



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra Matematiky

Bakalářská práce

Aplikační úlohy z diferenciálního počtu dvou proměnných

Vypracovala: Veronika Švejdová
Vedoucí práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Aplikační úlohy z diferenciálního počtu dvou proměnných jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, 29. 4. 2015

.....

Poděkování

Chtěla bych poděkovat vedoucí své bakalářské práce RNDr, Vladimíře Petráškové, Ph.D, za vedení, připomínky, trpělivost a za čas, který mně a mé práci věnovala. Poděkování také patří mé rodině a přátelům za podporu a pomoc během celého studia.

Anotace v českém jazyce

Cílem práce je vytvořit sbírku řešených úloh z diferenciálního počtu funkce dvou proměnných. Práce zahrnuje převážně příklady na určování lokálních extrémů funkce dvou proměnných a řešení slovních úloh funkce dvou proměnných. Příklady budou řazeny podle obtížnosti a doplněny grafickým znázorněním.

Annotation

The aim of this work is to form the collection of answered riders of differential calculus function with two variables. The work includes examples of determination of local function and solving of two-variable collocations. Examples will be arranged according difficulty and completed by graphical representation.

OBSAH

1. ÚVOD	6
2. ZÁKLADNÍ TEORIE	7
2.1 Okolí bodu	7
2.1.1 Euklidovský prostor.....	7
2.1.2 Okolí bodu	7
2.2 Funkce dvou proměnných	9
2.2.1 Definiční obor a obor funkčních hodnot funkce dvou proměnných	9
2.3 Extrémy funkce dvou proměnných	9
2.3.1 Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému	10
2.3.2 Postačující podmínka pro lokální extrém	10
2.3.3 Vázané extrémy.....	11
2.3.4 Globální extrémy	12
2.3.5 Weierstrassova věta	13
3. LOKÁLNÍ EXTRÉMY	14
3.1 Příklad 1.....	14
3.2 Příklad 2.....	16
3.3 Příklad 3.....	19
3.4 Příklad 4.....	23
3.5 Příklad 5.....	26
3.6 Příklad 6.....	28
3.7 Příklad 7.....	30

3.8	Příklad 8.....	32
4.	SLOVNÍ ÚLOHY NA EXTRÉM.....	34
4.1	Příklad 1.....	34
4.2	Příklad 2.....	36
4.3	Příklad 3.....	38
4.4	Příklad 4.....	40
4.5	Příklad 5.....	42
4.6	Příklad 6.....	45
4.7	Příklad 7.....	47
4.8	Příklad 8.....	49
5.	SLOVNÍ ÚLOHY – NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY	54
6.	ZÁVĚR.....	57
7.	LITERATURA A ZDROJE	58

1. ÚVOD

Hlavním cílem této bakalářské práce je sestavit sbírku řešených aplikačních úloh diferenciálního počtu dvou proměnných. Sbíрка by měla sloužit jako pomocný materiál při studiu na bakalářském studiu oboru matematika. Práce obsahuje 17 řešených příkladů a 5 neřešených příkladů daného tématu ve čtyřech kapitolách. Zadání úloh je převzato z učebnic a knih různých typů, které byly během posledních let vydány a z internetu.

První kapitola se zabývá nezbytnou teorií, která je pro řešení aplikačních úloh z diferenciálního počtu dvou proměnných nutná. Jedná se převážně o definiční obor a obor funkčních hodnot funkce dvou proměnných, Eukleidovský prostor, okolí bodu, Weierstrassovu větu, nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému, postačující podmínka pro lokální extrém, vázané extrémy a globální extrémy.

Druhá část práce je zaměřena na řešení úloh zabývajících se určováním extrémů funkcí dvou proměnných. U každého příkladu je uvedeno zadání a následné početní i grafické řešení. Příklady jsou řazeny od jednodušších až po složitější.

Třetí kapitola se věnuje slovním úlohám z diferenciálního počtu dvou proměnných. U každé úlohy je opět uvedeno zadání a početní řešení. Některé slovní úlohy jsou pro lepší představivost doplněny obrázkem vytvořeným v programu GeoGebra. V poslední části jsou uvedené neřešené příklady s výsledky pro další procvičení.

Jak úlohy zabývajících se určováním extrémů funkcí dvou proměnných, tak i slovní úlohy jsou provázeny slovním komentářem, který vysvětluje jednotlivé kroky řešení a objasňuje složitější početní operace. Grafy, které mají sloužit k lepšímu představení dané problematiky, jsou vytvořeny v programu Matematika.

2. ZÁKLADNÍ TEORIE

Tato úvodní kapitola je vytvořena na základě podkladů z literatury [2], [5], [10], [16].

2.1 Okolí bodu

2.1.1 Euklidovský prostor

Definice: Necht' M je libovolná neprázdná množina, necht' ϱ je nezáporná reálná funkce definovaná na M^2 , $(\varrho: M \times M \rightarrow R^2)$ taková, že pro všechna $x, y, z \in R$ platí:

1. $\varrho_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow x = y$ axiom totožnosti
2. $\varrho_{(x,y)} = \varrho_{(y,x)}$ axiom symetrie
3. $\varrho_{(x,z)} \leq \varrho_{(x,y)} + \varrho_{(y,z)}$ trojúhelníková nerovnost.

Funkce ϱ se nazývá metrika (vzdálenost) na množině M a dvojici (M, ϱ) nazýváme metrický prostor.

Prvkům množiny M pak říkáme body metrického prostoru (M, ϱ) a množinu M nazýváme nosnou množinou daného prostoru.

Definice: Necht' $n \in N$. Uspořádaná dvojici $E_2 = (R^2, \varrho)$ se nazývá dvourozměrným eukleidovským prostorem, pokud pro každé dva body tohoto prostoru $X = [x_1, x_2] \in R^2, Y = [y_1, y_2] \in R^2$ je definována jejich metrika (vzdálenost) $\varrho: R^2 \times R^2 \rightarrow R$ vztahem:

$$\varrho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Metrika ϱ se v tomto případě nazývá eukleidovská metrika.

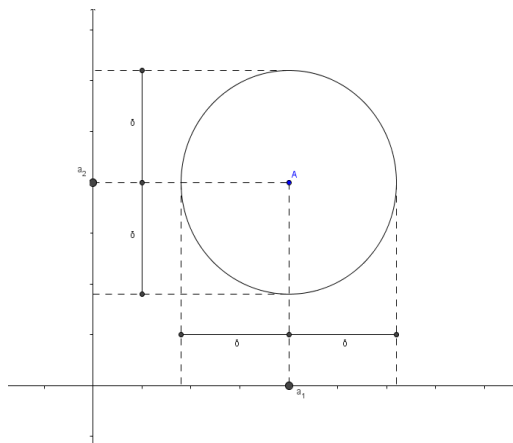
2.1.2 Okolí bodu

Definice: Je dáno reálné číslo $\delta > 0$ a libovolný bod $A = [a_1, a_2] \in E_2$. Okolím bodu $O(A)$ nazýváme množinu:

$$O(A) = \{X \in E_2; \varrho(X, A) < \delta\},$$

kde ϱ je eukleidovská metrika.

Okolím bodu $A \in E_2$ je otevřený kruh (kruh bez bodů ležících na jeho hranici, již je kružnice).



Obr. 1: Okolí bodu

Definice: Necht' $M \subseteq E^2$ je neprázdná množina bodů:

1. Bod $A \in M$ se nazývá vnitřním bodem množiny M jestliže existuje okolí bodu A , které leží celé v množině M . Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazveme vnitřek množiny M .
2. Bod $A \in M$ se nazývá hraničním bodem množiny M , jestliže každé okolí bodu A obsahuje bod z množiny M a bod, který v množině M neleží. Množinu všech hraničních bodů nazveme hranice množiny M .
3. Bod $A \in M$ se nazývá vnějším bodem množiny M jestliže existuje okolí bodu A , které leží celé mimo M . Množinu všech vnějších bodů množiny M nazveme vnějšek množiny M .
4. Množina M v E_2 se nazývá otevřená, jestliže každý její bod je vnitřním bodem.
5. Množina M v E_2 se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny svoje hraniční body.
6. Množina M v E_2 se nazývá omezená, jestliže existuje okolí ve kterém množina M leží.
7. Množina M v E_2 se nazývá souvislá, jestliže každé její dva body lze spojit lomenou čarou, která leží celá v množině M .
8. Množina M v E_2 se nazývá kompaktní, pokud je současně omezená a uzavřená

9. Otevřená a souvislá množina M v E_2 se nazývá oblast. Uzavřená a souvislá množina M v E_2 se nazývá uzavřená oblast.

2.2 Funkce dvou proměnných

Definice: Je dána množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kterou nazýváme rovinou. Každou uspořádanou dvojici $[x, y]$ nazýváme bodem v rovině.

Nechť $M \in R^2$ je neprázdná množina. Zobrazení f , které ke každému bodu $[x, y] \in M$ přiřazuje právě jedno $z \in R$, nazýváme funkcí dvou proměnných.

Funkce dvou proměnných značíme podobně jako funkce jedné proměnné. Vezmeme-li například funkci f , značí $f(x, y)$ hodnotu funkce f v bodě $[x, y]$.

Poznámka:

Jako příklad můžeme uvést objem V válce. Objem válce V je funkcí jeho poloměru r a výšky h , řekneme tedy, že $V = f(r, h)$.

2.2.1 Definiční obor a obor funkčních hodnot funkce dvou proměnných

Definice: Množinu $M = D(f)$ nazýváme definičním oborem funkce f . Číslo z , které je funkcí f přiřazeno bodu $X = [x_1, x_2] \in M$, nazýváme funkční hodnotou funkce f v bodě $X = [x_1, x_2] \in M$ a označujeme je zpravidla $f(X)$ nebo $f(x_1, x_2)$.

Množinu všech funkčních hodnot funkce f nazýváme oborem funkčních hodnot funkce f a značíme ji $f(M)$ nebo $H(f)$.

2.3 Extrémy funkce dvou proměnných

Definice: Nechť $f: R^2 \rightarrow R$ je reálná funkce dvou proměnných a nechť bod $[x_0, y_0]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce $D(f)$.

Říkáme, že funkce f dvou proměnných má v bodě $[x_0, y_0] \in D(f)$ lokální minimum, jestliže existuje ε -ové okolí bodu $[x_0, y_0]$ (značíme $\delta_\varepsilon([x_0, y_0])$) tak, že:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall [x, y] \in \delta_\varepsilon([x_0, y_0]) \cap Df.$$

Říkáme, že funkce f dvou proměnných má v bodě $[x_0, y_0] \in Df$ lokální maximum, jestliže existuje ε -ové okolí bodu $[x_0, y_0]$ (značíme $\delta_\varepsilon([x_0, y_0])$) tak, že:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall [x, y] \in \delta_\varepsilon([x_0, y_0]) \cap Df.$$

Říkáme, že funkce f dvou proměnných má v bodě $[x_0, y_0] \in Df$ ostré lokální minimum, jestliže existuje prstencové okolí bodu $[x_0, y_0]$ tak, že:

$$f(x_0, y_0) < f(x, y), \forall [x, y] \in P_\varepsilon([x_0, y_0]) \cap Df.$$

Říkáme, že funkce f dvou proměnných má v bodě $[x_0, y_0] \in Df$ ostré lokální maximum, jestliže existuje prstencové okolí bodu $[x_0, y_0]$ tak, že:

$$f(x_0, y_0) > f(x, y), \forall [x, y] \in P_\varepsilon([x_0, y_0]) \cap Df.$$

2.3.1 Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Definice: Necht' funkce f dvou proměnných má v bodě $[x_0, y_0] \in Df$ lokální extrém.

Necht' funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ první parciální derivace. Potom platí, že

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Definice: Bod $[x_0, y_0]$ se nazývá stacionárním bodem, jestliže v něm existuje první parciální derivace a platí:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

2.3.2 Postačující podmínka pro lokální extrém

Definice: Necht' funkce f dvou proměnných má ve svém stacionárním bodě $[x_0, y_0]$ spojitě druhé parciální derivace.

$$\text{Označme } D_1 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix}.$$

Potom:

1. je-li $D_2 > 0$, má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém a to takový, že:
 - a. jestliže je $D_1 > 0$, tak v bodě $[x_0, y_0]$ má funkce lokální minimum.
 - b. jestliže je $D_1 < 0$, tak v bodě $[x_0, y_0]$ má funkce lokální maximum.
2. je-li $D_2 < 0$, funkce f nemá v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, ale tak zvaný sedlový bod.
3. je-li $D_2 = 0$, nelze o extrému rozhodnout.

Poznámka:

Determinant, který počítáme, abychom mohli rozhodnout o lokálních extrémech dané funkce, vychází z Hessiany matice druhého řádu, která se skládá z druhých parciálních derivací funkce f .

2.3.3 Vázané extrémy

Definice: Necht' funkce f je reálná funkce dvou proměnných a necht' $M \subseteq Df$.

Říkáme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ lokální minimum vzhledem k množině M , jestliže platí:

$$(\exists \delta > 0)(\forall [x, y] \in U_\delta([x_0, y_0]) \cap M); f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Říkáme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ lokální maximum vzhledem k množině M , jestliže platí:

$$(\exists \delta > 0)(\forall [x, y] \in U_\delta([x_0, y_0]) \cap M); f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Při vyšetřování lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M budeme využívat dvě základní metody.

1. Dosazovací metoda

Tuto metodu můžeme použít pouze u speciálních typů vazebních podmínek. Jestliže máme za úkol vyšetřit lokální extrém funkce $f: z = f(x, y)$ vzhledem k množině M a vazba je dána rovnicí $g(x, y) = 0$. Dosazovací metodu můžeme použít pouze v případě, že z rovnice $g(x, y) = 0$ lze jednoznačně vyjádřit proměnnou $y \Rightarrow y = \varphi(x)$. Funkci $\varphi(x)$ dosadíme do funkce f

a dostáváme tak pro ni předpis $f: z = f(x, \varphi(x))$, čímž získáme funkci jedné proměnné x , který umíme vyšetřit. Tyto lokální extrémy jsou zároveň i lokálními extrémy funkce $f: z = (x, y)$ vzhledem k množině M .

2. Jacobiho metoda

Definice: Necht' funkce dvou proměnných f má v bodě $[x, y]$ lokální extrém vzhledem k vazební podmínce $g(x, y) = 0$ a funkce f a g mají spojité parciální derivace v okolí bodu $[x_0, y_0]$, potom platí, že:

$$J_{f,g}(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

Postup:

Při vyšetřování lokálních extrémů touto metodou nejprve zjistíme, ve kterých bodech by se extrém mohl vyskytovat. To mohou být buď body funkce f a g , ve kterých některá parciální derivace neexistuje, nebo body vyhovující následující nutné podmínce vázaného extrému:

$$J_{f,g}(x_0, y_0) = 0$$

$$g(x, y) = 0.$$

Tím získáme body, které jsou podezřelé z extrému. Pokud je vazební množina omezená a uzavřená a funkce f je na ní spojitá, můžeme použít Weierstrassovu větu. Podle ní teda stačí určit funkční hodnoty ve všech stacionárních bodech. Největší funkční hodnotu pak nazveme lokálním maximumem a nejmenší pak lokálním minimumem funkce f vzhledem k množině M .

2.3.4 Globální extrémy

Definice: Necht' f je reálná funkce dvou proměnných a necht' její definiční obor Df je omezená a uzavřená množina.

Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0] \in Df$ globální maximum, jestliže platí:

$$(\forall [x, y] \in Df) f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0] \in Df$ globální minimum, jestliže platí:

$$(\forall [x, y] \in Df) f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

2.3.5 Weierstrassova věta

Definice: Nechť je funkce dvou proměnných spojitá v omezené a uzavřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Potom na množině M nabývá funkce f své největší a nejmenší hodnoty, tj.: existují body $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in M$ takové, že:

$$f(x_1, y_1) = \min\{f(x, y); [x, y] \in M\}$$

$$f(x_2, y_2) = \max\{f(x, y); [x, y] \in M\}.$$

Poznámka:

Máme funkci f , která je spojitá na uzavřené a omezené množině M . Globální extrém funkce f musí ležet v některém z následujících bodů množiny M :

1. Bod $A \in M$, ve kterém má funkce f lokální extrém. Tento lokální extrém určujeme podle Hessovy matice.
2. Bod $A \in M$, ve kterém nastal lokální extrém funkce f vzhledem k vazbě, která je dána rovnicí $g(x, y) = 0$. Tento lokální extrém budeme určovat dosazovací nebo Jacobiho metodou.

Poznámka:

Pokud dostaneme více bodů, kde by mohl být globální extrém, určíme funkční hodnoty ve všech těchto bodech. Bod s největší funkční hodnotou nazveme globálním maximem a bod s nejmenší funkční hodnotou pak globálním minimem.

Poznámka:

V některých literaturách se uvádí místo pojmu globální extrém pojem absolutní extrém.

3. LOKÁLNÍ EXTRÉMY

3.1 Příklad 1

Vypočítejte lokální extrémy funkce f :

$$f: f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y \text{ a určete jejich hodnotu. [8]}$$

Řešení:

Definiční obor dané funkce je:

$$Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}.$$

Nejprve určíme první parciální derivace funkce f . Na základě nutné podmínky pro lokální extrém parciální derivace položíme rovny nule:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x - y - 2 \quad \rightarrow \quad 2x - y - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x + 2y + 1 \quad \rightarrow \quad -x + 2y + 1 = 0. \quad (2)$$

Vyřešením soustavy rovnic o dvou neznámých, která je dána rovnicemi (1), (2) získáme stacionární body, ve kterých u dané funkce může nastat extrém:

$$\begin{array}{rcl} 2x - y - 2 & = & 0 \\ \underline{-x + 2y + 1 = 0 \quad / \cdot 2} & & \\ 2x - y - 2 & = & 0 \\ \underline{-2x + 4y + 2 = 0} & & \\ 3y & = & 0 \\ y & = & 0 \quad \rightarrow y \text{ dosadíme rovnice (1)} \quad \rightarrow 2x - 0 - 2 = 0 \\ & & 2x = 2 \\ & & x = 1. \end{array}$$

Soustava rovnic dána rovnicemi (1), (2) má pouze jedno řešení a tedy jen jeden stacionární bod $P = [1, 0]$.

Nyní dopočítáme z prvních parciálních derivací všechny parciální derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1.$$

Parciální derivace druhého řádu nám vyšly jako číselné hodnoty, proto nemusíme dosazovat stacionární bod a pouze tyto číselné hodnoty dosadíme do determinantu D_2 a D_1 , který nám určí druh extrému v bodě $P = [1, 0]$:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

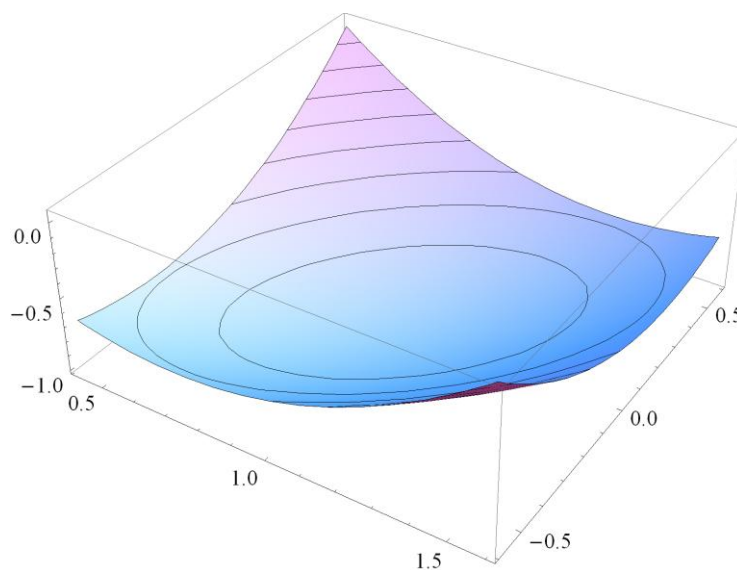
$$D_1 = 2.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 > 0$, je v bodě $P_1 = [0, 0]$ lokální minimum.

Hodnotu lokálního extrému vypočítáme tak, že dosadíme stacionární bod do funkčního předpisu funkce f :

$$f(1, 0) = 1^2 - 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 + 0 = -1.$$

Na obrázku 2 můžeme vidět graf funkce.



Obr. 2: Graf funkce $f: f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

3.2 Příklad 2

Vypočítejte lokální extrémy funkce f

$$f: f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2. [14]$$

Řešení:

Definiční obor dané funkce je:

$$Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}.$$

Nejprve určíme první parciální derivace funkce f . Tyto parciální derivace položíme rovny nule:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x \quad \rightarrow \quad 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2xy + 2y \quad \rightarrow \quad 2xy + 2y = 0. \quad (4)$$

Vyřešením soustavy rovnic o dvou neznámých, která je dána rovnicemi (3), (4) získáme stacionární body, ve kterých u dané funkce může nastat extrém. Rovnici (4) vydělíme dvěma a vytkneme $y \cdot (x + 1) = 0$. Rovnice (4) je rovna nule ve dvou případech $y = 0 \vee x = -1$. Tyto hodnoty dosadíme postupně zpět do rovnice (3) a vypočteme:

$$\begin{array}{ll} 6x^2 + 10x = 0 & 6 + y^2 - 10 = 0 \\ 2x \cdot (3x + 5) = 0 & y^2 = -4 \\ x = 0 \wedge x = -\frac{5}{3} & y = \pm 2. \end{array}$$

Stacionární body tedy jsou:

$$P_1 = [0, 0], P_2 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right], P_3 = [-1, 2], P_4 = [-1, -2].$$

Nyní dopočítáme z prvních parciálních derivací všechny druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} = 12x + 10$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} = 2x + 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 2y.$$

Stacionární body dosadíme do parciální derivace druhého řádu a na základě postačující podmínky pro lokální extrém určíme druh extrému:

a) Uvažujeme stacionární bod $P_1 = [0, 0]$. Potom:

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial^2 x} = 12 \cdot 0 + 10 = 10$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial^2 y} = 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P_1 = [0, 0]$ dosadíme do D_1 a D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 0 = 20$$

$$D_1 = 10.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 > 0$, je v bodě $P_1 = [0, 0]$ lokální minimum.

b) Uvažujeme stacionární bod $P_2 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right]$. Potom:

$$\frac{\partial^2 f\left(-\frac{5}{3}, 0\right)}{\partial^2 x} = 12 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 10 = -10$$

$$\frac{\partial^2 f\left(-\frac{5}{3}, 0\right)}{\partial^2 y} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 2 = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial^2 f\left(-\frac{5}{3}, 0\right)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f\left(-\frac{5}{3}, 0\right)}{\partial x \partial y} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P_2 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right]$ dosadíme do D_1 a D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3} - 0 = \frac{40}{3}$$

$$D_1 = -10.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 < 0$, je v bodě $P_2 = \left[-\frac{5}{3}, 0\right]$ lokální maximum.

c) Uvažujeme stacionární bod $P_3 = [-1, 2]$. Potom:

$$\frac{\partial^2 f(-1, 2)}{\partial^2 x} = 12 \cdot (-1) + 10 = -2$$

$$\frac{\partial^2 f(-1, 2)}{\partial^2 y} = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(-1, 2)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(-1, 2)}{\partial x \partial y} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P_3 = [-1, 2]$ dosadíme do D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Protože $D_2 < 0$, je v bodě $P_3 = [-1, 2]$ sedlový bod.

d) Uvažujeme stacionární bod $P_4 = [-1, -2]$. Potom:

$$\frac{\partial^2 f(-1, -2)}{\partial^2 x} = 12 \cdot (-1) + 10 = -2$$

$$\frac{\partial^2 f(-1, -2)}{\partial^2 y} = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$$

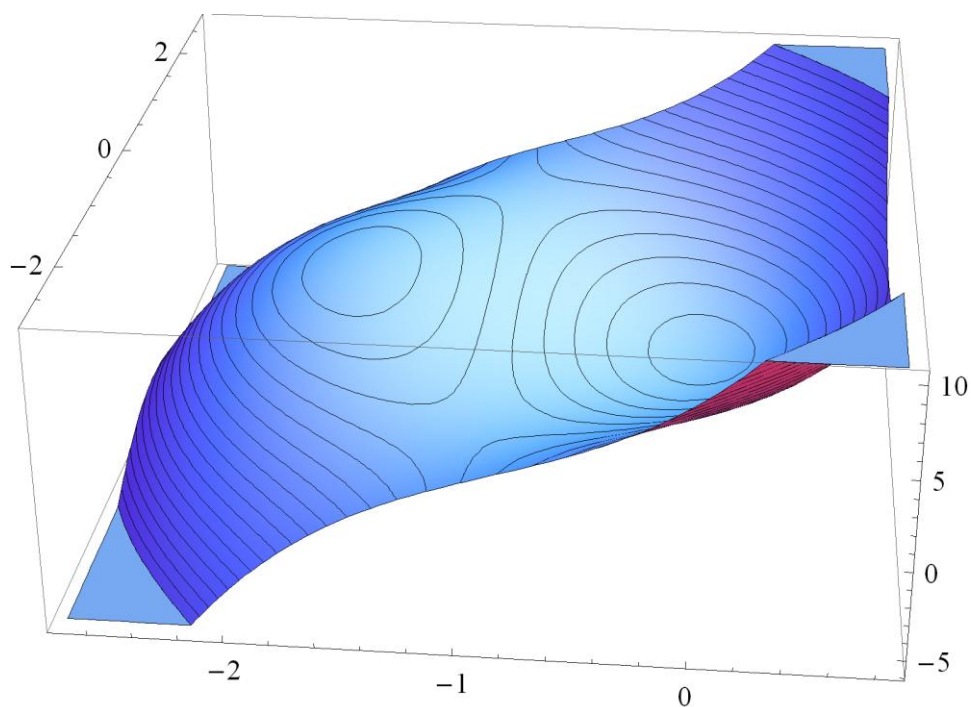
$$\frac{\partial^2 f(-1, -2)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(-1, -2)}{\partial x \partial y} = 2 \cdot (-2) = -4.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P_4 = [-1, -2]$ dosadíme do D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Protože $D_2 < 0$, je v bodě $P_4 = [-1, -2]$ sedlový bod.

Na obrázku 3 můžeme vidět graf funkce.



Obr.3: Graf funkce $f: f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3.3 Příklad 3

Vypočítejte lokální extrémů funkce f

$$f: f(x, y) = -\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}. \quad [3]$$

Řešení:

Definiční obor dané funkce je:

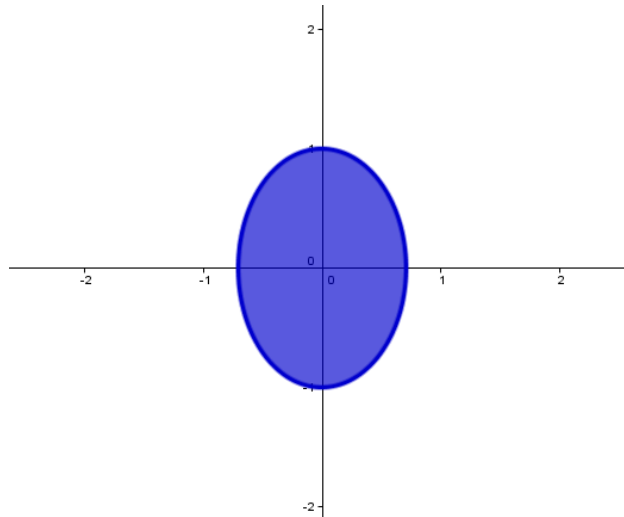
$$Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 - 2x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

$$\text{Tedy: } 1 - 2x^2 - y^2 \geq 0$$

$$2x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + y^2 \leq 1 \quad \rightarrow \text{definičním oborem funkce jsou body, které tvoří}$$

vnitřní část elipsy a její hraniční body.



Obr. 4: $Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 - 2x^2 - y^2 \geq 0\}$

Nejdříve určíme první parciální derivace funkce f . Tyto parciální derivace položíme rovny nule:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}}$$

$$\rightarrow \frac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = \frac{y}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}}$$

$$\rightarrow \frac{y}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}} = 0. \quad (6)$$

Rovnice (5), (6) jsou rovny nule v případě, pokud se $2x = 0 \wedge y = 0$. Stacionárním bodem je tedy bod $P = [0, 0]$.

Z prvních parciálních derivací spočítáme všechny druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{2 \cdot \sqrt{1 - 2x^2 - y^2} - 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-4x)}{1 - 2x^2 - y^2} = \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt{1 - 2x^2 - y^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}}}{1 - 2x^2 - y^2} = \\
&= \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{1 - 2x^2 - y^2} \cdot \sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3} - 4x^2}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}}}{1 - 2x^2 - y^2} = \\
&= \frac{2 \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^2 - 4x^2}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}} \cdot \frac{1}{1 - 2x^2 - y^2} = \\
&= \frac{2 \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^2 - 4x^2}{(1 - 2x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{2 \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^2 - 4x^2}{(1 - 2x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{1 \cdot \sqrt{1 - 2x^2 - y^2} - y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2y)}{1 - 2x^2 - y^2} = \\
&= \frac{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}}}{1 - 2x^2 - y^2} = \\
&= \frac{\frac{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2} \cdot \sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3} - y^2}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}}}{1 - 2x^2 - y^2} = \\
&= \frac{(1 - 2x^2 - y^2)^2 - y^2}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}} \cdot \frac{1}{1 - 2x^2 - y^2} = \frac{(1 - 2x^2 - y^2)^2 - y^2}{(1 - 2x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{(1 - 2x^2 - y^2)^2 - y^2}{(1 - 2x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2y) = \frac{2xy}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}} \\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 2x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-4x) = \frac{2xy}{\sqrt{(1 - 2x^2 - y^2)^3}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{2xy}{\sqrt{(1-2x^2-y^2)^3}}.$$

Stacionární bod dosadíme do parciální derivace 2. řádu a na základě postačující podmínky pro lokální extrém určíme druh extrému.

Uvažujeme tedy stacionární $P = [0,0]$. Potom:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial^2 x} = \frac{2 \cdot (1 - 2 \cdot 0^2 - 0^2)^2 - 4 \cdot 0^2}{(1 - 2 \cdot 0^2 - 0^2)^{\frac{5}{2}}} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial^2 y} = \frac{(1 - 2 \cdot 0^2 - 0^2)^2 - 0^2}{(1 - 2 \cdot 0^2 - 0^2)^{\frac{5}{2}}} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0}{\sqrt{(1 - 2 \cdot 0^2 - 0^2)^3}} = 0.$$

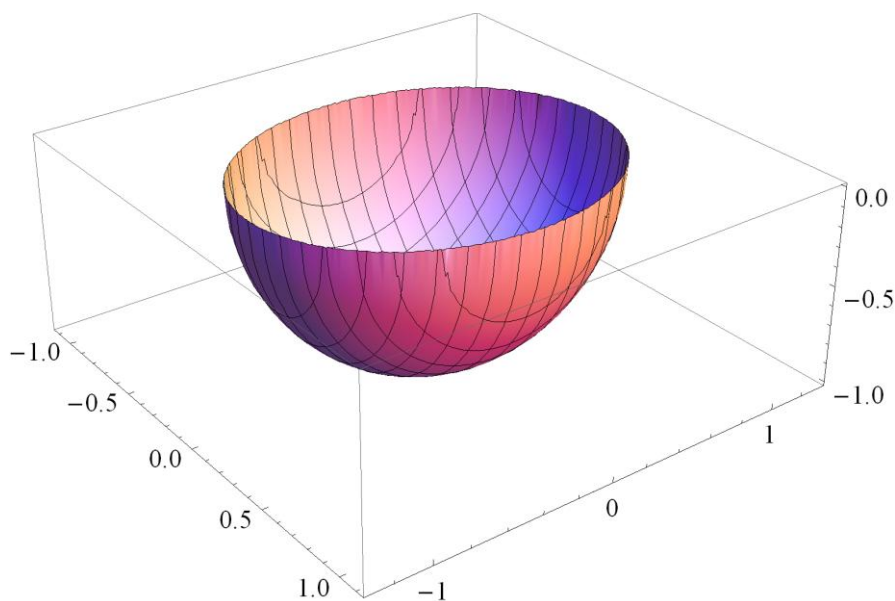
Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P = [0,0]$ dosadíme do D_2 a D_1 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$D_1 = 2.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 > 0$, je v bodě $P = [0,0]$ lokální minimum.

Na obrázku 5 můžeme vidět graf funkce.



Obr. 5: Graf funkce $f: f(x,y) = -\sqrt{1-2x^2-y^2}$.

3.4 Příklad 4

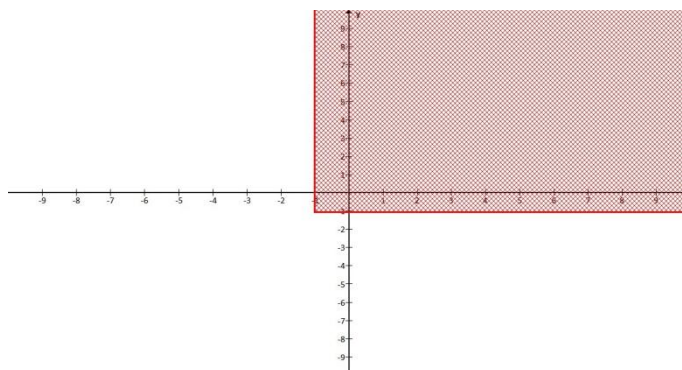
Vypočítejte lokální extrémy funkce f

$$f: f(x, y) = y \cdot \sqrt{1+x} + x \cdot \sqrt{1+y}. \quad [5]$$

Řešení:

Definiční obor dané funkce je:

$$Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \geq -1 \wedge y \geq -1\}.$$



Obr. 6: $Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \geq -1 \wedge y \geq -1\}$

Určíme první parciální derivace, které položíme rovny nule a tím najdeme všechny stacionární body, ve kterých u dané funkce může nastat extrém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= y \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1+y} = \frac{y}{2 \cdot \sqrt{1+x}} + \sqrt{1+y} = \\ &= \frac{y + 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)}}{2 \cdot \sqrt{1+x}} \\ &\rightarrow \frac{y + 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)}}{2 \cdot \sqrt{1+x}} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Rovnice (10) se rovná nule} \Leftrightarrow y + 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)} = 0. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \sqrt{1+x} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+y)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{1+y}} = \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)} + x}{2 \cdot \sqrt{1+y}} \\ &\rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)} + x}{2 \cdot \sqrt{1+y}} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Rovnice (12) se rovná nule} \Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)} + x = 0. \quad (10)$$

Řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých, která je dána rovnicemi (8), (10):

$$\begin{aligned} y + 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)} &= 0 \quad / \cdot (-1) \\ \underline{2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)} + x} &= 0 \\ -y - 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)} &= 0 \\ \underline{x + 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+y)}} &= 0 \\ -y + x &= 0 \\ x = y &\rightarrow x + 2 \cdot \sqrt{(1+x) \cdot (1+x)} = 0 \\ x + 2 \cdot |1+x| &= 0. \end{aligned}$$

Pro:

$$x \in (-1, \infty):$$

$$\begin{aligned} x + 2 + 2x &= 0 \\ 3x &= -2 \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, -1,)$ nenáleží do definičního oboru funkce f .

Protože $x = y$ jediným stacionárním bodem je $P = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$. Dopočítáme z prvních parciálních derivací všechny druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} &= \frac{y}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{y}{4} \cdot \sqrt{(1+x)^3} = \frac{-y}{4 \cdot \sqrt{(1+x)^3}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} &= \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1+y)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x}{4} \cdot \sqrt{(1+y)^3} = \frac{-x}{4 \cdot \sqrt{(1+y)^3}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (1+y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+y}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{2} \cdot (1+y)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+y}} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+y}} \end{aligned}$$

Stacionární bod $P = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$ dosadíme do parciální derivace 2. řádu a tyto hodnoty dosadíme do D_2 a D_1 , který nám určí druh extrému:

$$\frac{\partial^2 f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\partial^2 x} = \frac{\frac{2}{3}}{4 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\partial^2 y} = \frac{\frac{2}{3}}{4 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

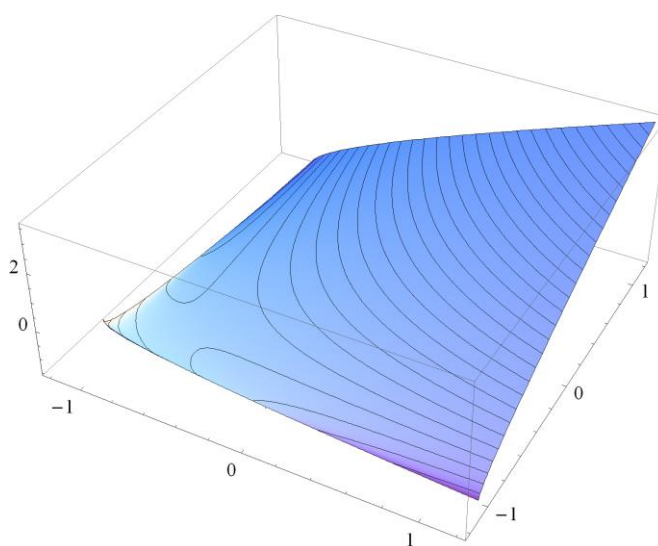
$$\frac{\partial^2 f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{3}}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{3}}} = \sqrt{3}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$$

$$D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Protože $D_2 < 0$, je v bodě $P = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$ sedlový bod.

Na obrázku 7 můžeme vidět graf funkce.



Obr. 7: Graf funkce $f: f(x, y) = y \cdot \sqrt{1+x} + x \cdot \sqrt{1+y}$.

3.5 Příklad 5

Vypočítejte lokální extrémy funkce f

$$f: f(x, y) = e^{x^2+y^2}. \text{ [10]}$$

Řešení:

Definiční obor dané funkce je:

$$Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\}.$$

Nejprve určíme první parciální derivace funkce f . Na základě nutné podmínky pro lokální extrém parciální derivace položíme rovny nule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= e^{x^2+y^2} \cdot (2x) \\ &\rightarrow e^{x^2+y^2} \cdot (2x) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= e^{x^2+y^2} \cdot (2y) \\ &\rightarrow e^{x^2+y^2} \cdot (2y) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Řešením soustavy rovnic o dvou neznámých, která je dána rovnicemi (11), (12) je právě jedno řešení $P = [0, 0]$. Bod P je stacionárním bodem funkce f . Dopočítáme z prvních parciálních derivací všechny druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x.$$

Stacionární bod $P = [0, 0]$ dosadíme do parciální derivace 2. řádu a na základě postačující podmínky pro lokální extrém určíme druh extrému:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial^2 x} = e^{0^2+0^2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0 + e^{0^2+0^2} \cdot 2 = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial^2 y} = e^{0^2+0^2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0 + e^{0^2+0^2} \cdot 2 = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 2 \cdot 0 \cdot e^{0^2+0^2} \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

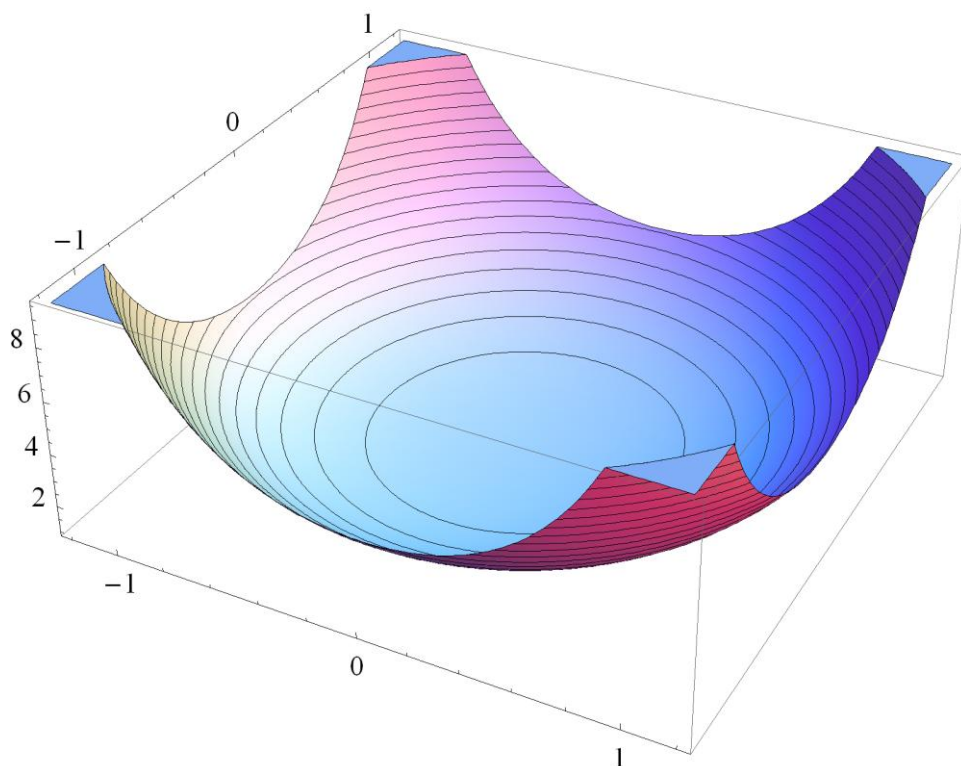
Hodnoty 2. parciální derivace ve stacionárním bodě $P = [0,0]$ dosadíme do D_2 a D_1 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

$$D_1 = 2.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 > 0$, je v bodě $P = [0,0]$ lokální maximum.

Na obrázku 8 můžeme vidět graf funkce.



Obr. 8: Graf funkce $f: f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

3.6 Příklad 6

Vypočítejte lokální extrémy funkce f

$$f: f(x, y) = \ln(x - y) - x^2 + y. \quad [10]$$

Řešení:

Definiční obor dané funkce je:

$$Df = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > y\}.$$

Určíme první parciální derivace funkce f . Na základě nutné podmínky pro lokální extrém tyto parciální derivace položíme rovny nule:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{x - y} - 2x \\ &\rightarrow \frac{1}{x - y} - 2x = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{x - y} \cdot (-1) + 1 = \frac{-1}{x - y} + 1 \\ &\rightarrow \frac{-1}{x - y} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých, která je dána rovnicemi (13), (14):

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - y} - 2x &= 0 \\ \frac{-1}{x - y} + 1 &= 0 \\ -2x + 1 &= 0 \\ -2x &= -1 \\ x = \frac{1}{2} &\rightarrow x \text{ dosadíme do rovnice (14)} \rightarrow \frac{-1}{\frac{1}{2} - y} + 1 = 0 \\ 1 - \frac{1}{2} + y &= 0 \\ y &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme tak stacionární bod $P = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Nyní vypočítáme všechny druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} = -(x - y)^{-2} - 2 = -\frac{1}{(x - y)^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} = (x - y)^{-2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -(x - y)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = (x - y)^{-2} = \frac{1}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(x - y)^2}.$$

Stacionární bod $P = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ dosadíme do parciální derivace 2. řádu a na základě postačující podmínky pro lokální extrém určíme druh extrému:

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial^2 x} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} - 2 = -3$$

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial^2 y} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\partial y \partial x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

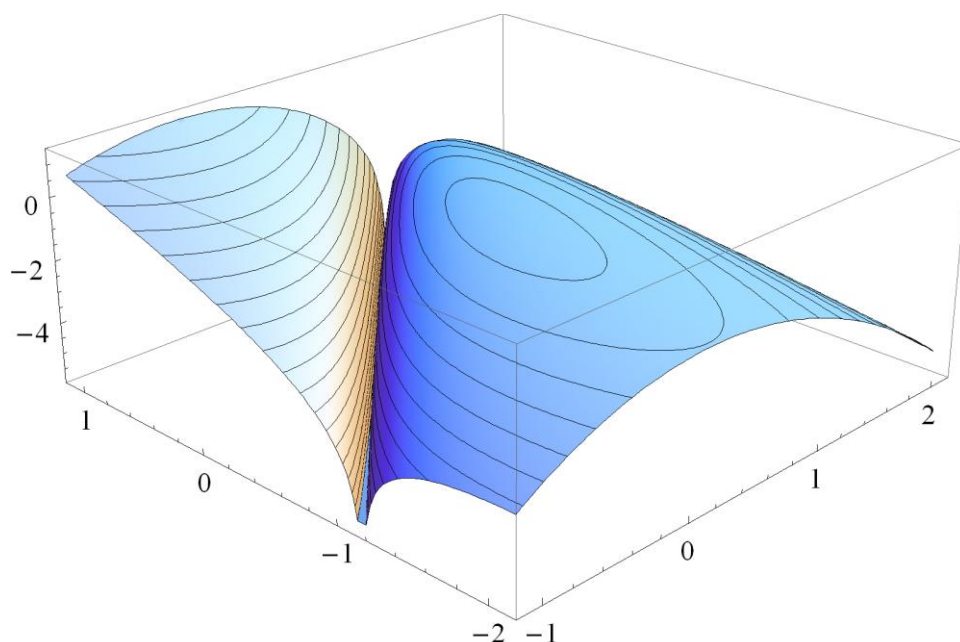
Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ dosadíme do D_2 a D_1 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$$D_1 = -3.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 < 0$, je v bodě $P = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ lokální maximum.

Na obrázku 9 můžeme vidět graf funkce.



Obr. 9: Graf funkce $f: f(x, y) = \ln(x - y) - x^2 + y$.

3.7 Příklad 7

Vypočítejte lokální extrém funkce f

$$f: f(x, y) = e^{xy} \text{ vzhledem k vazební podmínce } g(x, y) = x + y - 1. [16]$$

Řešení:

Z funkce $g(x, y) = x + y - 1$ lze jednoduše vyjádřit jedna neznámá, proto budeme tento příklad řešit dosazovací metodou. Vyjádříme teda proměnnu x , kterou dosadíme do funkce $f(x, y) = e^{xy}$:

$$x + y - 1 = 0$$

$$x = 1 - y \rightarrow \text{dosadíme do funkce } f(x, y) = e^{xy}$$

$$f(g(y), y) = e^{y \cdot (1-y)}.$$

Budeme hledat extrémy funkce jedné proměnné. Pro lepší přehlednost si funkci $f(g(y), y)$ označíme jako funkci $h(y)$.

Funkci $h(y) = e^{y \cdot (1-y)}$ budeme derivovat a derivaci položíme rovnu nule a tak získáme stacionární bod:

$$h'(y) = e^{y-y^2} \cdot (1 - 2y)$$

$$\rightarrow e^{y-y^2} \cdot (1-2y) = 0. \quad (15)$$

Rovnice (15) se bude rovnat nule když: $e^{y-y^2} = 0 \vee 1-2y = 0$, e^{y-y^2} nikdy nemůže být rovno nule, protože $e^{y-y^2} > 0$.

Proto vyřešíme pouze rovnici $1-2y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Stacionárním bodem funkce $h(y)$ je $y = \frac{1}{2}$.

K získání druhé souřadnice stacionárního bodu funkce f musíme souřadnici $y = \frac{1}{2}$ dosadit do $g(x, y) = x + y - 1$:

$$g\left(x, \frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{2} - 1$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Stacionární bodem funkce f je bod $P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Vypočítáme druhou derivaci funkce $h''(y)$ do které dosadíme bod $y = \frac{1}{2}$, čímž zjistíme druh extrému:

$$h''(y) = e^{y-y^2} \cdot (1-2y) \cdot (1-2y) + e^{y-y^2}(-2) = e^{y-y^2} \cdot ((1-2y)^2 - 2)$$

$$\rightarrow h''\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}^2} \cdot \left(\left(1-2 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 - 2\right) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot ((1-1)^2 - 2) = e^{\frac{1}{2}} \cdot (-2) < 0.$$

Funkce h má v bodě $y = \frac{1}{2}$ lokální maximum.

Funkce $f(x, y) = e^{xy}$ má v bodě $P = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ lokální maximum vzhledem k vazební podmínce $g(x, y) = x + y - 1$.

3.8 Příklad 8

Vypočítejte lokální extrém funkce f

$$f: f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 \text{ vzhledem k vazební podmínce}$$

$$g(x, y) = 4x^2 - 8x + 2y^2 + 4y. [5]$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit pomocí Jacobiho metody, protože z vazební podmínky nelze vyjádřit libovolnou proměnnou tak snadno jako v předešlém příkladu (příklad 7). Určíme si parciální derivace prvního řádu funkcí f a g , ze kterých budeme moci sestrojit Jacobiho determinant:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 8x$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4y$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 8x - 8$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 4y + 4$$

$$J_{f,g}(x, y) = \begin{vmatrix} 8x & 4y \\ 8x - 8 & 4y + 4 \end{vmatrix} = 32xy + 32x - (32xy - 32y) = 32x + 32y.$$

Stacionární body získáme, když vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$32x + 32y = 0 \tag{16}$$

$$4x^2 - 8x + 2y^2 + 4y = 0. \tag{17}$$

Z rovnice (16) vyjádříme $x \rightarrow x = -y$ (16) a dosadíme do rovnice (17):

$$4(-y)^2 - 8(-y) + 2y^2 + 4y = 0$$

$$4y^2 + 8y + 2y^2 + 4y = 0$$

$$6y^2 + 12y = 0$$

$$6y \cdot (y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = -2$$

y dosadíme do rovnice (20) $\Rightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Stacionární body jsou $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [2, -2]$.

Nyní určíme funkční hodnoty funkce f ve stacionárních bodech. Větší z těchto hodnot nazveme lokálním maximem funkce f a menší hodnotu nazveme lokálním minimem funkce f :

$$f(0,0) = 0$$

$$f(2,-2) = 16 + 8 = 24.$$

V bodě $P_1 = [0,0]$ je lokální minimum funkce $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2$ vzhledem k vazební podmínce $g(x,y) = 4x^2 - 8x + 2y^2 + 4y$ a v bodě $P_2 = [2,-2]$ je lokální maximum funkce $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2$ vzhledem k vazební podmínce $g(x,y) = 4x^2 - 8x + 2y^2 + 4y$.

4. SLOVNÍ ÚLOHY NA EXTRÉM

4.1 Příklad 1

Číslo 1000 rozložte na součin tří kladných čísel tak, aby součet převrácených hodnot těchto čísel byl minimální. [14]

Řešení:

Podle zadání platí:

$$x \cdot y \cdot z = 1000, \quad (19)$$

$$\text{kde } x > 0, y > 0, z > 0 \wedge x, y, z < 1000$$

Řešením úlohy je najít taková čísla x, y, z , aby funkce:

$$s(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (20)$$

nabývala minimální hodnoty.

Protože funkce (20) je funkcí tří proměnných je potřeba vyjádřit libovolnou proměnnou ze vztahu (19) například $z = \frac{1000}{xy}$ (21). Dosazením do funkce (20) dostaneme funkci dvou proměnných:

$$s(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{1000}. \quad (22)$$

Nyní budeme pokračovat v hledání lokálních extrémů funkce dvou proměnných. Určíme první parciální derivace funkce (22):

$$\frac{\partial s(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{1000} \quad x \neq 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial s(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{1000} \quad y \neq 0. \quad (24)$$

Na základě nutné podmínky pro existenci lokálního extrému položíme parciální derivace (23), (24) rovny nule a vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, čímž získáme stacionární bod P :

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{y}{1000} = 0 \quad x \neq 0 \quad (25)$$

$$-\frac{1}{y^2} + \frac{x}{1000} = 0 \quad y \neq 0 \quad (26)$$

Z rovnice (25) vyjádříme $y = \frac{1000}{x^2}$ a dosadíme do rovnice (26):

$$-\frac{1}{\frac{1000^2}{x^4}} + \frac{x}{1000} = 0.$$

Po úpravě dostáváme $x \cdot (-x^3 + 1000) = 0$. Vidíme, že $x_1 = 0 \vee x_2 = 10$. x_1 nebude kořenem rovnice, neboť nesplňuje podmínku rovnice (25). Dosazením zpět do výrazu $y = \frac{1000}{x^2}$ dostáváme $y = 10 \Rightarrow$ stacionární bod $P = [10,10]$.

Nyní dopočítáme všechny druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial^2 y} = \frac{2}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{1}{1000}.$$

Stacionární bod $P = [10,10]$ dosadíme do parciální derivace 2. řádu a na základě postačující podmínky pro lokální extrém ověříme, zda pro funkci (22) existuje ve stacionárním bodě $P = [10,10]$ lokální minimum:

$$\frac{\partial^2 s(10,10)}{\partial^2 x} = \frac{2}{1000}$$

$$\frac{\partial^2 s(10,10)}{\partial^2 y} = \frac{2}{1000}$$

$$\frac{\partial^2 s(10,10)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 s(10,10)}{\partial y \partial x} = \frac{1}{1000}.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P = [10,10]$ dosadíme do D_2 a D_1 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{1000} & \frac{1}{1000} \\ \frac{1}{1000} & \frac{2}{1000} \end{vmatrix} = \frac{3}{1000^2}$$

$$D_1 = \frac{2}{1000}.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 > 0$ je v bodě $P = [10,10]$ lokální minimum. Z výrazu (21) vyjádříme $z = 10$.

Jelikož se jedná o jediný stacionární bod funkce (20) na celém jejím definičním oboru a funkce (20) je spojitá, jde tedy zároveň i o globální minimum této funkce.

Čísla $x = 10$, $y = 10$, $z = 10$ jsou hledanými čísly, která splňují podmínku (19) a funkci (20).

4.2 Příklad 2

Zahraníční firma na výrobu domácích spotřebičů produkuje dva typy ledniček. Funkce $f: f(x, y) = -6x^2 + 6xy - 3y^2 + 30x - 12y + 151$ vyjadřuje měsíční zisk v tisících v závislosti na prodeji prvního (značeno x) a druhého typu ledniček (značeno y). Jakého maximálního měsíčního zisku v tisících lze dosáhnout a při jaké produkci?

Řešení:

Potřebujeme určit, zda funkce:

$$f(x, y) = -6x^2 + 6xy - 3y^2 + 30x - 12y + 151 \quad (27)$$

$$\text{kde } x \geq 0, y \geq 0,$$

má globální maximum.

Vypočítáme první parciální derivaci:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -12x + 6y + 30 \quad (28)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 6x - 6y - 12 \quad (29)$$

a zjistíme, kdy je parciální derivace (28), (29) nulová, řešíme soustavu:

$$-12x + 6y + 30 = 0 \quad (30)$$

$$\underline{6x - 6y - 12 = 0} \quad (31)$$

$$-6x = -18$$

$$x = 3 \rightarrow \text{dosadíme do rovnice (31):}$$

$$6 \cdot 3 - 6y - 12 = 0$$

$$y = 1.$$

Řešením soustavy rovnic o dvou neznámých, která je dána rovnicemi (30), (31), je $K = \{[3,1]\}$. Stacionárním bodem je tedy bod $P = [3,1]$.

Nyní dopočítáme všechny druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} = -12$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 6.$$

Parciální derivace druhého řádu vyšly jako číselné hodnoty, proto nemusíme dosazovat stacionární bod a pouze tyto číselné hodnoty dosadíme do determinantu D_2 a D_1 , který nám určí druh extrému (27) v bodě $P = [3,1]$:

$$D_2 = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 72 - 36 = 36$$

$$D_1 = -12.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 < 0$ je v bodě $P = [3,1]$ lokální maximum.

Jelikož se jedná o jediný stacionární bod funkce (27) na celém jejím definičním oboru a funkce (27) je spojitá, jde tedy zároveň i o globální minimum této funkce.

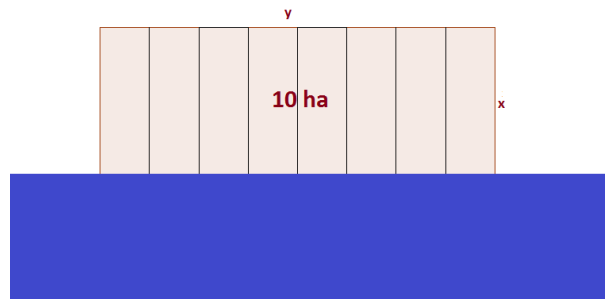
Dosazením bodu $P = [3,1]$ do (27) zjistíme hodnotu funkce v tomto bodě, to znamená maximální hodnotu funkce:

$$f(3,1) = 190.$$

Maximální měsíční zisk, kterého zahraniční firma dosáhne, činí 190 tisíc při produkci 3 tisíce lednic prvního typu a 1 tisíc lednic druhého typu.

4.3 Příklad 3

Farmář chce rozdělit 10 hektarů své půdy podél řeky plotem, který je rovnoběžný s řekou a devíti ploty, které jsou na řeku kolmé. Ukažte, že chce-li spotřebovat co nejméně materiálu, musí být rovnoběžný plot stejně dlouhý jako kombinace všech kolmých plotů. [2]



Řešení:

Kombinaci rovnoběžného plotu (značíme y) a všech kolmých plotů (značíme x) označíme jako funkci:

$$f(x, y) = 9x + y \quad (32)$$

$$\text{kde } x > 0, y > 0.$$

Potřebujeme určit, zda má funkce (32) lokální minimum. Funkce (32) je vázaná na podmínku:

$$g(x, y) = x \cdot y - 10000 \quad (10ha = 10000m^2) \quad (33)$$

Z funkce (33) lze jednoduše vyjádřit libovolná neznámá např. $y = \frac{10000}{x}$ (34), proto budeme extrém hledat pomocí dosazovací metody.

Výraz (34) dosadíme do funkce (32) a budeme hledat extrém funkce jedné proměnné:

$$h(x) = 9x + \frac{10000}{x}. \quad (35)$$

Funkci (35) budeme derivovat a derivaci položíme rovnu nule a tak získáme stacionární bod:

$$h'(x) = -\frac{10000}{x^2} + 9.$$

Derivace je nulová v případě, že:

$$-\frac{10000}{x^2} + 9 = 0$$

$$\frac{1000}{x^2} = 9$$

$$x^2 = \frac{10000}{9}$$

$$|x| = \frac{100}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{100}{3} \vee x_2 = -\frac{100}{3}.$$

Protože se zabýváme spotřebou materiálu, budeme uvažovat pouze $x_1 = \frac{100}{3}$.

Vypočítáme druhou derivaci funkce $h(x)$ do které dosadíme $x_1 = \frac{100}{3}$, čímž zjistíme druh extrému:

$$h''(x) = \frac{20000}{x^3}$$

$$h''\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{20000}{\left(\frac{100}{3}\right)^3}$$

Protože je $\frac{20000}{\left(\frac{100}{3}\right)^3} > 0$ má funkce (35) lokální minimum. Tento lokální extrém je podle

věty o dosazovací metodě zároveň i lokálním extrémem funkce (32) vzhledem k vazební podmínce (33).

Jelikož se jedná o jediný stacionární bod funkce (32) a (35) na celém jejím definičním oboru a funkce jsou spojité, jde tedy zároveň i o globální minimum této funkce.

Tím jsme ukázali, že pokud chce farmář spotřebovat co nejméně materiálu, musí být rovnoběžný plot stejně dlouhý jako kombinace všech kolmých plotů.

4.4 Příklad 4

Funkce $f(x, y) = 3000xy - 10x^3 - y^3 - 356000$ vyjadřuje zisk pekárny z prodeje chleba (značíme x) a rohlíků (značíme y) v korunách. Jakého maximálního zisku lze dosáhnout?

Řešení:

Potřebujeme najít, v jakém bodě má funkce:

$$f(x, y) = 3000xy - 10x^3 - y^3 - 356000 \quad (36)$$

$$\text{kde } x \geq 0, y \geq 0,$$

má globální maximum.

Vypočítáme první parciální derivaci:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3000y - 3000x^2 \quad (37)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3000x - 3y^2 \quad (38)$$

a zjistíme, kdy je parciální derivace (37), (38) nulová, řešíme soustavu:

$$3000y - 3000x^2 = 0 \quad (39)$$

$$\underline{3000x - 3y^2 = 0} \quad (40).$$

Z rovnice (37) vyjádříme $y = x^2$ (41) a dosadíme do rovnice (40):

$$3000x - 3x^4 = 0$$

$$3x \cdot (1000 - x^3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 10$$

Hodnoty x_1, x_2 dosadíme do výrazu (41) a určíme $y_1 = 0 \vee y_2 = 100$.

Stacionárními body jsou $P_1 = [0, 0]$ a $P_2 = [10, 100]$.

Nyní dopočítáme všechny druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 x} = -6000x$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 3000.$$

Stacionární body dosadíme do parciální derivace druhého řádu a určíme druh extrému:

a) Uvažujeme stacionární bod $P_1 = [0,0]$. Potom:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial^2 x} = -6000 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial^2 y} = -6 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 3000.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P_1 = [0,0]$ dosadíme do D_1 a D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3000 \\ 3000 & 0 \end{vmatrix} = -6000$$

$$D_1 = -10.$$

Protože $D_2 < 0$ je v bodě $P_1 = [0,0]$ sedlový bod.

b) Uvažujeme stacionární bod $P_2 = [10,100]$. Potom:

$$\frac{\partial^2 f(10,100)}{\partial^2 x} = -6000 \cdot 10 = -60000$$

$$\frac{\partial^2 f(10,100)}{\partial^2 y} = -6 \cdot 100 = -600$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 3000.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P_2 = [10,100]$ dosadíme do D_1 a D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} -60000 & 3000 \\ 3000 & -600 \end{vmatrix} = 36000000 - 9000000 = 27000000$$

$$D_1 = -60000.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 < 0$ je v bodě $P_2 = [10,100]$ lokální maximum.

Jelikož se jedná o jediný stacionární bod funkce (36), kde je lokální maximum na celém jejím definičním oboru a funkce (36) je spojitá, jde tedy zároveň i o globální minimum této funkce.

Dosadíme bod $P_2 = [10, 100]$ do funkce (36):

$$f(x, y) = 644000.$$

Pekárna dosáhne největšího možného měsíčního zisku 644 000 korun.

4.5 Příklad 5

Funkce $f(x, y) = \frac{80x}{5+x} + \frac{40y}{10+y} - 2x - 2y$ vyjadřuje měsíční zisk jedné firmy v závislosti na výdejích za reklamu v televizi x a v rozhlasu y (v tisících Kč). Jak nejvýhodněji byste rozdělili 25 000 Kč do reklamy měsíčně? [15]

Řešení:

Potřebujeme určit, zda má funkce:

$$f(x, y) = \frac{80x}{5+x} + \frac{40y}{10+y} - 2x - 2y \quad (42)$$

globální maximum a v jakém bodě. Funkce (42) je vázaná na podmínku $x + y = 25$ (pohybujeme se v tisících) tudíž na funkci:

$$g(x, y) = x + y - 25. \quad (43)$$

Ze zadání dále plyne, že $x \geq 0, y \geq 0$. Takže se pohybujeme na trojúhelníku, což je kompaktní množina. Extrém bude tedy ve vrcholech trojúhelníka nebo tam, kde je Jakobiho determinant roven nule.

Určíme si parciální derivace prvního řádu u funkcí (42) a (43), ze kterých budeme moci Jakobián sestavit:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{80 \cdot (5+x) - 80x}{(5+x)^2} - 2 = \frac{80 \cdot (5+x-x)}{(5+x)^2} - 2 = \frac{400}{(5+x)^2} - 2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{40 \cdot (10+y) - 40y}{(10+y)^2} - 2 = \frac{40 \cdot (10+y-y)}{(10+y)^2} - 2 = \frac{400}{(10+y)^2} - 2$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 1.$$

Nyní hodnoty parciálních derivací dosadíme do Jakobiánu:

$$J_{f,g}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{400}{(5+x)^2} - 2 & \frac{400}{(10+y)^2} - 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{400}{(5+x)^2} - 2 - \frac{400}{(10+y)^2} + 2.$$

Stacionární body získáme, když $J_{f,g}(x_0, y_0) = 0 \wedge g(x, y) = 0$. Proto řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{400}{(5+x)^2} - 2 - \frac{400}{(10+y)^2} + 2 = 0 \quad (44)$$

$$x + y - 25 = 0. \quad (45)$$

Z rovnice (45) vyjádříme $x = 25 - y$ (46) a dosadíme do rovnice (44):

$$\frac{400}{(5+25-y)^2} - 2 - \frac{400}{(10+y)^2} + 2 = 0$$

$$\frac{400}{(30-y)^2} - \frac{400}{(10+y)^2} = 0$$

$$400 \cdot (10+y)^2 - 400 \cdot (30-y)^2 = 0$$

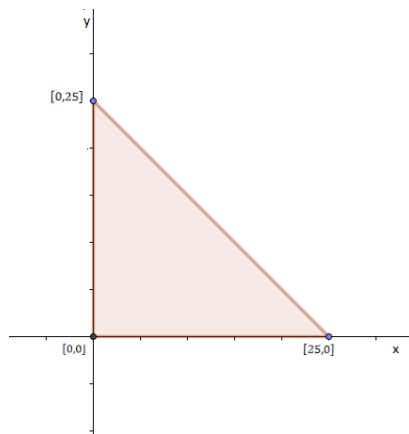
$$400 \cdot (100 + 20y + y^2 - 900 + 60y - y^2) = 0$$

$$400 \cdot (-800 + 80y) = 0 \Leftrightarrow (-800 + 80y) = 0$$

$$y = 10.$$

Hodnotu $y = 10$ dosadíme do rovnice (45) a určíme $x = 15$. Stacionárním bodem je tedy bod $P_1 = [15, 10]$.

Další body podezřelé z extrému jsou vrcholy trojúhelníku, který je daný podmínkou $x + y = 25$. Zároveň musí být $x = 0 \vee y = 0$.



Obr. 10

Z obrázku 10 plyne, že dalšími body podezřelými z extrému jsou $P_2 = [0,0]$, $P_3 = [25,0]$, $P_4 = [0,25]$

Jelikož potřebujeme rozdělit 25 tisíc bodem $P_2 = [0,0]$ se nemusíme zabývat.

Nyní určíme funkční hodnoty funkce (42) v bodech $P_1 = [15,10]$, $P_3 = [25,0]$, $P_4 = [0,25]$. Největší z těchto hodnot nazveme maximem funkce (42):

$$f(15,10) = 60$$

$$f(25,0) = 16,6$$

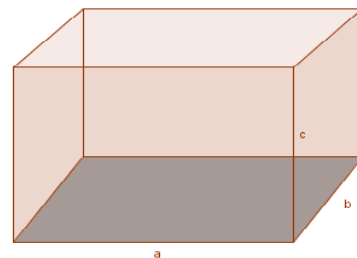
$$f(0,25) = -21,7.$$

V bodě $P_1 = [15,10]$ je globální maximum funkce (42) vzhledem k vazební podmínce (43).

Díky nalezení globálního maxima v bodě $P_1 = [15,10]$ víme, že 25 tisíc bude nejvýhodnější rozdělit tak, že na reklamu v televizi dáme 15 tisíc korun a na reklamu v rádiu dáme 10 tisíc korun.

4.6 Příklad 6

Na výrobu akvária se používá sklo na stěny a břidlice na dno. Břidlice je 5 krát dražší než sklo. Při jakých rozměrech akvária (v decimetrech) o objemu 160 litrů budou náklady na výrobu nejmenší?



Řešení:

Strany kvádrů si označíme a, b, c . Víme, že povrch kvádrů je $S = 2ab + 2ac + 2bc$. Dále víme, že dno, které se vyrábí z břidlice je 5 krát dražší a akvárium nemá víko. Potom tedy cena za akvárium bude:

$$C(a, b, c) = 5ab + 2ac + 2bc. \quad (47)$$

Objem akvária je:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$160 = a \cdot b \cdot c. \quad (48)$$

Z (48) si vyjádříme $c = \frac{160}{ab}$ (49). Vztah (49) dosadíme do (47) a tím získáme funkci dvou proměnných:

$$C(a, b) = 5ab + 2a \cdot \frac{160}{ab} + 2b \cdot \frac{160}{ab},$$

$$C(a, b) = 5ab + \frac{320}{b} + \frac{320}{a} \quad (50)$$

kde $a, b > 0$ (délka nemůže být záporná, ani rovna nule).

Hledáme tedy globální extrém funkce, proto vypočítáme první parciální derivace, které položíme rovny nule, abychom našli stacionární body:

$$\frac{\partial C(a, b)}{\partial a} = 5b - \frac{320}{a^2} \rightarrow 5b - \frac{320}{a^2} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial C(a, b)}{\partial b} = 5a - \frac{320}{b^2} \rightarrow 5a - \frac{320}{b^2} = 0 \quad (52)$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých danou rovnicemi (51), (52). Z rovnice

(51) vyjádříme $b = \frac{64}{a^2}$ a dosadíme do rovnice (52):

$$5a - \frac{320}{\left(\frac{64}{a^2}\right)^2} = 0$$

$$5a - \frac{5a^4}{64} = 0$$

$$320a - 5a^4 = 0$$

$$5a \cdot (64 - a^3) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \vee a_2 = 4.$$

Kořen $a_1 = 0$ nevyhovuje podmínce, proto s ním dále nepočítáme. Dosazením a_2 do (51) získáme $b = 4$. Stacionárním bodem je tedy bod $P = [4,4]$.

Nyní dopočítáme všechny druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 C(a, b)}{\partial^2 a} = \frac{640}{a^3}$$

$$\frac{\partial^2 C(a, b)}{\partial^2 b} = \frac{640}{b^3}$$

$$\frac{\partial^2 C(a, b)}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial b \partial a} = 5.$$

Stacionární bod $P = [4,4]$ dosadíme do parciální derivace 2. řádu a na základě postačující podmínky pro lokální extrém ověříme, zda pro funkci (50) existuje ve stacionárním bodě $P = [4,4]$ lokální minimum:

$$\frac{\partial^2 C(4,4)}{\partial^2 a} = 10$$

$$\frac{\partial^2 C(4,4)}{\partial^2 b} = 10$$

$$\frac{\partial^2 C(4,4)}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 C(4,4)}{\partial b \partial a} = 5.$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P = [4,4]$ dosadíme do D_2 a D_1 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 100 - 25 = 75$$

$$D_1 = 10.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 > 0$ je v bodě $P = [10,10]$ lokální minimum.

Jelikož se jedná o jediný stacionární bod funkce (50) na celém jejím definičním oboru a funkce (50) je spojitá, jde tedy zároveň i o globální minimum této funkce.

Nyní dopočítáme třetí rozměr c dosazením do (49):

$$c = \frac{160}{16}$$

$$c = 10.$$

Bude-li mít akvárium čtvercové dno o hraně 4 dm a výška akvária bude 16 dm, budou náklady na jeho výrobu minimální.

4.7 Příklad 7

Určete poloměr r a výšku v válce tak, aby měl při daném povrchu S maximální objem. [2]

Řešení:

Budeme hledat globální extrém (maximum) funkce, která je tvořena objemem válce. Tedy:

$$V(r, v) = \pi r^2 v. \quad (53)$$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ bereme jako funkci dvou proměnných, kde S je konstanta. Tedy:

$$S(r, v) = 2\pi r^2 + 2\pi r v. \quad (54)$$

Funkce (54) je zároveň i vazební podmínkou.

Z vazební podmínky (54) si zvolíme libovolnou neznámou například $v = \frac{S}{2\pi r} - r$ (55) a dosadíme do funkce (53) a tím získáme funkce jedné proměnné:

$$V\left(r, \frac{S}{2\pi r} - r\right) = \pi r^2 \cdot \left(\frac{S}{2\pi r} - r\right). \quad (56)$$

Pro lepší orientaci budeme funkci (56) značit pouze $V(r)$:

$$V(r) = \frac{\pi r^2 \cdot S}{2\pi r} - \pi r^3$$

$$V(r) = \frac{r \cdot S}{2} - \pi r^3.$$

Budeme hledat extrém funkce jedné proměnné:

$$V(r) = \frac{r \cdot S}{2} - \pi r^3 \quad (57).$$

Funkci 57 budeme derivovat a derivaci položíme rovnu nule a tak získáme stacionární bod:

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2.$$

Derivace je nulová v případě, že:

$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

$$3\pi r^2 = \frac{S}{2}$$

$$r^2 = \frac{S}{6\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Vypočítáme druhou derivaci funkce (57) do které dosadíme $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, čímž zjistíme druh extrému:

$$V''(r) = -6\pi r$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -6\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

Protože je $-6\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}} < 0$ má funkce (57) lokální maximum. Tento lokální extrém je podle věty o dosazovací metodě zároveň i lokálním extrémem funkce (53) vzhledem k vazební podmínce (54).

Jelikož se jedná o jediný stacionární bod funkce (53) na celém jejím definičním oboru a funkce (53) je spojitá, jde tedy zároveň i o globální minimum této funkce.

Nyní dopočítáme výšku v dosazením do (55):

$$v = \frac{S}{2\pi r} - \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{\pi}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{\frac{2}{3}S}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{\frac{S}{3}}{\frac{\pi \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}} = \frac{S \cdot \sqrt{6\pi} \cdot \sqrt{S}}{3\pi \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{S}} = \frac{\sqrt{6\pi} \cdot S}{3\pi}.$$

Válec bude mít maximální objem při daném povrchu S , jestliže bude jeho výška

$$v = \frac{\sqrt{6\pi} \cdot S}{3\pi} \text{ a jeho poloměr } r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

4.8 Příklad 8

Mezi všemi trojúhelníky, jejichž obvod je l , najděte ten, jehož obsah je největší. [5]

Řešení:

Pro výpočet obsahu trojúhelníka použijeme Heronův vzorec:

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}, \quad (58)$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{l}{2} \text{ (poloviční obvod)}. \quad (59)$$

Heronův vzorec (58) vyjadřuje závislost obsahu S na obvodu l trojúhelníka.

Budeme hledat globální maximum funkce (58), což je funkce tří proměnných a, b, c .

Proto libovolnou proměnnou vyjádříme pomocí ostatních proměnných ze vztahu (59), například:

$$c = 2s - a - b$$

dosadíme do (58) a dostaneme tak funkci dvou proměnných a, b , kde hledáme její extrém:

$$S(a, b) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}. \quad (60)$$

Vypočítáme první parciální derivaci funkce (60):

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = \frac{s \cdot (s - b) \cdot [(-1) \cdot (a + b - s) + (s - a)]}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}} = \frac{s \cdot (s - b) \cdot (-2a - b + 2s)}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}} \quad (61)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial b} = \frac{s \cdot (s-a) \cdot [(-1) \cdot (a+b-s) + (s-b)]}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}} = \frac{s \cdot (s-a) \cdot (-2b-a+2s)}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}}. \quad (62)$$

Na základě nutné podmínky pro lokální extrém tyto parciální derivace položíme rovny nule, abychom získali stacionární body.

Rovnice (61) se rovná nule v případě že:

$$(s-b) = 0 \quad (63) \vee \quad (-2a-b+2s) = 0. \quad (64)$$

Rovnice (62) se rovná nule v případě že:

$$(s-a) = 0 \quad (65) \vee \quad (-2b-a+2s) = 0. \quad (66)$$

Dále řešíme tyto soustavy:

1. (63) + (65)

$$s = b \quad \wedge \quad s = a.$$

Po dosazení do (59) dostáváme, že $c = 0$. V trojúhelníku ABC nemůže být $c = 0$.

2. (63) + (66)

$$(s = b \quad \wedge \quad 2b + a = 2s) \Rightarrow a = 0.$$

V trojúhelníku ABC nemůže být $a = 0$.

3. (64) + (65)

$$(s = a \quad \wedge \quad 2a + b = 2s) \Rightarrow b = 0.$$

V trojúhelníku ABC nemůže být $b = 0$.

4. (64) + (66)

$$(2b + a = 2s \quad \wedge \quad 2a + b = 2s) \Rightarrow a = b.$$

Do rovnic (64), (66) dosadíme $a = b$. Dostaneme $a = \frac{2s}{3}, b = \frac{2s}{3}$. Tyto hodnoty dosadíme do (59):

$$s = \frac{\frac{2s}{3} + \frac{2s}{3} + c}{2}$$

$$c = \frac{2s}{3}.$$

Ze zadání plyne, že $2s = l$, a tedy $a = b = c = \frac{l}{3}$.

Z výše uvedeného vyplývá, že trojúhelník ABC je při daném obvodu l rovnostranný.

Nyní musíme ověřit, zda je v bodě $P = \left[\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right]$ globální maximum. Dopočítáme tedy všechny druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial^2 a} &= \frac{-2s \cdot (s - b) \cdot 2 \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}}{4s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)} - \\ &\quad - \frac{s^2 \cdot (s - b)^2 \cdot (2s - 2a - b)^2 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}} - \\ &\quad - \frac{4s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}{4s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)} = \\ &= \frac{s^2 \cdot (s - b)^2 \cdot [(4a - 4s) \cdot (a + b - c) - (2s - 2a - b)^2]}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)]^3}} = \\ &= - \frac{s^2 b^2 \cdot (s - b)^2}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)]^3}} \\ \frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial^2 a} &= - \frac{s^2 b^2 \cdot (s - b)^2}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)]^3}} \\ \frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial^2 b} &= \frac{-2s \cdot (s - a) \cdot 2 \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}}{4s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)} - \\ &\quad - \frac{s^2 \cdot (s - a)^2 \cdot (2s - 2b - a)^2 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}} - \\ &\quad - \frac{4s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)}{4s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)} = \\ &= \frac{s^2 \cdot (s - a)^2 \cdot [(4b - 4s) \cdot (a + b - c) - (2s - 2b - a)^2]}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)]^3}} = \\ &= - \frac{s^2 a^2 \cdot (s - a)^2}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)]^3}} \\ \frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial^2 b} &= - \frac{s^2 a^2 \cdot (s - a)^2}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (a + b - s)]^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a \partial b} &= \frac{2s \cdot (2a + 2b - 3s) \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}}{4s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)} - \\
&\quad - \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (2s-2a-b) \cdot (2s-2b-a)}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}} - \\
&\quad - \frac{4s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}{4s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)} = \\
&= \frac{2s^2 \cdot (2a + 2b - 3s) \cdot s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}} - \\
&\quad - \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (2s-2a-b) \cdot (2s-2b-a)}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}} = \\
&= \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot [2 \cdot (a^2 + b^2 + s^2) + 3ab - 4s \cdot (a+b)]}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}} \\
\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a \partial b} &= \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot [2 \cdot (a^2 + b^2 + s^2) + 3ab - 4s \cdot (a+b)]}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial b \partial a} &= \frac{2s \cdot (2a + 2b - 3s) \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}}{4s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)} - \\
&\quad - \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (2s-2b-a) \cdot (2s-2a-b)}{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}} - \\
&\quad - \frac{4s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}{4s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)} = \\
&= \frac{2s^2 \cdot (2a + 2b - 3s) \cdot s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}} - \\
&\quad - \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (2s-2a-b) \cdot (2s-2b-a)}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}} = \\
&= \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot [2 \cdot (a^2 + b^2 + s^2) + 3ab - 4s \cdot (a+b)]}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}} \\
\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial b \partial a} &= \frac{s^2 \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot [2 \cdot (a^2 + b^2 + s^2) + 3ab - 4s \cdot (a+b)]}{4 \cdot \sqrt{[s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (a+b-s)]^3}}.
\end{aligned}$$

Stacionární bod $P = \left[\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right]$ dosadíme do parciální derivace 2. řádu a určíme druh extrému:

$$\frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial^2 a} = \frac{s^2 \cdot \frac{4s^2}{9} \cdot \frac{s^2}{9}}{4 \cdot \sqrt{\left(\frac{s^4}{27}\right)^3}} = -\frac{4s^6}{81} \cdot \frac{27 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4s^6} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial^2 b} = \frac{s^2 \cdot \frac{4s^2}{9} \cdot \frac{s^2}{9}}{4 \cdot \sqrt{\left(\frac{s^4}{27}\right)^3}} = -\frac{4s^6}{81} \cdot \frac{27 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4s^6} = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial a \partial b} &= \frac{\partial^2 S(a, b)}{\partial b \partial a} = \frac{s^2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{4s^2}{9} + \frac{4s^2}{9} + s^2 \right) + 3 \cdot \frac{4s^2}{9} - 4s \cdot \frac{4s}{3} \right]}{4 \cdot \sqrt{\left(\frac{s^4}{27}\right)^3}} = \\ &= \frac{s^4}{9} \cdot \left(-\frac{2s^2}{9} \right) \frac{27 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4s^6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Hodnoty 2. parciální derivace v bodě $P = \left[\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3} \right]$ dosadíme do D_1 a D_2 :

$$D_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$D_1 = -\sqrt{3}.$$

Protože $D_2 > 0 \wedge D_1 < 0$ je v bodě $P = \left[\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3} \right]$ lokální maximum.

Jelikož se jedná o jediný stacionární bod funkce (60) na celém jejím definičním oboru a funkce (60) je spojitá, jde tedy zároveň i o globální minimum této funkce.

Hledaným trojúhelníkem vyhovujícím podmínkám zadání je rovnostranný trojúhelník o velikosti strany $\frac{l}{3}$.

5. SLOVNÍ ÚLOHY – NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1

Při jakých rozměrech bude mít otevřená nádoba tvaru kvádru o objemu 36 litrů minimální povrch? [11]

Řešení:

Nádoba o objemu 36 litrů bude mít minimální povrch, jestliže bude mít čtvercovou podstavu o straně $a = 2\sqrt[3]{9}$ a výšku $v = 2\sqrt[3]{9}$.

Příklad 2

Součet tří kladných čísel s_1, s_2, s_3 je 21. Určete jednotlivé sčítance, aby byl jejich součin maximální. [6]

Řešení:

Součin sčítanců, který je při daných podmínkách maximální, je 343, když

$$s_1 = s_2 = s_3 = 7.$$

Příklad 3

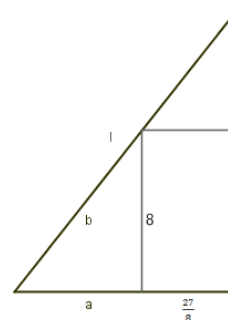
Najděte nejkratší množnou délku žebříku opřené o svislou stěnu a o zem, který jde nad přístřeškem vysokým 8 m a postaveným $\frac{27}{8}$ m od stěny. Víme, že

z podobnosti trojúhelníku plyne, že: $\frac{l}{b} = \frac{a + \frac{27}{8}}{a}$ a

$$b^2 = a^2 + 64. [2]$$

Řešení:

Nejkratší možná délka žebříku je $\frac{125}{8}$ metru.



Příklad 4

Určete rozměry kvádru s daným objemem V tak, aby kvádr měl minimální povrch. [16]

Řešení:

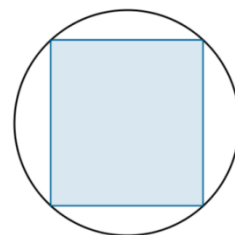
Rozměry kvádru jsou $a = b = c = \sqrt[3]{V}$.

Příklad 5

Do kruhu o poloměru r vepište pravoúhelník maximálního obsahu. [12]

Řešení:

Pravoúhelník, který má maximální obsah je čtverec o straně $a = \sqrt{2} \cdot r$.



Příklad 6

Na Novém Zélandu probíhá každoročně sklizeň jablek a hrušek. Funkce $f(a, b) = \frac{203}{4} + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$ vyjadřuje kolik tun jablek (značíme x) a kolik tun hrušek (značíme y) načese jeden tým za den. Jablka a hrušky se ukládají do společného kontejneru. Jaké maximální váhy kontejneru lze dosáhnout?

Řešení:

Maximální váha kontejneru je 55 tun.

Příklad 7

Společnost dostala objednávku na 200 kusů jednoho z jejích výrobků. Protože má dva výrobní závody, chce rozdělit splnění objednávky tak, aby byly náklady minimální. Je-li a počet kusů vyrobený v prvním závodě a b počet kusů ve druhém závodě, jsou celkové náklady na výrobu popsány funkcí

$f(x, y) = 2a^2 + ab + b^2 + 500$. Jak nejvýhodněji rozdělit produkci tohoto výrobku? [7]

Řešení:

Nejvýhodněji se produkce výrobku rozdělí, pokud se v prvním závodě vyrobí 50 kusů a ve druhém závodě 150 kusů.

Příklad 8

Funkce $f(x, y, z) = -4x^2 + 2xz - 6y^2 + 10z$ vyjadřuje zisk v tisících z prodeje mikrovlnné trouby (značíme x), toustovače (značíme y) a rychlovarné konvice (značíme z). Jakého maximálního zisku lze dosáhnout, když víme, že za cenu jedné rychlovarné konvice může zákazník pořídit dva toustovače.

Řešení:

Maximální zisk je 20 tisíc.

Příklad 9

Materiál horní a dolní podstavy pravoúhlé uzavřené krabice stojí 3 Kč/m², cena materiálu bočních stěn je 2 Kč/m². Vypočítejte nejmenší cenu, jakou může mít materiál na výrobu takové krabice a jaké bude mít tato krabice rozměry. [13]

Řešení:

Nejnižší cena, za kterou můžeme takovou krabici vyrobit je $6\sqrt[3]{12}$ Kč, při rozměrech

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.$$

Příklad 10

Ověřte, zda platí rovnost $\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}$ pro funkci

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad [4]$$

6. ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce je sestavit sbírku řešených aplikačních úloh diferenciálního počtu dvou proměnných.

První část obsahuje základní teorii, která je potřebná pro řešení výše zmíněných úloh a je ve sbírce využita.

Druhá část se věnuje určování lokálních extrémů funkcí dvou proměnných. U každého příkladu je určen definiční obor, první parciální derivace, stacionární bod, všechny druhé parciální derivace, druh extrému (pokud existoval) a graf dané funkce. Grafy funkcí jsou vytvořeny v programu Matematika. Funkce jsou vybírány tak, aby byly zastoupeny všechny základní elementární funkce. Příklady jsou uspořádány podle stupně obtížnosti. Součástí každé úlohy je slovní komentář, který podrobně vysvětluje postup řešení úlohy.

Třetí část se věnuje slovním úlohám na užití extrémů funkcí dvou proměnných v reálných situacích, které jsou opět řazeny podle stupně obtížnosti. Součástí úlohy jsou opět i komentáře vysvětlující postup řešení. Některé příklady jsou pro lepší představivost doplněny o obrázek vytvořený v programu GeoGebra.

Poslední část obsahuje neřešené příklady na užití extrémů funkcí dvou proměnných. Úlohy slouží k procvičení daného tématu a popřípadě k samostatné práci. Pro kontrolu správnosti řešení jsou u těchto úloh uvedeny výsledky.

Tato práce by měla sloužit jako studijní materiál studentům bakalářských oborů se zaměřením na matematiku. Sbíрка může být využita i v seminářích z matematiky na středních školách, zejména pro talentované zájemce o matematické obory.

7. LITERATURA A ZDROJE

- [1] BEŇADIK, Vladislav. *Diferenciální počet více proměnných pro studenty učitelství 2. stupně ZŠ*. České Budějovice, 2011. Diplomová práce. Jihočeská universita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Vedoucí práce RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D
- [2] GILLMAN, Leonard a Robert MCDOWELL. *Matematická analýza*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1980, 603 s.
- [3] HORSKÝ, Zdeněk. *Učebnice pro matematiky a posluchače VŠE*. 2. dopl. vyd. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1973, 316 s
- [4] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I*. Vyd. 6., nezměn. Praha: Academia, 1974, 391 s.
- [5] JIRÁSEK, František, Stanislav ČIPERA a Milan VACEK. *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1989, 565 s. ISBN 80-030-0187-0.
- [6] KUBEN, Jaromír, Šárka MAYEROVÁ, Pavlína RAČKOVÁ a Petra ŠARMANOVÁ. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 1. vyd. 2012, 223 s.
- [7] NÝDL, Václav a Renata KLUFOVÁ. *Matematika*. 2. opr. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2000, 131 s.
- [8] NÝDL, Václav a Václav SLAVÍK. *Matematika*. 1. vyd. Vysoká škola zemědělská Praha: Videopress MON, 1984, 197

- [9] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Dotisk 7. vyd. Praha: Prometheus, 1991, 608 s. ISBN 80-719-6196-5.
- [10] PTÁČNÍK, Jan. *Diferenciální počet funkce dvou proměnných*. České Budějovice, 2011. Diplomová práce. Jihočeská universita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Vedoucí práce RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.
- [11] ZACHAROVÁ, Jana. *Derivace v aplikačních úlohách - sbírka řešených příkladů*. České Budějovice, 2015. Diplomová práce. Jihočeská universita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Vedoucí práce RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
- [12] *Digitální knihovna: SPŠ Stavební Opava* [online]. 2012. Dostupné z: <http://dk.spsopava.cz:8080/>
- [13] HLAVIČKOVÁ, Irena, Edita KOLÁŘOVÁ a Zdeněk ŠMARDA. *Vybrané partie z matematiky I* [online]. 2014. Dostupné z: http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/texty/BVPA/CZ/BVPA_plna_verze_CZ.pdf
- [14] Matematická analýza. *Matematika.cuni.cz: Portál pro vysokoškolskou matematiku* [online]. [cit. 2015-03-31]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/index.htm>
- [15] *Matematika online* [online]. 2005. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Parcialni-a-smerove-derivace-gradient/sc-94-sr-1-a-97/default.aspx>
- [16] *Pedagogické fakulty Jihočeské university: Katedra matematiky* [online]. 2014. Dostupné z: <http://moodle.pf.jcu.cz/course/index.php?categoryid=12>