

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MODELOVÁNÍ NURBS KŘIVEK A PLOCH V PROJEKTIVNÍM PROSTORU

MODELLING OF NURBS CURVES AND SURFACES IN THE PROJECTIVE SPACE

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. JANA SLABÁKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. PaedDr. DALIBOR MARTIŠEK, Ph.D.

BRNO 2009

Abstrakt

V první části práce se zabývám předchůdci NURBS křivek a ploch, přesněji Fergusonovými, Bézierovými, Coonsovými a B-splajn křivkami a plochami a dále B-splajn funkcemi. V druhé části se věnuji NURBS křivkám a plochám, jejich zapsáním jako lineární kombinace B-splajn funkcí v projektivním prostoru. Podrobněji jsem rozepsala kuželosečkové oblouky, jejich zadávání v projektivním prostoru a NURBS plochy dané jako tenzorový součin NURBS křivek. Poslední část je věnována popisu programů pro modelování kuželoseček a NURBS ploch.

Summary

In the first part I discuss ancestors of NURBS curves and surfaces, rather Ferguson, Beziere, Coons and B-spline curves and surfaces and furthermore B-spline functions. In the second part I devote to NURBS curves and surfaces, their description as a linear combination of B-spline functions in the projective space. I specify conical arcs more detailed, their submit in the projective space and NURBS surfasec given as tensor product of NURBS curves. Last part is devote to describtion programs for modeling conicals and NURBS surface.

Klíčová slova

Předchůdci NURBS křivek a ploch, Fergusonova křivka a plocha, Bézierova křivka a plocha, Coonsova křivka a plocha, B-splajn křivka a plocha, B-splajn funkce, NURBS křivka a plocha, tenzorový součin NURBS ploch.

Keywords

Ancestors of NURBS curves and surfaces, Ferguson curve and surface, Beziere curve and surface, Coons curve and surface, B-spline curve and surface, B-spline functions, NURBS curve and surface, tensor product NURBS surfaces.

SLABÁKOVÁ, J. *Modelování NURBS křivek a ploch v projektivním prostoru*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 49 s. Vedoucí doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Modelování NURBS křivek a ploch v projektivním prostoru* vypracovala samostatně pod vedením doc. PaedDr. Dalibora Martiška, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Jana Slabáková

Děkuji svému vedoucímu diplomové práce doc. PaedDr. Daliboru Martiškovi, Ph.D.
za vedení mé diplomové práce.

Bc. Jana Slabáková

Obsah

Úvod	8
1 Definice vybraných prostorů	9
1.1 Vektorový (lineární) prostor	9
1.2 Afinní (bodový) prostor	11
1.3 Euklidovský prostor	12
1.4 Projektivní prostor	12
2 Křivky	15
2.1 Definice křivky	15
2.2 Předchůdci NURBS křivek	16
2.2.1 Fergusonova křivka	16
2.2.2 Bézierova křivka	17
2.2.3 Coonsova křivka	19
2.3 B-splajn křivka	20
2.3.1 B-splajn funkce	21
2.3.2 Příklady výpočtu B-splajn funkcí	21
3 Plochy	25
3.1 Definice plochy	25
3.2 Fergusonova plocha	25
3.3 Bézierova plocha	26
3.4 Coonsova plocha	29
3.5 B-splajn plocha	31
4 NURBS křivky a plochy	32
4.1 NURBS křivka	32
4.2 NURBS plocha	35
4.3 NURBS plochy jako tenzorový součin	37
5 Kuželosečky a NURBS plochy	43
Závěr	47
Použitá literatura	48
Seznam použitých zkratk a symbolů	49

Úvod

V první polovině šedesátých let minulého století vznikají první křivky a plochy hladkých obecných tvarů. Začali je využívat designéři v automobilovém průmyslu či strojírenství pro dokonalejší modely v počítačích.

První takovéto křivky a plochy měly při navazování spojitost 1. řádu a při změně jednoho bodu se musela přepočítávat celá křivka popř. plocha. Postupem doby se vyvinuly křivky a plochy, u kterých se dá ovládat její tvar při zachování zadaných bodů. Tím se vývoj dostal do projektivního prostoru.

Takto šel vývoj od prvních křivek a ploch - Fergusonových, až po B-splajny. B-splajny jsou již natolik rozvinuté, že při napojování mají spojitost 2. řádu a při změně jednoho bodu se nemusí přepočítávat celá křivka či plocha, ale jen část využívající tento bod. Dále se zde dá zařídit, aby křivka začínala nebo končila v krajních bodech, pomocí nichž se zadává.

B-splajny se dělí na uniformní a neuniformní, dále na racionální a neracionální. Tato práce je zaměřena na neuniformní racionální B-splajn - NURBS. Tyto křivky a plochy mohou být zadávány pomocí mnoha bodů. Ty u plochy vytváří síť. Pro větší plochy je tedy třeba zadávat spoustu dat a to i v případě, kdy to pro modelování plochy není zcela nutné - máme-li plochu složenou z více členité části a méně členité části, pak u NURBS je třeba se řídit tou více členitou částí a tomu přizpůsobit množství dat, tj. u méně členité části vzniká zbytečně podrobná síť této plochy. Tuto skutečnost řeší T-splajny, kde tato síť již není pravidelná, ale lze v ní nějaké přebytečné body v méně členité části vynechat. T-splajny však jsou nad rámec této práce a proto se zde jimi nezabývám.

Celý tento vývoj byl podporován snahou modelovat kružnici na počítači pomocí zadávání bodů. Dosáhlo se toho až pomocí NURBS křivek, které umožňují modelování kuželosečkových oblouků. Lineární kombinací dvou kuželosečkových oblouků pak lze dosáhnout modelování kvadrik.

NURBS jsou hojně využívány např. v CAD systémech. Tady se využívají funkce jako tažení, otáčení či vedení. V jejich pozadí stojí právě NURBS - pro tvorbu povrchů předdefinujeme obrys či profil daného tělesa a z něj se pak pomocí daných funkcí vytvoří 3D model. Dále se používají např. u 3D skenerů pro načtení reálného objektu do počítače a následného vytvoření reálné kopie. Využití NURBS v těchto skenerech umožňuje například zanechat hmotné odkazy budoucím generacím (cenné relikvie, apod.).

1 Definice vybraných prostorů

Protože budeme rozebírat problematiku NURBS křivek a ploch v projektivním prostoru, musíme si nejprve definovat, co to ten projektivní prostor je. K tomu budeme potřebovat vektorový prostor a dále využijeme prostor afinní a euklidovský.

1.1 Vektorový (lineární) prostor

Vektorovým (lineárním) prostorem rozumíme neprázdnou množinu \mathbf{V} , na které je definováno sčítání a násobení prvků reálnými čísly s těmito vlastnostmi:

- \mathbf{V} je uzavřená množina vůči oběma operacím, tj. pokud sčítáme nebo násobíme prvky z množiny \mathbf{V} , výsledkem je opět prvek do této množiny náležící.
- Sčítání je komutativní a asociativní, tj. pro libovolné prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ je

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.$$

- \mathbf{V} obsahuje nulový prvek \mathbf{o} takový, že pro libovolné $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ je

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}.$$

- Ke každému prvku $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existuje opačný prvek $-\mathbf{u}$, pro který platí

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}.$$

- Pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u},$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v},$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u},$$

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Prvky množiny \mathbf{V} nazýváme *vektory*, reálná čísla *skaláry*. Neprázdnou podmnožinu \mathbf{W} množiny \mathbf{V} nazveme *podprostor* vektorového prostoru \mathbf{V} , jestliže platí pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W},$$

$$\alpha \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W}.$$

Podmnožinu $\{\mathbf{u}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, vektorového prostoru \mathbf{V} nazýváme *lineárně závislou* právě tehdy, když existují $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, z nichž alespoň jedno je nenulové, takové, že $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$. V opačném případě nazýváme množinu *lineárně závislou*.

Vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ nazveme *lineární kombinací vektorů* $\{\mathbf{u}_i\} \subset \mathbf{V}$, $i = 1, \dots, n$, právě tehdy, když existují $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, z nichž alespoň jedno je nenulové, takové, že $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{v}$. Množinu všech lineárních kombinací vektorů $\{\mathbf{u}_i\} \subset \mathbf{V}$, $i = 1, \dots, n$,

značíme $\{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i\} = \langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n \rangle$. Vektory \mathbf{u}_i , $i = 1, \dots, n$, jsou tedy lineárně nezávislé právě tehdy, když žádný z nich není lineární kombinací ostatních.

Podmnožinu $\{\mathbf{u}_i\} \subset \mathbf{V}$, $i = 1, \dots, n$, vektorového prostoru nazveme (*konečným*) *generátorem* tohoto prostoru právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ je lineární kombinací $\{\mathbf{u}_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Lineárně nezávislý konečný generátor vektorového prostoru nazýváme jeho *konečnou bází*. Libovolné dvě konečné báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

Nechť vektorový prostor \mathbf{V} má konečnou bází s n prvky. Pak číslo n nazýváme *dimenzí* prostoru \mathbf{V} a prostor označujeme \mathbf{V}_n . Značíme $\text{Dim}(\mathbf{V}_n) = n$.

Nechť \mathbf{V}_n je vektorový prostor dimenze n , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, jeho libovolná báze a $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ jeho libovolný vektor. Koefficienty c_i , $i = 1, \dots, n$, této lineární kombinace nazýváme *souřadnicemi vektoru* \mathbf{v} v bázi \mathcal{B} , píšeme $\mathbf{v} = (c_1, c_2, \dots, c_n)_{\mathcal{B}}$.

Tenzory

Lineární zobrazení $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbb{R}$, kde \mathbf{V}_n je vektorový prostor konečné dimenze n , se nazývá *lineární forma* na \mathbf{V} právě tehdy, když pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a každé $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),$$

$$f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u}).$$

Nechť \mathbf{V}^* je množina všech lineárních forem nad \mathbf{V} . Pro každé $f_1, f_2 \in \mathbf{V}^*$ definujeme sčítání lineárních forem a násobení lineární formy skalárem:

$$f_1(\mathbf{u}) \oplus f_2(\mathbf{u}) = f_1(\mathbf{u}) + f_2(\mathbf{u}),$$

$$c \odot f_1(\mathbf{u}) = cf_1(\mathbf{u}).$$

Pak \mathbf{V}^* je vektorový prostor. Jde o prostor všech lineárních forem na \mathbf{V} - duální prostor k \mathbf{V} .

Zobrazení $g : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, kde \mathbf{U}, \mathbf{V} jsou vektorové prostory konečných dimenzí m, n , se nazývá *bilineární forma* mezi prostory \mathbf{U}, \mathbf{V} , je-li g lineární v obou svých vektorových argumentech:

$$g(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}), \quad g(r\mathbf{u}, \mathbf{v}) = rg(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2), \quad g(\mathbf{u}, r\mathbf{v}) = rg(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$, $r \in \mathbb{R}$. Zobrazení $g : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *součtem* bilineárních forem $g_1 : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Zobrazení $h : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *skalárním násobkem* bilineární formy $g : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí:

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(c\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cg(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Všechny bilineární formy lze zapsat ve tvaru:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_i \cdot v_j \cdot g(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_i \cdot v_j \cdot a_{ij}$$

resp.

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix},$$

kde $u_i, i = 0, 1, \dots, m$, a $v_j, j = 0, 1, \dots, n$, jsou souřadnice vektorů $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ resp. $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ v bázi $\{\mathbf{e}_0; \mathbf{e}_1; \dots; \mathbf{e}_m\} \in \mathbf{U}$ resp. $\{\mathbf{f}_0; \mathbf{f}_1; \dots; \mathbf{f}_n\} \in \mathbf{V}$.

Množina $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ všech bilineárních forem mezi prostory \mathbf{U}, \mathbf{V} spolu se součtem bilineárních forem a skalárním násobkem bilineární formy je vektorový prostor. Tento vektorový prostor $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$ nazýváme *tenzorovým součinem* prostorů \mathbf{U} a \mathbf{V} . Speciálně tenzorové součiny $\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}, \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}^*, \mathbf{U}^* \otimes \mathbf{U}^*$ nazýváme *prostory tenzorů*, jejich prvky nazýváme *tenzory*, přičemž prvky prostoru \mathbf{U} nazýváme *kontravariantní* vektory, značíme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. Prvky duálního prostoru \mathbf{U}^* nazýváme *kovariantní* vektory, značíme je $\mathbf{u}^* = (u^1, u^2, \dots, u^m)$.

1.2 Afinní (bodový) prostor

Afinním (bodovým) prostorem rozumíme neprázdnou množinu \mathbf{A}_n , pro kterou existuje vektorový prostor \mathbf{V}_n a zobrazení $\varphi: \mathbf{A}_n \times \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$ takové, že platí:

1. pro každé $A \in \mathbf{A}_n$ a každé $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ existuje právě jedno $B \in \mathbf{A}_n$ takové, že $\varphi(A; B) = \mathbf{v}$,
2. pro každé $A, B, C \in \mathbf{A}_n$ je $\varphi(A; C) = \varphi(A; B) + \varphi(B; C)$.

Prvky množiny \mathbf{A}_n nazýváme *body*. Uspořádanou dvojici $[A, B]$ nazýváme *umístěním vektoru \mathbf{v} v prostoru \mathbf{A}_n* . Vektorový prostor \mathbf{V}_n nazýváme *zaměření* prostoru \mathbf{A}_n . *Dimenzí afinního prostoru* rozumíme dimenzi prostoru \mathbf{V}_n .

Je-li $\varphi(A; B) = \mathbf{v}$, píšeme $\mathbf{v} = B - A$. Bod $A = [a_1; a_2; \dots; a_n] \in \mathbf{A}_n$ afinního prostoru nazveme *afinním násobkem* bodu $B = [b_1; b_2; \dots; b_n] \in \mathbf{A}_n$ právě tehdy, když existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že:

$$[a_1; a_2; \dots; a_n] = [cb_1; cb_2; \dots; cb_n].$$

Píšeme $[a_1; a_2; \dots; a_n] = c[b_1; b_2; \dots; b_n]$, resp. $A = c \cdot B$.

Bod $D = [d_1; d_2; \dots; d_n] \in \mathbf{A}_n$ nazveme *afinním součtem* bodů $A, B \in \mathbf{A}_n$ právě tehdy, když:

$$[d_1; d_2; \dots; d_n] = [a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n].$$

Píšeme $[d_1; d_2; \dots; d_n] = [a_1; a_2; \dots; a_n] + [b_1; b_2; \dots; b_n]$, resp. $D = A + B$.

Bod $E = [e_1; e_2; \dots; e_n] \in \mathbf{A}_n$ nazveme *afinní kombinací* bodů $A_i = [a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in}]$, $i=1, 2, \dots, k$, právě tehdy, když existují $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ takové, že:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k = 1,$$

$$[e_1; e_2; \dots; e_n] = \left[\sum_{i=1}^k t_i a_{i1}; \sum_{i=1}^k t_i a_{i2}; \dots; \sum_{i=1}^k t_i a_{in} \right].$$

Píšeme $[e_1; e_2; \dots; e_n] = \sum_{i=1}^k t_i [a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in}]$, resp. $E = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_k A_k$, tj. $E = \sum_{i=1}^k t_i A_i$.

1.3 Euklidovský prostor

Nechť $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je zobrazení množiny $V \times V$ do \mathbb{R} splňující pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}, r \in \mathbb{R}$:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$,
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$,
3. $\langle r\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$,
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$.

Pak \mathbf{V} se nazývá vektorový prostor se skalárním součinem, neboli *unitární prostor*. Afinní prostor, jehož zaměřením je unitární prostor, nazýváme *euklidovský prostor*. Euklidovský prostor dimenze n se značí \mathbf{E}_n .

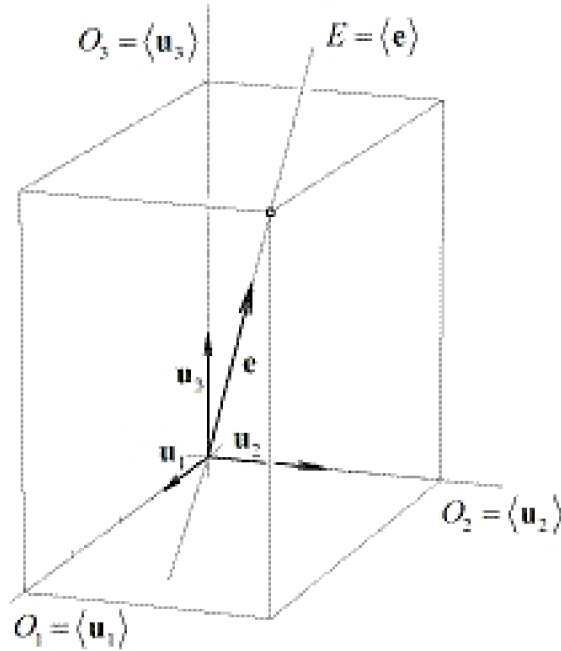
Je-li \mathbf{V}_n unitární prostor dimenze n , $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \dots; \mathbf{e}_n\}$ libovolná báze \mathbf{V}_n a $O \in \mathbf{E}_n$, pak uspořádanou $(n + 1)$ -tici $\langle O; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \dots; \mathbf{e}_n \rangle$ nazýváme *kartézskou souřadnou soustavou*. Jestliže $X - O = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, píšeme $X = [x_1; x_2; \dots; x_n]$ a uspořádanou n -tici nazýváme *kartézskými souřadnicemi bodu X*.

1.4 Projektivní prostor

Nechť \mathbf{V}_{n+1} ($n \geq -1$) je vektorový prostor dimenze $n + 1$ nad množinou všech reálných čísel. Množinu \mathbf{P}_n všech jednodimenzionálních podprostorů prostoru \mathbf{V}_{n+1} nazýváme *projektivním prostorem* dimenze n . Jeho prvky jsou body. Vektorový prostor \mathbf{V}_{n+1} nazýváme *aritmetickým základem* prostoru \mathbf{P}_n . Každý nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{n+1}$, který generuje bod $A = \langle v \rangle = \{k\mathbf{v} \mid k \in \mathbb{R}\}$, nazýváme *aritmetickým zástupcem bodu A* projektivního prostoru.

Množina bodů $\{X_1; X_2; \dots; X_k\}; X_i \in \mathbf{P}_n$ je *lineárně nezávislá* právě tehdy, když jsou lineárně nezávislí aritmetičtí zástupci jejich prvků.

Aritmetickou bází projektivního prostoru \mathbf{P}_n rozumíme libovolnou bázi $\langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n \rangle$ vektorového prostoru \mathbf{V}_{n+1} . *Geometrickou bází* prostoru \mathbf{P}_n rozumíme $(n + 2)$ -tici bodů $\langle O_1; O_2; \dots; O_{n+1}; E \rangle$ takových, že libovolných $(n + 1)$ z nich je lineárně nezávislých. Body O_1, O_2, \dots, O_{n+1} nazýváme *základní body* a bod E *jednotkový bod* geometrické báze.



Obr.1: Zobrazení bází v \mathbf{P}_2

Nechť $\langle O_1; O_2; \dots; O_{n+1}; E \rangle$ je geometrická báze a $\langle \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_{n+1} \rangle$ je aritmetická báze projektivního prostoru \mathbf{P}_n taková, že

$$E = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_{n+1} \rangle,$$

$$O_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle, O_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle, \dots, O_{n+1} = \langle \mathbf{u}_{n+1} \rangle.$$

Dále nechť $A = \langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{P}_n$ je libovolný bod, přičemž $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + \dots + v_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}$, $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Pak uspořádanou $(n + 1)$ - tici $(v_1; v_2; \dots; v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nazýváme *projektivními homogenními souřadnicemi bodu A* vzhledem ke geometrické bázi $\langle O_1; O_2; \dots; O_{n+1}; E \rangle$.

Projektivní prostor \mathbf{Q}_m nazýváme *projektivním podprostorem* prostoru \mathbf{P}_n , jestliže aritmetický základ prostoru \mathbf{Q}_m je podprostorem aritmetického základu \mathbf{P}_n .

Jestliže jsou $A_1 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle, A_2 = \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \dots, A_{m+1} = \langle \mathbf{v}_{m+1} \rangle$ lineárně nezávislé body z \mathbf{Q}_m a pro aritmetického zástupce \mathbf{x} libovolného bodu $X \in \mathbf{Q}_m$ platí:

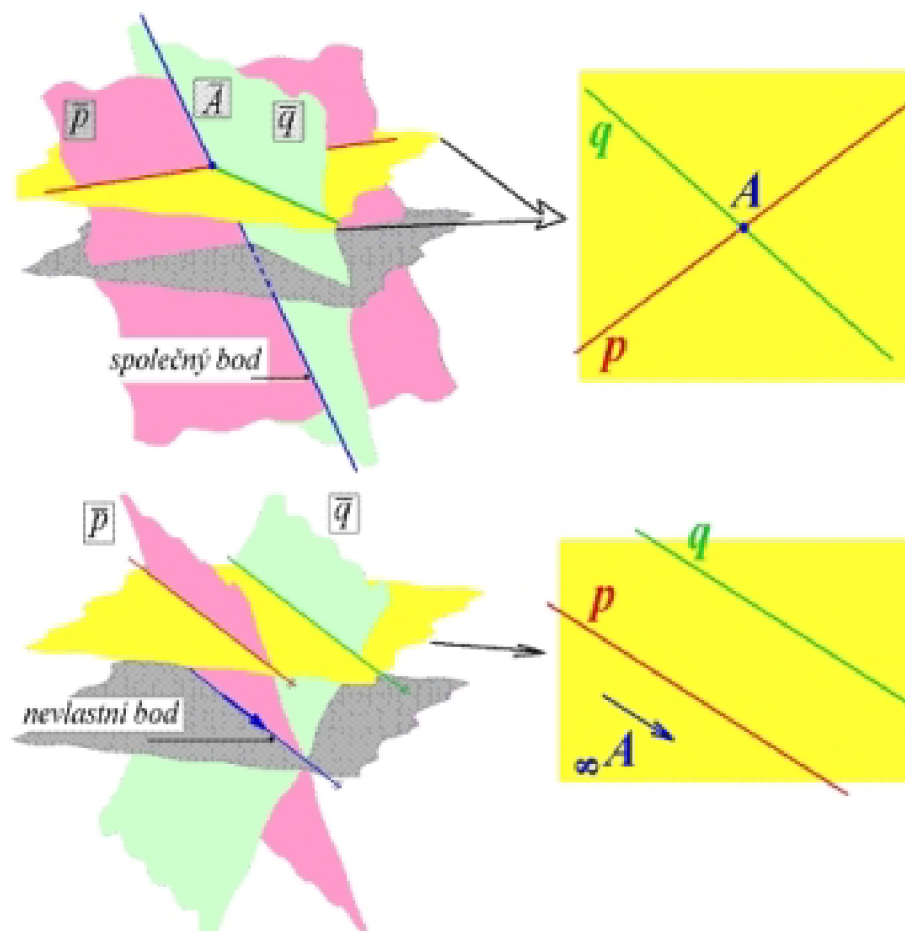
$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_{m+1} \mathbf{v}_{m+1},$$

říkáme, že bod X je projektivní kombinací bodů A_1, A_2, \dots, A_{m+1} . Píšeme:

$$X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_{m+1} A_{m+1}.$$

Tuto rovnici nazýváme parametrickým vyjádřením podprostoru s geometrickou bází $\langle A_1; A_2; \dots; A_{m+1}; X \rangle$.

Projektivní prostor můžeme modelovat jako euklidovský prostor rozšířený o jednu dimenzi. V tomto modelu je projektivním bodem euklidovská přímka procházející euklidovským počátkem. Bod $A = (v_1; v_2; \dots; v_{n+1})$ nazýváme *vlastním bodem* prostoru \mathbf{P}_n právě tehdy, když $v_{n+1} \neq 0$. V opačném případě jde o bod nevlastní. Vlastní bod můžeme přepsat na tvar $A = \left(\frac{v_1}{v_{n+1}}; \frac{v_2}{v_{n+1}}; \dots; \frac{v_n}{v_{n+1}}; 1 \right)$ a kartézské souřadnice tohoto bodu v euklidovském prostoru pak jsou $A = \left[\frac{v_1}{v_{n+1}}; \frac{v_2}{v_{n+1}}; \dots; \frac{v_n}{v_{n+1}} \right]$.



Obr.2: Zobrazení vlastního a nevlastního bodu v projektivní rovině.

Množina všech vlastních bodů projektivního prostoru \mathbf{P}_n je jeho projektivním podprostorem, který je izomorfní s n -rozměrným afinním prostorem. Je-li aritmetickým základem prostoru \mathbf{P}_n unitární vektorový prostor, je podprostor izomorfní s n - rozměrným euklidovským prostorem.

2 Křivky

V matematice se často setkáváme s křivkami, které procházejí předem zadanými body (např. interpolační polynomy, splajny apod.). Technická praxe však často vyžaduje křivky určené body, kterými křivka nemusí procházet a jejichž poloha určuje křivku jiným způsobem. Jedná se o řídicí body nebo o řídicí polygony. Jednu z nejjednodušších takových křivek používal od roku 1964 J. C. Ferguson - Fergusonovu křivku. V letech 1959 - 1962 navrhli nezávisle na sobě P. E. Béziere a P. de Casteljaou křivku, jejíž název je Bézierova křivka.

Mezi další křivky, jež jsou v technické praxi hojně používány, patří Coonsovy křivky a B - splajny, které definoval S. A. Coons. Nevýhodou Fergusonovy, Bézierovy a Coonsovy křivky je pouze lokální kontrolovatelnost - po změně jednoho bodu musíme přepočítat celou křivku, a špatná ovladatelnost.

Racionální B - splajny a neuniformní racionální B - splajny (NURBS) umožnily generovat klasické geometrické prvky (např. úsečky, kružnice, elipsy) za pomoci stejných metod, které umožňují vytvořit křivky se složitými průběhy.

2.1 Definice křivky

Zobrazení $v : I \rightarrow \mathbf{V}_n$ se nazývá *vektorová funkce* na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že vektorová funkce $v : I \rightarrow \mathbf{V}_n$ je *třídy* C^r na I , právě když v má na I spojitě všechny derivace až do řádu r včetně. Případnou nultou derivací rozumíme funkci samu.

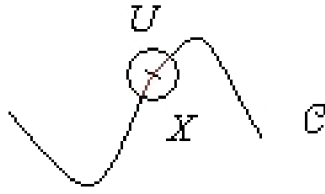
Zobrazení $f : I \rightarrow \mathbf{E}_n$ nazýváme *pohyb v prostoru* \mathbf{E}_n . Je-li $P \in \mathbf{E}_n$ pevně zvolený počátek, tak průvodičem bodu $Q \in \mathbf{E}_n$ rozumíme vektor $v = \overrightarrow{PQ} \in \mathbf{V}_n$. Pohyb $f : I \rightarrow \mathbf{E}_n$ definuje vektorovou funkci $\overrightarrow{P}f : I \rightarrow \mathbf{V}_n$, která každému $t \in I$ přiřadí průvodič $\overrightarrow{P}f(t) = (f(t) - P) \in \mathbf{V}_n$ bodu $f(t)$. Vektorová funkce $\overrightarrow{P}f : I \rightarrow \mathbf{V}_n$ se nazývá *průvodič pohybu* f .

Vektor $f' = \frac{df}{dt}$ (pokud existuje) nazýváme *vektor rychlosti pohybu* f . Řekneme, že f je *pohyb třídy* C^r , jestliže jeho průvodič $\overrightarrow{P}f$ je vektorová funkce třídy C^r . Tento pohyb je *regulární*, jestliže $\frac{df}{dt} \neq \mathbf{o}$ pro všechna $t \in I$. Bod $f(t_0)$, v němž $\frac{df}{dt} = \mathbf{o}$ nazýváme *singulárním bodem* pohybu f .

Pohyb $f : I \rightarrow \mathbf{E}_n$ je *jednoduchý*, platí-li $t_1 \neq t_2 \Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2)$. Množinu $\mathcal{C} \subset \mathbf{E}_n$ nazýváme *jednoduchá křivka* třídy C^r , pokud existuje takový jednoduchý regulární pohyb $f : I \rightarrow \mathbf{E}_n$ třídy C^r , že platí $\mathcal{C} = f(I)$. Samotné zobrazení f pak nazýváme *parametrizací křivky* \mathcal{C} .

Jednoduchá křivka \mathcal{C} je *orientovaná souhlasně* s parametrizací f , jestliže pro dva libovolné body $f(t_1)$, $f(t_2)$ křivky \mathcal{C} platí, že $f(t_1)$ je před $f(t_2)$ právě tehdy, když $t_1 < t_2$. Pokud je $t_1 > t_2$, pak jde o *nesouhlasnou* orientaci.

Říkáme, že $\mathcal{C} \subset \mathbf{E}_n$ je *křivka* třídy C^r , jestliže pro každý bod $X \in \mathcal{C}$ existuje takové okolí U v \mathbf{E}_n , že $\mathcal{C} \cap U$ je jednoduchá křivka třídy C^r . Parametrizace průniků $\mathcal{C} \cap U$ nazýváme *lokálními parametrizacemi*.

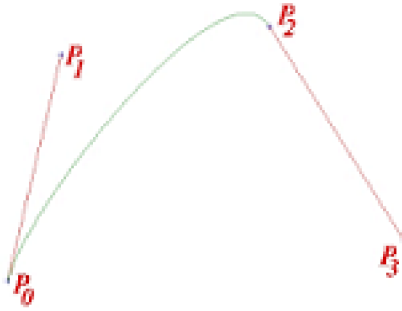


Obr.3: Lokální parametrizace

2.2 Předchůdci NURBS křivek

2.2.1 Fergusonova křivka

Fergusonova křivka je určena čtyřmi body P_0, P_1, P_2, P_3 , kde body P_0, P_3 jsou krajními body křivky. $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_2P_3}$ jsou tečné vektory v krajních bodech. Velikost těchto vektorů ovlivňuje zároveň druhou derivaci křivky (čím je velikost větší, tím více křivka k vektoru přibližuje). Jsou-li oba tečné vektory nulové, pak se křivka stane úsečkou P_0P_2 .



Obr.4: Fergusonova křivka

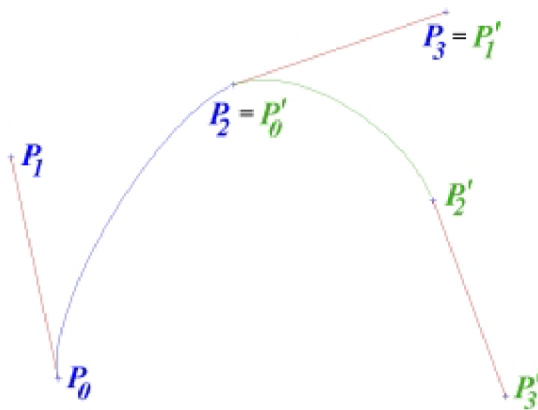
Parametrizace křivky je tvaru:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 P_i F_i(t); \quad t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (1)$$

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, F_1(t) = t^3 - 2t^2 + t, F_2(t) = -2t^3 + 3t^2, F_3(t) = t^3 - t^2. \quad (2)$$

Funkce F_i jsou polynomy 3. stupně. Fergusonova křivka je tedy kubická parabola. Někdy je tato křivka nazývána Hermitovskou kubikou.

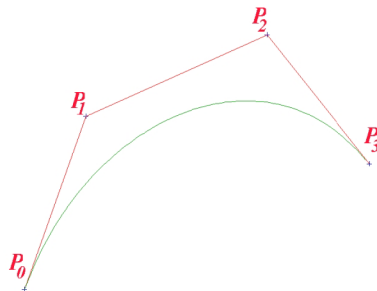
Největší přednost Fergusonových křivek se projeví při jejich navazování. Spojitosti při navazování dvou křivek docílíme totožností posledního bodu první křivky a prvního bodu druhé křivky. Identita tečných vektorů v daném bodě zajišťuje, že vzniklá křivka je třídy C^1 .



Obr.5: Spojení dvou Fergusonových křivek

2.2.2 Bézierova křivka

Bézierovy křivky jsou patrně nejpoužívanější aproximační křivky používané pro modelování ve dvou rozměrech. Často se používají i při definici písma.



Obr.6: Bézierova křivka

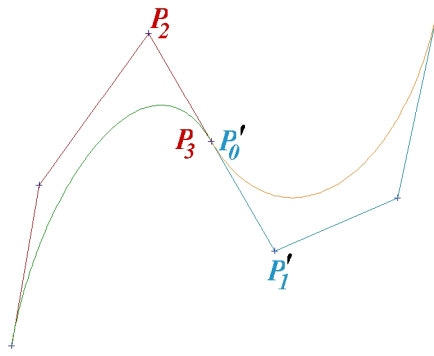
Bézierova křivka je určena čtyřmi body P_0, P_1, P_2, P_3 a je definována parametrizací:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t); \quad t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (3)$$

$$B_0(t) = (1-t)^3, \quad B_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3(t) = t^3. \quad (4)$$

Jedná se o kubickou parabolu, která prochází body P_0, P_3 , úsečky P_0P_1, P_3P_2 určují tečny v krajních bodech a jejich směrnice jsou číselně rovny třetině délky těchto úseček.

Bézierovy křivky můžeme snadno hladce napojovat, a to tak, že v bodě spojení zajistíme společnou tečnu - docílíme tak spojitosti křivky a její derivace, tj. křivka je třídy C^1 .



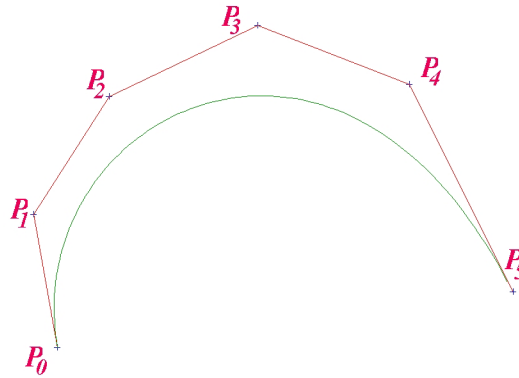
Obr.7: Spojení dvou Béziorových křivek

Zobecněníme-li předchozí křivku, dostaneme obecnou Béziorovu křivku n - tého stupně. Vznikne pomocí $n + 1$ řídicích bodů a je určena vztahem:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t); \quad t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (5)$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6)$$

$B_i^n(t)$ jsou Bernsteinovy polynomy. Bernsteinovy polynomy jsou nezáporné a jejich součet je roven jedné. Každý bod $Q(t)$ Béziorovy křivky je tak afinní kombinací řídicích bodů (dle konce kapitoly 1.2).



Obr.8: Obecná Béziorova křivka stupně $n = 5$

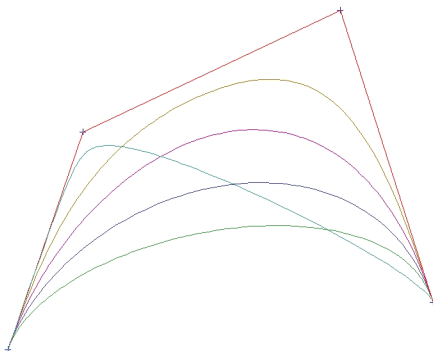
Při změně polohy řídicího bodu P_i dojde ke změně tvaru celé křivky. Proto se tyto křivky dělí na segmenty nižšího stupně, které se postupně navazují.

Pokud každému bodu P_i přiřadíme nezáporné reálné číslo m_i , dostaneme křivku jež je dána rovnicí:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i R_i^n(t); \quad t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (7)$$

$$R_i^n(t) = \frac{B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) m_j}. \quad (8)$$

Je to racionální Bézierova křivka a $R_i^n(t)$ jsou racionální Bernsteinovy polynomy. Ke změně tvaru křivky tedy již není vždy nutno měnit řídicí polygon, této změny lze docílit i změnou příslušných vah m_i . Na rozdíl od předchozích křivek však již tuto křivku nelze v \mathbf{E}_n vyjádřit jako lineární kombinaci polynomů, k jejímu zápisu v \mathbf{E}_n je nutná racionální funkce. Tato křivka je speciálním případem NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) křivky.

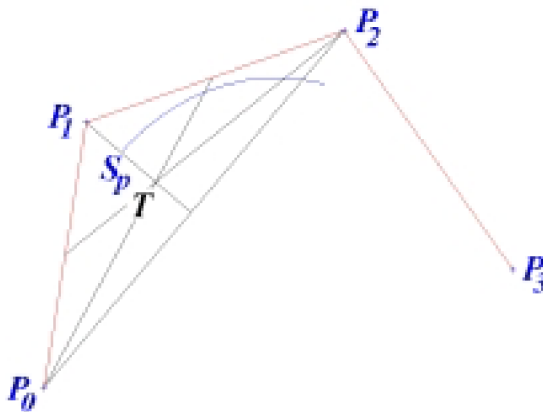


Obr.9: Racionální Bézierova křivka s různým zakřivením

2.2.3 Coonsova křivka

Coonsova křivka je podobná Fergusonově křivce a zaujímá vedle Bézierových křivek významné postavení v historii parametrických křivek a ploch. Je běžně používána při tvorbě po částech skládaných polynomiálních křivek. Úvahy o uniformní a neuniformní parametrizaci výrazně přispěly k zobecněnému pohledu na vlastnosti a tvorbu polynomiálních bází a v neposlední řadě se stala základem obecného aparátu NURBS.

Základní oblouk je opět určen čtyřmi body P_0, P_1, P_2, P_3 . Tentokrát však křivka nezačíná ani nekončí v žádném z těchto bodů. Počáteční a koncový bod leží v antitěžištích trojúhelníků $P_0P_1P_2$ a $P_1P_2P_3$ (na stejné úsečce jako těžiště, ale ve vzdálenosti $1/3$ délky od bodu P_1 , resp. P_2).



Obr.10: Coonsova křivka

Parametrizace Coonsovy křivky je:

$$Q(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i(t); \quad t \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (9)$$

$$C_0(t) = (1 - t)^3, C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4, C_2(t) = 3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, C_3(t) = t^3. \quad (10)$$

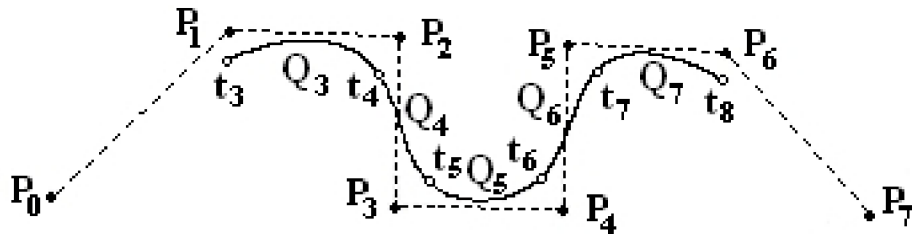
Souřadnice antitežišť jsou:

$$Q(0) = \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2), \quad Q(1) = \frac{1}{6}(P_1 + 4P_2 + P_3). \quad (11)$$

2.3 B-splajn křivka

Pokud skládáme Coonsovy křivky, pak dvě po sobě jdoucí křivky mají vždy stejné tři ze čtyř řídicích bodů. Křivku složenou z Coonsových křivek nazýváme B-splajn (uniformní, neracionální; nebo také Coonsův kubický B-splajn). Ta je ve všech vnitřních bodech spojitá i se svou první a druhou derivací. Je to tedy křivka třídy C^2 .

Při změně jednoho řídicího bodu dochází pouze k lokální změně křivky, tj. pouze čtyř oblouků, jejichž konstrukce se daný bod účastní. U B-splajnu můžeme zařídit, aby křivka začínala a končila v krajních bodech. A to tak že tři řídicí body prvního a posledního oblouku splynou. Na křivce lze vytvořit hrot, a to tak, že tři body řídicího polygonu splynou. Křivka je v tomto případě třídy pouze C^0 , neboť v tomto bodě neexistuje derivace.



Obr.11: B-splajn křivka

B-splajn generovaný $m + 1$ body řídicího polygonu P_0, P_1, \dots, P_m je složen z $m - 2$ segmentů Q_3, \dots, Q_m . Parametr t probíhá interval $\langle t_3, t_m + 1 \rangle$ a hodnoty parametru t v uzlech označené t_i definují uzlový vektor. Tyto hodnoty mají konstantní vzdálenost $t_{i+1} - t_i = k$, uzlový vektor je tedy uniformní. Je tvořen neklesající posloupností nezáporných reálných čísel.

Obecný B-splajn má uzlový vektor $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{m+n+1})$, kde $m + 1$ je počet řídicích bodů a n je stupeň křivky. Tato křivka je definována vztahem:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^m P_i N_i^n(t), \quad (12)$$

kde N_i^n jsou báze B-splajn funkce definované v následující kapitole.

Pokud je v uzlovém vektoru prvních a posledních $n + 1$ čísel shodných, pak křivka prochází prvním a posledním řídicím bodem a jedná se o "sevřenou" křivku - spojnice prvních a posledních dvou řídicích bodů jsou tečnami v krajních bodech křivky.

B-splajn křivka leží celá ve své konvexní obálce a její segmenty leží v konvexních obálcích svých řídicích polygonů. Je invariantní vůči otáčení, posunutí a změně měřítka.

Speciálním případem B-splajnu je Bézierova křivka a to B-splajn stupně počet bodů mínus jedna pro uzlový vektor délky $2(n + 1)$ a tvaru $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n+1}) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$.

2.3.1 B-splajn funkce

Jako bázové funkce se pro B-splajn křivky a plochy a pro NURBS křivky a plochy používají B-splajn funkce. B-splajn funkce s uzlovým vektorem $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ je definována následovně:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \quad (13)$$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t), \quad (14)$$

kde k značí stupeň funkce a pro $0 \leq i \leq n - k - 1$, $1 \leq k \leq n - 1$, $\frac{0}{0} = 0$. $n + 1$ je počet uzlů t_i .

Součet B-splajn funkcí stupně k na intervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ je jedna. V uzlu násobnosti s má bázová funkce N_i^k spojitost C^{k-s}

2.3.2 Příklady výpočtu B-splajn funkcí

Příklad 1: Spočítejme B-splajn funkce stupně 1 pro uzlový vektor $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_7) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

Dle vzorečku (14) spočteme B-splajn funkce $N_i^k(t)$ pro $k = 1$ a $i = 0, 1, \dots, n - k - 1$, $n - k - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$, tj. $i = 0, 1, \dots, 5$:

$$N_0^1(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} N_0^0(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} N_1^0(t) = \frac{t - 0}{1 - 0} N_0^0(t) + \frac{2 - t}{2 - 1} N_1^0(t) = t N_0^0(t) + (2 - t) N_1^0(t).$$

Funkce $N_i^0(t)$, $i = 0, 1$ určíme ze vztahu (13). Rovnou si vypíšeme všechny funkce $N_i^0(t)$, které budeme potřebovat, tj pro $i = 0, \dots, 6$:

$$N_0^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_0, t_1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_1^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_1, t_2 \rangle = \langle 1, 2 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_2^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_2, t_3 \rangle = \langle 2, 3 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_3^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_3, t_4 \rangle = \langle 3, 4 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_4^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_4, t_5 \rangle = \langle 4, 5 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_5^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_5, t_6 \rangle = \langle 5, 6 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_6^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_6, t_7 \rangle = \langle 6, 7 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Protože počítáme vždy přes hodnoty t_i, t_{i+1}, t_{i+2} , výsledek se nám rozloží na intervaly $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$, $\langle t_{i+1}, t_{i+2} \rangle$ a *jinde*. Po dosazení dostáváme:

$$N_0^1(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2-t & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Stejně tak získáme i ostatní B-splajn funkce:

$$N_1^1(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}N_1^0(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2}N_2^0(t) = \frac{t-1}{2-1}N_1^0(t) + \frac{3-t}{3-2}N_2^0(t) =$$

$$= (t-1)N_1^0(t) + (3-t)N_2^0(t) = \begin{cases} t-1 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 3-t & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_2^1(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2}N_2^0(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_3}N_3^0(t) = \frac{t-2}{3-2}N_2^0(t) + \frac{4-t}{4-3}N_3^0(t) =$$

$$= (t-2)N_2^0(t) + (4-t)N_3^0(t) = \begin{cases} t-2 & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle, \\ 4-t & \text{pro } t \in \langle 3, 4 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_3^1(t) = \frac{t-t_3}{t_4-t_3}N_3^0(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_4}N_4^0(t) = \frac{t-3}{4-3}N_3^0(t) + \frac{5-t}{5-4}N_4^0(t) =$$

$$= (t-3)N_3^0(t) + (5-t)N_4^0(t) = \begin{cases} t-3 & \text{pro } t \in \langle 3, 4 \rangle, \\ 5-t & \text{pro } t \in \langle 4, 5 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

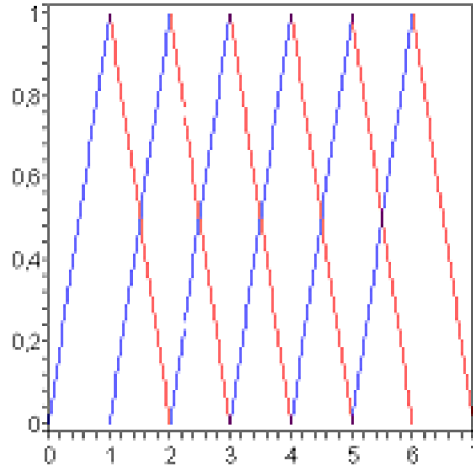
$$N_4^1(t) = \frac{t-t_4}{t_5-t_4}N_4^0(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_5}N_5^0(t) = \frac{t-4}{5-4}N_4^0(t) + \frac{6-t}{6-5}N_5^0(t) =$$

$$= (t-4)N_4^0(t) + (6-t)N_5^0(t) = \begin{cases} t-4 & \text{pro } t \in \langle 4, 5 \rangle, \\ 6-t & \text{pro } t \in \langle 5, 6 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_5^1(t) = \frac{t-t_5}{t_6-t_5}N_5^0(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_6}N_6^0(t) = \frac{t-5}{6-5}N_5^0(t) + \frac{7-t}{7-6}N_6^0(t) =$$

$$= (t-5)N_5^0(t) + (7-t)N_6^0(t) = \begin{cases} t-5 & \text{pro } t \in \langle 5, 6 \rangle, \\ 7-t & \text{pro } t \in \langle 6, 7 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Funkce $N_i^1(t)$, $i = 0, \dots, 5$, jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Obr.12: B-splajn funkce stupně 1 pro uzlový vektor $\mathbf{t} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Příklad 2: Pro uzlový vektor $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_7) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ spočítáme B-splajn funkce stupně 2.

Ze vzorečku (14) spočítáme B-splajn funkce pro $k = 2$ a $i = 0, \dots, n - k - 1, n - k - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$, tj. $i = 0, \dots, 4$. Protože máme uzlový vektor stejný jako v minulém příkladě, můžeme z něj použít již vypočítané funkce stupně 1 a 0. Počítáme přes hodnoty t_i, \dots, t_{i+3} . Výsledek se nám tak rozloží na intervaly $\langle t_i, t_{i+1} \rangle, \langle t_{i+1}, t_{i+2} \rangle, \langle t_{i+2}, t_{i+3} \rangle$ a *jinde*.

$$\begin{aligned} N_0^2(t) &= \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} N_0^1(t) + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_1} N_1^1(t) = \frac{t - 0}{2 - 0} N_0^1(t) + \frac{3 - t}{3 - 1} N_1^1(t) = \\ &= \frac{t}{2} N_0^1(t) + \frac{3 - t}{2} N_1^1(t) = \begin{cases} t^2/2 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ (-2t^2 + 6t - 3)/2 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ (3 - t)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \end{aligned}$$

(Pro $\langle 1, 2 \rangle$ máme $t(2 - t)/2 + (3 - t)(t - 1)/2 = (-2t^2 + 6t - 3)/2$.)

$$\begin{aligned} N_1^2(t) &= \frac{t - t_1}{t_3 - t_1} N_1^1(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_2} N_2^1(t) = \frac{t - 1}{3 - 1} N_1^1(t) + \frac{4 - t}{4 - 2} N_2^1(t) = \\ &= \frac{t - 1}{2} N_1^1(t) + \frac{4 - t}{2} N_2^1(t) = \begin{cases} (t - 1)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ (-2t^2 + 10t - 11)/2 & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle, \\ (4 - t)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 3, 4 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \end{aligned}$$

(Pro $\langle 2, 3 \rangle$ máme $(t - 1)(3 - t)/2 + (4 - t)(t - 2)/2 = (-2t^2 + 10t - 11)/2$.)

$$\begin{aligned} N_2^2(t) &= \frac{t - t_2}{t_4 - t_2} N_2^1(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_3} N_3^1(t) = \frac{t - 2}{4 - 2} N_2^1(t) + \frac{5 - t}{5 - 3} N_3^1(t) = \\ &= \frac{t - 2}{2} N_2^1(t) + \frac{5 - t}{2} N_3^1(t) = \begin{cases} (t - 2)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle, \\ (-2t^2 + 14t - 23)/2 & \text{pro } t \in \langle 3, 4 \rangle, \\ (5 - t)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 4, 5 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \end{aligned}$$

(Pro $\langle 3, 4 \rangle$ máme $(t-2)(4-t)/2 + (5-t)(t-3)/2 = (-2t^2 + 14t - 23)/2$.)

$$N_3^2(t) = \frac{t-t_3}{t_5-t_3}N_3^1(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4}N_4^1(t) = \frac{t-3}{5-3}N_3^1(t) + \frac{6-t}{6-4}N_4^1(t) =$$

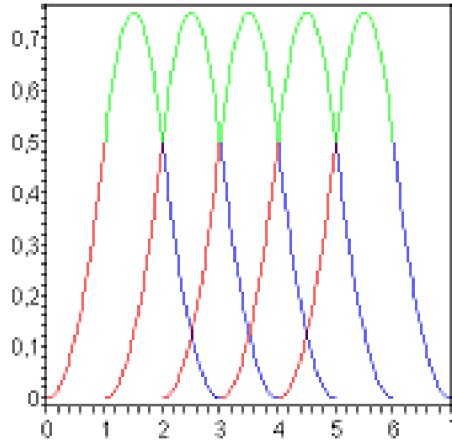
$$= \frac{t-3}{2}N_3^1(t) + \frac{6-t}{2}N_4^1(t) = \begin{cases} (t-3)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 3, 4 \rangle, \\ (-2t^2 + 18t - 39)/2 & \text{pro } t \in \langle 4, 5 \rangle, \\ (6-t)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 5, 6 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

(Pro $\langle 4, 5 \rangle$ máme $(t-3)(5-t)/2 + (6-t)(t-4)/2 = (-2t^2 + 18t - 39)/2$.)

$$N_4^2(t) = \frac{t-t_4}{t_6-t_4}N_4^1(t) + \frac{t_7-t}{t_7-t_5}N_5^1(t) = \frac{t-4}{6-4}N_4^1(t) + \frac{7-t}{7-5}N_5^1(t) =$$

$$= \frac{t-4}{2}N_4^1(t) + \frac{7-t}{2}N_5^1(t) = \begin{cases} (t-4)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 4, 5 \rangle, \\ (-2t^2 + 22t - 59)/2 & \text{pro } t \in \langle 5, 6 \rangle, \\ (7-t)^2/2 & \text{pro } t \in \langle 6, 7 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

(Pro $\langle 5, 6 \rangle$ máme $(t-4)(6-t)/2 + (7-t)(t-5)/2 = (-2t^2 + 22t - 59)/2$.)



Obr.13: B-splajn funkce stupně 2 pro uzlový vektor $\mathbf{t} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

3 Plochy

Snaha oprostít uživatele grafických systémů od matematiky a úsilí o maximální geometrickou názornost vedly k rozvoji technických ploch. Uživatel modeluje tyto plochy tak, že zadá např. řídicí body, okrajové křivky nebo tečné vektory. Mezi technické plochy patří např. Fergusonovy, Bézierovy a Coonsovy plochy. Tyto plochy vznikají zobecněním příslušných křivek.

3.1 Definice plochy

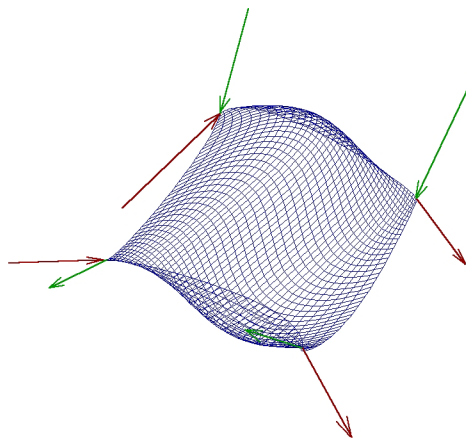
Množinu $\mathcal{S} \subset \mathbf{E}_3$ nazýváme *jednoduchá plocha* třídy C^r , jestliže existuje otevřená množina $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$ a injektivní zobrazení $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}_3$ třídy C^r takové, že $\mathcal{S} = f(\mathbf{D})$ a vektory f'_u, f'_v jsou lineárně nezávislé v každém bodě z \mathbf{D} . Množinu \mathbf{D} nazýváme *oblast parametrů* a zobrazení f je *parametrizace* \mathcal{S} .

Říkáme, že množina $\mathcal{S} \subset \mathbf{E}_3$ je *plocha* třídy C^r , jestliže pro všechna $X \in \mathcal{S}$ existuje takové jeho okolí U_x , že $U_x \cap \mathcal{S}$ je jednoduchá plocha třídy C^r . Parametrizace těchto průniků nazýváme *lokálními parametrizacemi* plochy \mathcal{S} . Plocha je *souvislá*, jestliže každé dva body na \mathcal{S} můžeme spojit jednoduchou křivkou, která celá leží na \mathcal{S} .

Souřadnicovými křivkami na ploše \mathcal{S} rozumíme křivky zadané v oblasti parametrů \mathbf{D} rovnicemi $u = konst$, resp. $v = konst$. Množinu všech souřadnicových křivek na ploše \mathcal{S} nazýváme *souřadnicová síť*.

3.2 Fergusonova plocha

Fergusonovy plochy vznikly v roce 1964 a jsou dvojrozměrným zobecněním Fergusonových křivek.



Obr. 14: Fergusonova plocha

Parametrizace této plochy je tvaru:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} F_i(r) F_j(s); \quad r, s \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (15)$$

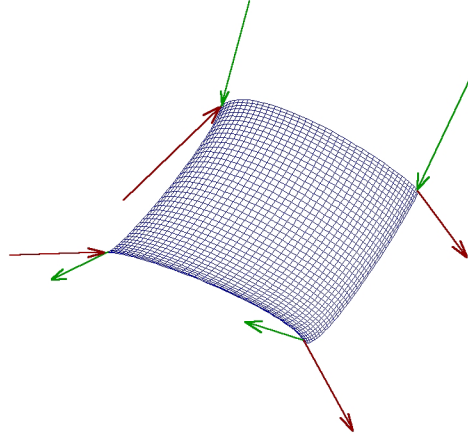
$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, F_1(t) = t^3 - 2t^2 + t, F_2(t) = -2t^3 + 3t^2, F_3(t) = t^3 - t^2. \quad (16)$$

Pokud danou rovnici rozepíšeme maticově, bude mít tvar:

$$Q(r, s) = \begin{pmatrix} F_0(r) & F_1(r) & F_2(r) & F_3(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(s) \\ F_1(s) \\ F_2(s) \\ F_3(s) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

kde $P_{00}, P_{03}, P_{30}, P_{33}$ jsou třísložkové zkruty v rozích. $P_{01}, P_{02}, P_{10}, P_{13}, P_{20}, P_{23}, P_{13}$ a P_{23} jsou tečné vektory v rozích. $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ jsou body určující rohy plochy.

Jsou-li zkruty $P_{00}, P_{03}, P_{30}, P_{33}$ nulové vektory, pak jde o plochu dvanáctivektorovou. V opačném případě jde o plochu šestnáctivektorovou.



Obr.15: Fergusonova plocha dvanáctivektorová

Zkruty řídí vyklenutí plochy v jejím rohu. V případě dvanáctivektorových ploch je toto vyklenutí realizováno změnou dvou tečných vektorů v okolí příslušného vrcholu.

Hladké a spojitě navazování Fergusonových ploch zajistíme stejnými hodnotami ve dvou sloupcích nebo řádcích matic daných ploch.

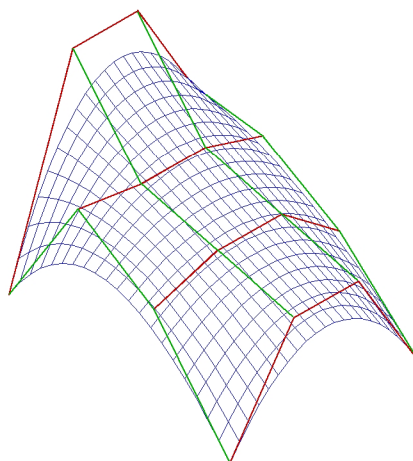
3.3 Bézierova plocha

Bézierovy plochy jsou snadno diferencovatelné, jednoduše a intuitivně se modelují a relativně snadno se vypočítává průsečík s paprskem. Jsou speciálním případem NURBS ploch.

Bézierova bikubická plocha je dvojrozměrným zobecněním Bézierovy kubiky. Její parametrizace je:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i(r) B_j(s); \quad r, s \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (18)$$

$$B_0(t) = (1-t)^3, \quad B_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3(t) = t^3. \quad (19)$$



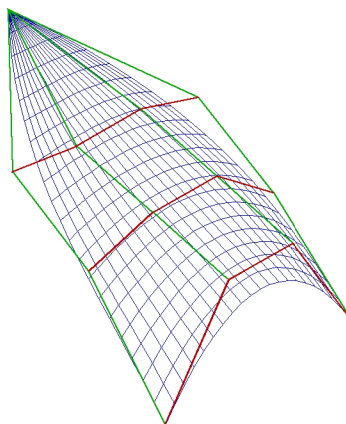
Obr.16: Bézierova bikubická plocha

Vyjádříme-li rovnici (15) maticově, dostaneme tvar:

$$Q(r, s) = \begin{pmatrix} B_0(r) & B_1(r) & B_2(r) & B_3(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \\ B_3(s) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

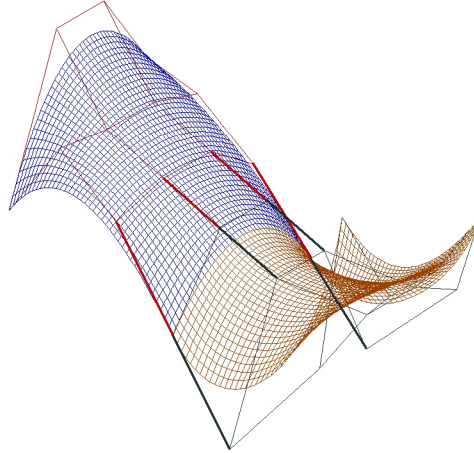
Polynomy $B_i(t)$ jsou stejné jak u Bézierovy kubiky. Body P_{ij} jsou řídicí body plochy a tvoří tzv. řídicí polygon, pomocí něhož plochu tvarujeme.

Hrany řídicího polygonu vycházející z bodů P_{00} , P_{03} , P_{30} , P_{33} jsou tečny plochy ve směru souřadných os a okraje plochy jsou tvořeny Bézierovými kubikami. Pokud polygon zadáme tak, že ztotožníme body na některém jeho okraji, přejde tento okraj v bod a dostáváme plochu "trojúhelníkovou".



Obr.17: Bézierova bikubická plocha "trojúhelníková"

Jednou z výhod těchto technických ploch je jednoduchost sestavování velkých ploch z jednotlivých menších ploch. U Bézierových ploch velmi jednoduše splníme podmínku v technické praxi vyžadovanou - hladkost a spojitost i se svými minimálně prvními parciálními derivacemi. Zařídíme to společným okrajem řídicího polygonu. Příčné hrany sousedních polygonů musí ležet na téže přímce. Okrajové hrany tak musí tvořit společnou tečnu obou ploch. Tuto podmínku splníme nejjednodušeji tak, že krajní body druhé plochy zadáme středově souměrné s krajními body první plochy podle bodů společného okraje.



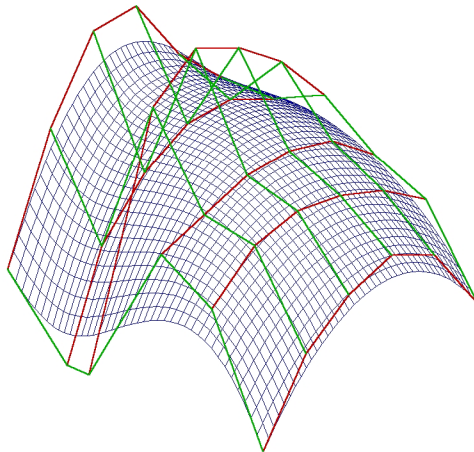
Obr.18: Spojení dvou Béziových bikubických ploch

Obecná Béziova plocha vznikne zobecněním Béziovky bikubické plochy. Její rovnici obdržíme rozšířením matice řídicích bodů z 4×4 na $m \times n$; $m, n \geq 4$ a kubické bernsteinovy polynomy nahradíme polynomy obecnými:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(r) B_j^m(s); \quad r, s \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (21)$$

$$B_i^k(t) = \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i}, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (22)$$

Každý bod $Q(r, s)$ Béziovky plochy je podobně jako u Béziových křivek afinní kombinací řídicích bodů (dle konce kap. 1.2). Béziova plocha leží celá v konvexní obálce svých řídicích bodů. Změnou polohy jediného řídicího bodu změním celý tvar Béziovky plochy.



Obr.19: Obecná Béziova plocha

Racionální Béziova plocha je trojrozměrným zobecněním racionální Béziovky křivky. Plocha je určena parametrizací:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} R_{ij}^{(mn)}(r, s); \quad r, s \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (23)$$

$$R_{ij}^{(mn)}(r, s) = \frac{w_{ij} B_i^{(m)}(r) B_j^{(n)}(s)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^{(m)}(r) B_j^{(n)}(s) w_{ij}}, \quad (24)$$

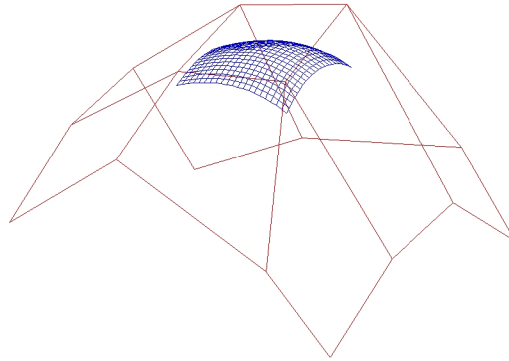
kde w_{ij} jsou váhy přiřazené jednotlivým řídicím bodům. Váhy mají stejný význam jako u racionálních Béziových křivek. Jejich velikost určuje vzdálenost plochy od příslušných řídicích bodů. Jsou-li všechny váhy rovny jedné, dostáváme obecnou Béziovu plochu.

3.4 Coonsova plocha

Coonsova plocha řízená polygonem je zobecněním Coonsovy kubiky. Parametrizace plochy má tvar:

$$Q(r, s) = \frac{1}{36} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} C_i(r) C_j(s); \quad r, s \in \langle 0; 1 \rangle, \quad (25)$$

$$C_0(t) = (1-t)^3, C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4, C_2(t) = 3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, C_3(t) = t^3. \quad (26)$$

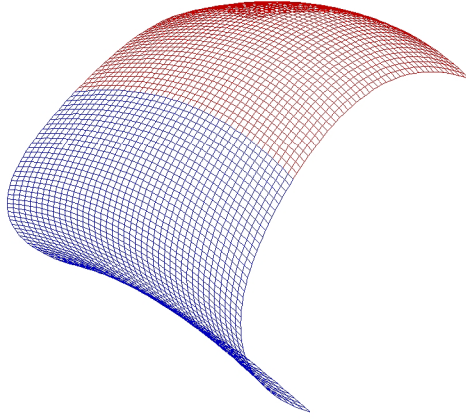


Obr.20: Coonsova plocha řízená polygonem

Pokud rovnici (22) napíšeme maticově, dostaneme tvar:

$$Q(r, s) = \begin{pmatrix} C_0(r) & C_1(r) & C_2(r) & C_3(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0(s) \\ C_1(s) \\ C_2(s) \\ C_3(s) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

Řídicí polygon již není tak názorný jako u plochy Béziové. Coonsovy plochy však patří v technické praxi k nejpoužívanějším. Jejich hlavní výhoda je v jejich napojování. Vhodnou volbou řídicích polygonů jednotlivých ploch můžeme docílit hladkosti druhého stupně u výsledné plochy. Je tedy hladší než plocha složená z Béziových ploch. Dané hladkosti u Coonsových ploch dosáhneme tím, že poslední tři řady prvního řídicího polygonu jsou shodné s prvními třemi řadami druhého řídicího polygonu. Oba polygony se tak navzájem liší jen v jedné řadě.



Obr.21: Spojení dvou Coonsových ploch

Coonsova plocha definovaná okrajem je jednoznačně určena čtyřmi křivkami, které musí tvořit její uzavřenou hranici. Pomocí parametrů r , s určíme libovolný bod plochy $P(r, s)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r, s \in \langle 0; 1 \rangle$, neboť každou plochu či křivku lze parametrizovat tak, aby tato podmínka byla splněna. Je-li tedy plocha dána předpisem $P(r, s)$; $r, s \in \langle 0; 1 \rangle$, pak pro jednotlivé okrajové křivky jsou splněny podmínky:

- první křivka: $s = 0 \wedge r \in \langle 0; 1 \rangle$,
- druhá křivka: $r = 1 \wedge s \in \langle 0; 1 \rangle$,
- třetí křivka: $s = 1 \wedge r \in \langle 0; 1 \rangle$,
- čtvrtá křivka: $r = 0 \wedge s \in \langle 0; 1 \rangle$.

Označme tedy předpisy pro známe hraniční křivky symbolicky P_{r0} , P_{1s} , P_{r1} , P_{0s} . Neznámý předpis pro plochu je $P(r, s)$, rohy plochy tvoří body P_{00} , P_{10} , P_{11} , P_{01} . Tato plocha má rovnici:

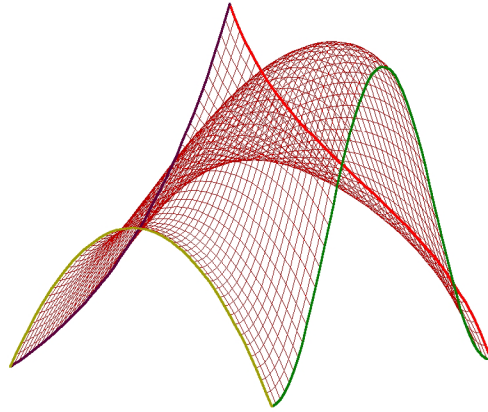
$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} & P_{0s} & P_{01} \\ P_{r0} & P_{rs} & P_{r1} \\ P_{10} & P_{1s} & P_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-s \\ -1 \\ s \end{pmatrix} = 0.$$

Pokud z dané rovnice vyjádříme $P(r, s)$, dostaneme:

$$\begin{aligned} P_{rs} = & -P_{00}(1-r)(1-s) + P_{r0}(1-s) - P_{10}r(1-s) + P_{0s}(1-r) + P_{1s}r - \\ & -P_{01}(1-r)s + P_{r1}s - P_{11}rs. \end{aligned} \quad (28)$$

Dostáváme tak explicitní parametrické vyjádření plochy, které je třeba již jen třikrát rozepsat do jednotlivých souřadnic.

Okraje plochy jsou rovinné křivky, které musí být navrženy tak, aby na sebe v prostoru navazovaly. jejich prostorové rozmístění nad stranami čtverce bude dáno tím, že budou "přičítány správným směrem" k rohům plochy.



Obr.22: Coonsova plocha definovaná okrajem

Jestliže dvě protilehlé okrajové křivky budou přímky, dostáváme speciální případ plochy určenou okrajem - plochu přímkovou. Obecně nemusí mít bilineární plochy čtvercový půdorys. Hraniční křivky dokonce nemusí být ani rovinné. Konstrukce těchto ploch je však poněkud obtížnější.

3.5 B-splajn plocha

B-splajn plochy jsou zobecněním B-splajn křivek. Velice snadno se navazují a jsou proto pro modelování daleko výhodnější než Fergusonovy a Bézierovy plochy. B-splajn plochy n -tého stupně zaručují C^{m-1} spojitost ve všech svých bodech a není nutné omezovat některé jejich řídicí body vnějšími podmínkami jako v případě Bézierových ploch.

Při změně jediného řídicího bodu měníme tvar vždy jen části B-splajn plochy. Navazující B-splajn plochu definujeme $m \times (n - 1)$ body předchozí plochy a přidáme pouze m dalších bodů. Jednotlivé plochy se tak překrývají. Proto při změně jednoho bodu ovlivňujeme více ploch, kterým tento bod náleží. Počet ovlivněných ploch závisí na zvoleném stupni básových polynomů obdobně jako při modelování B-splajn křivek.

B-splajn plocha leží celá v konvexní obálce svých řídicích bodů. Plocha obecně neprochází krajními body řídicí sítě. Toho lze docílit násobností řídicích bodů a u neuniformních ploch násobností uzlů. B-splajn plochy jsou invariantní vůči otáčení, posunutí, změně měřítka a zkosení.

Nejjednodušší B-splajn plochou je bikubická B-splajn plocha - neracionální a neuniformní. Používá se ve složitějších modelovacích programech. Její jedinou výhodou oproti Bézierově ploše je spojitost C^2 bez nutnosti zadávat nějaké vnější omezující podmínky na polohu řídicích bodů.

4 NURBS křivky a plochy

NURBS - Non Uniform Rational B-Spline, je zobecněním B-splajnů. Co je uniformní B-splajn jsme si již říkali v kapitole 2.3. Neuniformní B-splajn je tedy B-splajn jehož uzlový vektor obsahuje aspoň jednu dvojici t_i, t_{i+1} , jejíž vzdálenost se liší od ostatních. Racionalita znamená, že ke každému bodu je přiřazena jeho váha. Ta určuje jakou silou bude bod působit na tvar křivky resp. plochy. Pokud mají všechny body váhu konstantní, pak se jedná o B-splajn křivku resp. plochu. Přidáním vah k bodům, které nejsou pro všechny body konstantní, se dostáváme do projektivního prostoru. Můžeme zde také přesně zadávat kuželosečkové oblouky narozdíl od jiných dosud známých křivek.

NURBS jsou speciální aproximační křivky a plochy, které jsou dány řídicími body a bázovými B-splajn funkcemi. Díky své konstrukci mohou být modifikovány do obecných tvarů.

4.1 NURBS křivka

Pokud máme $m+1$ řídicích bodů P_i a k nim $m+1$ kladných reálných čísel w_i - vah a uzlový vektor $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_{n+m+1})$, kde n je stupeň křivky, pak NURBS křivka je definována vztahem:

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i P_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^m w_i N_i^n(t)}, \quad (29)$$

kde $t \in \langle t_n, t_{m+1} \rangle$ a $N_i^n(t)$ jsou bázové B-splajn funkce.

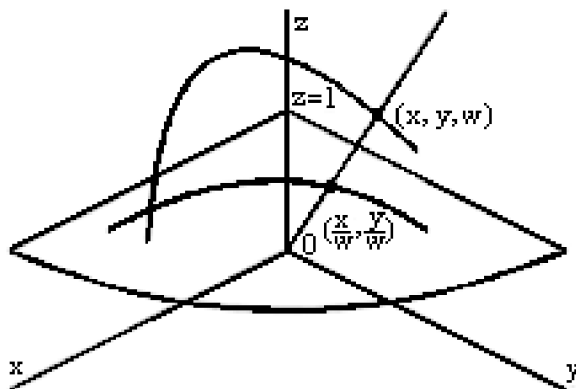
Jestliže označíme:

$$R_i^n(t) = \frac{w_i N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^m w_i N_i^n(t)}, \quad (30)$$

pak můžeme NURBS křivky zapisovat vztahem:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^m P_i R_i^n(t). \quad (31)$$

Jak jsme si již řekli, tak přidáním váhy různé od 1 k bodům se dostáváme do projektivního rozšířeného prostoru. Na následujícím obrázku je znázorněné projektivní rozšíření roviny do prostoru.

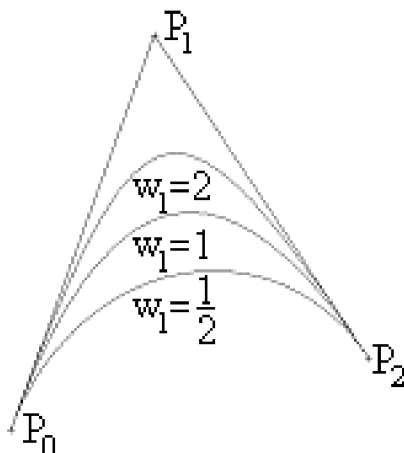


Obr.23: Projektivní rozšíření roviny

Vlastní body NURBS křivky v projektivní rovině jsou dány třemi souřadnicemi, které určují souřadnice bodů euklidovské roviny a váhu bodu. Například projektivní bod $(6, 3, 3)$ určuje euklidovský bod $(2, 1)$ s váhou 3.

Vlastní body prostorové křivky jsou reprezentovány čtyřmi homogenními souřadnicemi (x'_i, y'_i, z'_i, w_i) , které odpovídají euklidovským bodům $(x_i, y_i, z_i) = \left(\frac{x'_i}{w_i}, \frac{y'_i}{w_i}, \frac{z'_i}{w_i}\right)$, kde w_i značí váhu daného bodu.

Váhový vektor tvoří posloupnost kladných reálných čísel. Jeho délku udává počet řídicích bodů (každý bod má svou váhu). Pokud mají všechny body stejnou váhu, je váhový vektor posloupnost $(1, 1, \dots, 1)$. Jestliže váha bodu leží v intervalu $(0, 1)$, pak příslušný bod má menší vliv než bod s váhou 1. Pokud má daný bod váhu větší jak 1, zvyšuje se jeho vliv a výsledná křivka se k tomuto bodu více přibližuje.



Obr.24: Vliv váhy na tvar křivky

Kuželosečkové oblouky

V úvodu jsme zmínili, že u NURBS křivek můžeme přesně zadávat kuželosečkové oblouky. Ty získáme pokud dáme stupeň křivky roven dvěma (jde o kvadratické křivky), budeme mít tři řídicí body P_0, P_1, P_2 , jejich váhový vektor je tvaru $(1, w_1, 1)$ a uzlový vektor $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$.

Pro dosažení do vzorce (15) tedy máme $m = 2$ a $n = 2$. Z uzlového vektoru si spočteme všechny potřebné B-splajn funkce a to ze vzorců (13), (14). Ty nám vyjdou následovně:

$$N_0^0(t) = N_1^0(t) = N_3^0(t) = N_4^0(t) = 0,$$

$$N_2^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Z nich dostaneme:

$$N_0^1(t) = N_3^1(t) = 0,$$

$$N_1^1(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$N_2^1(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Pomocí nich už spočteme B-splajn funkce pro dosazení do vzorečku:

$$N_0^2(t) = \begin{cases} (1-t)^2 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

$$N_1^2(t) = \begin{cases} 2t(1-t) & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

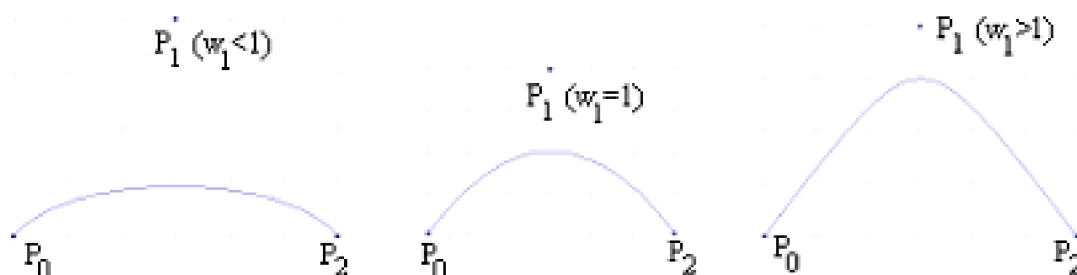
$$N_2^2(t) = \begin{cases} t^2 & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

A nyní již můžeme vše dosadit:

$$Q(t) = \frac{P_0(1-t)^2 + w_1 P_1 2t(1-t) + P_2 t^2}{(1-t)^2 + w_1 2t(1-t) + t^2}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (32)$$

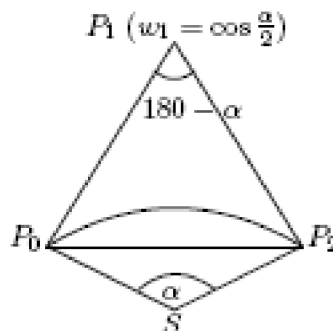
Tím jsme dostali rovnici kuželosečky zadanou jako NURBS křivku. Je-li $w_0 = w_2 = 1$, pak podle hodnoty váhy w_1 dostáváme jednotlivé typy kuželosečkových oblouků:

- $w_1 < 1$ eliptický oblouk,
- $w_1 = 1$ parabolický oblouk,
- $w_1 > 1$ hyperbolický oblouk.



Obr.25: Eliptický, parabolický a hyperbolický oblouk

Protože je kružnice zvláštním případem elipsy, vhodným určením váhy w_1 můžeme z eliptického oblouku získat kružnicový oblouk. Dá se odvodit, že $w_1 = \cos \frac{\alpha}{2}$, kde α je středový úhel kružnicového oblouku. Při zadávání kružnicového oblouku musí navíc řídicí body tvořit rovnoramenný trojúhelník $P_0 P_1 P_2$, kde $|P_0 P_1| = |P_1 P_2|$.

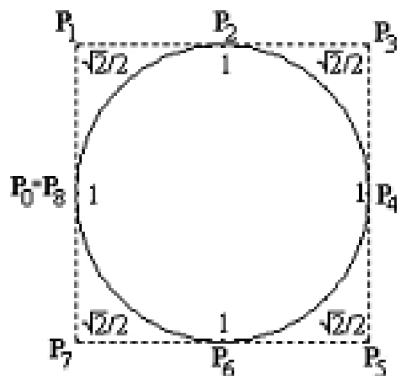


Obr.26: Kružnicový oblouk

Kružnici můžeme sestrojít jako čtyři kružnicové oblouky o středových úhlech $\alpha = 90^\circ$. Zadáváme tak devět řídicích bodů. Jestliže umístíme střed kružnice do bodu $[0, 0]$ a bude o poloměru $r = 1$, pak budeme mít následující řídicí body:

$$[-1, 0], [-1, 1], [0, 1], [1, 1], [1, 0], [1, -1], [0, -1], [-1, -1], [-1, 0].$$

Uzlový vektor bude mít tvar $\mathbf{t} = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$ a váhový vektor bude $\mathbf{w} = (1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.



Obr.27: Kružnice jako NURBS křivka

4.2 NURBS plocha

Neuniformní racionální B-splajn plochy jsou zobecněním B-splajn ploch a představují dnes průmyslový standard v geometrickém modelování. NURBS umožňují definovat širokou třídu ploch, mezi které patří jak volně tvarovatelné plochy na bázi racionálních polynomů, tak i plochy založené na přímkách, kuželosečkách apod.

NURBS plocha je dána sítí $(q+1)(r+1)$ kontrolních bodů P_{ij} , kde $0 \leq i \leq q$, $0 \leq j \leq r$. Dále máme $(q+1)(r+1)$ kladných reálných čísel w_{ij} , jež nazýváme váhy. Stupeň plochy pro řádky je m a pro sloupce n . Řádkový uzlový vektor je $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{m+q+1})$, sloupcový uzlový vektor je $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{n+r+1})$. NURBS plocha je pak určena rovnicí:

$$Q(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} P_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}, \quad (33)$$

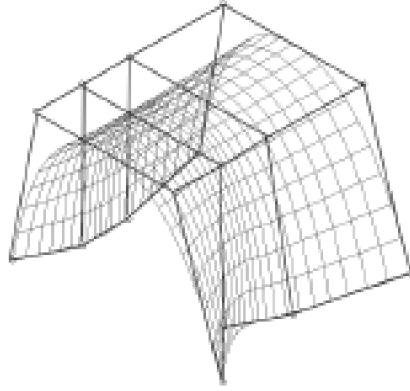
kde $(u, v) \in \langle u_0, u_{m+q+1} \rangle \times \langle v_0, v_{n+r+1} \rangle$, $N_i^m(u)$ a $N_j^n(v)$ jsou bázové B-splajn funkce určené vztahy (13), (14).

Můžeme zde využít zjednodušený zápis pomocí racionální B-splajn báze:

$$R_i^j(u, v) = \frac{w_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^r w_{kl} N_k^m(u) N_l^n(v)}. \quad (34)$$

Získáme tak zkrácený tvar:

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r P_{ij} R_i^j(u, v). \quad (35)$$



Obr.28: NURBS plocha

NURBS plochy mají vlastnosti přenesené z NURBS křivek rozšířené do prostoru. Patří sem:

- nezápornost B-splajn funkcí,
- $\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r N_i^m(u)N_j^n(v) = 1$ pro libovolné $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$,
- body NURBS plochy leží v konvexním obalu sítě řídicích bodů,
- změna polohy libovolného řídicího bodu nebo váhy změní tvar plochy pouze na příslušném intervalu $\langle u_i, u_{i+m+1} \rangle \times \langle v_j, v_{j+n+1} \rangle$,



Obr.29: Vliv váhy na tvar plochy

- křivka $S(u, v)$ má C^{m-k} , resp. C^{n-l} spojité parciální derivace v bodě odpovídajícímu parametru u , resp. v , je-li násobnost uzlu u , resp. v rovna k , resp. l ,
- NURBS plocha je invariantní vůči projektivním transformacím, což znamená, že není nutné zobrazovat všechny body plochy, ale při projektivních transformacích stačí zobrazit pouze řídicí body,
- Bézierova plocha je speciálním případem NURBS plochy v případě, že počet bodů v řádku je roven řádkovému stupni m , počet bodů ve sloupci je roven sloupcovému stupni n a uzlové vektory jsou tvaru $\mathbf{u} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, kde 0 i 1 jsou $m + 1$ krát, a $\mathbf{v} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, kde 0 i 1 jsou $n + 1$ krát.

4.3 NURBS plochy jako tenzorový součin

V současné literatuře zabývající se touto problematikou se často objevuje myšlenka sestavit NURBS plochy jako tenzorový součin NURBS křivek. Plocha je definována jako vyčíslitelná funkce dvou parametrů u a v popisující zobrazení rovinné oblasti do euklidovského trojrozměrného prostoru, které je formálně zapsáno jako

$$Q(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_i(u)g_j(v)a_{ij}, \quad (36)$$

kde

$$a_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}); \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

Funkce f_i , g_j jsou bázové funkce. Takto sestavená NURBS plocha bývá označována jako "tensor product surface", tj. "povrch vytvořený tenzorovým součinem".

Rovnice (36) definuje zobrazení do euklidovského prostoru. $Q(u, v)$ je bod tohoto prostoru, f_i , g_j jsou bázové funkce blíže nespecifikovaného funkcionálního prostoru a a_{ij} jsou řídicí body plochy, tj. prvky euklidovského prostoru, nebo jejich polohové vektory, tj. prvky zaměření euklidovského prostoru, do kterého se má tato funkce zobrazovat. Toto volné zacházení s matematickou symbolikou značně ztěžuje pochopení podobných textů a komplikuje výzkum v této oblasti.

NURBS křivka popsána rovnicí (29) nemůže vystupovat v tenzorovém součinu, neboť ji nelze zapsat jako lineární kombinaci bázových funkcí $N_i^n(t)$. Ve snaze tenzorový součin "zachránit" bývají tyto křivky často psány ve tvaru lineární kombinace (31). Což můžeme rozepsat do souřadnic:

$$q_k(t) = \sum_{i=0}^m p_{ik}R_i^n(t); \quad k = 1, 2, \dots, d. \quad (37)$$

Za bázové funkce jsou pak prohlašovány funkce $R_i^n(t)$ dané vztahem (30), čímž se však podstata věci dále zatemňuje.

Ukážeme, že NURBS křivky jsou tvořeny stejnými bázovými funkcemi jako B-splajn křivky:

Nechť $P_i = [p_{i1}; p_{i2}; \dots; p_{id}] \in \mathbf{E}_d$ je bod d -rozměrného euklidovského prostoru \mathbf{E}_d . Rovnici B-splajn křivky (12) pak můžeme rozepsat do d rovnic tvaru:

$$q_k(t) = \sum_{i=0}^m p_{ik}N_i^n(t); \quad k = 1, 2, \dots, d, \quad (38)$$

kde opět $Q = [q_1; q_2; \dots; q_d] \in \mathbf{E}_d$. V projektivním rozšíření $\overline{\mathbf{E}}_d$ prostoru \mathbf{E}_d odpovídají euklidovským bodům $Q, P_i \in \mathbf{E}_d$ vlastní body $\overline{Q}, \overline{P}_i \in \overline{\mathbf{E}}_d$, jejichž aritmetičtí zástupci jsou tvaru:

$$\overline{P}_i = (\overline{p}_{i1}; \overline{p}_{i2}; \dots; \overline{p}_{id}; \overline{p}_{d+1}) = w_i(p_{i1}; p_{i2}; \dots; p_{id}; 1) = (w_i p_{i1}; w_i p_{i2}; \dots; w_i p_{id}; w_i), \quad (39)$$

kde $w_i \in \mathbb{R}$.

$$\overline{Q} = (\overline{q}_1; \overline{q}_2; \dots; \overline{q}_d; \overline{q}_{d+1}) = w_{d+1}(q_1; q_2; \dots; q_d; 1) = (w_{d+1}q_1; w_{d+1}q_2; \dots; w_{d+1}q_d; w_{d+1}), \quad (40)$$

kde $w_{d+1} \in \mathbb{R}$. V projektivním rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_d$ má rovnice (38) stejný tvar, tj.

$$\bar{q}_k(t) = \sum_{i=0}^m \bar{p}_{ik} N_i^n(t) = \sum_{i=0}^m w_i p_{ik} N_i^n(t); \quad k = 1, 2, \dots, d. \quad (41)$$

Poslední homogenní souřadnici bodu křivky lze podle vztahu (41) psát ve tvaru lineární kombinace bázových funkcí $N_0^n, N_1^n, \dots, N_m^n$, kde w_0, w_1, \dots, w_m jsou koeficienty lineární kombinace:

$$\bar{q}_{d+1} = \sum_{i=0}^m w_i N_i^n. \quad (42)$$

NURBS křivka má tedy stejné bázové funkce jako B-splajn. Jediný rozdíl je v tom, že rovnice (38) popisuje vztah mezi souřadnicemi kartézskými, kdežto v (41) vystupují souřadnice homogenní.

Bod \bar{Q} křivky tak lze psát ve tvaru:

$$\bar{Q} = (\bar{q}_1; \bar{q}_2; \dots; \bar{q}_d; \bar{q}_{d+1}) = \left(\sum_{i=0}^m w_i p_{i1} N_i^n; \sum_{i=0}^m w_i p_{i2} N_i^n; \dots; \sum_{i=0}^m w_i p_{id} N_i^n; \sum_{i=0}^m w_i N_i^n \right). \quad (43)$$

Homogenní souřadnice vlastního bodu \bar{Q} můžeme psát ve tvaru:

$$\bar{Q} = \left(\frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_{d+1}}; \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_{d+1}}; \dots; \frac{\bar{q}_d}{\bar{q}_{d+1}}; 1 \right). \quad (44)$$

Dosadíme-li do vztahu (43) z rovnice (41), dostaneme pro jednotlivé souřadnice bodu \bar{Q} "racionální zápis":

$$q_k(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i p_{ik} N_i^n(t)}{\sum_{i=0}^m w_i N_i^n(t)}; \quad k = 1, 2, \dots, d, \quad (45)$$

což je rovnice (29) rozepsaná do souřadnic.

Otázkou zůstává, jak geometricky interpretovat koeficienty w_i . Počáteční motivací pro vznik NURBS křivek bylo "osvobození" uživatelů CAD systému od matematiky. Generuje-li například uživatel křivku pomocí bodů P_0, P_1, P_2 , kterým přiřadí váhy $w_0 = w_2 = 1$ a váhu prostředního bodu bude postupně zvyšovat, může říci pouze to, že je křivka k tomu bodu s narůstající vahou "více přitahována" tak, jak se i dočteme ve většině pramenů z vědy o počítačích. Matematik však může říci mnohem víc - je to křivka druhého stupně s uzlovým vektorem $\mathbf{t} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Jak jsme si již uváděli v podkapitole o kuželosečkách, tak také podle hodnoty váhy dokáže matematik určit, zda jde o oblouk elipsy, paraboly či hyperboly.

NURBS křivky jsou projektivně invariantní, což v tomto případě znamená, že změna polohy řídicích bodů nemění typ kuželosečky. Ten je ovlivněn jen vahami. Nejsou to tedy řídicí body, ale váhy, které rozhodují o geometrické povaze křivky. Vektor vah $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ můžeme tedy nazvat charakteristickým vektorem křivky.

Koeficienty w_0, w_1, \dots, w_m je tedy třeba chápat jako váhy bázových funkcí a ne jako váhy řídicích bodů. Každý vektor vah $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ tedy určuje množinu projektivně invariantních křivek, které se liší jen svými řídicími body. Tyto vektory vah můžeme

formálně sčítat a násobit skalárem tak, jako každé jiné uspořádané $m + 1$ -tice reálných čísel a všechny tyto vektory tvoří $m + 1$ rozměrný vektorový prostor.

Místo vektoru $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_m)$ uvažujeme vektor $k\mathbf{w} = (kw_0, kw_1, \dots, kw_m)$; $k \neq 0$. Dosadíme-li tento vektor do (39), (40), (41), (42), obdržíme pro kartézské souřadnice (43) vlastních bodů NURBS křivky tytéž hodnoty jako v případě vektoru \mathbf{w} . To znamená, že každé dvě křivky, jejichž charakteristický vektor je tvaru $k\mathbf{w} = (kw_0, kw_1, \dots, kw_m)$; $k \neq 0$, mají stejnou "geometrickou povahu" - jsou projektivně invariantní. Množina všech vektorů $k\mathbf{w}$ tvoří jednorozměrný podprostor prostoru V_{m+1} a množina všech těchto jednorozměrných podprostorů je tedy projektivním prostorem nad V_{m+1} (dle zavedení pojmu projektivní prostor v kap. 1.4).

Uvažujeme dva vektorové prostory U_{m+1} , V_{n+1} . Např. pro $m = 2$ a $n = 3$ je U_{m+1} vektorovým prostorem kuželosečkových oblouků a V_{n+1} prostorem Bézierových kubik. Se-strojíme-li tenzorový součin těchto prostorů (dle části Tenzory v kap. 1.1), dostaneme vektorový prostor bilineárních forem, z nichž každá určuje množinu projektivně invariantních ploch, jejichž u -křivky tvoří vždy kuželosečkový oblouk a v -křivky Bézierova kubika.

Parametrizaci (33) NURBS ploch můžeme podobně jako parametrizaci NURBS křivek rozepsat do souřadnic:

$$q_k(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} p_{ijk} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}; \quad k = 1, 2, \dots, d. \quad (46)$$

V projektivním rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_d$ prostoru \mathbf{E}_d má rovnice (46) tvar:

$$\bar{q}_k(u, v) = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} \bar{p}_{ijk} N_i^m(u) N_j^n(v); \quad k = 1, 2, \dots, d, \quad (47)$$

$$\bar{q}_{d+1}(u, v) = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r w_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v). \quad (48)$$

Tyto rovnice můžeme psát ve tvaru (pro stručnost vynecháváme parametru u, v):

$$\bar{q}_k = \begin{pmatrix} N_0^m & N_1^m & \dots & N_q^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{00} p_{00k} & w_{01} p_{01k} & \dots & w_{0r} p_{0rk} \\ w_{10} p_{10k} & w_{11} p_{11k} & \dots & w_{1r} p_{1rk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{q0} p_{q0k} & w_{q1} p_{q1k} & \dots & w_{qr} p_{qrk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0^n \\ N_1^n \\ \dots \\ N_r^n \end{pmatrix}, \quad (49)$$

kde $k = 1, 2, \dots, d$,

$$\bar{q}_{d+1} = \begin{pmatrix} N_0^m & N_1^m & \dots & N_q^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0r} \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{q0} & w_{q1} & \dots & w_{qr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0^n \\ N_1^n \\ \dots \\ N_r^n \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Položme

$$w_0 = \tilde{w}_0 = \sqrt{w_{00}}; \quad w_i = \frac{w_{i0}}{w_0}; \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad \tilde{w}_i = \frac{\tilde{w}_{0j}}{\tilde{w}_0}; \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Rovnice (49) resp. (50) pak můžeme psát ve tvaru:

$$\bar{q}_k = \begin{pmatrix} w_0 N_0^m & w_1 N_1^m & \dots & w_q N_q^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00k} & p_{01k} & \dots & p_{0rk} \\ p_{10k} & w_{11}^* p_{11k} & \dots & w_{1r}^* p_{1rk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{q0k} & w_{q1}^* p_{q1k} & \dots & w_{qr}^* p_{qrk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_0 N_0^n \\ \tilde{w}_1 N_1^n \\ \dots \\ \tilde{w}_r N_r^n \end{pmatrix}, \quad (51)$$

kde $k = 1, 2, \dots, d$, resp.

$$\bar{q}_{d+1} = \begin{pmatrix} w_0 N_0^m & w_1 N_1^m & \dots & w_q N_q^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_{11}^* & \dots & w_{1r}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_{q1}^* & \dots & w_{qr}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_0 N_0^n \\ \tilde{w}_1 N_1^n \\ \dots \\ \tilde{w}_r N_r^n \end{pmatrix}, \quad (52)$$

kde $w_{ij}^* = \frac{w_{ij}}{w_i \tilde{w}_j}$; $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Rovnici (52) můžeme nazvat charakteristickou rovnicí NURBS plochy, matici typu $(q+1)(r+1)$ v této rovnici pak váhovou maticí. Skalární součin řádkového resp. sloupcového vektoru ve vztahu (52) s prvním sloupcem resp. řádkem charakteristické matice udává charakteristickou rovnicí "tvořících" NURBS křivek (u - křivek resp. v - křivek) na NURBS ploše. Ostatní řádky resp. sloupce charakteristické matice spolu s příslušným charakteristickým vektorem určují další "vytváření" plochy - určují charakteristické rovnice dalších u - křivek resp. v - křivek.

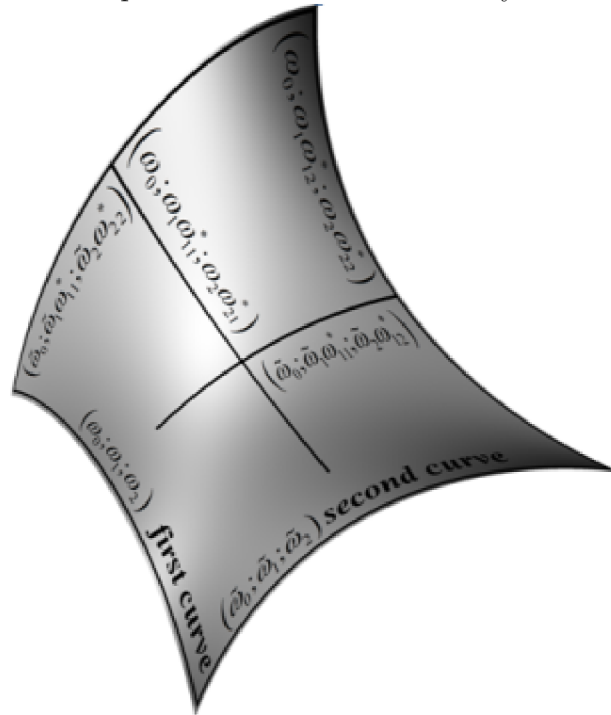
Pro každou uspořádanou dvojici $(u, v) \in \langle a, b \rangle \langle c, d \rangle$ a každé $k = 1, 2, \dots, d+1$ jsou rovnice (51) a (52) bilineární formou a množina všech těchto bilineárních forem je tenzorový součin vektorových prostorů \mathbb{R}^{m+1} , \mathbb{R}^{n+1} . Takto sestrojený tenzorový součin však nemá žádnou přímou souvislost s "tvořícími křivkami" a žádnou bilineární formu nelze označit za "tensor product surface".

Abychom plochu skutečně "vytvořili tenzorovým součinem", je třeba pracovat s vektorovými prostory $N_u^m = \langle N_0^m; N_1^m; \dots; N_q^m \rangle$ a $N_v^n = \langle N_0^n; N_1^n; \dots; N_r^n \rangle$, které jsou generovány B-splajn funkcemi $[N_0^m; N_1^m; \dots; N_q^m]$ a $[N_0^n; N_1^n; \dots; N_r^n]$ nad uzlovými vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} . Prvky těchto prostorů jsou lineární kombinace bázevých funkcí tvaru (43) - tedy množiny vzájemně projektivně invariantních křivek ("abstraktní křivky"). Souřadnice abstraktní NURBS křivky \mathbf{N}_u^m jako vektoru prostoru N_u^m v bázi $[N_0^m; N_1^m; \dots; N_q^m]$ jsou váhy w_i ; $i = 0, 1, \dots, q$ jednotlivých bázevých funkcí. Zápísem křivky \mathbf{N}_u^m jako vektoru v těchto souřadnicích je tedy její váhový vektor $(w_0; w_1; \dots; w_q)$. Tenzorovým součinem $N_u^m \otimes N_v^n$ vektorových prostorů N_u^m a N_v^n všech množin \mathbf{N}_u^m a \mathbf{N}_v^n projektivně invariantních NURBS křivek stupně m resp. n nad uzlovým vektorem \mathbf{u} a \mathbf{v} je tedy podle vztahu (50) množina všech bilineárních forem tvaru:

$$g(\mathbf{N}_u^m, \mathbf{N}_v^n) = \bar{q}_{d+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 & w_1 & \dots & w_q \end{pmatrix}}_{\text{first curve}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_{11}^* & \dots & w_{1r}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w_{q1}^* & \dots & w_{qr}^* \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_1 \\ \dots \\ \tilde{w}_r \end{pmatrix}}_{\text{second curve}}. \quad (53)$$

Plocha je tedy vytvořena bilineární formou váhových vektorů dvou křivek a váhovou maticí plochy. Tuto bilineární formu můžeme nazvat váhovou formou NURBS plochy. Plochu vytvořenou podle rovnice (53) můžeme prohlásit za "tensor product surface". Každé dvě plochy, jejichž charakteristická rovnice resp. váhová forma je stejná (nevadí

ani nenulový násobek), mají opět stejnou "geometrickou povahu" a můžeme ji považovat za rovnici "abstraktní" plochy. Je to množina všech ploch, které lze jednu v druhou převést pomocí projektivní transformace. Rovnice (53) sama o sobě není rovnicí žádné "konkrétní" plochy. K výběru konkrétních reprezentantů slouží řídicí body těchto "abstraktních" ploch.



Obr.30: Tensor product surface

Budeme-li mít váhovou formu např.:

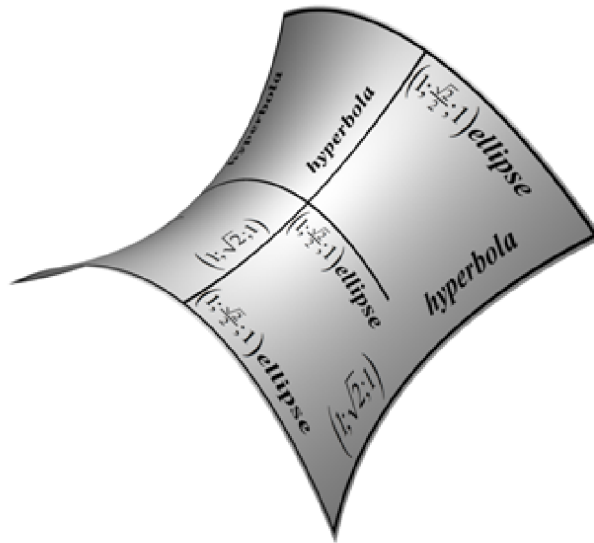
$$g(\mathbf{N}^2, \mathbf{N}^2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_{11}^* & w_{12}^* \\ 1 & w_{21}^* & w_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

dostaneme plochu vzniklou jako součin eliptického oblouku $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ a hyperbolického oblouku $(1, \sqrt{2}, 1)$. Tyto dvě křivky popisují sousední okraje plochy. Zbylé dva okraje jsou křivky s váhovými vektory $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}w_{12}^*, w_{22}^*)$ a $(1, \sqrt{2}w_{21}^*, w_{22}^*)$. Dalšími křivkami na ploše jsou křivky určené charakteristickými vektory $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}w_{11}^*, w_{21}^*)$ a $(1, \sqrt{2}w_{11}^*, w_{12}^*)$. Hladkým napojením čtyř oblouků $(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ (podle závěru kap. 4.1) vznikne elipsa, hladkým napojením čtyř ploch (54) vznikne jednodílný eliptický hyperboloid. Na obr. 31 je sestrojen reprezentant formy (54) pro $w_{11}^* = 1,3$, $w_{12}^* = 0,5$, $w_{21}^* = 0,7$, $w_{22}^* = 1,25$ určený řídicími body $P_{00} = [1; -1; 1]$, $P_{01} = [0; -0,3; -1]$, $P_{02} = [-1; -1; -1]$, $P_{10} = [1; 0; 1]$, $P_{11} = [0; 0; 0]$, $P_{12} = [-1; 0; 1]$, $P_{20} = [1; 1; -1]$, $P_{21} = [0; 0,3; -1]$, $P_{22} = [-1; 1; -1]$.

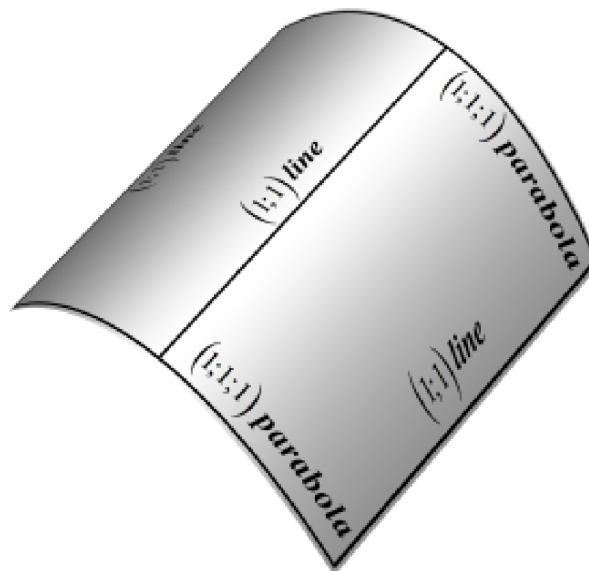
Součinem paraboly a úsečky dostaneme váhovou formu:

$$g(\mathbf{N}^2, \mathbf{N}^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Jsou-li řídicí body P_{ij} ; $i = 0, 1$; $j = 0, 1, 2$ voleny tak, že vektory $P_{1j} - P_{0j} = \mathbf{v}_j$ jsou kolineární, dostáváme parabolickou válcovou plochu. Pokud jsou tyto vektory různoběžné, dostaneme parabolickou kuželovou plochu.



Obr.31: NURBS plocha z elipsy a hyperboly

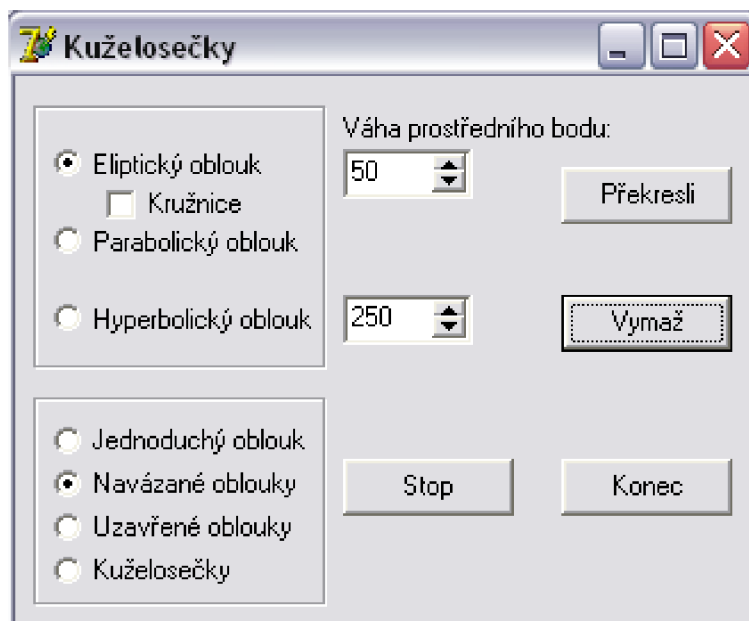


Obr.32: NURBS plocha z paraboly a úsečky

5 Kuželosečky a NURBS plochy

Pro názornější ukázkou dané tematiky jsem vytvořila program Kuželosečky a program NURBS.

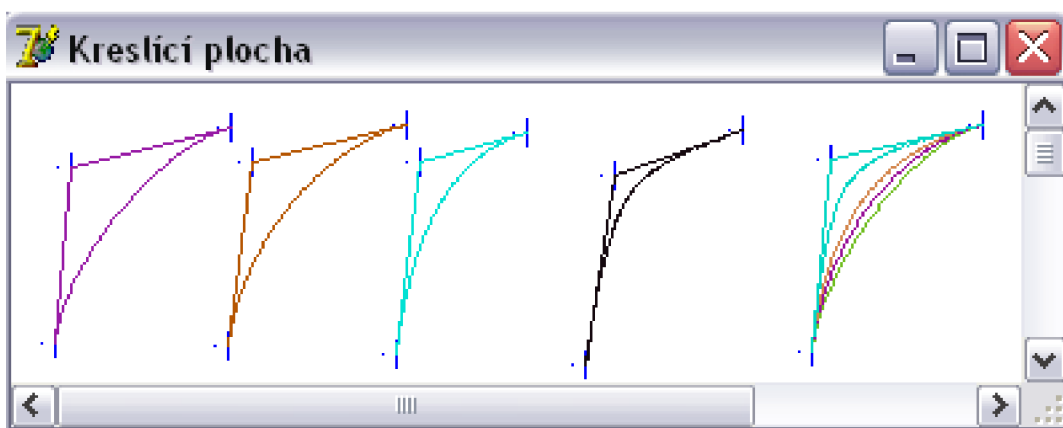
Program Kuželosečky, jak už jeho název napovídá, se zabývá oblouky kuželoseček. Umožňuje zvolit uživateli, zda chce eliptický, parabolický či hyperbolický oblouk. U eliptického a hyperbolického oblouku je možnost nastavení váhy prostředního bodu (krajní body mají automaticky váhu 1, aby šlo o kuželosečky). Váha zadávaná do programu je vynásobena stem pro lepší zadávání zejména eliptických oblouků.



Obr.33: Ovládací panel programu Kuželosečky

Protože váha prostředního bodu v případě, že chceme kružnici, nelze zadat přesně ($w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$), je zde vytvořeno zaškrtačací políčko Kružnice. Program toto zaškrtnutí bere v úvahu jen tehdy, je-li zároveň zatrženo i pole Eliptický oblouk. Pokud si uživatel zvolí na kreslicí ploše tři body, vykreslí se mu aktuálně zatržený oblouk. Pokud nyní zvolí jiný oblouk nebo u zvoleného eliptického či hyperbolického oblouku změni váhu prostředního bodu a dá Překresli, pak se mu vykreslí nově zvolený oblouk s původními řídicími body.

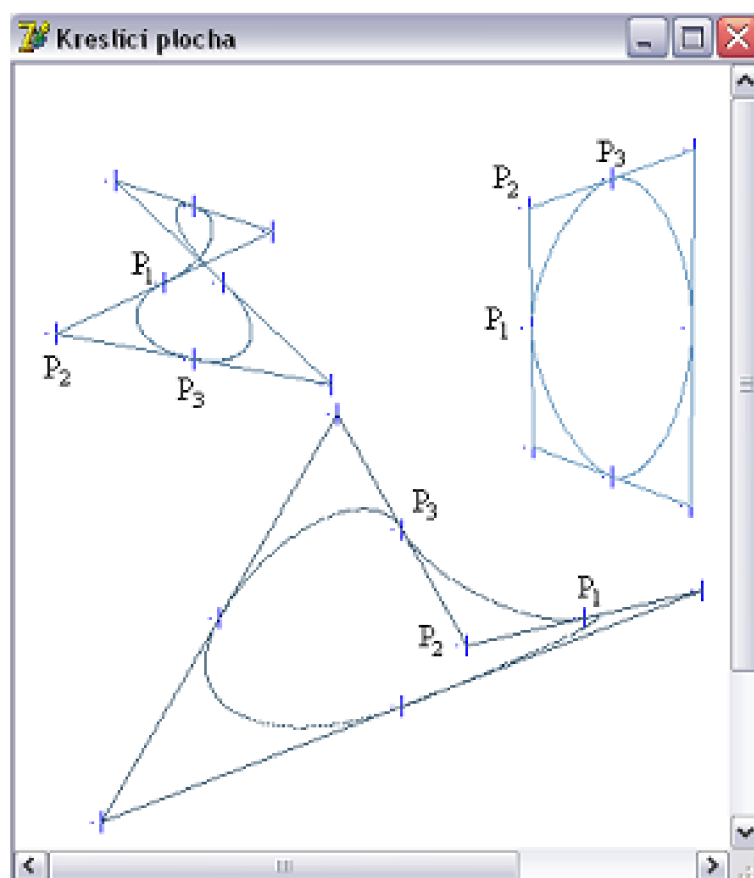
Na následujícím obrázku můžeme vidět jako první eliptický oblouk, vedle kružnicový oblouk, dále je parabolický oblouk a vedle něj hyperbolický oblouk. Vpravo pak můžeme vidět srovnání předešlých oblouků (pro nové řídicí body ale stejné váhy prostředního bodu) vytvořené pomocí tlačítka Překresli.



Obr.34: Jednoduché oblouky kuželoseček

Kromě druhu oblouku kuželosečky může uživatel měnit i to, zda chce jednoduchý oblouk, navázané oblouky, uzavřené oblouky nebo konkrétní kuželosečky. Možnost Jednoduchý oblouk umožní vykreslit pouze křivku se třemi řídicími body - základní oblouky.

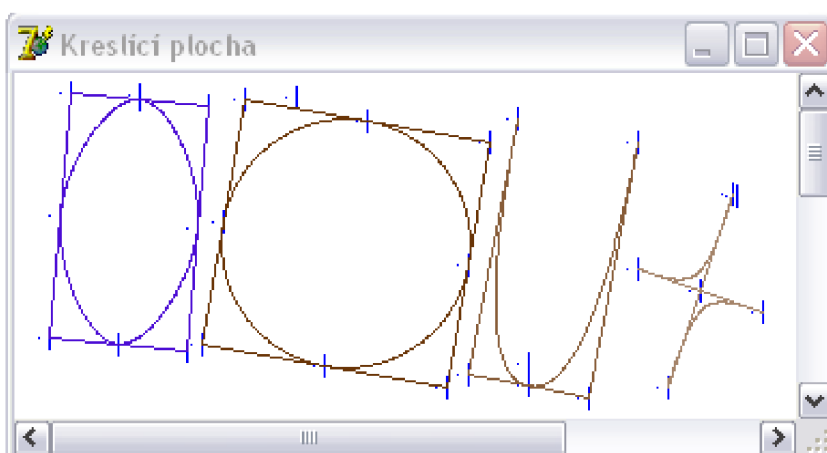
Uzavřené oblouky vyžadují zadání tří řídicích bodů prvního oblouku, ke kterému pak dokreslí další tři oblouky tak, aby se daná křivka uzavřela a ve všech bodech byla spojitá i se svými prvními a druhými derivacemi. Při zadávání této křivky výrazně ovlivňuje výsledný tvar poloha řídicích bodů - to jak jsou vzájemně umístěny v souřadném systému, jaký úhel svírá spojnice prvního a druhého bodu se spojnicí druhého a třetího bodu a vzdálenost těchto bodů od sebe.



Obr.35: Uzavřené oblouky

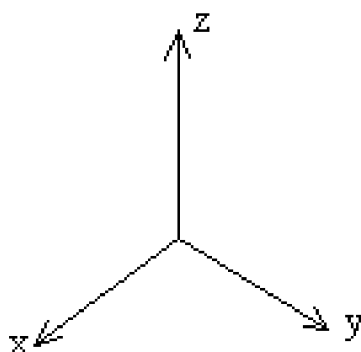
Navázané oblouky umí nadpojet původní křivku se třemi řídicími body a to tak, že výsledná křivka je spojitá i se svými prvními i druhými derivacemi. Toho je docíleno tak, že ihned po vykreslení oblouku se vykreslí i druhý řídicí bod (třetí řídicí bod první křivky je automaticky prvním řídicím bodem druhé křivky). Pro vykreslení druhé křivky tak stačí zadat jen jeden bod. Pokud bychom už nechtěli dále křivku napojovat, stačí stisknout tlačítko Stop a program bude čekat na zadání nových tří řídicích bodů.

Poslední možností jsou kuželosečky. Pokud je zatrženo toto pole, pak uživatel zadá tři řídicí body, podle kterých program dokreslí kuželosečku, tj. elipsu, kružnici, parabolu nebo hyperbolu (podle toho, který z těchto typů oblouků si uživatel přál. Třetím bodem uživatel jen udává, na které straně od spojnice prvního a druhého řídicího bodu má být třetí řídicí bod. Jeho přesnou polohu už program spočítá sám tak, aby byl pravý úhel mezi spojnicí prvního a druhého řídicího bodu a spojnicí druhého a třetího řídicího bodu. U kružnice navíc spočítá vzdálenost tohoto bodu od druhého řídicího bodu tak, aby obě spojnice byly stejně dlouhé.

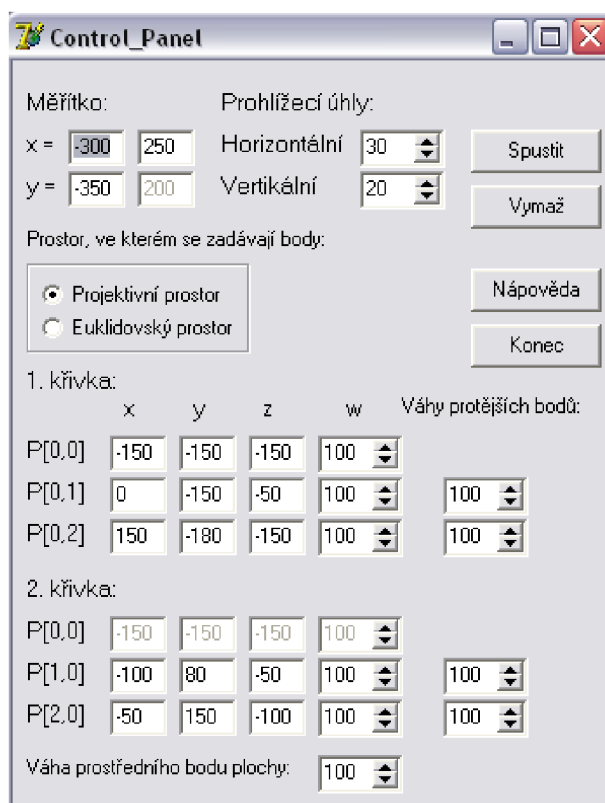


Obr.36: Kuželosečky

Program NURBS umožňuje nakreslit NURBS plochu jako tenzorový součin dvou NURBS křivek. Tyto křivky zde uživatel zadává pomocí souřadnic řídicích bodů a jejich vah, a to buď v projektivním nebo euklidovském prostoru. Každá křivka je zadána třemi body. Ty mají tři souřadnice x , y , z . Vedle těchto souřadnic se zadává váha bodu w . První křivka je vykreslena červeně, druhá zeleně. Plocha má tento souřadný systém:



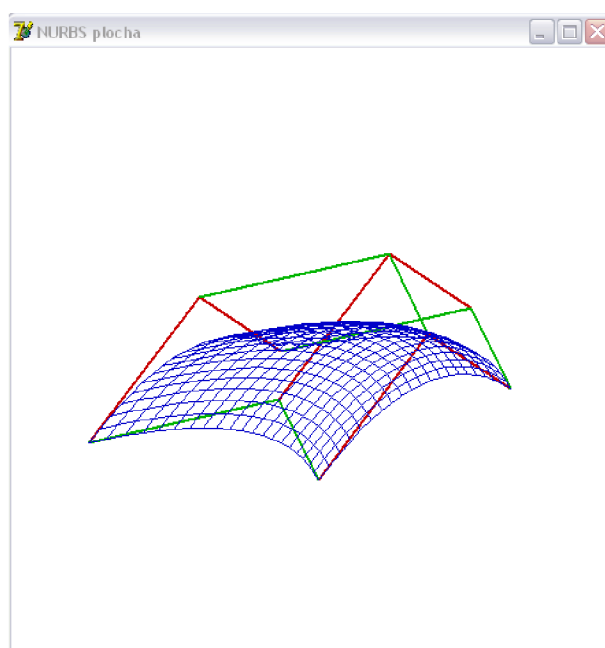
Obr.37: Souřadný systém použitý v programu NURBS



Obr.38: Ovládací panel programu NURBS

Protože protilehlé křivky stejné barvy nemusí mít obecně stejné váhy, je zde možnost měnit váhy všech řídicích bodů na ploše. Stejně jako u programu Kuželosečky je i zde váha bodů vynásobena stem pro lepší zadávání uživatelem.

Kromě základního nastavení NURBS plochy je zde možno nastavit měřítko kreslicí plochy (pro zvětšení či zmenšení plochy) a danou plochou lze natáčet pomocí prohlížeacích úhlů.



Obr.39: Kreslicí plocha programu NURBS

Závěr

Úkolem této práce je obecný analytický popis NURBS křivek a ploch v projektivním prostoru a dále jeho konkretizace pro popis kuželoseček a kvadrik. Proto v první části této práce definuji projektivní prostor a prostory potřebné pro vyjádření projektivního prostoru. Ve druhé a třetí části se zabývám předchůdci NURBS křivek a ploch. Popsala jsem zde základní vlastnosti a vývoj těchto křivek a ploch.

Čtvrtá část je pak věnována samotným NURBS křivkám a plochám a jejich speciálním případům, kterými jsou kuželosečky a pláty kvadrik. Možnosti modelování plátů kvadrik je zde dosaženo pomocí tenzorového součinu dvou kuželoseček. Pátá část je věnována popisu programů modelující kuželosečky a pláty kvadrik.

Na závěr tak zůstává otázka, proč používat zrovna NURBS křivky a plochy? Důvodů je několik. Mezi ty nejdůležitější však patří to, že B - splajny jsou na rozdíl od svých předchůdců spojitě spolu se svými prvními a druhými derivacemi, kdežto např. Fergusonovy a Bézierovy křivky jsou spojitě pouze se svými prvními derivacemi. Další důležitou výhodou je lokální kontrolovatelnost. Pokud změním jeden bod např. v NURBS křivce, pak musíme přepočítat pouze příslušné oblouky, které tento bod obsahují (předpokládáme, že křivka je složena z více oblouků). Kdežto např. u zmíněné Fergusonovy křivky je při změně jednoho bodu nutné přepočítat celou křivku.

Z předchozích dvou výhod a z racionality NURBS vyplývá důležité použití NURBS, a to možnost modelovat kuželosečky a kvadriky. Zde se pak objevuje další vlastnost NURBS - při změně vah řídicích bodů kuželosečky (např. pokud všechny váhy vynásobíme dvěma) a zachování původních souřadnic se typ kuželosečky nemění.

Použitá literatura

- [1] *Afinní prostor* - *Wikipedie, otevřená encyklopedie* [online]. [cit. 2007-03-08].
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Afinn%C3%AD_prostor>
- [2] Doupovec, M. *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*. Brno: PC-DIR Real, s.r.o., 1999. ISBN 80-214-1470-7.
- [3] Martišek, D. *Matematické principy grafických systémů*. 1. vydání. Brno: Littera, 2002. ISBN 80-85763-19-2.
- [4] Martišek, D. - Procházková, J. *Relation between algebraic and geometric view on NURBS tensor product surfaces*. *Applicatios of Mahtematics*, přijato k publikaci.
- [5] Piegl, L. - Tiller, W. *The NURBS Book* [online]. [cit. 2009-04-26]. 2. vydání. Springer, 1997.
<<http://www.scribd.com/doc/10043024/Springer-The-NURBS-Book-2ed-1997>>
- [6] Procházková, J. *Modelování matematickým ploch v CAD systémech*. Brno, 2007. Dizertační práce na FSI VUT v Brně, ústav matematiky. Vedoucí dizertační práce Doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.
- [7] *Vektorový prostor* - *Wikipedie, otevřená encyklopedie* [online]. [cit. 2007-03-08].
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Vektorov%C3%BD_prostor>
- [8] Žára a kol. *Moderní počítačová grafika*. 2. vydání. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-251-0454-0.

Seznam použitých zkratek a symbolů

A	bod
\mathbf{A}_n	afinní prostor dimenze n
$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_i\}$	báze
$B_i(t)$	Bézierovy polynomy
$B_i^n(t)$	Bernsteinovy polynomy
\mathcal{C}	křivka
C^r	třída spojitosti
$C_i(t)$	Coonsovy polynomy
\mathbf{E}_n	euklidovský prostor dimenze n
$F_i(t)$	Fergusonovy polynomy
$N_i^n(t)$	B-splajn funkce
$\langle O; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \dots; \mathbf{e}_n \rangle$	kartézská souřadná soustava
\mathbf{P}_n	projektivní prostor dimenze n
$Q(r, s)$	bod plochy
$Q(t)$	bod křivky
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{R}^n	kartézská mocnina množiny
$R_i^n(t)$	racionální Bernsteinovy polynomy
\mathcal{S}	plocha
U, U_x	okolí bodu
\mathbf{V}	vektorový prostor
\mathbf{V}_n	vektorový prostor dimenze n
$X = [x_1; x_2; \dots; x_n]$	kartézské souřadnice bodu X
$X = (x_1; x_2; \dots; x_{n+1})$	bod v projektivním prostoru
m_j, w_j, w_{ij}	váha bodů
\mathbf{o}	nulový vektor
\mathbf{t}	uzlový vektor
$\mathbf{u}, \overrightarrow{PQ}$	vektor
\mathbf{w}	váhový vektor
α, c	skalár