UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vybrané kvaziaritmetické průměry a jejich využití na 2. stupni základní školy

Vedoucí diplomové práce:
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
2017

Vypracoval:
Bc. Jiří Vaško
UM-UTIV, 2.ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Tomáše Zdráhala, CSc. a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci dne

. . . .
Bc. Jiří Vaško

Poděkování

Rád bych poděkoval panu doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi, CSc. za cenné rady, připomínky a čas, který mi věnoval při tvorbě této práce.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Jiří Vaško
Název práce	Vybrané kvaziaritmetické průměry a jejich využití na 2. stupni základní školy
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra matematiky
Vedoucí práce	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
Rok obhajoby	2017
Abstrakt	Diplomová práce seznamuje čtenáře s pojmem kvaziaritmetický průměr, zdůrazňuje důležitost specifikace typu průměru a uceleně představuje nejznámější a nejpoužívanější typy průměrů včetně řešených příkladů. V poslední části je představen redakční systém WordPress, pomocí kterého byla vytvořena webová prezentace práce.
Klíčová slova	Kvaziaritmetický průměr, aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, WordPress
Počet stran	66
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Bc. Jiří Vaško
Title	Selected quasiarithmetic means and theirs use at lower secondary school
Type of thesis	Master
Department	Department of Mathematics
Supervisor	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.
The year of presentation	2017
Abstract	Diploma thesis introduces quasiarithmetic mean as a term, points out the importance of mean specification and coherently shows the most known and used types of means completed with solved examples. The last chapter briefly introduces content managment system WordPress, which was used to make web presentation of this thesis.
Keywords	Quasiarithmetic mean, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, WordPress
Number of pages	66
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Použité značení

Symbol	Význam
$\mathbb{R}$	Těleso reálných čísel
$\mathbf{A}$	Aritmetický průměr
$\mathbf{G}$	Geometrický průměr
$\mathbf{H}$	Harmonický průměr
$f(x, y)$	Funkce f dvou proměnných x a y
$f'(x)$	První derivace funkce f
$f''(x)$	Druhá derivace funkce f
$A(a_1,\ a_2, \dots,\ a_n)$	Aritmetický průměr čísel $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$
$G(a_1,\ a_2, \dots,\ a_n)$	Geometrický průměr čísel $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$
$H(a_1,\ a_2, \dots,\ a_n)$	Harmonický průměr čísel $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$
$\lvert AB \rvert$	Velikost úsečky AB
τ	Thaletova kružnice
$\triangle ABC$	Trojúhelník ABC

Úvod

Cílem této diplomové práce je představit čtenáři pojem kvaziaritmetický průměr a vysvětlit mu o co se jedná. Následně poukázat na to, jak je důležité pojem průměr vždy doplnit daným typem průměru, tj. harmonický průměr, aritmetický průměr, apod. Dále má práce sloužit čtenáři jako přehledný a ucelený zdroj informací o aritmetickém, geometrickém a harmonickém průměru, včetně příkladů, které lze řešit za pomoci těchto průměrů. Daná práce je následně prezentována na webu pro lepší dostupnost široké veřejnosti.

Motivací výběru tohoto tématu byla autorova osobní zkušenost s neznalosti žáků v oblasti řešení příkladů vedoucí na jakýkoliv typ průměru. Zkušenost vychází z dlouholetého doučování žáků základní a střední školy.

První kapitola se zabývá pojmem kvaziaritmetický průměr a představuje aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných čísel jako funkci dvou proměnných. Vše je doplněno o grafické podklady pro lepší představu.

Když se řekne průměr, není vždy myšlen aritmetický. Tomu je věnována druhý kapitola této práce. Dále jsou zde připomenuty aritmetický, geometrický a harmonický průměr a ke každému z nich je uvedeno pár řešených příkladů.

Třetí kapitola obsahuje řešené příklady složitějších úloh.

Čtvrtá kapitola ve stručnosti čtenáři představuje motivaci pro vytvoření webové stránky k této práci a také čtenáře seznamuje s redakčním systémem WordPress, na kterém je webová stránka vytvořena.

Práce byla zpracována pomocí typografického systému LaTeX. Grafické výstupy byly vytvořeny pomocí programu Wolfram Mathematica a programu geoGebra. Program Wolfram Mathematica byl využit v rámci čtrnáctidenní zkušební licence. Zbylé programy jsou Open Source.

1 Kvaziaritmetický průměr

Průměry jako aritmetický, geometrický či harmonický jsou důvěrně známy každému studentovi střední školy. Co ale skrývá pojem „kvaziaritmeický průměr“? Obecně tento pojem zahrnuje všechny zmíněné průměry. Jedná se určité zobecnění průměrů pomocí funkce více proměnných.

Definice 1. Kvaziaritmetický vážený průměr hodnot $a_1, \ldots, a_n$ s váhou $w_1, \ldots, w_n$ je vyjádřen výrazem

$$F\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i F^{-1}(a_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right),$$

kde F je ryze monotónní funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, $w_1, \ldots, w_n$ jsou nezáporná reálná čísla a $a_1, \ldots, a_n \in F(i\ )$ jsou libovolná reálná čísla.

Pro naše potřeby budeme brát v potaz $i = 1, 2$, $w_1 = w_2 = 1$, $a_1 = a > 0$, $a_2 = b > 0$. Pak

$$F\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i F^{-1}(a_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right) = F\left(\frac{F^{-1}(a) + F^{-1}(b)}{2}\right)$$

a dále pro $r \in [-\infty, \infty]$ definujeme

$$M(r) = F_r\left(\frac{F_r^{-1}(a) + F_r^{-1}(b)}{2}\right),$$

kde

$$F_r(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{r}} & \text{pro } -\infty < r < 0 \cup 0 < r < \infty, \\ \max(a, b) & \text{pro } r = \infty, \\ \min(a, b) & \text{pro } r = -\infty, \\ \mathrm{e}^x & \text{pro } r = 0. \end{cases}$$

Věta 1. Funkce $M(r)$ je rostoucí na $[-\infty, \infty]$.

Z této věty nám plyne dobře známá nerovnost mezi harmonickým, geometrickým a aritmetickým průměrem:

$$\mathbf{H} = M(-1) \leq \mathbf{G} = M(0) \leq \mathbf{A} = M(1).$$

Nyní si odvodíme jednotlivé průměry pro $r = -1,\ r = 0,\ r = 1$.

- Aritmetický průměr $\mathbf{A} = M(1)\,,\ F_1(x) = x$

$$F_1\left(\frac{F_1^{-1}(a) + F_1^{-1}(b)}{2}\right) = F_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a+b}{2},$$

- Geometrický průměr $\mathbf{G} = M(0)\,,\ F_0(x) = \mathrm{e}^x$

$$F_0\left(\frac{F_0^{-1}(a)+F_0^{-1}(b)}{2}\right) = F_0\left(\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\ln(ab)}\right)^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab},$$

- Harmonický průměr $\mathbf{H} = M(-1)\,,\ F_{-1}(x) = x^{-1}$

$$F_{-1}\left(\frac{F_{-1}^{-1}(a)+F_{-1}^{-1}(b)}{2}\right) = F_{-1}\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right) = F_{-1}\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

1.1 Průměry jako extrémy funkce více proměnných

V následujících podkapitolách se podíváme, jak je možné aritmetický, geometrický a harmonický průměr brát jako extrémy funkce více proměnných. Omezíme se na průměry dvou kladných čísel a budeme řešit extrémy funkce dvou proměnných. Potřebné teoretické základy autor načerpal v průběhu studia a čtenář je může nalézt v [6]. Výpočty budou pro lepší názornost doplněny grafickými výstupy. Pro výpočet může být použita metoda Lagrangeových multiplikátorů a rozhodnutí o extrému pomocí diferenciálu druhého řádu funkce dvou proměnných.

My úkol zjednodušíme a extrém funkce dvou proměnných převedeme na extrém funkce jedné proměnné a to tak, že z vazební podmínky vyjádříme proměnnou y a funkci napíšeme explicitně. Následně dosazením y do funkce dvou proměnných dostaneme funkci jedné proměnné a tam vyřešíme extrém funkce pomocí derivací prvního a druhého řádu.

1.1.1 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr libovolných kladných čísel a a b je nalezením maxima funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = xy$$

vzhledem k vazbě

$$x + y = a + b.$$

Řešíme nalezení vázaných extrémů funkce $f(x, y) = xy$ s vazbou
$x + y = (a + b)$.
Proto vyjádříme proměnnou y z podmínky.

$$x + y = a + b$$

$$y = a + b - x$$

Nyní do funkce $f(x, y)$ dosadíme za proměnnou y výraz $a + b - x$. Tím dostaneme funkci jedné proměnné a to proměnné x.

$$f(x) = x \cdot (a + b - x)$$

$$f(x) = ax + bx - x^2$$

$$f(x) = -x^2 + (a + b)x$$

Pro vyšetření průběhu funkce jedné proměnné využijeme postupně první a druhé derivace funkce. Pomocí první derivace zjistíme stacionární body, tedy body podezřelé z extrémů. Pomocí druhé derivace rozhodneme zda v bodě existuje extrém, případně o jaký extrém se jedná.

$$f(x) = -x^2 + (a+b)\,x$$

$$f'(x) = -2x + a + b$$

Pro nalezení stacionárních bodů položíme první derivaci rovnu nule.

$$f'(x) = 0$$

$$-2x + a + b = 0$$

$$-2x = -a - b$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Zjistili jsme, že bod $x = \frac{a+b}{2}$ je bodem stacionárním. Nyní za pomoci hodnoty druhé derivace zjistíme, zda je v bodě extrém, případně o jaký druh extrému se jedná. Druhá derivace vypadá následovně.

$$f'(x) = -2x + a + b$$

$$f''(x) = -2$$

Hodnota druhé derivace v bodě $x = \frac{a+b}{2}$ je záporná, funkce $f(x)$ nabývá v bodě $x = \frac{a+b}{2}$ svého maxima. Vypočítáme funkční hodnotu $f(x)$.

$$f(x) = -x^2 + (a+b)x$$

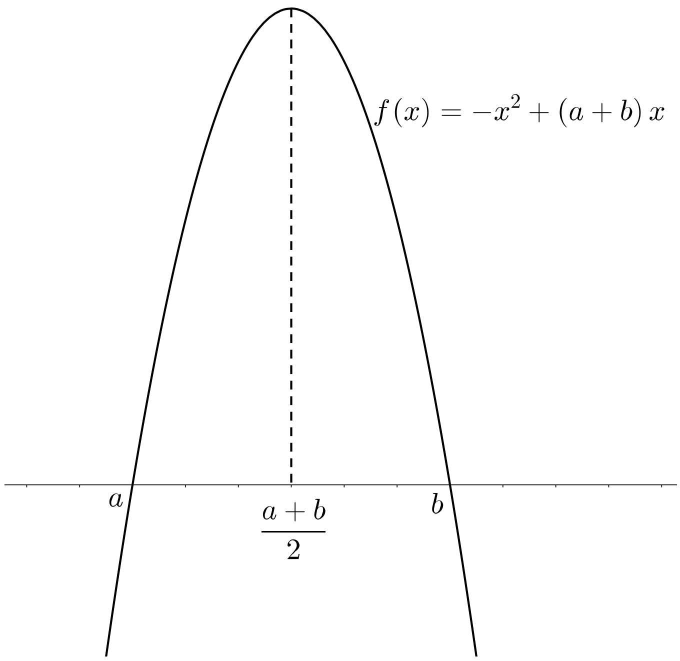
$$f(x) = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + (a+b)\frac{a+b}{2}$$

$$f(x) = -\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$f(x) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Funkce $f(x) = -x^2 + (a+b)x$ je funkce kvadratická, jejím grafem je parabola. Funkce $f(x) = -x^2 + (a+b)x$ nabývá v bodě $\left[\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$ svého maxima. Bod se rovněž nazývá vrchol paraboly.



Obr. 1: Graf funkce $f(x) = -x^2 + (a+b)x$

Nyní vypočteme hodnotu proměnné y, kterou jsme na počátku vyjádřili jako $y = a + b - x$.

$$y = a + b - x$$

$$y = a + b - \frac{a+b}{2}$$

$$2y = 2a + 2b - a - b$$

$$2y = a + b$$

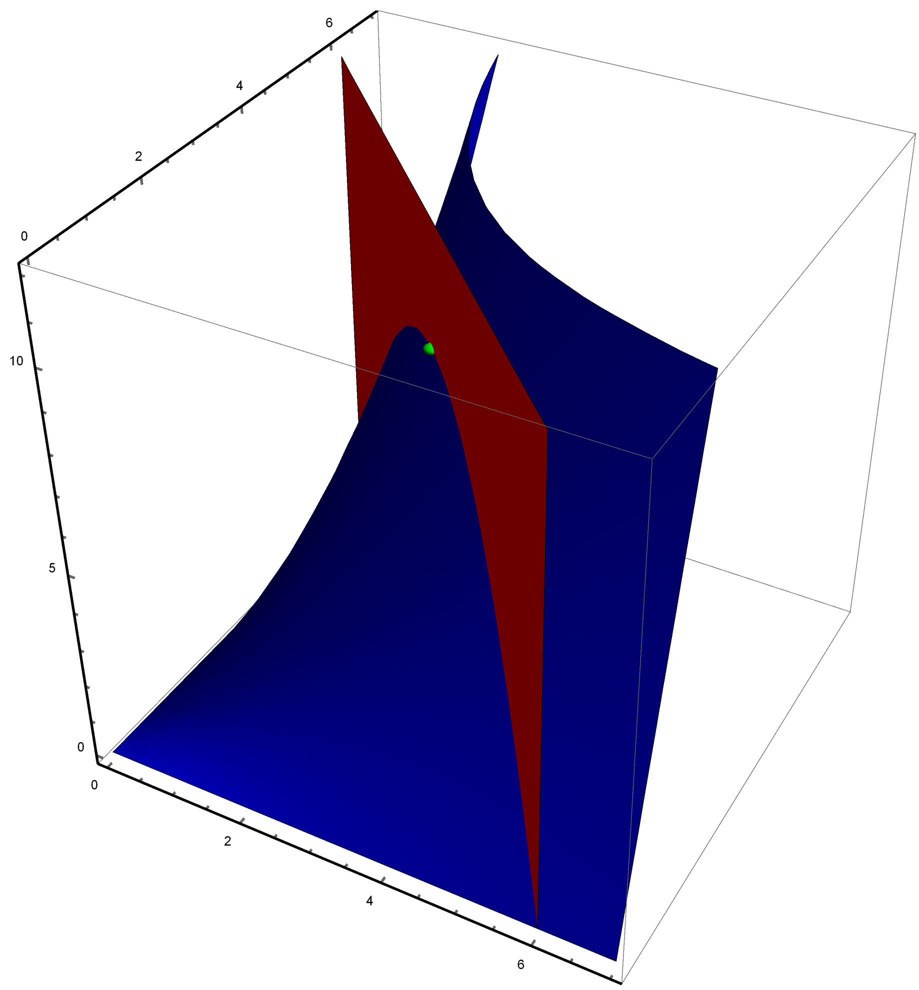
$$y = \frac{a+b}{2}$$

Hledáním vázaného extrému funkce $f(x, y) = xy$ s vazbou $x + y = a + b$ jsme převedli na hledání extrému funkce $f(x) = -x^2 + (a + b)x$. Následným dopočítáním hodnoty proměnné y jsme ukázali, že daná funkce má v bodě $\left[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right]$ maximum.

Lze vidět, že řešením nalezení maxima funkce $f(x, y) = xy$ s vazbou $x + y = a + b$ je aritmetický průměr těchto čísel.

Ukážeme geometrickou interpretaci zadání. Vykreslíme graf funkce $f(x, y) = xy$ a vazební podmínky $x + y = a + b$. Funkce $f(x, y) = xy$ je hyperbolický paraboloid a vazební podmínka $x + y - a - b = 0$ je rovinou.

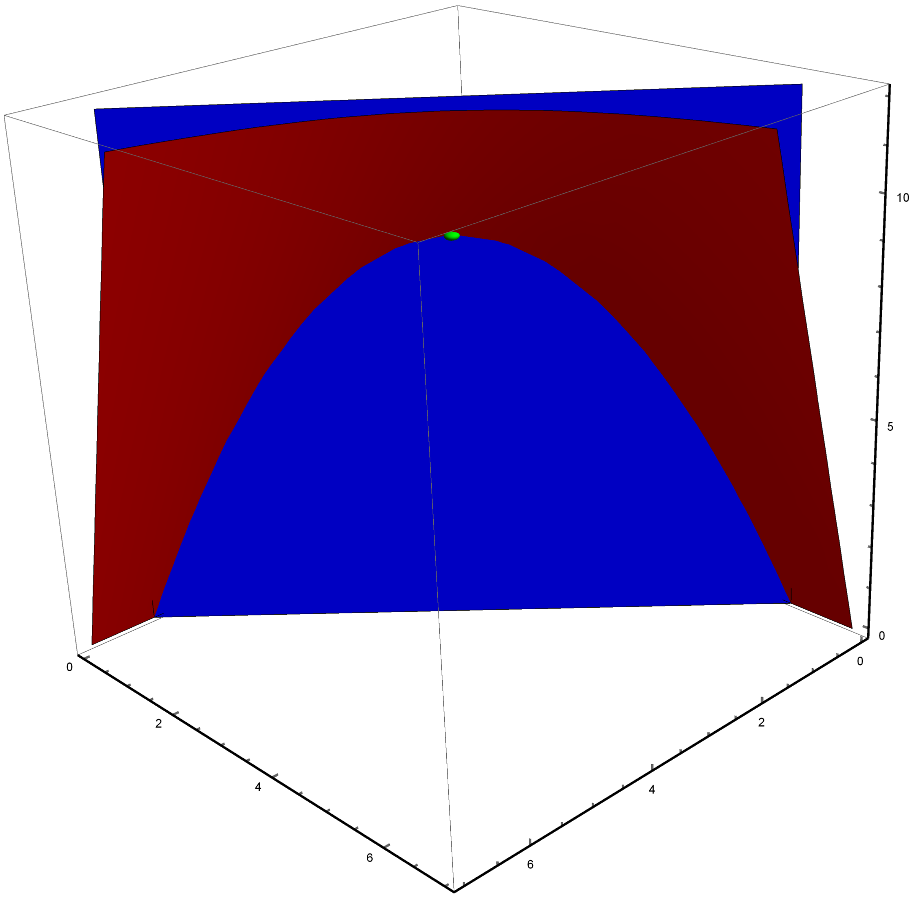
Pro vykreslení vazební podmínky zvolíme za $a = 1$ a za $b = 5$. Uvedeme více obrázků a tím ukážeme více pohledů na jeden graf. Při sestrojení grafu v počítačovém programu můžeme daným grafem pohybovat a otáčet pro různé pohledy. Tím, že zvolíme konkrétní čísla za a a b vykreslíme danou podmínku jako rovinu. Naší volbou se bude jednat o rovinu $x + y - 6 = 0$. Rovnice $x + y - 6 = 0$ udává množinu bodů x a y, které mají tu vlastnost, že jejich součet je roven číslu 6. Toto bylo patrné již při zadání podmínky $x + y = a + b$. Hledáme čísla x a y taková, že mají stejný součet jako čísla a a b. Na obrázku 2 vidíme, že rovina protíná osou x v bodě 6. Stejně tak rovina protíná osou y v bodě 6.



Obr. 2: Aritemtický průměr jako extrém funkce dvou proměnných

Na obrázku 2 vidíme vykreslení funkcí v prostoru. Jejich průnikem je parabola, kterou jsme zkonstruovali na obrázku 1. Zeleně je znázorněný bod, který je hledaným maximem. Našli jsme maximum funkce $f(x, y) = xy$ s vazbou $x + y - 6 = 0$. Souřadnice maxima jsou $[3, 3, 9]$. Souřadnice jsou patrné z předpisu funkce $f(x, y) = xy$. Ukázali jsme, že maximum je v bodě $\left[\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}\right]$. Pro naši volbu $a = 1$ a $b = 5$ máme $x = y = 3$. Po výpočtu funkční hodnoty $f(x, y) = 3 \cdot 3$ vidíme, že hodnota funkce je 9.

Následující obrázek ukazuje stejný graf, pouze z jiného úhlu pohledu. Opět je zde vidět hledané maximum. Pokud příklad přeneseme do roviny, jako jsme to udělali při hledání extrému, pak by maximum mělo souřadnice $[3, 9]$ pro naši volbu $a = 1$ a $b = 5$.



Obr. 3: Aritemtický průměr jako extrém funkce dvou proměnných

1.1.2 Geometrický průměr

Geometrický průměr libovolných kladných čísel a a b je nalezením minima funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = x + y$$

vzhledem k vazbě

$$xy = ab.$$

Řešíme nalezení vázaných extrémů funkce $f(x, y) = x + y$ s vazbou $xy = ab$. Vyjádříme proměnnou y z podmínky.

$$xy = ab$$

$$y = \frac{ab}{x}$$

Do funkce $f(x,y)$ dosadíme za proměnnou y výraz $\frac{ab}{x}$. Dostaneme funkci jedné proměnné x.

$$f(x) = x + \frac{ab}{x}$$

Při hledání extrémů funkce budeme postupovat stejně jako u průměru aritmetického. Z první derivace funkce $f(x)$ nalezneme stacionární body. Pomocí druhé derivace rozhodneme o extrémech v těchto bodech.

$$f(x) = x + \frac{ab}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-ab}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{ab}{x^2}$$

Stacionární body nalezneme položením první derivace rovnu nule.

$$f'(x) = 0$$

$$1 - \frac{ab}{x^2} = 0$$

$$\frac{ab}{x^2} = 1$$

$$ab = x^2$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$$

Nalezli jsme dva stacionární body funkce $f(x)$. Prvním stacionárním bodem je bod $x_1 = \sqrt{ab}$. Druhým stacionárním bodem je bod $x_2 = -\sqrt{ab}$. Body x_1 a x_2 jsou body podezřelé z extrémů. Při rozhodnutí o tom, zda v bodech jsou extrémy, využijeme opět hodnoty druhé derivace v daných bodech. Druhá derivace má následující podobu.

$$f'(x) = 1 - \frac{ab}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-ab \cdot 2x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2abx}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2ab}{x^3}$$

Hodnota druhé derivace v bodě $x_1 = \sqrt{ab}$ je $f''(x_1) = \frac{2ab}{\sqrt{ab}} = \frac{2ab}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 2\sqrt{ab}$. Funkční hodnota odmocniny je vždy kladná, proto je hodnota druhé derivace v bodě $x_1 = \sqrt{ab}$ kladná. Funkce $f(x) = x + \frac{ab}{x}$ nabývá v bodě $x_1 = \sqrt{ab}$ svého minima. Spočítáme funkční hodnotu $f(x_1)$.

$$f(x) = -x^2 + (a+b)x$$

$$f(x_1) = \sqrt{ab} + \frac{ab}{\sqrt{ab}}$$

$$f(x_1) = \sqrt{ab} + \frac{ab}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$f(x_1) = \sqrt{ab} + \frac{ab\sqrt{ab}}{ab}$$

$$f(x_1) = 2\sqrt{ab}$$

Druhá derivace $x_2 = -\sqrt{ab}$ má hodnotu $f''(x_2) = \frac{2ab}{-\sqrt{ab}} = -\frac{2ab}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = -2\sqrt{ab}$. Hodnota druhé derivace v bodě $x_2 = -\sqrt{ab}$ je záporná, protože funkční hodnota druhé odmocniny je kladná. Funkce $f(x) = x + \frac{ab}{x}$ nabývá v bodě $x_2 = -\sqrt{ab}$ svého maxima. Vypočítáme funkční hodnotu $f(x_2)$.

$$f(x) = -x^2 + (a+b)\,x$$

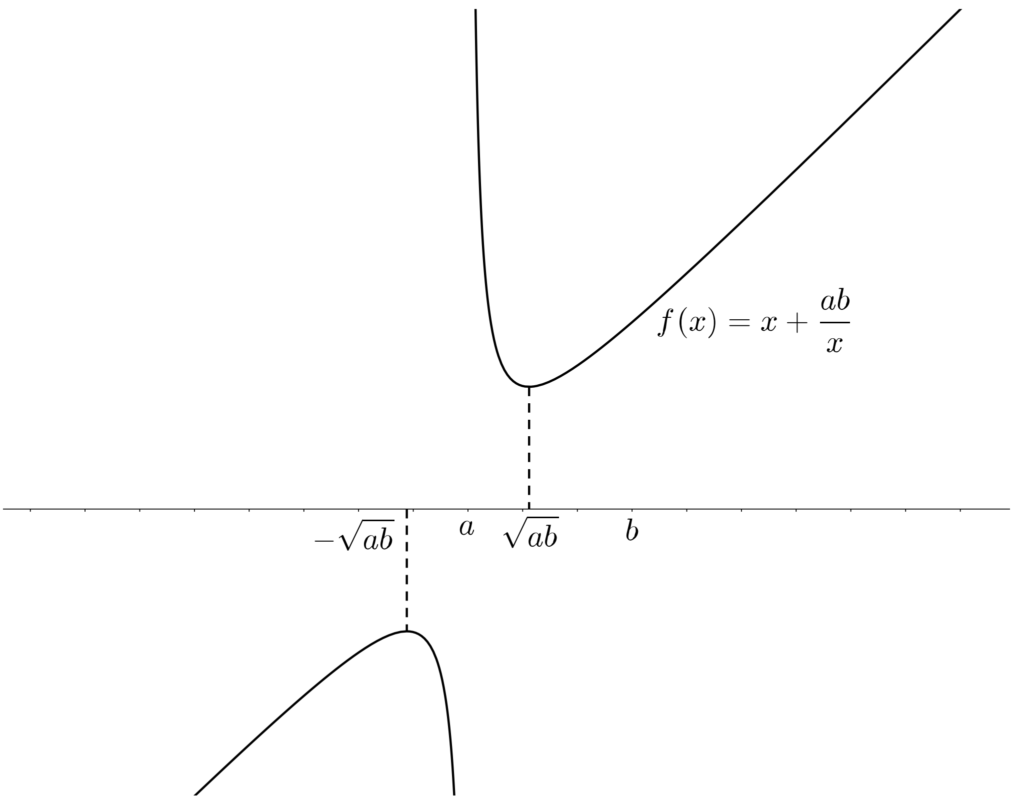
$$f(x_2) = -\sqrt{ab} + \frac{ab}{-\sqrt{ab}}$$

$$f(x_2) = -\sqrt{ab} - \frac{ab}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$f(x_2) = -\sqrt{ab} - \frac{ab\sqrt{ab}}{ab}$$

$$f(x_2) = -2\sqrt{ab}$$

Funkce $f(x) = x + \dfrac{ab}{x}$ je lineárně lomená funkce. Jejím grafem je hyperbola. Funkce $f(x) = x + \dfrac{ab}{x}$ nabývá v bodě $\left[\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}\right]$ svého minima a v bodě $\left[-\sqrt{ab}, -2\sqrt{ab}\right]$ svého maxima.



Obr. 4: Graf funkce $f(x) = x + \dfrac{ab}{x}$

Vypočteme hodnotu proměnné y, kterou jsme vyjádřili z vazební podmínky. Výpočet provedeme postupně pro hodnoty x_1 a x_2. Nejdříve výpočet provedeme pro hodnotu x_1.

$$y = \frac{ab}{x}$$

$$y = \frac{ab}{\sqrt{ab}}$$

$$y = \frac{ab}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$y = \frac{ab\sqrt{ab}}{ab}$$

$$y = \sqrt{ab}$$

Nyní provedeme výpočet pro hodnotu x_2.

$$y = \frac{ab}{x}$$

$$y = \frac{ab}{-\sqrt{ab}}$$

$$y = \frac{ab}{-\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$y = -\frac{ab\sqrt{ab}}{ab}$$

$$y = -\sqrt{ab}$$

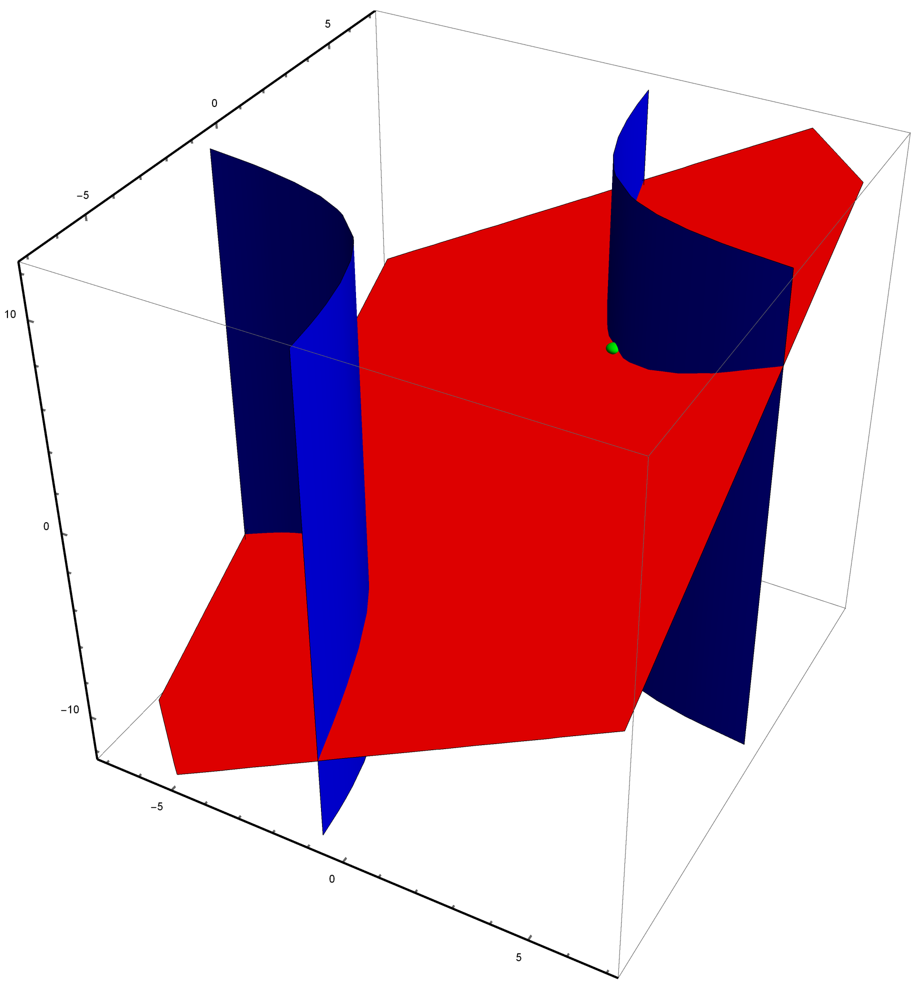
Hledáním vázaného extrému funkce $f(x, y) = x + y$ s vazbou $xy = ab$ jsme převedli problém na hledání extrému funkce $f(x) = x + \frac{ab}{x}$. Následujícím vypočítáním hodnoty proměnné y jsme ukázali, že daná funkce má v bodě $\left[\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\right]$ minimum a v bodě $\left[-\sqrt{ab}, -\sqrt{ab}\right]$ maximum.

Z výsledků je patrné, že řešením nalezení minima funkce $f(x, y) = x + y$ s vazbou $xy = ab$ je geometrický průměr čísel $a, \ b$.

Opět ukážeme geometrickou interpretaci zadání. Vykreslíme graf funkce

$f(x,y) = x + y$ s vazební podmínkou $xy = ab$. Funkce $f(x,y) = x + y$ je rovina a vazební podmínka $xy - ab = 0$ je hyperbolická válcová plocha.

Pro vykreslení vazební podmínky opět zvolíme za $a = 1$ a za $b = 5$. Volbou konkrétních čísel za parametry a a b vykreslíme danou podmínku jako hyperbolickou válcovou plochu. Při naší volbě parametrů bude mít hyperbolická válcová plocha rovnici $xy - 5 = 0$. Rovnice $xy - 5 = 0$ udává množinu bodů x a y, které mají tu vlastnost, že jejich součin je roven číslu 5. Toto bylo opět patrné již při zadání podmínky $xy = ab$, tudíž hledáme čísla x a y taková, že mají stejný součin jako čísla a a b.

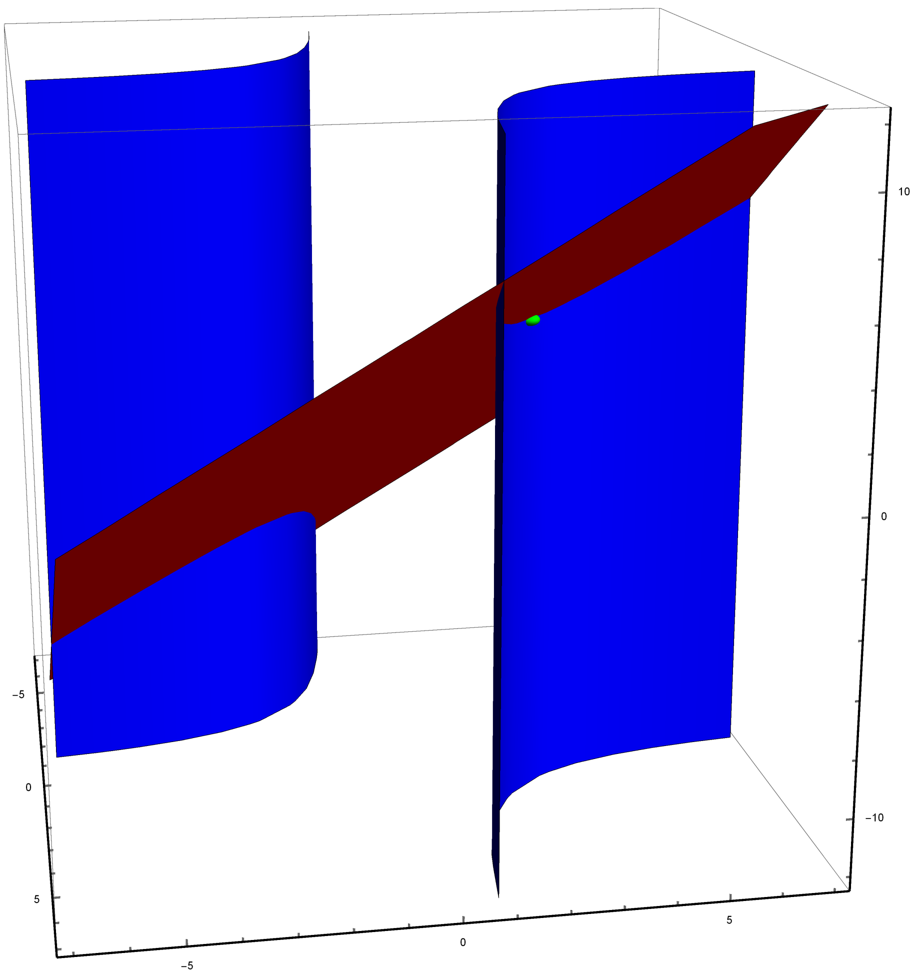


Obr. 5: Geometrický průměr jako extrém funkce dvou proměnných

Obrázek 5 ukazuje grafické znázornění funkcí v prostoru. Jejich průnikem je hyperbola, která byla zkonstruována na obrázku 4. Zeleně je znázorněný bod, který je hledaným minimem. Druhý extrém, maximum pro hodnotu $x = -\sqrt{ab}$ můžeme vidět také, ale není již explicitně označen.

Našli jsme minimum funkce $f(x, y) = x + y$ s vazbou $xy - 5 = 0$. Souřadnice minima jsou $\left[\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right]$. Souřadnice jsme dopočítali z předpisu funkce $f(x, y) = x + y$.

Opět ukážeme stejný graf z jiného úhlu pohledu. Kdybychom průnik funkcí přenesli do roviny, dostali bychom hyperbolu stejnou jako na obrázku 4. Opět je zde vidět hledané minimum.



Obr. 6: Geometrický průměr jako extrém funkce dvou proměnných

1.1.3 Harmonický průměr

Harmonický průměr libovolných kladných čísel a a b je nalezením minima funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = xy$$

vzhledem k vazbě

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{a + b}{ab}.$$

Hledáme vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy$ s vazbou $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{a+b}{ab}$. Lze vidět, že hodnoty $x,\ y$, musí být nenulové. Čísla $a,\ b$ máme již ze zadání kladná.

Proměnnou y si vyjádříme z podmínky.

$$
\begin{aligned}
\frac{x+y}{xy} &= \frac{a+b}{ab} \\
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{a+b}{ab} \\
\frac{1}{y} &= \frac{a+b}{ab} - \frac{1}{x} \\
\frac{1}{y} &= \frac{ax+bx-ab}{abx} \\
y &= \frac{abx}{ax+bx-ab}
\end{aligned}
$$

Vyjádřenou proměnnou y dosadíme do funkce $f(x, y)$. Vznikne funkce jedné proměnné x.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \frac{abx}{ax+bx-ab} \\
f(x) &= \frac{abx^2}{ax+bx-ab}
\end{aligned}
$$

Opět budeme hledat extrémy funkce pomocí první a druhé derivace. Vypočteme první derivaci funkce $f(x)$ a nalezneme stacionární body.

$$f(x) = \frac{abx^2}{ax + bx - ab}$$

$$f'(x) = \frac{2abx(ax + bx - ab) - abx^2(a + b)}{(ax + bx - ab)^2}$$

$$f'(x) = \frac{abx(2ax + 2bx - 2ab - ax - bx)}{(ax + bx - ab)^2}$$

$$f'(x) = \frac{abx(ax + bx - 2ab)}{(ax + bx - ab)^2}$$

$$f'(x) = \frac{a^2bx^2 + ab^2x^2 - 2a^2b^2x}{(ax + bx - ab)^2}$$

Stacionární body nalezneme položením první derivace rovno nule. První derivace je rovna nule, pouze pokud její jmenovatel je roven nule. Pro výpočet využijeme jmenovatel ve tvaru $abx(ax + bx - 2ab)$. Jelikož se jedná o součin, pak je výsledek roven nule, je-li alespoň jeden ze členů roven nule. Budeme řešit samostatně rovnice $abx = 0$ a $ax + bx - 2ab = 0$.

Řešení první rovnice je na první pohled viditelné. Daný výraz se rovná nule tehdy, když $x = 0$. Tento bod je stacionárním bodem funkce $f(x) = \frac{abx}{ax + bx - ab}$, ale nevyhovuje podmínce v zadání. Tam bylo řečeno, že $x \neq 0$. Proto s tímto bodem nebudeme dále počítat.

Řešení druhé rovnice je následující.

$$ax + bx - 2ab = 0$$

$$x(a + b) = 2ab$$

$$x = \frac{2ab}{a + b}$$

Body $x = 0$ a $x = \frac{2ab}{a + b}$ jsou stacionární body funkce $f(x) = \frac{abx}{ax + bx - ab}$. Nadále budeme počítat pouze s bodem $x = \frac{2ab}{a + b}$, protože bod $x = 0$ byl vyloučen již v zadání.

Vypočítáme druhou derivaci a zjistíme hodnotu druhé derivace v bodě $x = \dfrac{2ab}{a+b}$. Určíme, zda se v bodě nachází extrém, případně jaký. Druhá derivace má následující podobu.

$$f'(x) = \frac{a^2bx^2 + ab^2x^2 - 2a^2b^2x}{(ax+bx-ab)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\begin{array}{c}(2a^2bx + 2ab^2x - 2a^2b^2) \cdot (ax+bx-ab) \\ -\,(a^2bx^2 + ab^2x^2 - 2a^2b^2x) \cdot 2 \cdot (ax+bx-ab) \cdot (a+b)\end{array}}{(ax+bx-ab)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(ax+bx-ab)\left[\begin{array}{r}2a^3bx^2 + 2a^2b^2x^2 - 2a^3b^2x + 2a^2b^2x^2 + 2ab^3x^2 \\ -2a^3b^2x - 2a^2b^3x + 2a^3b^3 - 2a^3bx^2 - 2a^2b^2x^2 \\ + 4a^3b^2x - 2a^2b^2x^2 - 2ab^3x^2 + 4a^2b^3x\end{array}\right]}{(ax+bx-ab)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2a^3b^3}{(ax+bx-ab)^3}$$

Hodnota druhé derivace v bodě $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ je následující.

$$f''\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{2a^3b^3}{\left(a \cdot \dfrac{2ab}{a+b} + b \cdot \dfrac{2ab}{a+b}\right)^3}$$

$$f''\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{2a^3b^3}{\left(\dfrac{2a^2b + 2ab^2}{a+b} - ab\right)^3}$$

$$f''\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{2a^3b^3}{\left(\dfrac{2ab\,(a+b)}{(a+b)} - ab\right)^3}$$

$$f''\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{2a^3b^3}{a^3b^3}$$

$$f''\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = 2$$

Hodnota druhé derivace funkce $f(x) = \dfrac{abx^2}{ax + bx - ab}$ v bodě $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ je 2, tudíž kladná. Funkce v bodě $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ nabývá svého minima.

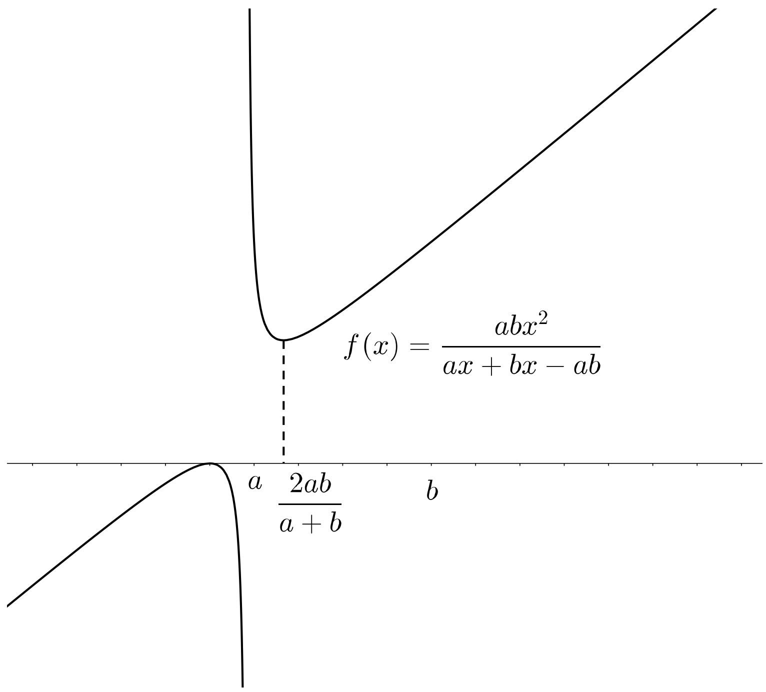
Vypočítáme funkční hodnotu $f\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)$.

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{ab \cdot \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2}{a \cdot \frac{2ab}{a+b} + b \cdot \frac{2ab}{a+b} - ab}$$

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{\frac{4a^3b^3}{(a+b)^2}}{ab}$$

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

Grafem funkce $f(x) = \dfrac{abx^2}{ax + bx - ab}$ je hyperbola. Svého lokálního minima nabývá v bodě $\left[\dfrac{2ab}{a+b}, \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}\right]$. Všimněme si, že na obrázku 7 lze vidět i druhý extrém, který jsme vyloučili kvůli počáteční podmínce.



Obr. 7: Graf funkce $f(x) = \dfrac{abx^2}{ax + bx - ab}$

Vypočteme hodnotu proměnné y, kterou jsme vyjádřili na začátku.

$$y = \frac{abx}{ax + bx - ab}$$

$$y = \frac{ab \cdot \dfrac{2ab}{a+b}}{a \cdot \dfrac{2ab}{ab} + b \cdot \dfrac{2ab}{a+b} - ab}$$

$$y = \frac{\dfrac{2a^2b^2}{a+b}}{\dfrac{2ab\left(a+b\right)}{a+b} - ab}$$

$$y = \frac{\dfrac{2a^2b^2}{a+b}}{ab}$$

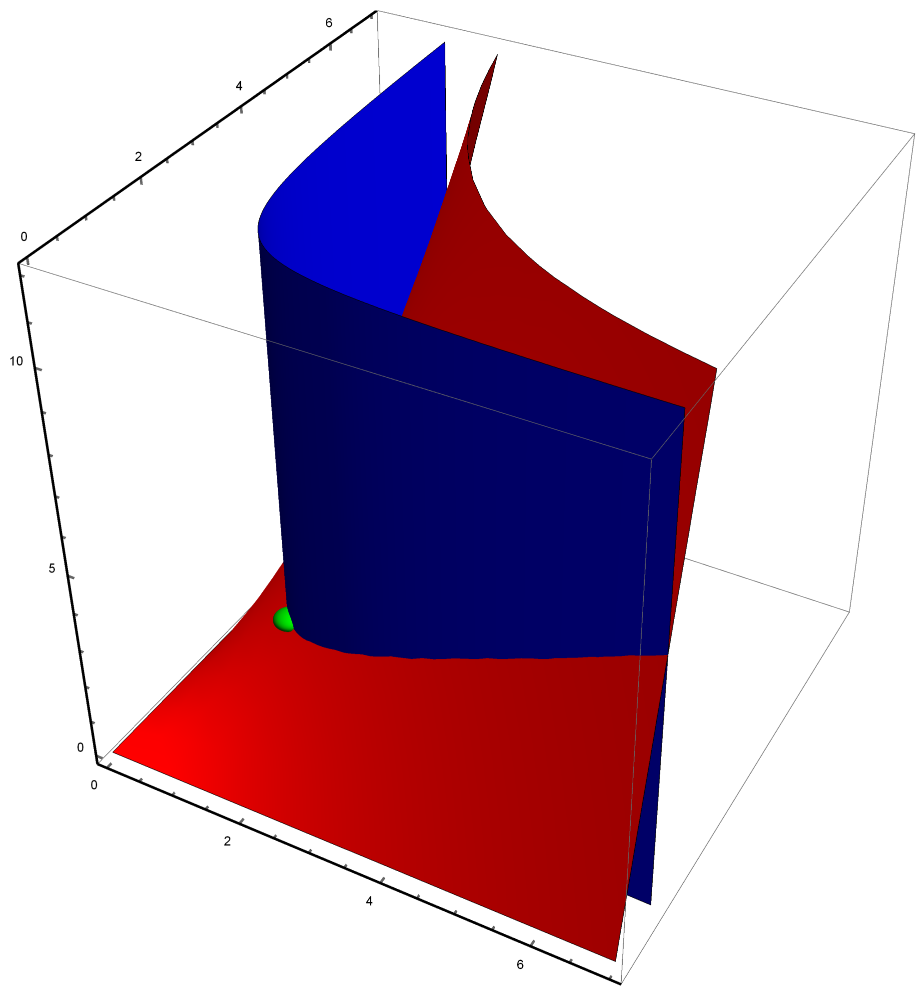
$$y = \frac{2ab}{a+b}$$

Hledání vázaného extrému funkce $f\left(x, y\right) = xy$ s vazbou $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{a+b}{ab}$ jsme převedli na hledání extrému funkce $f\left(x\right) = \dfrac{abx^2}{ax + bx - ab}$. Postupnými výpočty jsme ukázali, že daná funkce má v bodě $\left[\dfrac{2ab}{a+b}, \dfrac{2ab}{a+b}\right]$ své minimum.

Z výsledku je viditelné, že řešením nalezení minima funkce $f\left(x, y\right) = xy$ s vazbou $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{a+b}{ab}$ je harmonický průměr čísel a, b.

Ukážeme geometrickou interpretaci zadání. Vykreslíme graf funkce $f\left(x, y\right) = xy$ s vazební podmínkou $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{a+b}{ab}$. Funkce $f\left(x, y\right) = xy$ je hyperbolický paraboloid a vazební podmínka $\dfrac{x+y}{xy} - \dfrac{a+b}{ab} = 0$ je hyperbolická válcová plocha.

Pro vykreslení vazební podmínky opět zvolíme za $a = 1$ a za $b = 5$. Volbou konkrétních čísel za parametry a a b vykreslíme danou podmínku jako hyperbolickou válcovou plochu. Při naší volbě parametrů bude mít hyperbolická válcová plocha rovnici $x + y - \dfrac{6}{5}xy = 0$.

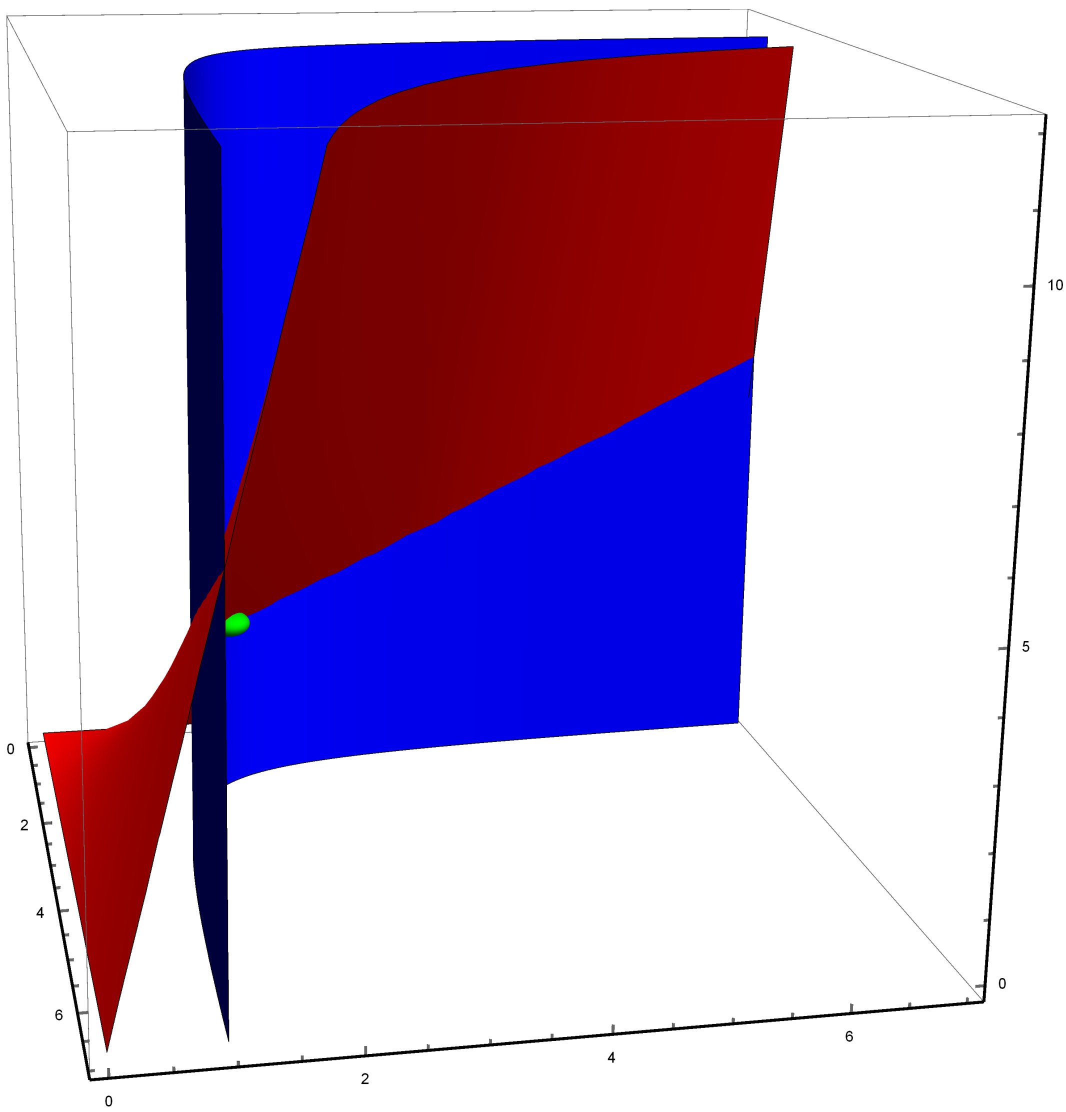


Obr. 8: Harmonický průměr jako extrém funkce dvou proměnných

Obrázek 8 ukazuje grafické znázornění funkcí v prostoru. Jejich průnikem je kladná část hyperboly, která byla zkonstruována na obrázku 7. Zeleně je znázorněný bod, který je hledaným minimem.

Nalezli jsme minimum funkce $f(x, y) = xy$ s vazbou $x + y - \frac{6}{5}xy = 0$. Souřadnice minima jsou $\left[\frac{10}{6}, \frac{10}{6}, \frac{25}{9}\right]$. Souřadnice jsme dopočítali z předpisu funkce $f(x, y) = xy$.

Předvedeme stejný graf z jiného úhlu pohledu. Kdybychom průnik funkcí přenesli do roviny, dostali bychom kladnou část hyperboly, jako je na obrázku 7. Hledané minimum je zde opět vidět zvýrazněné zeleným bodem.



Obr. 9: Harmonický průměr jako extrém funkce dvou proměnných

2 Průměr

2.1 Co je to průměr

Položíme-li lidem otázku „Co je to průměr?“, dostaneme různé odpovědi. Většina lidí vám řekne, že průměr dvou čísel je to, že dvě daná čísla sečtu a podělím je dvěma. Bude-li více čísel, pak je sečtou a podělí počtem čísel. Co ale spočítali? Tito lidé spočítali aritmetický průměr zadaných čísel. Vidíte rozdíl mezi pojmem „průměr“ a „aritmetický průměr“? Podíváme se na další možné odpovědi.

Někdo jiný nám na tu stejnou otázku může odpovědět, že průměr je dvakrát poloměr. Takový dotyčný si slovo průměr vyložil jako vlastnost geometrického objektu. Průměr můžeme nalézt u kružnice, kruhu, válce, jehlanu a dalších geometrických objektů. Sami lehce posoudíme, že průměr například u kružnice je úplně něco jiného než průměr aritmetický.

Další dotázaný může odpovědět, že průměr je pojmenování pro znak $\varnothing$. Někdo může namítat, že to je to stejné, jako průměr u kruhu, ale to pravda není. Danou značku můžeme například použít pro označení průměru ocelové trubky. S tímto označením se setkáme v běžném životě.

Po pročtení kapitoly 1.1 můžeme také říct, že průměr čísel je extrém funkce více proměnných.

Vidíme, že odpovědí na otázku „Co je to průměr?“ můžeme dostat mnoho. Můžeme s klidným svědomím konstatovat, že odpovědí může být tolik, kolik je dotazovaných lidí, protože každý z dotázaných odpoví dle jeho subjektivního názoru. Pokud by měl někdo z dotazovaných to štěstí, že se ve škole učili pojmy jako „aritmetický průměr“, „geometrický průměr“ či dokonce „harmonický průměr“ a v okamžiku položení otázky si na to vzpomněl, pak by mohl odpovědět tak, že průměr není jeden, ale je jich více.

Ani jednu z výše uvedených odpovědí nemůžeme označit za správnou, ale také je nemůžeme označit za špatné. Otázku „Co je to průměr?“ necháme prozatím otevřenou a zkusíme si ji zodpovědět po následujících podkapitolách.

2.2 Průměr čísel v matematice

Průměr čísel v matematice je primárně pojem z oblasti statistiky. Jedná se o některé z charakteristik poloh znaku statistického souboru. Statistickým souborem je myšlena množina všech objektů statistického pozorování. Statistickým znakem nazýváme vlastnost, která je předmětem zkoumání daného statistického pozorování. Znaky dělíme na kvantitativní (například váha, výška, mzda, atd.) a na kvalitativní (například národnost, náboženství, pohlaví, apod.). Vidíme, že pokud se budeme bavit o průměru čísel, pak se jedná o znak kvantitativní. U kvalitativního statistického znaku nepočítáme průměry.

Charakteristiku polohy znaku můžeme nazvat střední hodnotou, která nám udává „průměrnou hodnotu“ sledovaného znaku. Nejde o to, jaký průměr použijeme, ale o to, co nám průměr charakterizuje. Vždy můžeme použít jakýkoliv průměr, ale při výběru konkrétního průměru je důležité myslet na to, jakou hodnotu nám má charakterizovat. Budeme-li chtít zjistit průměrný roční růst výroby za určité období, pak zvolíme průměr geometrický.

Mnoho úloh v matematice ve svém zadání obsahuje slovo průměr, ale již není specifikováno jaký průměr. Například úloha „Vypočtěte průměrnou hodnotu z čísel 150 a 200“ nám říká, že máme spočítat průměrnou hodnotu. Ale jakou průměrnou hodnotu? Ve většině případů je myšleno, že žáci mají spočítat aritmetický průměr hodnot 150 a 200. Pokud budeme uvažovat úlohu „Vypočtěte průměrnou rychlost automobilu, které jede z místa A do místa B konstantní rychlostí 80 km/h a zpět z místa B do místa A konstantní rychlostí 120 km/h.“, pak většina žáků použije pro výpočet průměrné rychlosti aritmetického průměru. Těmto žákům vyjde hodnota 100 km/h. Je to správná hodnota? Podrobný výpočet provedeme v kapitole 2.4.3. Můžeme také uvažovat úlohu o pracovnících.

Úloha. Pracovník A danou práci udělá za 2 hodiny. Pracovník B provede tu stejnou práci za 3 hodiny. Za jak dlouho by danou práci udělal průměrný pracovník?

Řešení. Žáci by opět ve většině případů použili aritmetický průměr čísel 2 a 3 a tvrdili by, že průměrný pracovník práci udělá za 2,5 hodiny. Následujícím výpočtem si předvedeme, že by neměli pravdu.

Nejdříve si zjistíme, kolik dané práce každý z pracovníků udělá za jednu hodinu. Pracovník A udělá za hodinu $\frac{1}{2}$ práce a pracovník B udělá za hodinu $\frac{1}{3}$ práce. Za x hodin provede pracovník A $\frac{x}{2}$ práce a pracovník B $\frac{x}{3}$ práce. Danou práci si můžeme označit p. Sestavíme následující rovnici.

$$p \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) = 2p$$

Rovnice nám vystihuje naši situaci. Hledáme x, což je počet hodin, které musí pracovat průměrný pracovník, aby udělal stejnou práci jako pracovníci A a B. Na pravé straně máme $2p$, protože každý z pracovníků A a B udělají jednu práci p.

Nyní vyřešíme rovnici, kterou jsme sestavili.

$$\begin{aligned}
p \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) &= 2p \\
\frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 2 \\
\frac{5x}{6} &= 2 \\
5x &= 12 \\
x &= \frac{12}{5} \\
x &= 2,4
\end{aligned}$$

Žáci by spočítali, že průměrný pracovník danou práci zvládne za 2,5 hodiny. My jsme výpočtem ukázali, že průměrný pracovník by danou práci zvládl za 2,4 hodiny. Ke stejnému výsledku bychom došli, kdybychom spočítali harmonický průměr čísel 2 a 3. Podobný příklad naleznete v kapitole 2.4.3.

Většina učitelů používá pro výpočet známky na pololetí aritmetického průměru. Je to ale dobře? Známce na vysvědčení říkají průměrná známka. Ale jakým průměrem je třeba ji spočítat, aby byla správná? Obecně nemůžeme říct, jaký průměr vzít na to, abychom dostali správnou známku. Do známky na klasifikaci má být zahrnuta i snaživost žáka, jeho chování v průběhu roku, plnění požadavků učitele, atd. Předvedeme si výpočet průměrné známky za pomocí aritmetického, geometrického a harmonického průměru. Nejprve si předvedeme rozdíly na malém souboru známek a následně na větším s větším rozdělením známek.

Prvně budeme počítat průměr ze známek 1 a 5.
Aritmetický průměr známek je $A\,(1,\ 5) = \dfrac{1+5}{2} = 3.$
Geometrický průměr známek je $G\,(1,\ 5) = \sqrt{1 \cdot 5} = 2,236.$
Harmonický průměr známek je $H\,(1,\ 5) = \dfrac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{5}} = 1,667.$

Pokud budeme počítat průměr ze dvou známek, pak dostaneme velké rozdíly při různé volbě průměru.

Průměr budeme počítat ze známek 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5.
Aritmetický průměr známek je

$$A\,(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5) = \frac{2+2+2+2+3+3+3+5+5}{9} = 3.$$

Geometrický průměr známek je

$$G\,(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5) = \sqrt[9]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = 2,806.$$

Harmonický průměr známek je

$$H\,(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5) = \frac{9}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = 2,647.$$

Budeme-li počítat průměrnou známku z většího souboru známek s větším rozdělením, nebudou rozdíly tak velké, ale stále budou patrné. Vždy záleží jen na učiteli, kterou variantu zvolí a jak bude k výpočtu průměrné známky přistupovat. Zda známku určí výpočtem, nebo přihlédne k dalším okolnostem, je na něm samotném.

Předvedli jsme, že pod slovem průměr může být schováno mnohem více, než jen aritmetický průměr. Vždy záleží na daném použití. Kdykoliv je možno aplikovat jakýkoliv z průměrů, ale také nám každý z nich může poskytnout jiné výsledky.

2.3 Průměr v rámcovém vzdělávacím programu

Aritmetický průměr je dle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání [13] učivem pro základní školy. Každá základní škola jej musí mít ve svém Školním vzdělávacím programu a žáci druhého stupně by se s ním měli setkat v rámci hodin matematiky.

Geometrický a harmonický průměr bohužel není zařazen do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání [13], ale ani do Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia [12]. Školy si dané učivo mohou zařadit do svých Školních vzdělávacích programů jako rozšiřující učivo.

2.4 Nejznámější typy průměrů

Následující podkapitoly shrnou teoretické podklady pro výše zmíněné průměry a danou teorii demonstrují na ukázkových příkladech.

Webové stránky `http://matematika-zs.cz/` jsou stránky k učebnicím matematiky pro 6.– 9. ročník základní školy. Autory těchto učebnic jsou Jiří Cihlář[1] a Milan Zelenka[2]. Stránky obsahují metodické pokyny pro učitele, kteří tuto učebnici používají. Také se zde nacházejí testy, které učitelé mohou využít při ověřování znalostí svých žáků.

Sekce „C-materiály“ obsahuje elektronické materiály na které se učebnice odkazují. Materiály jsou vytvořeny v programech Microsoft Excel, GeoGebra a Cabri či Cabri 3D. Tyto materiály slouží jako didaktické pomůcky pro učitele, kteří je mohou poskytnout svým žákům a žáci si tak mohou uvědomit, jak moc jim technika usnadní řešení úloh, pokud ji budou správně používat.

Webové stránky také obsahují doplňkové materiály, které obsahují sbírky příkladů na daná témata. Dále v této práci budeme určité příklady čerpat ze sbírky „Průměry“. V případě zájmu zde může čtenář najít další příklady na procvičení.

Stejně tak budeme čerpat příklady ze sbírky příkladů zveřejněné v [16].

Úmluva. V rámci celé práce budeme počítat průměry pouze z kladných čísel.

[1] Prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc, Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem

[2] PaedDr. Milan Zelenka, Základní škola Ústí nad Labem, Pod Vodojemem 323/3A, příspěvková organizace

2.4.1 Aritmetický průměr

Definice 2. Aritmetický průměr čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$A\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Můžeme se setkat s tímto zápisem $A\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, který vyjadřuje totéž. Také lze obecně říci, že aritmetický průměr je číslo, které dostaneme sečtením hodnot a podělením jejich počtem. Aritmetický průměr čísel 1 a 5 je $A\left(1, 5\right) = \frac{1+5}{2} = 3$.

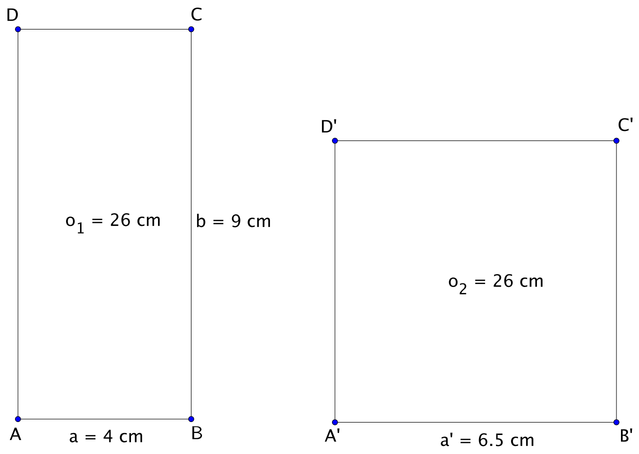
Lidé mají obecně vžitý jen název průměr, ale správněji je aritmetický průměr. Z hlediska statistiky nemusí být aritmetický průměr vždy řešením, které nám ukáže požadované výsledky. Například průměrná známka z matematiky ve třídě je dvojka, ale to nám neřekne, že se ve třídě nachází žáci s jedničkami, a že ve třídě jsou žáci, kteří mají čtyřku. Víme jen, že průměrná známka ve třídě je dvojka. (Polák, 2005). Na vysokých školách jsou studenti hodnoceni písmeny A, B, C, D, E a F. Tyto písmena zastupují známky a mají hodnotu 1, 1-, 2, 2-, 3 a 4. Kdybychom nevěděli, že mají takovou hodnotu, pak nemůžeme spočítat průměrnou známku, protože v kapitole 2.2 jsme řekli, že průměry se budeme zabývat u kvantitativního statistického znaku.

Nicméně my se statistikou zabývat nebudeme, takže se jedná jen o radu do budoucna. V dalších kapitolách si ukážeme také příklady, které by čtenáři mohli na první pohled řešit pomocí aritmetického průměru, ale bylo by to špatně.

2.4.1.1 Typové úlohy

Úloha 1. Je dán obdélník se stranami $a = 4$ cm, $b = 9$ cm. Jak dlouhou stranu má čtverec, který má stejný obvod, jako daný obdélník?

Řešení 1. Obvod obdélníku je $o = 26$ cm. Obvod čtverce je stejný, proto ponecháme stejné označení. Máme nalézt stranu čtverce a' takovou, aby měl stejný obvod jako obdélník. Víme, že součet stran v obdélníku musí být stejný jako součet stran ve čtverci. Pro obvod čtverce platí $o = 4a'$. Pokud máme $o = 26$, pak $a' = \dfrac{26}{4} = 6,5$. Čtverec o stejném obvodu má délku strany $a' = 6,5$ cm. Spočteme-li aritmetický průměr délek stran a a b, dostaneme právě naši hledanou délku strany a'. $A(4,9) = \dfrac{4+9}{2} = 6,5$. Pro názornost se můžeme podívat na obrázek 10.



Obr. 10: Obrázek k úloze 1

Úloha 2. Automobil jel první hodinu konstantní rychlostí $a = 80$ km/h. Další hodinu jel konstantní rychlostí $b = 120$ km/h. Jakou konstantní rychlostí by musel automobil jet po dobu dvou hodin, aby urazil stejnou vzdálenost?

Řešení 2. Automobil jel dvě hodiny a každou hodinu jel jinou stálou rychlostí. První hodinu urazil vzdálenost 80 kilometrů a druhou hodinu urazil vzdálenost 120 kilometrů. Za dvě hodiny automobil ujel 200 km. Pro výpočet rychlosti využijeme vzorce z fyziky rychlost $= \dfrac{\text{dráha}}{\text{čas}}$. Dráha je 200 km a čas je 2 hodiny. Rychlost dostaneme jako $\dfrac{200}{2}$. Průměrná rychlost automobilu by musela být 100 km/h.

Pro průměrnou rychlost jme mohli v tomto případě použít aritmetického průměru čísel 80 a 120. $A(80,120) = \dfrac{80+120}{2} = 100$.

2.4.2 Geometrický průměr

Definice 3. Geometrický průměr čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Zde se opět můžeme setkat s odlišným zápisem. Může se například jednat o výraz $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{2}}$. Geometrický průměr můžeme definovat jako n-tou odmocninu součinu n hodnot. Geometrický průměr čísel 1 a 5 je $G(1,5) = \sqrt{1 \cdot 5} = \sqrt{5}$.

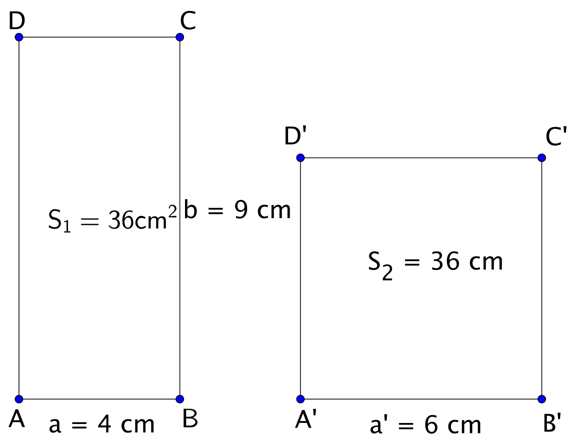
Geometrický průměr je méně používaný, ale určitě má svůj význam. Geometrický průměr používáme hojně při sledování průměrného tempa růstu za jedno období. (Calda, Dupač, 1999).

2.4.2.1 Typové úlohy

Úloha 3. Je dán obdélník se stranami $a = 4$ cm, $b = 9$ cm. Vypočítejte stranu čtverce, který má stejný obsah, jako daný obdélník.

Řešení 3. Obsah obdélníku je $S = 36$ cm^2. Obsah čtverce je stejný, proto ponecháme stejné označení. Máme nalézt stranu čtverce a' takovou, aby měl stejný obsah jako obdélník. Pro obsah čtverce platí $S = a \cdot a$. Pokud máme $S = 36$, výpočtem zjistíme délku strany a'. z rovnice $36 = a' \cdot a'$ si vyjádříme $a' = \sqrt{36}$ a následně vypočteme $a' = 6$. Čtverec, který má stejný obsah jako zadaný obdélník, má délku strany $a' = 6$ cm.

Ke stejnému výsledku dojdeme i výpočtem geometrického průměru čísel 4 a 9. $G(4,9) = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. Pro názornost se můžeme podívat na obrázek 11.

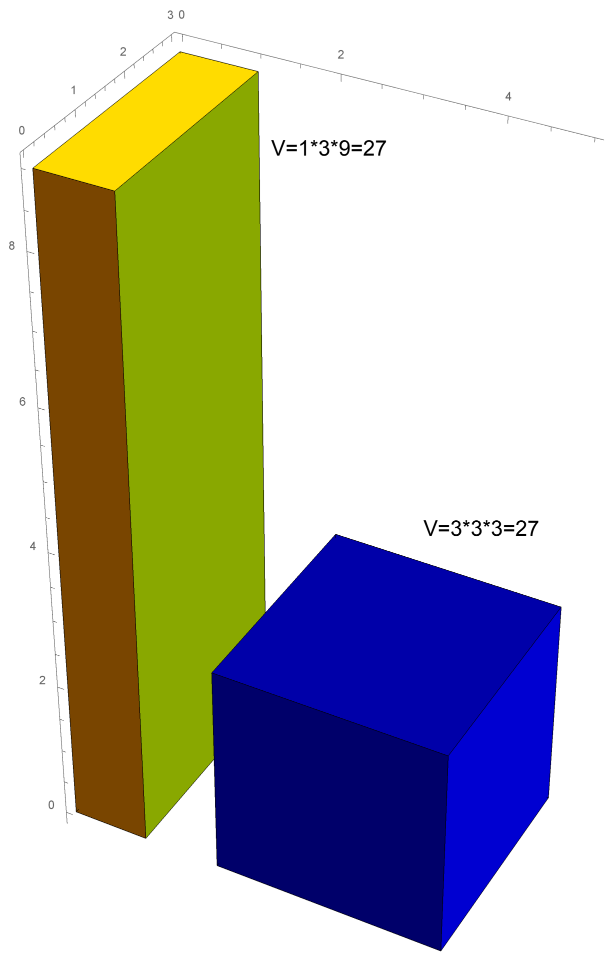


Obr. 11: Obrázek k úloze 3

Úloha 4. Je dán kvádr se stranami $a = 1$ cm, $b = 3$ cm a $c = 9$ cm. Určete délku strany krychle, která má stejný objem jako daný kvádr.

Řešení 4. Objem kvádru je $V = 27$ cm^3. Objem krychle má být stejný. Máme nelézt stranu krychle a' takovou, aby měla stejný objem jako kvádr. Pro objem krychle platí $V = a' \cdot a' \cdot a'$. Pokud máme $V = 27$, výpočtem zjistíme délku strany a'. z rovnice $V = a' \cdot a' \cdot a'$ si vyjádříme $a' = \sqrt[3]{27}$ a následně spočteme $a' = 3$. Krychle, která má stejný objem jako zadaný kvádr má délku strany $a' = 3$ cm.

Stejného výsledku dostaneme, pokud vypočítáme geometrický průměr zadaných stran. $G\,(1, 3, 9) = \sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$. Daný příklad je graficky znázorněn na obrázku 12.



Obr. 12: Obrázek k úloze 5

Úloha 5. Obchodník prodával jeden kus zboží za 100 Kč. Rozhodl se jej zdražit o 20 % na 120 % hodnoty. Následně obchodník zdražil zboží o dalších 30 % na 130 % z již zvýšené hodnoty. o kolik průměrně obchodník zdražil zboží při jednom zdražení?

Řešení 5. Na začátek spočteme kolik zboží stálo po celkovém zdražení. Tato hodnota nám následně bude sloužit pro kontrolu, zda jsme počítali správně. Cena zboží po prvním zdražení byla $100 \cdot 1,2 = 120$ Kč. Po druhém zdražení zboží stálo $120 \cdot 1,3 = 156$ Kč. Vidíme, že první koeficient růstu byl $1,2$ a druhý koeficient růstu byl $1,3$. My vypočítáme průměrný koeficient.

Sestavíme rovnici $100 \cdot x \cdot x = 156$. Neznámá x je námi hledaný průměrný koeficient. Rovnici nyní vyřešíme.

$$100 \cdot x \cdot x = 156$$

$$x^2 = \frac{156}{100}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{156}{100}}$$

$$x = \pm\sqrt{1,56}$$

Jelikož počítáme růst, pak budeme uvažovat jen kladnou hodnotu a to $\sqrt{1,56}$. Výpočtem pro ověření $100 \cdot \sqrt{1,56} \cdot \sqrt{1,56} = 156$ zjistíme, že jsme počítali správně.

Výsledku bychom se dobrali i kdybychom na začátku využili geometrického průměru obou koeficientů růstu. $G(1,2;1,3) = \sqrt{1,2 \cdot 1,3} = \sqrt{1,56}$. Mnozí lidé by využili aritmetického průměru $A(1,2;1,3) = \frac{1,2+1,3}{2} = 1,25$. Bohužel po ověření $100 \cdot 1,25 \cdot 1,25 = 156,25$ by došli k závěru, že počítali špatně.

Jak vidíme z úlohy 5, tak výběr konkrétního průměru je důležitý. Vždy je nutné si řádně rozmyslet, který z průměrů použijeme při našich výpočtech. Úloha 5 nám ukazuje, že při použití aritmetického průměru dostáváme špatný výsledek.

2.4.3 Harmonický průměr

Definice 4. Harmonický průměr čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Jiný zápis pro harmonický průměr může být $H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$. Jedná se o převrácenou hodnotu aritmetického průměru převrácených hodnot zadaných čísel. Harmonický průměr čísel 1 a 5 je $H(1,5) = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{5}} = \frac{5}{3}$.

Harmonický průměr je také méně používaný, ale také nalezne své uplatnění. Pomocí harmonického průměru můžeme například počítat příklady na průměrnou práci, průměrnou rychlost, atd.

2.4.3.1 Typové úlohy

Úloha 6. Určete průměrnou konstantní rychlost automobilu, který jede z místa A do místa B stálou rychlostí $a = 80$ km/h a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí $b = 120$ km/h.

Řešení 6. Vzdálenost mezi místy A a B si označme s. Dobu jízdy z místa A do místa B si označme t_1 a dobu jízdy z místa B do místa A si označme t_2. Pak je průměrná rychlost p rovna vzorci $p = \frac{2s}{t_1 + t_2}$. Dosadíme-li za čas $t_1 = \frac{s}{v_1}$ a za čas $t_2 = \frac{s}{v_2}$. Hodnoty v_1, v_2 již známe ze zadaní. Vzorec upravíme $p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ a následně dosadíme $p = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = 96$. Průměrná rychlost je 96 km/h.

Stejného výsledku bychom dostali, kdybychom vypočítali harmonický průměr čísel 80 a 120. $H(80,\ 120) = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = 96$. Vidíme, že hodnota p je stejná jako harmonický průměr hodnot 80, 120.

Úloha 7. Tři popelky přebírají hromadu hrachu. První popelka by ho přebrala za $a = 2$ hodiny, druhá za $b = 3$ hodiny a třetí za $c = 6$ hodin. Za jak dlouho by přebrala hromadu „průměrná popelka“?

Řešení 7. První popelka přebere za jednu hodinu $\frac{1}{2}$ hromady hrachu. Druhá popelka přebere za hodinu $\frac{1}{3}$ hromady hrachu a třetí popelka přebere za hodinu $\frac{1}{6}$ hromady hrachu. První popelka za x hodin přebere $\frac{x}{2}$ hromady hrachu, druhá popelka přebere $\frac{x}{3}$ hromady hrachu a třetí popelka přebere $\frac{x}{6}$ hromady hrachu. Hromadu hrachu označíme h. Sestavíme rovnici reflektující práci popelek.

$$h \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right) = 3h$$

Rovnice charakterizuje naši situaci. Hledáme x, což je počet hodin, které musí průměrná Popelka pracovat, aby udělala stejnou práci jako ostatní popelky. Na pravé straně máme $3h$, protože každá z popelek udělá jednu hromadu hrachu h.

Nyní vyřešíme rovnici, kterou jsme sestavili.

$$h \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right) = 3h$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 3$$

$$\frac{6x}{6} = 3$$

$$x = 3$$

Průměrné popelce by přebrání hromady hrachu trvalo 3 hodiny. Stejného výsledku bychom dostali vypočtením harmonického průměru čísel 2, 3 a 6.

$H\,(2,3,6) = \dfrac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \; = \; 3.$

Pokud bychom uvažovali, že popelky budou pracovat na jedné hromadě, pak se nám náš výpočet modifikuje takto $h \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right) = h$. Na pravé straně bude dohromady jen jedna hromada, ne tři jako původně. Provedeme výpočet.

$$h \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right) = h$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1$$

$$\frac{6x}{6} = 1$$

$$x = 1$$

Výpočtem jsme dostali třetinu původního výsledku. Kdyby popelky pracovaly na jedné hromadě hrachu, pak by ji přebraly za jednu hodinu. Často tímto stylem bývají zadané úlohy na společnou práci.

Úloha 8. Žaneta nasbírá kilogram ovoce za $2,25$ hodiny. Ondřej nasbírá kilogram ovoce za $1,5$ hodiny. Za jak dlouho nasbírají společně kilogram ovoce?

Řešení 8. Úlohu máme zadanou tak, že chceme spočítat čas, za jak dlouho nasbírají kilogram ovoce dohromady. Kdybychom chtěli spočítat, za jak dlouho průměrně nasbírají kilogram ovoce, pak bychom využili harmonický průměr jako jsme to předvedli v předcházejícím příkladě. Výpočet by vypadal $H(2,25; 1,5) = \frac{2}{\frac{1}{2{,}25} + \frac{1}{1{,}5}} = 1,8$. Takto by ale Žaneta i Ondřej nasbírali každý jeden kilogram ovoce. Měli bychom jednou tolik než potřebujeme. My si upravíme vzorec pro harmonický průměr pro konkrétní příklad. Budeme počítat $\frac{1}{\frac{1}{2{,}25} + \frac{1}{1{,}5}} = 0,9$ hodiny. Touto úpravou jsme si díky čitateli zlomku zajistili, že nás zajímá pouze kilogram ovoce a ne dva, jako tomu bylo přímo u harmonického průměru. Takovou modifikaci provádíme dosti často, chceme-li počítat společnou práci.

Je nutné připomenout, že po úpravě vzorce již nepočítáme harmonický průměr zadaných čísel, ale díky znalosti vzorce pro harmonický průměr jsme si odvodili vzorec pro konkrétní použití.

2.5 Nerovnost průměrů

Pro výše zmíněné průměry platí určitý vztah. Tento vztah byl již zmíněn v kapitole 1. Tohoto vztahu se může využívat u různých matematických úloh. Objevují se v matematických soutěžích, jako je například matematická olympiáda.

Při dokazování se omezíme na jednoduché důkazy, které mohou být předvedeny žákům základní či střední školy. Dokazovat budeme jen pro dvě hodnoty, ne obecně pro n hodnot, jak by to matematický důkaz vyžadoval. Ukážeme si důkazy, ze kterých bude plynout následující nerovnost

$$\mathbf{H} \leq \mathbf{G} \leq \mathbf{A},$$

přičemž rovnost nastává pouze pokud průměrované hodnoty jsou stejné.

2.5.1 Algebraický důkaz

Provedeme si důkaz nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem tak, jak by mohl být prezentován žákům.

Chceme dokázat, že $\mathbf{G} \leq \mathbf{A}$. Důkaz provedeme pro dvě čísla $a > 0$ a $b > 0$. Budeme upravovat následující nerovnost.

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} && |^2 \\
ab &\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 && \\
ab &\leq \frac{(a+b)^2}{4} && | \cdot 4 \\
4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 && | - 4ab \\
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 && \\
0 &\leq (a-b)^2 &&
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost jednoznačně platí, protože druhá mocnina čísla je vždy větší nebo rovna nule. Jelikož jsme postupnými úpravami došli k platné nerovnosti, prohlásíme za pravdivou i naši první nerovnost. Důkaz $\mathbf{G} \leq \mathbf{A}$ máme hotový.

Nyní se dáme do důkazu $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$. Důkaz opět provedeme pro dvě čísla $a > 0$ a $b > 0$. Využijeme výše dokázané nerovnosti $\mathbf{G} \leq \mathbf{A}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} && \Big| \cdot \sqrt{ab} \\
ab &\leq \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} && \Big| \cdot \frac{2}{a+b} \\
\frac{2ab}{a+b} &\leq \sqrt{ab} \\
\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} &\leq \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Vidíme, že důkaz této nerovnosti byl ještě jednodušší než předchozí. Využili jsme již dokázané nerovnosti a pomocí úprav jsme dostali náš požadovaný tvar. Jelikož platila výchozí nerovnost, pak platí i nerovnost $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$.

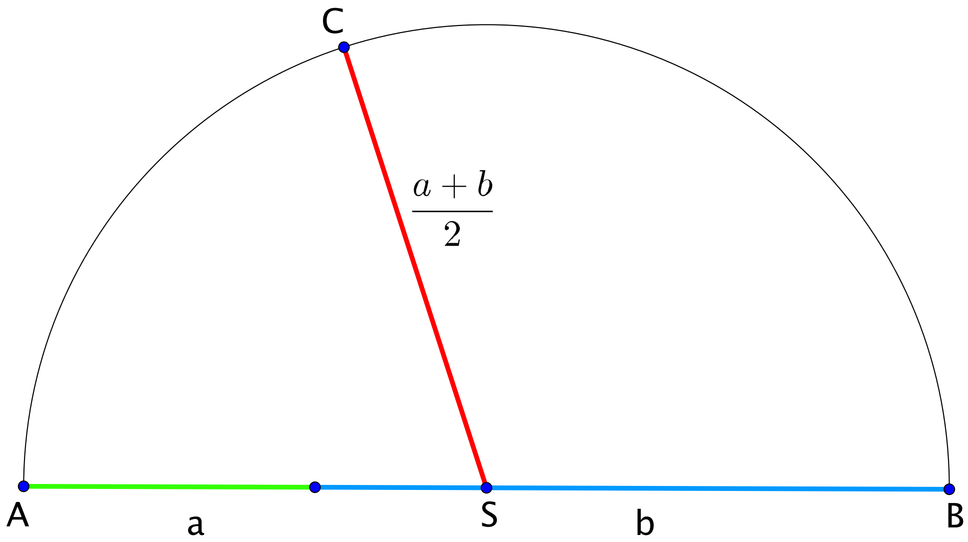
Z výše dokázaných částí plyne, že $\mathbf{G} \leq \mathbf{A}$ a $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$. Složením dostaneme $\mathbf{H} \leq \mathbf{G} \leq \mathbf{A}$ a toto je nerovnost, kterou jsme původně chtěli dokázat.

2.5.2 Geometrický důkaz

Nejprve si ukážeme grafické interpretace jednotlivých průměrů a následně si výsledky porovnáme, čímž dokážeme nerovnost $\mathbf{H} \leq \mathbf{G} \leq \mathbf{A}$.

2.5.2.1 Geometrická interpretace aritmetického průměru

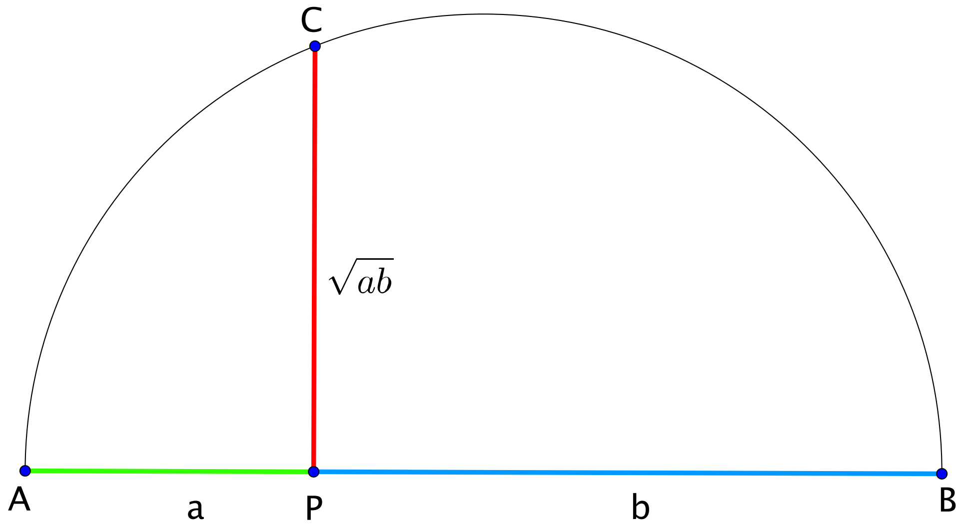
Geometrickou interpretaci aritmetického průměru reálných čísel $a, b > 0$ si představíme jako poloměr kružnice sestrojené nad úsečkou AB délky $a + b$.



Obr. 13: Geometrická interpretace aritmetického průměru

2.5.2.2 Geometrická interpretace geometrického průměru

Geometrickou interpretaci geometrického průměru reálných čísel $a, b > 0$ demonstrujeme za pomocí Eukleidovy věty o výšce. Sestrojíme si úsečku AB délky $a + b$. Nad touto úsečkou sestrojíme Thaletovu kružnici. Bod, který leží na úsečce a jehož vzdálenost od bodu A je a si označíme P. v tomto bodě sestrojíme kolmici, která protne Thaletovu kružnici v bodě C. Velikost úsečky PC je geometrickým průměrem čísel a, b. z Eukleidovy věty o výšce víme, že $|PC|^2 = a \cdot b$, následně $|PC| = \sqrt{ab}$.



Obr. 14: Geometrická interpretace geometrického průměru

2.5.2.3 Geometrická interpretace harmonického průměru

Geometrickou interpretaci harmonického průměru reálných čísel $a, b > 0$ demonstrujeme za pomocí Eukleidovy věty o výšce a Pythagorovy věty. Využijeme obou předchozích obrázků a sestrojíme si do jednoho obrázku aritmetický i geometrický průměr tak, aby vytvořili $\triangle PSC$, kde $|PC| = \sqrt{ab}$ je geometrický průměr čísel a, b a $|SC| = \dfrac{a+b}{2}$ je aritmetický průměr čísel a, b. k úsečce SC sestrojíme kolmici, která prochází bodem P. Patu kolmice si označíme Q a velikost QC si označíme h. Dle Eukleidovy věty o výšce vidíme, že v $\triangle SPC$ platí $|PQ|^2 = h \cdot \left(\dfrac{a+b}{2} - h\right)$. Navíc dle Pythagorovy věty v $\triangle PQC$ platí, že $|PQ|^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 - h^2$. Porovnáme - li oba výrazy, pak dostaneme

$$h \cdot \left(\frac{a+b}{2} - h\right) = \left(\sqrt{ab}\right)^2 - h^2$$

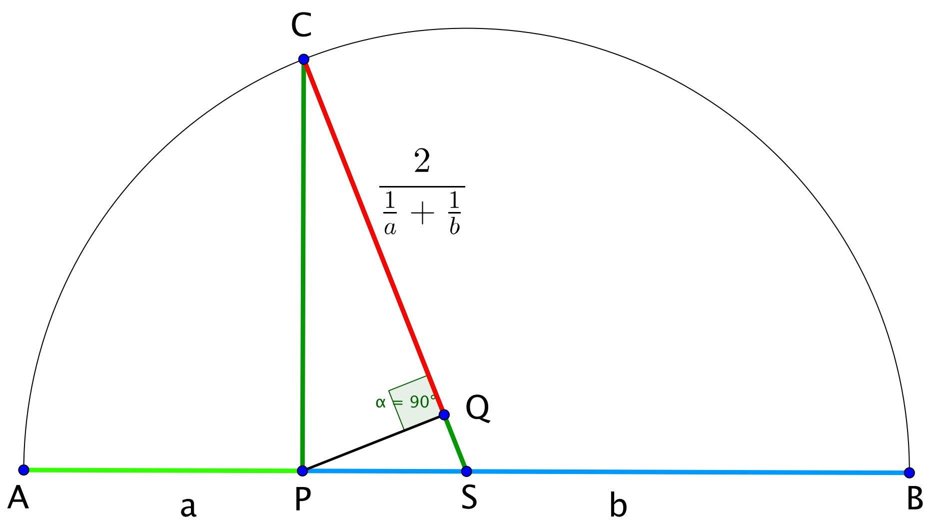
$$h \cdot \frac{a+b}{2} - h^2 = ab - h^2$$

$$h \cdot \frac{a+b}{2} = ab$$

$$h = \frac{2ab}{a+b}$$

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

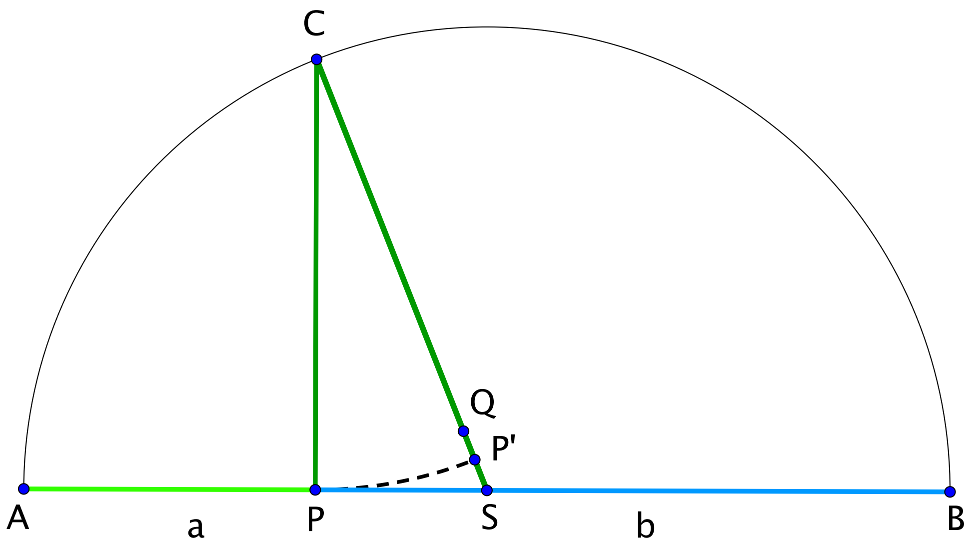
což je náš hledaný harmonický průměr. Nyní si to vše graficky znázorníme.



Obr. 15: Geometrická interpretace harmonického průměru

2.5.2.4 Geometrický důkaz nerovnosti

Díky výše vyjádřeným geometrickým interpretacím si nyní můžeme dovolit geometricky dokázat nerovnost $\mathbf{H} \leq \mathbf{G} \leq \mathbf{A}$. Pro znázornění nerovnosti složíme všechny obrázky do jednoho a pomocí posunu znázorníme všechny velikosti průměrů na jednu úsečku.



Obr. 16: Geometrický důkaz nerovnosti $\mathbf{H} \leq \mathbf{G} \leq \mathbf{A}$

Vidíme, že určitě platí nerovnost $|CQ| \leq |CP'| \leq |CS|$. Jenže $|CQ| = \mathbf{H}$, $|CP'| = \mathbf{G}$ a $|CS| = \mathbf{A}$ a platí nerovnost $\mathbf{H} \leq \mathbf{G} \leq \mathbf{A}$.

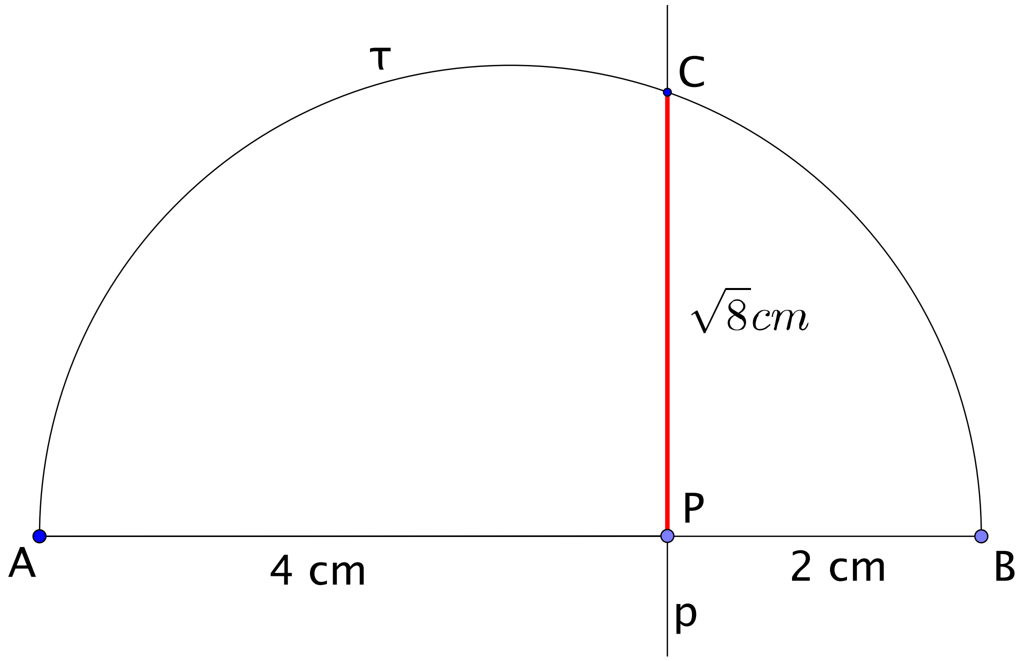
Tyto jednoduché důkazy mohou být prezentovány žákům na základní či střední škole. Důkaz sám o sobě pomůže žákům hlouběji pochopit danou nerovnost, případně dané látce lépe porozumět.

3 Řešené příklady

V následující kapitole předvedeme řešení několika příkladů, které bude možné řešit pomocí výše zmíněných průměrů. k řešení příkladů dojdeme vždy logickou cestou a následně ukážeme jak použít průměry.

Úloha 9. Pomocí kružítka a pravítka sestroje úsečku délky $\sqrt{8}$ cm.

Řešení 9. Délku $\sqrt{8}$ můžeme napsat například jako $\sqrt{1 \cdot 8}$ nebo jako $\sqrt{4 \cdot 2}$ apod. Vybereme variantu zápisu $\sqrt{4 \cdot 2}$ a na sestrojení úsečky dané délky použijeme Euklidovu větu o výšce. Sestrojíme úsečku AB délky $4 + 2$ cm. Na úsečce vyznačíme bod P, pro který bude platit $|AP| = 4$ cm a $|BP| = 2$ cm. Sestrojíme Thaletovu kružnici τ nad úsečkou AB. v bodě P sestrojíme kolmici p k úsečce AB. Průsečík přímky p a kružnice τ označíme C. Úsečka PC má délku $\sqrt{8}$. Obrázek 17 celý příklad prakticky ukazuje.



Obr. 17: Úsečka délky $\sqrt{8}$

Obrázek 17 ukazuje, že se jedná o geometrický průměr čísel 2 a 4. Lze se o tom přesvědčit zpětným ohlédnutím na obrázek 14, kde je zobrazena geometrická interpretace geometrického průměru.

Úloha 10. [3]

Za každý přestupek (A, B, C, D) je stanovena pevná výše pokuty. Na prvním stanovišti byly udíleny pokuty za přestupky A, B, C, na druhém stanovišti jen za přestupek D.

V první tabulce je uveden počet zaznamenaných přestupků a průměrná výše pokuty za jeden přestupek na prvním stanovišti. Ve druhé tabulce jsou uvedeny údaje z obou stanovišť. Vypočtěte výši pokuty za jeden přestupek D.

První stanoviště	
Přestupek	Počet přestupků
A	5
B	3
C	2
Průměrná výše pokuty za jeden přestupek	600 Kč

Tab. 1: Tabulka 1 k úloze 10

Obě stanoviště	
Přestupek	Počet přestupků
A	5
B	3
C	2
D	5
Průměrná výše pokuty za jeden přestupek	900 Kč

Tab. 2: Tabulka 2 k úloze 10

Řešení 10. Budeme vycházet z tabulky 1. Na prvním stanovišti byla průměrná výše pokuty 600 Kč a pokut bylo rozdáno 10. Na prvním stanovišti bylo vybráno 6000 Kč. Z druhé tabulky víme, že celková průměrná výše pokuty byla 900 Kč. Výši pokuty za přestupek A označíme C_A, za přestupek B označíme C_B, za přestupek C označíme C_C a za přestupek D označíme C_D. Celkovou průměrnou výši pokuty vypočteme jako

$$\frac{5 \cdot C_A + 3 \cdot C_B + 2 \cdot C_C + 5 \cdot C_D}{15} = 900.$$

Z první tabulky jsme vyjádřili, že na prvním stanovišti bylo vybráno 6000 Kč. Spočítali jsme, že $5 \cdot C_A + 3 \cdot C_B + 2 \cdot C_C + 5 = 6000$. Nyní upravíme zlomek výše a dořešíme úlohu.

$$\frac{5 \cdot C_A + 3 \cdot C_B + 2 \cdot C_C + 5 \cdot C_D}{15} = 900$$

$$\frac{6000 + 5 \cdot C_D}{15} = 900$$

$$6000 + 5 \cdot C_D = 900 \cdot 15$$

$$5 \cdot C_D = 7500$$

$$C_D = 1500$$

Jeden přestupek D stál 1500 Kč. Pro výpočet jsme použili znalosti o aritmetickém průměru.

Úloha 11. Autobus cestuje mezi městy A a B. z města A do města B má autobus průměrnou rychlost v_1. Na cestě zpět, z města A do města B, má autobus průměrnou rychlost v_2. Vyjádřete celkovou průměrnou rychlost autobusu při cestě tam a zpět.

Řešení 11. Čas, který autobus potřebuje na zdolání cesty z města A do města B označíme t_1 a jeho rychlost na této cestě označíme v_1. Obdobně označíme jako t_2 čas, který autobus potřebuje na překonání zpáteční cesty z města B do města A. Rychlost na zpáteční cestě označíme v_2. v obou případech bude cesta stejně dlouhá, proto ji označíme jednotně jako s. Průměrnou rychlost v vypočítáme pomocí vzorce rychlost $= \frac{\text{dráha}}{\text{čas}}$. V našem příkladě je dráha $s + s = 2s$ a čas je $t_1 + t_2$. Dosadíme do vzorce.

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{\frac{sv_2 + sv_1}{v_1 v_2}} = \frac{2sv_1v_2}{s\,(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Průměrná rychlost autobusu je $\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$. Tato hodnota je harmonickým průměrem průměrem hodnot v_1 a v_2.

Úloha 12. Dokažte, že pro libovolné kladné číslo platí, součet hodnoty čísla a hodnoty reciproké je alespoň 2. Pro jakou hodnotu nastává rovnost?

Řešení 12. Při dokazování využijeme aritmeticko geometrické nerovnosti (AG nerovnost). Víme, že platí vztah $\mathbf{A} \geq \mathbf{G}$ a toho nyní využijeme.

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{1}$$

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1$$

$$x + \tfrac{1}{x} \geq 2$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2, \qquad \text{vynásobíme } x,\ x > 0$$

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

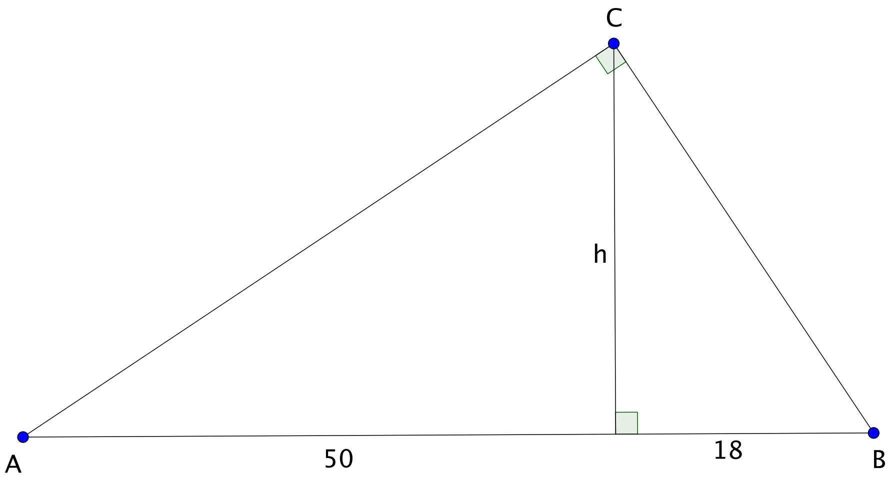
Druhá mocnina čísla je vždy kladná. Tím jsme dokázali, že daná nerovnost platí. Nyní lehce dořešíme kdy se součet bude rovnat číslu 2.

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = \pm 1$$

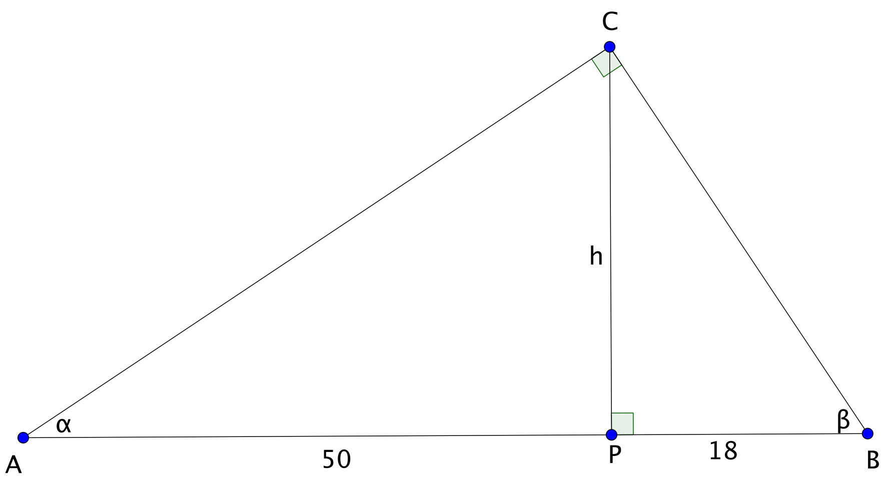
V zadání jsme měli, že počítáme s kladnými čísly. Při výpočtu jsme stanovili podmínku $x > 0$. Díky těmto podmínkám máme pouze jeden výsledek a tím je $x = 1$. Můžete se přesvědčit sami, že $1 + \dfrac{1}{1} = 2$.

Úloha 13. Obrázek 18 znázorňuje pravoúhlý trojúhelník ABC. Nalezněte vyznačenou výšku h.



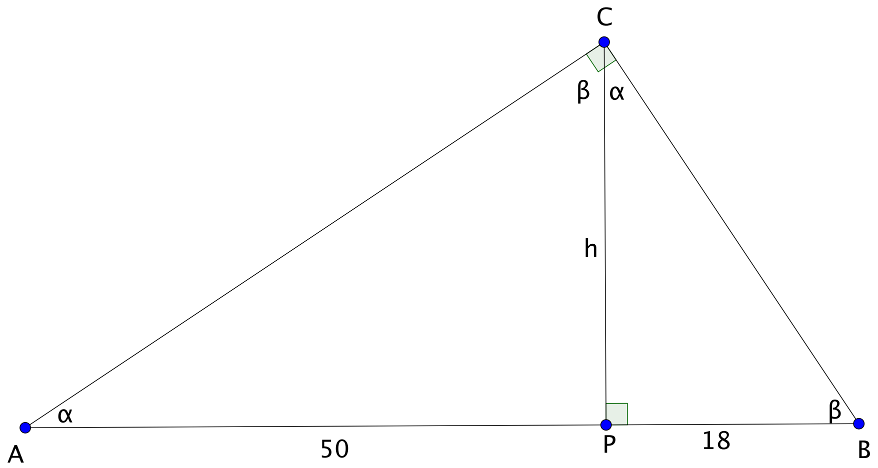
Obr. 18: Obrázek k úloze 13

Řešení 13. Nejprve označíme úhly v trojúhelníku a patu výšky h.



Obr. 19: Obrázek k řešení úlohy úlohy 13

Víme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý, takže platí $\alpha + \beta = 180°$. Díky tomu víme, že úhel ACP musí být stejný jako β a úhel PCB musí být stejný jako úhel α. Výška h nám trojúhelník ABC rozdělila na dva trojúhelníky. Trojúhelníky ABC, APC a PBC jsou podobné.



Obr. 20: Obrázek k řešení úlohy úlohy 13

Nyní vezmeme v úvahu poměr $\dfrac{\text{protější strana úhlu } \beta}{\text{protější strana úhlu } \alpha}$ v trojúhelníku APC a v trojúhelníku PBC. Jelikož trojúhelníky APC a PBC jsou podobné, pak poměr bude stejný.

$$\frac{\text{protější strana úhlu } \beta}{\text{protější strana úhlu } \alpha} = \frac{50}{h} = \frac{h}{18}$$

Vyřešíme rovnici vzhledem k neznáme h.

$$\begin{aligned} \frac{50}{h} &= \frac{h}{18} \\ h^2 &= 50 \cdot 18 \\ h^2 &= 900 \\ h &= \pm 30 \end{aligned}$$

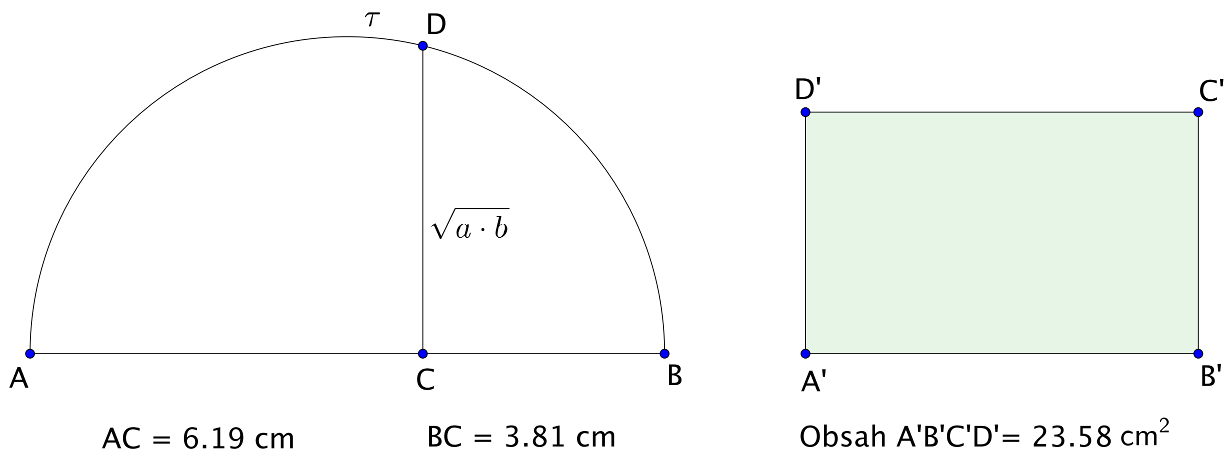
Jelikož počítáme výšku, pak uvažujeme pouze kladný kořen dané rovnice. Ti pozornější si všimnou, že daná výška h je geometrickou interpretací geometrického průměru. Výsledná výška je geometrickým průměrem čísel 50 a 18. Ověříme výpočtem. $G\left(18, 50\right) = \sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{900} = 30$.

Úloha 14. Nalezněte obdélník s největším obsahem, který má obvod $o = 20$ cm.

Řešení 14. Strany obdélníku označíme a a b. Obvod vypočítáme jako $o = 2 \cdot (a + b)$

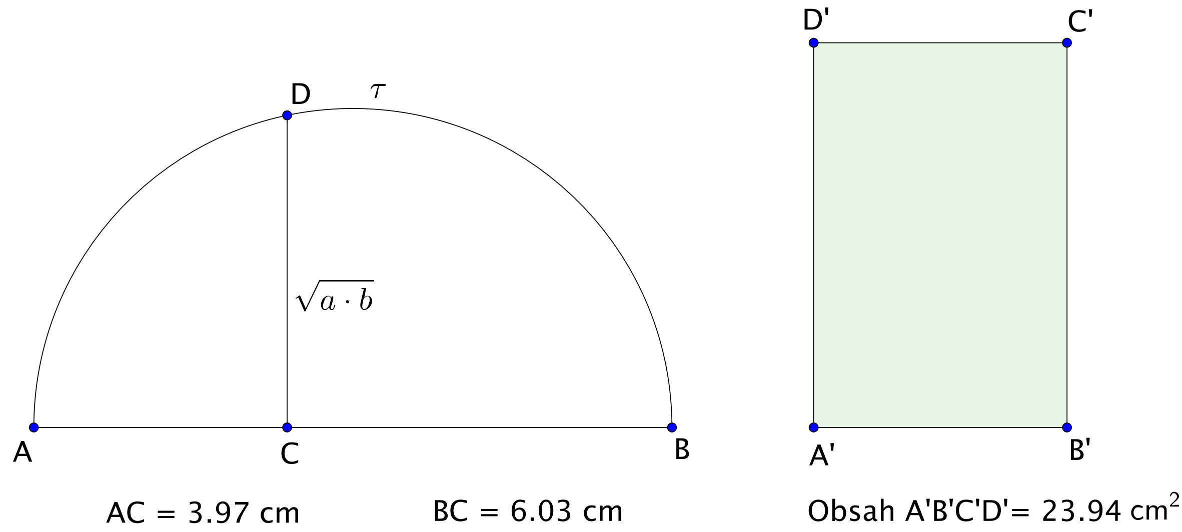
a obsah jako $S = a \cdot b$. Hledáme hodnoty a a b takové, že jejich součin je co největší a součet je roven polovině obvodu.

Součet stran a a b je polovina obvodu, tj. 10 cm. Hledáme hodnoty a a b tak, aby jejich součin byl co největší. Pro lepší názornost předvedeme obrázek, kde úsečka AB má délku 10 cm. Na úsečce leží bod C, který danou úsečku rozděluje na dvě úsečky. Úsečka AC představuje hodnotu a a úsečka BC představuje hodnotu b. Nad úsečku AB je sestrojena Thaletova kružnice τ, na níž leží všechny body, které by s body A a B tvořili pravoúhlý trojúhelník ABC. K úsečce AB je sestrojena kolmice, která protíná Thaletovu kružnici τ v bodě D. Velikost úsečky CD je $\sqrt{a \cdot b}$. Vedle úsečky je sestrojen obdélník $A'B'C'D'$, kde $|A'B'| = a$ a $|B'C'| = b$. Pod obdélníkem je vypočítán jeho obsah.



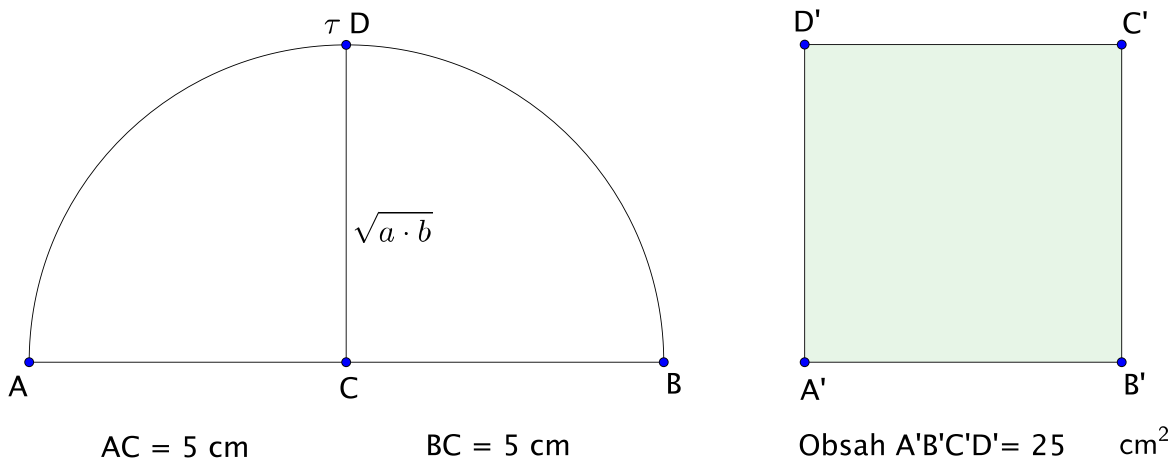
Obr. 21: Obrázek k řešení úlohy úlohy 14

Různou volbou polohy bodu C dostaneme rozdílné hodnoty a a b. Díky tomu máme i jiný obsah.



Obr. 22: Obrázek k řešení úlohy úlohy 14

Snažíme se volit hodnoty a a b tak, aby byl obsah co největší. Očividně bude obsah největší tehdy, když délka úsečky CD bude největší. Tento případ nastane, bude-li bod C ležet přesně uprostřed mezi body A a B.



Obr. 23: Obrázek k řešení úlohy úlohy 14

Z úlohy plyne, že ať bychom zvolili jakékoliv dvě čísla a, b, které dávají dohromady součet 10, tak největší součin $a \cdot b$ bude mít vždy volba $a = b = 5$. Pozorný čtenář si všimne, že toto tvrzení jsme již definovali při představování aritmetického průměru jako funkce dvou proměnných v kapitole 1.1.1. Také jsme hledali čísla x, y tak, aby jejich součet byl roven zadané hodnotě a aby jejich součin byl co největší.

`Poznámka:` Danou úlohu lze naformulovat i obecně, ne pro konkrétní délku. Poté je ukázka řešení složitější. v obecné rovině lze řešení předvést tak, že délku jedné strany zvolíme x a délku druhé strany zvolíme $\frac{o-2x}{2}$. Následně budeme mít funkci $S(x) = x \cdot \frac{o-2x}{2}$. Pomocí derivací zjistíme zda funkce nabývá maxima a případně v jakém bodě. Došli bychom k závěru, že funkce nabývá maxima v bodě $\frac{o}{4}$. Tím bychom ukázali, že strana a má velikost jedné čtvrtiny obvodu. Druhá strana má velikost také čtvrtinu obvodu. Díky stejné velikosti stran víme, že se největší obsah bude mít čtverec.

Úlohu 14 lze obecně definovat jako nalezení n-úhelníku daného obvodu s největším obsahem. Touto problematikou se zabývají izoperimetrické nerovnosti o kterých si čtenář může více přečíst v [1].

Daná práce podrobně pojednává o izoperimetrických nerovnostech pro trojúhelníky, čtyřúhelníky a pro n-úhelníky. Obecně lze říci, že aby n-úhelník daného obvodu měl co největší obsah, pak musí být pravidelný[3].

Pokud bychom se neomezovali na n-úhelníky, pak by rovinným obrazcem daného obvodu a největšího obsahu byl kruh.

[3]Pravidelný n-úhelník má všechny strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly stejně velké.

4 Webová prezentace práce

Diplomová práce je prezentována online na adrese `www.prumery.tode.cz`. Publikace práce na internetu byla zvolena kvůli lepší dostupnosti široké veřejnosti. Učitelé základních či středních škol mohou z webu načerpat inspiraci pro přípravu jejich vyučovacích hodin. Na stránce se do budoucna mohou objevit další příklady či grafické doplnění příkladů.

4.1 Volba webového prostoru a domény

Původní záměr byl, že práce bude prezentována na stránkách fakulty. Bohužel dle zjištěných informací fakulta nedisponuje webovým prostorem, který by mohl být poskytnut studentům na prezentaci diplomových prací.

Následkem výše uvedené skutečnosti byla webová prezentace umístěna na webový hosting s doménou třetího řádu u poskytovatele `www.endora.cz`. Daný hosting i doména jsou zdarma, ale poskytují všechny služby, které byly potřeba při realizaci webové stránky.

4.2 Technologie použité při tvorbě webové stránky

4.2.1 Redakční systém WordPress

Pro zpracování webového obsahu byl zvolen redakční systém WordPress. Výběr byl motivován jednoduchostí tohoto systému a také jeho dostupností.

4.2.1.1 Co je to redakční systém

Redakční systémy slouží ke správě obsahu webu. Pomocí kvalitního redakčního systému můžete pohodlně spravovat a měnit obsah svých stránek. Kromě publikování textů na webu umí dnešní redakční systémy vytvářet fotogalerie, spravovat diskuse nebo provozovat internetový obchod. Některé systémy to umí již po základní instalaci, do jiných je můžete nainstalovat pomocí rozšíření (pluginů či extension). [14]

4.2.2 Historie Wordpressu

Počátek WordPressu je spjat s redakčním systémem b2/cafelog, jehož se ujali vývojáři Matt Mullenweg a Mike Little, aby uvedli celý proces vývoje WP do podoby světově nejužívanějšího redakčního systému, tedy takového WordPressu, jak jej známe dnes.

Přestože různé komponenty systému jako pluginy, šablony, či widgety už považujeme za samozřejmou součást WordPressu, nebylo tomu tak vždy. Celý systém doprovází mnohaletý vývoj, a to už od roku 2003, kdy byl vydán první WordPress s označením verze 0.7, v návaznosti na svého předchůdce – b2/cafelog, jenž ukončil svůj vývoj poslední vydanou verzí 0.6. Za zmínku stojí, že zvykem vývojářů WordPressu je kromě číselného označení nové verze redakčního systému (v návaznosti na verze předchozí) i udělení přezdívky na počest některého významného jazzového umělce.

Po pilotní verzi 0.7 považujeme za další přelomovou verzi redakčního systému verzi 1.2 „Mignus“, a to z důvodu zavedení pluginové architektury, díky které se otevírají dveře k vývoji nových funkcí, vylepšení a dodatků developery i mimo oficiální okruh vývojářů.

S rokem 2004 přichází verze 1.5 „Strayhorn“, jež nám představuje možnost oživení webových stránek implementací nových, vlastních šablon. Dosud bylo možné bez programátorských znalostí využít pouze defaultní šablony. Po rozšíření front-endových možností v podobě šablonového systému přichází verze 2.0 „Duke“ s přepracovaným back-endem, tedy administračním rozhraním pro správu systému.

Rázem se dostáváme do roku 2007, jenž se nesl ve znamení vylepšování práce s administračním rozhraním. To reflektuje verze 2.1 „Ella“ s funkcí automatického ukládání textů či kontroly pravopisu. v tomto trendu pokračuje i WordPress 2.2 „Getz“ a 2.3 „Dexter“. Getz a Dexter obohacují systém o práci s widgety, oštítkování příspěvků, hezké URL adresy nebo uživatelsky přívětivější aktualizace systému, čemuž předchází automatické oznámení správce o nové verzi.

Do dvojkové řady patří po Dexterovi ještě dalších pět verzí. Z nich vyzdvihneme především 2.7 „Coltrane“, která opět přepracovává, a tentokrát výrazně, administrační prostředí. Vývojáři totiž potřebovali z důvodu vývoje mnoha nových funkcí znatelně usnadnit ovladatelnost celého systému. Jednou z nově vyvinutých funkcí se stal i vestavěný editor obrázků, který představila verze 2.9 „Carmen“. Vývoj dvojkových verzí končí s rokem 2009 a následující rok se na světlo světa dostávají verze trojkové, které celosvětovou oblibu WordPressu ještě více prohloubily.

Přesouváme se do roku 2010 a setkáváme se tak s relativně přelomovou verzí 3.0 „Thelonious“, která přichází hned s celou řadou novinek. Jedná se především o zavedení custom post types, přehlednější taxonomii, nové API pro změnu pozadí nebo headeru v šablonách a představení první z řady defaultních šablon pro každý rok „Twenty Ten“.

S každou další verzí můžeme stále zřetelněji spatřovat snahu vývojářů o to, aby byl systém co nejvíce intuitivní, jednoduchý, čistý a přehledný. Velmi silně se tyto aspekty odrážejí ve verzích 3.6 „Peterson“ a 3.7 „Basie“ z roku 2013. Změny se týkají především oblasti dotváření systému tak, aby byl uživatelsky přívětivější. Jako názorná ukázka nám poslouží podpora nových audio a video formátů, intuitivnější autoukládání, automatické aktualizace na pozadí, jednodušší a přehlednější dohledání nových pluginů nebo jazykových lokalizací systémů.

To už se dostáváme do současnosti, kdy je stále velmi žhavým tématem verze 4.0 „Benny“, vydaná v září 2014, a její následník 4.1 „Dinnah“ z prosince téhož roku. Benny uvádí přebudovanou knihovnu médií do dlaždicové podoby nebo vyhledávání a následnou instalaci pluginů přehledně přímo z administračního rozhraní. Aktuálně je systém WordPress na verzi 4.7 „Vaughan“. [5]

Wodpress je vydáván pod licencí GNU GPLv2 a díky tomu je WordPress zdarma a má mnoho komunitních vývojářů, kteří se starají o jeho vývoj.

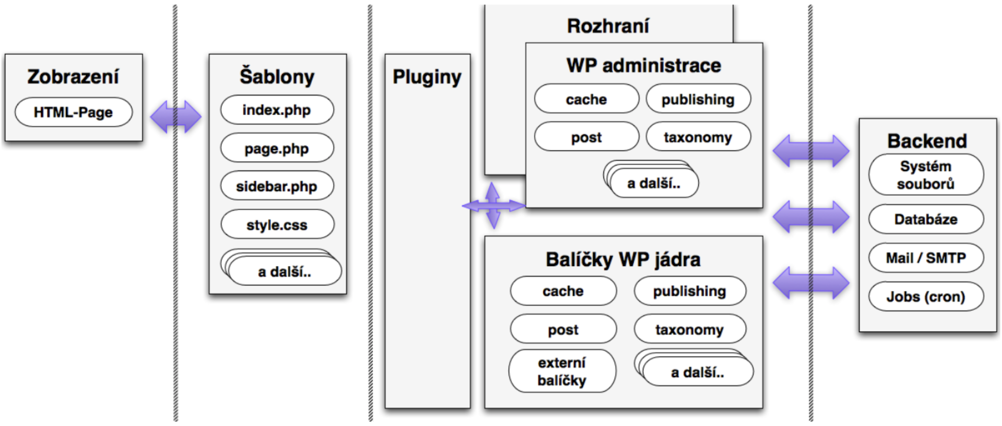
4.2.3 Jak funguje WordPress

WordPress funguje jako klasický redakční systém. Na základě přidělených uživatelských práv může uživatel přistupovat do jeho administrace. Návštěvníci webu vidí po zadání URL adresy frontend aplikace a jejich práva jsou omezena na možnosti číst obsah, komentovat, apod.

Za těmito dvěma rozhraními (administrace a prezentační vrstva, tzv. backend a frontend) stojí technické pozadí v podobě zdrojových souborů jádra systému. Pod touto vrstvou běží už samostatné serverové technologie a hardware.

WordPress v základní instalaci obsahuje několik samostatných částí, které spolu komunikují. Jde o jádro WordPressu, administraci a uživatelské soubory.

Jak spolu jednotlivé části komunikují, je možné vidět na obrázku číslo 24. [15]



Obr. 24: Zjednodušený diagram komunikace jednotlivých částí WordPressu.
Zdroj: [15]

5 Závěr

Cílem práce bylo čtenáře seznámit s pojmem kvaziaritmetický průměr, vysvětlit důležitost specifikace o jakém průměru píšeme či mluvíme a také obecně shrnout poznatky o aritmetickém, geometrickém či harmonickém průměru.

První část práce přehledně a stručně představuje pojem kvaziaritmetický průměr. Také představuje aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných čísel jako vázaný extrém funkce dvou proměnných. Každý z průměrů je podrobně odvozen a následně doplněn grafickými podklady.

Hlavním přínosem práce je poukázání na problematiku nepřesného názvosloví a nejasností vedoucích z něj. Přínosem je také shrnutí poznatků o aritmetickém, geometrickém a harmonickém průměru a doplnění o příklady s případnými grafickými podklady.

Díky prezentaci práce na webu mohou učitelé matematiky při přípravě vyučovací hodiny na téma o průměrech využít ucelených informací a příkladů z této práce. Stejně tak může práce sloužit studentům či žákům, kteří potřebují tuto problematiku lépe pochopit či své znalosti upevnit.

Domnívám se, že diplomová práce splňuje cíle, které byly stanoveny při její tvorbě.

Literatura

[1] BÁRTLOVÁ, Tereza. *Izoperimetrické nerovnosti.* Praha, 2012. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

[2] CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 4. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 9788071961475.

[3] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. *Matematika 9* [online]. [cit. 2017-03-21]. Dostupné z: <http://www.1url.cz/vt3XJ>.

[4] HIDEGKUTI, Marta. *Lecture Notes: Arithmetic, Geometric, and Harmonic Means* [online]. In: . 2009 [cit. 2017-03-25]. Dostupné z: <http://www.teaching.martahidegkuti.com/shared/lnotes/4_collegealgebra/means/means.pdf >.

[5] Historie a vývoj Wordpressu. *Wordpress.cz* [online]. [cit. 2017-03-26]. Dostupné z: http://www.iwp.cz/historie-a-vyvoj-wordpressu/

[6] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet: celostátní vysokoškolská učebnice.* Vyd. 3., dopl. Praha: ČSAV, 1976.

[7] KUCZMA, Marek. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities : Cauchy's equation and Jensen's inequality.* Katowice: Uniwersytet Ślaski, 1985. ISBN 8301055081.

[8] *Matematika: učebnice pro základní školy* [online]. [cit. 2017-02-02]. Dostupné z: <http://matematika-zs.cz/>.

[9] MOLNÁR, Josef. *Matematika 8.* Olomouc: Prodos, 2000. ISBN 80-7230-062-8.

[10] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy.* 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-435-3.

[11] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 8. vyd. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8.

[12] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.*[online]. Praha: MŠMT, 2016. 104 s. [cit. 2017-01-29]. Dostupné z <`http://www.nuv.cz/file/159_1_1/`>.

[13] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.*[online]. Praha: MŠMT, 2016. 142 s. [cit. 2017-01-29]. Dostupné z <`http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf`>.

[14] Redakční systémy. *Open source na Českém hostingu* [online]. [cit. 2017-03-26]. Dostupné z: http://opensource.cesky-hosting.cz/redakcni-systemy/

[15] ŠTENCEK, Jiří. *Vývoj e-shopu na redakčním systému WordPress.* Praha, 2013. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. Vedoucí práce Ing. Renáta Kunstová, Ph.D.

[16] ZHOUF, Jaroslav. *Dostal žák správnou známku? aneb Pojednání o průměrech*[online]. [cit. 2017-02-05]. Dostupné z < `http://mates.upol.cz/Services/AttachmentHandler.ashx?id=181&type=1`>.