



Bakalářská práce

Výpočet tlakových poměrů v nábalu tkaniny

Studijní program:

B0715A270008 Strojírenství

Autor práce:

Filip Prodanovič

Vedoucí práce:

Ing. Josef Žák, Ph.D.

VÚTS

Liberec 2023



Zadání bakalářské práce

Výpočet tlakových poměrů v nábalu tkaniny

Jméno a příjmení:

Filip Prodanovič

Osobní číslo:

S20000203

Studijní program:

B0715A270008 Strojírenství

Zadávající katedra:

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Akademický rok:

2022/2023

Zásady pro vypracování:

Vytvořte pomocí metody konečných prvků 3D model nábalu tkaniny s použitím lineárního modelu pro ortotropní materiál. Určete stav napjatosti v nábalu v závislosti na zadaných podmínkách navíjení.

Rozsah grafických prací: 10
Rozsah pracovní zprávy: 30
Forma zpracování práce: tištěná/elektronická
Jazyk práce: Čeština

Seznam odborné literatury:

- [1] J. Žák, "Problematics of large-size batch winding of technical textiles," in Strutex Structure and Structural mechanics of Textile, Technical University of Liberec, 2018
[2] J. Žák, "Problematics of large batch winding of technical fabrics," in 35th conference with international participation Computational Mechanics 2019, (Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Czech Republic), University of West Bohemia, 2019.
[3] J. Žák, "Problematics of large-size batch winding of technical textiles," Vlákna a Textil, vol. 26, no. 1, pp. 74–78, 2019
[4] J. Žák, P. Karel, "Výzkumná zpráva VÚTS 99405", VÚTS Liberec, 2021

Vedoucí práce: Ing. Josef Žák, Ph.D.
VÚTS

Datum zadání práce: 1. prosince 2022
Předpokládaný termín odevzdání: 31. května 2024

doc. Ing. Jaromír Moravec, Ph.D.
děkan

L.S.

doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědom toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědom následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce Ing. Josefu Žákovi, Ph.D. za odborné poznámky, konzultace, které byly pro mne vždy přínosné a za veškerý čas strávený diskuzí nad problematikou mechaniky.

Chtěl bych také poděkovat své rodině především za morální a duševní podporu.

Anotace

Bakalářská práce je věnována určení stavu napjatosti ve velkonábalu tkaniny. Motivací je zhodnocení vlivu tuhosti nábalu na výsledný napěťový stav, který lze během navíjení regulovat. Experimentální měření je v oblasti navíjení velice komplikované, někdy dokonce nemožné, a proto teoretické vztahy a numerické simulace nabývají na důležitosti. Během navíjení může v návíně vznikat celá řada defektů, které mají různé příčiny a častokrát vedou k poškození a znehodnocení navinovaného materiálu. V bakalářské práci je řešen případ navíjení skelné tkaniny, jedná se tedy konkrétně o případ z textilního průmyslu, ale technologii navinování materiálu lze nalézt i v jiných odvětvích průmyslu.

V úvodu práce je popsán úvod do problematiky, kdy je navíjení zasazeno do kontextu celkového výroby tkanin. V další kapitole jsou uvedeny teoretické vztahy a postupy použité v práci, následuje prezentace výsledků s dílčími komentáři a závěr, kde jsou zhodnoceny výsledky.

Klíčová slova: navíjení, tkanina, metoda konečných prvků, lineární model.

Annotation

The bachelor's thesis is dedicated to determining the state of stress in a large-scale fabric winding. The motivation is to evaluate the influence of the winding stiffness on the resulting stress state, which can be controlled during the winding process. Experimental measurements in the field of winding are very complicated and sometimes even impossible, which is why theoretical relationships and numerical simulations become important.

During the winding process, various defects can occur in the winding, which have different causes and often lead to damage and devaluation of the wound material. The bachelor's thesis addresses the case of winding glass fabric, specifically focusing on the textile industry. However, the material winding technology can also be found in other industries.

The introduction of the thesis provides an overview of the issue, placing winding in the context of overall fabric production. The following chapter presents the theoretical relationships and procedures used in the work, followed by the presentation of results with partial comments. The conclusion evaluates the results.

Keywords: winding, fabric, finite element method, linear model.

Obsah

Seznam symbolů a zkratk	8
Úvod	9
1 Úvod do problematiky	10
1.1 Základní přehled technologie tkaní	10
1.2 Druhy navíječů	12
1.3 Defekty ve velkonábalech	14
1.4 Přehled modelů	16
2 Teorie	18
2.1 Odvození vztahů pro výpočet napětí v tlustostěnné nádobě	18
2.2 Analytické řešení se změnou teploty	21
2.3 Ortotropní materiál	23
2.4 Metoda konečných prvků	24
3 Tvorba modelu a výsledky	25
3.1 Zavedení modelu	25
3.2 Výsledky simulací	29
3.2.1 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$	30
3.2.2 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$	31
3.2.3 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$	32
3.2.4 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$	33
3.2.5 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$	34
3.2.6 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$	35
3.2.7 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$	36
3.2.8 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$	37
3.2.9 Souhrnné grafy výstupů MKP	38
3.2.10 Porovnání analytického řešení s MKP	44
4 Diskuze výsledků	47
Zdroje	49
Seznam obrázků	51

Seznam symbolů a zkratk

Symboly

A	[1/K]	Pomocná konstanta
B	[1/K]	Pomocná konstanta
C_1	[mm ^{1-K}]	Integrační konstanta
C_2	[mm ^{1+K}]	Integrační konstanta
C_3	[-]	Pomocná konstanta
E	[MPa]	Modul pružnosti
$g(r)$	[MPa]	Obecná funkce
G	[MPa]	Smykový modul
K^2	[-]	Poměr radiálního a tečného modulu
L	[mm]	Šířka tkaniny
P	[MPa]	Radiální napětí
Q	[-]	Poměr tečného a radiálního modulu
r	[mm]	Poloměr
R_0	[mm]	Vnitřní poloměr
R_v	[mm]	Vnější poloměr
ΔR	[mm]	Změna poloměru
s	[mm]	Tloušťka tkaniny
t	[mm]	Tloušťka nábalu
T	[N/m]	Lineární napětí
ΔT	[K]	Změna teploty
u	[mm]	Posuv
α	[1/K]	Teplotní součinitel délkové roztažnosti
ε	[-]	Poměrná deformace
ν	[-]	Poissonova konstanta
σ	[MPa]	Napětí
φ	[-]	Úhel

Zkratky

MKP	Metoda konečných prvků
-------	------------------------

Úvod

Tato bakalářská práce se věnuje analýze napětových poměrů ve velkonábalu tkaniny. Správné porozumění a identifikace průběhů napětí je klíčová pro úspěšnou optimalizaci procesu navíjení výsledného produktu. Při nevhodně nastaveném navíjecím procesu vznikají ve velkonábalu defekty, které znehodnocují, nebo dokonce i nenávratně poškozují navinutý materiál, což vede ke snížení produkce a k ekonomickým ztrátám výroby. Tento problém není specifický jen pro textilní průmysl, ale vyskytuje se i při navíjení papíru, polymerů, tenkých kovových plechů a netkaných textilií.

Cílem práce je stanovit napětový stav ve velkonábalu v závislosti na poměru radiálního a tečného modulu. Poměr modulů vystupuje jako veličina popisující tvrdost nábalu, kterou lze během navíjení regulovat a má zásadní vliv na výsledný napětový stav.

Na velkonábal je v práci pohlíženo jako na válec s ortotropií materiálových vlastností ve 3 hlavních na sebe kolmých směrech – radiálním, tečném a axiálním. Průběhy napětí byly stanoveny pomocí MKP modelu s částečnou analytickou kontrolou.

1 Úvod do problematiky

Tato kapitola se zabývá přehledem stavu současné problematiky navíjení s důrazem na navíjení textilního materiálu. Proto je prvotně uvedena technologie tkaní jako celek, druhy navíječů v textilním průmyslu, defekty, které mohou vznikat v nábalech a na konci kapitoly přehled modelů popisující mechaniku nábalů.

1.1 Základní přehled technologie tkaní

Technologií tkaní je z délkové vlákenné struktury (monofily, příže...) tvořena struktura plošná. Tkací technologií lze zpracovávat široké spektrum vlákenných materiálů – vlákna uhlíková, skelná, kovová nebo celulózová a tím dosahovat vysoké variability vlastností. Před samotným procesem tkaní se provádí příprava vlákenného materiálu, který je upravován a převíjí se do požadovaného tvaru. Vlákna po výrobě většinou nedosahují požadovaných parametrů pro zpracování technologií tkaní. Příprava na tkací proces se sestává z několika základních operací – *soukání, snování, šlichtování, navádění a navazování*.

Tkaní je realizováno na tkacích stavech, které lze rozdělit do několika skupin dle různých kritérií, ať už se jedná o rozdělení dle způsobu zanášení útku, možnosti vzorování, počtu prošlupů nebo listů. Dále je uvedeno nejběžnější rozdělení dle způsobu zanášení útku.

Člunkové – historicky nejstarší způsob zanášení útku, ale v dnešní době, kdy je kladen důraz na vysokou produktivitu, je nahrazován bezčlunkovými způsoby, jelikož se jedná o nejméně produktivní způsob. Geometrie a hmotnost člunku se vyznačuje nevhodnými dynamickými vlastnostmi pro rychlé prohozy.

Skřípcové – způsob je principiálně podobný prohozům člunkovým. Skřípcový prohozní systém se vyznačuje menší hmotností, která mu umožňuje dosahovat vyšších zrychlení a tím i lépe plnit požadavek vysoké produktivity. Nižší hmotnost je dosažena tím, že skřípec unáší zásobu útku pouze pro jeden prohoz oproti člunkovému způsobu, kdy člunek unáší útek pro více prohozů.

Jehlové – tento prohozní způsob má mnoho konstrukčních variant. Průmyslově nejpoužívanější je systém zanášení útku dvěma flexibilními jehlami, které jsou umístěny každá na jednom kraji a k předání útku dochází uprostřed tkaniny [1].

Hydraulické – tento způsob, oproti dosud zmíněným, přináší změnu ve snížení hmotnosti zanášecího média a hmotnosti útku, a to až přibližně o dva řády. Prohozním médiem je zde

nestlačitelná tekutina, která předává útku potřebnou hybnost pro zanesení. Kontakt tekutiny a útku však může mít negativní vliv na jeho mechanické vlastnosti – pokles pevnosti, poškození šlichty [1] [4].

Pneumatické – způsob podobný hydraulickému prohozu, avšak požadovaná hybnost je útku předávána stlačitelnou tekutinou. Stlačitelnost přináší vyšší náročnost na seřízení a na modelování prohozu, jelikož již nelze předpokládat konstantní hustotu média. Výhodou oproti hydraulickému prohozu je že vzduch nemá takový vliv na vlastnosti útku a lze dosahovat vyšší produktivity.

Na tkacích strojích lze nalézt několik základních mechanismů, které se liší v závislosti na typu stroje, ale mají společné funkce. Těmito mechanismy jsou: podávání osnovy, prošlupní, přírazný a prohozní mechanismus a odtah tkaniny.

Podáváním osnovy lze regulovat napětí v osnově což je jeden z klíčových parametrů pro produkci kvalitního materiálu. Při malém napětí může docházet ke zvlnění tkaniny, naopak při nadměrném tahovém napětí v osnově dochází k její přetrhovosti. Prošlupním mechanismem lze polohovat osnovu do horní nebo dolní úvratě a tím vytvořit prostor pro zanesení útku. Prohozní mechanismus zajišťuje dopravu útku do prošlupu. Přírazný mechanismus zajišťuje příraz útku k čelu tkaniny v požadované dostavě. Odtah tkaniny odvíjí tkaninu z tkací roviny na zbožový vál [3].

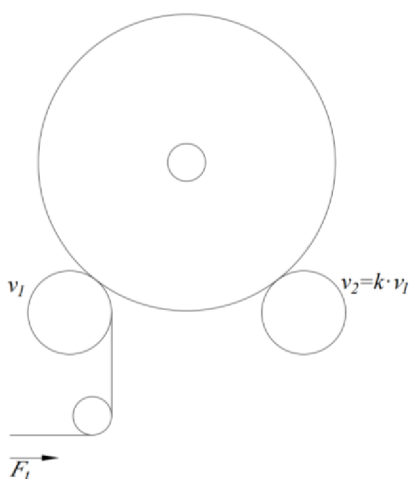
Tvorbu tkaniny lze rozdělit do několika kroků, které mohou být ve speciálních případech vynechány, nebo přehozeny. Prvním krokem je otevření prošlupu pomocí listů (u listového mechanismu) s nitěnkami ve kterých je navedena osnova. Druhým krokem je zavedení útku. Dalším krokem je uzavření prošlupu, tento krok může být vynechán, jelikož je někdy možné použít příraz do otevřeného prošlupu, následuje doprava útku k čelu tkaniny, a to přírazem paprsku. Když je poté útek dopraven do požadované polohy následuje odtah tkaniny. Tato sekvence se následně opakuje do dosažení potřebné délky tkaniny [4].

Kvalita a mechanické vlastnosti ve tkaninách mohou kolísat v závislosti na šíři tkaniny. Především se jedná o problematiku nerovnoměrného napnutí útku, kdy útková nit na krajích tkaniny je v malém nebo téměř nulovém předpětí. Tato vlastnost se vyskytuje především u tkanin vyrobené bezčlunkově (člunková technologie tvoří tzv. pravé kraje) a je obtížně měřitelná. Tento problém může také přispět k tvorbě defektů ve velkonábalech tkanin.

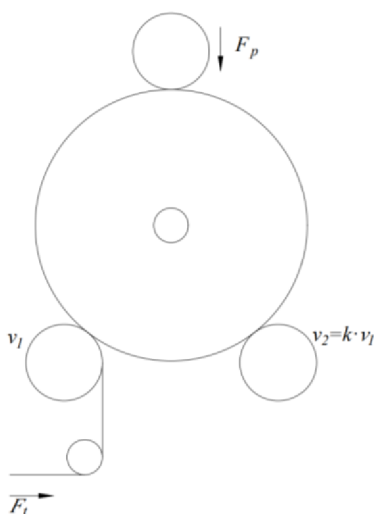
1.2 Druhy navíječů

Navíječe tkaniny slouží k nabalování tkaniny do návínu, aby bylo možné s finálním produktem snadno manipulovat a skladovat ho. Na trhu se v současné době objevují různá provedení navíječů, která se od sebe odlišují svou geometrií a způsobem vyvozování napínání tkaniny.

Kontaktní navíječe – tuto skupinu navíječů lze charakterizovat posuvným uložením zbožívého válu ve svislém vedení a pohonem zbožívého válu dvěma válci – válcem vodícím a hladícím. Tahová síla je dána rozdílem rychlostí těchto dvou válců. Přítlačná síla je vyvozována buď pouze vlastní hmotností nábalu nebo je podporována přítlačnou silou vyvozovanou přítlačným válcem. Přítlačný válec pozitivně ovlivňuje tvrdost nábalu a zlepšuje vlastnosti výsledného nábalu. Dále se také vyskytují modifikace kontaktních navíječů ve smyslu možnosti regulovat rychlosti válců nezávisle na sobě [5].

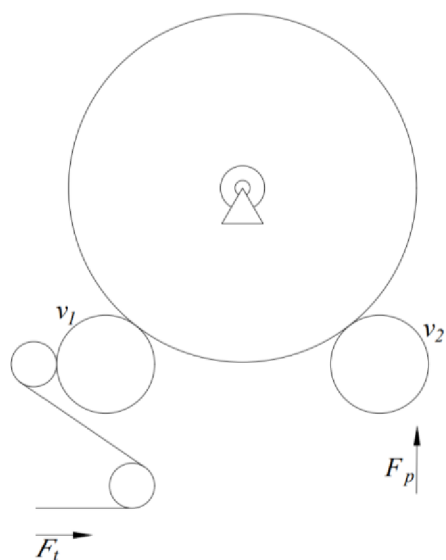


Obr. 1: Kontaktní navíječ bez přítlaku



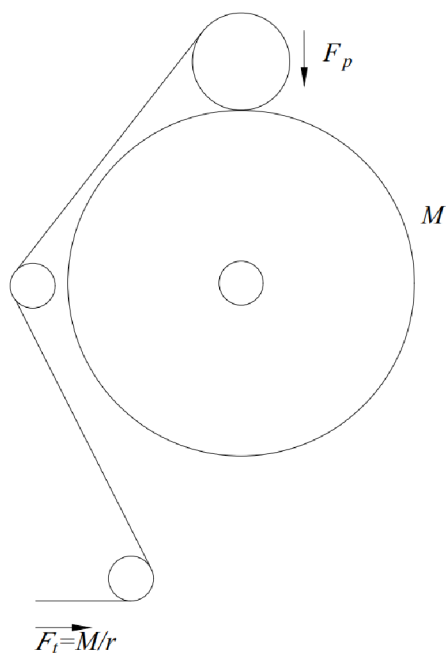
Obr. 2: Kontaktní navíječ s přítlakem

Stojanové – u stojanových navíječů je zboží vyl také poháněn hladícím a vodícím válcem, ale má pouze jeden stupeň volnosti. Zbožový vyl je upevněn rotačně v rámu, a tudíž je umožněna pouze jeho rotace kolem vlastní osy. Toto uložení odstraňuje problémy spojené s vlastní vahou velkonábalu. Opět se zde vyskytují modifikace s možností odděleného ovládní rychlostí hladícího a vodícího válce [5].



Obr. 3: Stojanový navíječ s nezávislým pohonem hladícího a vodícího válce

Středové – u středových navíječů se nevyskytuje vodící a hladící válec. Pohon zboží vylu je vyvozován krutícím momentem. Středové navíjecí stroje se také vyrábí s přítlačným válcem, který plní stejnou funkci jako u předešlých dvou typů.



Obr. 4: Středový navíječ s přítlačným válcem

1.3 Defekty ve velkonábalech

Ve velkonábalech může vzniknout několik druhů defektů v závislosti na specifických napěťových podmínkách. Jejich minimalizace je klíčová pro tvorbu kvalitního produktu bez poškození a vad. Během výroby je proto snaha minimalizovat jejich vznik pomocí regulace navíjecí síly. Defekty nemusí vznikat pouze při nábalu, ale také při převíjení, nevhodném skladování, nebo špatné manipulaci.

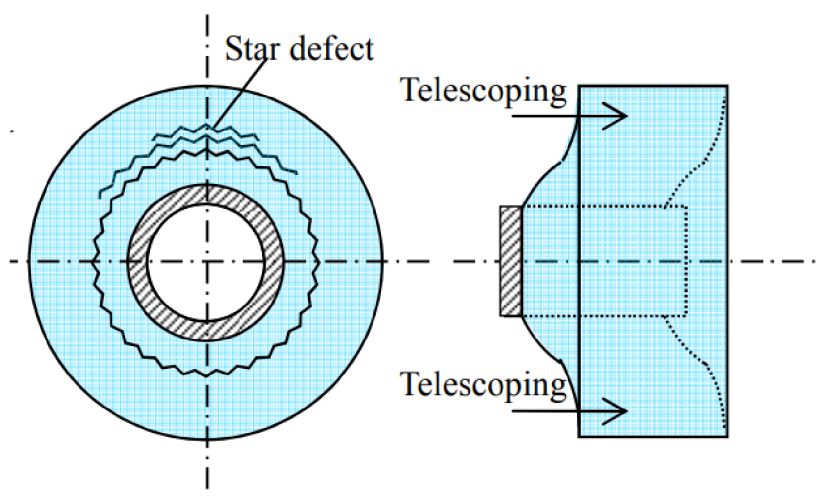
Hvězdičkování (starring, star defect) – toto poškození vzniká, když tečné napětí klesne do záporných hodnot. Může vzniknout vlivem nerovnoměrně rozloženého a nadměrného radiálního napětí vznikající vysokou navíjecí silou, nebo přílišným tlakem přítlačného válce. Hvězdičkový defekt vzniká ve chvíli, kdy vnější vrstvy příliš tlačí na vnitřní, napětí poté způsobí ohyb vrstev a tím charakteristické zvlnění v obvodovém směru. Svým způsobem se jedná o vzpěr, a proto je nutné, aby tečné napětí v celém nábalu bylo tahové, aby nedocházelo ke ztrátě stability [7].

Skluz (slippage) – skluz vzniká naopak při nízkém radiálním napětí. Vlivem nízkého napětí nedochází k potřebnému tření mezi vrstvami a tím může dojít k posunu vrstev po sobě. Skluz je nerovnoměrný a někdy je v odborné literatuře označován jako *J-line*, dle tvaru křivky, která se vytvoří během navíjení [14]. Jedná se o jednoduchou metodu, jak vizualizovat skluzy, kdy je na nábal nakreslena rovná přímka, která se během tkaní postupně deformuje do křivky ve tvaru *J* viz obr.5.

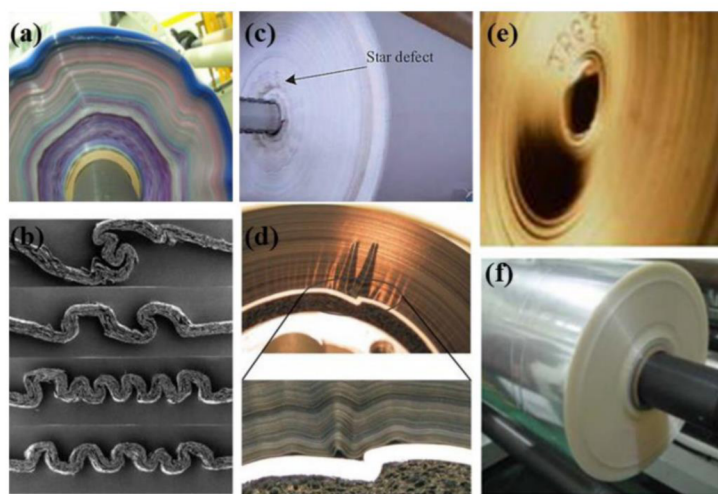


Obr. 5: Detail čela tkaniny s naznačenou *J-line*

Vklinění (telescoping) – tento defekt také vzniká při nedostatečném radiálním napětí a tím dochází k nedostatečné adhezi mezivrstev což zvyšuje pravděpodobnost relativního posuvu vrstev a nabalovacího válce. Tento defekt se vyskytuje u hladkých materiálů, například u tenkých plechů dále může vznikat u návinů s velkým průměrem. Defekt může vznikat i špatnou technologií navinování při velkých odchylkách rovnoběžnosti válců.



Obr. 6: Schématické znázornění defektů [7]



Obr. 7: Fotografie některých defektů [6]

1.4 Přehled modelů

Výzkum v oblasti navíjení materiálu započal koncem 50. let minulého století. Většina současných ale i historicky starších modelů vychází z diferenciální rovnice (4). Shodují se také v podobných předpokladech: zjednodušení skutečné, spirálové, geometrie na soustavu n vrstvených prstenců, nahrazení vrstev spojitým kontinuem a předpoklad rovnoměrného rozložení navinovací síly po celé délce návínu. Jsou použity i stejné okrajové podmínky: $\sigma_r(R) = 0$ a $\Delta R_0 = 0$.

Odlíšnosti lze nalézt ve výpočetní náročnosti, přesnosti nebo v matematickém přístupu jakým je řešena rovnice (4) – numerickou integrací, rozvoj nekonečnými řadami... Odlíšné výpočetní postupy například usnadňují výpočet integračních konstant na základě aktuální nabalené šíři, resp. na aktuálním vnějším poloměru, který v integračních konstantách vystupuje jako parametr. Dále také oblastí svého použití v průmyslu, respektive navíjeným materiálem nebo navíjecími podmínkami, jiné modely jsou použity pro navíjení papíru za vysokých otáček, polymerních filmů ve vlhkém prostředí, nebo textilií. Motivací pro tvorbu modelů je obtížnost a někdy i nemožnost experimentálního měření. Měření bývají častokrát velmi zatížena chybou, nebo u nich dochází k nenávratnému poškození návínu. Další motivací je také porozumění a možnost optimalizace procesu.

Obecně lze modely rozdělit na lineární a nelineární a dle materiálových vlastností na izotropní a ortotropní. Prvotní modely byly lineární a předpokládaly izotropní rozložení materiálových vlastností, což v rovnici (10) znamená, že $E_r = E_t$. Dalším krokem bylo odvození modelu na základě řešení rovnice (10) Altmannem a Yagodou v [8], [9], [14] za předpokladu $E_r \neq E_t$, avšak stále za předpokladu, že moduly pružnosti jsou ve všech směrech konstantní. První nelinearitou vloženou do modelu byl předpoklad nekonstantního radiálního modulu pružnosti $E_r = f(\sigma_r)$ empirickými vztahy viz práce od J.D. Pfeiffera [13]:

$$-\sigma_r = P = K_1 \cdot (e^{K_2 \cdot \varepsilon_r} - 1) \quad (1)$$

$$E_r = \frac{dP}{d\varepsilon_r} = K_1 \cdot K_2 \cdot e^{K_2 \cdot \varepsilon_r} \quad (2)$$

Kde K_1 a K_2 jsou empiricky stanovené konstanty. Další empirický vztah byl zaveden Hakiem [14] a to v polynomickém tvaru:

$$E_r = C_1 + C_2 \cdot \sigma_r + C_3 \cdot \sigma_r^2 \quad (3)$$

Kde C_1 , C_2 a C_3 jsou empiricky stanovené konstanty.

V práci [12] Ing. J. Žák, PhD. ukazuje, že nelineární modely dokáží lépe popisovat chování nábalu především okolo jádra, ale většina zbylé oblasti nábalu lze popisovat s dostatečnou přesností i pouze s lineárními modely.

Další autoři přidali metodu konečných diferencí do nelineárních ortotropních modelů, nejzásadnějším, ze kterého vychází většina současných modelů, byl Hakiel v práci [10], [14].

Dále autoři přidávali další členy do rovnice (4) čímž zohledňovali vlivy teploty, vlhkosti, odstředivých sil nebo síly od přitlačného válce. Například v práci [11] je do rovnice (4) přidán člen objemových odstředivých sil, pravá strana poté nabývá fyzikálního významu.

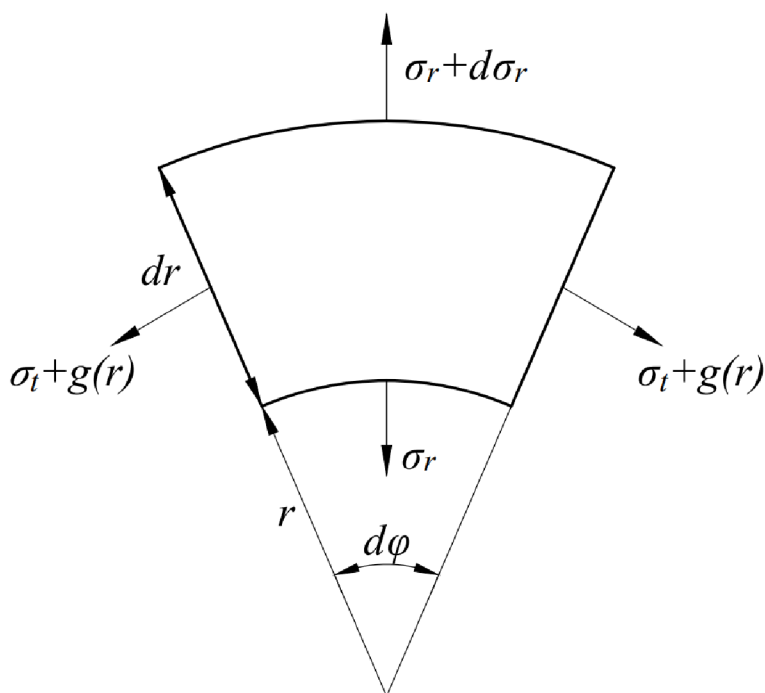
Podrobnější přehledy modelů lze nalézt v [14], [6].

2 Teorie

Tato kapitola je věnována odvození a uvedení vztahů a postupů použitých v simulacích. Nejprve jsou uvedeny základní rovnice pro popis napěťového stavu v rotačním kontinuu, podle kterého jsou následně odvozeny vztahy popisující konkrétní zatížení modelu. Dále je uveden materiálový model a stručný popis metody konečných prvků.

2.1 Odvození vztahů pro výpočet napětí v tlustostěnné nádobě

Nábyaly jsou svou geometrií rotační válce, a proto lze napětí v nich vznikající popisovat rovnicemi pro tlustostěnné nádoby, jedná se o rovnice rovnováhy ve válcových souřadnicích. V nádobách zatíženými vnějším, resp. vnitřním přetlakem vzniká u otevřených rovinná napjatost ($\sigma_a = 0$) a u uzavřených prostorová napjatost, častokrát je osově napětí oproti zbylým dvou velmi malé, a tak se zanedbává.



Obr. 8: Rovnováha rotačního elementu

Základní rovnice rovnováhy je odvozena dle elementu na obr. 8:

$$\frac{d}{dr}(r \cdot \sigma_r) - \sigma_t = g(r) \quad (4)$$

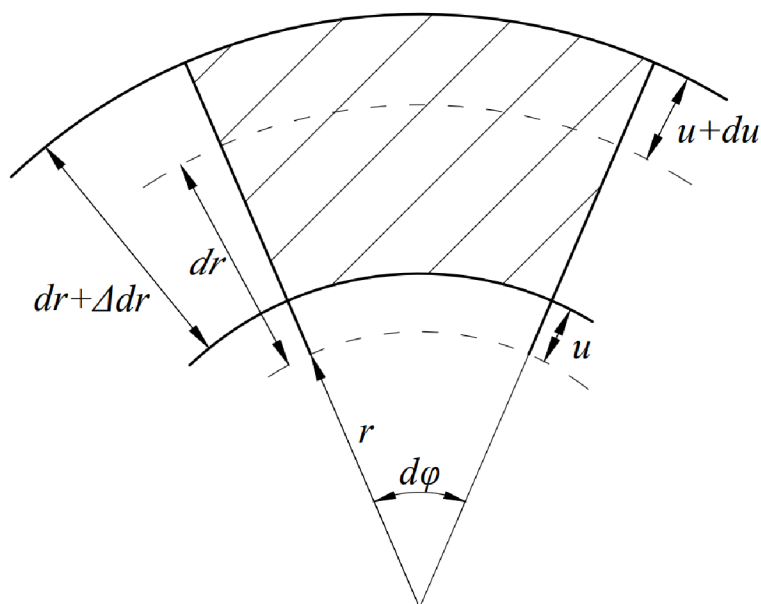
Kde σ_r je radiální napětí, σ_t je tečné napětí, r je poloměr (proměnná) a $g(r)$ značí obecnou funkci o rozměru [MPa] [15].

Pomocí zobecněného Hookova zákona pro ortotropní materiál lze rovnici (4) převést na hledání neznámých deformací. Hookův zákon pro ortotropní materiál:

$$\sigma_r = \frac{E_r}{1 - \nu_{rt} \cdot \nu_{tr}} \cdot (\varepsilon_r + \nu_{tr} \cdot \varepsilon_t) \quad (5)$$

$$\sigma_t = \frac{E_t}{1 - \nu_{rt} \cdot \nu_{tr}} \cdot (\varepsilon_t + \nu_{rt} \cdot \varepsilon_r) \quad (6)$$

Kde E_r je modul pružnosti v radiálním směru, E_t je modul pružnosti v tečném směru, ν_{rt} a ν_{tr} je Poissonovo číslo v radiálním, resp. tečném smyslu, ε_r je poměrná deformace v radiálním směru a ε_t je poměrná deformace v tečném směru. Při dosazení konstitutivních vztahů (5) a (6) do rovnice (4) vznikne jednou staticky neurčitá rovnice, aby byla úloha řešitelná, je nutné přidat další vztahy.



Obr. 9: Deformace elementu

Dle obr. 9 lze odvodit geometrické vztahy mezi posuvy a deformacemi, pro radiální deformaci:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{[dr + (u + du) - u] - dr}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (7)$$

kde u značí posuv. Pro deformaci v tečném směru:

$$\varepsilon_t = \frac{u \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{u}{r} \quad (8)$$

Podmínka ortotropie plynoucí ze symetrie matice materiálových konstant:

$$\frac{E_r}{E_t} = \frac{\nu_{rt}}{\nu_{tr}} \quad (9)$$

Dosažením geometrických rovnic, konstitutivních vztahů a podmínky ortotropie do rovnice rovnováhy dostáváme diferenciální rovnici druhého řádu se speciální pravou stranou a již pouze jednou neznámou, posuvem u :

$$r \cdot \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} - \frac{E_t}{E_r} \cdot \frac{u}{r} = g(r) \cdot \frac{1 - \nu_{rt} \cdot \nu_{tr}}{E_r} \quad (10)$$

Obecné řešení rovnice (10) je součet homogenního a partikulárního řešení:

$$u = u_H + u_P \quad (11)$$

Homogenní řešení rovnice (10) nalezneme pro $g(r) = 0$ ve tvaru $u = r^K$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - K^2 \cdot \frac{u}{r^2} = 0 \quad (12)$$

$$u_H = C_1 \cdot r^K + C_2 \cdot r^{-K} \quad (13)$$

Kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty a $K^2 = E_t / E_r$. Integrační konstanty lze dopočítat zavedením dvou okrajových podmínek: nedeformovatelnost navinovacího válce – $\Delta R_0 = 0$ a za předpokladu nulového vnějšího tlaku – $\sigma_r(R) = 0$. Partikulární řešení se provádí na základě konkrétního přepisu funkce $g(r)$.

Rovnici (12) lze vyjádřit alternativně ve formě neznámých napětí, tento předpis je v odborných člancích zabývajících se problematikou navinovacího procesu častější [14]:

$$r^2 \cdot \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \cdot r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \left(1 - \frac{E_t}{E_r}\right) \cdot \sigma_r = 0 \quad (14)$$

Diferenciální rovnici (10) lze řešit analyticky, nebo numericky například metodou vážených reziduí konkrétně Galerkinovou, metodou nejmenších čtverců nebo kolokační metodou. Mnoho autorů přistupovalo k řešení (10) různými způsoby viz kapitola 1.4.

Při odvozování vztahů pro nádoby jsou E_t a E_r materiálové konstanty. Ve chvíli, kdy je velkonábal modelován jako tlustostěnná nádoba je důležité mít na paměti, že E_r je modul struktury nábalu a E_t je modul pružnosti nabalovaného materiálu, který lze snadno stanovit, nebo modelovat na základě tahové zkoušky.

2.2 Analytické řešení se změnou teploty

Analytické řešení bylo provedeno pro částečnou kontrolu výsledků simulací. Analytickým řešením lze popsat chování v teoreticky nekonečně dlouhém nábalu, což je ovšem prakticky vyloučené, anebo v dostatečně velké vzdálenosti od krajů, kde vzniká značně komplikovanější napěťový stav, než který předpokládá analytické řešení. Řešení bylo provedeno nejprve obecně pro $\Delta T = \Delta T(r)$ a poté bylo nalezeno řešení pro $\Delta T(r) = konst.$ které už popisuje konkrétní řešení provedené v simulacích. Důvod zatížení MKP modelu konstantní změnou teploty je uvedeno v kapitole 3.1.

Rovnice rovnováhy rotačního elementu dle rovnice (4) pro $g(r) = 0$:

$$\sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_t = 0 \quad (15)$$

Rozšířený Hookův zákon pro ortotropní materiál se změnou teploty:

$$\sigma_r = \frac{E_r}{1 - \nu_{rt} \cdot \nu_{tr}} \cdot [(\varepsilon_r + \nu_{tr} \cdot \varepsilon_t) - \Delta T \cdot (\alpha_r + \nu_{tr} \cdot \alpha_t)] \quad (16)$$

$$\sigma_t = \frac{E_t}{1 - \nu_{rt} \cdot \nu_{tr}} \cdot [(\varepsilon_t + \nu_{rt} \cdot \varepsilon_r) - \Delta T \cdot (\alpha_t + \nu_{rt} \cdot \alpha_r)] \quad (17)$$

Zavedení pomocných konstant A a B :

$$A = (\alpha_r + \nu_{tr} \cdot \alpha_t) \quad (18)$$

$$B = (\alpha_t + \nu_{rt} \cdot \alpha_r) \quad (19)$$

Dosazení rovnic (16) a (17) do (15) a zavedení deformačních podmínek (7) a (8):

$$E_r \cdot \left[u' + \nu_{tr} \frac{u}{r} - \Delta T \cdot A \right] + E_r \cdot r \cdot \left[u'' + \nu_{tr} \left(\frac{u}{r} \right)' - \Delta T' \cdot A \right] - E_t \cdot \left[\frac{u}{r} + \nu_{rt} \cdot u' - \Delta T \cdot B \right] = 0 \quad (20)$$

Po úpravě:

$$r \cdot u'' + u' - \frac{E_t}{E_r} \cdot \frac{u}{r} = A \cdot (r \cdot \Delta T' + \Delta T) - \frac{E_t}{E_r} \cdot \Delta T \cdot B \quad (21)$$

Což lze zapsat i ve staženém tvaru:

$$\frac{d}{dr} \cdot \left(r \cdot \frac{du}{dr} \right) - \frac{E_t}{E_r} \cdot \frac{u}{r} = A \cdot \frac{d}{dr} \cdot (r \cdot \Delta T) - \frac{E_t}{E_r} \cdot \Delta T \cdot B \quad (22)$$

Pak tedy řešení pro $\Delta T(r) = konst.$:

$$\frac{d}{dr} \cdot \left(r \cdot \frac{du}{dr} \right) - \frac{E_t}{E_r} \cdot \frac{u}{r} = \Delta T \cdot \left(A - \frac{E_t}{E_r} \cdot B \right) \quad (23)$$

Porovnáním pravých stran rovnic (23) a (10) lze najít předpis funkce $g(r)$ pro případ $\Delta T(r) = konst$:

$$g(r) = \frac{E_r}{1 - \nu_{tr} \cdot \nu_{rt}} \cdot \Delta T \cdot \left(A - \frac{E_t}{E_r} \cdot B \right) \quad (24)$$

Řešení diferenciální rovnice (23) nabývá tvaru:

$$u = C_1 \cdot r^K + C_2 \cdot r^{-K} - C_3 \cdot r \quad (25)$$

Kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které lze stanovit pomocí dvou okrajových podmínek a C_3 je pomocná konstanta:

$$C_3 = \Delta T \cdot \frac{A - \frac{E_t}{E_r} \cdot B}{K^2 - 1} \quad (26)$$

Okrajové podmínky:

$$\sigma_r(R_v) = 0 \quad (27)$$

$$\Delta R_0 = R_0 \cdot \varepsilon_t(R_0) = 0 \quad (28)$$

Vyjádření deformací:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = C_1 \cdot K \cdot r^{K-1} - C_2 \cdot K \cdot r^{-K-1} - C_3 \quad (29)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = C_1 \cdot r^{K-1} + C_2 \cdot r^{-K-1} - C_3 \quad (30)$$

Dosazením rovnic (29) a (30) do (16) a (17) lze vyjádřit radiální a tečné napětí:

$$\sigma_r = \frac{E_r}{1 - \nu_{rt} \cdot \nu_{tr}} [C_1 \cdot r^{K-1} \cdot (K + \nu_{tr}) + C_2 \cdot r^{-K-1} \cdot (\nu_{tr} - K) - C_3 \cdot (1 + \nu_{tr}) - \Delta T \cdot A] \quad (31)$$

$$\sigma_t = \frac{E_t}{1 - \nu_{rt} \cdot \nu_{tr}} [C_1 \cdot r^{K-1} \cdot (1 + \nu_{rt} \cdot K) + C_2 \cdot r^{-K-1} \cdot (1 - \nu_{rt} \cdot K) - C_3 \cdot (1 + \nu_{rt}) - \Delta T \cdot B] \quad (32)$$

2.3 Ortotropní materiál

Obecně materiály lze rozdělit do dvou hlavních skupin dle směrovosti materiálových vlastností, a to na materiály izotropní a anizotropní. Izotropní materiály mají mechanické vlastnosti nezávislé na směru, tj. všechny jejich materiálové vlastnosti jsou stejné ve všech směrech. Naproti tomu jsou materiály anizotropní, které se vyznačují směrovostí, podle které je lze dále dělit.

Ortotropní materiál je podskupinou materiálů anizotropních a lze u nich najít 3 hlavní směry materiálových vlastností. Matice materiálových konstant \mathbf{C} má v tomto případě 9 nezávislých parametrů:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_r} & -\nu_{rt} & -\nu_{ra} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_r}{E_t} & \frac{1}{E_t} & \frac{-\nu_{ta}}{E_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{tr}}{E_r} & \frac{1}{E_t} & \frac{-\nu_{ta}}{E_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{ar}}{E_r} & \frac{-\nu_{at}}{E_t} & \frac{1}{E_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{tr}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ar}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{at}} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Matice \mathbf{C} musí být pozitivně definitní. Matice \mathbf{C} je symetrická, pak tedy dle Sylvestrova kritéria musí mít všechny subdeterminanty kladné, což lze po zkrácení zapsat nerovnicí:

$$\nu_{rt} \cdot \nu_{tr} + \nu_{ra} \cdot \nu_{ar} + \nu_{ta} \cdot \nu_{at} + \nu_{rt} \cdot \nu_{ta} \cdot \nu_{ar} + \nu_{ra} \cdot \nu_{tr} \cdot \nu_{at} < 1 \quad (34)$$

2.4 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je numerická metoda na řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic, kterou lze řešit široké spektrum inženýrských problémů z oblasti mechaniky tekutin, vedení tepla, nebo z oblasti pružnosti pevnosti. MKP historicky vychází z Galerkinovy metody, ale v současné době se od sebe liší například oblastí definice báze funkcí. Velkým dílem k rozvoji přispěl i český matematik Miloš Zlámal, který se věnoval například konvergenci a jednoznačnosti řešení [16].

Metoda je založena na rozkladu spojitě domény na diskrétní podoblasti zvané elementy nebo prvky čímž vznikne takzvaná síť. Volba tvaru, velikosti a hustoty elementů je závislá na konkrétním zadání. Každý z prvků je popsán matematickým modelem a aproximuje chování materiálu v určité oblasti. Metodou konečných prvků lze řešit mechaniku těles a konstrukcí s komplikovanou prostorovou geometrií, které jsou analytickými metodami neřešitelné, což je nesporná výhoda této metody.

MKP využívá k řešení strukturálních úloh především deformační přístup, kdy primární hledanou neznámou jsou posuvy, ze kterých jsou následně dopočítávány složky napětí a přetvoření. V každém bodě tělesa je hledáno 15 neznámých – 6 složek napětí, 6 složek přetvoření a 3 složky posuvů. Prvně je nalezen vektor posunutí uzlových bodů, na jehož základě lze nalézt maticí báze funkcí průběh posunutí. Dále maticí derivací báze funkcí lze nalézt průběh přetvoření a pomocí konstitutivních určit napětí [16] [17].

Při tvorbě modelu je důležité zvážit několik aspektů, kdy prvně je důležité zhodnotit fyzikální jev jako celek a zvážit, zda zvolit lineární nebo nelineární model. Lineární model splňuje to, že výsledky pro různá zatížení splňují vlastnosti lineárního prostou, z tohoto vyplývá především platnost superpozice: $f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2) = a \cdot f(x_1) + b \cdot f(x_2)$. Dále zvolit dimenzi modelu, čímž lze úlohy zjednodušit a zrychlit. Může se jednat o 3D, 2D nebo 1D geometrii modelu, kdy může docházet k zanedbání některých vlivů. Jako poslední je využití symetrie a volba vhodného globálního souřadnicového systému, která může zjednodušit zadání zatížení a okrajových podmínek.

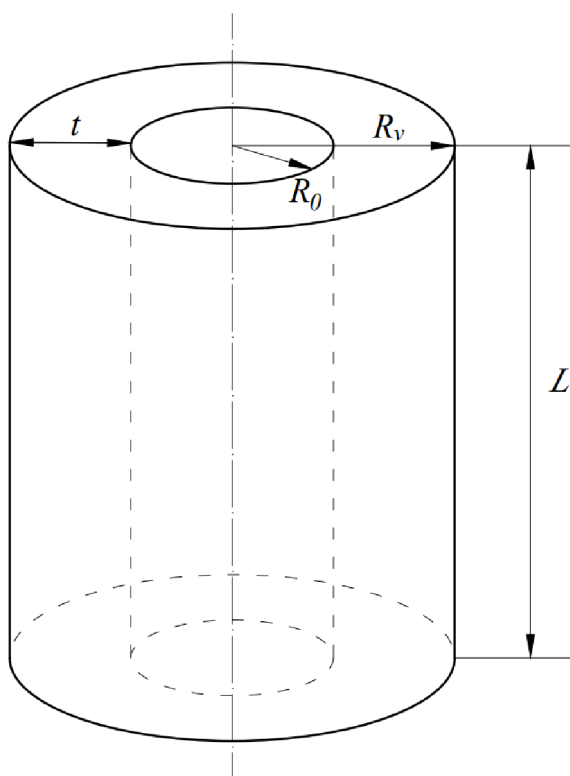
Obecně metoda konečných prvků vyžaduje vysokou míru matematizace a klade vysoké nároky na kvalifikovanost výpočtáře. Metoda je náročná i z výpočetního hlediska, kdy jsou řešeny velké soustavy algebraických rovnic, i přesto je tato metoda neodmyslitelnou součástí inženýrské praxe.

3 Tvorba modelu a výsledky

Tato kapitola je věnována tvorbě lineárního MKP modelu na základě experimentů provedených Ing. J. Žákem, PhD. ve firmě VÚTS a.s. na stoupacích nabalovačkách, kdy byla navíjena skelná tkanina. Následně jsou uvedeny výsledky simulací ze softwaru CREO simulate s důrazem na vliv poměru radiálního a tečného modulu na výsledný napěťový stav. MKP výstupy jsou v kapitole srovnány i s analytickým řešením.

3.1 Zavedení modelu

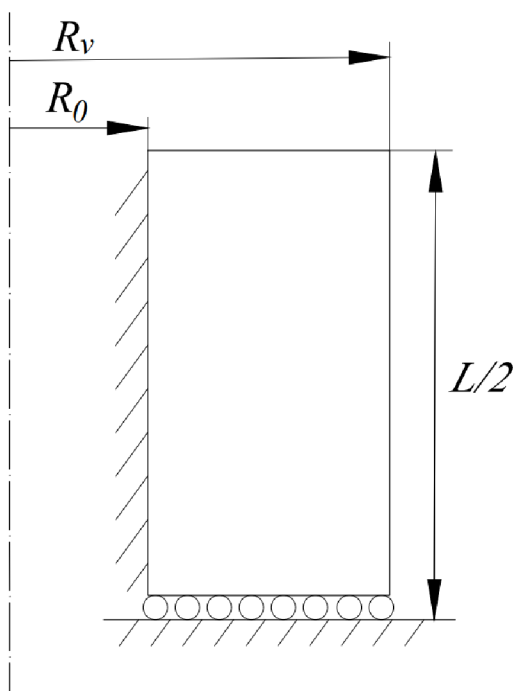
3D model byl namodelován dle geometrie návinu provedený ve VÚTS a.s. Návin byl navíjen na vnitřní drsný vál o šíři $l = 2200 \text{ mm}$ a poloměru $R_0 = 80 \text{ mm}$ o finální tloušťce $t = 280 \text{ mm}$, což odpovídá vnějšímu poloměru $R_v = 360 \text{ mm}$. Nutno podotknout, že nábalý se navíjejí i do větších poloměrů. Všechny rozměry uvedeny na obr. 10.



Obr. 10: 3D geometrie modelu

Vzhledem k válcové symetrii geometrie, vazeb a zatížení byla simulace provedena jako axisymetrická vzhledem k ose válce. Na vnitřním poloměru R_0 byly předepsány nulové posuvy za předpokladu neformovatelnosti vnitřního válce a ideálního přilnutí tkaniny bez smýkání na drsný válec. Tomuto předpokladu odpovídají i okrajové podmínky pro řešení rovnice (23).

V modelu byla také využita rovinná symetrie nábalu, a tudíž byla modelována pouze polovina modelu. Na obr. 11 je schematicky uveden 2D profil tlustostěnného válce s příslušnými vazbami.



Obr. 11: 2D profil modelu

Skutečné zatížení nábalu tečným napětím $\sigma_t(R_v)$ resp. navinovací silou na vnějším poloměru R_v bylo z důvodu obtížnosti zavedení do modelu nahrazeno deformacemi vyvolanými změnou teploty. Změna teploty indukují v modelu deformace, které by bez vazeb vyvolaly beznapěťový stav, deformace jsou, však zachyceny ve vazbách čímž následně vzniká zatížení modelu. Skelná tkanina byla navijena konstantní silou na jednotku šířky nábalu $T = 500 \text{ N/m}$, pak tedy přepočítání na tečné napětí σ_t za předpokladu známé tloušťky tkaniny $s = 0,13 \text{ mm}$:

$$\sigma_t(R_v) = \frac{T}{1000 \cdot s} = 3,8 \text{ MPa} \quad (35)$$

Pro finální přepočítání na tepelné zatížení bylo nutné stanovit tečný modul E_t . Tečný modul byl experimentálně změřen jako změna hodnoty napětí v závislosti na změně délky. Finální tečný modul byl následně stanoven na hodnotu $E_t = 1100 \text{ MPa}$. Při známém E_t bylo možné vyjádřit ekvivalentní tepelné zatížení:

$$\alpha_t \cdot \Delta T = \frac{\sigma_t(R_v)}{E_t} = 0,00345 \quad (36)$$

Model byl simulován jako tlustostěnný válec s ortotropií materiálových vlastností se třemi hlavními směry, a to ve smyslu tečném, radiálním a axiálním. Do modelu bylo nutné tedy zavést 9 resp. 12 (s uvažováním koeficientů teplotních roztažností) nezávislých materiálových konstant.

Jediný nenulový koeficient délkové roztažnosti byl zaveden α_t dle rovnice (36), jelikož skutečné zatížení návinu je v tečném smyslu, zbylé koeficienty α_r a α_a byly položeny nule.

Za předpokladu stejné osnovní i útkové dostavy a jejich stejného materiálového složení a vazby lze matici \mathbf{C} zjednodušit zavedením stejných materiálových vlastností ve směru tečném a axiálním:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_r} & \frac{-\nu_{rp}}{E_p} & \frac{-\nu_{rp}}{E_p} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{pr}}{E_r} & \frac{1}{E_p} & \frac{-\nu_p}{E_p} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{pr}}{E_r} & \frac{-\nu_p}{E_p} & \frac{1}{E_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{pr}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{pr}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_p} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Matice pro ortotropní materiál přejde do tvaru matice podobné matici pro transverzálně izotropní materiál ve válcových souřadnicích, avšak o ryze transverzálně izotropní matici se nejedná, jelikož v té se vyskytuje 5 nezávislých členů. V matici \mathbf{C} je nutné definovat 6 nezávislých členů, nevyskytuje se zde vztah svazující smykový modul, Poissonovo číslo a modul pružnosti, pak tedy smykový modul G_p vystupuje jako nezávislá veličina.

Modul pružnosti v radiálním směru E_r byl přepočítáván dle E_t a koeficientu Q dle rovnice (12):

$$Q = \frac{1}{K^2} = \frac{E_r}{E_t} \quad (38)$$

Poissonovy konstanty byly voleny malé vzhledem k povaze chování materiálu při zatěžování. Volba Poissonových konstant musí též splňovat rovnici (34) což po úpravě:

$$v_p^2 + \frac{2}{Q} \cdot v_{pr}^2 \cdot (v_p + 1) < 1 \quad (39)$$

Pak tedy matice C po dosazení konkrétních hodnot:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{0,003}{Q} & -\frac{0,003}{Q} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Q \cdot 1100}{1100} & \frac{1}{1100} & \frac{-0,3}{1100} & 0 & 0 & 0 \\ -0,003 & 1 & -0,3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Q \cdot 1100}{1100} & \frac{1}{1100} & \frac{-0,3}{1100} & 0 & 0 & 0 \\ -0,003 & -0,3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Q \cdot 1100}{1100} & \frac{1}{1100} & \frac{-0,3}{1100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0,01} \end{pmatrix} \quad (40)$$

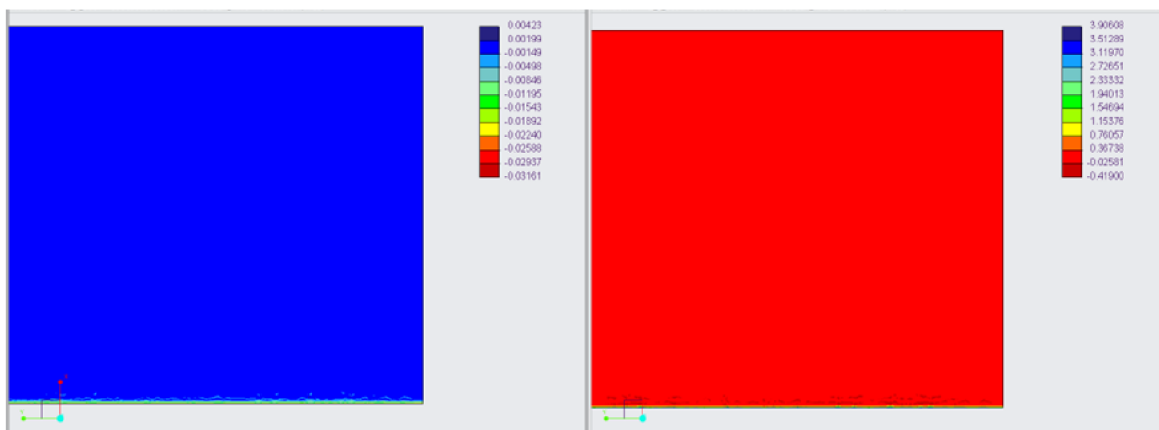
3.2 Výsledky simulací

Simulace byly provedeny na MKP lineárním modelu pomocí softwaru CREO simulate. Omezení výpočtu lineárním modelem je především v oblasti okolo jádra nábalu, kde dochází k odlišným výsledkům v porovnání s nelineárními modely i přesto tak lze popsat napěťový stav ve zbylé oblasti. Simulace byly provedeny pro různé hodnoty koeficientu Q a sledován jeho vliv na napěťový stav nábalu.

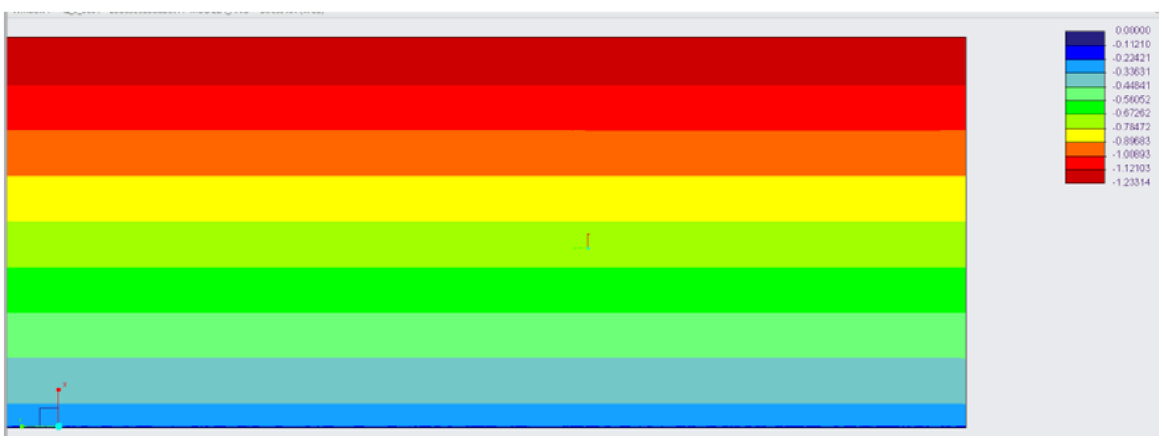
Na následujících kapitolách jsou uvedeny vždy tři obrázky, kdy na prvním jsou graficky zobrazeny radiální a tečná napětí, na druhém průběh posuvů a na třetím průběh axiálních posuvů.

Počátek souřadného systému v obrázcích je umístěn na vnitřním poloměru na kraji nábalu (na obrázcích pravý dolní roh).

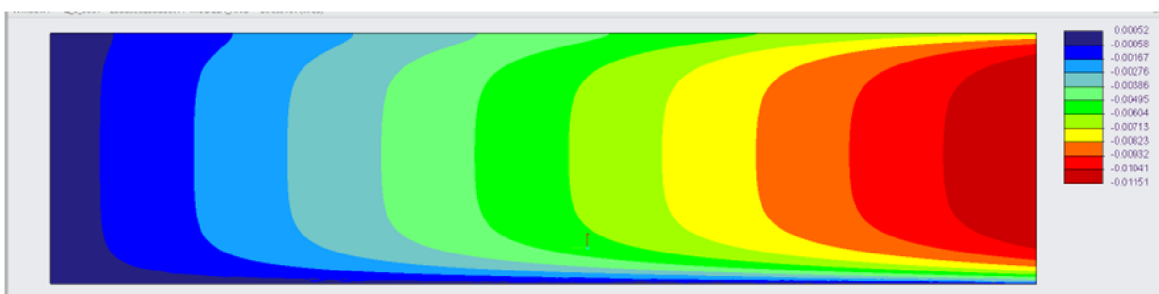
3.2.1 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$



Obr. 12: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$

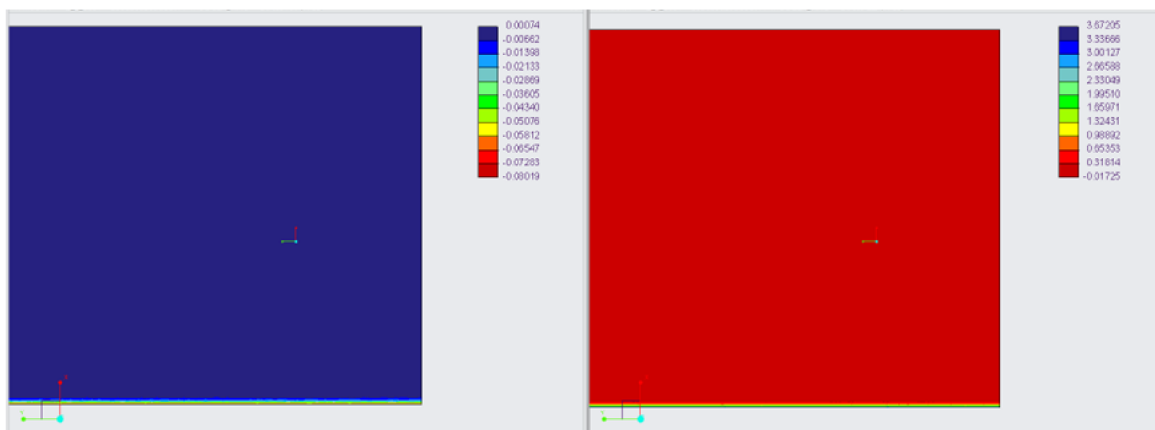


Obr. 13: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$

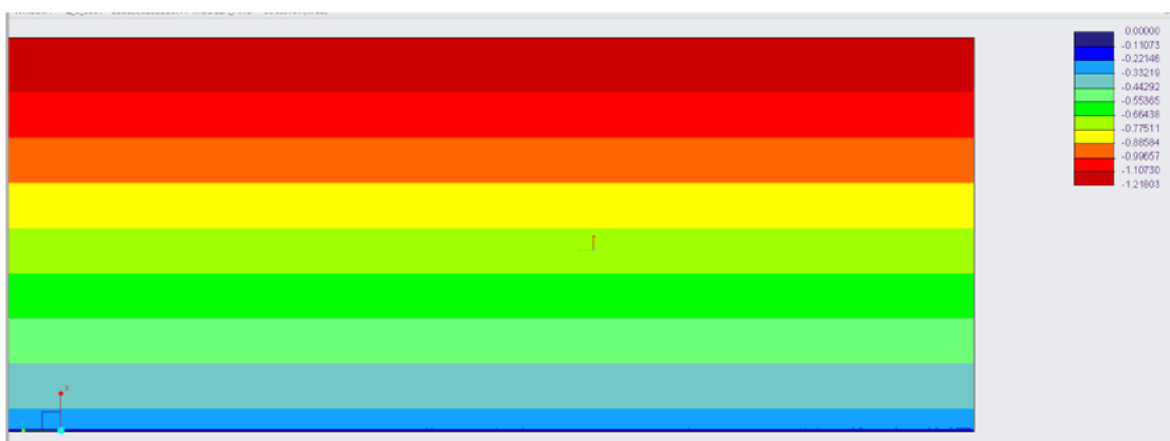


Obr. 14: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$

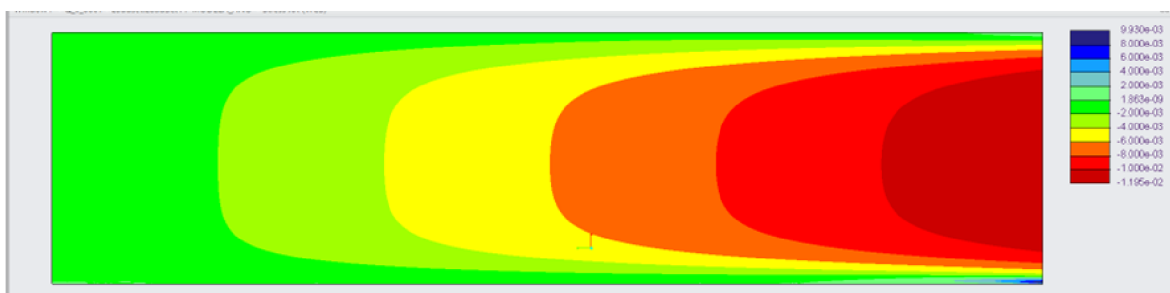
3.2.2 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$



Obr. 15: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$

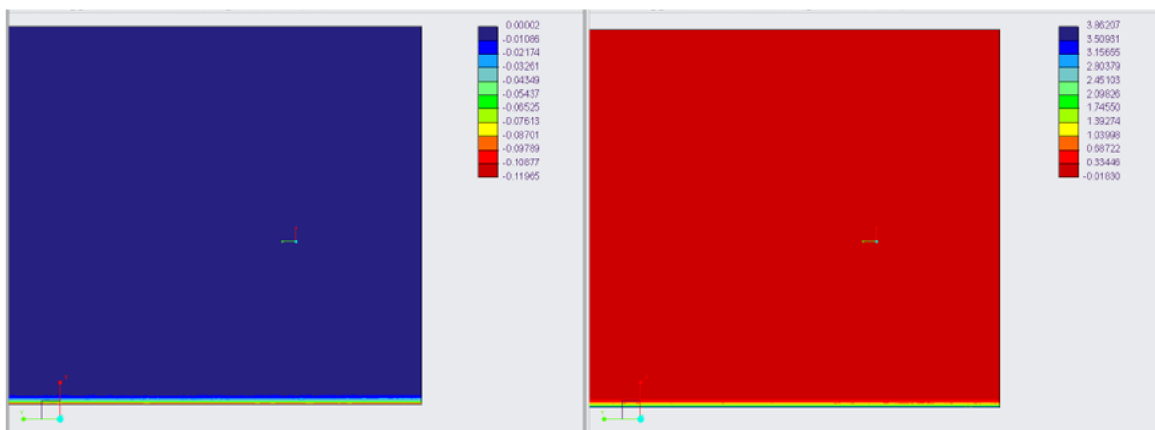


Obr. 16: Průběh AR pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$

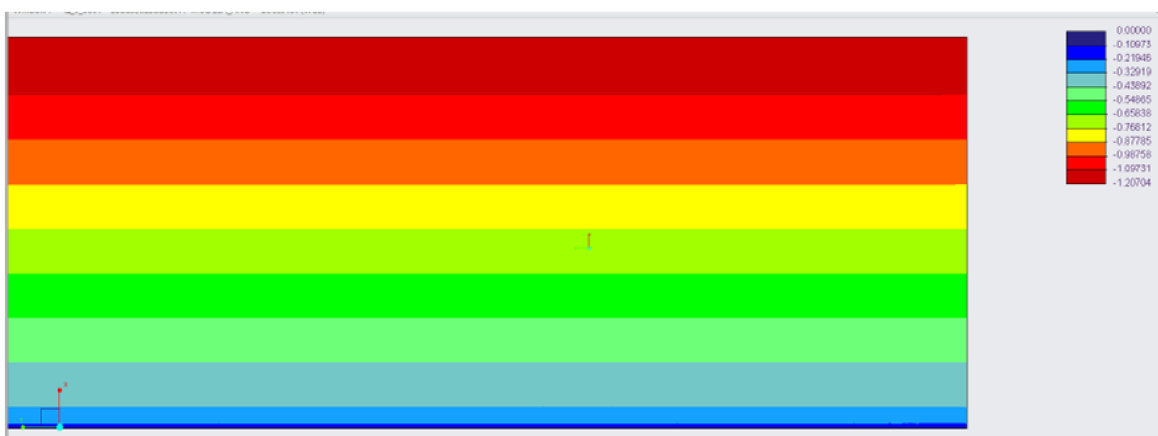


Obr. 17: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$

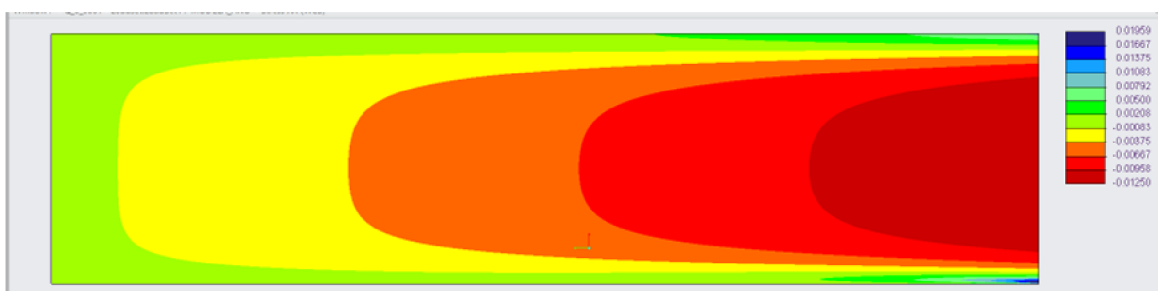
3.2.3 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$



Obr. 18: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$

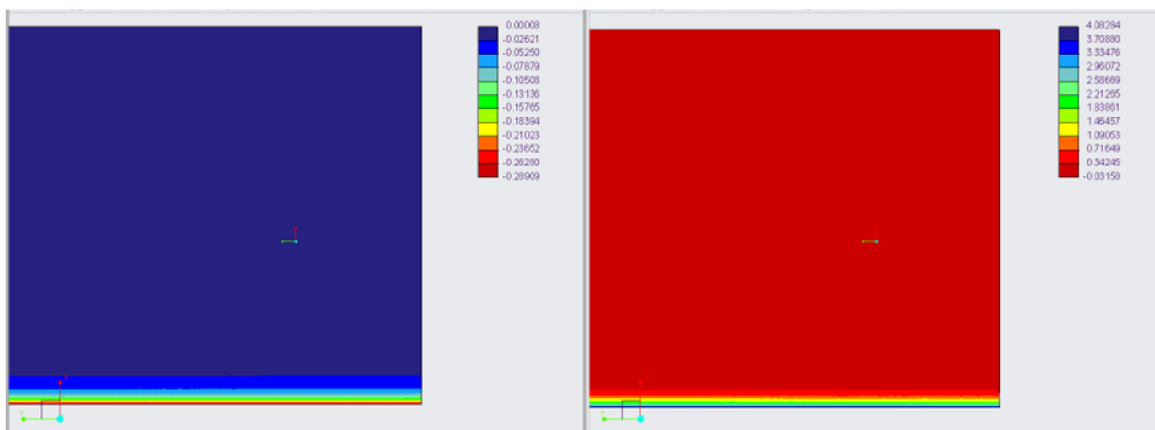


Obr. 19: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$

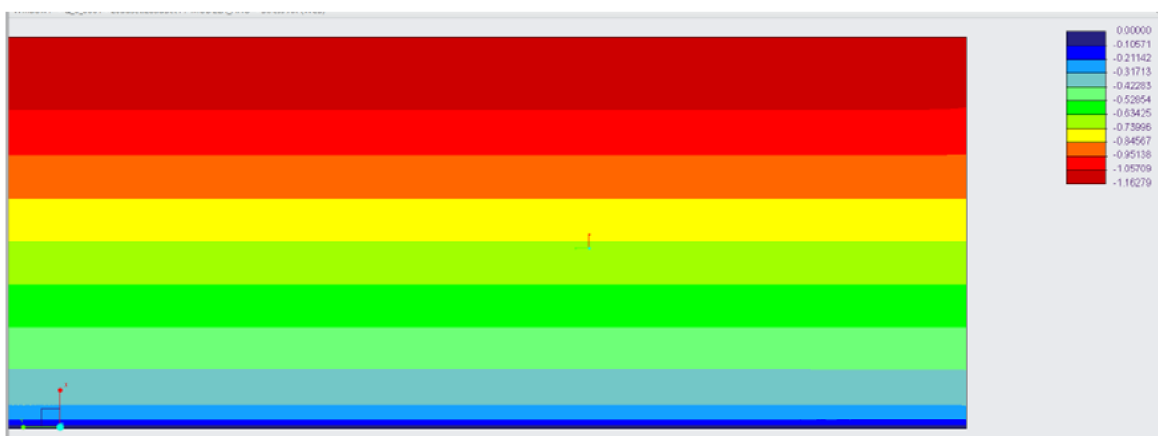


Obr. 20: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$

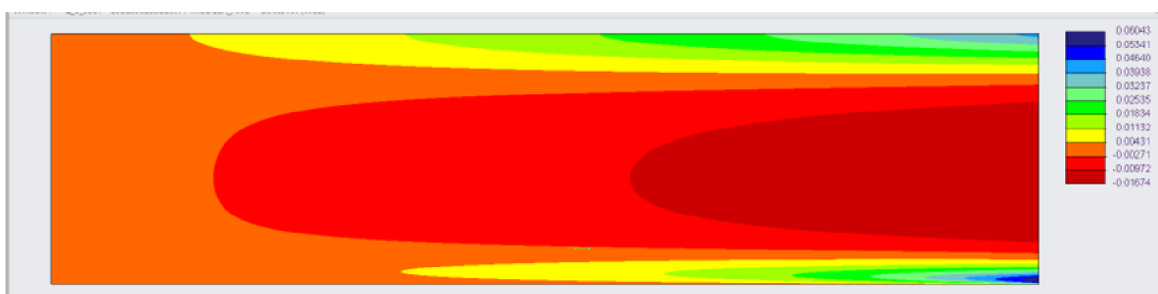
3.2.4 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$



Obr. 21: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$

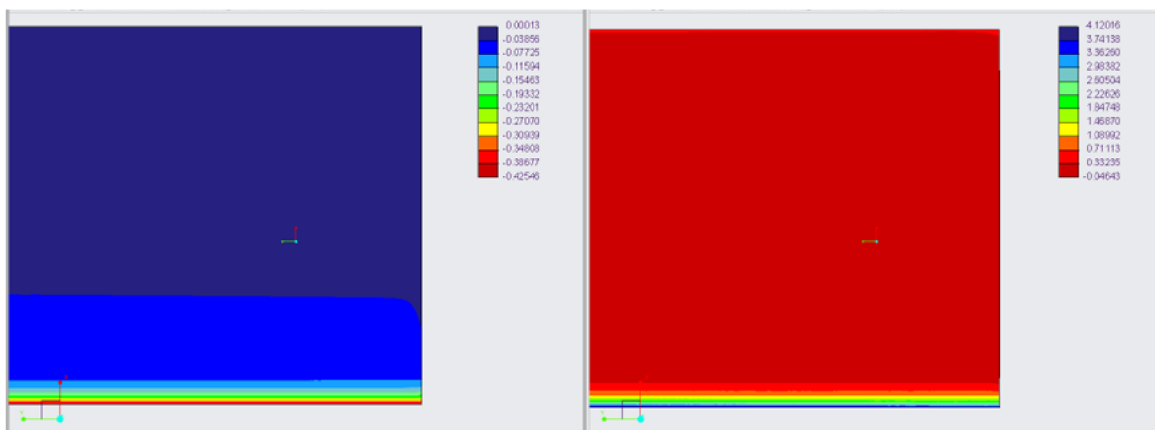


Obr. 22: Průběh AR pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$

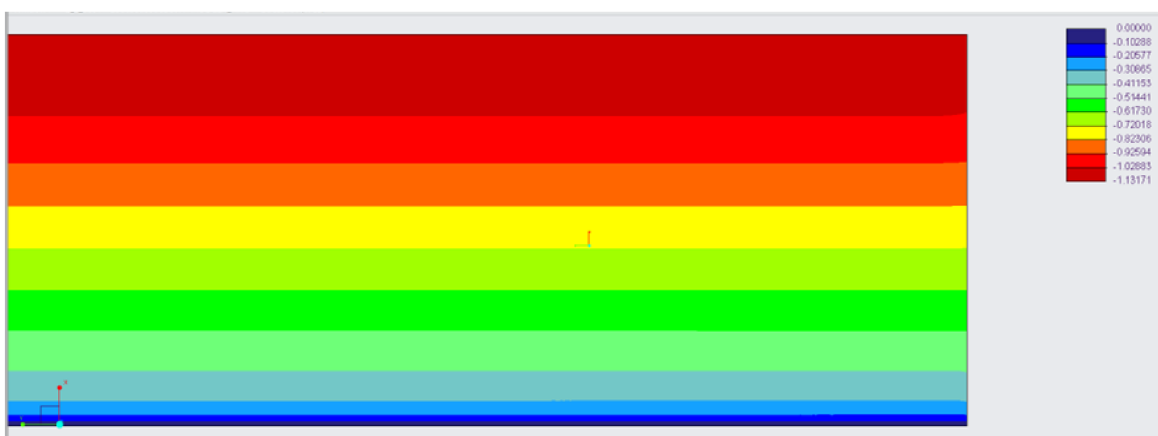


Obr. 23: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$

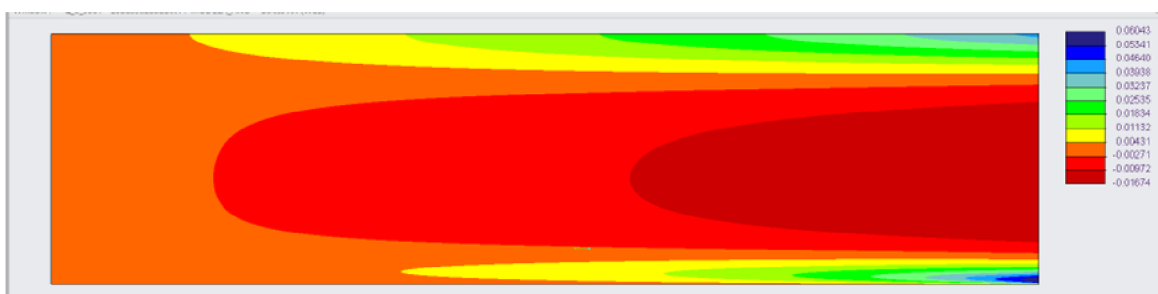
3.2.5 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$



Obr. 24: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$

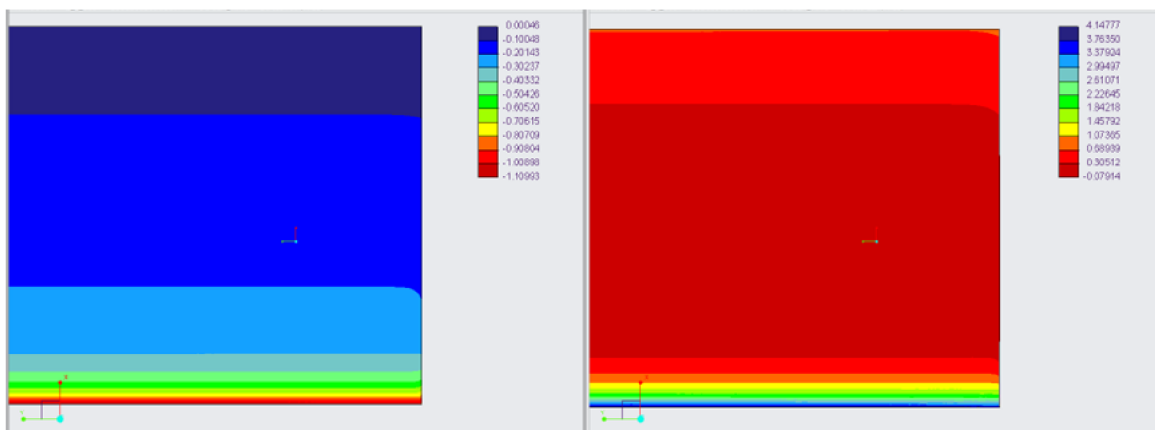


Obr. 25: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$

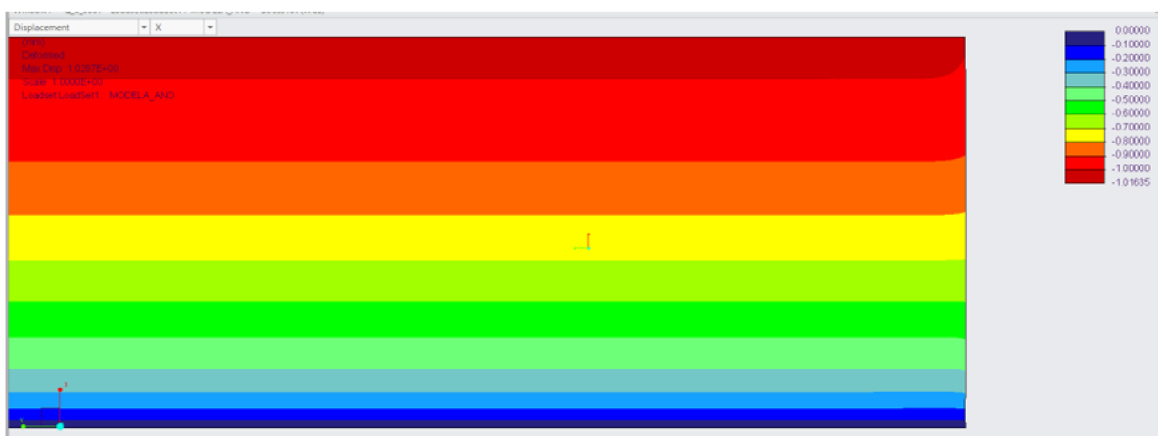


Obr. 26: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$

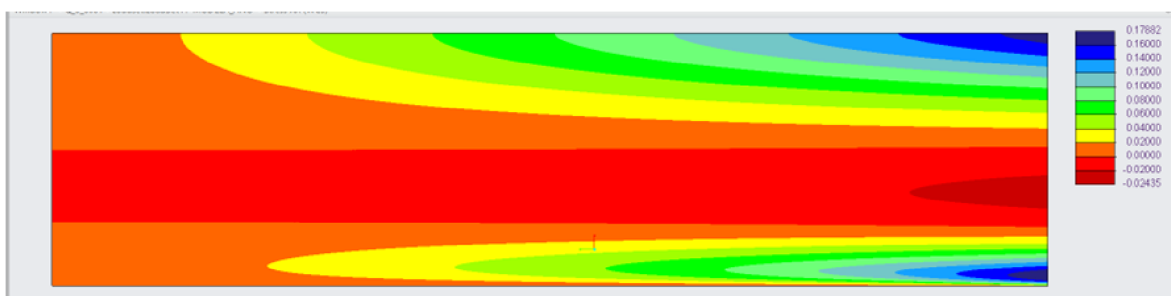
3.2.6 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$



Obr. 27: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$

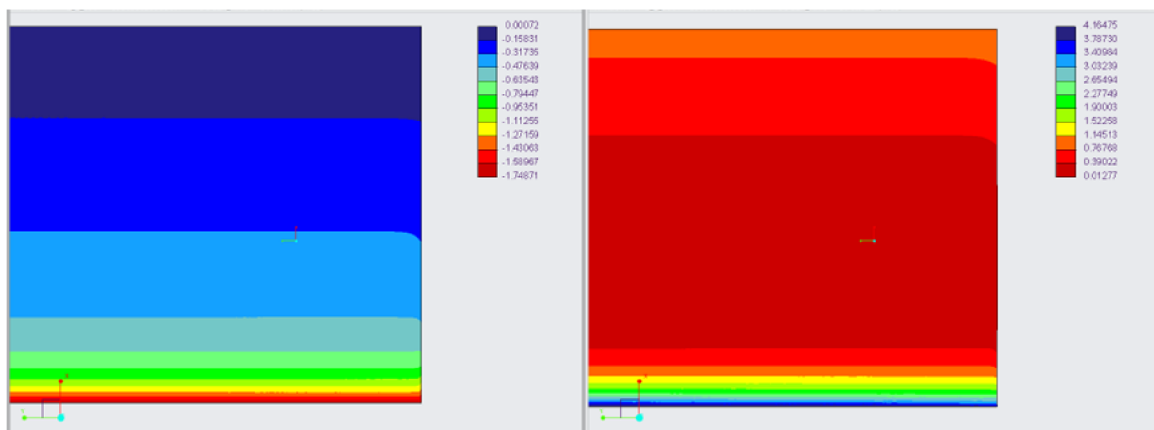


Obr. 28: Průběh ΔR pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$

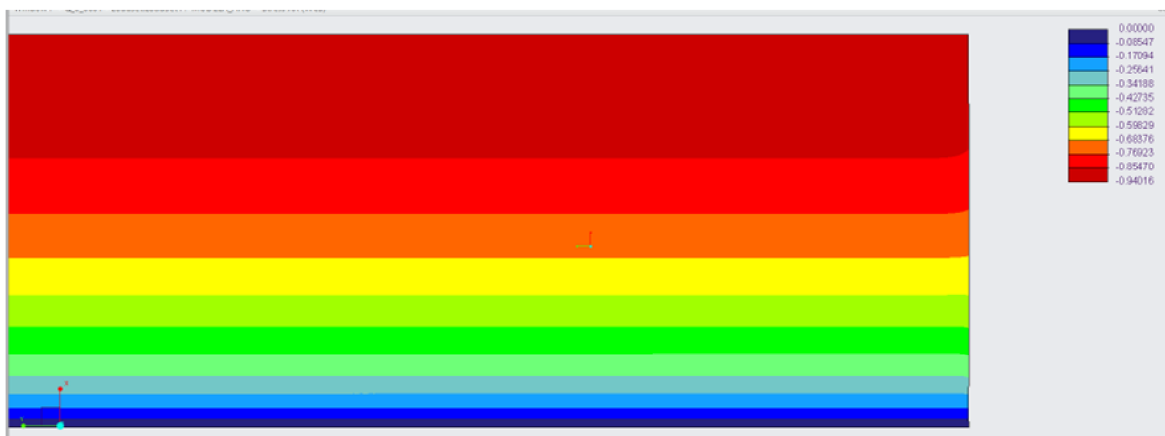


Obr. 29: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$

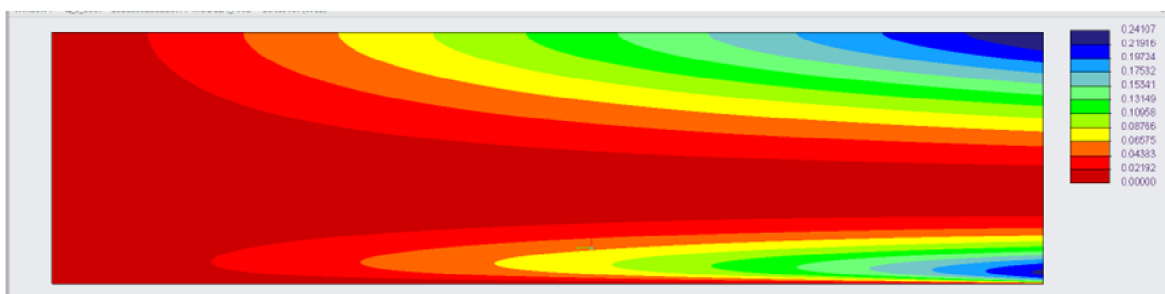
3.2.7 Výsledky pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$



Obr. 30: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$

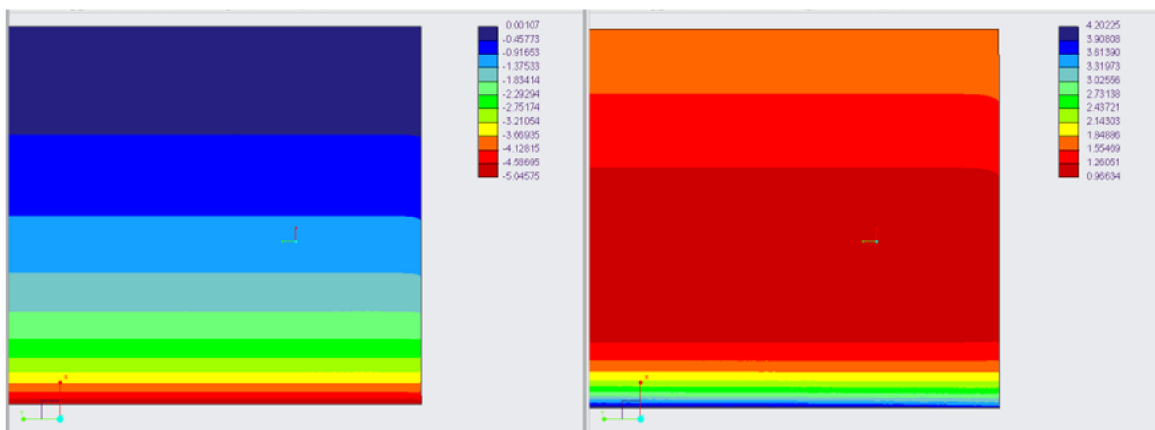


Obr. 31: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$

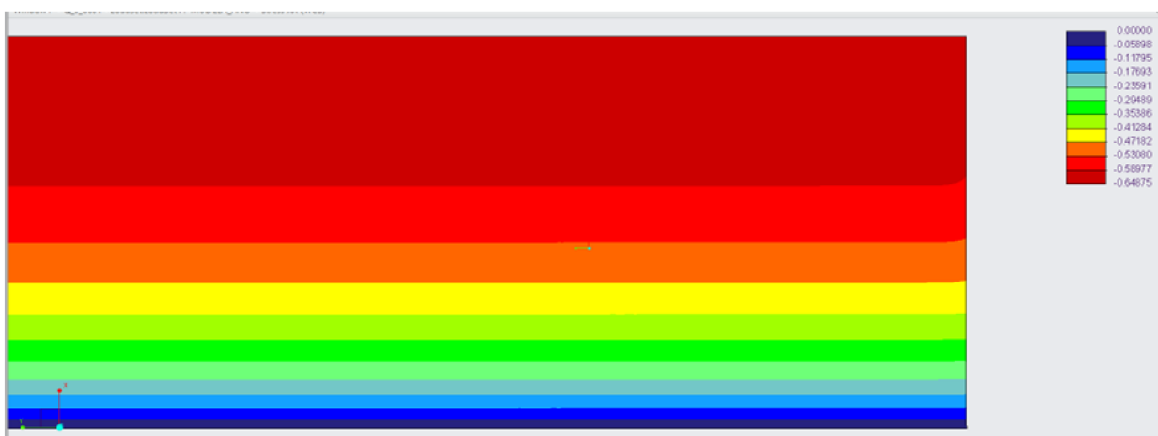


Obr. 32: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$

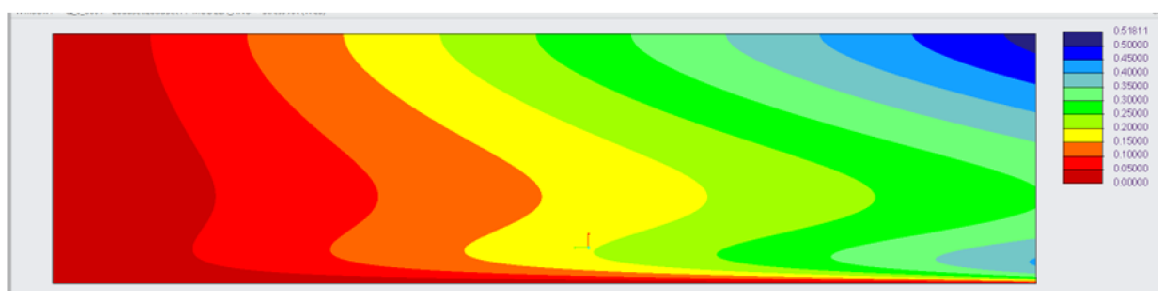
3.2.8 Výsledky pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$



Obr. 33: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$



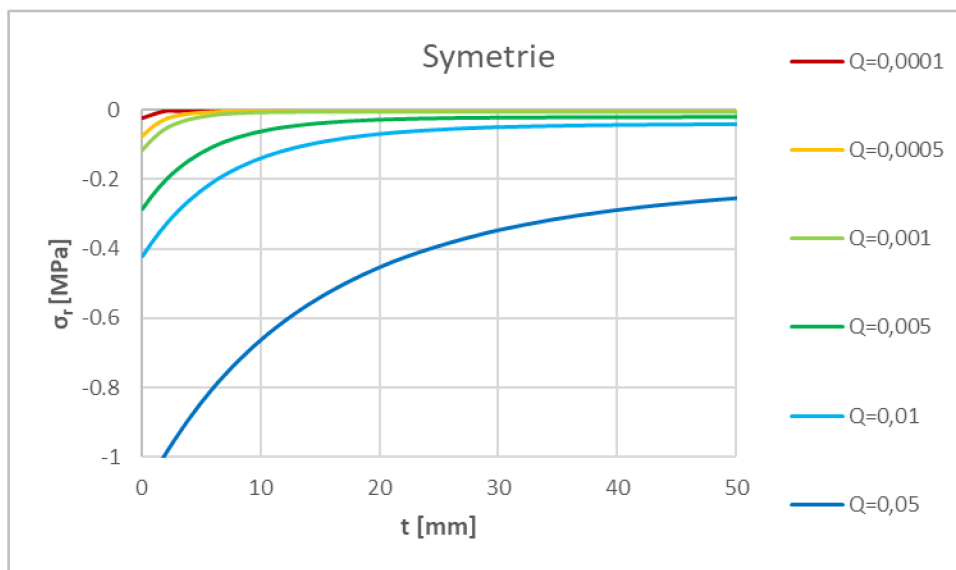
Obr. 34: Průběh AR pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$



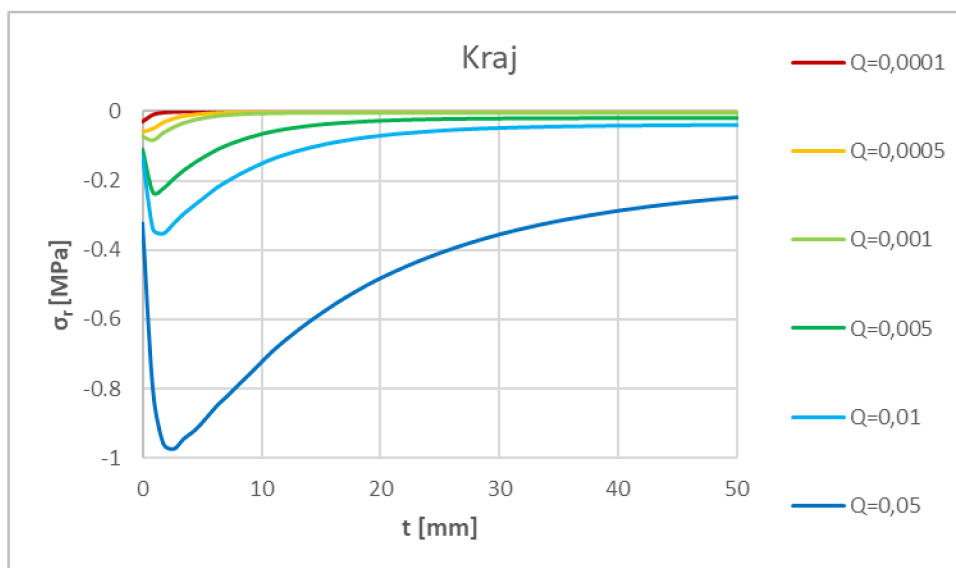
Obr. 35: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$

3.2.9 Souhrnné grafy výstupů MKP

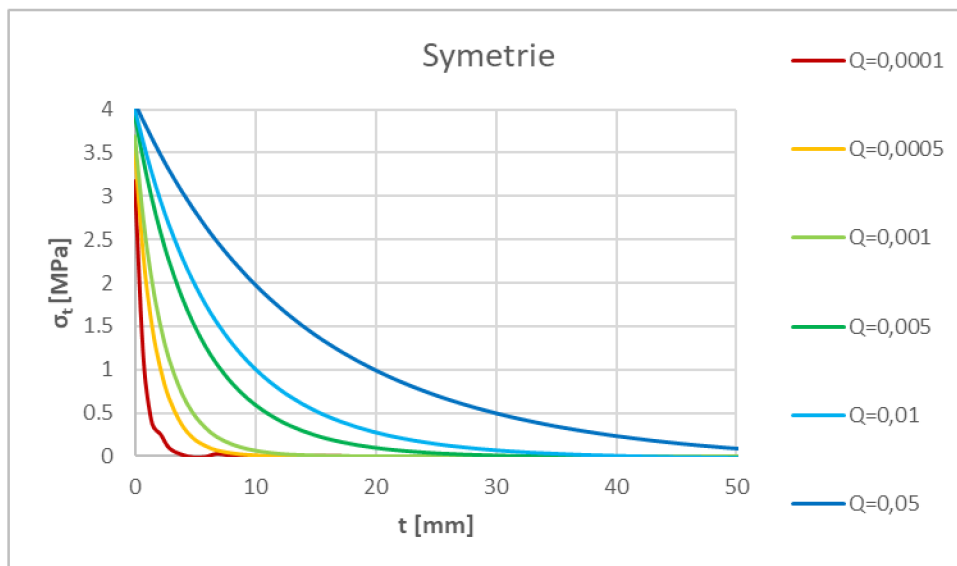
Souhrnné grafy byly provedeny pro zobrazení závislosti napětí a posuvů na tloušťce nábalu t , pak tedy hodnotě $t = 0 \text{ mm}$ odpovídá vnitřní poloměr nábalu a hodnotě $t = 280 \text{ mm}$ vnější poloměr. Vždy jsou uvedeny průběhy ze středu nábalu, tj. z roviny symetrie a z kraje (obr. 36–41). Pro lepší přehlednost jsou zobrazeny pouze výřezy, protože napětí je ve zbylé tloušťce nábalu konstantní. Průběhy pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$ a pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$ byly vynechány také z důvodu zlepšení vizualizace.



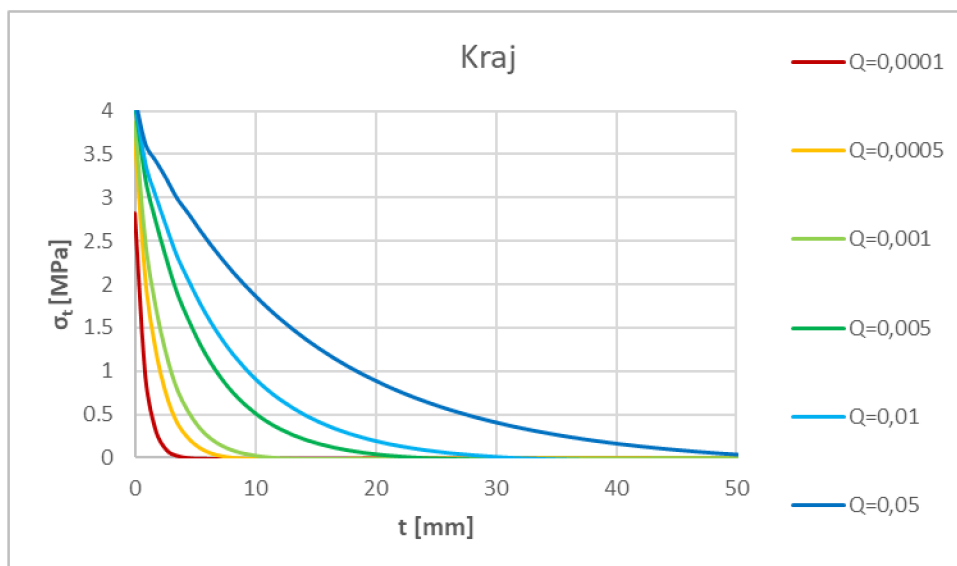
Obr. 36: Průběh σ_r na t z MKP na rovině symetrie



Obr. 37: Průběh σ_r na t z MKP na kraji

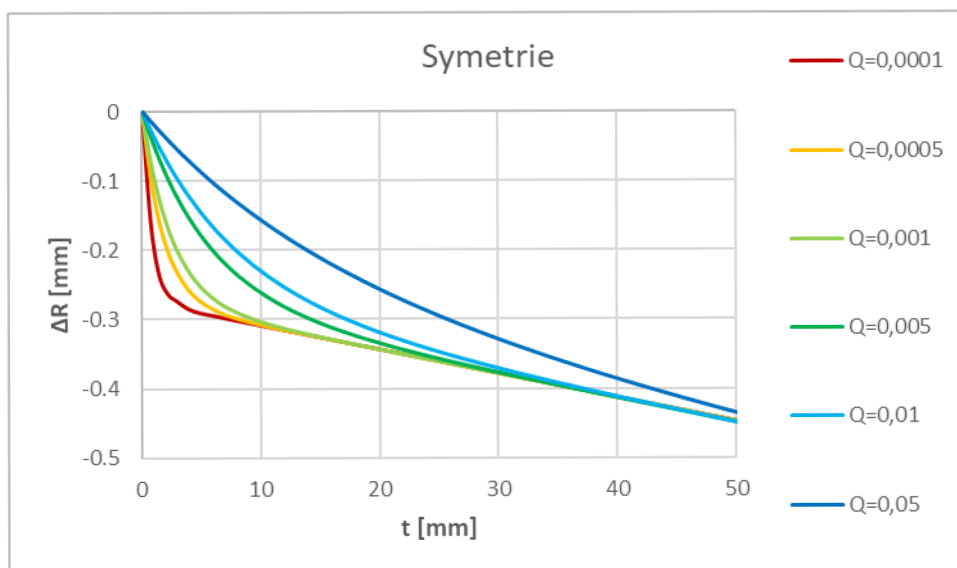


Obr. 38: Průběh σ_t na t z MKP na rovině symetrie

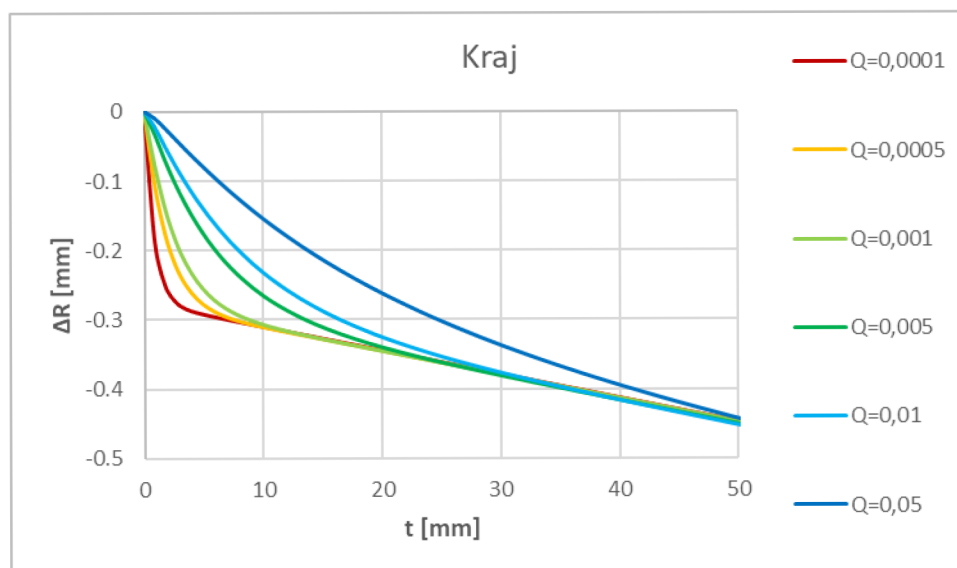


Obr. 39: Průběh σ_t na t z MKP na kraji

Porovnáním průběhů σ_r z kraje a ze středu symetrie (obr. 36 a 37) je vidět, že v těchto místech vzniká odlišný stav napjatosti. Na kraji, resp. na čele nábalu je napěťový stav komplikovanější z důvodu odlišné geometrie. Průběhy σ_t z kraje a z roviny symetrie jsou si svým charakterem podobné.

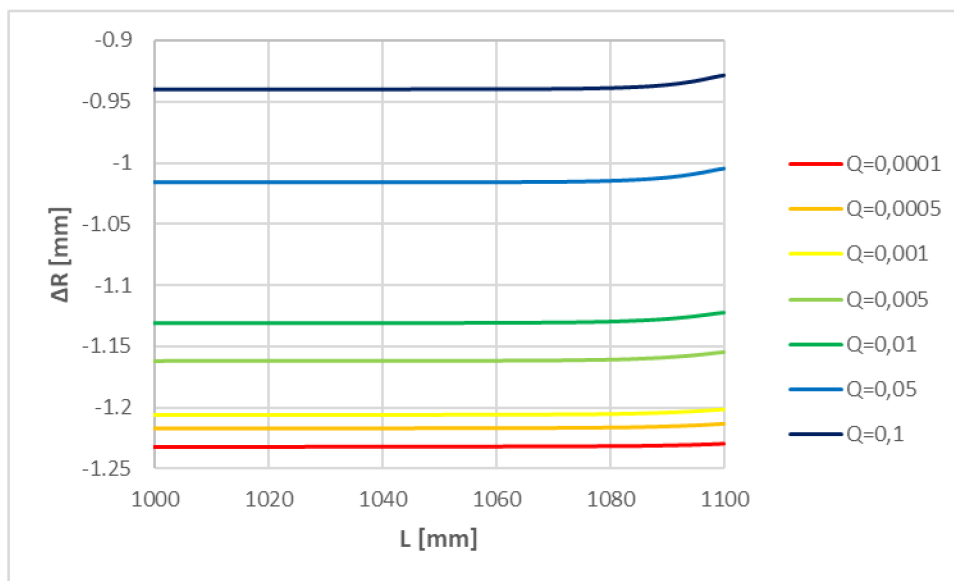


Obr. 40: Průběh ΔR na t z MKP na rovině symetrie



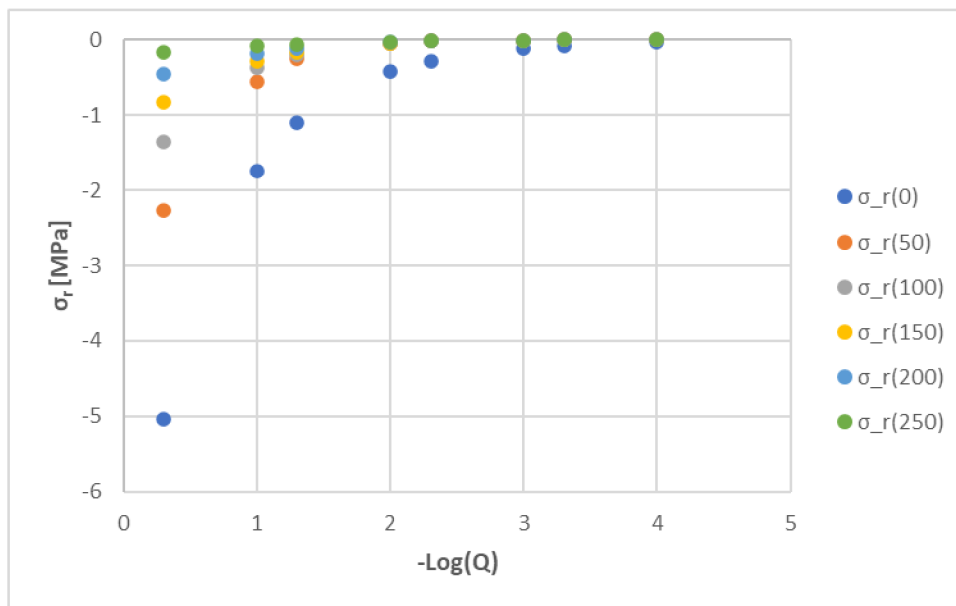
Obr. 41: Průběh ΔR na t z MKP na kraji

Dále je na obr. 42 uvedena závislost změny vnějšího poloměru R_v na šířce nábalu L , opět je zobrazen pouze výřez z důvodu zlepšení přehlednosti. Hodnotě $L = 1100 \text{ mm}$ odpovídá kraj tkaniny a hodnotě $L = 0 \text{ mm}$ střed nábalu.

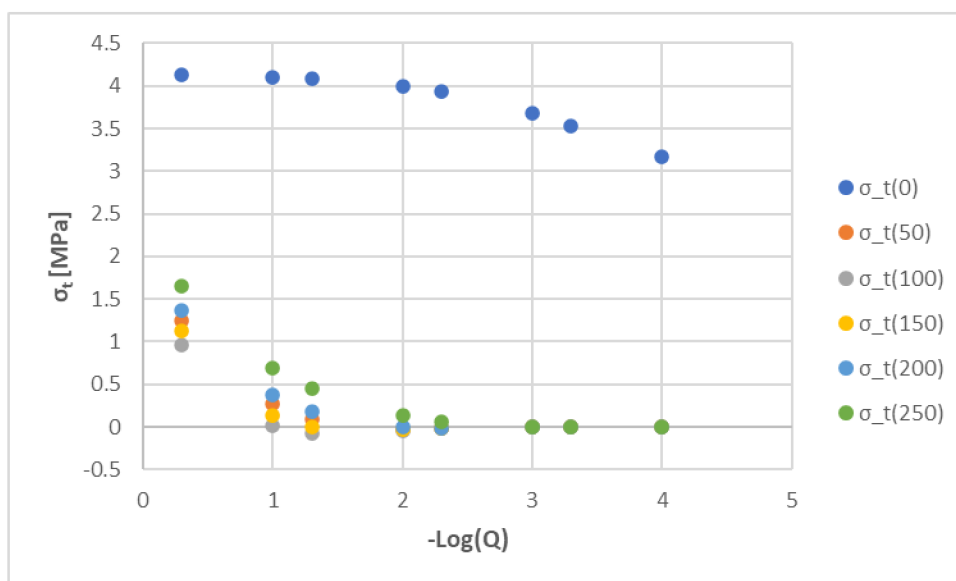


Obr. 42: Průběh ΔR na vnějším poloměru nábalu v závislosti na šířce

Na obr. 43 a obr. 44 jsou uvedeny závislosti napětí z roviny symetrie na koeficientu Q . Pro zvýraznění závislosti jsou hodnoty Q uvedeny v dekadickém logaritmu.



Obr. 43: Závislost σ_r na Q na rovině symetrie



Obr. 44: Závislost σ_t na Q na rovině symetrie

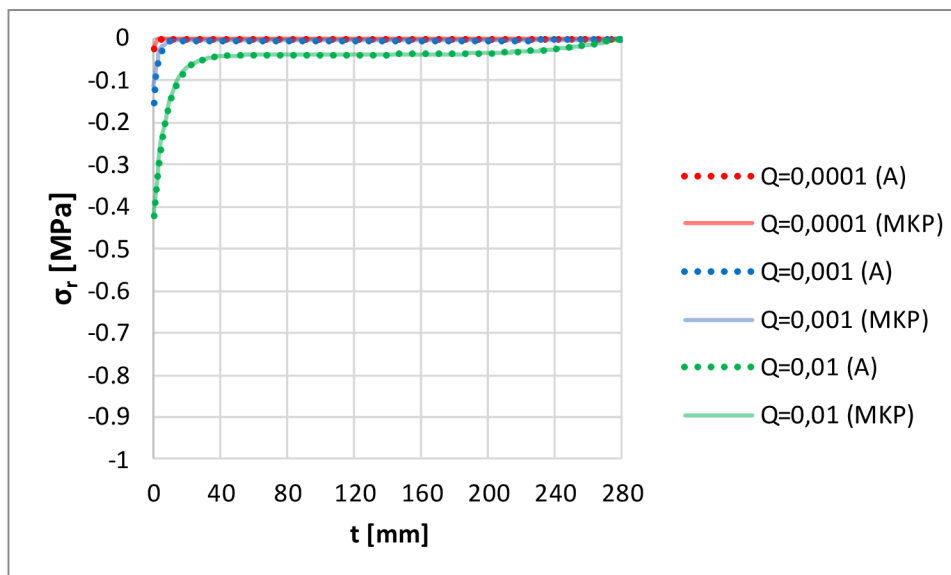
Na obr. 45 je zobrazena zvětšená deformace čela tkaniny, deformace byla pro různé hodnoty Q jinak veliká, ale tvar zůstal stejný.



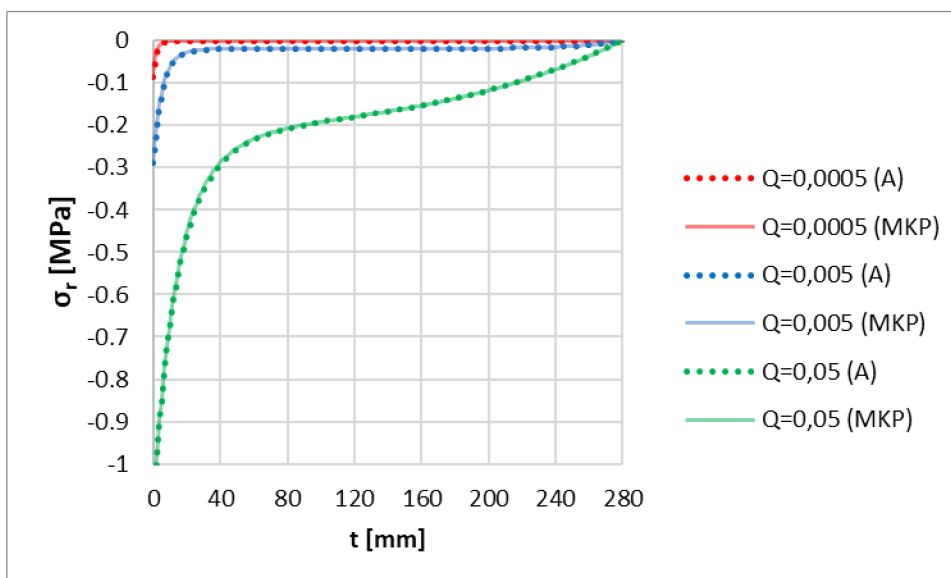
Obr. 45: Detail zdeformovaného čela nábalu (zvětšeno)

3.2.10 Porovnání analytického řešení s MKP

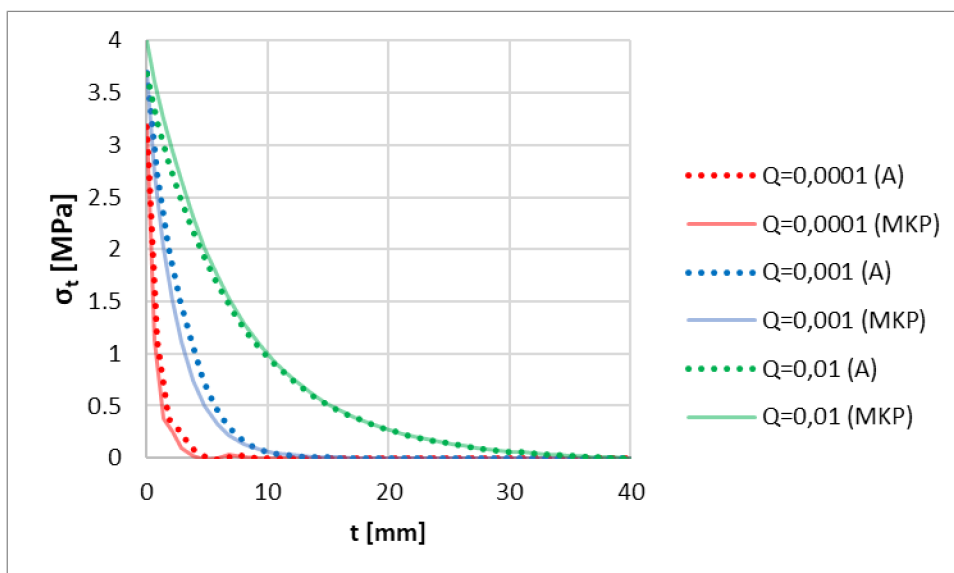
Porovnání bylo provedeno pro vybrané hodnoty Q a pro závislost σ_r a σ_t na tloušťce nábalu t . Grafy byly zkonstruovány dle rovnic (31) a (32) z kapitoly 2.2.



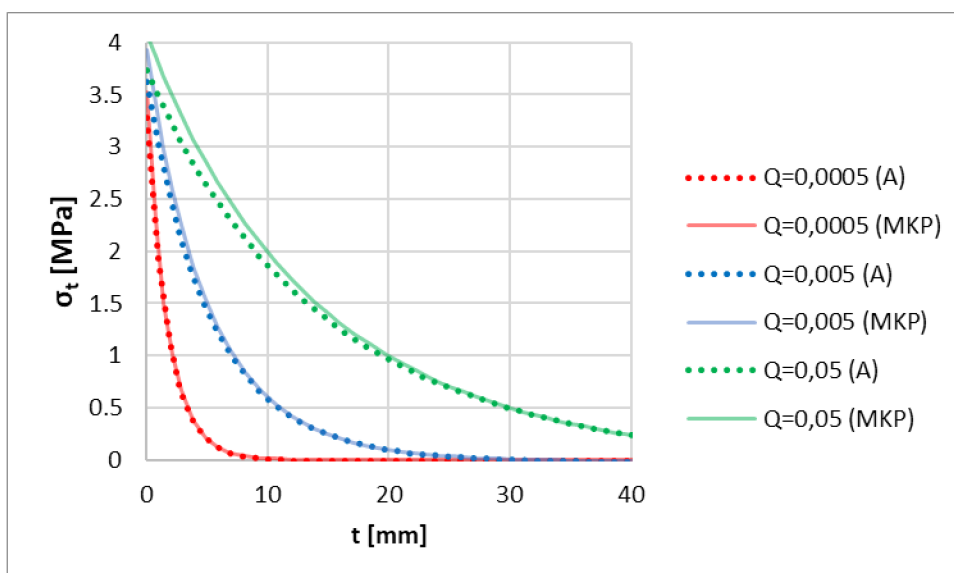
Obr. 46: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_r na t pro $Q = 1 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}$



Obr. 47: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_r na t pro $Q = 5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2}$



Obr. 48: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_t na t pro $Q = 1 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}$



Obr. 49: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_t na t pro $Q = 5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2}$

Z grafů je patrné, že analytickým řešením lze přesně popsat chování nábalu v dostatečné vzdálenosti od krajů, v tomto případě na rovině symetrie. Pro $Q \leq 10^{-3}$ však okolí jádra docházelo analytickým modelem k predikci větších hodnot napětí, než které byly spočteny MKP modelem.

Průběhy napětí dle rovnic (31) a (32) a řešení integračních konstant C_1 a C_2 bylo provedeno symbolickým zápisem bez numerického zaokrouhlování v programu Matlab. Výpočet hodnot byl následně proveden iteračně pro různé hodnoty r . I přesto se ve výpočtech vyskytovala značná nestabilita pro malé hodnoty Q , což může být zapříčiněno mocněním proměnné r na vysoké hodnoty exponentu, čímž se výpočet dostává na hranici nejmenšího zobrazitelného čísla ($2,2251 \cdot 10^{-308}$). Tato nepřesnost se vyskytovala především

v popisu okolí jádra nábalu pro $Q \leq 10^{-3}$. Aby bylo možné výpočet realizovat bylo zapotřebí převést napětí z MPa na Pa a mm na m . Toto však není obecný postup, jakým jde zrealizovat výpočet, pro jiné hodnoty by bylo zřejmě nutné další převádění. V integračních konstantách C_1 a C_2 vystupuje vnější poloměr R_v jako parametr, a proto se pro jiné hodnoty parametru může tato nestabilita vyskytovat v jiném intervalu hodnot Q . Z těchto důvodů byly hledány alternativy řešení, viz kapitola 1.4.

Průběhy σ_r a σ_t se s klesajícím Q blíží konstantní hodnotě téměř v celé šíři nábalu (obr. 46 a 47). Teoreticky pokud se Q blíží k nule, pak řešením diferenciální rovnice (23) je lineární funkce posuvů a výsledné průběhy napětí jsou konstantní. Podobně lze nalézt limitní případ pro průběh ΔR , kdy s malými hodnotami Q řešení konverguje k lineární funkci s konstantou úměrnosti $\Delta T \cdot B$ jak je vidět na obr. 40 a obr. 41.

4 Diskuze výsledků

Z výsledků bakalářské práce je patrná závislost napětí a deformací na koeficientu Q , který lze ovlivňovat během navíjení navinovací silou, rychlostí odtahu a silou přítlačných válců. Návin jako celek se jeví svým chováním jako tlustostěnný válec s tvrdými okraji a měkkým středem. Každá z vrstev je navinuta pod určitým napětím, ale během vrstvení dochází ke snižování vnitřního tlaku a tím se snižuje schopnost toto předepnutí udržet na výchozí hodnotě, čímž vzniká „plovoucí“ vnitřek nábalu. Plovoucí jádro nábalu je příčinou defektů, v určité části nábalu může tečné napětí nabývat záporných hodnot, což vede ke ztrátě stability, protože navinované materiály mají ze své podstaty velice malou ohybovou tuhost. Výsledky ukazují, že pro menší hodnoty Q se tato oblast rozšiřuje, jak je patrné z obrázků ze simulací v kapitole 3.2.

Porovnáním výsledků radiálních napětí mezi krajem (čelem) nábalu a rovinnou symetrie (kapitola 3.2.9) je vidět, že dochází k poklesu radiálního napětí směrem ze středu ke kraji, což vede k rozdílným hodnotám radiálních posuvů mezi středem a krajem. Hodnoty maximálního radiálního napětí v okolí jádra se snižují s nižší hodnotou Q . Naopak hodnoty tečného napětí na vnitřním poloměru nejsou na Q příliš závislé, což je dáno povahou zatížení, viz obr. 43 a obr. 44.

Z obr. 42 jsou patrné rozdílné hodnoty radiálních posuvů mezi čelem a zbylou šíří nábalu, toto zapříčiňuje odchylování se od rovinnosti návínu, což vede k nerovnoměrné distribuci přítlačných sil a následnému prohlubování nerovnoměrností průběhů napětí a deformací po šíři nábalu. Hodnoty radiálních posuvů jsou větší pro nižší koeficienty Q , ale zároveň rovnoměrnější po celé šíři nábalu, což je příznivější stav pro navíjení (obr. 42). Naopak, s rostoucím koeficientem Q jsou odchylky posuvů mezi čelem a středem nábalu větší. Snaha navíjet s příliš vysokou tvrdostí tedy nemusí vést k optimálnímu výsledku.

Průběhy axiálních posuvů jsou úměrné koeficientu Q . S nižším koeficientem Q se snižuje hodnota radiálního modulu a napětí vyvozují spíše stlačení nábalu, naopak s vyšším Q je nábal radiálně tužší a axiální posuvy čela tkaniny jsou výraznější.

Pokračováním ve výzkumu by bylo nalezení ideální funkční závislosti mezi navinovací silou a poloměrem, kterou by mohla obsluha nabalovaček zadat do stroje. V této práci by se jednalo o zatížení modelu nekonstantní změnou teploty $\Delta T = \Delta T(r)$ a nalezení takové funkce, aby v nábalu průběh tečného napětí se udržel v kladných hodnotách a rozdílné hodnoty radiálních posuvů po šíři nábalu byly zároveň co nejmenší.

Alternativou a pokračováním v bakalářské práci by dále mohlo být vyhodnocení vlivu přítlačných válců, a to pro případ rovnoměrné distribuce síly a nerovnoměrně rozložené síly z důvodu nedodržení sousostí válců. Výsledkem by pak bylo zhodnocení tohoto vlivu na výsledný stav napjatosti ve velkonábalu a jak moc vedou nerovnoměrné posuvy k defektům. V tomto případě by již nebylo možné využít osové symetrie modelu z důvodu porušení symetrie zatížení. Dále by bylo možné modelovat nábal s jinými materiálovými konstantami ve smyslu použití například ryze ortotropního materiálu, nebo zhodnocení vlivu tuhosti materiálu v axiálním směru.

Zdroje

- [1] Dvořák, J., Bílek M. a Tumajer P.: *Mechanické modely tkaní*. Liberec: VÚTS, 2016. ISBN 978-80-87184-68-4.
- [2] Adanur, S.: *Handbook of Weaving*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2000. ISBN 978-15-87160-13-4.
- [3] Dvořák, J.: *Tkací proces a stroj*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2006. ISBN 80-7372-099-X.
- [4] Choogin, V. V., Bandara, P. a Chepelyuk, E. V.: *Mechanisms of Flat Weaving Technology*. Woodhead Publishing, 2013. ISBN 978-0-85709-780-4.
- [5] Naviječe velkonábalů CEDIMA Meziměstí s.r.o. [online]. Dostupné z: https://www.cedima.cz/cs_CZ/textilni-vyroba/navijec-velkonabalu/
- [6] Lee, C.: *Stresses and Defects in Roll Products: A Review of Stress Models and Control Techniques*. Int. J. Precis. Eng. Manuf. 2018. [online] Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s12541-018-0094-z>
- [7] Hashimoto, H., Jeenkour P., Mongkolwongrojn M.: *Optimum Winding Tension and Nip-load into Wound Webs for Protecting Wrinkles and Slippage*. Journal of Advanced Mechanical Design Systems and Manufacturing. 2010. [online] Dostupné z: <https://doi.org/10.1299/jamdsm.4.214>
- [8] Yagoda, H. P.: *Generalized Formulas for Stresses in Wound Rolls*. Tappi J., vol. 64, no. 2, pp. 91-93, February 1981.
- [9] Altmann, H. C.: *Formulas for Computing the Stresses in Center-Wound Rolls*. Tappi J., vol. 51, no. 4, pp. 176-179, April 1968
- [10] Hakiel, Z.: *Nonlinear Model for Wound Roll Stress*. Tappi J., Vol. 70, No. 5, pp. 113-117.
- [11] Lee, J., Kim, S., Lee, C.: *Taper Tension Profile in Roll-to-Roll Rewinder: Improving Adhesive Force of Pressure-Sensitive Adhesive Film*. Int. J. of Precis. Eng. and Manuf.-Green Tech. 6, 853–860 (2019). [online]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s40684-019-00100-w>
- [12] J. Žák, P. Karel: *Výzkumná zpráva VÚTS 99405*, VÚTS Liberec, 2021

- [13] Kaboré P, Jaafar H, Wang H, Hamad W, Wang AP: *Modelling Radial Compressive Modulus in Wound Rolls. Measurement and Control*. 2007; 40(7):207-210. [online] Dostupné z: doi:10.1177/002029400704000702
- [14] Roisum, D., Good, J. K.: *Winding: machines, mechanics and measurements*. Destech Pubns Inc, 2007. ISBN: 193207869X
- [15] Žák, J.: *Problematics of large-size batch winding of technical textiles* in Strutex Structure and Structural mechanics of Textile, Technical University of Liberec, 2018
- [16] Hruš, T.: *Základy metody konečných prvků*. Technická Univerzita v Libereci, 2005, Liberec.
- [17] Bathe, K.J.: *Finite element procedure*. Klaus-Jurgen Bathe, 2007. ISBN: 097900490X

Seznam obrázků

Obr. 1: Kontaktní navíječ bez přítlaku	12
Obr. 2: Kontaktní navíječ s přítlakem	12
Obr. 3: Stojanový navíječ s nezávislým pohonem hladicího a vodícího válce	13
Obr. 4: Středový navíječ s přítlačným válcem	13
Obr. 5: Detail čela tkaniny s naznačenou <i>J-line</i>	14
Obr. 6: Schématické znázornění defektů [7]	15
Obr. 7: Fotografie některých defektů [6].....	15
Obr. 8: Rovnováha rotačního elementu.....	18
Obr. 9: Deformace elementu	19
Obr. 10: 3D geometrie modelu	25
Obr. 11: 2D profil modelu	26
Obr. 12: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$	30
Obr. 13: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$	30
Obr. 14: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-4}$	30
Obr. 15: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$	31
Obr. 16: Průběh ΔR pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$	31
Obr. 17: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-4}$	31
Obr. 18: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$	32
Obr. 19: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$	32
Obr. 20: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-3}$	32
Obr. 21: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$	33
Obr. 22: Průběh ΔR pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$	33
Obr. 23: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-3}$	33
Obr. 24: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$	34
Obr. 25: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$	34
Obr. 26: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-2}$	34
Obr. 27: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$	35
Obr. 28: Průběh ΔR pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$	35
Obr. 29: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-2}$	35
Obr. 30: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$	36
Obr. 31: Průběh ΔR pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$	36
Obr. 32: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 1 \cdot 10^{-1}$	36
Obr. 33: Průběh σ_r (vlevo) a σ_t (vpravo) pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$	37
Obr. 34: Průběh ΔR pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$	37

Obr. 35: Průběh axiálních posuvů pro $Q = 5 \cdot 10^{-1}$	37
Obr. 36: Průběh σ_r na t z MKP na rovině symetrie.....	38
Obr. 37: Průběh σ_r na t z MKP na kraji	38
Obr. 38: Průběh σ_t na t z MKP na rovině symetrie	39
Obr. 39: Průběh σ_t na t z MKP na kraji.....	39
Obr. 40: Průběh ΔR na t z MKP na rovině symetrie.....	40
Obr. 41: Průběh ΔR na t z MKP na kraji	40
Obr. 42: Průběh ΔR na vnějším poloměru nábalu v závislosti na šířce.....	41
Obr. 43: Závislost σ_r na Q na rovině symetrie	42
Obr. 44: Závislost σ_t na Q na rovině symetrie	42
Obr. 45: Detail zdeformovaného čela nábalu (zvětšeno)	43
Obr. 46: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_r na t pro $Q = 1 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}$	44
Obr. 47: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_r na t pro $Q = 5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2}$	44
Obr. 48: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_t na t pro $Q = 1 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-2}$	45
Obr. 49: Porovnání analytického a MKP průběhu σ_t na t pro $Q = 5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2}$	45