

M je neprázdná podmnožina množiny všech přirozených čísel, a proto existuje nejmenší prvek n_0 množiny M . Dále je zřejmé, že

$$M = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}.$$

Uvažujme libovolné $n \in M$. Naším bezprostředním cílem je vybrat posloupnost $\{k_r\}_{r=0}^{m-1}$ z celočíselné posloupnosti $\{k\}_{k=0}^{n-1}$ takovým způsobem, aby

$$\alpha + \frac{k_r T}{n} \in \langle \alpha_r, \beta_r \rangle, \quad r = 0, \dots, m-1.$$

Za tímto účelem zavedme zobrazení $f : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \frac{(x - \alpha)n}{T}, \quad x \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Nechť nyní $r \in \{0, \dots, m-1\}$. Potom zobrazení f zobrazí interval $\langle \alpha_r, \beta_r \rangle$ na interval

$$\left\langle \frac{(\alpha_r - \alpha)n}{T}, \frac{(\beta_r - \alpha)n}{T} \right\rangle,$$

který má délku

$$\frac{(\beta_r - \alpha)n}{T} - \frac{(\alpha_r - \alpha)n}{T} = \frac{(\beta_r - \alpha_r)n}{T} \geq \frac{\varepsilon n}{T} \geq 1.$$

Protože každý kompaktní interval, jehož délka je aspoň 1, obsahuje aspoň jedno celé číslo, můžeme ke zvolenému indexu r přiřadit celé číslo k_r tak, aby platilo

$$\frac{(\alpha_r - \alpha)n}{T} \leq k_r \leq \frac{(\beta_r - \alpha)n}{T}.$$

Odtud ovšem plyne

$$0 \leq k_r \leq n-1, \quad \alpha + \frac{k_r T}{n} \in \langle \alpha_r, \beta_r \rangle.$$

O posloupnosti $\{\Gamma(\alpha + \frac{k_r T}{n})\}_{r=0}^{m-1}$ můžeme říci, že je vybraná z posloupnosti $\{\Gamma(\alpha + \frac{kT}{n})\}_{k=0}^{n-1}$, a to takovým způsobem, že čtvercová matice

$$\left\{ g_j \left(\Gamma \left(\alpha + \frac{k_r T}{n} \right) \right) \right\}_{\substack{r=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, m-1}} = \left\{ \varphi_j \left(\alpha + \frac{k_r T}{n} \right) \right\}_{\substack{r=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, m-1}}$$

je v důsledku podmínky (ii) regulární. To podle lemmatu 33 znamená, že posloupnost

$$\left\{ \Gamma \left(\alpha + \frac{kT}{n} \right) \right\}_{k=0}^{n-1}$$

je vztažná. □

Jednotková kružnice

Speciální výsledek odvodíme pro cestu

$$(KR) \quad \Gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Uvažujme $m \geq 4$ a rovnoměrný rozklad $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$z_0 = z_m = 1.$$

Potom

$$z_j = e^{i\frac{2\pi}{m}j}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Symbolem \bar{z} budeme označovat číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$. Pro všechna $p, q \in \mathbb{Z}$ platí

$$(101) \quad z_{p+q} = z_p z_q, \quad z_{-p} = \bar{z}_p = \frac{1}{z_p}.$$

Identické zobrazení množiny \mathbb{C} na sebe má vlastnosti homeomorfismu \mathcal{H} zavedeného na straně 64, což nás opravňuje uvažovat

$$R_j = \mathbb{C} \setminus \{tz_j : 1 \leq t < +\infty\}.$$

Na základě věty 11 platí

$$(102) \quad f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \Gamma_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \Gamma_j[z] \right), \quad z \in \Omega.$$

Lemma 34. $\overline{f_0(z)} = f_0(\bar{z}), \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$

Důkaz: Necht $x \in (-1, 1)$. V následujících úpravách se uplatní (101):

$$\operatorname{Re} \Gamma_{-1}[x] = \ln \left| \frac{z_0 - x}{z_{-1} - x} \right| = \ln \left| \frac{z_0 - x}{z_1 - x} \right| = \ln \left| \frac{z_0 - x}{z_1 - x} \right| = -\ln \left| \frac{z_1 - x}{z_0 - x} \right| = -\operatorname{Re} \Gamma_0[x].$$

Protože

$$\arg \frac{z_0 - x}{z_{-1} - x} = \arg \frac{1}{z_{-1} - x} = \arg \frac{1}{z_1 - x} = \arg(z_1 - x) = \arg \frac{z_1 - x}{z_0 - x},$$

platí $\operatorname{Im} \Gamma_{-1}[x] = \operatorname{Im} \Gamma_0[x]$, a tedy $\Gamma_{-1}[x] = -\overline{\Gamma_0[x]}$. Následně na základě (102) je

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x - z_{-1}}{z_0 - z_{-1}} \Gamma_{-1}[x] + \frac{x - z_1}{z_0 - z_1} \Gamma_0[x] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(-\overline{\left(\frac{x - z_1}{z_0 - z_1} \Gamma_0[x] \right)} + \frac{x - z_1}{z_0 - z_1} \Gamma_0[x] \right) = \frac{1}{2\pi i} (c - \bar{c}), \end{aligned}$$

kde $c = \frac{x - z_1}{z_0 - z_1} \Gamma_0[x]$. Dokázali jsme tedy, že

$$\operatorname{Im} f_0(x) = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Potom pro funkci

$$F(z) = f_0(z) - \overline{f_0(\bar{z})},$$

kteřá je holomorfní v oblasti S a spojitá na množině $S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}$, platí

$$F(x) = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Na základě věty o jednoznačnosti a ze spojitosti funkce F dostáváme identitu

$$F(z) = 0, \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\},$$

kteřá je ekvivalentní s dokazovaným tvrzením. □

Lemma 35. $f_j(z_k) = f_0(z_{k-j}), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$

Důkaz: Necht $p, q \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in \Omega$ platí

$$\Gamma_{p+q}[z_p z] = \int_{\Gamma_{p+q}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_p z} = \int_{\Gamma_q} \frac{d(z_p w)}{z_p w - z_p z} = \int_{\Gamma_q} \frac{dw}{w - z} = \Gamma_q[z],$$

odkud na základě (102) plyne, že

$$\begin{aligned} f_{p+q}(z_p z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z_p z - z_p z_{q-1}}{z_p z_q - z_p z_{q-1}} \Gamma_{p+q-1}[z_p z] + \frac{z_p z - z_p z_{q+1}}{z_p z_q - z_p z_{q+1}} \Gamma_{p+q}[z_p z] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{q-1}}{z_q - z_{q-1}} \Gamma_{q-1}[z] + \frac{z - z_{q+1}}{z_q - z_{q+1}} \Gamma_q[z] \right) = f_q(z). \end{aligned}$$

Na základě věty o jednoznačnosti a ze spojitosti funkcí f_q, f_{p+q} platí

$$f_q(z) = f_{p+q}(z_p z), \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\},$$

odkud ještě s pomocí (101) pro libovolná $j, k \in \mathbb{Z}$ dostáváme

$$f_j(z_k) = f_{-j+j}(z_{-j} z_k) = f_0(z_k z_{-j}) = f_0(z_{k-j}).$$

□

Lemma 36. *Matice*

$$(103) \quad \{g_j(z_k)\}_{\substack{k=0,\dots,m-1 \\ j=0,\dots,m-1}}$$

je symetrická a její prvky jsou generovány posloupností $\{g_0(z_p)\}_{p=0}^\mu$, kde μ je celá část čísla $\frac{m}{2}$, podle pravidla

$$g_j(z_k) = g_0(z_p), \quad \text{kde } p = \begin{cases} |k-j|, & \text{je-li } |k-j| \leq \mu, \\ m-|k-j|, & \text{je-li } |k-j| > \mu. \end{cases}$$

Důkaz: Necht' $j, k \in \mathbb{Z}$. V následujících úpravách se uplatní (101). Na základě lemmat 35 a 34 platí

$$f_k(z_j) = f_0(z_{j-k}) = f_0(\overline{z_{k-j}}) = \overline{f_0(z_{k-j})} = \overline{f_j(z_k)},$$

odkud plyne symetrie matice (103). Na základě lemmatu 34 platí

$$g_0(\bar{z}) = g_0(z), \quad z \in S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}.$$

Potom s pomocí lemmatu 35 dostáváme

$$g_j(z_k) = g_0(z_{k-j}) = g_0(z_{|k-j|}) = g_0(z_{m-|k-j|}),$$

což znamená, že představené pravidlo je korektní. Protože platí

$$|k-j| > \mu \implies m-|k-j| \leq \mu,$$

je libovolný index p uvažovaný v tomto pravidle obsažen v množině $\{0, \dots, \mu\}$. □

Zavedeme veličinu $\varphi = \frac{2\pi}{m}$. Potom $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Lemma 37. *Pro všechna $t \in \langle 0, \pi - \varphi \rangle$ platí*

$$(104) \quad g_0(e^{i(\varphi+t)}) > 0.$$

Důkaz: Uvažujme $t \in \langle 0, \pi - \varphi \rangle$ a označme $z = e^{i(\varphi+t)}$. Potom

$$\frac{z - z_{-1}}{z_0 - z_{-1}} = \frac{e^{i(\varphi+t)} - e^{-i\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} = \frac{e^{i(2\varphi+t)} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{e^{i(\varphi+\frac{t}{2})} \sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right),$$

$$\frac{z - z_1}{z_0 - z_1} = \frac{e^{i(\varphi+t)} - e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = -\frac{e^{i(\varphi+\frac{t}{2})} \sin\frac{t}{2}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{\varphi}{2}} = -\frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{t}{2},$$

$$\left| \frac{z_0 - z}{z_{-1} - z} \right| = \frac{|e^{i(\varphi+t)} - 1|}{|e^{i(\varphi+t)} - e^{-i\varphi}|} = \frac{\sin\frac{\varphi+t}{2}}{\sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right)},$$

$$\left| \frac{z_1 - z}{z_0 - z} \right| = \frac{|e^{i(\varphi+t)} - e^{i\varphi}|}{|e^{i(\varphi+t)} - 1|} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\varphi+t}{2}}.$$

Zřejmě

$$\Gamma_{-1}[z] = \ln \left| \frac{z_0 - z}{z_{-1} - z} \right| + i\frac{\varphi}{2} = \ln \frac{\sin\frac{\varphi+t}{2}}{\sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right)} + i\frac{\varphi}{2}.$$

Je-li $t \neq 0$, potom

$$\Gamma_0[z] = \ln \left| \frac{z_1 - z}{z_0 - z} \right| + i\frac{\varphi}{2} = \ln \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\varphi+t}{2}} + i\frac{\varphi}{2}$$

a $z \in D_0$, načež na základě (102) dostáváme

$$\begin{aligned}
 2\pi i f_0(z) &= \frac{z - z_{-1}}{z_0 - z_{-1}} \Gamma_{-1}[z] + \frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \Gamma_0[z] \\
 (105) \quad &= \frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \left(\ln \frac{\sin \frac{\varphi+t}{2}}{\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)} + i\frac{\varphi}{2} \right) - \sin \frac{t}{2} \left(\ln \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\varphi+t}{2}} + i\frac{\varphi}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[i\frac{\varphi}{2} \left(\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) - \sin \frac{t}{2} \right) - \sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \ln \frac{\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi+t}{2}} - \sin \frac{t}{2} \ln \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\varphi+t}{2}} \right] \\
 &= \frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[i\varphi \cos \frac{\varphi+t}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \ln \frac{\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi+t}{2}} - \sin \frac{t}{2} \ln \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\varphi+t}{2}} \right].
 \end{aligned}$$

Je-li $t = 0$, je $z = z_1$ a platí

$$\begin{aligned}
 2\pi i f_0(z) &= 2\pi i \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in S}} \tilde{\mathcal{E}}(b_0)(w) = \frac{z - z_{-1}}{z_0 - z_{-1}} \Gamma_{-1}[z] \\
 &= \frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \left(\ln \frac{\sin \frac{\varphi+t}{2}}{\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)} + i\frac{\varphi}{2} \right) \\
 &= \frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[i\frac{\varphi}{2} \sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) - \sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \ln \frac{\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi+t}{2}} \right] \\
 &= \frac{e^{i\frac{\varphi+t}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[i\varphi \cos \frac{\varphi+t}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right) \ln \frac{\sin \left(\varphi + \frac{t}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi+t}{2}} \right],
 \end{aligned}$$

kde poslední výraz (v němž $t = 0$) lze ztotožnit s výrazem (105), neboť zde a v následujícím textu uvažujeme spojitě rozšíření funkce $x \mapsto x \ln x$ na interval $(0, +\infty)$. V tomto smyslu budeme dále uvažovat případy $t \neq 0$ a $t = 0$ společně. Využijeme také toho, že

$$(106) \quad x \ln x \leq x(x-1), \quad x \geq 0.$$

Nyní zavedeme funkce

$$\begin{aligned}
 A(\tau) &= \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi + \tau}{2}, \\
 B(\tau) &= \left[\sin \left(\varphi + \frac{\tau}{2} \right) \ln \frac{\sin \left(\varphi + \frac{\tau}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi+\tau}{2}} + \sin \frac{\tau}{2} \ln \frac{\sin \frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\varphi+\tau}{2}} \right] \sin \frac{\varphi + \tau}{2}, \\
 u(\tau) &= 4 \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi + \tau}{2}, \\
 v(\tau) &= \sin \left(\frac{7\varphi}{4} + \tau \right) - \sin \left(\frac{\varphi}{4} + \tau \right) + 2 \sin \frac{\varphi}{4},
 \end{aligned}$$

kde $\tau \in \langle 0, \pi - \varphi \rangle$. Potom

$$(107) \quad 2\pi g_0(z) = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} (A(t) - B(t)).$$

Protože

$$\varphi \sin \frac{\varphi}{2} = 2\varphi \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} = 8 \frac{\varphi}{4} \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} > 8 \sin \frac{\varphi}{4} \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi}{4} = 4 \sin \frac{\varphi}{4} \sin \frac{\varphi}{2},$$

máme

$$A(t) \geq \sin \frac{\varphi}{4} u(t).$$

Na základě (106) platí

$$\begin{aligned}
 B(t) &\leq \sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right) \left(\sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right) - \sin\frac{\varphi+t}{2} \right) + \sin\frac{t}{2} \left(\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{\varphi+t}{2} \right) \\
 &= 2 \sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{4} + \frac{t}{2}\right) \sin\frac{\varphi}{4} - 2 \sin\frac{t}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{t}{2}\right) \sin\frac{\varphi}{4} \\
 &= \left[2 \sin\left(\varphi + \frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{4} + \frac{t}{2}\right) - 2 \sin\frac{t}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{t}{2}\right) \right] \sin\frac{\varphi}{4} \\
 &= \left[\sin\left(\frac{7\varphi}{4} + t\right) + \sin\frac{\varphi}{4} - \sin\left(\frac{\varphi}{4} + t\right) + \sin\frac{\varphi}{4} \right] \sin\frac{\varphi}{4} = \sin\frac{\varphi}{4} v(t).
 \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že

$$(108) \quad A(t) - B(t) \geq \sin\frac{\varphi}{4} (u(t) - v(t)).$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
 u(0) &= 4 \sin\frac{\varphi}{2} \cos^2\frac{\varphi}{2}, \\
 v(0) &= \sin\frac{7\varphi}{4} + \sin\frac{\varphi}{4} = 2 \sin\varphi \cos\frac{3\varphi}{4} = 4 \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{3\varphi}{4},
 \end{aligned}$$

a tedy

$$(109) \quad u(0) - v(0) = 4 \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{3\varphi}{4} \right) > 0.$$

Uvažujme nyní libovolné $\tau \in \langle 0, \pi - \varphi \rangle$. Protože

$$u(\tau) = 4 \sin\frac{\varphi}{2} \cos^2\frac{\varphi+\tau}{2} = 2 \sin\frac{\varphi}{2} (1 + \cos(\varphi + \tau)),$$

platí

$$\begin{aligned}
 u'(\tau) &= -2 \sin\frac{\varphi}{2} \sin(\varphi + \tau), \\
 v'(\tau) &= \cos\left(\frac{7\varphi}{4} + \tau\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{4} + \tau\right) = -2 \sin\frac{3\varphi}{4} \sin(\varphi + \tau),
 \end{aligned}$$

a tedy

$$u'(\tau) - v'(\tau) = 2 \left(\sin\frac{3\varphi}{4} - \sin\frac{\varphi}{2} \right) \sin(\varphi + \tau) \geq 0.$$

Odtud a na základě (109) dostáváme

$$u(\tau) - v(\tau) > 0, \quad \tau \in \langle 0, \pi - \varphi \rangle.$$

Následně z (107) a (108) plyne (104). □

Věta 20. *Nechť $m \geq 4$ a $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ je rovnoměrný rozklad cesty (KR). Potom posloupnost $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$ je vztažná.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$z_0 = z_m = 1.$$

Protože

$$\frac{z_1 - z_0}{z_{-1} - z_0} = \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{-i\varphi} - 1} = -e^{i\varphi} = e^{i(\pi+\varphi)},$$

platí $\pi + \varphi \in \arg \frac{z_1 - z_0}{z_{-1} - z_0}$, a tedy na základě tvrzení (ii) z věty 2 (stačí vzít $c = i$) platí

$$(\Gamma_{-1} \vee \Gamma_0)^\ell [z_0] = i(\pi + \varphi).$$

Potom

$$f_0(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in S}} \tilde{\mathcal{E}}(b_0)(z) = \frac{1}{2\pi i} (\Gamma_{-1} \vee \Gamma_0)^\ell [z_0] = \frac{1}{2\pi i} i(\pi + \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{m},$$

načež

$$g_0(z_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

Odtud a z lemmatu 37 plyne, že matice (103) má kladné prvky. Uvažujme nyní $k \in \{0, \dots, m-1\}$. Potom na základě lemmatu 36 platí

$$g_k(z_k) = g_0(z_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

Na základě věty 16 platí $\sum_{j=0}^{m-1} g_j(z_k) = 1$. Označme s_k součet všech nediagonálních prvků matice (103), které jsou obsaženy v jejím k -ém řádku. Potom

$$s_k = 1 - g_k(z_k) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} < \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = g_k(z_k).$$

Vidíme, že matice (103) je diagonálně dominantní, a tedy regulární, což podle poznámky 18 znamená, že posloupnost $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$ je vztažná. □

28. Algoritmická realizace

Chceme-li vyčíslit hodnoty funkcí \hat{u} resp. $\hat{u}_{\mathcal{P}}$, je třeba nejdříve vyřešit soustavu (91) resp. (95), k čemuž je zapotřebí umět vyčíslit hodnoty funkcí g_0, \dots, g_{m-1} . Za tím účelem níže představíme proceduru MATICE.

Poznámka 19. Pro korektnost následujících procedur je potřeba, aby rozklad \mathcal{P} cesty Γ měl tyto vlastnosti:

P_I pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ existuje $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, takové, že funkce $x(t) = \operatorname{Re}(\bar{c}\Gamma(t))$ roste v intervalu $\langle t_{j-1}, t_{j+1} \rangle$,

P_{II} pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ platí

$$\Gamma_j[z] = \sigma_j[z], \quad z \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_j],$$

kde σ_j je orientovaná úsečka od z_j do z_{j+1} .

Poznamenejme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro libovolný rozklad \mathcal{P} cesty Γ splňující $2\nu(\mathcal{P}) < \varepsilon$ platí P_I (viz větu 3) a P_{II} (viz vlastnost (i) z věty 4).

Definice 29. Pro libovolné $w \in [\Gamma]$ buď $\iota(w)$ takové číslo z množiny $\{0, \dots, m-1\}$, že

$$w = \Gamma(t), \quad t \in \langle t_{\iota(w)}, t_{\iota(w)+1} \rangle,$$

a $\delta(w)$ buď číslo definované předpisem

$$\delta(w) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } w = \Gamma(t_{\iota(w)}), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro libovolné $w \in \Omega$ buď $\iota(w) = -2$ a $\delta(w) = 0$.

Pro libovolná čísla $j \in \{0, \dots, m-1\}$, $w \in \mathbb{C} \setminus [\sigma_j]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ buď

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(j, w) \\ \varphi_2(j, w) \\ \varphi_3(j, w) \end{array} \right\} \text{ jediný prvek množiny } \left\{ \begin{array}{l} \arg\left(\frac{z_j - w}{z_{j-1} - w}\right) \cap (-\pi, \pi) \\ \arg\left(\frac{z_{j+1} - w}{z_j - w}\right) \cap (-\pi, \pi) \\ \arg\left(\frac{z_{j+1} - w}{z_{j-1} - w}\right) \cap (-\pi, \pi) \end{array} \right.$$

a dále

$$a_1(j, w, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{w - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \left(\ln \left| \frac{z_j - w}{z_{j-1} - w} \right| + i\varphi \right),$$

$$a_2(j, w, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{w - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \left(\ln \left| \frac{z_{j+1} - w}{z_j - w} \right| + i\varphi \right),$$

$$a_3(j, w, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \left| \frac{z_{j+1} - w}{z_{j-1} - w} \right| + i\varphi \right).$$

Procedura MATICE

Účelem této procedury je pro zvolený rozklad \mathcal{P} a body $w_0, \dots, w_{p-1} \in \Omega \cup [\Gamma]$, kde $p \in \mathbb{N}$, vyčíslit prvky matice

$$(110) \quad \{g_j(w_k)\}_{\substack{k=0, \dots, p-1 \\ j=0, \dots, m-1}}$$

Vstupními údaji jsou uzly rozkladu \mathcal{P} a trojice $[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]$ pro každé $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

Krok 1: vstup $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1}$,

Krok 2: pro $k = 0, \dots, p-1$ proved' pro $j = 0, \dots, m-1$ proved'

2.1: platí-li $\delta(w_k) = 0$, proved'

2.1.1: polož $\varphi := \varphi_1(j, w_k)$, $\eta := \varphi_2(j, w_k)$,

2.1.2: platí-li $\iota(w_k) \in \{j-1, j-1+m\} \wedge \varphi < 0$, polož $\varphi := \varphi + 2\pi$,

2.1.3: platí-li $\iota(w_k) = j \wedge \eta < 0$, polož $\eta := \eta + 2\pi$,

2.1.4: polož $G(k, j) := \operatorname{Re}(a_1(j, w_k, \varphi) + a_2(j, w_k, \eta))$,

2.2: platí-li $\delta(w_k) = 1$, proved'

2.2.1: platí-li $\iota(w_k) \in \{j+1, j+1-m\}$, polož

$$\varphi := \varphi_1(j, w_k), \quad G(k, j) := \operatorname{Re} a_1(j, w_k, \varphi),$$

2.2.2: platí-li $\iota(w_k) \in \{j-1, j-1+m\}$, polož

$$\varphi := \varphi_2(j, w_k), \quad G(k, j) := \operatorname{Re} a_2(j, w_k, \varphi),$$

2.2.3: platí-li $\iota(w_k) = j$, proved'

2.2.3.1: polož $\varphi := \varphi_3(j, w_k)$,

2.2.3.2: platí-li $\varphi < 0$, polož $\varphi := \varphi + 2\pi$,

2.2.3.3: polož $G(k, j) := \operatorname{Re} a_3(j, w_k, \varphi)$,

2.2.4: platí-li $\iota(w_k) \notin \{j+1, j+1-m, j-1, j-1+m, j\}$, polož

$$\varphi := \varphi_1(j, w_k), \quad \eta := \varphi_2(j, w_k),$$

$$G(k, j) := \operatorname{Re}(a_1(j, w_k, \varphi) + a_2(j, w_k, \eta)),$$

Krok 3: výstup G .

Uvažujme libovolnou trojici $[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]$ vstupující do procedury MATICE, libovolné $j \in \{0, \dots, m-1\}$ a diskutujme složky $G(k, j)$ výstupního údaje v jednotlivých situacích, které mohou nastat:

(a) Uvažujme nejdříve, že $w_k \in [\Gamma]$.

(a₀) Necht' $\delta(w_k) = 0$.

• Jestliže $\iota(w_k) \in \{j-1, j-1+m\}$, potom

$$w_k \in [\Gamma_{j-1}] \setminus \{z_{j-1}, z_j\}, \quad w_k \in [\Gamma] \setminus [\Gamma],$$

na základě lemmatu 29, P_I a věty 2 platí

$$\tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] = \Gamma_{j-1}^\ell[w_k] = \ln \left| \frac{z_j - w_k}{z_{j-1} - w_k} \right| + i\varphi,$$

$$\text{kde } \varphi = \begin{cases} \varphi_1(j, w_k), & \text{je-li } \varphi_1(j, w_k) > 0, \\ \varphi_1(j, w_k) + 2\pi, & \text{je-li } \varphi_1(j, w_k) < 0, \end{cases}$$

a na základě lemmatu 28, P_{II} a příkladu 2 platí

$$\tilde{\Gamma}_j[w_k] = \Gamma_j[w_k] = \sigma_j[w_k] = \ln \left| \frac{z_{j+1}-w_k}{z_j-w_k} \right| + i\varphi_2(j, w_k).$$

Následně

$$\begin{aligned} G(k, j) &= \operatorname{Re} (a_1(j, w_k, \varphi) + a_2(j, w_k, \varphi_2(j, w_k))) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] + \frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[w_k] \right) = g_j(w_k). \end{aligned}$$

- Jestliže $\iota(w_k) = j$, potom

$$w_k \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_{j-1}], \quad w_k \in [\Gamma_j] \setminus \{z_j, z_{j+1}\},$$

na základě lemmatu 28, P_{II} a příkladu 2 platí

$$\tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] = \Gamma_{j-1}[w_k] = \sigma_{j-1}[w_k] = \ln \left| \frac{z_j-w_k}{z_{j-1}-w_k} \right| + i\varphi_1(j, w_k),$$

a na základě lemmatu 29, P_I a věty 2 platí

$$\tilde{\Gamma}_j[w_k] = \Gamma_j^\ell[w_k] = \ln \left| \frac{z_{j+1}-w_k}{z_j-w_k} \right| + i\eta,$$

$$\text{kde } \eta = \begin{cases} \varphi_2(j, w_k), & \text{je-li } \varphi_2(j, w_k) > 0, \\ \varphi_2(j, w_k) + 2\pi, & \text{je-li } \varphi_2(j, w_k) < 0. \end{cases}$$

Následně

$$\begin{aligned} G(k, j) &= \operatorname{Re} (a_1(j, w_k, \varphi_1(j, w_k)) + a_2(j, w_k, \eta)) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] + \frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[w_k] \right) = g_j(w_k). \end{aligned}$$

- Jestliže $\iota(w_k) \notin \{j-1, j-1+m, j\}$, potom

$$w_k \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_{j-1}], \quad w_k \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_j],$$

na základě lemmatu 28, P_{II} a příkladu 2 platí

$$\tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] = \Gamma_{j-1}[w_k] = \sigma_{j-1}[w_k] = \ln \left| \frac{z_j-w_k}{z_{j-1}-w_k} \right| + i\varphi_1(j, w_k),$$

$$\tilde{\Gamma}_j[w_k] = \Gamma_j[w_k] = \sigma_j[w_k] = \ln \left| \frac{z_{j+1}-w_k}{z_j-w_k} \right| + i\varphi_2(j, w_k)$$

a následně

$$\begin{aligned} G(k, j) &= \operatorname{Re} (a_1(j, w_k, \varphi_1(j, w_k)) + a_2(j, w_k, \varphi_2(j, w_k))) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] + \frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[w_k] \right) = g_j(w_k). \end{aligned}$$

(a₁) Nechť $\delta(w_k) = 1$

- Jestliže $\iota(w_k) \in \{j+1, j+1-m\}$, potom

$$w_k = z_{j+1} \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_{j-1}],$$

na základě P_{II} a příkladu 2 platí

$$\Gamma_{j-1}[w_k] = \sigma_{j-1}[w_k] = \ln \left| \frac{z_j-w_k}{z_{j-1}-w_k} \right| + i\varphi_1(j, w_k)$$

a následně z poznámky 14 plyne

$$G(k, j) = \operatorname{Re} a_1(j, w_k, \varphi_1(j, w_k)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \Gamma_{j-1}[w_k] \right) = g_j(w_k).$$

- Jestliže $\iota(w_k) \in \{j-1, j-1+m\}$, potom

$$w_k = z_{j-1} \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_j],$$

na základě P_{II} a příkladu 2 platí

$$\Gamma_j[w_k] = \sigma_j[w_k] = \ln \left| \frac{z_{j+1}-w_k}{z_j-w_k} \right| + i\varphi_2(j, w_k)$$

a následně z poznámky 14 plyne

$$\mathbf{G}(k, j) = \operatorname{Re} a_2(j, w_k, \varphi_2(j, w_k)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \Gamma_j[w_k] \right) = g_j(w_k).$$

- Jestliže $\iota(w_k) = j$, potom

$$w_k = z_j \in [\Gamma_{j-1} \vee \Gamma_j] \setminus \{z_{j-1}, z_{j+1}\},$$

na základě P_I a věty 2 platí

$$(\Gamma_{j-1} \vee \Gamma_j)^\ell[w_k] = \ln \left| \frac{z_{j+1}-w_k}{z_{j-1}-w_k} \right| + i\varphi,$$

$$\text{kde } \varphi = \begin{cases} \varphi_3(j, w_k), & \text{je-li } \varphi_3(j, w_k) > 0, \\ \varphi_3(j, w_k) + 2\pi, & \text{je-li } \varphi_3(j, w_k) < 0. \end{cases}$$

Následně z poznámky 14 plyne

$$\mathbf{G}(k, j) = \operatorname{Re} a_3(j, w_k, \varphi) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} (\Gamma_{j-1} \vee \Gamma_j)^\ell[w_k] \right) = g_j(w_k).$$

- Jestliže $\iota(w_k) \notin \{j+1, j+1-m, j-1, j-1+m, j\}$, potom

$$w_k \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_{j-1}], \quad w_k \in [\Gamma] \setminus [\Gamma_j],$$

na základě lemmatu 28, P_{II} a příkladu 2 platí

$$\tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] = \Gamma_{j-1}[w_k] = \sigma_{j-1}[w_k] = \ln \left| \frac{z_j-w_k}{z_{j-1}-w_k} \right| + i\varphi_1(j, w_k),$$

$$\tilde{\Gamma}_j[w_k] = \Gamma_j[w_k] = \sigma_j[w_k] = \ln \left| \frac{z_{j+1}-w_k}{z_j-w_k} \right| + i\varphi_2(j, w_k)$$

a následně

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k, j) &= \operatorname{Re} (a_1(j, w_k, \varphi_1(j, w_k)) + a_2(j, w_k, \varphi_2(j, w_k))) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] + \frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[w_k] \right) = g_j(w_k). \end{aligned}$$

- (b) Uvažujme nyní, že $w_k \in \Omega$, což podle definice 29 znamená, že $\iota(w_k) = -2$ a $\delta(w_k) = 0$. Předpokládejme navíc, že platí

$$\Gamma_{j-1}[w_k] = \sigma_{j-1}[w_k], \quad \Gamma_j[w_k] = \sigma_j[w_k].$$

Potom na základě věty 11 a příkladu 2 platí

$$\tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] = \Gamma_{j-1}[w_k] = \sigma_{j-1}[w_k] = \ln \left| \frac{z_j-w_k}{z_{j-1}-w_k} \right| + i\varphi_1(j, w_k),$$

$$\tilde{\Gamma}_j[w_k] = \Gamma_j[w_k] = \sigma_j[w_k] = \ln \left| \frac{z_{j+1}-w_k}{z_j-w_k} \right| + i\varphi_2(j, w_k)$$

a následně

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k, j) &= \operatorname{Re} (a_1(j, w_k, \varphi_1(j, w_k)) + a_2(j, w_k, \varphi_2(j, w_k))) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[w_k] + \frac{1}{2\pi i} \frac{w_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[w_k] \right) = g_j(w_k). \end{aligned}$$

Právě provedená diskuze ukazuje, že výstupní údaj \mathbf{G} procedury MATICE představuje matici (110).

Poznámka 20. Zde je korektní poznamenat, že v důsledku dodatečného předpokladu učiněného v rámci bodu (b) diskuze je použití procedury MATICE pro výpočet hodnot funkcí g_0, \dots, g_{m-1} v bodech oblasti Ω omezeno na takové body $w_k \in \Omega$, které splňují

$$\Gamma_j[w_k] = \sigma_j[w_k], \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Totéž platí pro všechny následující procedury, které jsou na proceduru MATICE vázány.

Nyní, když už umíme algoritmicky popsat vyčíslení hodnot funkcí g_0, \dots, g_{m-1} , je algoritmus vyčíslení hodnot funkcí \hat{u} resp. $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ snadný, jak ukazují níže popsané procedury DIRICHLET a DIRICHLETSPEC.

V příloze A je umístěn výpis souborů `matice.m`, `dirichlet.m` a `dirichletspec.m` zajišťujících realizaci uvedených procedur v prostředí MATLAB.

Procedura DIRICHLET

Účelem této procedury je pro zvolený rozklad \mathcal{P} , vztažnou posloupnost $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$, funkci h a body $w_0, \dots, w_{p-1} \in \Omega \cup [\Gamma]$, kde $p \in \mathbb{N}$, vyčíslit výraz $\frac{\hat{K}}{V}$ a složky vektoru

$$(111) \quad [\hat{u}(w_0), \dots, \hat{u}(w_{p-1})]^T.$$

Vstupními údaji jsou všechny vstupní údaje procedury MATICE a navíc trojice $[\zeta_k, \iota(\zeta_k), \delta(\zeta_k)]$ a hodnoty $h(\zeta_k)$ pro každé $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Krok 1: vstup $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{[\zeta_k, \iota(\zeta_k), \delta(\zeta_k)]\}_{k=0}^{n-1}$, $\{h(\zeta_k)\}_{k=0}^{n-1}$, $\{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1}$,

Krok 2: polož $G := \text{MATICE}(\{z_j\}_{j=0}^{m-1}, \{[\zeta_k, \iota(\zeta_k), \delta(\zeta_k)]\}_{k=0}^{n-1})$,

Krok 3: polož $\mathbf{l} := (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T [h(\zeta_0), \dots, h(\zeta_{n-1})]^T$,

Krok 4: polož $\mathbf{H} := \text{MATICE}(\{z_j\}_{j=0}^{m-1}, \{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1})$,

Krok 5: polož $\mathbf{u} := \mathbf{H}\mathbf{l}$, $\mathbf{K} := \max\{(|\mathbf{l}_{j+1} - \mathbf{l}_j| / (z_{j+1} - z_j)) : 0 \leq j \leq m-1\}$

Krok 6: výstup \mathbf{u} , \mathbf{K} .

Proměnná \mathbf{G} představuje matici (90), proměnná \mathbf{l} představuje řešení soustavy normálních rovnic

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{r=0}^{n-1} g_k(\zeta_r) g_j(\zeta_r) \right) l_j = \sum_{r=0}^{n-1} g_k(\zeta_r) h(\zeta_r), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

a na základě tvrzení 17 také řešení $[\hat{l}_0, \dots, \hat{l}_{m-1}]^T$ soustavy (91) ve smyslu metody nejmenších čtverců. Proměnná \mathbf{H} představuje matici (110). Hlavním výstupním údajem je vektor \mathbf{u} , jehož složky splňují

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{l}_j g_j(w_k) = \hat{u}(w_k), \quad k = 0, \dots, p-1,$$

a tedy představují složky vektoru (111). Vedlejším výstupním údajem je proměnná \mathbf{K} , pro kterou platí

$$\mathbf{K} = \max_{0 \leq j \leq m-1} \left| \frac{\hat{l}_{j+1} - \hat{l}_j}{z_{j+1} - z_j} \right| = \frac{\hat{K}}{V}.$$

Procedura DIRICHLETSPEC

Účelem této procedury je pro zvolený rozklad \mathcal{P} , pro který $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$ je vztažná posloupnost, funkci h a body $w_0, \dots, w_{p-1} \in \Omega \cup [\Gamma]$, kde $p \in \mathbb{N}$, vyčíslit výraz $\frac{\hat{K}_{\mathcal{P}}}{V}$ a složky vektoru

$$(112) \quad [\hat{u}_{\mathcal{P}}(w_0), \dots, \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_{p-1})]^T.$$

Vstupními údaji jsou trojice $[z_j, \iota(z_j), \delta(z_j)]$ a hodnoty $h(z_j)$ pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ a trojice $[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]$ pro každé $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

Krok 1: vstup $\{[z_j, \iota(z_j), \delta(z_j)]\}_{j=0}^{m-1}$, $\{h(z_j)\}_{j=0}^{m-1}$, $\{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1}$,

Krok 2: polož $G := \text{MATICE}(\{z_j\}_{j=0}^{m-1}, \{[z_j, \iota(z_j), \delta(z_j)]\}_{j=0}^{m-1})$,

Krok 3: polož $\mathbf{l} := G^{-1}[h(z_0), \dots, h(z_{m-1})]^T$,

Krok 4: polož $H := \text{MATICE}(\{z_j\}_{j=0}^{m-1}, \{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1})$,

Krok 5: polož $\mathbf{u} := H\mathbf{l}$, $K := \max\{(|\mathbf{l}_{j+1} - \mathbf{l}_j|)/(z_{j+1} - z_j) : 0 \leq j \leq m-1\}$

Krok 6: výstup \mathbf{u} , K .

Proměnná G představuje matici

$$(103) \quad \{g_j(z_k)\}_{\substack{k=0, \dots, m-1 \\ j=0, \dots, m-1}}$$

proměnná \mathbf{l} představuje řešení $[\hat{l}_0, \dots, \hat{l}_{m-1}]^T$ soustavy rovnic (95) a proměnná H představuje matici (110). Hlavním výstupním údajem je vektor \mathbf{u} , jehož složky splňují

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{l}_j g_j(w_k) = \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_k), \quad k = 0, \dots, p-1,$$

a tedy představují složky vektoru (112). Vedlejším výstupním údajem je proměnná K , pro kterou platí

$$K = \max_{0 \leq j \leq m-1} \left| \frac{\hat{l}_{j+1} - \hat{l}_j}{z_{j+1} - z_j} \right| = \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}}}{V}.$$

29. Testování přesnosti

Vhodnost použití funkce \hat{u} jako přibližného řešení Dirichletovy úlohy (D) je možno posoudit na základě veličiny

$$(94) \quad \max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \hat{u}(z)|.$$

Je-li dostatečně malá, vypovídá o přesnosti přibližného řešení. Veličinu (94) obecně stanovit neumíme, avšak s použitím procedury DIRICHLET můžeme vyčíslit hodnoty výrazu $h(z) - \hat{u}(z)$ v testovacích bodech rozmístěných na hranici $[\Gamma]$. To je také základem experimentu, který v tomto oddíle představíme a který nám umožní udělat si přibližnou představu o veličině (94).

Níže uvedená procedura TEST produkuje kromě hodnot výrazu $h(z) - \hat{u}(z)$ ještě dvě další veličiny mající souhrnný charakter. Následující procedura TESTSPEC je analogií procedury TEST s tím rozdílem, že místo funkce \hat{u} se uvažuje funkce $\hat{u}_{\mathcal{P}}$, tj. místo veličiny (94) je předmětem zájmu veličina (99) a místo procedury DIRICHLET se používá procedura DIRICHLETSPEC.

V příloze A je umístěn výpis souborů `test.m` a `testspec.m` zajišťujících realizaci uvedených procedur v prostředí MATLAB.

Procedura TEST

Účelem této procedury je pro zvolený rozklad \mathcal{P} , vztažnou posloupnost $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$, funkci h a body $w_0, \dots, w_{p-1} \in [\Gamma]$, kde $p \in \mathbb{N}$, vyčíslit výraz $\frac{\hat{K}}{V}$, složky vektoru

$$[h(w_0) - \hat{u}(w_0), \dots, h(w_{p-1}) - \hat{u}(w_{p-1})]^T,$$

představující odchylky funkce \hat{u} od přesného řešení úlohy (D) v testovacích bodech w_0, \dots, w_{p-1} , a veličiny

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |h(w_k) - \hat{u}(w_k)|, \quad \max_{0 \leq k \leq p-1} |h(w_k) - \hat{u}(w_k)|.$$

představující průměrnou a maximální absolutní odchylku funkce \hat{u} od přesného řešení úlohy (D) v testovacích bodech w_0, \dots, w_{p-1} . Vstupními údaji jsou všechny vstupní údaje procedury DIRICHLET a navíc hodnoty $h(w_k)$ pro každé $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

Krok 1: vstup

$$\{z_j\}_{j=0}^{m-1}, \quad \{[\zeta_k, \iota(\zeta_k), \delta(\zeta_k)]\}_{k=0}^{n-1}, \quad \{h(\zeta_k)\}_{k=0}^{n-1}, \quad \{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1}, \quad \{h(w_k)\}_{k=0}^{p-1},$$

Krok 2: polož

$$[\mathbf{u}, \mathbf{K}] := \text{DIRICHLET}(\{z_j\}_{j=0}^{m-1}, \{[\zeta_k, \iota(\zeta_k), \delta(\zeta_k)]\}_{k=0}^{n-1}, \{h(\zeta_k)\}_{k=0}^{n-1}, \{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1}),$$

Krok 3: polož

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= [h(w_0) - \mathbf{u}_0, \dots, h(w_{p-1}) - \mathbf{u}_{p-1}]^T, \\ \varepsilon_{\text{avr}} &:= 1/p \sum_{k=0}^{p-1} |h(w_k) - \mathbf{u}_k|, \\ \varepsilon_{\text{max}} &:= \max\{|h(w_k) - \mathbf{u}_k| : 0 \leq k \leq p-1\}, \end{aligned}$$

Krok 4: výstup \mathcal{E} , ε_{avr} , ε_{max} , \mathbf{K} .

Proměnná \mathbf{u} představuje vektor (111), odkud plyne, že

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= [h(w_0) - \hat{u}(w_0), \dots, h(w_{p-1}) - \hat{u}(w_{p-1})]^T, \\ \varepsilon_{\text{avr}} &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |h(w_k) - \hat{u}(w_k)|, \quad \varepsilon_{\text{max}} = \max_{0 \leq k \leq p-1} |h(w_k) - \hat{u}(w_k)|. \end{aligned}$$

Poslední výstupní údaj \mathbf{K} představuje hodnotu výrazu $\frac{\hat{K}}{\hat{V}}$.

Procedura TESTSPEC

Účelem této procedury je pro zvolený rozklad \mathcal{P} , pro který $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$ je vztažná posloupnost, funkci h a body $w_0, \dots, w_{p-1} \in [\Gamma]$, kde $p \in \mathbb{N}$, vyčíslit výraz $\frac{\hat{K}_{\mathcal{P}}}{\hat{V}}$, složky vektoru

$$[h(w_0) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_0), \dots, h(w_{p-1}) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_{p-1})]^T,$$

představující odchylky funkce $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ od přesného řešení úlohy (D) v testovacích bodech w_0, \dots, w_{p-1} , a veličiny

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |h(w_k) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_k)|, \quad \max_{0 \leq k \leq p-1} |h(w_k) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_k)|$$

představující průměrnou a maximální absolutní odchylku funkce $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ od přesného řešení úlohy (D) v testovacích bodech w_0, \dots, w_{p-1} . Vstupními údaji jsou všechny vstupní údaje procedury DIRICHLETSPEC a navíc hodnoty $h(w_k)$ pro každé $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

Krok 1: vstup $\{[z_j, \iota(z_j), \delta(z_j)]\}_{j=0}^{m-1}$, $\{h(z_j)\}_{j=0}^{m-1}$, $\{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1}$, $\{h(w_k)\}_{k=0}^{p-1}$,

Krok 2: polož

$$[\mathbf{u}, \mathbf{K}] := \text{DIRICHLETSPEC}(\{[z_j, \iota(z_j), \delta(z_j)]\}_{j=0}^{m-1}, \{h(z_j)\}_{j=0}^{m-1}, \{[w_k, \iota(w_k), \delta(w_k)]\}_{k=0}^{p-1}),$$

Krok 3: polož

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= [h(w_0) - \mathbf{u}_0, \dots, h(w_{p-1}) - \mathbf{u}_{p-1}]^T, \\ \varepsilon_{\text{avr}} &:= 1/p \sum_{k=0}^{p-1} |h(w_k) - \mathbf{u}_k|, \\ \varepsilon_{\text{max}} &:= \max\{|h(w_k) - \mathbf{u}_k| : 0 \leq k \leq p-1\}, \end{aligned}$$

Krok 4: výstup \mathcal{E} , ε_{avr} , ε_{max} , \mathbf{K} .

Proměnná \mathbf{u} představuje vektor (112), odkud plyne, že

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= [h(w_0) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_0), \dots, h(w_{p-1}) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_{p-1})]^T, \\ \varepsilon_{\text{avr}} &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |h(w_k) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_k)|, \quad \varepsilon_{\text{max}} = \max_{0 \leq k \leq p-1} |h(w_k) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(w_k)|. \end{aligned}$$

Poslední výstupní údaj \mathbf{K} představuje hodnotu výrazu $\frac{\hat{K}_{\mathcal{P}}}{\hat{V}}$.

V následujících příkladech 8-10 použijeme procedury TEST a TESTSPEC k testování přesnosti nově navržených metod na úlohách se známým přesným řešením. Výstupní údaje \mathcal{E} , ε_{avr} , ε_{max} vyprodukuje pro srovnání také na základě algoritmu původní metody ([29, str. 185, PROGRAM 2]). Použijeme k tomu stejné vstupní údaje jako u procedury TESTSPEC.

Kromě cesty (KR) uvažujeme ještě další cesty Γ s délkovým parametrem představující parametrizace kladně orientovaných hranic mnohoúhelníků, podle nichž volíme pro tyto cesty následující označení:

- (TR) ... rovnostranný trojúhelník o vrcholech $0, 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
- (CT) ... čtverec o vrcholech $0, 1, 1 + i, i$,
- (OB) ... obdélník o vrcholech $0, 5, 5 + i, i$,
- (KA) ... mnohoúhelník tvaru písmene „K“ o vrcholech
 $0, 5, 5 - \sqrt{7} + 3i, 5 + 6i, 6i$,
- (CE) ... mnohoúhelník tvaru písmene „C“ o vrcholech
 $0, 3, 3 + 2i, 2 + 2i, 2 + i, 1 + i, 1 + 4i, 2 + 4i, 2 + 3i, 3 + 3i, 3 + 5i, 5i$.

Pro účely zamýšleného testování není zapotřebí uvádět jejich explicitní předpisy. Pro každou z uvedených cest budeme uvažovat $m \in \{24, 48, 72\}$ a rovnoměrný rozklad $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ takový, že

$$z_0 = \Gamma(0) = \begin{cases} 1 & \text{pro cestu (KR),} \\ 0 & \text{pro ostatní uvažované cesty } \Gamma. \end{cases}$$

Tím je automaticky zajištěno, že tento rozklad má vlastnosti uvedené v poznámce 19. Obrazy použitých cest spolu s uzly rozkladu \mathcal{P} pro $m = 24$ vidíme na obrázku 1. Dále budeme uvažovat rovnoměrně rozmístěné hraniční testovací body

$$w_k = \Gamma\left(\frac{T}{192}(2k+1)\right), \quad k = 0, \dots, 95.$$

V proceduře TEST budeme ještě uvažovat $n = 3m$ a rovnoměrně rozmístěné hraniční body

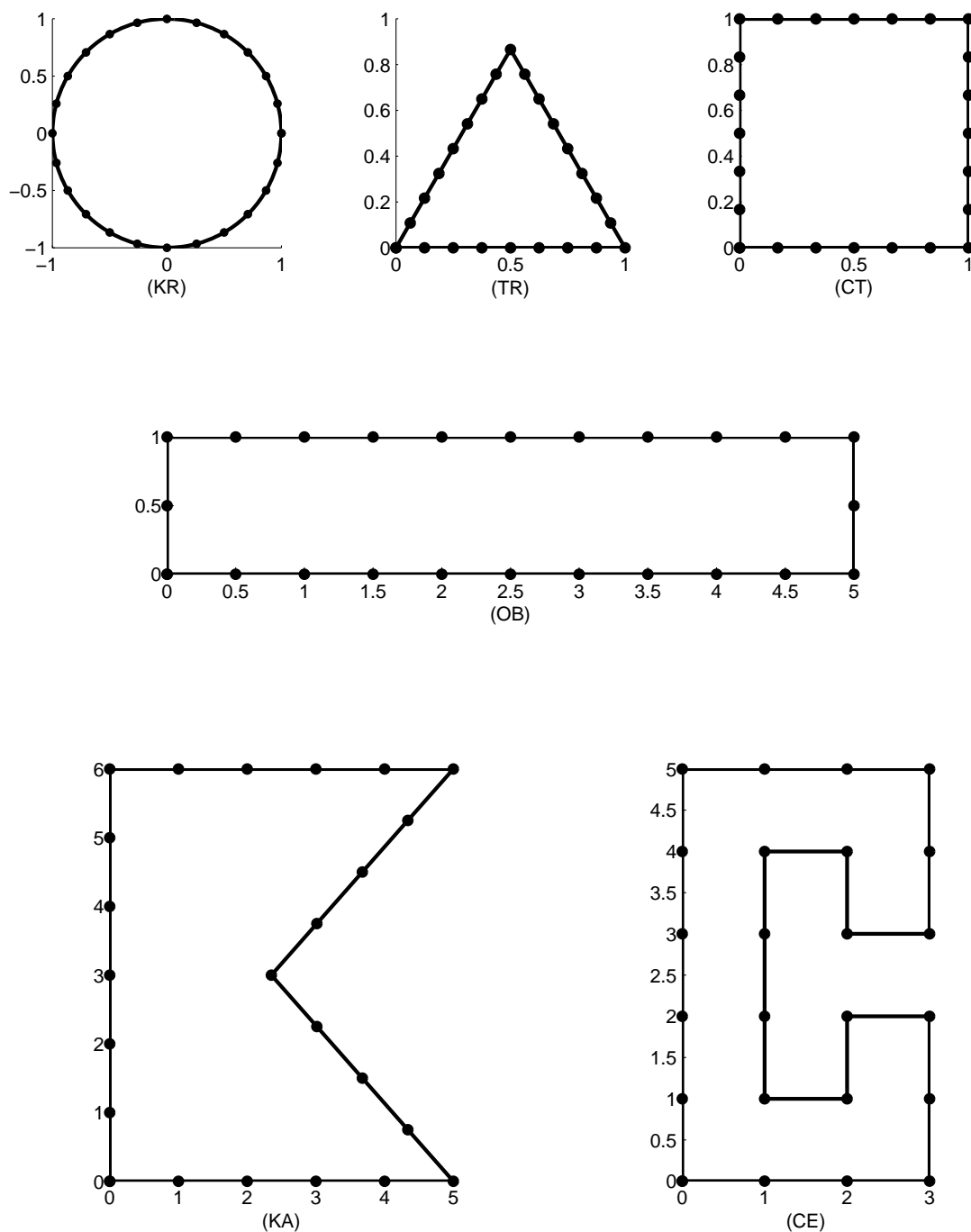
$$\zeta_k = \Gamma\left(\frac{kT}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

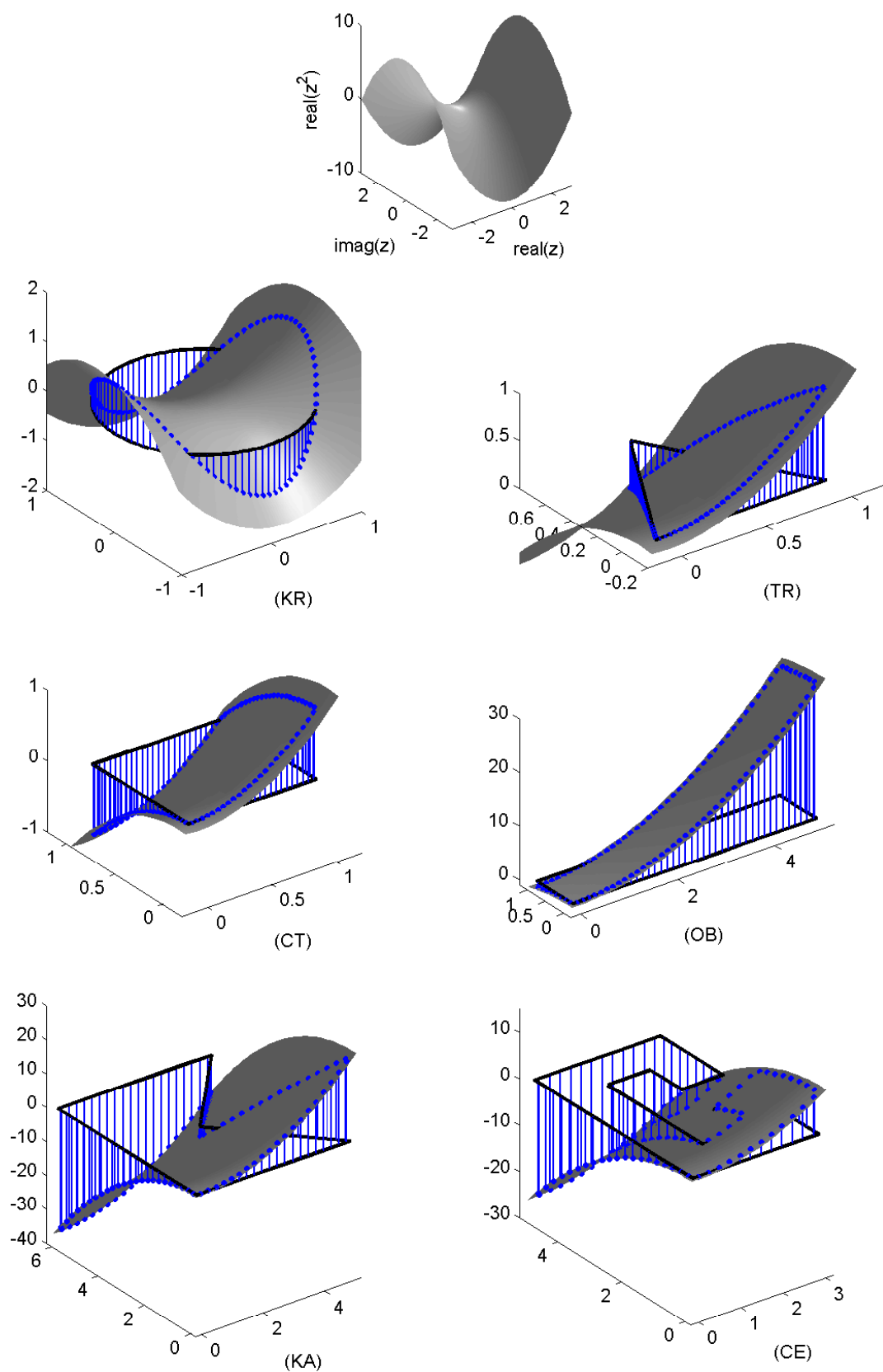
Budeme volit funkci u tak, aby vždy byla harmonická v Ω a spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$ pro jakoukoliv z uvažovaných cest Γ , a tedy aby ji bylo možno považovat za přesné řešení příslušné úlohy (D). Grafy zvolených funkcí u a jejich hodnoty v testovacích bodech w_0, \dots, w_{95} jsou znázorněny na obrázcích 2-4.

Každý výstupní údaj \mathcal{E} je znázorněn grafem, v němž jsou na vodorovnou osu nanášeny indexy testovacích uzlů w_0, \dots, w_{95} a na svislou osu složky vektoru \mathcal{E} . Přitom původ znázorněných dat odpovídá této legendě:

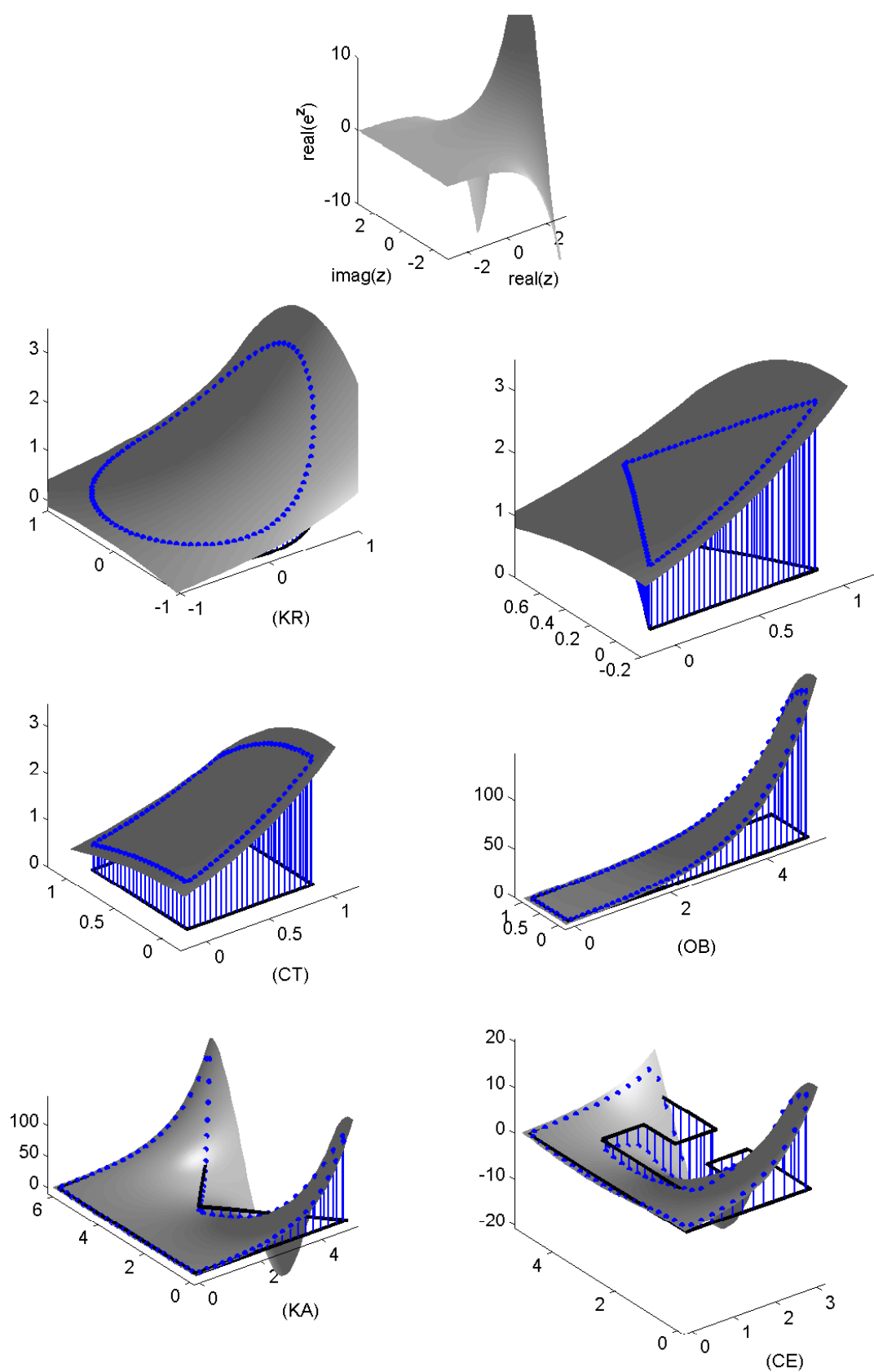
- ... procedura TEST
- ▲— ... procedura TESTSPEC
- ... původní PROGRAM 2

V každém příkladě je pro ilustraci začleněn graf odpovídající cestě (KR) a $m = 24$. Kompletní sada grafů ke každému příkladu je umístěna v příloze B. Součástí každého příkladu jsou tabulky s kompletní sadou výstupních údajů ε_{avr} a ε_{max} .

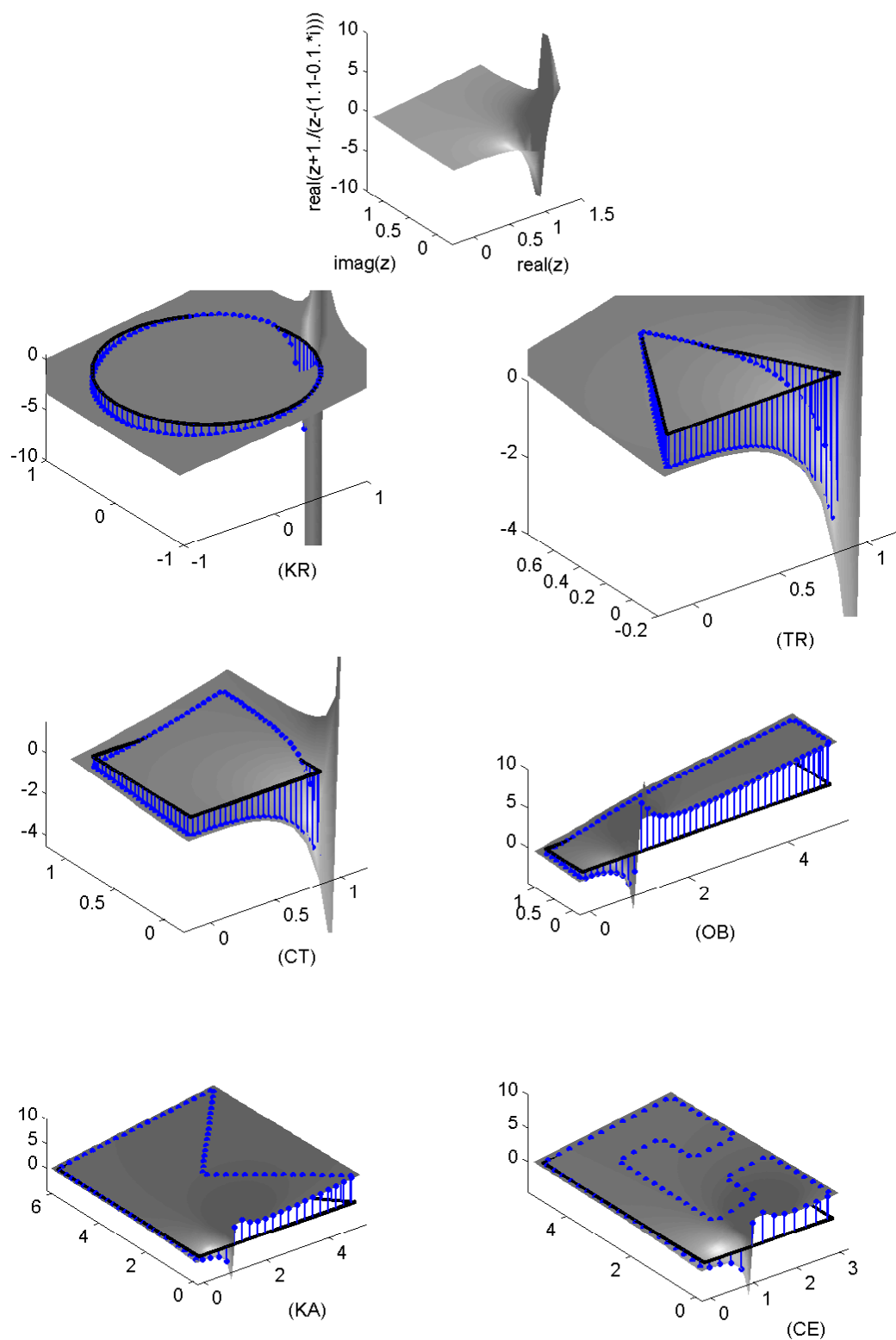
OBRÁZEK 1. Obrazy použitých cest a uzly rozkladu \mathcal{P} pro $m = 24$.



OBRÁZEK 2. Graf funkce $u(z) = \text{Re}(z^2)$ a její hodnoty v testovacích bodech w_0, \dots, w_{95} .

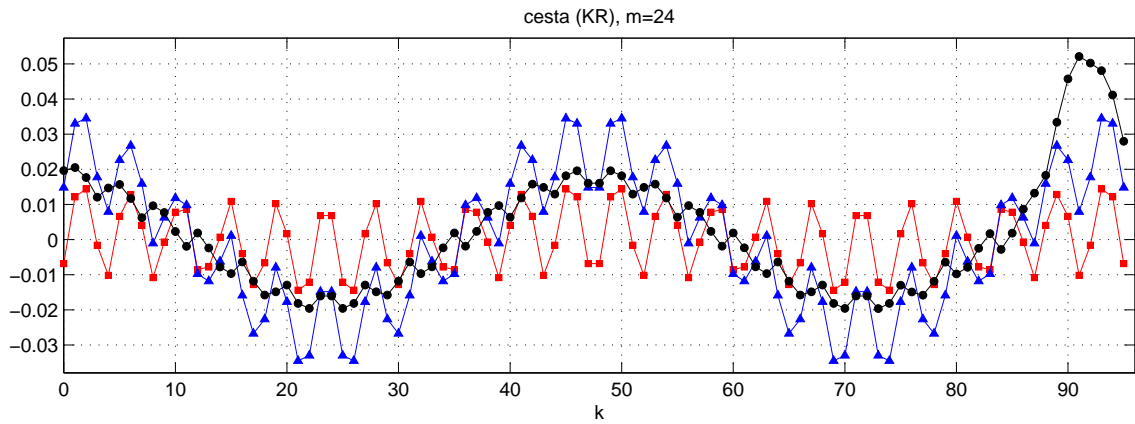


OBRÁZEK 3. Graf funkce $u(z) = \text{Re}(e^z)$ a její hodnoty v testovacích bodech w_0, \dots, w_{95} .



OBRÁZEK 4. Graf funkce $u(z) = \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z - (1.1 - 0.1i)}\right)$ a její hodnoty v testovacích bodech w_0, \dots, w_{95} .

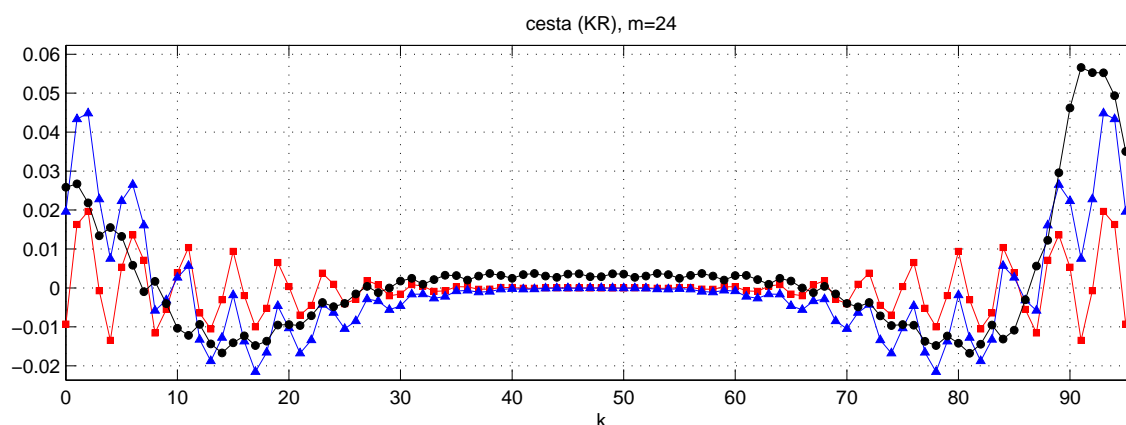
Příklad 8. Uvažujeme funkci $u(z) = \operatorname{Re}(z^2)$.



ε_{avr}	m	(KR)	(TR)	(CT)	(OB)	(KA)	(CE)
TEST	24	0.00804192	0.00236952	0.00735564	0.05098315	0.21722634	0.16805276
	48	0.00150302	0.00083291	0.00243332	0.01673201	0.07607476	0.05754766
	72	0.00079710	0.00054847	0.00160158	0.01117909	0.04989301	0.03801648
TESTSPEC	24	0.01685205	0.00349243	0.01104194	0.07594566	0.32187943	0.23636765
	48	0.00442250	0.00128732	0.00390314	0.02714722	0.12003505	0.08485662
	72	0.00179570	0.00064897	0.00191334	0.01335986	0.06023201	0.04276423
PROGRAM 2	24	0.01361718	0.00215469	0.00597280	0.05468634	1.13217713	3.01774928
	48	0.00319090	0.00049151	0.00142894	0.01272541	0.50546527	0.91305904
	72	0.00130924	0.00019914	0.00058933	0.00525109	0.31342494	0.61215576

ε_{max}	m	(KR)	(TR)	(CT)	(OB)	(KA)	(CE)
TEST	24	0.01439411	0.02091782	0.05519535	0.44012422	1.82564197	1.24576887
	48	0.00236168	0.01245668	0.03359797	0.25392961	1.11709784	0.71141789
	72	0.00142839	0.00996993	0.02547778	0.19195373	0.92295826	0.53754160
TESTSPEC	24	0.03449393	0.02579487	0.06194230	0.59330884	1.97279119	1.45916498
	48	0.00691287	0.01457136	0.03562873	0.29588478	1.16552197	0.78122459
	72	0.00364539	0.01169094	0.02844519	0.22768083	0.99497334	0.61393223
PROGRAM 2	24	0.05210416	0.00833595	0.01714658	0.19368250	8.57614245	21.87277615
	48	0.01285094	0.00218076	0.00422438	0.03992597	7.81319729	12.07294156
	72	0.00576073	0.00108629	0.00175065	0.01636755	6.21390205	8.56791132

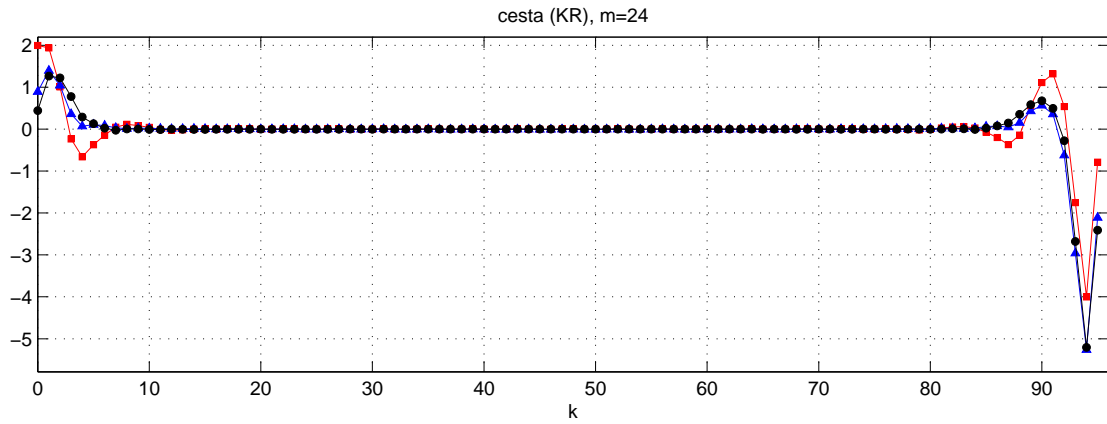
Příklad 9. Uvažujeme funkci $u(z) = \operatorname{Re}(e^z)$.



ε_{avr}	m	(KR)	(TR)	(CT)	(OB)	(KA)	(CE)
TEST	24	0.00425580	0.00334510	0.00706716	0.73928774	0.53335770	0.28309226
	48	0.00079017	0.00119940	0.00234128	0.23037551	0.13996850	0.07752214
	72	0.00041802	0.00078609	0.00153829	0.15352756	0.09136643	0.05261398
TESTSPEC	24	0.00881048	0.00471958	0.01015121	1.04625266	0.99837326	0.36514130
	48	0.00231807	0.00177633	0.00361622	0.37330967	0.34014206	0.12703771
	72	0.00093556	0.00090543	0.00178987	0.18336866	0.15964941	0.06196964
PROGRAM 2	24	0.00958216	0.00169352	0.00417699	0.76696765	2.37140711	2.67459324
	48	0.00220187	0.00039465	0.00100781	0.19321343	0.67379963	0.65898910
	72	0.00088639	0.00015883	0.00041277	0.08126549	0.31244607	0.35298575

ε_{max}	m	(KR)	(TR)	(CT)	(OB)	(KA)	(CE)
TEST	24	0.01963373	0.02391015	0.05489852	7.28984192	3.80168097	2.01394115
	48	0.00284060	0.01477044	0.03291633	4.19011530	2.41630824	0.78257656
	72	0.00180723	0.01188829	0.02498782	3.16002545	1.91428226	0.60760537
TESTSPEC	24	0.04485416	0.03011322	0.06405095	8.91282469	5.06952879	2.89681319
	48	0.00927854	0.01647279	0.03630679	4.68061441	3.09646884	1.04955139
	72	0.00493598	0.01347538	0.02863869	3.67465462	2.50952553	0.79969511
PROGRAM 2	24	0.05659806	0.00521283	0.00987403	4.65239554	11.07770033	15.71484096
	48	0.01676240	0.00158152	0.00234571	1.13326366	3.27548601	5.17982482
	72	0.00778481	0.00093299	0.00099883	0.46579667	1.31792103	3.24167014

Příklad 10. Uvažujme funkci $u(z) = \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z - (1.1 - 0.1i)}\right)$.



ε_{avr}	m	(KR)	(TR)	(CT)	(OB)	(KA)	(CE)
TEST	24	0.18640296	0.02955906	0.04037114	0.19670851	0.16761664	0.17240388
	48	0.04630941	0.00995840	0.01258603	0.05307522	0.08659955	0.08674431
	72	0.00807524	0.00631715	0.00771612	0.02740462	0.05782858	0.05766705
TESTSPEC	24	0.17774907	0.03500394	0.04694543	0.17865865	0.24252780	0.28285928
	48	0.05956187	0.01352471	0.01713986	0.04963174	0.10962113	0.11625942
	72	0.02050324	0.00691797	0.00852425	0.03187856	0.05503321	0.05624944
PROGRAM 2	24	0.18051200	0.03815611	0.05217207	0.19360600	0.42984532	1.04988367
	48	0.12842095	0.01379583	0.01732547	0.08000057	0.21916854	0.40304029
	72	0.07628923	0.00716075	0.00872382	0.04806269	0.13657963	0.27882883

ε_{max}	m	(KR)	(TR)	(CT)	(OB)	(KA)	(CE)
TEST	24	4.00151171	0.44173154	0.64180568	4.79127399	3.92304517	3.93193933
	48	1.30467709	0.26734071	0.34575668	1.95799065	2.96834936	2.96959201
	72	0.23180442	0.21165174	0.25693701	1.42744766	2.62762888	2.62770501
TESTSPEC	24	5.26331736	0.49674731	0.80158079	7.19235832	6.59074801	6.56127732
	48	1.89002603	0.28910684	0.37822804	2.74400607	5.51570086	5.51028339
	72	0.46463413	0.23959472	0.30680767	1.89342624	4.12095294	4.11941344
PROGRAM 2	24	5.20488303	0.43025857	0.79108343	6.84377678	5.65161273	6.14565790
	48	5.00424762	0.15764166	0.30900019	3.53721585	4.81812674	4.83066866
	72	3.61741324	0.08440212	0.12250873	2.27882396	3.73004713	3.73795121

V předchozích příkladech nebyly uvedeny hodnoty výstupního údaje K , které nehrají roli při posuzování přesnosti jednotlivých metod, avšak některé z nich budeme potřebovat v oddíle 30, a proto je uvádíme v tabulce 1. Je přitom vhodné si uvědomit, že jsme v těchto příkladech používali výhradně cesty s délkovým parametrem, pro které platí $V = 1$, a tedy pro výstupní údaj K procedury TEST resp. TESTSPEC platí

$$K = \hat{K} \quad \text{resp.} \quad K = \hat{K}_{\mathcal{P}}.$$

m	$\hat{K}_{\mathcal{P}}$
24	3.78044687
48	3.94504575
72	3.97564303

TABULKA 1. Hodnoty $K = \hat{K}_{\mathcal{P}}$ pro cestu (KR) a funkci $u(z) = \operatorname{Re}(z^2)$.

Na základě testování z příkladů 8–10 lze usoudit, že ve srovnání s přibližným řešením úlohy (D) podle původní metody vykazují nově navržené funkce \hat{u} a $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ srovnatelnou přesnost pro cesty (KR), (OB), menší přesnost pro cesty (TR), (CT) a přesvědčivě větší přesnost pro cesty (KA), (CE). Lze rovněž usoudit, že \hat{u} je přesnější než $\hat{u}_{\mathcal{P}}$.

Výsledky testování tedy hovoří ve prospěch hypotézy, že použití původní verze KMHP pro přibližné řešení Dirichletovy úlohy je vhodnější v případě konvexních oblastí a použití alternativ navržených v oddíle 26 je vhodnější v případě nekonvexních oblastí.

30. Odhady

Procedury TEST resp. TESTSPEC nám umožnily udělat si přibližnou představu o veličině

$$(94) \quad \max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \hat{u}(z)|$$

resp. (99) na základě experimentu. Nyní se budeme zabývat horním odhadem těchto veličin. Všechny odhady, které odvodíme, mají aposteriorní charakter, neboť v nich figuruje konstanta \hat{K} resp. $\hat{K}_{\mathcal{P}}$, kterou lze vyčíslit až po vyřešení soustavy (91) resp. (95).

V příkladech tohoto oddílu se budeme zabývat vyčíslením odvozených odhadů pro cestu

$$(KR) \quad \Gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

a funkci

$$h(z) = \operatorname{Re}(z^2).$$

V souladu s příklady 8–10 budeme uvažovat $m \in \{24, 48, 72\}$ a rovnoměrný rozklad $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$ takový, že

$$z_0 = \Gamma(0) = 1.$$

Potom

$$\nu(\mathcal{P}) = \frac{2\pi}{m}.$$

Ve zbytku tohoto oddílu budeme uvažovat $z \in [\Gamma]$, $t \in \mathbb{R}$ takové, že $z = \Gamma(t)$ a $k \in \{0, \dots, m-1\}$, takové že $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že t není ve větší vzdálenosti od t_k než od t_{k+1} , neboli

$$t - t_k \leq \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \quad \left(\leq \frac{\nu(\mathcal{P})}{2} \right).$$

Společné odhady pro veličiny (94) a (99)

Dva odhady, které nyní ukážeme pro veličinu (94), lze zajistit naprosto stejně také pro veličinu (99). Vyjdeme z nerovnosti

$$(113) \quad |h(z) - \hat{u}(z)| \leq |h(z) - h(z_k)| + |h(z_k) - \hat{u}(z_k)| + |\hat{u}(z_k) - \hat{u}(z)|,$$

Pro první sčítanec na pravé straně (113) na základě tvrzení 15 platí

$$(114) \quad |h(z) - h(z_k)| \leq \omega_{h \circ \Gamma}(|t - t_k|) \leq \omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right)$$

a vidíme, že pokračování v tomto odhadu je zcela závislé na vlastnostech funkce h . Pro druhý sčítanec jistě platí

$$(115) \quad |h(z_k) - \hat{u}(z_k)| \leq \max_{0 \leq j \leq m-1} |h(z_j) - \hat{u}(z_j)|$$

a nabízí se vyčíslení výrazu na pravé straně například pomocí procedury TEST. Pro třetí sčítanec na základě (93) platí

$$|\hat{u}(z_k) - \hat{u}(z)| = \left| \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(\hat{l})(\Gamma(t_k)) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(\hat{l})(\Gamma(t)) \right|,$$

a při jeho odhadování využijeme teoretické poznatky odvozené pro integrály Cauchyho typu v od-
díle 19. Odhad odvodíme ve dvou situacích:

I. Obecný případ

Použijeme-li korektně proceduru OML pro vstupní údaje $\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}$, \hat{K} a platí-li pro výstupní údaj této procedury $\operatorname{OML}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}, \hat{K}\right) < 1000$, potom podle věty 7 platí

$$(116) \quad |\hat{u}(z_k) - \hat{u}(z)| \leq \left| \mathcal{C}^-(\hat{l})(\Gamma(t_k)) - \mathcal{C}^-(\hat{l})(\Gamma(t)) \right| \leq \operatorname{OML}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}, \hat{K}\right).$$

Pokračujeme-li v (113) podle (114), (115) a (116), lze veličinu (94) odhadnout výrazem

$$\omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right) + \max_{0 \leq j \leq m-1} |h(z_j) - \hat{u}(z_j)| + \operatorname{OML}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}, \hat{K}\right).$$

Pokud použijeme stejný postup při odhadování veličiny (99), dospějeme k výrazu

$$(117) \quad \omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right) + \operatorname{OML}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}, \hat{K}_{\mathcal{P}}\right),$$

protože z (98) plyne, že

$$\max_{0 \leq j \leq m-1} |h(z_j) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(z_j)| = 0.$$

Příklad 11. Vyčísleme odhad (117) veličiny (99) pro cestu (KR) a funkci $h(z) = \operatorname{Re}(z^2)$. Platí

$$(h \circ \Gamma)(t) = \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi - \nu(\mathcal{P})}{2}.$$

Jde tedy o vyčíslení výrazu

$$(117') \quad 2 \cos \frac{\pi - \nu(\mathcal{P})}{2} + \operatorname{OML}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}, \hat{K}_{\mathcal{P}}\right).$$

K aplikaci procedury OML přistoupíme podobně jako v příkladě 6 s jediným rozdílem, a to že pro funkci $\hat{l}_{\mathcal{P}}$ bereme hodnoty $\hat{K}_{\mathcal{P}}$ z tabulky 1. V příloze A je umístěn výpis souboru `odhad1.m` zajišťujícího vyčíslení (117') v prostředí MATLAB.

m	(117')
24	1.97115461
48	1.05911775
72	0.72758825

II. Dostatečně jemný rozklad \mathcal{P}

Předpokládejme, že rozklad \mathcal{P} je tak jemný, že pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ lze $[\Gamma_j]$ považovat za úsečku, tj.

$$\frac{\zeta - z_j}{z_{j+1} - z_j} \in (0, 1), \quad \zeta \in [\Gamma_j].$$

Na základě (70) a (71) pro každé $j \in \{0, \dots, m-1\}$ platí

$$\hat{l}(\zeta) = \hat{l}_j + \frac{\zeta - z_j}{z_{j+1} - z_j} (\hat{l}_{j+1} - \hat{l}_j), \quad \zeta \in [\Gamma_j],$$

a tedy funkci \hat{l} lze považovat za reálnou. Potom z věty 8 a z (92) prakticky plyne, že

$$(118) \quad |\hat{u}(z_k) - \hat{u}(z)| \leq \varphi_\Gamma \hat{K} |t_k - t| + \frac{\hat{K} T^2}{4\pi} \omega_\Phi(|t_k - t|) \leq \frac{\varphi_\Gamma \hat{K}}{2} \nu(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K} T^2}{4\pi} \omega_\Phi\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right).$$

Pokračujeme-li v (113) podle (114), (115) a (118), lze veličinu (94) odhadnout výrazem

$$\omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right) + \max_{0 \leq j \leq m-1} |h(z_j) - \hat{u}(z_j)| + \frac{\varphi_\Gamma \hat{K}}{2} \nu(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K} T^2}{4\pi} \omega_\Phi\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right).$$

Pokud použijeme stejný postup při odhadování veličiny (99), dospějeme k výrazu

$$(119) \quad \omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right) + \frac{\varphi_\Gamma \hat{K}_{\mathcal{P}}}{2} \nu(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_\Phi\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right).$$

Příklad 12. Vyčíslíme odhad (119) veličiny (99) pro cestu (KR) a funkci $h(z) = \operatorname{Re}(z^2)$. Pro $\omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right)$ použijeme výraz z příkladu 11. Podle příkladu 5 je $\varphi_\Gamma = \frac{1}{2}$ a funkce ω_Φ je nulová. Jde tedy o vyčíslení výrazu

$$(119') \quad 2 \cos \frac{\pi - \nu(\mathcal{P})}{2} + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}}}{4} \nu(\mathcal{P}).$$

Hodnoty konstanty $\hat{K}_{\mathcal{P}}$ bereme z tabulky 1. V příloze A je umístěn výpis souboru `odhad2.m` zajišťujícího vyčíslení (119') v prostředí MATLAB.

m	(119')
24	0.50848205
48	0.25990758
72	0.17397385

Odhady pro veličinu (99) s dostatečně jemným rozkladem \mathcal{P}

Odvodíme takové odhady pro veličinu (99), které jsou podmíněny platností (98), a tedy je nelze použít v případě veličiny (94). Předpokládejme, že rozklad \mathcal{P} je dostatečně jemný (abychom funkci \hat{l} mohli opět považovat za reálnou). Vyjdeme z nerovnosti

$$(120) \quad |h(z) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(z)| \leq |h(\Gamma(t)) - \lambda(t)| + |\lambda(t) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))|,$$

kde

$$\lambda(t) = h(\Gamma(t_k)) + \frac{h(\Gamma(t_{k+1})) - h(\Gamma(t_k))}{t_{k+1} - t_k} (t - t_k),$$

a tedy na základě (98) také

$$\lambda(t) = \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t_k)) + \frac{\hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t_{k+1})) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t_k))}{t_{k+1} - t_k} (t - t_k).$$

Pro první sčítanec na pravé straně (120) na základě lemmatu 5 platí

$$|h(\Gamma(t)) - \lambda(t)| \leq \omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right) + \frac{\omega_{h \circ \Gamma}(t_{k+1} - t_k)}{2} \leq \omega_{h \circ \Gamma}\left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2}\right) + \frac{\omega_{h \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{2}.$$

Než přistoupíme k odhadování druhého sčítance, uvedeme dva k tomu potřebné vztahy. Předně na základě (97), věty 8 a (96) pro každé $t' \in \mathbb{R}$ prakticky platí

$$(121) \quad \begin{aligned} |\hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t')) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))| &= \left| \operatorname{Re} \mathcal{L}^{-}(\hat{l}_{\mathcal{P}})(\Gamma(t')) - \operatorname{Re} \mathcal{L}^{-}(\hat{l}_{\mathcal{P}})(\Gamma(t)) \right| \\ &\leq \varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}} |t' - t| + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi}(|t' - t|). \end{aligned}$$

Dále použijeme elementární nerovnost

$$(t_{k+1} - t)(t - t_k) \leq \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{4}.$$

Nyní pro druhý sčítanec na pravé straně (120) dostáváme

$$\begin{aligned} |\lambda(t) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))| &= \left| \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} (\hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t_k)) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} (\hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t_{k+1})) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))) \right| \\ &\leq \varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}} \left(\frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} (t - t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} (t_{k+1} - t) \right) \\ &\quad + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \left(\frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} \omega_{\Phi}(t - t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \omega_{\Phi}(t_{k+1} - t) \right) \\ &\leq 2\varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}} \frac{(t_{k+1} - t)(t - t_k)}{t_{k+1} - t_k} + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi}(t_{k+1} - t_k) \\ &\leq \frac{\varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}}}{2} (t_{k+1} - t_k) + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi}(t_{k+1} - t_k) \\ &\leq \frac{\varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}}}{2} \nu(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi}(\nu(\mathcal{P})). \end{aligned}$$

Veličinu (99) lze tedy odhadnout výrazem

$$\omega_{h \circ \Gamma} \left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2} \right) + \frac{\omega_{h \circ \Gamma}(\nu(\mathcal{P}))}{2} + \frac{\varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}}}{2} \nu(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi}(\nu(\mathcal{P})).$$

V jistých situacích můžeme sčítance na pravé straně (120) odhadnout pomocí lemmat 6–7. Předpokládejme například, že na intervalech $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$ existuje spojitá derivace $(h \circ \Gamma)'$ funkce $h \circ \Gamma$ a že existuje $M > 0$ s vlastností

$$(122) \quad |(h \circ \Gamma)''(t)| \leq M, \quad t \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Potom pro první sčítanec na pravé straně (120) na základě lemmatu 7 platí

$$|h(\Gamma(t)) - \lambda(t)| \leq \frac{M}{2} (t_{k+1} - t_k)^2 \leq \frac{M}{2} \nu^2(\mathcal{P}).$$

Pokud budeme předpokládat, že funkce ω_{Φ} je konkávní, potom funkce

$$\omega^*(s) = \varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}} s + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi}(s), \quad s \in \langle 0, +\infty \rangle,$$

je neklesající, konkávní a na základě (121) splňuje

$$\omega_{\hat{u}_{\mathcal{P}} \circ \Gamma}(s) \leq \omega^*(s), \quad s \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Vidíme, že pro druhý sčítanec na pravé straně (120) podle lemmatu 6 platí

$$|\lambda(t) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(\Gamma(t))| \leq \omega^* \left(\frac{t_{k+1} - t_k}{2} \right) \leq \frac{\varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}}}{2} \nu(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi} \left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2} \right).$$

Platí-li oba právě zmíněné předpoklady současně, lze veličinu (99) odhadnout výrazem

$$(123) \quad \frac{M}{2} \nu^2(\mathcal{P}) + \frac{\varphi_{\Gamma} \hat{K}_{\mathcal{P}}}{2} \nu(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}} T^2}{4\pi} \omega_{\Phi} \left(\frac{\nu(\mathcal{P})}{2} \right).$$

Příklad 13. Vyčíslíme odhad (123) veličiny (99) pro cestu (KR) a funkci $h(z) = \operatorname{Re}(z^2)$. Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(h \circ \Gamma)''(t) = -4 \cos(2t)$$

odkud

$$|(h \circ \Gamma)''(t)| \leq 4,$$

a tedy volíme $M = 4$. Podle příkladu 5 je $\varphi_\Gamma = \frac{1}{2}$ a funkce ω_Φ je nulová. Jde tedy o vyčíslení výrazu

$$(123') \quad 2\nu^2(\mathcal{P}) + \frac{\hat{K}_{\mathcal{P}}}{4}\nu(\mathcal{P}).$$

Hodnoty konstanty $\hat{K}_{\mathcal{P}}$ bereme z tabulky 1. V příloze A je umístěn výpis souboru `odhad3.m` zajišťujícího vyčíslení (123') v prostředí MATLAB.

Vzhledem k tomu, že okrajová úloha z příkladů 11–13 byla rovněž předmětem testování přesnosti v příkladě 8 a že v souladu s tímto příkladem jsou uvažována stejná m a stejné rovnoměrné rozklady $\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$, nabízí se srovnání hodnot odhadů s příslušnými (šedě podbarvenými) hodnotami veličiny ε_{\max} z tabulky na straně 92.

m	(123')
24	0.38450751
48	0.16337078
72	0.10196595

Shrnutí a závěry pro další rozvoj problematiky

Tato práce je zaměřena na doplnění současných poznatků o komplexní metodě hraničních prvků, zkráceně KMHP, s důrazem na efektivní konstrukci, konvergenci, existenci, algoritmickou realizaci a odhady chyby přibližného řešení Dirichletovy úlohy pro rovinné Jordanovy oblasti mající po částech regulární hranice bez ostnů. Těžiště její výsledkové části spočívá zejména v dokumentaci výzkumu cest realizujících parametrizaci hranic výše uvedených oblastí a integrálů Cauchyho typu podél těchto cest.

Do první skupiny dosažených výsledků jsou zařazena specifická pomocná tvrzení, jejichž důkazy jsme v odborné literatuře nezaznamenali. Zejména jsme přesvědčeni o původnosti výsledku formulovaného ve větě 1 a využitého později k důkazu důležité věty 10. Spočívá v popisu jedné speciální situace, v níž lze spojitou větev argumentu považovat za omezenou.

V následující části se věnujeme vlastnostem a charakteristikám používaných hranic. Jejich korektní odvození není hlavním cílem monografií o zkoumané problematice ([15]), případně jde jen o intuitivní výklad ([43]). Symbol Γ zavedený v definici 1 na straně 35 označuje kladně orientovanou Jordanovu cestu bez bodů úvratu, která je definovaná na kompaktním intervalu délky $T > 0$, a rovněž její T -periodické rozšíření definované na celé reálné ose. Symbolem Ω je označen vnitřek cesty Γ , který je zmíněnou rovinnou Jordanovou oblastí a jehož hranicí je množina

$$[\Gamma] = \{\Gamma(t) : 0 \leq t \leq T\}.$$

K hlavním výsledkům druhé části patří věty 2–5.

Do třetí části jsou zařazeny výsledky vztahující se k hraničnímu chování ICT za specifických předpokladů o jeho hustotě. Některé z těchto výsledků představují témata autorových publikací ([p2],[p3]). Všeobecně je známo, že pro funkci $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ spojitou v Diniho smyslu je ICT

$$\mathcal{C}(g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma],$$

holomorfní v Ω , existuje jeho spojitě rozšíření $\mathcal{C}^-(g)$ definované na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ a platí

$$(55) \quad \mathcal{C}^-(g)(z) = g(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in [\Gamma],$$

kde integrál na pravé straně konverguje absolutně. Věta 6 představuje teoretický příspěvek ke známé Privalovově větě o hraničních hodnotách ICT. Poskytuje vyčíslitelný odhad pro rozdíl hraničních hodnot funkce $\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma$ v případě lipschitzovské hustoty g . Vyčíslení odhadu, který má čtyři parametry, je algoritmicky zpracováno v proceduře OML, přičemž výstupní údaj této procedury je použit ve formulaci věty 7, která je praktickým důsledkem věty 6. Věta 8 potom přináší neméně důležitý odhad pro rozdíl hraničních hodnot funkce $\operatorname{Re}(\mathcal{C}^-(g) \circ \Gamma)$ v případě hustoty g spojitě v Diniho smyslu.

V této části se též podrobně věnujeme vlastnostem ICT o po částech lineární hustotě. V definicích 14–16 na stranách 55–56 je postupně zaveden *rozklad*

$$\mathcal{P} = \{\Gamma_j\}_{j=0}^{m-1}$$

cesty Γ , kde Γ_j představuje příslušnou restrikcí zobrazení Γ , *uzly*

$$z_0, \dots, z_{m-1} \in [\Gamma]$$

tohoto rozkladu, funkce $l : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ po částech lineární na $[\Gamma]$ vzhledem k rozkladu \mathcal{P} – množina všech takových funkcí je označena $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ – a generující posloupnost $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$ pro funkci l , kde $L_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je lineární funkce s vlastností

$$L_j|_{[\Gamma]} = l|_{[\Gamma]}.$$

Opakovaně se využívá skutečnosti, že posloupnost $\{O_j\}_{j=0}^{m-1}$ libovolných objektů lze periodicky rozšířit do souboru $\{O_k : k \in \mathbb{Z}\}$ (viz poznámku 8, str. 55).

Na základě speciálních vlastností funkce $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$, která je mimochodem lipschitzovská, je odvozena celá řada vlastností funkce $\mathcal{C}(l)$ resp. $\mathcal{C}^-(l)$. Mimo jiné je snadno odvozen vztah (55) pro $g = l$ (lemma 19), a to nezávisle na všeobecně známých tvrzeních.

Ve větě 9 ukazujeme, že funkce $\mathcal{C}^-(l)$ mohou na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat libovolnou funkci, kterou lze vyjádřit ve tvaru ICT o Diniho spojitě hustotě g s vlastností

$$(76) \quad \limsup_{s \downarrow 0} \omega_g(s) \ln \frac{1}{s} = 0,$$

kde ω_g je modul spojitosti funkce g . K popsaným hustotám patří například všechny funkce splňující na $[\Gamma]$ Hölderovu podmínku s exponentem α , kde $0 < \alpha \leq 1$, pro které bylo tvrzení analogické větě 9 dokázáno v [38, str. 450–452]. Z prací T. V. Hromadky a jeho spolupracovníků (viz oddíl 4) bylo doposud známo, že takto lze aproximovat pouze funkci, která je holomorfní v nějaké otevřené množině obsahující množinu $\Omega \cup [\Gamma]$.

Ukazuje se, že kromě spojitěho rozšíření $\mathcal{C}^-(l)$ holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ (tj. holomorfní funkce $\mathcal{C}(l)$ uvažované v oblasti Ω), lze uvažovat spojitě a holomorfní rozšíření, která jsou definovaná na mnohem rozsáhlejších množinách než je $\Omega \cup [\Gamma]$. Holomorfní element $(\Gamma_j[\cdot], \Omega)$, kde

$$\Gamma_j[z] = \int_{\Gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma_j],$$

má podle věty 11 holomorfní rozšíření $\tilde{\Gamma}_j[\cdot]$ definované v oblasti $R_j \cap R_{j+1}$, kde R_j je jednoduše souvislá oblast, která vznikne z Gaussovy roviny \mathbb{C} odstraněním výřezu $[p_j]$, tj. křivky bez samo-průsečíků spojující uzel z_j s komplexním nekonečnem ∞ a s výjimkou tohoto uzlu ležící v množině $\mathbb{C} \setminus (\Omega \cup [\Gamma])$. Přitom na základě Riemannovy a Carathéodoryho věty lze předpokládat, že výřezy $[p_0], \dots, [p_{m-1}]$ jsou disjunktní, a tedy že množina

$$S = \bigcap_{j=0}^{m-1} R_j$$

je jednoduše souvislá oblast. Věta 12 popisuje holomorfní rozšíření $\tilde{\mathcal{C}}(l)$ holomorfního elementu $(\mathcal{C}(l), \Omega)$ definované v S a věta 13 popisuje spojitě rozšíření $\mathcal{C}(l)$ holomorfního elementu $(\tilde{\mathcal{C}}(l), S)$ definované v $S \cup \{z_0, \dots, z_{m-1}\}$. Výřezy $[p_0], \dots, [p_{m-1}]$, jimiž jsou určeny oblasti R_0, \dots, R_{m-1} , nejsou v této práci použity za žádným dalším účelem, narozdíl od prací T. V. Hromadky a jeho spolupracovníků, kde je jejich použití spjato s algoritmickou realizací metody a jejich problematice stanovení komplikuje použití KMHP zejména v případě hranic komplikovanějších nekonvexních oblastí.

Množina $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ je komplexní vektorový prostor a zobrazení

$$\mathcal{L}_m(\mathcal{P}) \ni l \longmapsto [l(z_0), \dots, l(z_{m-1})]^T \in \mathbb{C}^m$$

je izomorfismus vektorového prostoru $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ na standardní komplexní vektorový prostor \mathbb{C}^m . Uvažujeme bázi $\{b_0, \dots, b_{m-1}\}$ prostoru $\mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ odpovídající standardní bázi prostoru \mathbb{C}^m při tomto izomorfismu. Potom holomorfní element $(\tilde{\mathcal{C}}(b_j), S)$ lze holomorfně rozšířit prostřednictvím holomorfního elementu

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \tilde{\Gamma}_{j-1}[z] + \frac{z - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \tilde{\Gamma}_j[z] \right), D_j \right), \quad \text{kde } D_j = R_{j-1} \cap R_j \cap R_{j+1},$$

jehož spojitým rozšířením definujeme funkci

$$f_j : D_j \cup \{z_{j-1}, z_j, z_{j+1}\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Vlastnosti funkcí f_0, \dots, f_{m-1} odvozené v oddíle 25 mají zásadní význam pro vývoj KMHP. Podle věty 15 jsou restrikce těchto funkcí na hranici $[\Gamma]$ funkcemi lineárně nezávislými. Stejný výsledek platí podle věty 17 také pro restrikce jejich reálných částí g_0, \dots, g_{m-1} .

V závěrečné části zaměřené na samotný vývoj KMHP se integrují všechny předchozí výsledky. V oddíle 2 byly interpretovány původní postupy T. V. Hromadky a jeho spolupracovníků, jejichž cílem bylo zpřístupnit hodnoty takové funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$, která pro danou spojitou funkci $h : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ popisuje přibližné řešení Dirichletovy úlohy

$$(D) \quad \Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad u = h \quad \text{na } [\Gamma].$$

Praktickým cílem disertace bylo využít vlastnosti zde zavedených funkcí g_0, \dots, g_{m-1} k návrhu alternativních postupů. V následujícím odstavci se jeden z nich pokusíme vyložit analogicky jako byly vyloženy původní postupy v oddíle 2.

Symbolem u označíme přesné řešení úlohy (D). Potom u je funkce harmonická v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$, a tedy u je reálnou částí nějaké funkce f , která je holomorfní v Ω a spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$. Za těchto okolností lze funkci f reprezentovat ve tvaru ICT o reálné hustotě, řekněme $g : [\Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$, podél cesty Γ , tj.

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta, \quad w \in \Omega,$$

(viz [43, str. 255] nebo přímo [39, str. 136]). Poznamenejme, že použití této integrální reprezentace je zásadní odlišností od původních postupů. Umožňuje nám uvažovat reálnou hustotu g , zatímco původní postupy používají integrální reprezentaci s komplexní hustotou (např. Cauchyho integrální vzorec – srovnej s oddílem 2). Nahradíme-li hustotu g jejím po částech lineárním interpolan-tem $l \in \mathcal{L}_m(\mathcal{P})$ vzhledem k uzlům z_0, \dots, z_{m-1} , potom

$$l_j := l(z_j) = g(z_j) \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

$\mathcal{C}^-(l)$ je aproximantem funkce f , tj.

$$(3) \quad \mathcal{C}^-(l) \approx f \quad \text{na } \Omega \cup [\Gamma],$$

a $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ aproximuje funkci u . Je-li tedy veličina

$$\max_{z \in \Omega \cup [\Gamma]} |u(z) - \operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z)|$$

malá, popisuje funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ přibližné řešení úlohy (D). Při vyčíslení hodnot vhodné funkce $\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)$ využíváme toho, že

$$\operatorname{Re} \mathcal{C}^-(l)(z) = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{m-1} l_j f_j(z) = \sum_{j=0}^{m-1} l_j g_j(z), \quad z \in \Omega \cup [\Gamma].$$

Definice funkcí g_0, \dots, g_{m-1} je založena na znalosti uzlů z_0, \dots, z_{m-1} , které lze jednoduše stanovit například tak, že zvolíme libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a položíme

$$(88) \quad z_j := \Gamma \left(\alpha + \frac{T}{m} j \right), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Koeficienty l_0, \dots, l_{m-1} jsou stanoveny jako složky řešení soustavy lineárních algebraických rovnic, která se odvodí následovně. Pro libovolnou posloupnost $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$, kde $n \geq m$ a $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1} \in [\Gamma]$, sestavíme na základě (3) soustavu rovnic

$$\mathcal{C}^-(l)(\zeta_k) = f(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

neboli

$$\sum_{j=0}^{m-1} l_j f_j(\zeta_k) = f(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Potom porovnáním reálných částí levých a pravých stran těchto rovnic a aplikací okrajové podmínky $u = h$ na $[\Gamma]$ obdržíme soustavu n rovnic o m neznámých l_0, \dots, l_{m-1} :

$$(91) \quad \sum_{j=0}^{m-1} l_j g_j(\zeta_k) = h(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Tuto soustavu řešíme metodou nejmenších čtverců. Proces sestavení příslušné matice soustavy

$$\{g_j(\zeta_k)\}_{\substack{k=0, \dots, n-1 \\ j=0, \dots, m-1}}$$

je v našem případě, narozdíl od Hromadkova přístupu, zcela triviální – prvky této matice jsou přímo hodnoty funkcí g_0, \dots, g_{m-1} v bodech zvolené posloupnosti $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$. Všimněme si také, že

soustava (91) má m neznámých ve srovnání s $2m + 3$ neznámými u soustavy, na kterou narážíme v pracích Hromadky a jeho spolupracovníků, a to při stejných uzlech rozkladu z_0, \dots, z_{m-1} . V našem případě se tedy jedná o úsporu více než poloviny neznámých.

Pokud není naším cílem sledovat analogii s původními postupy, vystačíme si se stručnějším popisem: Posloupnost $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$ označujeme jako *vztažnou*, má-li úloha řešit soustavu (91) metodou nejmenších čtverců právě jedno řešení $[\hat{l}_0, \dots, \hat{l}_{m-1}]^T$. V takovém případě zavádíme funkci

$$\hat{u}(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}_j g_j(z), \quad z \in \Omega \cup [\Gamma].$$

Funkce \hat{u} je harmonická v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$ a splňuje podmínky

$$\hat{u}(\zeta_k) = h(\zeta_k), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

ve smyslu nejmenších čtverců. Je-li veličina

$$(94) \quad \max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \hat{u}(z)|$$

malá, potom na základě principu maxima modulu pro harmonické funkce je možné funkci \hat{u} považovat za přibližné řešení úlohy (D). Na základě věty 9 lze za příznivých okolností funkcemi \hat{u} na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat řešení úlohy (D).

Další nová alternativa se vztahuje ke speciální situaci právě popsaného postupu, kdy $m = n$. V této situaci je vztažnost posloupnosti $\{\zeta_k\}_{k=0}^{n-1}$ ekvivalentní s řešitelností soustavy (91) v obvyklém smyslu. Je-li vztažná přímo posloupnost $\{z_j\}_{j=0}^{m-1}$ uzlů zvoleného rozkladu a je-li $[\hat{l}_0, \dots, \hat{l}_{m-1}]^T$ řešení soustavy

$$\sum_{j=0}^{m-1} l_j g_j(z_k) = h(z_k), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

potom zavádíme funkci

$$\hat{u}_{\mathcal{P}}(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{l}_j g_j(z), \quad z \in \Omega \cup [\Gamma].$$

Funkce $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ je harmonická v Ω , spojitá na $\Omega \cup [\Gamma]$ a splňuje podmínky

$$\hat{u}_{\mathcal{P}}(z_j) = h(z_j), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Je-li veličina

$$(99) \quad \max_{z \in [\Gamma]} |h(z) - \hat{u}_{\mathcal{P}}(z)|$$

malá, potom na základě principu maxima modulu pro harmonické funkce je možné funkci $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ považovat za přibližné řešení úlohy (D). Na základě věty 9 lze za příznivých okolností funkcemi $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ na množině $\Omega \cup [\Gamma]$ stejnoměrně aproximovat řešení úlohy (D).

Funkce \hat{u} a $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ lze uvažovat jen za předpokladu řešitelnosti příslušné soustavy lineárních algebraických rovnic nebo, což je totéž, za předpokladu vztažnosti příslušné posloupnosti. Věta 18 zajišťuje existenci vztažných posloupností a věta 19 popisuje automatický způsob jejich produkce – stačí pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ zvolit libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a položit

$$\zeta_k = \Gamma\left(\alpha + \frac{kT}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Speciální výsledek pro cestu

$$(KR) \quad \Gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

jejímž obrazem je jednotková kružnice, přináší věta 20, podle které má rovnoměrnost rozkladu za následek vztažnost posloupnosti jeho uzlů. Při numerických experimentech v oddíle 29 jsme tuto vlastnost zaznamenali také u dalších cest Γ s délkovým parametrem.

Věty 2, 10, 11 a příklad 2 jsou základními pilíři korektního odvození vyčíslitelných výrazů, které popisují hraniční hodnoty funkcí f_0, \dots, f_{m-1} a z nichž vychází algoritmičká realizace nových postupů v procedurách DIRICHLET a DIRICHLETSPEC. Tyto procedury produkující hodnoty funkcí \hat{u} a $\hat{u}_{\mathcal{P}}$ fungují korektně pro každý rozklad \mathcal{P} s vlastnostmi P_I a P_{II} (viz poznámku 19).

Zajištění takového rozkladu nepředstavuje většinou v praktických úlohách problém. Navíc z vět 3 a 4 o zobrazení Γ plyne, že uvedené vlastnosti má libovolný dostatečně jemný rozklad \mathcal{P} .

Veličinu (94), podle které je možno posoudit vhodnost použití funkce \hat{u} jako přibližného řešení Dirichletovy úlohy (D), obecně stanovit neumíme. Můžeme si však o ní udělat přibližnou představu na základě experimentu, který spočívá ve vyčíslení hodnot výrazu $h(z) - \hat{u}(z)$ v testovacích bodech rozmístěných na hranici $[\Gamma]$. Za tím účelem je navržena procedura TEST, která využívá proceduru DIRICHLET a produkuje navíc veličiny

$$\varepsilon_{\text{avr}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |h(w_k) - \hat{u}(w_k)|, \quad \varepsilon_{\text{max}} = \max_{0 \leq k \leq p-1} |h(w_k) - \hat{u}(w_k)|$$

představující průměrnou a maximální absolutní odchylku funkce \hat{u} od přesného řešení úlohy (D) v testovacích bodech w_0, \dots, w_{p-1} , kde $p \in \mathbb{N}$. Analogicky je navržena procedura TESTSPEC, která se vztahuje k veličině (99) a funkci $\hat{u}_{\mathcal{P}}$, přičemž využívá proceduru DIRICHLETSPEC. Procedury TEST a TESTSPEC jsou použity k testování přesnosti nově navržených postupů na úlohách se známým přesným řešením (příklady 8–10). Pro srovnání je stejným testům podroben také původní postup (podle případu II na straně 12, viz [29, str. 185, PROGRAM 2]). Výsledky testování hovoří ve prospěch hypotézy, že použití původního postupu je vhodnější v případě konvexních oblastí, zatímco použití nově navržených alternativ je vhodnější v případě nekonvexních oblastí. Lze rovněž usoudit, že \hat{u} je přesnější než $\hat{u}_{\mathcal{P}}$. Výsledky testování vyvolávají podezření, že algoritmy původního postupu, závislé na volbě výřezu a vhodné jednoznačné větve logaritmu, u komplikovanějších hranic selhávají. Pokud tomu tak skutečně je, lze si to vysvětlit tím, že tyto algoritmy nejsou schopny korektně stanovit výřez a jednoznačnou větev logaritmu v netriviálních situacích, které u komplikovanějších hranic mohou nastat. Naproti tomu naše postupy nejsou algoritmicky závislé na volbě výřezu či jednoznačné větve logaritmu a korektnost algoritmické realizace je teoreticky podložena i v případě dosti komplikovaných hranic. To staví aparát referované disertační práce do pozice nástroje, který umožňuje korektní aplikaci KMHP pro širší škálu rovinných oblastí než tomu bylo doposud.

Vedle výše popsaného experimentu vzniká přirozená otázka, zda nelze veličinu (94) popřípadě (99) odhadnout zhora. Hledání odpovědi na tuto otázku bylo v rámci plnění disertačního úkolu věnováno značné úsilí. Jeho výsledky nalezneme v oddíle 30. Na základě výše komentovaných vět 19 a 20 jsou odvozeny dva odhady použitelné pro obě uvedené veličiny a jedna speciální strategie pro odhadování veličiny (99). Všechny odhady mají aposteriorní charakter. V příkladech 11–13 bylo provedeno vyčíslení všech odhadů dostupných pro veličinu (99) v případě jednotkové kružnice a hraniční funkce

$$h = u|_{[\Gamma]}, \quad \text{kde } u(z) = \operatorname{Re}(z^2).$$

Podle očekávání bylo pozorováno, že kvalita odhadu roste s objemem předpokladů nutných k jeho odvození. Vzhledem k tomu, že stejná okrajová úloha byla předmětem výše zmíněného testování přesnosti, nabízí se srovnání odhadů s experimentem, které nám nepřipadá příliš lichotivé a s pokukem na úsilí vynaložené při odvozování odhadů v nás vyvolává rozpaky.

Tato disertační práce nabízí nový přístup ke KMHP vyvinutý na základě propracovaného teoretického aparátu s oporou ve stěžejních nástrojích komplexní analýzy. Jeho výhody byly předvedeny na přibližném řešení rovinné Dirichletovy úlohy. Jde především o teoretickou možnost stejnoměrné aproximovat přesné řešení, diskuzi řešitelnosti nezbytné soustavy lineárních algebraických rovnic, snadné odvození matice soustavy a dostupnost jejích prvků, korektnost použití pro složitější nekonvexní oblasti a s tím související řádově větší přesnost pro tyto oblasti, či dostupnost aposteriorních odhadů chyby přibližného řešení. Tyto výsledky však jistě skrývají potenciál k vylepšení.

Prostor, který je v disertační práci vyhrazen praktickému uplatnění nového přístupu, je potřeba chápat jako motivaci k jeho rozšiřování. Již samotná restrikce na rovinnou Dirichletovu úlohu ukazuje na rozpracovanost problematiky a vyzývá k výzkumu dalších možností nového přístupu. Směry, kterými by se rozšiřování mohlo ubírat, jsou poměrně přirozené – další okrajové úlohy, neomezené, vícenásobně souvislé a prostorové oblasti.

PŘÍLOHA A. ZDROJOVÉ SOUBORY

Soubor matice.m

```

function G = matice(z,W)
    [m,p,z,w,iota,delta] = priprava(z,W);
    phi1 = @(j,w) angle((z(j)-w)./(z(j-1)-w));
    phi2 = @(j,w) angle((z(j+1)-w)./(z(j)-w));
    phi3 = @(j,w) angle((z(j+1)-w)./(z(j-1)-w));
    a1 = @(j,w,phi) (w-z(j-1))./(z(j)-z(j-1))...
        *(log(abs((z(j)-w)./(z(j-1)-w)))+i.*phi)./(2.*pi.*i);
    a2 = @(j,w,phi) (w-z(j+1))./(z(j)-z(j+1))...
        *(log(abs((z(j+1)-w)./(z(j)-w)))+i.*phi)./(2.*pi.*i);
    a3 = @(j,w,phi) (log(abs((z(j+1)-w)./(z(j-1)-w)))+i.*phi)...
        ./(2.*pi.*i);
    for k = 0:p-1,
        for j = 0:m-1,
            if delta(k) == 0
                phi = phi1(j,w(k));
                eta = phi2(j,w(k));
                if ismember(iota(k),[j-1,j-1+m]) && phi < 0 phi = phi+2.*pi; end;
                if iota(k) == j && eta < 0 eta = eta+2.*pi; end;
                G(k+1,j+1) = real(a1(j,w(k),phi)+a2(j,w(k),eta));
            end
            if delta(k) == 1
                if ismember(iota(k),[j+1,j+1-m])
                    phi = phi1(j,w(k));
                    G(k+1,j+1) = real(a1(j,w(k),phi));
                end
                if ismember(iota(k),[j-1,j-1+m])
                    phi = phi2(j,w(k));
                    G(k+1,j+1) = real(a2(j,w(k),phi));
                end
                if iota(k) == j
                    phi = phi3(j,w(k));
                    if phi < 0 phi = phi+2.*pi; end;
                    G(k+1,j+1) = real(a3(j,w(k),phi));
                end
                if ~ismember(iota(k),[j+1,j+1-m,j-1,j-1+m,j])
                    phi = phi1(j,w(k));
                    eta = phi2(j,w(k));
                    G(k+1,j+1) = real(a1(j,w(k),phi)+a2(j,w(k),eta));
                end
            end
        end
    end
end

function [m,p,z,w,iota,delta] = priprava(z,W);
    m = size(z,2);
    p = size(W,2);
    z(2:m+1) = z;
    z(1) = z(m+1);
    z(m+2) = z(2);
    z = @(j) z(j+2);
    w = @(k) W(1,k+1);
    iota = @(k) W(2,k+1);
    delta = @(k) W(3,k+1);
end

```

Soubor dirichlet.m

```
function [u,K] = dirichlet(z,ZETA,hzeta,W)
    G = matice(z,ZETA);
    l = inv(transpose(G)*G)*transpose(G)*hzeta;
    H = matice(z,W);
    u = H*l;
    m = size(z,2); z(m+1) = z(1); l(m+1) = l(1); val = 1:m; subs = val';
    K = max(accumarray(subs, val, [], @(j) abs((l(j)-l(j+1))/(z(j)-z(j+1)))));
end
```

Soubor dirichletspec.m

```
function [u,K] = dirichletspec(Z,hz,W)
    z = Z(1,:);
    G = matice(z,Z);
    l = inv(G)*hz;
    H = matice(z,W);
    u = H*l;
    m = size(z,2); z(m+1) = z(1); l(m+1) = l(1); val = 1:m; subs = val';
    K = max(accumarray(subs, val, [], @(j) abs((l(j)-l(j+1))/(z(j)-z(j+1)))));
end
```

Soubor test.m

```
function test(vstup)
    clc
    format long
    vstupni = [vstup '.dat'];
    vystupni = [vstup '.ans'];
    a = fopen(vstupni,'r');
    b = fopen(vystupni,'wt');
    m = fscanf(a,'%d%');
    KRZ = fscanf(a, '%f %f ', [2 m]);
    n = fscanf(a,'%d%');
    KRZETA = fscanf(a, '%f %f %d %d %f ', [5 n]);
    p = fscanf(a,'%d%');
    KRW = fscanf(a, '%f %f %d %d %f ', [5 p]);
    z = complex(KRZ(1,:),KRZ(2,:));
    ZETA(1,:) = complex(KRZETA(1,:),KRZETA(2,:));
    ZETA(2:3,:) = KRZETA(3:4,:);
    hzeta = KRZETA(5,:);
    W(1,:) = complex(KRW(1,:),KRW(2,:));
    W(2:3,:) = KRW(3:4,:);
    hw = KRW(5,:);
    [u,K] = dirichlet(z,ZETA,hzeta,W);
    Eps = (hw-u)';
    eps_avr = norm(hw-u,1)/p;
    eps_max = max(abs(hw - u));
    fprintf(b,'%15.8f\n',Eps);
    fprintf(b,'\n%15.8f %15.8f\n',[eps_avr eps_max]');
    fprintf(b,'\n%15.8f\n',K);
    fclose(a);
    fclose(b);
end
```

Soubor testspec.m

```

function testspec(vstup)
    clc
    format long
    vstupni = [vstup '.dat'];
    vystupni = [vstup '.ans'];
    a = fopen(vstupni,'r');
    b = fopen(vystupni,'wt');
    m = fscanf(a,'%d%');
    fscanf(a,'%f %f ', [2 m]);
    KRZ = fscanf(a,'%f %f %d %d %f ', [5 m]);
    p = fscanf(a,'%d%');
    KRW = fscanf(a,'%f %f %d %d %f ', [5 p]);
    Z(1,:) = complex(KRZ(1,:),KRZ(2,:));
    Z(2:3,:) = KRZ(3:4,:);
    hz = KRZ(5,:);
    W(1,:) = complex(KRW(1,:),KRW(2,:));
    W(2:3,:) = KRW(3:4,:);
    hw = KRW(5,:);
    [u,K] = dirichletspec(Z,hz,W);
    Eps = (hw-u);
    eps_avr = norm(hw-u,1)/p;
    eps_max = max(abs(hw - u));
    fprintf(b,'%15.8f\n', (hw-u));
    fprintf(b,'\n%15.8f %15.8f\n', [eps_avr eps_max]);
    fprintf(b,'\n%15.8f\n',K);
    fclose(a);
    fclose(b);
end

```

Soubor oml.m

```

function O = oml(delta,K,cesta);
    clc
    format long
    if nargin == 2 cesta = 'KR'; end;
    [T,V,r,A,B,J] = nacteni(cesta);
    [S,o] = stanoveni(V,r,A,B,J,K);
    p = 500;
    O = 1000;
    for k = 2:p
        hDelta = k*T/(2*p);
        for m = 1:(k-1)
            Delta = m*T/(2*p);
            if S(hDelta,Delta,delta)
                O = min(O,o(hDelta,Delta,delta));
            end
        end
    end
    disp(['OML(' num2str(delta,'%5.4f') ', ' num2str(K,'%5.4f') ')...
        = ' num2str(O,'%11.8f')])
end

```

```

function [T,V,r,A,B,J] = nacteni(cesta);
switch cesta
case 'KR' %jednotkova kruznice
    T = 2*pi;
    V = 1;
    r = @(s)2*sin(s/2);
    A = @(D)D*cot(D/2)-2*log(sin(D/2));
    B = @(D)cot(D/2);
    J = @(D)pi;
otherwise
    disp('je treba doplnit data pro zvolenou cestu');
end
end

function [S,o] = stanoveni(V,r,A,B,J,K);
c1 = @(hD)V^2*K*hD^2/(pi*r(hD)^2);
c2 = @(hD,D)K/(2*pi)*(2*pi+2*V*hD/r(hD)*(V*hD/r(hD)...
    +V*hD/r(hD)*log(2*D*r(hD)/(V*hD)))+V*A(D)+J(D));
c3 = @(hD,D,d)V*K/(2*pi)*(V*hD*A(D)+r(hD)*D*B(D))/(r(hD)*D-V*hD*d);
S = @(hD,D,d)d<min([exp(c2(hD,D)/c1(hD))-1,...
    2*D*r(hD)/(V*hD+2*r(hD)),D*r(hD)/(V*hD),hD-D]);
o = @(hD,D,d)c1(hD)*d*log(1/d)+c2(hD,D)*d+c3(hD,D,d)*d^2;
end

```

Soubor odhad1.m

```

function o = odhad1(m,hK);
clc
format long
nu = 2.*pi./m;
o = 2.*cos((pi-nu)./2)+oml(nu./2,hK);
disp(['odhad1 = ' num2str(o,'%11.8f')]);
end

```

Soubor odhad2.m

```

function o = odhad2(m,hK);
clc
format long
nu = 2.*pi./m;
o = 2.*cos((pi-nu)./2)+hK./4.*nu;
disp(['odhad2 = ' num2str(o,'%11.8f')]);
end

```

Soubor odhad3.m

```

function o = odhad3(m,hK);
clc
format long
nu = 2.*pi./m;
o = 2.*nu.^2+hK./4.*nu;
disp(['odhad3 = ' num2str(o,'%11.8f')]);
end

```

PŘÍLOHA B. ELEKTRONICKÁ DOKUMENTACE DISERTAČNÍ PRÁCE

Součástí disertační práce je elektronická dokumentace (u vázané verze je k dispozici na kompaktním disku v kapse zadní desky) obsahující soubory

`disertace.pdf` a `autoreferat.pdf`,

kteřé představují elektronickou předlohu vytištěné verze disertační práce a jejího autoreferátu, a dále adresář

/programy/.

V tomto adresáři jsou umístěny zdrojové soubory k použitým procedurám, vstupní soubory a výstupní soubory, které slouží jako podklady k prezentovaným numerickým a grafickým výsledkům. Všechny soubory jsou vytvořeny resp. vyprodukovány v prostředí MATLAB, version 7.1.0.246 (R14). V jejich popisu, který následuje, používáme tuto legendu:

parametr	význam	nabývané hodnoty
x	specifikuje cestu Γ	KR, TR, CT, OB, KA, CE.
m	udává počet uzlů rozkladu \mathcal{P}	24, 48, 72.
y	označuje přesné řešení úlohy (D)	a (pro $u(z) = \operatorname{Re}(z^2)$) b (pro $u(z) = \operatorname{Re}(e^z)$) c (pro $u(z) = \operatorname{Re}(z + \frac{1}{z - (1.1 - 0.1i)})$)

TABULKA 1

Soubor	Popis
<code>matice.m</code>	Zdrojový soubor k proceduře MATICE.
<code>dirichlet.m</code>	Zdrojový soubor k proceduře DIRICHLET. Používá soubor <code>matice.m</code> .
<code>dirichletspec.m</code>	Zdrojový soubor k proceduře DIRICHLETSPEC. Používá soubor <code>matice.m</code> .
<code>test.m</code>	Zdrojový soubor k proceduře TEST. Používá soubor <code>dirichlet.m</code> . V příkazovém okně se spouští dávkou <code>test('data')</code> . Zpracovává specificky formátovaný soubor <code>data.dat</code> se vstupními údaji procedury TEST a produkuje soubor <code>data.ans</code> s výstupními údaji \mathcal{E} , ε_{avr} , ε_{max} , \hat{K} této procedury.
<code>testspec.m</code>	Zdrojový soubor k proceduře TESTSPEC. Používá soubor <code>dirichletspec.m</code> . V příkazovém okně se spouští dávkou <code>testspec('data')</code> . Zpracovává specificky formátovaný soubor <code>data.dat</code> se vstupními údaji procedury TESTSPEC a produkuje soubor <code>data.ans</code> s výstupními údaji \mathcal{E} , ε_{avr} , ε_{max} , $\hat{K}_{\mathcal{P}}$ této procedury.
<code>puvodni.m</code>	Překlad zdrojového souboru PROGRAM 2 (viz [29, str. 185]) z FORTRANU do MATLABU. V příkazovém okně se spouští dávkou <code>puvodni('data')</code> . Zpracovává stejně formátovaný soubor <code>data.dat</code> jako <code>testspec.m</code> a produkuje soubor <code>data_puv.ans</code> s výstupními údaji \mathcal{E} , ε_{avr} , ε_{max} .
<code>x_m_y.dat</code>	Vstupní soubory pro zdrojový soubor <code>test.m</code> použité v příkladech 8-10.
<code>x_m_y_spec.dat</code>	Vstupní soubory pro zdrojové soubory <code>testspec.m</code> a <code>puvodni.m</code> použité v příkladech 8-10.

(pokračování na další stránce)

(pokračování)

<code>x_m_y.ans</code>	Výstupní soubory vyprodukované zdrojovým souborem <code>test.m</code> na základě příslušných vstupních souborů <code>x_m_y.dat</code> . Obsahují výsledky prezentované v příkladech 8-10.
<code>x_m_y_spec.ans</code>	Výstupní soubory vyprodukované zdrojovým souborem <code>testspec.m</code> na základě příslušných vstupních souborů <code>x_m_y_spec.dat</code> . Obsahují výsledky prezentované v příkladech 8-10.
<code>x_m_y_spec_puv.ans</code>	Výstupní soubory vyprodukované zdrojovým souborem <code>puvodni.m</code> na základě příslušných vstupních souborů <code>x_m_y_spec.dat</code> . Obsahují výsledky prezentované v příkladech 8-10.
<code>presna.m</code>	Pomocný zdrojový soubor pro volbu parametru y podle seznamu dostupných funkčních předpisů.
<code>zapis_x.m</code>	Zdrojový soubor pro vytvoření vstupních souborů <code>x_m_y.dat</code> . Používá soubor <code>presna.m</code> . V příkazovém okně se spouští dávkou <code>zapis_x</code> .
<code>zapisspec_x.m</code>	Zdrojový soubor pro vytvoření vstupních souborů <code>x_m_y_spec.dat</code> . Používá soubor <code>presna.m</code> . V příkazovém okně se spouští dávkou <code>zapisspec_x</code> .
<code>obr_y.m</code>	Zdrojové soubory produkující grafické znázornění cest, jejich rozkladů a přesných řešení úlohy (D) použitých v příkladech 8-10. Každý z nich lze v příkazovém okně spustit dávkou <code>obr_y(m)</code> , jsou-li pro zvolené hodnoty parametrů y, m k dispozici soubory <code>x_m_y_spec.dat</code> pro všechny hodnoty parametru x z tabulky 1.
<code>rozklady_m.pdf</code>	Výstupní soubory vyprodukované zdrojovými soubory <code>obr_y.m</code> . Soubor <code>rozklady_24.pdf</code> je použit pro vytvoření obrázku 1.
<code>grafy_y.pdf</code>	Výstupní soubory vyprodukované zdrojovými soubory <code>obr_y.m</code> . Jsou použity pro vytvoření obrázků 2-4.
<code>odchylky.m</code>	Zdrojový soubor produkující grafické srovnání výsledků obsažených v souborech <code>x_m_y.ans</code> , <code>x_m_y_spec.ans</code> , <code>x_m_y_spec_puv.ans</code> . Předmětem srovnání je výstupní údaj \mathcal{E} . V příkazovém okně lze spustit dávkou <code>odchylky('x', 'y')</code> , jsou-li pro zvolené hodnoty parametrů x, y k dispozici soubory <code>x_m_y.ans</code> , <code>x_m_y_spec.ans</code> a <code>x_m_y_puv.ans</code> pro všechny hodnoty parametru m z tabulky 1.
<code>x_y.pdf</code>	Výstupní soubory vyprodukované zdrojovým souborem <code>odchylky.m</code> . Částečně jsou využity za ilustračním účelem v příkladech 8-10.
<code>oml.m</code>	Zdrojový soubor k proceduře OML. V příkazovém okně se spouští dávkou <code>oml(δ, \hat{K})</code> .
<code>odhad1.m</code>	Zdrojový soubor zajišťující vyčíslení odhadu (117'). Používá soubor <code>oml.m</code> . V příkazovém okně se spouští dávkou <code>odhad1(m, \hat{K}_P)</code> .
<code>odhad2.m</code>	Zdrojový soubor zajišťující vyčíslení odhadu (119'). V příkazovém okně se spouští dávkou <code>odhad2(m, \hat{K}_P)</code> .
<code>odhad3.m</code>	Zdrojový soubor zajišťující vyčíslení odhadu (123'). V příkazovém okně se spouští dávkou <code>odhad3(m, \hat{K}_P)</code> .

Publikované práce

- [p1] DROBEK, J.: Rouché's Theorem Application. *J. Elect. Eng.*, ročník 53, č. 12/s, 2002: s. 83-85.
- [p2] DROBEK, J.: On estimate for the modulus of continuity of the Cauchy-type integral having a Lipschitz-continuous density, *Math. Slovaca* – přijato k publikaci,
- [p3] DROBEK, J.: Approximations by the Cauchy-type integrals with piecewise linear densities, *Applications of Mathematics* – v recenzním procesu,

Příspěvky na konferencích

- [k1] DROBEK, J.: Rouché's Theorem Application, SVOČ Olomouc 2002, SCAM Bratislava 2002,
- [k2] DROBEK, J.: One Queueing Theory Quantity Analysis, 3μ Dolní Lomná 2005,
- [k3] DROBEK, J.: Komplexní metoda hraničních prvků – konvergence, ODAM Olomouc 2005, 3μ Dolní Lomná 2006,
- [k4] DROBEK, J.: Komplexní metoda hraničních prvků a metoda hraničních prvků, 3μ Dolní Lomná 2007,
- [k5] DROBEK, J.: Komplexní metoda hraničních prvků – numerická realizace, 3μ Dolní Lomná 2007, ODAM Olomouc 2007,
- [k6] DROBEK, J.: The Complex Variable Boundary Element Method and Flow About Stationary Region, 3μ Dolní Lomná 2008.

Použitá literatura

- [1] ALEYNIKOV, S. M.; STROMOV, A. V.: Comparison of complex methods for numerical solutions of boundary problems of the Laplace equation. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 28, č. 6, 2004: s. 615–622.
- [2] ANG, W. T.; CLEMENTS, D. L.; COOKE, T.: A complex variable boundary element method for a class of boundary value problems in anisotropic thermoelasticity. *International Journal of Computer Mathematics*, ročník 70, č. 3, 1999: s. 571–586.
- [3] ANG, W. T.; PARK, Y. S.: CVBEM for a system of second-order elliptic partial differential equations. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 21, č. 2, 1998: s. 179–184.
- [4] BAILEY, R. T.: *Extensions and refinements to the complex variable boundary element method including its application to numerical grid generation*. Thesis (Ph. D.), University of Florida, 1991.
- [5] BLYTH, M. G.; POZRIKIDIS, C.: A comparative study of the boundary and finite element methods for the Helmholtz equation in two dimensions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 31, č. 1, 2007: s. 35–49.
- [6] BREBBIA, C. A.: *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [7] BRENERMAN, M. C.; KATS, B. A.: Ocenka normy singulárného integrálu i ee primenenie v nekotorych kraevykh zadachakh. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, ročník 82 (1), 1985: s. 8–17.
- [8] BROŽ, P.; PROCHÁZKA, P.: *Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi*. SNTL, Praha, 1987.
- [9] CHUBEŽTI, S. S.: Kvadraturnyje formuly dlia singularnykh integralov s jadrom Koši. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, ročník 10, č. 4, 2008: s. 61–75.
- [10] DIEUDONNE, J.: *Foundations of Modern analysis*. Academic Press, New York, London, 1960.
- [11] DROBEK, J.: *Využití analytických funkcí v přírodních vědách*. Diplomová práce, Olomouc, 2001.
- [12] DUMIR, P. C.; KUMAR, R.: Complex variable boundary element method for torsion of anisotropic bars. *Appl. Math. Modelling*, ročník 17, č. 2, 1993: s. 80–88.
- [13] DYNKIN, E. M.: O gladkosti integralov tipa Koši. *Dokl. Akad. Nauk*, ročník 250, 1980: s. 794–797.
- [14] FISHER, T. S.; TORRANCE, K. E.: Constrained optimal duct shapes for conjugate laminar forced convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, ročník 43, č. 1, 2000: s. 113–126.
- [15] GACHOV, F. D.: *Krajevyye zadachi*. Nauka, Moskva, 1977.
- [16] GARNETT, J. B.: *Bounded Analytic Functions*. Springer, New York, 2007.
- [17] GERUS, O. F.: Estimates for the modulus of a Cauchy-type integral and its derivatives. *Ukrainian Math. J.*, ročník 51, 1999: s. 813–826.
- [18] Grecu, L.; Petrila, T.: A complex variable boundary element method for the problem of the free-surface heavy inviscid flow over an obstacle. *Gen. Math.*, ročník 16, č. 2, 2008: s. 3–17.
- [19] GUSEINOV, E. G.: Teorema Plemela-Privalova dlia obobščennykh klassov Geldera. *Mat. Sb.*, ročník 183 (2), 1992: s. 21–37.
- [20] HENRICI, P.: *Applied and Computational Complex Analysis Volume I*. John Wiley & Sons, New York - London - Sydney - Toronto, 1974.
- [21] HENRICI, P.: *Applied and Computational Complex Analysis Volume II*. John Wiley & Sons, New York - London - Sydney - Toronto, 1977.
- [22] HENRICI, P.: *Applied and Computational Complex Analysis Volume III*. John Wiley & Sons, New York - London - Sydney - Toronto, 1986.
- [23] HROMADKA II, T. V.: Linking the complex variable boundary-element method to the analytic function method. *Numerical Heat Transfer*, ročník 7, č. 2, 1984: s. 235–240.
- [24] HROMADKA II, T. V.: Application of the CVBEM to multiply connected regions. *Appl. Math. Modell.*, ročník 14, č. 4, 1990: s. 212–216.
- [25] HROMADKA II, T. V.: *The Best Approximation Method in Computational Mechanics*. Springer-Verlag, London, 1993.
- [26] HROMADKA II, T. V.: *A Multi-Dimensional Complex Variable Boundary Element Method*. WIT Press, Southampton, 2002.
- [27] HROMADKA II, T. V.; DURBIN, T. J.: Modeling steady-state advective contaminant transport by the complex variable boundary element method. *Engineering Analysis*, ročník 3, č. 1, 1986: s. 9–14.
- [28] HROMADKA II, T. V.; GUYMON, G. L.: Application of a boundary integral equation to prediction of freezing fronts in soil. *Cold Regions Science and Technology*, ročník 6, č. 2, 1982: s. 115–121.
- [29] HROMADKA II, T. V.; LAI, C.: *The Complex Variable Boundary Element Method in Engineering Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [30] HROMADKA II, T. V.; WHITLEY, R. J.: Error Bounds for Numerical Solution of Partial Differential Equations. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, ročník 7, č. 4, 1991: s. 339–346.
- [31] HROMADKA II, T. V.; WHITLEY, R. J.: *Advances in the Complex Variable Boundary Element Method*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [32] HROMADKA II, T. V.; YEN, C. C.: Extension of the CVBEM to higher-order trial functions. *Appl. Math. Modell.*, ročník 12, č. 6, 1988: s. 619–626.
- [33] HSIEH, C. K.; KASSAB, A. J.: Complex variable boundary element methods for the solution of potential problems in simply and multiply connected domains. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, ročník 86, č. 2, 1991: s. 189–213.

- [34] HUANG, Y.; MOGILEVSKAYA, S. G.; CROUCH, S. L.: Complex variable boundary integral method for linear viscoelasticity: Part I - basic formulations. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 30, č. 12, 2006: s. 1049–1056.
- [35] HUANG, Y.; MOGILEVSKAYA, S. G.; CROUCH, S. L.: Complex variable boundary integral method for linear viscoelasticity: Part II - application to problems involving circular boundaries. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 30, č. 12, 2006: s. 1057–1068.
- [36] HUNT, B.; ISAACS, L. T.: Integral Equation Formulation for Ground-Water Flow. *Journal of the Hydraulics Division*, ročník 107, č. 10, 1981: s. 1197–1209.
- [37] KASSAB, A. J.; CHESLA, S.: An iterative CVBEM solution of nonlinear heat transfer problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 11, č. 1, 1993: s. 67–75.
- [38] LU, J.-K.: *Boundary Value Problems for Analytic Functions*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 1993.
- [39] MICHLIN, S. G.: *Integrální rovnice*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.
- [40] MOGILEVSKAYA, S. G.; LINKOV, A. M.: Complex fundamental solutions and complex variables boundary element method in elasticity. *Comput. Mech.*, ročník 22, č. 1, 1998: s. 88–92.
- [41] MOKRY, M.: Complex variable boundary element method for external potential flows. *AIAA Journal*, ročník 29, č. 12, 1991: s. 2027–2028.
- [42] MUKHERJEE, S.; MORJARIA, M.: On the Efficiency and Accuracy of the Boundary Element Method and the Finite Element Method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, ročník 20, č. 3, 1984: s. 515–522.
- [43] MUSCHELIŠVILL, N. I.: *Singulárnyje integralnyje uravnenija*. Fizmatgiz, Moskva, 1962.
- [44] PARK, Y. S.; ANG, W. T.: A complex variable boundary element method for an elliptic partial differential equation with variable coefficients. *Commun. Numer. Meth. Engrg.*, ročník 16, č. 10, 2000: s. 697–703.
- [45] PETRILA, T.: Consideration of a CVBEM approximation for plane hydrodynamics. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 30, č. 12, 2006: s. 1045–1048.
- [46] PRIVALOV, I. I.: *Graničnyje svojstva analytičeskich funkcij*. Gosudarstvennoje izdatelstvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva, 1950.
- [47] PROVIDAKIS, C. P.: Comparison of boundary element and finite element methods for dynamic analysis of elastoplastic plates. *Advances in Engineering Software*, ročník 30, č. 5, 1999: s. 353–360.
- [48] RASMUSSEN, T. C.; YU, G.: Determination of groundwater flownets, fluxes, velocities, and travel times using the complex variable boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 30, č. 12, 2006: s. 1030–1044.
- [49] SALAEV, V. V.: Direct and inverse estimates for a singular Cauchy integral along a closed curve. *Math. Notes*, ročník 19, 1976: s. 221–231.
- [50] SATO, K.: Complex variable boundary element method for potential flow with thin objects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, ročník 192, č. 11–12, 2003: str. 14211433.
- [51] TAMRAZOV, P. M.: *Gladkosti i polynomialnyje približenija*. Naukova dumka, Kyjev, 1975.
- [52] VAN DER VEER, P.: *Calculation method for two-dimensional groundwater flow*. Rijkswaterstaat Communications, No. 28/1978, Government Publishing Office, Haag, Nizozemí, 1978.
- [53] ČERNÝ, I.: *Analýza v komplexním oboru*. Academia, Praha, 1983.
- [54] WHITLEY, R. J.; HROMADKA II, T. V.: Complex logarithms, Cauchy principal values, and the complex variable boundary element method. *Appl. Math. Model.*, ročník 18, č. 8, 1994: s. 423–428.
- [55] WHITLEY, R. J.; HROMADKA II, T. V.: Numerical Solutions of the Dirichlet Problem via a Density Theorem. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, ročník 10, č. 3, 1994: s. 369–381.
- [56] WHITLEY, R. J.; HROMADKA II, T. V.: The Existence of Approximate Solutions for Two-Dimensional Potential Flow Problems. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, ročník 12, č. 6, 1996: s. 719–727.
- [57] WHITLEY, R. J.; HROMADKA II, T. V.: A General Complex Variable Boundary Element Method. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, ročník 17, č. 4, 2001: s. 332–335.
- [58] WHITLEY, R. J.; HROMADKA II, T. V.: Theoretical developments in the complex variable boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 30, č. 12, 2006: s. 1020–1024.
- [59] WOOD, M. A.; CIEJKA, C. J.; HROMADKA II, T. V.: CVBEM error reduction using the approximate boundary method. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 11, č. 3, 1993: s. 233–237.
- [60] YU, K. H.; KADARMAN, A. H.; DJOJODIHARDJO, H.: Development and implementation of some BEM variants – A critical review. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, ročník 34, č. 10, 2010: s. 884–899.