Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Procenta v úlohách matematické olympiády, korespondenčních seminářů a výzkumů PISA, TIMSS

Vypracovala: Bc. Denisa Tomanová
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Procenta v úlohách matematické olympiády, korespondenčních seminářů a výzkumů PISA, TIMSS jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 25. dubna 2014 …………………………...

Bc. Denisa Tomanová

Poděkování

Děkuji RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za vedení diplomové práce a za její cenné rady a konzultace. Také těm, kteří mi ochotně pomáhali a poskytovali potřebné informace pro zpracování tématu a všem, kteří mi po celou dobu studia byli oporou.

ANOTACE

Název práce: Procenta v úlohách matematické olympiády, korespondenčních seminářů a výzkumů PISA, TIMSS

Autor: Bc. Denisa Tomanová

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Diplomová práce se zabývá informacemi o procentech, matematické olympiádě, matematických korespondenčních seminářích a mezinárodních výzkumech PISA a TIMSS. V teoretické části je uveden historický vývoj matematické olympiády a její organizace, historie matematických korespondenčních seminářů a seznam aktuálních seminářů pro žáky základních škol.

Druhou část diplomové práce tvoří sbírka řešených úloh s procenty, které se vyskytují v matematické olympiádě, matematických korespondenčních seminářích i výzkumů PISA a TIMSS.

Klíčová slova: procenta, matematická olympiáda, matematický korespondenční seminář, mezinárodní výzkum PISA, mezinárodní výzkum TIMSS

ANNOTATION

Name of diploma thesis: Percentage tasks in a mathematical olympiad, in corresponding seminars, and in PISA and TIMSS tests

Author: Bc. Denisa Tomanová

Tutor of diploma thesis: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Diploma thesis includes information about percentages, mathematical olympiad, mathematical corresponding seminars and PISA ant TIMSS tests. The first, theoretical part describes historical development of mathematical olympiad and its organization, the history of mathematical corresponding seminars and list of current seminars for primary school students.

The second part of the diploma thesis consists of the collection of tasks examples with percentages that appear in mathematical olympiad, mathematical corresponding seminars and PISA and TIMSS tests.

Key words: percentages, mathematical olympiad, mathematical corresponding seminars, international research PISA, international research TIMSS

.

OBSAH:

1. ÚVOD

Se slovem procento se žáci nesetkávají jen ve škole, ale také v běžném životě. Stejně tak se symbolem %, který se vyskytuje všude kolem nás: ať už ve slevových letácích obchodů, sledovacích koláčích televizí či třeba v reklamách na internetu. Právě proto se tato diplomová práce zabývá procenty.

Jedním z hlavních cílů diplomové práce je vytvořit sbírku řešených příkladů na procenta. Ovšem nejedná se o příklady z běžných učebnic pro základní školy, nýbrž o ty z matematických olympiád, korespondenčních seminářů a mezinárodních výzkumů PISA a TIMSS. Díky této skutečnosti mohou sbírku použít učitelé základních škol k prohlubování učiva talentovaných žáků nebo uvedené příklady řešit s dětmi v matematickém kroužku.

Samotná diplomová práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol. První kapitola je ryze teoretická, obsahuje informace o vyučování procent na základních školách, informace o matematické olympiádě, korespondenčních seminářích a mezinárodních výzkumech PISA a TIMSS.

Sbírka řešených příkladů na procenta je uvedena v druhé kapitole. Příklady jsou rozděleny podle jejich původu, svou subkapitolu mají příklady z matematických olympiád, stejně tak příklady z korespondenčních seminářů, výzkumu PISA a výzkumu TIMSS. Samotné příklady jsou řazeny podle obtížnosti od nejjednodušších po nejsložitější. Pro lepší orientaci jsou označené hvězdičkami. Jednu hvězdičku mají příklady lehké, tři hvězdičky příklady těžké.

Hlavní cíle této diplomové práce jsou:

- vypracovat přehlednou studii o matematické olympiádě kategorie Z (historie a organizace matematické olympiády kategorie Z)
- vypracovat přehlednou studii o korespondenčních seminářích pro žáky základních škol (historický přehled korespondenčních seminářů, aktuální korespondenční semináře pro žáky základních škol)

- vypracovat přehlednou studii o výzkumech PISA, TIMSS
- vytvořit sbírku řešených úloh na procenta, které se vyskytují v matematických olympiádách, korespondenčních seminářích a výzkumech PISA, TIMSS

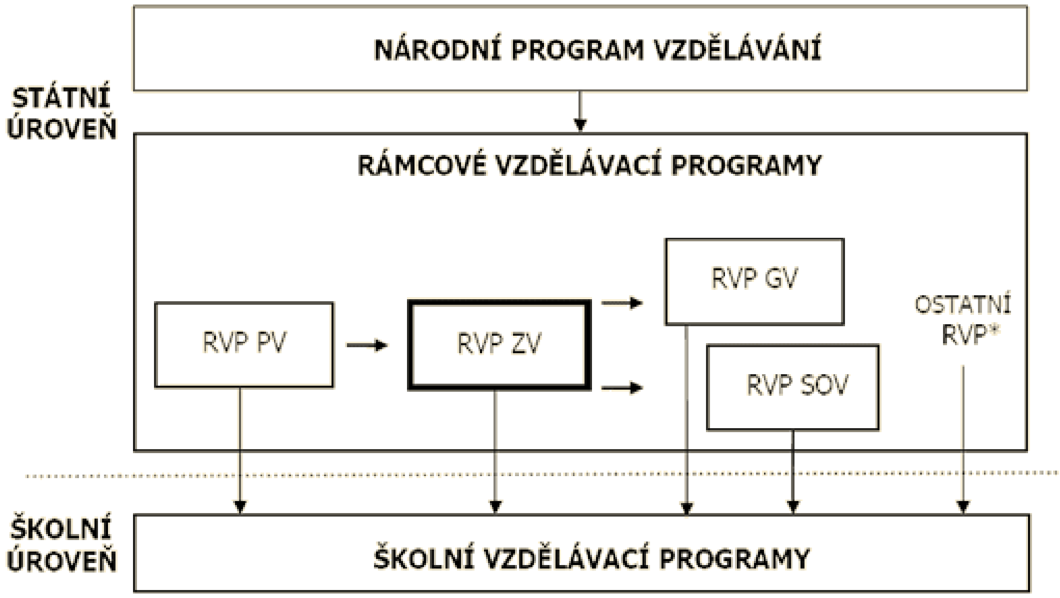
2. TEORETICKÁ ČÁST

2.1 VÝUKA PROCENT NA DRUHÉM STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Podle Výzkumného ústavu pedagogického (2007) revoluce ve vzdělání přinesly do vzdělávací soustavy nový systém kurikulárních dokumentů. Tyto dokumenty jsou zhotovovány na dvou úrovních – úroveň státní a školní.

Obrázek č. 1 znázorňuje, že národní program vzdělávání a rámcové vzdělávací programy přiřazujeme do úrovně státní, školní vzdělávací programy pak do úrovně školní (Hrubý, Chodorová, 2009). Dle Výzkumného ústavu pedagogického (2007) národní program vzdělávání vymezuje počáteční vzdělávání jako celek. Rámcově vzdělávací programy pak udávají jednotlivé rámce vzdělání pro etapy předškolního, základního a školního vzdělání. Rámcově vzdělávací program vymezuje povinný obsah, rozsah a podmínky vzdělávání, podle kterých jsou pak na školách tvořeny školní vzdělávací programy (Výzkumný ústav pedagogický, 2007).

Obrázek č. 1: Školské dokumenty



Zdroj: http://tvormeskolu.webnode.cz/vyuka/pedagogika/skolsky-system-a-skolske-dokumenty/

Lze říci, že s příchodem rámcově vzdělávacích programů, do škol vešlo něco nového, nedirektivního. Dříve, před příchodem rámcově vzdělávacích programů, byly na školách osnovy, ve kterých byl přesný plán učiva, který se měl v daném měsíci a týdnu splnit. Od školního roku 2007/2008 se již s osnovami na školách nesetkáváme, od této doby je povinné na všech školách realizovat školní vzdělávací program. Podle Kitzbergera (2010) nyní máme k dispozici moderně pojaté kurikulum, které je v souladu s evropskými trendy.

2.1.1 Rámcově vzdělávací program

Rámcově vzdělávací programy jsou utvořeny pro všechny stupně vzdělání – od mateřských škol až po školy střední. Své programy mají i základní umělecké školy a v neposlední řadě existují také rámcově vzdělávací programy upravené pro žáky s lehkým mentálním postižením a pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami.

Rámcově vzdělávací programy vycházejí z nové strategie vzdělávání, která se zaměřuje především na klíčové kompetence, jejich spojitost se vzdělávacím obsahem a následné uplatnění získaných vědomostí v praktickém životě (Výzkumný ústav pedagogický, 2007). Vycházejí z koncepce celoživotního učení. Dá se říci, že rámcově vzdělávací programy udávají očekávanou úroveň vzdělání stanovenou pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání. V neposlední řadě také podporují pedagogickou autonomii škol a profesní odpovědnost učitelů za výsledky vzdělávání.

2.1.2 Školní vzdělávací program

Školní vzdělávací program pro základní vzdělání je školský dokument, který si podle rámcově vzdělávacího programu každá škola zpracovává sama.

Podle Výzkumného ústavu pedagogického (2006) vychází školní vzdělávací program z konkrétních vzdělávacích záměrů školy, zohledňuje nejen podmínky a možnosti školy, ale také možnosti a potřeby samotných žáků. Vzdělávací proces se pak realizuje podle konkrétního školního vzdělávacího programu, který si daná škola vypracovala. Výzkumný ústav pedagogický (2006) zmiňuje, že záměrem tvorby školních vzdělávacích programů je přimět učitele ke vzájemné spolupráci. Ta by se měla projevit také v propojování vhodných témat z různých vzdělávacích oborů a v posilování nadpředmětového přístupu ke vzdělání.

2.1.3 Zakotvení procent v rámcově vzdělávacím programu

2.1.3.1 Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

Rámcově vzdělávací program je rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí (Jazyk a jazyková komunikace, Matematika a její aplikace, Informační a komunikační technologie, Člověk a jeho svět, Člověk a společnost, Člověk a příroda, Umění a kultura, Člověk a zdraví, Člověk a svět práce) a na doplňující vzdělávací obory, kterými je například dramatická výchova (Výzkumný ústav pedagogický, 2007).

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace klade důraz především na aktivní činnosti, které jsou pro práci s matematickými objekty a pro používání matematiky v běžných situacích charakteristické. Žáci postupně osvojují základní matematické pojmy a symboly, matematické postupy a jejich užití (Výzkumný ústav pedagogický, 2007).

Vzdělávací obsah vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace vymezuje čtyři tematické okruhy:

- Čísla a početní operace (na 2. Stupni Číslo a proměnná)
- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Geometrie v rovině a v prostoru
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

2.1.3.2 Procenta ve vzdělávací oblasti Číslo a proměnná

Jedním z mnoha očekávaných výstupů této oblasti je užívání různých způsobů kvantitativního vyjádření celek – část (ať už přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem nebo právě procentem) a také řešení aplikačních úloh na procenta (a to i pro případ, že procentová část je větší než celek). Do samotného učiva týkajícího se procent řadí rámcově vzdělávací program základní pojmy: procento a promile, jednoduché výpočty: základ, procentová část, počet procent a také jednoduché úrokování (Výzkumný ústav pedagogický, 2007).

Odvárko (2005) dodává, že výuka procent má být přednostně zaměřena na čtení, analyzování a vyhodnocování informací z nejrůznějších oblastí života, ve kterých se procenta vyskytují. Myslí tím především řešení praktických úloh, protože se slovem procento, či symbolem %, se žáci v běžném životě často setkávají. Dále Odvárko (2005) zmiňuje, že užití procent často může prohlubovat mezipředmětové vztahy – například různé statistické přehledy využívané v zeměpisu či přírodopisu.

2.2 MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Dlouhodobým způsobem, jak zpestřit výuku matematiky, jsou různé matematické soutěže (Zhouf a kol, 2006). Tyto soutěže jsou pořádány pro žáky všech typů a stupňů škol. Koman, Repáš (1989) soudí, že kromě zvýšení zájmu o matematiku, rozšiřování a prohlubování vědomostí, slouží matematické soutěže také k vyhledávání nadaných žáků a jejich následnému rozvoji. Tato úloha matematických soutěží je podle Zhoufa a kol. (2006) považována za jakési nejdůležitější poslání. Dále dodá, že mezi nejznámější soutěže patří Matematická olympiáda a Matematický klokan. Méně známou matematickou soutěží jsou tzv. korespondenční semináře (Zhouf a kol., 2006).

2.2.1 Struktura a organizace Matematické olympiády

Kocourek (2012) informuje, že Matematická olympiáda je předmětová soutěž z matematiky pro žáky základních a středních škol. Matematickou olympiádu pořádají Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky. Úlohy pro Matematickou olympiádu připravuje Úlohová komise Matematické olympiády, která je společná pro Českou i Slovenskou republiku. Úlohy a termíny všech kol jsou proto pro obě republiky stejné. Navíc termíny konání jednotlivých soutěžních kol jsou prodiskutovávány také s řídícími orgány dalších soutěží tak, aby nebyl narušován chod škol a jejich pravidelné vyučování (Kocourek, 2012). Důležité je také zmínit, že účast na Matematické olympiádě je zcela dobrovolná.

Jak uvádí Kocourek (2012), Matematická olympiáda je v současnosti organizována v následujících kategoriích:

a) kategorie A, která je určená pro žáky 3. a 4. ročníků středních škol, 7. a 8. ročníků osmiletých gymnázií a 5. a 6. ročníků šestiletých gymnázií; kategorie A probíhá ve školním, krajském a ústředním soutěžním kole
b) kategorie B, která je určená pro žáky 2. ročníků středních škol, 6. ročníků osmiletých gymnázií a 4. ročníků šestiletých gymnázií; kategorie B probíhá ve školním a krajském soutěžním kole
c) kategorie C, která je určená pro žáky 1. ročníků středních škol, 5. ročníků osmiletých gymnázií a 3. ročníků šestiletých gymnázií; kategorie C probíhá ve školním a krajském soutěžním kole
d) kategorie Z9, která je určená pro žáky 9. ročníků základních škol, 4. ročníků osmiletých gymnázií a 2. ročníků šestiletých gymnázií; kategorie Z9 probíhá ve školním, okresním a krajském soutěžním kole
e) kategorie Z8, která je určená pro žáky 8. ročníků základních škol, 3. ročníků osmiletých gymnázií a 1. ročníků šestiletých gymnázií; kategorie Z8 probíhá ve školním a okresním soutěžním kole
f) kategorie Z7, která je určená pro žáky 7. ročníků základních škol a 2. ročníků osmiletých gymnázií; kategorie Z7 probíhá ve školním a okresním soutěžním kole

g) kategorie Z6, která je určená pro žáky 6. ročníků základních škol a 1. ročníků osmiletých gymnázií; kategorie Z6 probíhá ve školním a okresním soutěžním kole
h) kategorie Z5, která je určená pro žáky 5. ročníků základních škol; kategorie Z5 probíhá ve školním a okresním soutěžním kole
i) kategorie P, která je zaměřená na informatiku a je určená pro žáky 1. – 4. ročníků středních škol, 5. – 8. ročníků osmiletých gymnázií a 3. – 6. ročníků šestiletých gymnázií; kategorie P probíhá ve školním, krajském a ústředním soutěžním kole

2.2.2 Matematická olympiáda kategorie Z

2.2.2.1 Historie Matematické olympiády kategorie Z

Historicky první ročník matematické olympiády u nás proběhl ve školním roce 1951/1952 (Koman a kol., 1988). Boček (2000) dodává, že Matematická olympiáda vznikala v naší republice podle zkušeností jiných zemí (především podle Polska a tehdejšího Sovětského svazu). Dále Boček (2000) dodává, že zakladatelem Matematické olympiády u nás byl matematik světově známého jména profesor Univerzity Karlovy Dr. Eduard Čech. Ze slovenských matematiků to byl Profesor Dr. Juraj Hronec, který se od začátků věnoval Matematické olympiádě. Profesor Dr. Juraj Hronec tehdy působil na univerzitě i technice v Bratislavě. Matematická olympiáda by však nevznikla, kdyby zde nenašla podporu tehdejšího Ministerstva školství, věd a umění. Koman a Repáš (1989) doplňují, že Matematickou olympiádu z hlediska odbornosti zajišťovala také Jednota československých matematiků a fyziků, Jednota slovenských matematiků a fyziků, Matematický ústav ČSAV a Socialistický svaz mládeže. Hlavním cílem Matematické olympiády tehdy bylo najít studenty talentované v matematice a získat je pro studium na vysokých školách technického zaměření (Boček, 2000).

Matematická olympiáda byla po dobu prvních dvou let svého působení určena pouze pro žáky středních škol (Boček, 2000). Pro žáky základních škol byla poprvé soutěž zorganizována až v roce 1953. Tehdy se soutěže zúčastnili žáci posledních (osmých) ročníků základních škol (Koman, Repáš, 1989). Později, na základě nabytých zkušeností, byla soutěž zkušebně organizována i pro žáky 5., 6. a 7. ročníků základních škol. Koman a Repáš (1989) uvádějí, že celostátně do sedmého a šestého ročníku byla Matematická olympiáda rozšířena v roce 1984. Takto vznikly tedy dvě nové kategorie Matematické olympiády – kategorie Z7 a Z6. Dosavadní kategorie Z (kategorie žáků posledních ročníků) změnila své označení na kategorii Z8 (Koman, Repáš, 1989). Boček (2000) dodává, že se postupně Matematická olympiáda celostátně rozšířila do dalších ročníků tak, jak je známe dnes.

2.2.2.2 Organizace a propagace Matematické olympiády kategorie Z

Organizace a propagace Matematické olympiády kategorie Z se liší podle toho, které soutěžní kolo právě probíhá. Na úrovni olympiády základních škol rozlišujeme školní, okresní a krajské kolo.

Školní kolo

Matematická olympiáda kategorie Z začíná vždy školním soutěžním kolem. Kocourek (2012) uvádí, že za uskutečnění tohoto soutěžního kola je zodpovědný ředitel školy, který pověřuje učitele matematiky zabezpečením a pořádáním soutěže. Jedná se o tzv. vstupní kolo. Žáci, kteří se chtějí soutěže účastnit, vypracovávají doma šest předložených úloh, z nichž stačí pro postup do dalšího kola vyřešit úlohy čtyři (Calábek a kol., 2007). Kocourek (2012) doplňuje, že řešení úloh musí žáci odevzdat pověřenému učiteli matematiky v daném termínu. Texty soutěžních úloh jsou otištěny na samostatných letácích, či v časopisech Matematika, fyzika, informatika, Učitel matematiky nebo Rozhledy matematicko-fyzikální (Calábek a kol, 2007).

Spolu s pověřeným učitelem se na organizaci, řízení a vyhodnocování školního soutěžního kola mohou podílet i ostatní učitelé matematiky a to v rámci činnosti předmětové komise (Kocourek, 2012). Práci všech úspěšných řešitelů poté zašle škola (ředitel, pověřený učitel) okresní komisi Matematické olympiády. Okresní komise z řešitelů vybere ty nejlepší a pozve je k účasti v okresním kole soutěže.

Okresní kolo

Zodpovědným za zřízení okresního soutěžního kola je příslušný kraj. Ten zřizuje příslušné okresní komise Matematické olympiády (Kocourek, 2012). Okresní komise poté koordinuje a sleduje průběh soutěže. Žáci, pozvaní do okresního kola kategorie Z9, vždy řeší samostatně 4 soutěžní úlohy (během 4 hodin). Žáci kategorie Z6 – Z8 řeší samostatně 3 úlohy (v průběhu 2 hodin). Žáci kategorie Z5 řeší 3 úlohy, na které mají 90 minut. Ve všech kategoriích se soutěžní úlohy bodují a sestavuje se pořadí všech účastníků okresního kola. Nejlepší řešitelé jsou samozřejmě odměněni.

Krajské kolo

Do krajského kola se dostávají jen nejlepší řešitelé z kategorie Z9. Zodpovědným za uskutečnění krajského kola soutěže je kraj, který zřizuje krajskou komisi Matematické olympiády (Kocourek, 2012). Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako u okresního kola. Nejlepší účastníci jsou vyhlášeni jako vítězi.

2.3 MATEMATICKÉ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘE

Jak již bylo zmíněno, korespondenční semináře jsou méně známou matematickou soutěží (Zhouf a kol., 2006). Forma organizace korespondenčních seminářů spočívá v tom, že žákům jsou úlohy zasílány domů. Žáci úlohy vyřeší a pošlou své výsledky zpět organizátorům (Zhouf a kol., 2006). Calábek a kol. (2007) dodává, že organizátoři vyřešené úlohy žáků opraví, přidají vzorové řešení a pošlou zpět soutěžícím. Současně s opraveným a vzorovým řešením žáci dostávají úlohy nové k dalšímu řešení. Zhouf a kol. (2006) uvádí, že se tento proces opakuje několikrát do roka.

V České republice jsou organizátory korespondenčních seminářů zejména studenti některé střední či vysoké školy pod vedením učitelů (Zhouf a kol., 2006).

Zhouf (2001) konstatuje, že význam matematických korespondenčních seminářů je nesporný. Soutěž slouží k vytipování talentovaných žáků a také k udržování a rozvoji žákova zájmu o matematiku. Protože úlohy do korespondenčních seminářů připravují a opravují sami žáci střední školy, slouží seminář zároveň k rozvoji matematických schopností také u nich. V neposlední řadě vytváří seminář vhodné klima ke zvyšování popularity matematiky (Zhouf, 2001).

Korespondenční semináře se pořádají pro žáky základních nebo středních škol. Calábek a kol. (2007) informuje, že někteří velmi talentovaní žáci základních škol řeší i korespondenční semináře určené středoškolákům.

V České republice je spektrum korespondenčních seminářů pestré. Zhouf a kol. (2006) vysvětluje, že každý korespondenční seminář má svůj název a samozřejmě i svá specifika. Jednotlivé semináře se liší například v tom, pro jakou věkovou skupinu jsou pořádány, liší se také v počtu kol, v počtu úloh, které jsou v jednotlivých kolech posílány, také v obtížnosti úloh, ve způsobu kontaktu mezi organizátory a řešiteli (buď elektronicky, nebo klasickou poštou) atd. V neposlední řadě se liší také ve způsobu zveřejňování výsledků a odměňování řešitelů (Zhouf a kol., 2006).

2.3.1 Historie matematických korespondenčních seminářů pro základní školy

Historicky první matematický korespondenční seminář vznikl v roce 1980 v Košicích. Byl to korespondenční seminář založený M. Gavalecem a určený pro žáky středních škol a žáky vyšších ročníků gymnázií (Calábek a kol., 2007).

Podle vzoru korespondenčních seminářů pro žáky středních škol vznikaly semináře určené žákům škol základních. První takový seminář vznikl opět na Slovensku a to v roce 1981 v Bratislavě (Zhouf a kol., 2006). Dále Zhouf a kol. (2006) dodává, že vznik prvního korespondenčního semináře pro žáky základních škol je spojován se jmény Vladimír Burjan, Kateřina a Hynek Bachratí. Tento korespondenční seminář nesl název PIKOMAT, jedná se o zkratku názvu Pionýrský Korespondenční MATematický seminář (Calábek a kol., 2007). Korespondenční seminář PIKOMAT se postupně objevoval také v dalších městech Československa. Název PIKOMAT někteří organizátoři ponechali, jinde ho změnili (Zhouf a kol., 2006). Calábek a kol. (2007)

udává, že všechny tyto semináře byly určeny žákům devátých a nižších ročníků základních škol. Ovšem později, když začaly vznikat šestiletá nebo osmiletá gymnázia, přibyly také korespondenční semináře pro žáky 5. tříd nebo pro žáky 5. – 7. tříd základních škol.

Působení korespondenčních seminářů pro žáky středních škol je rozsáhlejší, můžeme říci celorepublikové, naopak korespondenční semináře pro žáky základních škol jsou spíše regionální (Calábek a kol., 2007). Jedním z důvodů je větší počet řešitelů.

K historii korespondenčních seminářů Zhouf a kol. (2006) ještě dodává, že se forma většiny seminářů v průběhu let měnila. Za hlavní změnu považuje upravení zadávaných úloh. Původní izolované úlohy v jednotlivých sériích se (zřejmě kvůli atraktivitě) změnily do podoby literárních příběhů (Zhouf a kol., 2006).

2.3.2 Současné matematické korespondenční semináře pro žáky základních škol

Podle Calábka a kol. (2007) se v současnosti organizuje v České republice spoustu matematických korespondenčních seminářů pro žáky základních škol. Tyto semináře jsou organizovány pro žáky především devátých, ale i nižších ročníků.

Jelikož se někteří nadaní žáci vyšších ročníků základních škol mohou účastnit korespondenčního semináře určeného žákům středních škol, jsou řazeny do seznamu korespondenčních seminářů také některé matematické korespondenční semináře určené středoškolákům.

2.3.2.1 Aktuální korespondenční semináře pro žáky 1. stupně základních škol:

Korespondenční seminář ZŠ Milady Horákové

Tento matematický seminář je určen žákům 4. a 5. třídy základních škol. Pořádají ho žáci deváté třídy ZŠ Milady Horákové v Hradci Králové společně s učiteli matematiky.

Internet: http://www.zshorakhk.cz/

E-mail: seminarhk@seznam.cz

Poštovní adresa: Základní škola M. Horákové
ul. M. Horákové
500 06 Hradec Králové

Korespondenční seminář Matík

Matík je matematický korespondenční seminář pořádaný pro žáky 5. tříd základních škol okresu Zlín. Pořadatelem této soutěže je Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť. Připravování úloh, opravování a celkový průběh soutěže zajišťují pod dohledem učitelů matematiky žáci septimy.

Internet: http://www.gymzl.cz/

Poštovní adresa: Matík
Gymnázium Zlín
Lesní čtvrť 1364
760 01 Zlín

Korespondenční seminář ZAMAT

ZAMAT (zajímavá matematika) je korespondenční matematický seminář pro žáky 4. a 5. třídy základních škol. Seminář probíhá na okrese Mělník, ovšem přihlásit se může každý žák čtvrté nebo páté třídy z celé republiky. Seminář organizuje Gymnázium Jana Palacha Mělník.

Internet: http://www.gjp-me.cz/extra/zamat/zamat.html

E-mail: zamat@gjp-me.cz

Poštovní adresa: Gymnázium Jana Palacha Mělník
Pod Vrchem 3421
276 01 Mělník

Korespondenční seminář Matýsek

Jedná se o celostátní matematickou korespondenční soutěž, kterou pořádá VOŠP a SPgŠ Litomyšl. Tento seminář je určen pro žáky 4. a 5. tříd základních škol. Na závěr soutěže je pro nejlepší řešitele organizováno „Matematické odpoledne“ plné soutěží a her.

Internet: http://www.vospspgs.cz/

2.3.2.2 Aktuální korespondenční semináře pro žáky 2. stupně základních škol:

Korespondenční seminář PIKOMAT MFF UK

Pikomat MFF UK je matematický korespondenční seminář pro žáky 6. až 9. tříd základních škol a odpovídajících tříd víceletých gymnázií. Tato matematická korespondenční soutěž byla založena ve školním roce 1985/1986. Tehdy byla působností semináře Kutná Hora, nyní to je celá Česká republika. V současné době seminář organizuje skupina studentů Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

V tomto korespondenčním semináři jsou jednotlivé matematické úlohy zasazeny do příběhu a jsou voleny takovým způsobem, aby k jejich vyřešení bylo potřeba spíše zdravého úsudku a logického myšlení než školních znalostí.

Korespondenční seminář Pikomat MFF UK není zajímavý jen řešením úloh v korespondenční části. Každý rok probíhá jarní soustředění, či letní tábor Pikomatu, kam je zváno několik nejlepších řešitelů z každého ročníku.

Internet: http://pikomat.mff.cuni.cz/

E-mail: pikomat@mff.cuni.cz

Poštovní adresa: Pikomat MFF UK
KPMS MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8

Korespondenční seminář KoS Severák

Kos Severák je matematický korespondenční seminář pořádaný ve dvou kategoriích: Kategorie JUNIOR, která je určena pro žáky 2. stupně základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií, a kategorie STUDENT určené pro středoškoláky ze všech typů středních škol. Korespondenční seminář byl založen ve školním roce 2002/2003 a je organizován pedagogy a studenty katedry matematiky Přírodovědecké fakulty Univerzity J. E. Purkyně. Veškeré výdaje spolufinancuje Jednota českých matematiků a fyziků – pobočka Ústí nad Labem.

V průběhu každého školního roku vychází 5 sérií semináře po 5 příkladech. Na konci roku jsou nejlepší řešitelé odměněni.

Internet: http://www.kos-ujep.estranky.cz/

E-mail: kos.ujep@seznam.cz

Poštovní adresa: Vlastimil Chytrý (kategorie Junior)
KM1 a ICT PF UJEP
Hoření 13
400 96 Ústí nad Labem

Koperníkův korespondenční seminář – KoKoS

KoKoS je matematický korespondenční seminář určený pro žáky 6. až 9. tříd základních škol nebo odpovídajících ročníků gymnázií. Seminář je organizován studenty Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci.

KoKoS není jedinou soutěží pořádanou studenty tohoto gymnázia. Mezi další akce gymnázia patří například KoKoSové prázdniny, jarní a podzimní soustředění či Koperníkův Matboj.

Hlavním cílem Koperníkova korespondenčního semináře je rozvíjet v mladých lidech, kteří se zajímají o matematiku, jejich logické myšlení a prohlubovat poznatky z matematiky, ke kterým by se jen tak ve vyučování nedostali.

Internet: http://kokos.gmk.cz/

E-mail: gmkkkokos@seznam.cz

Poštovní adresa: KOKOS
Gymnázium Mikuláše Koperníka
17. listopadu 526
743 11 Bílovec

Korespondenční seminář Gymnázia J. K. Tyla

Jedná se o matematickou korespondenční soutěž, kterou pořádají studenti gymnázia J. K. Tyla pro žáky druhých stupňů základních škol a odpovídajících stupňů víceletých gymnázií. První ročník tohoto semináře proběhl ve školním roce 1988/1989.

Mezi další matematické soutěže pořádané gymnáziem patří například Matboj, Matematický orienťák a Matematický král.

Internet: http://mks.gjkt.cz/

E-mail: seminar@gjkt.cz

Poštovní adresa: Korespondenční seminář
Gymnázium J. K. Tyla
Tylovo nábřeží 682
500 02 Hradec Králové

Korespondenční seminář Пkomat Kralupy nad Vltavou

Пkomat byla matematická korespondenční soutěž řízena vyučujícími, současnými i bývalými studenty Dvořákova gymnázia v Kralupech nad Vltavou. Tato soutěž bezmála 30 let rozvíjela matematické schopnosti žáků druhého stupně základních škol a studentů nižšího gymnázia. Po krátkém přerušení byla soutěž zmodernizována a školním rokem 2013/2014 zahájila opět svou aktivitu. Nyní je tato soutěž určena pro žáky 6., 7. a 8. ročníků a odpovídajících tříd gymnázia. Soutěž má čtyři kola: dvě online – ve vymezeném a přesně určeném termínu a druhé dvě jako všestranně vědomostní a dovednostní soutěž v přírodě.

Úvodní kolo Пkomatu je adrenalinové dopoledne s týmovou vědomostní soutěží (online). Jednotlivé týmy mohou být sestaveny ze členů různých ročníků. Druhé soutěžní kolo je také online, jedná se o řešení korespondenčních úloh, ve kterých už bojuje každý sám za sebe. Pro ty nejlepší řešitele těchto dvou kol je připraveno velké finále doplněné dalšími úkoly v přírodě.

Internet: https://sites.google.com/site/pikomat14/

E-mail: fricova@dgkralupy.cz

Poštovní adresa: Pikomat
Dvořákovo gymnázium a SOŠE
Dvořákovo náměstí 800
278 01 Kralupy nad Vltavou

Korespondenční seminář MATES Polička

Mates je matematická korespondenční soutěž pořádaná studenty spolu s pedagogy Gymnázia v Poličce. První ročník semináře proběl ve školním roce 1991/1992. Seminář je určen pro žáky šestých a sedmých tříd základních škol a studenty odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Každý ročník tohoto matematického semináře se skládá ze čtyř sérií po čtyřech příkladech. Příklady jsou opět začleněny do napínavých příběhů a každý rok se týkají určitého námětu.

Internet: http://www.matesonline.wz.cz/

E-mail: matesonline@seznam.cz

Poštovní adresa: Mates
Gymnázium Polička
Nábřeží svobody 306
572 01 Polička

Korespondenční seminář KoMáR

Seminář je určen žákům druhého stupně základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií. Matematický seminář KoMáR navazuje na dlouholetou tradici semináře Pikomat. Organizují ho studenti Gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše, pod záštitou Ústavu matematiky a Přírodovědecké fakulty Masarykovy Univerzity.

Internet: http://komar.math.muni.cz/

E-mail: komar@math.muni.cz

Poštovní adresa: KoMáR
Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše 14
658 70 Brno

Korespondenční seminář Taktik

Matematický korespondenční seminář Taktik je určen pro žáky základních škol a nižších ročníků osmiletých gymnázií v České i Slovenské republice. Jedná se tedy o mezinárodní matematický seminář, který vyžaduje registrační poplatek.

Tento seminář nehodnotí pouze vědomosti žáků, ale také školy. Celý rok nesleduje pouze výsledky jednotlivců v korespondenčních úlohách, ale také napínavý souboj škol o prestižní ocenění Pohár vítěze Taktik.

Internet: http://www.etaktik.cz/

E-mail: taktik@seminar-taktik.cz

Poštovní adresa: Taktik
P. O. BOX 326
Jindřišská 14
111 21 Praha 1

2.3.2.3 Známé korespondenční semináře pro žáky středních škol:

Brněnský korespondenční seminář – BRKOS

BRKOS je matematický korespondenční seminář, který je pořádán pro všechny středoškoláky (i žáky základních škol), kteří mají rádi matematiku. Organizátorem tohoto korespondenčního semináře je Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity. Ti nejlepší řešitelé mají možnost navštívit týdenní matematické soustředění plné her, zábavy a matematiky.

Internet: http://brkos.math.muni.cz/

E-mail: brkos@math.muni.cz

Poštovní adresa: BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

Pražský matematický korespondenční seminář – PRASE

Matematický korespondenční seminář PraSe (PRAžský Seminář) je pořádaný studenty Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Tento seminář je určen všem žákům středních i základních škol se zájmem o matematiku. Pro nejlepší řešitele je připraveno osmidenní soustředění v přírodě, na které jsou zvané i různé osobnosti z MFF UK.

Internet: http://mks.mff.cuni.cz/

E-mail: mks@mff.cuni.cz

Poštovní adresa: Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

2.4 MEZINÁRODNÍ VÝZKUM PISA A TIMSS

2.4.1 Matematická gramotnost ve vzdělání

Podle Výzkumného ústavu pedagogického (2011) v oblasti vzdělávání často narážíme na pojmy, kterým podvědomě rozumíme, ale přesně vymezit a definovat pojem neumíme. Takovým pojmem může být, v poslední době často propagovaná a rozebíraná, matematická gramotnost.

Vymezení samotného pojmu matematická gramotnost není některak jednotné (Výzkumný ústav pedagogický, 2010).

Straková (2002) definuje matematickou gramotnost jako *„schopnost rozpoznat a pochopit matematické problémy, zabývat se jimi a využívat matematiku v soukromém životě, v zaměstnání a ve společnosti přátel a příbuzných jako konstruktivní, zainteresovaný a přemýšlivý občan“* (Straková a kol., 2002, s. 11).

Zajímavé vymezení matematické gramotnosti uvádí také Kuřina (2011): *„Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme:*

- *schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému),*
- *schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie,*
- *dovednost řešit úlohy, jak z matematiky, tak i z jejích aplikací, které jsou (obvykle bezprostředním) užitím probraného učiva.*

K řešení úloh problémového charakteru je třeba větší míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické kultury. Tato úroveň nemůže být požadována od celé populace. Základní matematickou gramotnost by ovšem měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy. Pěstování matematické gramotnosti je nejdůležitější vzdělávací úkol každého stupně školy" (Hošpesová, Kuřina a kol., 2011, s. 26).

Nejčastější vymezení pojmu matematická gramotnost, které je mnohdy chápáno za definici, je vymezení pro mezinárodní výzkum OECD PISA (Výzkumný ústav pedagogický, 2011). Tuto definici uvádí publikace Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003: *„Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana. Klíčovou schopností, která vyplývá z tohoto pojetí matematické gramotnosti, je schopnost vymezit, formulovat a řešit problémy z různých oblastí a kontextů a interpretovat jejich řešení s užitím matematiky. Tyto kontexty sahají do čistě matematických až k takovým, ve kterých není matematická struktura zpočátku zřejmá a je na řešiteli, aby ji v nich rozpoznal. Je třeba zdůraznit, že uvedená definice se netýká pouze matematických znalostí na určité minimální úrovni, ale jde v ní o používání matematiky v celé řadě situací, od každodenních a jednoduchých až po neobvyklé a složité"* (Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004, str. 5).

Přesto, že postoje a emoce související s matematikou, jako například zvědavost, zájem, sebedůvěra a chtíč něco umět, nejsou podle definice zahrnuty do matematické gramotnosti, jsou pro ni velice důležitým předpokladem (Binterová, Tlustý, 2013).

Tři složky matematické gramotnosti dle Národního ústavu pro vzdělávání (2011):

- **situace a kontexty**, do kterých jsou zasazeny problémy, které má žák řešit (slouží k uplatňování matematiky v rozmanitých situacích)
- **kompetence**, které jsou potřeba k řešení problémů (matematické uvažování, matematická argumentace, matematická komunikace, modelování, vymezování problémů a jejich řešení, užívání matematického jazyka, užívání pomůcek a nástrojů)
- **matematický obsah**, který je tvořen strukturami a pojmy potřebnými k formulaci matematické podstaty problémů (kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost)

2.4.2 Matematická gramotnost v mezinárodních výzkumech

Spousta vyspělých zemí má své národní systémy pravidelného ověřování znalostí a dovedností žáků. V České republice se žádné takové zjišťování znalostí soustavně neprovádí. I přesto se dozvídáme, co čeští žáci umí a jak si ve vzdělávání stojí v porovnání se světem. Všechny tyto informace se dozvídáme pravidelně, především z mezinárodních výzkumů ve vzdělávání (Hejný, Jirotková a kol., 2010).

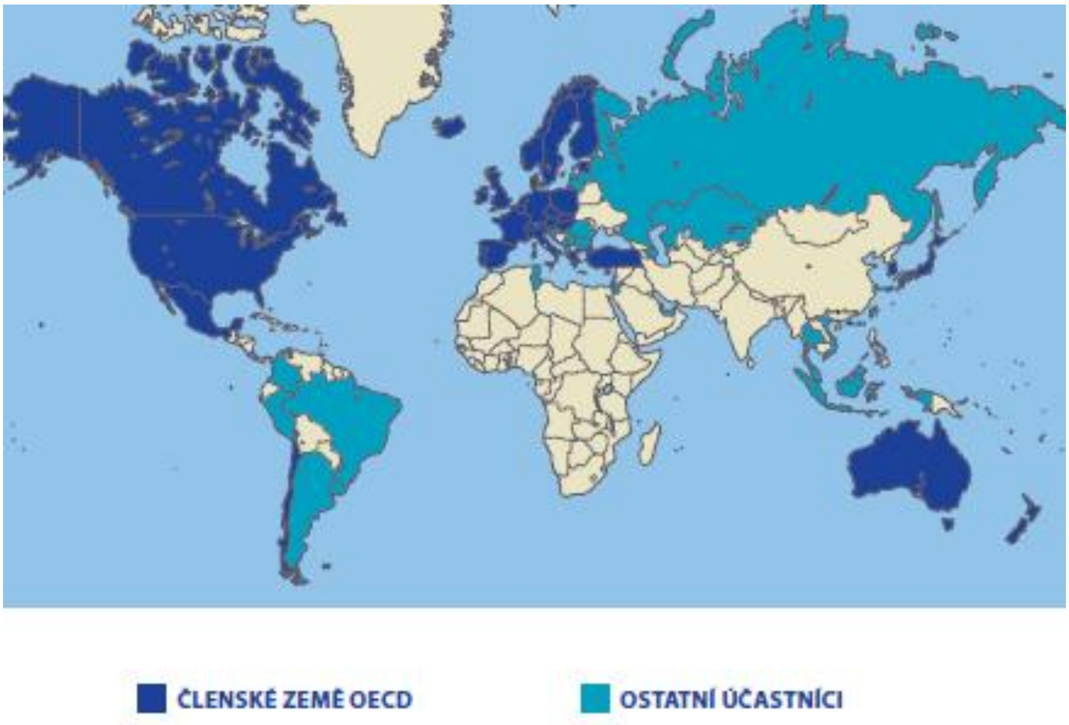
Česká republika se v současnosti účastní dvou mezinárodních výzkumů, které zjišťují úrovně vědomostí a dovedností žáků v matematice (Výzkumný ústav pedagogický, 2011). Těmi výzkumy jsou TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) a výzkum PISA (Programme for International Student Assessment).

2.4.3 Mezinárodní výzkum PISA

PISA (Programme for International Student Assessment) je mezinárodní výzkum, který zjišťuje úroveň kompetencí patnáctiletých žáků a to ve třech důležitých oblastech vzdělávání: ve čtení, v matematice a v přírodních vědách (Palečková, Tomášek, 2005). Hlavním cílem tohoto výzkumu je zjistit připravenost patnáctiletých žáků pro vstup do života. Ať již na další etapu vzdělávání, či na vstup na pracovní trh (Výzkumný ústav pedagogický, 2011).

Výzkum PISA je zajišťován Organizací pro hospodářskou spolupráci a rozvoj – OECD, jedná se o největší mezinárodní projekt současnosti (Palečková, Tomášek a kol., 2013). Fakt, že se jedná o největší mezinárodní projekt současnosti, potvrzuje i obrázek č. 2, na kterém jsou vyznačeny všechny zúčastněné země výzkumu konaného roku 2012.

Obrázek č. 2: Zúčastněné země výzkumu PISA 2012



Zdroj: Palečková, Tomášek a kol., 2013

Počátek tohoto výzkumu nastal v roce 2000. Od tohoto roku se každé tři roky ve členských zemích OECD a zemích partnerských sbírají potřebná data (Tomášek, Frýzek, 2013). Česká republika se šetření účastní od samého začátku. Testováni jsou u nás žáci posledních ročníků základních škol, také žáci odpovídajících ročníků víceletých gymnázií a žáci 1. ročníků čtyřletých středních škol.

OECD se rozhodlo pořádat výzkum PISA každé tři roky. Jak uvádí Palečková a Tomášek (2005) v každém cyklu je vždy věnovaná zvýšená pozornost jedné ze tří zkoumaných gramotností. Tímto cyklickým zkoumáním je zajištěno získání dostatečného množství informací o každé sledované gramotnosti a také zjišťování vývoje výsledků v čase (Palečková, Tomášek, 2005). Jinak řečeno, v roce 2000 se výzkum soustředil na čtenářskou gramotnost, v roce 2003 to byla matematická gramotnost a roku 2006 se do popředí dostala přírodovědná gramotnost. V roce 2009 bylo odstartované druhé kolo zjišťování, v jehož zájmu byla čtenářská gramotnost, roku 2012 opět matematická gramotnost a roku 2015 proběhne další šetření zaměřené na přírodovědnou gramotnost.

Při sestavování úloh pro výzkum PISA je kladen velký důraz na jejich rozmanitost a rovnoměrné zastoupení zjišťovaných dovedností. Úlohy PISA se výrazně odlišují od úloh, které se běžně uvádějí ve školních hodinách. Typickou úlohu výzkumu často doplňuje graf, obrázek nebo jiný materiál, se kterým se mohou žáci setkat v běžném životě (Tomášek, Frýzek, 2013). Palečková, Tomášek a kol. (2013) dodává, že v úlohách jsou zastoupeny otázky dvojího typu. Jednak otázky, ve kterých žák sám formuluje odpověď, tak otázky s výběrem jedné správné odpovědi z nabízených možností.

Samotné výsledky žáků jednotlivých zemí jsou publikovány dvěma různými způsoby: pomocí skórů (počtu bodů) nebo pomocí šesti úrovní způsobilosti, na kterých se mohou žáci nacházet (Palečková, Tomášek a kol., 2013).

2.4.4 Mezinárodní výzkum TIMSS

Kromě výzkumu PISA je v České republice známý také mezinárodní výzkum TIMSS.

Mezinárodní výzkum TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je projektem Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA), která realizuje srovnávací studie v oblasti vzdělávání (Tomášek a kol., 2012). Podle Tomáška a kol. (2008) je hlavním cílem poskytování jednotlivým účastněným zemím výzkumu informace, které jim pomáhají zvýšit úroveň vědomostí a dovedností žáků v matematice a v přírodovědných předmětech (biologie, fyzika, zeměpis, chemie).

Tomášek a kol. (2008) ještě dodává, že narozdíl od výzkumu PISA se výzkum TIMSS více zaměřuje na školní vědomosti a dovednosti. Úlohy uvedené v testech vycházejí tedy z učebních osnov zúčastněných zemí.

Projekt TIMSS se odehrává v pravidelných čtyřletých cyklech již od roku 1995. Testovací populaci výzkumu TIMSS tvoří devítiletí a třináctiletí žáci. Tomášek a kol. (2012) upřesňuje, že ve většině zemí se jedná o žáky 4. a 8. ročníků povinné školní docházky. Česká republika se výzkumu účastnila v letech 1995, 1999, 2007 a 2011.

Hejný, Jirotková a kol. (2010) uvádí, že výsledky žáků jak v matematice, tak v přírodních vědách jsou hodnoceny ze dvou pohledů: obsah a operace. Obsah je určen učivem, které je testováno, operace pak dovednostmi, které mají žáci prokázat. Hlavním zdrojem dat pro výsledky výzkumu jsou testy, které obsahují úlohy z matematiky a z přírodních věd (Tomášek a kol., 2008). U výzkumu TIMSS se setkáváme i s dalším zdrojem dat, jsou jím dotazníky zjišťující například zázemí žáků, podmínky výuky na školách a podobně (Tomášek a kol., 2012).

Výsledky výzkumu TIMSS jsou prezentovány opět dvěma způsoby: pomocí skórů (počtů bodů) nebo pomocí čtyř úrovní způsobilosti (Hejný, Jirotková a kol., 2010).

3. PRAKTICKÁ ČÁST

Praktickou část této diplomové práce tvoří sbírka úloh zaměřených na procenta. Jedná se o úlohy z matematických olympiád, korespondenčních seminářů a výzkumů PISA a TIMSS.

Protože se příklady z matematických olympiád, korespondenčních seminářů a výzkumů PISA a TIMSS od sebe typově a obtížnostně liší, je sbírka rozdělena do čtyř subkapitol. První a druhá subkapitola obsahuje příklady z testů TIMSS a PISA, třetí a čtvrtá subkapitola obsahuje složitější příklady, příklady z korespondenčních seminářů a matematických olympiád.

Celkem sbírka obsahuje 85 úloh. U každé úlohy je v závorce poznamenán zdroj, ze kterého bylo čerpáno. Všechny uvedené úlohy jsou řešené, celkem 49 řešení je vlastních a zbylých 36 řešení převzatých.

Důležité je zmínit fakt, že všechny úlohy jednotlivých subkapitol jsou řazeny podle stupně obtížnosti od těch nejjednodušších po nejsložitější. Z tohoto důvodu je každý příklad označen jednou, dvěma nebo třemi hvězdičkami. Jak bylo uvedeno výše, příklady z matematických olympiád a korespondenčních seminářů jsou obtížnější než příklady z testů PISA a TIMSS. Je tomu proto, že jsou tyto příklady určeny především pro děti na matematiku nadané. Proto obtížnost úloh se třemi hvězdičkami u matematické olympiády či korespondenčních seminářů zcela neodpovídá obtížnosti úloh se třemi hvězdičkami u testů PISA a TIMSS.

3.1 PROCENTA V ÚLOHÁCH VÝZKUMU TIMSS

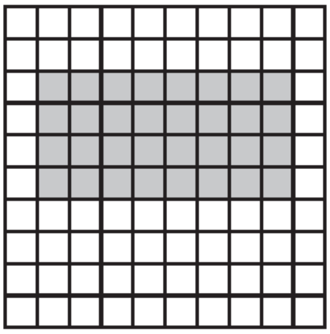
Příklad 3.1.1

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Zapiš zlomkem v základním tvaru, desetinným číslem i pomocí procent, jaká část obrazce, uvedeného na následujících obrázcích, je vybarvena.

a)

Obrázek č. 3: Příklad 3.1.1a

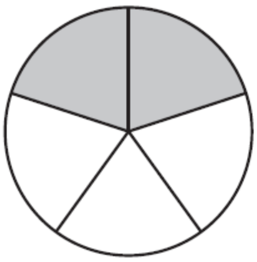


zlomek	desetinné číslo	procenta

Zdroj: Hejný, Jirotková a kol. (2010)

b)

Obrázek č. 4: Příklad 3.1.1b

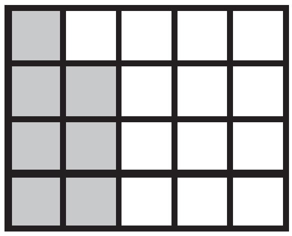


zlomek	desetinné číslo	procenta

Zdroj: Hejný, Jirotková a kol. (2010)

c)

Obrázek č. 5: Příklad 3.1.1c



zlomek	desetinné číslo	procenta

Zdroj: Hejný, Jirotková a kol. (2010)

Řešení (vlastní):

a)

počet vybarvených dílků…………….32

celkový počet dílků………………….100

$$\frac{32}{100} = \frac{8}{5}; 8 : 5 = 0{,}32; 0{,}32 \cdot 100 = 32\%$$

zlomek	desetinné číslo	Procenta
$\frac{8}{5}$	$0{,}32$	32%

b)

počet vybarvených dílků…………….2

celkový počet dílků………………….5

$$\frac{2}{5};\ 2 : 5 = 0{,}4;\ 0{,}4 \cdot 100 = 40\%$$

zlomek	desetinné číslo	Procenta
$\frac{2}{5}$	$0{,}4$	40%

c)

počet vybarvených dílků………………7

celkový počet dílků……………………20

$\frac{7}{20}$; $7 : 20 = 0{,}35; 0{,}35 \cdot 100 = 35\%$

zlomek	desetinné číslo	procenta
$\frac{7}{20}$	$0{,}35$	35%

Příklad 3.1.2

(Tomášek a kol., 2009)

První rok prodala společnost 1 426 tun umělého hnojiva. Druhý rok prodala o 15% hnojiva méně. Kolik tun umělého hnojiva přibližně prodala společnost druhý rok?

a) 200 t

b) 300 t

c) 1 200 t

d) 1 600 t

e) 1 700 t

Řešení (vlastní):

100%............................1 426 t

15%..............................x t

$$\frac{15}{100} = \frac{x}{1\,426}$$

$$100x = 15 \cdot 1\,426$$

$$100x = 21\,390$$

$$x = 213{,}9 \text{ t}$$

$1\ 426 - 213{,}9 = 1\ 212{,}1$ t

Společnost druhý rok prodala přibližně 1 200 tun umělého hnojiva.

Příklad 3.1.3

(Tomášek a kol., 2009)

Normálně stojí kabát 60 zedů. Alan si koupil kabát, když jeho cena byla snížena o 30%. Kolik zedů Alan ušetřil?

a) 18 zedů

b) 24 zedů

c) 30 zedů

d) 42 zedů

Řešení (vlastní):

100%..............................60 zedů

30%................................x zedů

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{60}$$

$$100x = 30 \cdot 60$$

$$100x = 1\ 800$$

$$x = 18 \text{ zedů}$$

Alan ušetřil 18 zedů.

Příklad 3.1.4

(Tomášek a kol., 2009)

V Zedlandu byla původní cena kabátu 120 zedů. Ve výprodeji stál kabát 84 zedů. O kolik procent byla cena kabátu snížena?

a) o 25%

b) o 30%

c) o 35%

d) o 36%

Řešení (vlastní):

$120 - 84 = 36$ zedů

120 zedů……………….100%

36 zedů…………..…….x %

$$\frac{36}{120} = \frac{x}{100}$$

$$120x = 36 \cdot 100$$

$$120x = 3\,600$$

$$x = 30\%$$

Cena kabátu byla snížena o 30%.

Příklad 3.1.5

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Cena MP4 přehrávače byla snížena o 20%. Stál pak 1 360 Kč. Kolik mohl Petr ušetřit, kdyby si koupil přehrávač až po slevě?

Řešení (vlastní):

$100 - 20 = 80\%$

80%.............................1 360 Kč

20%.............................x Kč

$$\frac{20}{80} = \frac{x}{1\,360}$$

$$80x = 20 \cdot 1\,360$$

$$80x = 27\,200$$
$$x = 340 \text{ Kč}$$

Kdyby si Petr koupil přehrávač až po slevě, ušetřil by 340 Kč.

Příklad 3.1.6

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

V jedné pizzerii v Praze poskytují v neděli 20% slevu z ceny pizzy. V neděli jsme za pizzu zaplatili 104 Kč. Kolik korun bude stát tato pizza v úterý?

Řešení (vlastní):

80%............................104 Kč

100%..........................x Kč

$$\frac{100}{80} = \frac{x}{104}$$
$$80x = 10\,400$$
$$x = 130 \text{ Kč}$$

V úterý bude tato pizza stát 130 Kč.

Příklad 3.1.7

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Časopis stál původně 104 Kč. Nyní byl zlevněn o 26 Kč. O kolik procent byl časopis zlevněn?

Řešení (vlastní):

104 Kč…………………………100%

26 Kč…………………………..x%

$$\frac{26}{104} = \frac{x}{100}$$

$$104x = 2\,600$$
$$x = 25\%$$

Časopis byl zlevněn o 25%.

Příklad 3.1.8

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Tyč je natřena čtyřmi barvami. 55% tyče je natřeno modře, 0,2 tyče zeleně, $\frac{1}{8}$ tyče je hnědá a zbylých 45 centimetrů je bílých. Jak je tyč dlouhá?

Řešení (vlastní):

celková délka tyče………………x cm

55% tyče………………………...$\frac{55}{100}x$ cm

0,2 tyče…………………………$\frac{2}{10}x$ cm

$$\frac{55}{100}x + \frac{2}{10}x + \frac{1}{8}x + 45 = x$$
$$\frac{11}{20}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{8}x + 45 = x$$
$$22x + 8x + 5x + 1\,800 = 4x$$
$$1\,800 = 5x$$
$$x = 360 \text{ cm}$$

Tyč je dlouhá 360 centimetrů.

Příklad 3.1.9

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Na pultě bylo vystaveno pět zlevněných cédéček. Cédéčko A bylo zlevněno o 12%, B o 15%, C o 20%, D o 21% a E o 28%. Když Franta vypočítal, kolik korun činí každé zlevnění, s překvapením zjistil, že je to pokaždé 42 Kč. Zjisti původní i novou cenu každého cédéčka.

Řešení (vlastní):

CD A

12%........................42 Kč

100%......................x Kč

$$\frac{100}{12} = \frac{x}{42}$$

$$12x = 4\,200$$

$$x = 350 \text{ Kč}$$

CD B

15%...............................42 Kč

100%.............................x Kč

$$\frac{100}{15} = \frac{x}{42}$$

$$15x = 4\,200$$

$$x = 280 \text{ Kč}$$

CD C

20%.........................42 Kč

100%.......................x Kč

$$\frac{100}{20} = \frac{x}{42}$$

$$20x = 4\,200$$

$$x = 210 \text{ Kč}$$

CD D

21%...................................42 Kč

100%..................................x Kč

$$\frac{100}{21} = \frac{x}{42}$$

$$21x = 4\,200$$

$$x = 200 \text{ Kč}$$

CD E

28%..........................42 Kč

100%........................x Kč

$$\frac{100}{28} = \frac{x}{42}$$

$$28x = 4\,200$$

$$x = 150 \text{ Kč}$$

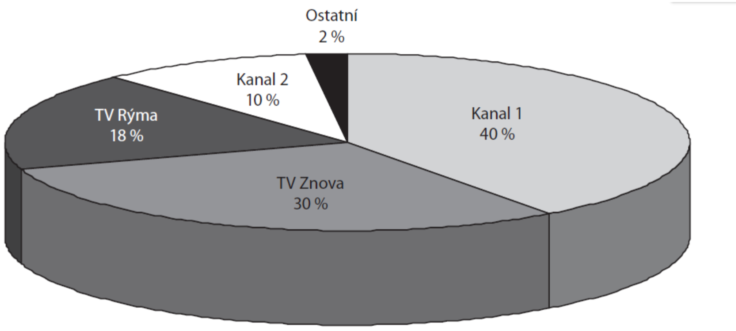
Původní cena CD A byla 350 Kč, nová cena cédéčka je 350 – 42 = 308 Kč. Původní cena CD B byla 280 Kč, nová cena cédéčka je 280 – 42 = 238 Kč. Původní cena CD C byla 210 Kč, nová cena je 210 – 42 = 168 Kč. Původní cena CD D byla 200 Kč, nová cena je 200 – 42 = 158 Kč. Původní cena CD E byla 150 Kč a jeho nová cena je 108 Kč.

Příklad 3.1.10

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Následující graf (graf č. 1) udává procentuální sledovanost vybraných TV stanic mezi diváky, kteří měli v danou dobu zapnutý svůj televizní přijímač. Televizi sledovalo 40% z 10 miliónů obyvatel.

Graf č. 1: Příklad 3.1.10



Zdroj: Hejný, Jirotková a kol. (2010)

a) Kolik lidí se dívalo na pořad v TV Ryma?

b) Kolik diváků sledovalo Kanal 1 nebo Kanal 2?

Řešení (vlastní):

Nejprve vypočítáme, kolik lidí mělo v danou dobu zapnutý svůj televizní přijímač.

100%....................................10 000 000 lidí

40%......................................x lidí

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{10\,000\,000}$$

$$100x = 400\,000\,000$$

$$x = 4\,000\,000 \text{ lidí}$$

a) Na pořad v TV Ryma se dívalo 18% lidí, kteří měli zapnutý svůj přijímač.

100%................................4 000 000 lidí

18%..................................x lidí

$$\frac{18}{100} = \frac{x}{4\,000\,000}$$

$100x = 72\,000\,000$

$x = 720\,000$ lidí

Na pořad v TV Ryma se dívalo 720 000 lidí.

b) Kanal 1 sledovalo 40% lidí a Kanal 2 10% lidí. Jedná se dohromady tedy o 50% (polovinu) lidí, kteří měli v danou dobu zapnutý přijímač.

$4\,000\,000 : 2 = 2\,000\,000$ lidí

Kanal 1 nebo Kanal 2 sledovalo 2 000 000 diváků.

Příklad 3.1.11

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Počet narozených chlapců podle porodní váhy (v gramech) udává následující tabulka (tabulka č. 1).

Tabulka č. 1: Příklad 3.1.11

1 000–1 499	1 500–1 999	2 000–2 499	2 500–2 999	3 000–3 499	3 500–3 999	4 000–4 499	4 500–4 999	5 000 a více
415	877	2 509	8 607	2 2153	19 600	6 100	732	68

Zdroj: Hejný, Jirotková a kol., 2010

Kolik vážili novorozenci nejčastěji? Kolik % chlapců mělo po porodu 4 kg a více?

Řešení (vlastní):

4kg a více mělo 6 100 + 732 + 68 = 6 900 chlapců z celkového počtu 61 061 narozených chlapců.

61 061 chlapců……………………………100%

6 900 chlapců………………………………x%

$$\frac{6\,900}{61\,061} = \frac{x}{100}$$

$61\,061x = 690\,000$

$$x = 11{,}3\%$$

Odpověď na první otázku nalezneme v tabulce: novorození chlapci nejčastěji vážili 3 000 – 3 499 gramů. Porodní váhu 4 kg a více mělo 11,3% chlapců.

Příklad 3.1.12

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Počet narozených dívek podle porodní délky (v centimetrech) uvádí následující tabulka (tabulka č. 2).

Tabulka č. 2: Příklad 3.1.12

37–38	39–40	41–42	43–44	45–46	47–48	49–50	51–52	53–54	55 +
151	305	492	1 216	3 908	11 988	23 730	12 860	2 699	253

Zdroj: Hejný, Jirotková a kol., 2010

Jaká byla nejčastější porodní délka dívek? Kolik % dívek mělo stejnou porodní délku jako Vy?

Řešení (vlastní):

Z tabulky lze vyčíst, že nejčastější porodní délka dívek byla 49 – 50 cm.

Nyní uvedeme jedno z možných řešení druhé otázky. Řešení pro porodní délku 49 – 50 cm. Celkový počet živě narozených dívek je 57 602.

57 602 dívek……………………100%

23 730 dívek…………………….x %

$$\frac{23\,730}{57\,602} = \frac{x}{100}$$

$$57\,602x = 2\,373\,000$$

$$x = 41\%$$

Stejnou porodní délku 49 – 50 cm mělo 41% narozených dívek.

Příklad 3.1.13

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Ve výprodeji je cena zboží snížena o 50%, nebo 40%, nebo 30%, nebo 20%. Snížená cena je zaokrouhlena na celé koruny. Doplň scházející údaje do tabulky (tabulka č. 3).

Tabulka č. 3: Příklad 3.1.13

Původní cena	**820**	**460**		**329**	**1 299**	**750**				
Snížená o		**40%**	**20%**		**40%**		**20%**	**30%**	**20%**	**30%**
Nová cena	**410**		**799**			**450**	**533**		**1 120**	
Ušetří se				**99**				**162**		**246**

Zdroj: Hejný, Jirotková a kol., 2010

Řešení (vlastní):

Původní cena	**820**	**460**	999	**329**	**1 299**	**750**	666	540	1 400	820
Snížená o	50%	**40%**	**20%**	30%	**40%**	40%	**20%**	**30%**	**20%**	**30%**
Nová cena	**410**	276	**799**	230	779	**450**	**533**	378	**1 120**	574
Ušetří se	410	184	200	**99**	520	300	133	**162**	280	**246**

Příklad 3.1.14

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Cena koloběžek v listopadu klesla o 20% a v dubnu jejich nová cena vzrostla o 20%. Cena lyží v listopadu stoupla o 20% a v dubnu jejich nová cena klesla o 20%. Jak se změnila cena koloběžek a jak cena lyží v důsledku dvou cenových úprav?

Řešení (vlastní):

Koloběžky

Pro lepší počítání se představíme, že původní cena koloběžek byla 100 Kč. Nejprve cena koloběžek klesla o 20% ze 100 Kč. Jejich cena v listopadu byla tedy 80 Kč. V dubnu tato nová cena vzrostla o 20%.

100%.........................80 Kč

20%...........................x Kč

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{80}$$
$$100x = 1\,600$$
$$x = 16 \text{ Kč}$$

V dubnu koloběžky stály 80 +16 = 96 Kč.

Lyže

Opět budeme za původní cenu lyží brát 100 Kč. V listopadu cena lyží stoupla o 20%, lyže tedy stály 120 Kč. V dubnu se jejich cena snížila o 20% z nové ceny.

100%.........................120 Kč

20%...........................x Kč

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{120}$$
$$100x = 2\,400$$
$$x = 24 \text{ Kč}$$

V dubnu lyže stály 120 – 24 = 96 Kč.

V důsledku dvou cenových úprav lyží i koloběžek došlo ke stejným změnám. Nová cena lyží i koloběžek je o 4% nižší, než byla jejich původní cena.

Příklad 3.1.15
(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Petr dostává každý měsíc vždy první den kapesné ve výši 250 Kč. Z toho 60% utratí a zbytek si uloží do pokladničky. Sestav tabulku zachycující vývoj jeho úspor od září do června, jestliže víš, že před Vánoci utratil navíc za dárky 155 Kč a 5. března dostal k narozeninám 600 Kč.

Na začátku letních prázdnin si chce Petr koupit MP4 přehrávač za 1 700 Kč. Kolik korun mu bude scházet?

O prázdninách byl přehrávač zlevněn tak, že stál přesně tolik, kolik měl Petr našetřeno. Jaká byla sleva?

Řešení (vlastní):

Nejprve si vypočítáme, kolik korun Petr každý měsíc utratí.

100%................................250 Kč
60%..................................x Kč

$$\frac{60}{100} = \frac{x}{250}$$
$$100x = 15\,000$$
$$x = 150 \text{ Kč}$$

Každý měsíc Petr utratí 150 Kč.

	září	říjen	listopad	prosinec	leden	únor	březen	duben	květen	červen
počáteční stav	0	100	200	300	245	345	445	1 145	1 245	1 345
příjem	250	250	250	250	250	250	850	250	250	250
výdej	150	150	150	305	150	150	150	150	150	150
konečný stav	100	200	300	245	345	445	1 145	1 245	1 345	1 445

úspory Petra……………………..……..1 445 Kč
cena přehrávače……………………..……1 700 Kč
cenový rozdíl…………………….………1 700 – 1 445 = 255 Kč

Petrovi chybí ke koupi přehrávače 255 Kč.

původní cena přehrávače……………1 700 Kč
cena přehrávače o prázdninách…..…..1 445 Kč

1 700 Kč…………………………………100%
1 445 Kč…………………………………x%

$$\frac{1\,445}{1\,700} = \frac{x}{100}$$
$$1\,700x = 144\,500$$
$$x = 85\%$$

O prázdninách byl MP4 přehrávač zlevněn o 100 – 85 = 15%.

Příklad 3.1.16
(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

V Zedlandu, kde se platí zedy, jsou progresivní daně z příjmu stanoveny takto: Z prvních 100 zedů se platí 10%, z druhých 100 zedů 15%, ze třetích 100 zedů 20%, z peněz nad 300 zedů se platí 25%.

Jaká je mzda po zdanění (čistá mzda), když mzda před zdaněním (hrubá mzda) je

a) 200 zedů

b) 300 zedů

c) 400 zedů

d) 160 zedů

e) 380 zedů

f) 520 zedů

Řešení (vlastní):

10% ze 100 zedů = 10 zedů

15% ze 100 zedů = 15 zedů

20% ze 100 zedů = 20 zedů

a) 200 – 10 (z prvních 100 zedů) – 15 (z druhých 100 zedů) = 175 zedů

b) 300 – 10 (z prvních 100 zedů) – 15 (z druhých 100 zedů) – 20 (z třetích 100 zedů) = 255 zedů

c) 25% ze 100 zedů = 25 zedů

400 – 10 (z prvních 100 zedů) – 15 (z druhých 100 zedů) – 20 (z třetích 100 zedů) – 25 (z čtvrtých 100 zedů) = 330 zedů

d) 15% z 60 zedů = 60 · 0,15 = 9 zedů

160 – 10 (z prvních 100 zedů) – 9 (z dalších 60 zedů) = 141 zedů

e) 25% z 80 zedů = 80 · 0,25 = 20 zedů

380 – 10 (z prvních 100 zedů) – 15 (z druhých 100 zedů) – 20 (z třetích 100 zedů) – 20 (z dalších 80 zedů) = 315 zedů

e) 25% ze 220 zedů = 220 · 0,25 = 55 zedů

520 – 10 (z prvních 100 zedů) – 15 (z druhých 100 zedů) – 20 (z třetích 100 zedů) – 55 (z dalších 320 zedů) = 420 zedů

Příklad 3.1.17

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

V roce 2008 vyrobila firma Kleine 10 400 výrobků, zatímco firma Gross 128 000. Na konci roku 2009 se šéf firmy Kleine chlubil, že v tomto roce zvýšil výrobu o 10%, kdežto firma Gross jen o 3%. V roce 2010 firma Kleine vyrobila 12 470 výrobků a firma Gross 135 984.

a) O kolik výrobků zvýšila v roce 2009 svoji produkci každá z firem?

b) O kolik procent zvýšila každá firma svoji produkci v roce 2010 oproti roku 2009?

Řešení (vlastní):

<u>Firma Kleine</u>

Kleine 2008……………………..10 400 výrobků

Kleine 2009……………………..$1{,}1 \cdot 10\,400 = 11\,440$ výrobků

Kleine 2010……………………..12 470 výrobků

11 440 výrobků…………………………...100%

12 470 výrobků……………………………x%

$$\frac{12\,470}{11\,440} = \frac{x}{100}$$

$$11\,440x = 1\,247\,000$$

$$x = 109\%$$

Firma Klaine zvýšila v roce 2009 svoji produkci o 11 440 – 10 400 = 1 040 výrobků. V následujícím roce 2010 svoji produkci zvýšila o 9%.

<u>Firma Gross</u>

Gross 2008………………………..128 000 výrobků

Gross 2009………………………..$1{,}03 \cdot 128\,000 = 131\,840$ výrobků

Gross 2010………………………..135 984 výrobků

131 840 výrobků…………………………...100%

135 984 výrobků…………………………...x%

$$\frac{135\,984}{131\,840} = \frac{x}{100}$$

$$131\,840x = 13\,598\,400$$

$$x = 103\%$$

Firma Gross zvýšila v roce 2009 svoji produkci o 131 840 – 128 000 = 3 840 výrobků. V následujícím roce 2010 svou produkci zvýšila o 3%.

Příklad 3.1.18

(Hejný, Jirotková a kol., 2010)

Ubytování v hotelu Orel stojí na den pro dospělého 1 420 Kč a pro dítě do 10 let jen 75% této ceny. V hlavní sezóně jsou ceny o 30% vyšší. Kolik zaplatí za týdenní pobyt v hlavní sezóně rodina (rodiče + 2 děti do 10 let), když se výsledná suma zaokrouhluje na stovky?

Řešení (vlastní):

Cena v hlavní sezóně pro dospělého na den:

100%...1 420 Kč

130%...x Kč

$$\frac{130}{100} = \frac{x}{1\,420}$$

$$100x = 184\,600$$

$$x = 1\,846 \text{ Kč}$$

Cena v hlavní sezóně pro dítě do 10 let na den:

100%...1 846 Kč

75%...x Kč

$$\frac{75}{100} = \frac{x}{1\,846}$$

$$100x = 138\,450$$

$$x = 1\,384{,}5 \text{ Kč}$$

Celková cena pro dva dospělé a dvě děti do 10 let za týden pobytu: $7 \cdot (2 \cdot 1\,846 + 2 \cdot 1\,384{,}5) = 7 \cdot 6\,461 = 45\,227$ Kč. Při zaokrouhlení výsledné sumy na stovky dostáváme cenu 45 200 Kč.

3.2 PROCENTA V ÚLOHÁCH VÝZKUMU PISA

Příklad 3.2.1
(Tomášek a Frýzek, 2013)

Na světě je 95% zboží přepravováno po moři přibližně 50 000 tankery, nákladními a kontejnerovými loděmi. Většina těchto lodí jezdí na motorovou naftu. Inženýři chtějí pro tyto lodě vyvinout podpůrný větrný pohon. Navrhují připevnit k lodi tažného draka, který bude sloužit jako plachta, a využít tak sílu větru ke snížení spotřeby nafty a jejího negativního vlivu na životní prostředí.

Tažný drak má tu výhodu, že létá ve výšce 150 m. V této výšce je rychlost větru přibližně o 25% vyšší než na palubě lodi. Jaká je přibližná rychlost větru, který pohání draka, jestliže na palubě lodi naměřili rychlost větru 24 km/h?

a) 6 km/h
b) 18 km/h
c) 25 km/h
d) 30 km/h
e) 49 km/h

Řešení (vlastní):

100%..........................24 km/h
120%..........................x km/h

$$\frac{120}{100} = \frac{x}{24}$$
$$100x = 3\,000$$

$x = 30$ km/h

Rychlost větru, která pohání draka je 30 km/h.

Příklad 3.2.2

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Jeden pár tučňáků snese obvykle dvě vejce ročně. Většinou přežije pouze mládě, které se vylíhne z většího z obou vajec. U tučňáků skalních váží první vejce přibližně 78 g a druhé přibližně 110 g. Přibližně o kolik procent je druhé vejce těžší než první vejce?

a) o 29%

b) o 32%

c) o 41%

d) o 71%

Řešení (vlastní):

78 g…………………100%

110 g…………………x%

$$\frac{110}{78} = \frac{x}{100}$$

$$78x = 11\ 000$$

$$x = 141\%$$

Druhé vejce je těžší o 141 – 100 = 41% než vejce první.

Příklad 3.2.3

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Společnost Electrix vyrábí dva druhy elektronických přístrojů: videopřehrávače a audio přehrávače. Na konci výrobní směny jsou přehrávače testovány a ty, které jsou vadné, jsou staženy a poslány k opravě. Tabulka (tabulka č. 4) ukazuje průměrný počet obou druhů přehrávačů, které jsou vyrobeny za jednu směnu, a průměrné procento vadných přehrávačů za jednu směnu.

Jeden z kontrolorů tvrdí: „Počet poslaných videopřehrávačů do opravy za jednu směnu je v průměru vyšší než počet audio přehrávačů poslaných do opravy za jednu směnu.“ Rozhodni, zda má kontrolor pravdu či nikoliv. Svou odpověď matematicky zdůvodni.

Tabulka č. 4: Příklad 3.2.3

Typ přehrávače	**Průměrný počet přehrávačů vyrobených za jednu směnu**	**Průměrné procento vadných přehrávačů za jednu směnu**
Videopřehrávač	2 000	5 %
Audio přehrávač	6 000	3 %

Zdroj: Tomášek, Frýzek, 2013

Řešení (vlastní):

Videopřehrávače

100%.................................2 000 ks

5%.....................................x ks

$$\frac{5}{100} = \frac{x}{2\,000}$$

$$100x = 10\,000$$

$$x = 100 \text{ ks}$$

Audio přehrávače

100%.................................6 000 ks

3%.....................................x ks

$$\frac{3}{100} = \frac{x}{6\,000}$$

$$100x = 18\,000$$

$$x = 180 \text{ ks}$$

Kontrolor pravdu neměl, za jednu směnu je vyšší počet vadných audio přehrávačů – 180 kusů.

Příklad 3.2.4

(Tomášek a Frýzek, 2013)

V tabulce (tabulka č. 5) vidíš údaje o počtu domácností vybavených televizí v pěti zemích. V tabulce je dále uvedeno, kolik procent domácností vybavených televizí má zároveň předplacenou kabelovou televizi.

Tabulka č. 5: Příklad 3.2.4

Země	Počet domácností **vybavených televizí**	Počet procent domácností **vybavených televizí** ze **všech domácností**	Počet procent domácností **s předplacenou kabelovou televizí** ze všech domácností **vybavených televizí**
Japonsko	48,0 milionu	99,8 %	51,4 %
Francie	24,5 milionu	97,0 %	15,4 %
Belgie	4,4 milionu	99,0 %	91,7 %
Švýcarsko	2,8 milionu	85,8 %	98,0 %
Norsko	2,0 milionu	97,2 %	42,7 %

Zdroj: Tomášek, Frýzek, 2013

V této tabulce se uvádí, že 85,8% domácností ve Švýcarsku je vybaveno televizí. Který odhad je podle údajů z tabulky nejblíže celkovému počtu domácností ve Švýcarsku?

a) 2,4 milionu

b) 2,9 milionu

c) 3,3 milionu

d) 3,8 milionu

Řešení (vlastní):

85,8%...........................2,8 milionu

100%............................x milionu

$$\frac{100}{85{,}8} = \frac{x}{2{,}8}$$

$85{,}8x = 280$

$x \doteq 3{,}3$ milionu

Celkový počet domácností ve Švýcarsku je přibližně 3,3 milionu.

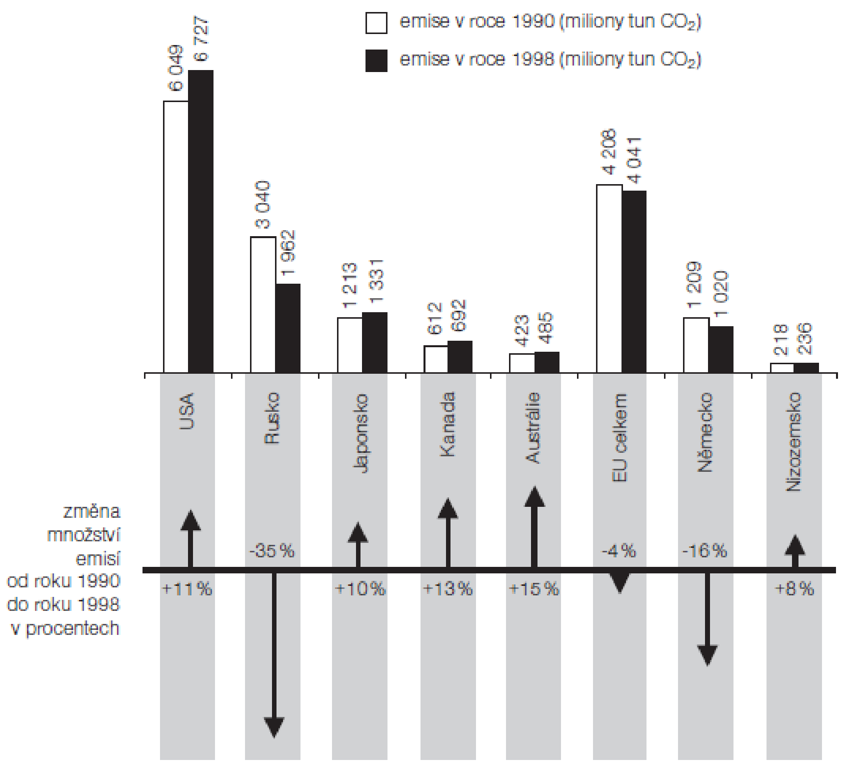
Příklad 3.2.5

(Ústav pro informace ve vzdělávání, 2006)

Mnoho vědců se obává, že zvyšující se množství CO_2 v naší atmosféře způsobuje změnu podnebí. Následující diagram (graf č. 2) udává množství CO_2 v roce 1990 (světlé sloupce) v některých zemích (nebo oblastech), množství emisí v roce 1998 (tmavé sloupce) a změnu množství emisí od roku 1990 do roku 1998 v procentech (šipky s procenty).

Z diagramu můžeme vyčíst, že nárůst emisí CO_2 od roku 1990 do roku 1998 činil v USA 11%. Provedením výpočtu ukaž, jak se došlo k uvedeným 11%.

Graf č. 2: Příklad 3.2.5



Zdroj: Tomášek, Frýzek, 2013

Řešení (vlastní):

6 049………………………100%

6 727……………………… x%

$$\frac{6\,727}{6\,049} = \frac{x}{100}$$

$$6\,049x = 672\,700$$

$$x = 111\%$$

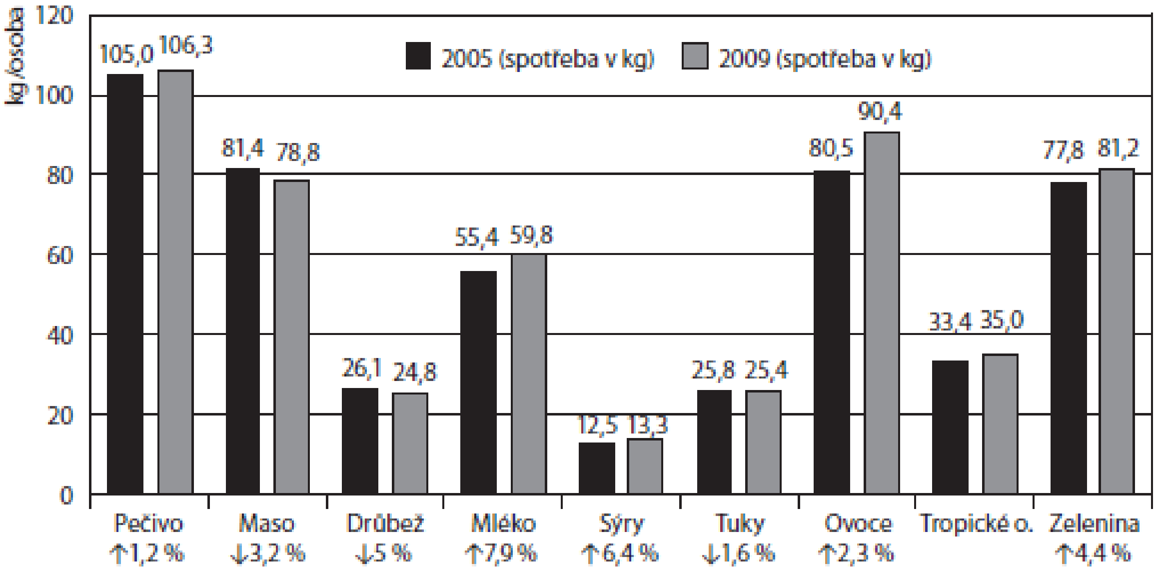
Protože 111 – 100 = 11%, činil nárůst CO_2 v USA právě 11%.

Příklad 3.2.6

(Hejný, Jirotková a kol., 2012)

Někteří odborníci se obávají, že se stravovací návyky obyvatel ČR vyznačují vysokou spotřebou tuků a cukrů a malou spotřebou ovoce a zeleniny, což souvisí s vysokým výskytem civilizačních chorob. Následující diagram (graf č. 3) udává spotřebu potravin na jednoho obyvatele v ČR v roce 2005 a v roce 2009 a její změnu v procentech.

Graf č. 3: Příklad 3.2.6



Zdroj: Hejný, Jirotková a kol., 2012

a) U tropického ovoce chybí údaj o změně spotřeby v procentech. Doplň scházející údaj do diagramu.

b) Tomáš prohlásil, že našel chybu v údajích o procentech. Pokles spotřeby drůbežího masa (5%) je větší než pokles celkové spotřeby masa (3,2%). To není možné, když drůbeží maso je jen jeden z druhů masa. Souhlasíš s Tomášem? Své rozhodnutí zdůvodni.

Řešení (vlastní):

a)

33,4……………………….100%

35………………………..x%

$$\frac{35}{33{,}4} = \frac{x}{100}$$

$$33{,}4x = 3\,500$$

$$x = 104{,}8\%$$

Jelikož statistický údaj o spotřebě tropického ovoce z roku 2009 byl vyšší než ten, z roku 2005 a 104,8 – 100 = 4,8%, doplníme do diagramu ↑ 4,8%.

b)

S Tomášem nesouhlasím. Spotřeba ostatních druhů masa mohla například poklesnout mnohem méně, nebo dokonce mohla vzrůst. Drůbeží maso tvoří jen asi třetinu spotřeby masa, ostatní druhy masa mohou změnu více ovlivnit.

Příklad 3.2.7

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Obchod Planeta hudby má výprodej. Při nákupu dvou nebo více kusů zboží odečte 20% z běžné prodejní ceny těchto kusů. Prodejní cenu zboží můžeme vidět na obrázku č. 6.

Obrázek č. 6: Příklad 3.2.7

Zdroj: Tomášek, Frýzek, 2013

Jakub může utratit 200 zedů. Co si může ve výprodeji koupit?

a) MP3 přehrávač a sluchátka

b) MP3 přehrávač a reproduktory

c) všechny 3 výrobky – MP3 přehrávač, sluchátka a reproduktory

Řešení (vlastní):

a)

MP3 přehrávač + sluchátka = 155 + 86 = 241 zedů

Jelikož Jakub dostane slevu 20%, zaplatí z celkové ceny zboží pouze 80%.

100%...........................241 zedů

80%.............................x zedů

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{241}$$

$$100x = 19\,280$$

$$x = 192{,}8 \text{ zedů}$$

MP3 přehrávač a sluchátka si Jakub může koupit.

b)

MP3 přehrávač + reproduktory = 155 +79 = 234 zedů

Jelikož Jakub dostane slevu 20%, zaplatí z celkové ceny zboží pouze 80%.

100%...........................234 zedů

80%.............................x zedů

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{234}$$

$$100x = 18\,720$$

$$x = 187{,}2 \text{ zedů}$$

Jakub si může koupit také MP3 přehrávač a reproduktory.

c)

MP3 přehrávač + reproduktory + sluchátka = 155 + 79 + 86 = 320 zedů

Jelikož Jakub dostane slevu 20%, zaplatí z celkové ceny zboží pouze 80%.

100%...........................320 zedů

80%..............................x zedů

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{320}$$

$$100x = 25\,600$$

$$x = 256 \text{ zedů}$$

Všechny tři výrobky si Jakub koupit nemůže.

Příklad 3.2.8

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Fotografa zajímá, jak se v příštích letech změní velikost populace v kolonii tučňáků. Při svých výpočtech vychází z těchto předpokladů:

- Na začátku roku má kolonie 10 000 tučňáků (5 000 párů).
- Každý rok na jaře vyvede každý pár tučňáků jedno mládě.
- Během roku uhyne 20% všech tučňáků (dospělých i mláďat).

Kolik tučňáků (dospělých i mláďat) bude v kolonii na konci prvního roku?

Řešení (vlastní):

10 000 tučňáků + 5 000 mláďat = 15 000 tučňáků (dospělých i mláďat)

Z 15 000 tučňáků během roku uhyne 20%, to znamená, že na konci prvního roku bude v kolonii 80% tučňáků z 15 000.

100%............................15 000 tučňáků
80%..............................x tučňáků

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{15\ 000}$$
$$100x = 1\ 200\ 000$$
$$x = 12\ 000 \text{ tučňáků}$$

Na konci prvního roku bude v kolonii 12 000 tučňáků.

Příklad 3.2.9
(Tomášek a Frýzek, 2013)

V hlavním městě Zedlandu uvažují o stavbě několika větrných elektráren na výrobu elektrické energie. Městská radnice získala informace o následujícím typu elektrárny.

Typ:	E-82
Výška stožáru:	138 metrů
Počet lopatek vrtule:	3
Délka jedné lopatky vrtule:	40 metrů
Maximální rychlost otáčení:	20 otáček za minutu
Stavební náklady:	3 200 000 zedů
Zisk z 1 kWh vyrobené energie:	0,10 zedu
Náklady na údržbu 1 kWh vyrobené energie:	0,01 zedu
Využití:	V provozu 97% roku

Rozhodni, zda můžeš tvrzení o větrné elektrárně E-82 odvodit z uvedených informací. Na každé tvrzení odpověz ano nebo ne.

a) Náklady na údržbu větrné elektrárny odpovídají přibližně 5% zisku z vyrobené energie.

b) Přesně 97 dní v roce není větrná elektrárna v provozu.

Řešení (vlastní):

a)

0,1 zedu…………………………100%

0,01 zedu………………………..x%

$$\frac{0{,}01}{0{,}1} = \frac{x}{100}$$

$$0{,}1x = 1$$

$$x = 10\%$$

Tvrzení, že náklady na údržbu větrné elektrárny odpovídají přibližně 5% zisku z vyrobené energie, není správné. Náklady odpovídají 10% zisku.

b)

Elektrárna je v provozu 97% roku. Proto přesně 3% roku v provozu není.

100%............................365 dní

3%................................x dní

$$\frac{3}{100} = \frac{x}{365}$$

$$100x = 1\,095$$

$$x = 10{,}95 \text{ dní}$$

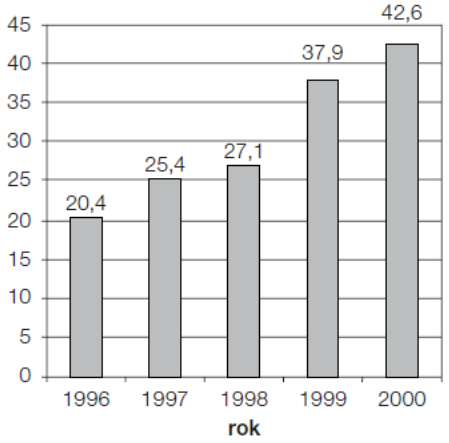
Druhé tvrzení, že přesně 97 dní v roce není větrná elektrárna v provozu, také není pravdivé. Větrná elektrárna není v provozu přibližně 11 dní v roce.

Příklad 3.2.10

(Ústav pro informace ve vzdělávání, 2006)

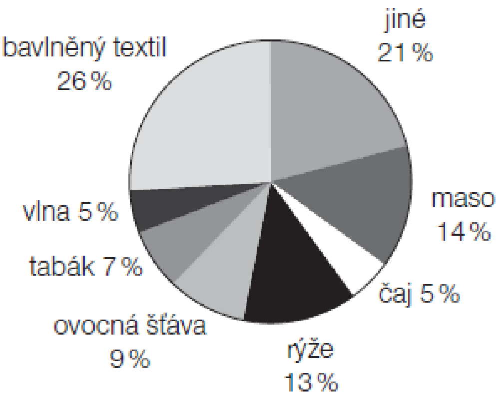
Následující grafy (graf č. 4 a graf č. 5) uvádějí informace o vývozu ze Zedlandie, kde se jako měna užívají zedy.

Graf č. 4: Příklad 3.2.10a



Zdroj: ÚIV, 2006

Graf č. 5: Příklad 3.2.10b



Zdoj: ÚIV, 2006

Jaká byla hodnota ovocné šťávy vyvezené ze Zedlandie v roce 2000?

a) 1,8 milionu zedů

b) 2,3 milionu zedů

c) 2,4 milionu zedů

d) 3,4 milionu zedů

e) 3,8 milionu zedů

Řešení (vlastní):

Z prvního grafu je zřejmé, že hodnota vyvezeného zboží ze Zedlandie byla v roce 2000 42,5 milionů zedů. Z druhého grafu zjistíme, kolik procent z vyvezeného zboží tvořila ovocná šťáva = 9%.

100%............................42,5 milionů

9%................................x milionů

$$\frac{9}{100} = \frac{x}{42{,}5}$$

$$100x = 382{,}5$$

$$x = 3{,}825$$

$x \doteq$ 3,8 milionů zedů

Hodnota ovocné šťávy vyvezené v roce 2000 byla přibližně 3,8 milionu zedů.

Příklad 3.2.11

(Ústav pro informace ve vzdělávání, 2006)

V Zedlandii byly před prezidentskými volbami prováděny průzkumy, které zjišťovaly voličskou podporu stávajícího prezidenta. Čtvery noviny provedly nezávisle průzkumy. Zde jsou jejich výsledky:

- 1. noviny: 36,5% (průzkum byl proveden 6. ledna na 500 náhodně vybraných občanech s volebním právem)
- 2. noviny: 41,0% (průzkum byl proveden 20. ledna na 500 náhodně vybraných občanech s volebním právem)
- 3. noviny: 39,0% (průzkum byl proveden 20. ledna na 1 000 náhodně vybraných občanech s volebním právem)
- 4. noviny: 44,5% (průzkum byl proveden 20. ledna na 1 000 čtenářích, kteří volali do redakce)

Který z uvedených průzkumů asi nejlépe předpovídá šance prezidenta ve volbách, které se budou konat 25. Ledna? Uveď dva důvody pro vysvětlení své odpovědi.

Řešení:

Nejlépe předpovídá šance prezidenta ve volbách průzkum uveřejněný ve třetích novinách. Tento průzkum je aktuálnější, provedený na větším vzorku, vzorek je náhodně vybraný, dotazováni byli jen voliči.

Tato netradiční úloha poukazuje na využití procent v běžném životě. Při vyhodnocování průzkumu nezáleží pouze na počtu procent, ale i na dalších uvedených informacích.

Příklad 3.2.12
(Tomášek a Frýzek, 2013)

Kvůli vysoké ceně nafty (0,42 zedu za litr) zvažují majitelé nákladní lodi Oceánská pěna vybavit loď tažným drakem. Odhaduje se, že tento typ tažného draka by mohl snížit celkovou spotřebu nafty přibližně o 20%.

Jméno: Oceánská pěna
Typ: nákladní loď
Délka: 117 metrů
Šířka: 18 metrů
Nosnost: 12 000 tun
Maximální rychlost: 19 uzlů
Roční spotřeba nafty bez použití tažného draka: přibližně 3 500 000 litrů

Vybavení Oceánské pěny tažným drakem vyjde na 2 500 000 zedů. Přibližně za kolik let by peníze ušetřené za motorovou naftu pokryly cenu tažného draka? Svou odpověď zdůvodni výpočtem.

Řešení (vlastní):

Roční spotřeba nafty bez použití tažného draka: 3 500 000 · 0,42 = 1 470 000 zedů. Při použití tažného draka se ročně ušetří 20% nákladů na palivo.

100%................................1 470 000 zedů
20%..................................x zedů

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{1\,470\,000}$$

$$100x = 29\,400\,000$$

$$x = 294\,000 \text{ zedů}$$

2 500 000 : 294 000 = 8,5 let

Přibližně za 8 a půl roku by peníze ušetřené za motorovou naftu pokryly cenu tažného draka.

Příklad 3.2.13

(Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004)

Karel si šel koupit bundu, která normálně stojí 50 zedů a byla zlevněna o 20%. V Zedlandii se platí při prodeji ještě 5% daň. Prodavač nejprve přičetl 5% daň k ceně bundy a pak odečetl 20%. Karel protestoval. Chtěl, aby prodavač nejprve odečetl 20% slevu a pak vypočetl 5% daň. Je v tom rozdíl?

Řešení (vlastní):

Podle prodavače:

100%..............................50 zedů

105%..............................x zedů

$$\frac{105}{100} = \frac{x}{50}$$

$$100x = 5\,250$$

$$x = 52{,}5 \text{ zedů}$$

100%................................52,5 zedů

80%..................................x zedů

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{52{,}5}$$

$$100x = 4\,200$$

$$x = 42 \text{ zedů}$$

Podle Karla:

100%.............................50 zedů

80%................................x zedů

100%...................................40 zedů

105%...................................x zedů

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{50}$$

$$100x = 4\,000$$

$$x = 40 \text{ zedů}$$

$$\frac{105}{100} = \frac{x}{40}$$

$$100x = 4\,200$$

$$x = 42 \text{ zedů}$$

V obou případech celková cena bundy činní 42 zedů, rozdíl v postupu není.

Příklad 3.2.14

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Do běžné prodejní ceny MP3 přehrávače je započítán také zisk prodejce ve výši 37,5%. Cena bez tohoto zisku se nazývá velkoobchodní cena. Výše zisku se vypočítá jako určitý počet procent z velkoobchodní ceny. Vyjadřují vzorce v tabulce (tabulka č. 6) správně vztah mezi velkoobchodní cenou v a běžnou prodejní cenou p?

V každém řádku zakroužkuj „Ano“ nebo „Ne“.

Tabulka č. 6: Příklad 3.2.14

Vzorec	Je vzorec správný?
$p = v + 0{,}375$	Ano / Ne
$v = p\text{-}0{,}375p$	Ano / Ne
$p = 1{,}375v$	Ano / Ne
$v = 0{,}625p$	Ano / Ne

Zdroj: Tomášek, Frýzek, 2013

Řešení (vlastní):

Správný vztah mezi velkoobchodní cenou a běžnou prodejní cenou vyjadřuje pouze v pořadí třetí vzorec $p = 1{,}375v$.

Příklad 3.2.15

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Jean předpokládá, že se kolonie tučňáků bude dále zvětšovat tímto způsobem:

- Na začátku každého roku bude v kolonii stejný počet samiček a samečků, kteří se spárují.
- Každý rok na jaře vyvede každý pár tučňáků jedno mládě.
- Během roku uhyne 20% všech tučňáků (mláďat i dospělých).
- Také jednoletí tučňáci vyvádějí mláďata.

Na základě těchto předpokladů urči, který vztah vyjadřuje velikost populace tučňáků T za 7 let.

a) $T = 10\,000 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}2)^7$

b) $T = 10\,000 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}8)^7$

c) $T = 10\,000 \cdot (1{,}2 \cdot 0{,}2)^7$

d) $T = 10\,000 \cdot (1{,}2 \cdot 0{,}8)^7$

Řešení (vlastní):

Správný vztah vyjadřující velikost populace tučňáků je $T = 10\,000 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}8)^7$.

Příklad 3.2.16

(Hejný, Jirotková a kol., 2012)

Meteorologové dlouhodobě sledují počty tropických dnů (teplota vystoupí nad 30°C) a počty ledových dnů (teplota nevystoupí nad 0°C) za rok. V období let 1991 až 2000 stoupl průměrný počet tropických dnů na 9,7 dne za rok, což je o 5,8 dnů za rok více než ve srovnání s obdobím let 1981 až 1990. Počet ledových dnů naopak v období let 1991 až 2000 poklesl o 8,3% ve srovnání s lety 1981 až 1990, kdy bylo průměrně 35,3 ledového dne za rok.

Která ze změn je větší, když ji vyjádříme počtem dnů? Která ze změn je větší, když ji vyjádříme v %? Jaká znaménka můžeme změnám přiradit? Kolik bylo průměrně za rok tropických dnů v období let 1981 až 1990? Kolik bylo průměrně za rok ledových dnů v letech 1991 až 2000?

Řešení (vlastní):

tropické dny 2. období……………9,7 dní

tropické dny 1. období……………9,7 – 5,8 = 3,9 dní

3,9 dní…...100%

5,8 dní…………………………………x%

$$\frac{5,8}{3,9} = \frac{x}{100}$$

$$3,9x = 580$$

$$x = 148,7\%$$

V 2. období tropických dnů došlo k nárůstu o 148,7 – 100 = 48,7%.

ledové dny 2. období………………pokles o 8,3%

ledové dny 1. období………………35,3 dní

100%...35,3 dní

8,3%..x dní

$$\frac{8,3}{100} = \frac{x}{35,3}$$

$$100x = 292,99$$

$$x \doteq 2,9 \text{ dní}$$

Pokles ledových dnů v druhém období = 35,3 – 2,9 = 32,4 dní.

Pokud změny vyjádříme počtem dnů, větší změna je u tropických dnů (5,8 dní). Pokud změny vyjádříme v %, opět je větší změna zaznamenána u tropických dnů (48,7%). U tropických dnů se jedná o změnu rostoucí, přiřadíme kladné znaménko (+48,7%). U ledových dnů je změna klesající, přiřadíme záporné znaménko (-8,3%). V období let 1981 až 1990 bylo průměrně za rok 3,9 dnů tropických. V období v letech 1991 až 2000 bylo průměrně za rok 32,4 dní ledových.

Příklad 3.2.17

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Společnost Electrix vyrábí dva druhy elektronických přístrojů: videopřehrávače a audio přehrávače. Na konci výrobní směny jsou přehrávače testovány a ty, které jsou vadné, jsou staženy a poslány k opravě. V tabulce (tabulka č. 7) vidíš průměrný počet obou druhů přehrávačů, které jsou vyrobeny za jednu směnu a průměrné procento vadných přehrávačů za jednu směnu.

Tabulka č. 7: Příklad 3.2.17

Typ přehrávače	**Průměrný počet přehrávačů vyrobených za jednu směnu**	**Průměrné procento vadných přehrávačů za jednu směnu**
Videopřehrávač	2 000	5 %
Audio přehrávač	6 000	3 %

Zdroj: Tomášek, Frýzek, 2013

Jestliže vybereme náhodně jeden audio přehrávač vyrobený během jedné směny, pravděpodobnost, že bude potřebovat opravit je 0,03. Je toto tvrzení pravdivé?

Řešení (vlastní):

K zjištění pravděpodobnosti potřebujeme znát, kolik se vyrobí vadných audio přehrávačů za celou směnu = 3% z 6 000.

100%..............................6 000 ks

3%..................................x ks

$$\frac{3}{100} = \frac{x}{6\,000}$$

$$100x = 18\,000$$

x =180 vadných audio přehrávačů

Nyní můžeme údaje vložit do vzorečku pro vypočítání pravděpodobnosti.

P = $\frac{180}{6\,000} = 0{,}03$

Tvrzení, že pravděpodobnost je 0,03 je tedy správné.

Příklad 3.2.18

(Tomášek a Frýzek, 2013)

Společnost Tronics stejně jako Electrix vyrábí videopřehrávače a audio přehrávače. Na konci výrobní směny jsou testovány i přehrávače společnosti Tronics a ty, které jsou vadné, jsou staženy a poslány k opravě. Následující tabulka (tabulka č. 8) porovnává průměrné počty obou typů přehrávačů vyrobených za jednu výrobní směnu a průměrné procento vadných výrobků za jednu výrobní směnu v obou společnostech.

Tabulka č. 8: Příklad 3.2.18

Společnost	**Průměrný počet videopřehrávačů vyrobených za jednu směnu**	**Průměrné procento vadných výrobků za jednu směnu**
Electrix	2 000	5 %
Tronics	7 000	4 %

Společnost	**Průměrný počet audio přehrávačů vyrobených za jednu směnu**	**Průměrné procento vadných výrobků za jednu směnu**
Electrix	6 000	3 %
Tronics	1 000	2 %

Zdroj: Tomášek, Frýzek, 2013

Která z těchto dvou společností (Electrix a Tronics) má celkově nižší procento vadných přehrávačů? Použij údaje z tabulky a napiš postup výpočtu.

Řešení (vlastní):

Firma Electrix

5% z 2 000 = 100 ks

3% z 6 000 = 180 ks

Celkem 100 + 180 = 280 vadných přehrávačů z 8 000 vyrobených.

8 000 ks……………………………100%

280 ks……………………………….x%

$$\frac{280}{8\,000} = \frac{x}{100}$$

$$8\,000x = 28\,000$$

$$x = 3{,}5\%$$

Firma Tronics

4% z 7 000 = 280 ks

2% z 1000 = 20 ks

Celkem 280 + 20 = 300 vadných přehrávačů z 8 000 vyrobených.

8 000 ks……………………..100%

300 ks……………………….x%

$$\frac{300}{8\,000} = \frac{x}{100}$$

$$8\,000x = 30\,000$$

$$x = 3{,}75\%$$

Celkově nižší procento vadných přehrávačů má firma Electrix.

3.3 PROCENTA V ÚLOHÁCH KORESPONDENČNÍCH SEMINÁŘŮ

Příklad 3.3.1 (http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/8.-rocnik/)

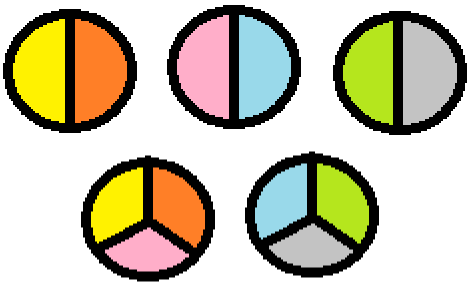
Šest dětí se má rozdělit o pět koláčů tak, aby každé mělo stejnou část a zároveň, aby se žádný koláč nedělil na šest dílků. Kolik dostane každé dítě a kolik to bude procent vzhledem k jednomu koláči? Znázorněte, jak byste dělili koláče.

Řešení (vlastní):

Obrázek č. 7 znázorňuje možné rozdělení koláčů.

Každé z šesti dětí dostane $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ koláče (tj. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ koláče).

Obrázek č. 7: Řešení 3.3.1



Zdroj: vlastní tvorba

1……………………100%

$\frac{5}{6}$……………………..x%

$$\frac{\frac{5}{6}}{1} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{500}{6}$$

$$x \doteq 83\%$$

Každé dítě dostane $\frac{5}{6}$ koláče, což je 83% vzhledem k jednomu koláči.

Příklad 3.3.2

(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/8.-rocnik/)

Nacházíme se na místě, kde písek tvoří 18% pevniny, po dalších 15 kilometrech už bude písek tvořit 33% pevniny. Kolik procent bude písek tvořit po 33 kilometrech?

Řešení:

Když víme, že po 15 kilometrech se navýší obsah písku o 33 – 18 = 15%, je pak zřejmé, že co kilometr, to jedno procento písku.

Chceme-li znát obsah písku po 33 kilometrech, bude to původních 18% zvětšených o 33%, tedy 18 + 33 = 51 %.

Po 33 kilometrech bude písek tvořit 51% pevniny.

Příklad 3.3.3

(http://www.matesonline.wz.cz/download.php)

Daidalos nechal vyhlásit hlasování o nejlepším umělci z Athén. $\frac{1}{3}$ voličů volila Tala, $\frac{1}{4}$ volila Daidala, $\frac{1}{5}$ volila Homéra, $\frac{1}{6}$ volila Anakreona a zbylých 60 mužů volilo Feidiase. Kolik lidí se zúčastnilo voleb? Kolik procent z celkového počtu obyvatel se zúčastnilo voleb, jestliže v Athénách žilo 14 250 lidí?

Řešení (vlastní):

počet voličů……………………..x

voliči Tala………………………$\frac{1}{3}x$

voliči Daidala………………….. $\frac{1}{4}x$

voliči Homéra………………….. $\frac{1}{5}x$

voliči Anakreona………………. $\frac{1}{6}x$

voliči Feidiase…………………. 60

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + 60 = x$$

$$20x + 15x + 12x + 10x + 3\,600 = 60x$$

$$52x + 3\,600 = 60x$$

$$x = 450 \text{ voličů}$$

Celkem volilo 450 lidí z 14 250 obyvatel Athén.

14 250 lidí…………………..100%

450 lidí………………………x%

$$\frac{450}{14\,250} = \frac{x}{100}$$

$$14\,250x = 45\,000$$

$$x = 3{,}16\%$$

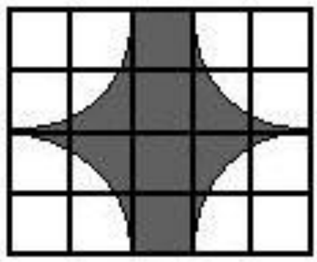
Voleb se zúčastnilo 3,16% obyvatel.

Příklad 3.3.4

(http://mks.gjkt.cz/mks/matboj-2013)

Kolik procent obsahu obdélníku (obrázek č. 8) je vybarveno? Strana čtverce je 1 cm.

Obrázek č. 8: Příklad 3.3.4



Zdroj: http://mks.gjkt.cz/mks/matboj-2013

Řešení (vlastní):

obsah obdélníku…………….$S = 4 \cdot 5 = 20\ cm^2$

obsah šrafované plochy…….$S_1 = 20 - \pi \cdot 2^2 = 7{,}44\ cm^2$

20 cm^2…………………………...100%

7,44 cm^2………………………….x%

$$\frac{7{,}44}{20} = \frac{x}{100}$$

$$20x = 744$$

$$x = 37{,}2\%$$

Vybarveno je 37,2% obsahu obdélníku.

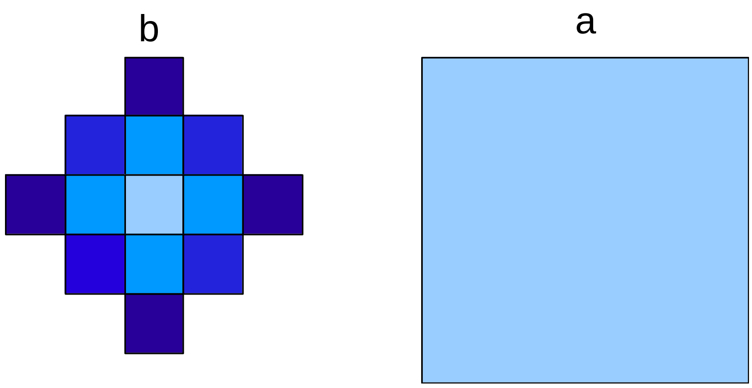
Příklad 3.3.5

(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/8.-rocnik/)

a) Spočítejte rozdíl v procentech povrchu 13 kostiček, které jsou na obrázku č. 9 složeny do tvaru hvězdy, a povrchu krychle o rozměru a = 10 cm, když víte, že rozměr b u hvězdy je 2 cm.

b) Pokud dáme do krychle menší krychli, která bude mít vrcholy přesně ve středech dané krychle, kolik procent bude tvořit její povrch vzhledem k původní krychli?

Obrázek č. 9: Příklad 3.3.5



Zdroj: http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/8.-rocnik/

Řešení (vlastní):

a)

$S_{krychle} = 6a^2$

$S_{krychle} = 600\ cm^2$

$S_{krychliček} = 13 \cdot 6 \cdot b^2$

$S_{krychliček} = 312\ cm^2$

600 cm^2…………………..100%

312 cm^2…………………..x%

$$\frac{312}{600} = \frac{x}{100}$$

$$600x = 31\,200$$

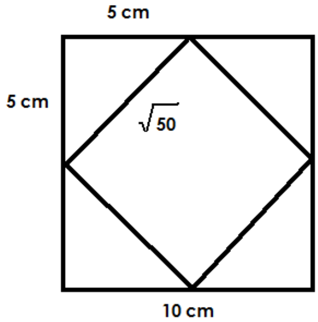
$$x = 52\%$$

Obsah krychliček tvoří 52% obsahu krychle. Rozdíl mezi povrchy je 100 – 52 = 48%.

b)

Z následujícího obrázku (obrázek č. 10) je zřejmé, jak velká bude hrana menší krychle.

Obrázek č. 10: Řešení 3.3.5



Zdroj: vlastní tvorba

Jedna stěna menší krychle má plochu $\sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 50\ cm^2$. Celá krychle má tedy plochu $6 \cdot 50 = 300\ cm^2$. Menší krychle tvoří 50% obsahu krychle větší.

Příklad 3.3.6
(http://www.pikomat.unas.cz/ulohy/)

Výrobci Tatranek jsou dobří obchodníci. Původní Tatranky měly 50 gramů, prodávaly se za 5 Kč a zisk výrobce na jedné Tatrance byl jedna koruna. Přitom desetina nákladů byla na obal Tatranek. Potom začali prodávat ve stejném obalu za stejnou cenu Tatranky, které už mají jen 40 gramů. O kolik se tímto opatřením zvýšil zisk výrobce z jedné Tatranky? Kolik je to v korunách a kolik je to v procentech?

Řešení:

Původní Tatranky měly 50 gramů a prodávaly se za 5 Kč. Z toho 1 Kč byl zisk obchodníků a zbylé 4 Kč tvořily náklady na výrobu. Jelikož na obal sušenky připadala jedna desetina nákladů, stál obal 0,4 Kč. Zbytek, tedy 3,6 Kč, stála výroba sušenky o hmotnosti 50 gramů.

Jestliže nové Tatranky váží 40 gramů a prodávají se ve stejném obalu za stejnou cenu, tj. 5 Kč, připadá na náklady na obal opět 0,4 Kč. Náklady na výrobu sušenky se snížily ve stejném poměru, jako se snížila hmotnost sušenky, tedy na 2,88 Kč. Zbytek do pěti korun připadá na zisk obchodníků. Zisk je proto 1,72 Kč.

Zisk obchodníků se zvýšil o 0,72 Kč.

1 Kč………………………..100%

0,72 Kč…………………….x%

$$\frac{0{,}72}{1} = \frac{x}{100}$$

$$x = 72\ \%$$

Zisk obchodníků se zvýšil o 72%.

Příklad 3.3.7

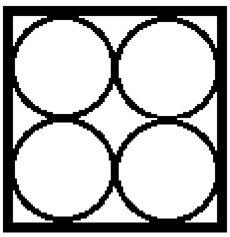
(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/12.-rocnik/)

V naší ZOO můžete najít skleněné akvárium tvaru krychle o délce strany 1 m. Uvnitř je umístěno 8 barevných těžkých koulí, kolem kterých mohou rybky proplouvat, tak, že jsou natěsno naskládány do krychlového akvária (tedy 2x2x2). Určete, kolik litrů vody bude v akváriu, když bude voda až po okraj a kolik procent z objemu akvária voda tvoří.

Řešení (vlastní):

Ze zadání plyne, že koule jsou v akváriu naskládány natěsno. Abychom mohli spočítat objem jedné koule, potřebujeme vědět její poloměr. Dno akvária představuje obrázek č. 11.

Obrázek č. 11: Řešení 3.3.7



Zdroj: vlastní tvorba

délka strany akvária…………………..1 m

d koule………………………………..50 cm

r koule………………………………...25 cm

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi 25^3$$

$$V_{koule} = 65\,449{,}8\ cm^3$$

objem 1 koule…………………………65 449,8 cm^3

objem 8 koulí………………………….523 598,4 cm^3

objem akvária………………………….1 000 000 cm^3

objem vody v akváriu…………………1 000 000 – 523 598,4 = 476 401,6 cm^3

1 000 000 cm^3………………………………100%

476 401,6 cm^3……………………………….x%

$$\frac{476\,401{,}6}{1\,000\,000} = \frac{x}{100}$$

$$1\,000\,000x = 47\,640\,160$$

$$x = 47{,}64016\ \%$$

$$x \doteq 48\%$$

Voda v akváriu naplněném po okraj má objem 476 401,6 cm^3 = 476 l, což je 48% z celkového objemu akvária.

Příklad 3.3.8

(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/12.-rocnik/)

Dneska mi dovezli zrní pro dvanáct slepic, které jim vydrží na patnáct dní. Za šest dní mi ale dovezou další tři nové slepice. Na jak dlouho jim to jídlo vystačí, když každá žere stejně? A kolik procent z původního objemu potravy bych musel přidat, aby jídlo vydrželo i od šestého dne pro všechny slepice na plánovaných patnáct dní?

Řešení (vlastní):

Situace za šest dní:

12 slepic………………9 dní

15 slepic………………x dní

$$\frac{15}{12} = \frac{9}{x}$$

$$15x = 108$$

$$x = 7{,}2 \doteq 7 \text{ dní}$$

Pokud se šestý den přidají tři slepice, krmivo jim vystačí ještě na 7 dní.

Celkem tedy dovezené krmivo vystačí slepicím na 13 dní.

Abychom zjistili, o kolik procent více je potřeba objednat krmiva, budeme vycházet z předchozího výsledku.

12 slepic………………100% krmiva……………15 dní

15 slepic………………100% krmiva……………13 dní

15 slepic………………x% krmiva………………15 dní

$$\frac{15}{13} = \frac{x}{100}$$

$$13x = 1\,500$$

$$x \doteq 115\%$$

Aby jídlo vydrželo všem slepicím na 15 dní, muselo by se objednat o 15% potravy víc.

Příklad 3.3.9
(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/8.-rocnik/)

Oslovím každého turistu, co kolem mě projde. Každý pátý se u mě zastaví. Z těch, co se u mě zastaví, mi každý třetí dá nějaké peníze a každý druhý z těch, co mi dá peníze, ode mě vyžaduje moje služby průvodce. Kolik procent z turistů se u mě zastaví, kolik procent mi dá nějaké peníze a kolik procent vyžaduje moje služby?

Řešení (vlastní):

každý pátý se zastaví……………………...20% se zastaví
každý třetí z 20% dá peníze…….………....20 : 3 = 6,66%
každý druhý z 6,66 vyžaduje služby………6,66 : 2 = 3,33%

Zastaví se 20% turistů, 6,66% turistů dá nějaké peníze a 3,33% turistů vyžaduje služby průvodce.

Příklad 3.3.10
(http://kokos.gmk.cz/serie)

Sledování filmu Zitě tentokrát zabralo 135 minut. Ve scénách, kde nevystupovala Zitina oblíbená postava, upravila rychlost promítání tak, že se jejich délka zkrátila o pět procent. Ve scénách, které byly nudné, a navíc bez jejího oblíbeného hrdiny, upravila Zita rychlost promítání tak, že se jejich délka zkrátila o deset procent. Ve filmu tvořily scény s jejím oblíbeným hrdinou $\frac{4}{7}$ celkového času. Scén zrychlených o 10% bylo 2x více, než těch zrychlených o 5%. Jaká byla původní délka filmu a kolik času Zita ušetřila?

Řešení:

délka filmu před úpravou…………………x
délka filmu po úpravě……………………..135 minut
neupravované scény……………………….$\frac{4}{7}x$

Zbývající $\frac{3}{7}x$ rozdělíme v poměru 2:1.

scény zrychlené o 10%...............................$\frac{2}{7}x$

scény zrychlené o 5%.................................$\frac{1}{7}x$

$$\frac{4}{7}x + \frac{90}{100} \cdot \frac{2}{7}x + \frac{95}{100} \cdot \frac{1}{7}x = 135$$

$$4x + 0{,}9 \cdot 2x + 0{,}95x = 945$$

$$6{,}75x = 945$$

$$x = 140 \text{ minut}$$

Původní délka filmu byla 140 minut, upravováním bylo tudíž ušetřeno 5 minut.

Příklad 3.3.11

(http://komar.math.muni.cz/archive/)

První den v dílně chybělo 10% ze všech pracovníků a vyrobilo se 224 ks výrobků. Druhý den chybělo dvakrát více pracovníků a každý pracovník vyrobil o 8% více výrobků než předchozí den. Kolik výrobků bylo vyrobeno druhý den?

Řešení (vlastní):

První den 90% pracovníků vyrobilo 224 kusů výrobků. Jeden pracovník tedy vyrobil 2,5 kusů výrobků. Druhý den pracovalo 80% pracovníků a každý pracovník vyrobil o 8% výrobků více.

$2{,}5 \cdot 1{,}08 = 2{,}7$ ks

$2{,}7 \cdot 80 = 216$ výrobků

Druhý den bylo vyrobeno 216 výrobků.

Příklad 3.3.12

(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/9.-rocnik/)

Do sypacího auta se mi vejde 6 tun kouzelného prášku, musím ho ředit v poměru 3:5 s vodou. Pokud jedu rychlostí 60 km/h spotřebuji 12% této směsi za hodinu. Musím ale předem udat, kolik vody spotřebuji a kolik kilometrů cest posypu, poradíte mi?

Řešení (vlastní):

Podle uvedeného poměru představuje 6 tun kouzelného prášku tři díly. Vodu představuje pět dílů, tedy 10 tun vody (6 : 3 = 2, 2 · 5 = 10), což je 10 000 litrů vody.

Při rychlosti 60 km/h ujede řidič za hodinu 60 km a spotřebuje 12% sypací směsi, vyjádříme tedy, kolik ujede při spotřebování 100% směsi.

12%..........................60 km

100%........................x km

$$\frac{100}{12} = \frac{x}{60}$$

$$12x = 6\,000$$

$$x = 500 \text{ km}$$

Sypací auto potřebuje 10 000 litrů vody a celkem posype 500 kilometrů cest.

Příklad 3.3.13

(Zhouf a kol., 1999)

Vstoupili jsme do místnosti o objemu 15 m^3. Vzduch obsahoval 20% kyslíku. V místnosti nás bylo pět a každý vdechl a vydechl dvacetkrát za minutu. Při každém vdechu se spotřebuje 0,1 litru kyslíku. Jak dlouho vydržíme, když se při 10% kyslíku ve vzduchu už začneme dusit?

Řešení:

V místnosti bylo 20% kyslíku z 15 m^3.

100%................................15 m^3

20%...................................x m^3

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{15}$$

$$100x = 300$$

$$x = 3 \text{ m}^3$$

V místnosti byly 3 m^3 kyslíku. Dusit se začneme při 1,5 m^3 kyslíku v místnosti. Za minutu spotřebujeme $5 \cdot (20 \cdot 0{,}1$ litrů$)$ = 10 litrů = 0,01 m^3 kyslíku. Do kyslíkového limitu můžeme spotřebovat ještě 3 – 1,5 = 1,5 m^3 kyslíku. A protože 1,5 : 0,01 = 150, zbývá nám ještě 150 minut = 2,5 hodiny.

Příklad 3.3.14

(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/11.-rocnik/)

V určitém měsíci bylo toto počasí: 95% chladno, 85% déšť, 75% zamračeno, 65% bezvětří. Kolik bylo dní, kdy bylo zaručeně zároveň chladno, zamračeno, bezvětří a i pršelo?

Řešení (vlastní):

Krajní případ situace si znázorníme na měsíci, který má 30 dní.

chladno…………….95% ze 30 = $0{,}95 \cdot 30 = 28{,}5 \doteq 29$ dní
déšť………………...85% ze 30 = $0{,}85 \cdot 30 = 25{,}5 \doteq 26$ dní
zamračeno…………75% ze 30 = $0{,}75 \cdot 30 = 22{,}5 \doteq 23$ dní
bezvětří…………….65% ze 30 = $0{,}65 \cdot 30 = 19{,}5 \doteq 20$ dní

Chladno bylo 29 dní, to znamená 1. – 29. den bylo chladno.
Pršelo 26 dní, tedy 30. den a 1. – 25. den.

Zamračeno bylo celkem 23 dní, tedy 26. – 30. den a 1. – 18. den.
Bezvětří trvalo 20 dní v měsíci, tedy 19. – 30 den a 1. – 8. den.

Zároveň chladno, deštivo, zamračeno a bezvětří bylo 1. – 8. den a 19. – 25. den = 15 dní. Jednalo se o krajní případ, nejmenší počet dní v měsíci je tedy 15 a největší 20.

Příklad 3.3.15

(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/8.-rocnik/)

Představte si tyto tři tělesa: kužel, válec a polokoule. Poloměr válce je 50 m a jeho výška je 250% poloměru. Objem polokoule je stejný jako objem válce. Poloměr kužele je stejný jako poloměr polokoule a výška kužele je o 55% větší než výška válce. Jaký má kužel objem?

Řešení (vlastní):

Válec:

r = 50 m

v = 250% z 50 m = 2,5 · 50 = 125 m

$$V = \pi r^2 v$$

$$V = \pi \cdot 50^2 \cdot 125$$

$$V = 981\ 748\ m^3$$

Polokoule:

V = 981 748 m^3

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$981\ 748 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$r = 77{,}7 m$$

Kužel:

r = 77,7 m

v = 155% z 125 m = 1,55 · 125 = 193,75 m

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

$$V = 1\ 224\ 933\ m^3$$

Objem kužele je 1 224 933 m^3.

Příklad 3.3.16

(Zhouf a kol., 2006)

Když začala stávka stavitelů pyramid, zbývalo do ukončení prací 80 dnů. Stávka trvá již patnáct dnů. Stavitelé požadují zvýšení hodinové mzdy ze 30 omnipoliských korun na 40 omnipoliských korun. Pokud by byly jejich požadavky vyslyšeny, budou pracovat o pětinu rychleji, tedy stihnou ji postavit za dobu o pětinu kratší. Panovník se rozhodl zvýšit celkové výdaje mzdy stavitelů o 7 procent. Ukončí stavitelé stávku? Stihne se pyramida postavit v plánované době?

Řešení:

počet stavitelů……………………………………………………..……p
počet hodin, které odpracuje jeden stavitel za jeden den……………h

Původní výdaje na mzdy jsou

80 dní · s stavitelů · h hodin · 30 omnipoliských korun = $2\,400 \cdot s \cdot h$.

Po patnácti dnech stávky se panovník rozhodl zvýšit výdaje na mzdy o 7%. Zvýšené výdaje na mzdu jsou $2\,400 \cdot s \cdot h \cdot 1{,}07 = 2\,568 \cdot s \cdot h$.

Nyní zjistíme, za jak dlouho stavitelé dostaví pyramidu, pokud budou splněny jejich požadavky. Stihnou ji postavit za dobu o pětinu kratší, tzn. za $\frac{4}{5} \cdot 80 = 64$ dní. Nové výdaje na mzdu jsou určeny na 64 pracovních dní, z toho plyne, že nová hodinová mzda je $\frac{2\,568 \cdot s \cdot h}{64 \cdot s \cdot h} = 40{,}125$ omnipoliských korun, což je více, než požadují stavitelé (40 omnipoliských korun). Tedy stavitelé přestanou stávkovat a dostaví pyramidu. Budou ji stavět 64 dní, spolu s 15 dny stávky to je 79 dní. Stihnou ji tak dostavět v plánované době 80 dní.

Příklad 3.3.17

(http://pikomat.mff.cuni.cz/archiv/)

Chodba je dlouhá 40 metrů. Na začátku má šířku 2 metry a po každých 40 centimetrech se na každé straně zubatě rozšiřuje o 5 cm. Dlaždice mají rozměry 40 x 40 cm. Pokud by část dlaždice přesahovala přes okraj chodby, je odříznuta a odložena na kolečko (tato odříznutá část dlaždice už nesmí být použita jinde). Kolik nejméně dlaždic by bylo potřeba na vydláždění celé chodby? Kolik procent celkové plochy všech použitých dlaždic tvoří odříznuté části?

Řešení:

Chodba je dlouhá 40 m a dlaždice má rozměry 0,4 m x 0,4 m. Na vydláždění chodby tedy bude stačit 40 : 0,4 = 100 řad dlaždic. Po každé řadě se chodba rozšíří o 5 cm + 5 cm = 10 cm = 0,1 m. O celou dlaždici se rozšíří po každých čtyřech řadách.

Podíváme se, kolik dlaždic bude potřeba na první čtyři řady a kolik bude z každé řady odpadu. Řady jsou dlouhé 200, 210, 220 a 230 cm. Bude na ně potřeba 5, 6, 6 a 6 dlaždic. Z první řady nebude žádný odpad, ve druhé řadě bude potřeba z poslední dlaždice uříznout 30 cm (tj. $\frac{3}{4}$ dlaždice), ve třetí řadě 20 cm (tj. $\frac{1}{2}$ dlaždice) a ve čtvrté řadě 10 cm (tj. $\frac{1}{4}$ dlaždice). Celkem tedy na první čtyři řady spotřebujeme 5 + 6 + 6 + 6 = 23 dlaždic a odpadu bude $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ dlaždic.

Další čtyři řady poskládáme obdobně. Jediný rozdíl bude v tom, že počáteční řada bude tvořena šesti dlaždicemi. Na druhou čtveřici bude potřeba 6 + 7 + 7 +7 = 23 + 1 · 4 = 27 dlaždic, na třetí čtveřici 7 + 8 + 8 + 8 = 23 + 2 · 4 = 31 dlaždic a tak dále. Na každou další čtveřici je potřeba o 4 dlaždice více, než na tu předchozí. Řad je 100, takže čtveřic bude 25. Na poslední dvacátou pátou čtveřici bude potřeba 23 + 24 · 4 = 119 dlaždic.

Celkem na celou chodbu bude potřeba 27 + 31 + 35 + … + 119 dlaždic. To je aritmetická posloupnost, která se dá sečíst pomocí vzorce $s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$, kde n je počet prvků posloupnosti, a_1 je její první prvek a a_n je její poslední prvek. Po dosazení

$$s_n=\frac{25}{2}(23+119)=1\,775\text{ dlaždic.}$$

Odpad, kterého bude celkem $25\cdot\frac{3}{2}=\frac{75}{2}$ dlaždic, tvoří $\frac{\frac{75}{2}}{1\,775}\cdot 100 \doteq 2{,}11\%$ všech použitých dlaždic.

Příklad 3.3.18

(http://pikomat.mff.cuni.cz/archiv/)

Podle statistik má 70% mužů tmavé vlasy, 75% mužů má hnědé oči, 85% mužů je vyšších než 178 cm a 90% mužů má hmotnost menší než 100 kg. Jaké procento mužů má zaručeně všechny čtyři vlastnosti?

Řešení:

Celou situaci znázorníme na vzorku 100 mužů, které očíslujeme 1 – 100. Přezkoumáme nejhorší možný případ.

- Nechť muži 1 – 70 mají tmavé vlasy (to je 70% ze 100).
- 75% ze 100 mužů má hnědé oči. Nejhorší případ nastane tehdy, když z nich co nejvíc nebude mít tmavé vlasy. Nechť tedy 71 – 100 a muži 1 – 45 mají tmavé vlasy.
- 85 mužů (85% ze 100) má mít výšku alespoň 178 cm. Nejhorší případ nastane, když co nejvíce z nich je mimo první 45, kteří mají první dvě vlastnosti. Nechť tedy výšku větší než 178 cm mají muži 46 – 100 a 1 – 30.
- 90 mužů (90% ze 100) má mít váhu menší než 100 kg. Nechť jsou to muži 31 – 100 a tedy ještě 20 mužů z těch, kteří mají první tři vlastnosti. Tito muži budou mít tedy zaručeně všechny čtyři vlastnosti.

20% mužů bude mít určitě všechny vlastnosti.

Příklad 3.3.19

(http://pikomat.mff.cuni.cz/archiv/)

Kouzelník nakreslil na tabuli veliký kruh a dal čtyřem přítomným čtyři křídy: červenou, zelenou, modrou a žlutou. Otočil se zády a požádal je, aby červenou křídou zaplnili $\frac{2}{3}$ kruhu, zelenou $\frac{3}{4}$, modrou $\frac{4}{5}$ a žlutou $\frac{5}{6}$ (mohli kreslit přes sebe).

Pak, aniž by se otočil, řekl, kolik procent je minimálně zamalováno všemi barvami. A měl pravdu. Jaké číslo kouzelník řekl? (Určitě řekl to největší možné).

Řešení:

Kouzelník řekl největší možné číslo, aby měl jistotu, že je všemi barvami zamalováno alespoň tolik, musel říci minimální plochu.

Minimální plochu zamalovanou čtyřmi barvami získáme tak, že zamalujeme $\frac{2}{3}$ červeně. Pak čistou $\frac{1}{3}$ zeleně a bude $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ červenozelené plochy. Modře pak zamalujeme nejprve $\frac{7}{12}$ jednobarevných a zbude $\frac{4}{5}-\frac{7}{12}=\frac{13}{60}$ trojbarevných. Nakonec žlutě zamalujeme nejdříve $\frac{47}{60}$ dvoubarevných a zbude $\frac{5}{6}-\frac{47}{60}=\frac{3}{60}$ čtyřbarevné.

$$\frac{3}{60}=3:60=0{,}05=5\%$$

Kouzelník řekl číslo 5.

Příklad 3.3.20
(http://kokos.gmk.cz/serie)

V sáčku bylo 5 druhů gumových medvídků. Víme, že žlutých je o 4 více než oranžových, a zároveň o 2 méně než bílých. Kdyby bylo bílých o 10 méně, zelení by tvořili o 5% více než nyní. Kdyby bylo bílých o 10 více, červení by tvořili 10%, zatímco nyní tvoří 12%. Kolik je kterých medvídků?

Řešení:

Víme, že kdyby bylo bílých medvídků o 10 víc (to znamená, že celkový počet medvídků je +10), červení by tvořili 10%, zatímco teď tvoří 12%. Můžeme to zapsat dvěma rovnicemi:

$$\frac{x+10}{100}\cdot 10\% = Č,$$
$$\frac{x}{100}\cdot 12\% = Č,$$

kde x je celkový počet medvídků, Č je počet červených medvídků. Obě tyto rovnice vyjadřují počet červených medvídků, porovnáním získáváme

$$\frac{x+10}{100} \cdot 10\% = \frac{x}{100} \cdot 12\%.$$

Vyřešením rovnice zjišťujeme, že celkový počet všech medvídků x je 50. Víme, že 12% z padesáti je 6, což je počet červených medvídků.

Dále víme, že pokud by bílých bylo o 10 míň, tedy 40, tvořili by zelení o 5% více. Dostáváme rovnici

$$\frac{50}{100} \cdot y\% = \frac{50-10}{100} \cdot (y+5)\%,$$

kde y je procento zelených medvídků. Vyřešením zjistíme, že zelení medvídci nyní tvoří 20% z padesáti, což je 10 medvídků.

Žlutých je o čtyři více než oranžových a zároveň o dva méně než bílých. Můžeme to zapsat jako

$$O = \check{Z} - 4,$$
$$B = \check{Z} + 2.$$

Do rovnice

$$\check{Z} + O + B = 34$$

dosadíme předchozí dva vztahy, tudíž dostaneme

$$\check{Z} + \check{Z} - 4 + \check{Z} + 2 = 34.$$

Z této rovnice vypočítáme, že Ž = 12. Nakonec dopočítáme počet bílých medvídků (Ž + 2 = 14) a oranžových medvídků (Ž – 4 = 8).

V sáčku bylo 6 medvídků červených, 10 zelených, 12 žlutých, 8 oranžových a 14 bílých.

Příklad 3.3.21

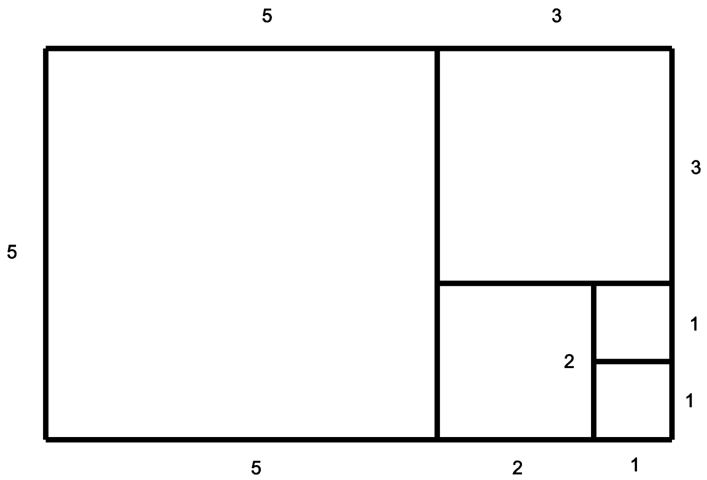
(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/12.-rocnik/)

Petr měl papír pravoúhelníkového tvaru (čtverec nebo obdélník). Odstřihl z něj největší možný čtverec a vyhodil jej do odpadu. Ze zbytku opět odstřihl největší možný čtverec a vyhodil jej do odpadu. Když i potřetí ze zbytku odstřihl největší možný čtverec a vyhodil jej do odpadu, zbyly mu v rukou dva stejně veliké čtverce. Kolik procent původního papíru celkem hodil do odpadu?

Řešení (vlastní):

Obrázek č. 12 ukazuje jeden z mnohých konkrétních příkladů Petrova papíru.

Obrázek č. 12: Řešení 3.3.19



Zdroj: vlastní tvorba

obsah celého papíru……………….$5 \cdot 8 = 40\ cm^2$

obsah vyhozených čtverců………...$25 + 9 + 4 = 38\ cm^2$

40 cm^2………………………………….100%

38 cm^2…………………………………..x

$$\frac{38}{40} = \frac{x}{100}$$

$$40x = 3\,800$$

$$x = 95\%$$

Petr vyhodil do odpadu 95% původního papíru.

Příklad 3.3.22

(http://kokos.gmk.cz/serie)

Billy se při jídle nechal unášet myšlenkami. Vzpomněl si na jednu bankoví loupež, o které kdysi slyšel v televizi. 12 lupičů tehdy vykradlo banku. Ukradli určitou sumu peněz, kterou si chtěli rovnoměrně rozdělit mezi sebe. Museli však odvést daň 15% Bossovi podsvětí. Navíc se o svůj díl z ukradených peněz přihlásili také 3 další lidé – popelář, řidič a hodinář. Po tom, co se ukradená suma peněz rovnoměrně rozdělila mezi všech 15 spolupachatelů, si původních 12 lupičů všimlo, že zdaněním a vyplacením odměny pro popeláře, řidiče a hodináře přišli každý o 480 Kč. Jaká suma peněz byla ukradena?

Řešení:

celková ukradená částka…………………………………....x Kč

částka, kterou by dostal lupič bez dělení a danění……….$\frac{x}{12}$ Kč

částka, která zbyla každému z 15 lidí po zdanění………..$\frac{0,85x}{15}$ Kč

rozdíl obou částek……………………………………..480 Kč

$$\frac{x}{12} = \frac{0,85x}{15} + 480$$

$$x = 18\,000 \text{ Kč}$$

Celkově bylo ukradeno 18 000 Kč.

Příklad 3.3.23

(http://kokos.gmk.cz/serie)

Bylo léto a Billymu se zdálo, že z toho všeobklopujícího vedra začal na vteřinku blouznit. Zničehonic před sebou uviděl výjev z dětství – ve škole měli 55% chlapců a 45% dívek. Když jednou jeli na školní výlet, tak 15% všech dívek a 5% všech chlapců jelo vlakem. Billy se snažil vzpomenout si, kolik dívek a kolik chlapců tehdy vlakem jelo, ale vzpomněl si jen na to, že ve škole určitě nestudovalo více než 400 dětí.

Z uvedených údajů pomoc Billymu přijít na to, kolik dívek a kolik chlapců tehdy jelo vlakem.

Řešení:

celkový počet dětí ve škole………………..x

chlapci…………………………………..$\frac{55}{100}x = \frac{11}{20}x$

dívky…………………………………..$\frac{45}{100}x = \frac{9}{20}x$

Dále ze zadání víme, že vlakem jelo 5% všech chlapců a 15% všech dívek, tedy $\frac{11}{400}x$ chlapců a $\frac{27}{400}x$ dívek. Ze zadání také vyplývá, že $x \leq 400$. Protože čísla, která udávají počet dívek a chlapců, kteří jeli vlakem a studují ve škole, musí být přirozená, existuje pro x jediné možné řešení, a to $x = 400$.

Vlakem tedy jelo 11 chlapců a 27 dívek.

Příklad 3.3.24
(http://www.kos-ujep.estranky.cz/clanky/kategorie-junior/zadani-serii/8.-rocnik/)

První řada v hledišti je široká 50m. Druhá řada je o 5% širší. Třetí řada je zas o 5% širší než druhá. O kolik procent je širší 30-tá řada než řada první? Jak je 30-tá řada široká?

Řešení:

1. řada………………..50 metrů

2. řada………………..1. řada + 5%

3. řada………………..2. řada + 5%

30. řada………………$x\%, y$ metrů

Pokud víme, jakým způsobem narůstá délka každé řady, lze jednoduchým způsobem vypočítat, jak bude dlouhá poslední řada.

30. řada $= 50 \cdot 1{,}05^{30} = 216{,}10$ metrů

50 metrů…………………….100%

216,10 metrů………………..x

$$\frac{216{,}10}{50} = \frac{x}{100}$$
$$50x = 21\,610$$
$$x = 432{,}10\%$$

432,10 – 100 = 332,10%.

Třicátá řada je širší o 332,10% než řada první a šířka řady je 216,10 metrů.

3.4 PROCENTA V ÚLOHÁCH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Příklad 3.4.1

(Repáš a kol., 1991)

V prvním pololetí prospělo ve třídě 16 chlapců z 18. Děvčata prospěla všechna. Prospívajících žáků ve třídě bylo 95%. Kolik děvčat bylo ve třídě?

Řešení (vlastní):

neprospívající žáci (2 chlapci)………………..$100\% - 95\% = 5\%$

5%..2 žáci

100%......................................x žáků

$$\frac{x}{2} = \frac{100}{5}$$
$$5x = 200$$
$$x = 40 \text{ žáků}$$

Ve třídě je 40 žáků, z toho 22 děvčat.

Příklad 3.4.2

(Repáš a kol., 1991)

Traktorista chtěl zorat 18ha pole za 3 dny při stejném denním výkonu. První den plán splnil. Druhý den však pracoval v horších podmínkách a zoral o 15% méně než první den. O kolik procent musí zvýšit svůj výkon třetí den proti výkonu ve druhém dni, aby splnil plán?

Řešení (vlastní):

chtěl zorat za 3 dny……………………………18 ha

první den………………………………………6 ha

druhý den……………………………….....……85% z 6 ha ($\frac{85}{100} \cdot 6 = 5{,}1$ ha)

třetí den…………………………………….....$18 - 6 - 5{,}1 = 6{,}9$ ha

5,1 ha……………………………………………..100%

6,9 ha……………………………………………..x%

$$\frac{6{,}9}{5{,}1} = \frac{x}{100}$$

$$690 = 5{,}1x$$

$$x \doteq 35{,}3\%$$

Po druhém dnu musí traktorista zvýšit svůj výkon přibližně o 35,3%.

Příklad 3.4.3

(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/50-rocnik-00-01)

Ve školní jídelně byla dnes k obědu rajská polévka. 40% dětí ji nemá rádo, a proto ji vůbec nejedlo. Čtvrtina dětí ji naopak „miluje“, a proto si dala dvojnásobnou porci. Ostatní děti snědly každé svoji porci a v hrnci zůstalo ještě 21 dětských porcí. Pro kolik žáků vařili oběd?

Řešení:

celkový počet dětí…………………………….... d

děti, které nejedly polévku……………………...40% z celkového počtu ($0,4\ d$)

děti, které snědly dvojnásobnou porci…………..$\frac{1}{4}$ z celkového počtu ($0,25\ d$)

zbylé porce………………………………………21

Ze zadání víme, že polévku, kterou nesnědly děti, které ji nemají rády, částečně snědly děti, které ji „milují“ a částečně zbyla v hrnci. Dostáváme rovnici:

$$0,4\ d = 0,25d + 21$$
$$0,15\ d = 21$$
$$d = 140 \text{ dětí}$$

Původně se vařil oběd pro 140 dětí.

Příklad 3.4.4

(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/60-rocnik-10-11)

Cena knížky „Nové hádanky“ byla snížena o 62,5%. Matěj zjistil, že obě ceny (před snížením i po něm) jsou dvojmístná čísla a dají se vyjádřit stejnými číslicemi, jen v různém pořadí. O kolik Kč byla knížka zlevněna?

Řešení:

původní cena…………………$10a + b$

cena po zlevnění………………$10b + a$

snížení ceny……………………o 62,5% (tedy na 37,5%)

$$\frac{37,5}{100}(10a + b) = 10b + a$$

Vzhledem k rovnosti $\frac{37,5}{100} = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$ předchozí vztah upravíme:

$$\frac{3}{8}(10a + b) = 10b + a$$
$$3(10a + b) = 80b + 8a$$

$30a + 3b = 80b + 8a$

$22a = 77b$

$2a = 7b$

Jediná jednomístná přirozená čísla vyhovující této rovnosti jsou $a = 7, b = 2$. Původní cena byla 72 Kč, cena po zlevnění 27 Kč a knížka byla zlevněna o 45 Kč.

Příklad 3.4.5
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/59-rocnik-09-10)

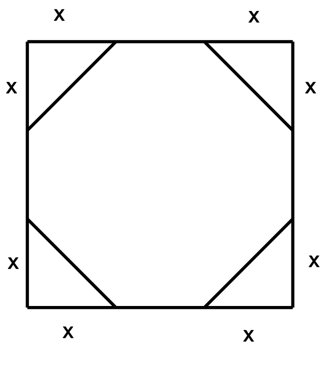
Ze čtverce o straně 6 centimetrů odřízneme od každého vrcholu shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky tak, aby se obsah čtverce zmenšil o 32%. Jakou velikost mají odvěsny?

Řešení:

Obsah čtverce o straně 6cm je $36\ cm^2$. Odříznuté části dají dohromady 32% z $36\ cm^2$, tj. $0{,}32 \cdot 36 = 11{,}52\ cm^2$.

Pokud odvěsnu odříznutého trojúhelníku odznačíme x (obrázek č. 13), potom obsah každého takového trojúhelníku je $\frac{1}{2}x^2$.

Obrázek č. 13: Příklad 3.4.5



Zdroj: vlastní tvorba

Dohromady dostáváme rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 11{,}52$$
$$x^2 = 5{,}76$$
$$x = 2{,}4\ cm$$

Odvěsny odříznutých pravoúhlých trojúhelníků mají délku 2,4 cm.

Příklad 3.4.6
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/53-rocnik-03-04)

Po sezóně zbyly v prodejně letní trička za 70 Kč. Majitel prodejny snížil jejich cenu o více než 25%, ale o méně než 50%. Nová cena vyjádřená v korunách je celé číslo. Všechna takto zlevněná trička majitel prodal a získal za ně 2 430 Kč. Kolik triček prodal po zlevnění?

Řešení:

Trička po zlevnění mohla stát nejméně 36 Kč ($\frac{50}{100} \cdot 70 = 35$) a nejvíce 52 Kč ($\frac{75}{100} \cdot 70 = 52{,}5$).

Rozložme číslo 2430 na součin prvočísel: $2\,430 = 2 \cdot 3^5 \cdot 5$.

Z rozkladu nyní musíme vytvořit číslo, které je větší nebo rovno 36 a menší nebo rovno 52. Jediná možnost je 45.

Cena trička po zlevnění tedy byla 45 Kč a majitel prodejny prodal 54 zlevněných triček ($2\,430 : 45 = 54$).

Příklad 3.4.7
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/53-rocnik-03-04)

V delfináriu měli jednotné vstupné 4 euro. Poslední neděli snížili vstupné, tím se počet návštěvníků zvýšil o dvě třetiny a příjem v pokladně stoupl o 25%. O kolik euro bylo sníženo vstupné?

Řešení:

počet návštěvníků před slevou…………….n
cena lístku po slevě………………………..x

Ze zadání úlohy dostáváme rovnici:

$$\left(n+\frac{2}{3}n\right)x = 4\cdot 1{,}25\cdot n$$
$$nx+\frac{2}{3}nx = 5n$$
$$3x+2x = 15$$
$$5x = 15$$
$$x = 3 \text{ eura}$$

Nová cena vstupného je tedy 3 euro, vstupné bylo sníženo o 1 euro.

Příklad 3.4.8
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/53-rocnik-03-04)

V Janině třídě je 40% chlapců. Jejich průměrná výška je 145 cm. Průměrná výška všech dětí v Janině třídě je 142 cm. Ve své třídě je Jana mezi děvčaty nadprůměrně vysoká, ale je menší, než je průměrná výška všech dětí v její třídě. Zjistěte, kolik Jana měří, pokud víte, že její výška je v centimetrech celé číslo.

Řešení:

chlapci – 40% z celé třídy (tj. 2díly)………145cm
dívky – 60% z celé třídy (tj. 3 díly)………...x cm

Pro zjištění průměrné výšky děvčat, platí vážený aritmetický průměr:

$$\frac{2\cdot 145+3\cdot x}{5} = 142$$
$$290+3x = 710$$
$$3x = 420$$
$$x = 140 \text{ cm}$$

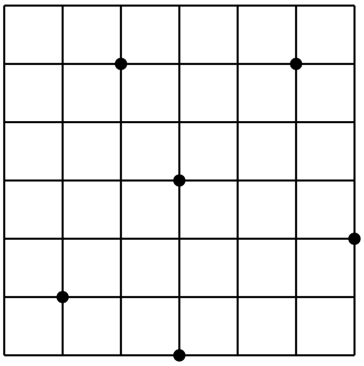
Průměrná výška dívek je tedy 140 cm. Jana je vyšší, ale menší než 142 cm (což je průměrná výška celé třídy), proto měří 141 cm.

Příklad 3.4.9

(Repáš a kol., 1991)

Každou trojicí z daných šesti bodů je určen právě jeden trojúhelník (obrázek č. 14). Kolik procent z těchto trojúhelníků má obsah 1, kolik procent má obsah 2 a kolik procent má obsah 3?

Obrázek č. 14: Příklad 3.4.9

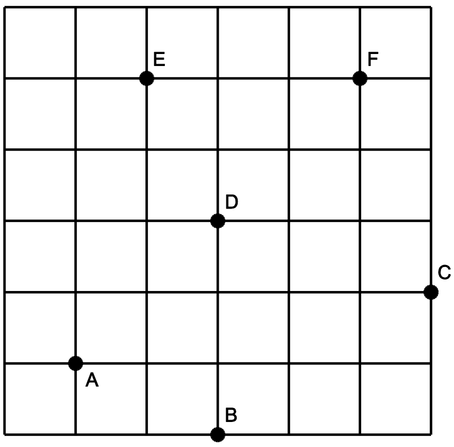


Zdroj: Repáš a kol. (1991)

Řešení:

Označme body obrázku č. 14 A, B, C, D, E, F (obrázek č. 15).

Obrázek č. 15: Řešení 3.4.9



Zdroj: Repáš a kol. (1991)

Potom můžeme vypsat všechny trojúhelníky určené těmito body – je jich 20. Čísla v závorkách uvádí jejich obsah.

ABC (2,5)	ABD (2)	ABE (3,5)	ABF (5)
	ACD (2,5)	ACE (7,5)	ACF (7,5)
		ADE (2,5)	ADF (1)
			AEF (4,5)
BCD (3)	BCE (6,5)	BCF (5)	
	BDE (1)	BDF (2)	
		BEF (6)	
CDE (2,5)	CDF (4)		
	CEF (4,5)		
DEF (3)			

Právě 2 trojúhelníky z 20 mají obsah 1 = 10%, stejně tak 10% trojúhelníků má obsah 2 a 10% trojúhelníků má obsah 3.

Příklad 3.4.10 (http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani)

Severských závodů psích spřežení se zúčastnilo dohromady celkem 315 dvojspřeží a trojspřeží. Do cíle dorazilo ve stanoveném limitu 60% všech dvojspřeží a $\frac{1}{3}$ všech trojspřeží, takže do cíle dorazila včas přesně polovina všech psů. Kolik dvojspřeží a kolik trojspřeží závodilo?

Řešení:

počet dvojspřeží………………..d
počet trojspřeží…………………t

Ze zadání sestavíme první rovnici soustavy rovnic: $d + t = 315$.

Ve druhé rovnici, taktéž plynoucí ze zadání, zohledníme, že se jedná o počet psů:

$0{,}6d \cdot 2 + \frac{1}{3}t \cdot 3 = \frac{1}{2}(2d + 3t).$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme, že $t = 90, d = 225.$

Na startu severských závodů psích spřežení bylo 225 dvojspřeží a 90 trojspřeží.

Příklad 3.4.11
(http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani)

Tým chce v sezóně vyhrát $\frac{3}{4}$ všech svých zápasů. V první třetině z nich však vyhrál jen 55% zápasů.

a) Kolik procent zbývajících zápasů by musel tým vyhrát, aby dosáhl zamýšleného cíle?
b) Kdyby tým vyhrál všechny zbývající zápasy, kolik procent svých zápasů by v celé sezóně vyhrál?

Řešení:

a) Tým vyhrál $\frac{55}{100}$ ze třetiny zápasů, k tomu potřebuje vyhrát dalších $\frac{p}{100}$ ze $\frac{2}{3}$ zápasů, aby vyhrál $\frac{3}{4}$ ze všech.

$$\frac{55}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{p}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{55}{300} + \frac{2p}{300} = \frac{3}{4}$$
$$55 + 2p = 225$$
$$p = 85\%$$

Aby tým dosáhl zamýšleného cíle, musí vyhrát 85% zbývajících zápasů.

b) Následující příklad popisuje situaci, kdyby tým vyhrál všechny zbývající zápasy.

$$\frac{55}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{100}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{255}{300} = \frac{85}{100}$$

Kdyby tým všechny zbývající zápasy vyhrál, v celé sezóně by vyhrál 85% všech svých zápasů.

Příklad 3.4.12
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/50-rocnik-00-01)

Zjistěte, o kolik maximálně procent (vzhledem k původní hodnotě) se může změnit kořen rovnice $ax = b$ (a různo od 0) s neznámou x, jestliže žádný z koeficientů této rovnice nezměníme o víc než 20% původní hodnoty.

Řešení:

Ze zadání plyne, že se máme zabývat pouze takovými případy, kdy oba koeficienty změníme o maximální počet procent (20%).

V případě, že oba koeficienty zmenšíme, resp. zvětšíme, o 20%, kořen rovnice se nezmění.

Zmenšíme-li a o 20% a b o 20% zvětšíme, získáme rovnici $0{,}8ax = 1{,}2b$. Odtud $x = \frac{1{,}5b}{a}$, kořen rovnice se tedy maximálně zvětší o 50%.

Zvětšíme-li a o 20% a b o 20% zmenšíme, získáme rovnici $1{,}2ax = 0{,}8b$. Odtud $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{a}$, kořen rovnice se tedy maximálně zmenší o $33{,}\overline{3}$%.

Příklad 3.4.13
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/53-rocnik-03-04)

Martin má z matematiky několik známek, jejichž aritmetický průměr je 2,1. Pětku nemá ani jednu. Zato jedničky tvoří 35% a dvojky 30% všech jeho známek z matematiky.

a) Kolik procent všech Martinových známek tvoří trojky a kolik čtyřky?
b) Kolik známek z matematiky má Martin, víme-li, že má pět trojek?

Řešení:

všechny známky……………………100%

procento trojek a čtyřek……………100% - 35% - 30% = 35%

procento trojek……………………..p

procento čtyřek……………………..$35 - p$

počet všech známek…………………z

Nyní budeme vycházet ze vzorečku pro výpočet aritmetického průměru.

$$2{,}1 = \frac{\frac{35}{100} \cdot z \cdot 1 + \frac{30}{100} \cdot z \cdot 2 + \frac{p}{100} \cdot z \cdot 3 + \frac{35 - p}{100} \cdot z \cdot 4}{z}$$

$$210z = 35z + 60z + p \cdot 3 \cdot z + (35 - p) \cdot 4 \cdot z$$

$$210 = 95 + 140 - p$$

$$210 = 235 - p$$

$$p = 25\%$$

Martin má 25% trojek a 10% čtyřek (35% - 25% = 10%). Z matematiky má Martin celkem 20 známek ($5 \cdot \frac{100}{25} = 20$).

Příklad 3.4.14

(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/52-rocnik-02-03)

Do Miroslavova království chodil švec Matěj nejen si zazpívat, ale i dobře se najíst a napít. Za jeden zlaťák dostal celou husu a jeden džbánek vína. Pak tam ale zvýšili ceny o 20% a za zlaťák dostal už jen půl džbánku vína a celou husu. Proslýchá se, že po úplňku se ceny znovu zvýší o 20%. Dostane pak Matěj za svůj zlaťák alespoň jednu celou husu?

Řešení:

cena husy………………………..…h

cena džbánku vína………….……...v

situace před zdražením…….……$h + v = 1$

situace po zdražení o 20%...........$h + v = 1{,}2$

zároveň také.…………………... $h + \frac{v}{2} = 1$

Z této soustavy rovnic víme, že cena džbánku vína po zdražení byla $v = 0{,}4$ zlaťáku a cena celé husy $h = 0{,}8$ zlaťáku.

Situace po dalším předpokládaném zdražení o dalších 20%: $h = 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$ zlaťáku. Tedy i po dalším zdražení dostane Matěj za jeden zlaťák celou husu.

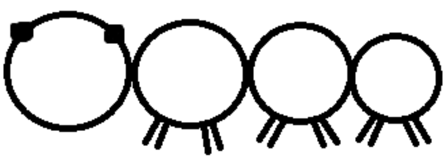
Příklad 3.4.15 (http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/51-rocnik-01-02)

Na svých toulkách přírodou narazil profesor Hmyzík na nový druh brouka. Podle počtu jeho nožiček a tvaru jednotlivých článků ho nazval Kouličkovec dvanáctinožkový: každý článek tohoto brouka má tvar kuličky a z každého článku (kromě prvního – hlavičky) vyrůstají dva páry nožiček. Navíc každý z článků má o 21% větší průřez než článek za ním. Zjistěte přesnou délku brouka, pokud víte, že hlavička má poloměr 0,2662 cm.

Řešení:

Příklad takového živočicha zobrazuje obrázek č. 16.

Obrázek č. 16: Řešení 3.4.15



Zdroj: vlastní tvorba

<u>Hlavička</u>

poloměr…………………………………………………$r_h = 0{,}2662\ cm$

průměr…………………...…………………………..$d_h = 0{,}5324\ cm$

plocha průřezu hlavičky……………………………..$S_h = \pi r_h^2 = 0{,}22251\ cm^2$

První článek

plocha průřezu (o 21% menší než průřez hlavičky)…….$S_1 = \frac{S_h}{1,21} = 0,18389096\ cm^2$

poloměr……………………………………………………$r_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} = 0,242\ cm$

průměr…………………………………………………...$d_1 = 0,484\ cm$

Druhý článek

plocha průřezu (o 21% menší než průřez 1. článku)……. $S_2 = \frac{S_1}{1,21} = 0,151976\ cm^2$

poloměr…………………………………………………...$r_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = 0,22\ cm$

průměr……………………………………………………$d_2 = 0,44\ cm$

Třetí článek

plocha průřezu (o 21% menší než průřez 2. článku)……... $S_3 = \frac{S_2}{1,21} = 0,1256\ cm^2$

poloměr……………………………………………………$r_3 = \sqrt{\frac{S_3}{\pi}} = 0,2\ cm$

průměr……………………………………………...……$d_3 = 0,4\ cm$

Celkovou délku d vypočteme jako součet průměrů jednotlivých článků.

$d = d_h + d_1 + d_2 + d_3 = 0,5324 + 0,484 + 0,44 + 0,4 = 1,8564\ cm$

Kouličkovec dvanáctinožkový měří 1,8564 cm.

Příklad 3.4.16

(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/51-rocnik-01-02)

Mirka si myslí dvojciferné číslo. Pokud zamění pořadí cifer, dostane číslo, které se od původního čísla liší o 75%. Jaké číslo si mohla myslet?

Řešení:

původní číslo…………………$10a + b$

nové číslo……………………$10b + a$

Předpokládejme nejdříve, že nové číslo je o 75% větší.

$$\begin{aligned}1{,}75(10a+b)&=10b+a\\17{,}5a+17{,}5b&=10b+a\\16{,}5a&=8{,}25b\\2a&=b\end{aligned}$$

Nyní již snadno dopočítáme, že tomuto vztahu vyhovují čísla 12, 24, 36, 48.

Nyní uvažujme, že nové číslo je o 75% menší.

$$\begin{aligned}0{,}25(10a+b)&=10b+a\\2{,}5a+0{,}25b&=10b+a\\1{,}5a&=9{,}75b\\a&=\frac{13}{2}b\end{aligned}$$

V tomto případě nedostaneme žádné řešení.

Mirka si tedy mohla myslet číslo 12, 24, 36 nebo 48.

Příklad 3.4.17
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/50-rocnik-00-01)

Soukromý podnikatel propustil čtvrtinu svých zaměstnanců. Jejich práci rozdělil mezi ty, kteří zůstali, a každému z nich zvýšil plat o 25%. Ušetřil tak na mzdách 13 000 Kč. Zjistěte, kolik zaměstnanců si ponechal, jestliže víte, že všichni vydělávali před propuštěním stejně a teď vydělávají také stejně, ale ne méně než 6 000 Kč a ne více než 10 000 Kč.

Řešení:

Původní celkovou výplatu mezd označíme p. Pro současnou výplatu mezd platí, že 75% zaměstnancům dá zaměstnavatel 125% původní mzdy ($0{,}75 \cdot 1{,}25p$), což je měsíčně o 13 000 méně než původně vyplácel ($p - 13\,000$).

$$0{,}75 \cdot 1{,}25p = p - 13\ 000$$
$$p = 20\ 800 \text{ Kč}$$

Současná výplata mezd je 208 000 – 13 000 = 195 000 Kč. Jestliže všichni zaměstnanci vydělávají stejně, a to minimálně 6 000 a maximálně 10 000, je jejich počet větší nebo roven 195 000:10 000 = 19,5 a menší nebo roven 195 000:6 000 = 32,5.

Zaměstnavatel si tedy ponechal minimálně 20 a maximálně 32 zaměstnanců. Původní počet zaměstnanců musí být dělitelný čtyřmi, takže počet ponechaných zaměstnanců, který je roven $\frac{3}{4}$ počtu původních zaměstnanců, musí být dělitelný třemi.

Zaměstnavatel si tedy ponechal 21, 24, 27 nebo 30 zaměstnanců.

Příklad 3.4.18 (http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/49-rocnik-99-00)

V Kocourkově nemají haléře. Zato tam mají speciální stroj na měnění mincí za papírové bankovky. Nejprve se vhozená částka zaokrouhlí na desítky. Takto získaná hodnota se zaokrouhlí na stovky. A potom ještě na tisíce. Výsledná částka je vyplacena v bankovkách.

Honza se rozčiloval, že ho Kocourkovský měnicí stroj pořádně převezl. Nasypal do něj celý svůj majetek a stroj mu vrátil jen přibližně 69% (zaokrouhleno na celá procenta) toho, co do něj vhodil. Kolik Kocourkovských korun mohl do stroje nasypat?

Řešení:

Pokud do stroje vhodíme částku 444 korun a menší, stroj nevyplatí nic. Za částku od 445 do 1444 korun dostaneme tisícikorunu, za částku od 1 445 do 2 444 korun dvě tisícikoruny atd. Kocourkovský stroj vyplatil Honzovi přibližně 69% vhozené částky, tzn. alespoň jednu tisícikorunu.

počet vhozených korun…………………..……..x
počet vyplacených tisícikorun…………………y

Ze zadání víme, že stroj Honzovi vrátil přibližně 69% toho, co do něj vhodil. Protože je výsledné procento zaokrouhlené, musíme to ve výpočtu zohlednit. Zkoumáme tedy rozmezí 68,5 % až 69,5%.

Nejprve rozebereme situaci, kdy stroj vyplatil Honzovi jednu tisícikorunu.

$$68{,}5\%\, x \leq y \cdot 1\,000 < 69{,}5\% x$$
$$0{,}685x \leq 1\,000y < 0{,}695x$$
$$y \cdot 1\,438{,}8 < x \leq y \cdot 1\,459{,}8$$

V případě, že stroj vyplatil jednu tisícikorunu, mohl Honza vhodit do stroje částku 1 439, 1 440, 1 441, 1 442, 1 443 nebo 1 444 korun (větší částka není přípustná, stroj by vyplatil více než jednu tisícikorunu).

Následuje situace, kdy stroj vyplatí Honzovi dvě tisícikoruny.

$$68{,}5\%\, x \leq y \cdot 2\,000 < 69{,}5\% x$$
$$0{,}685x \leq 2\,000y < 0{,}695x$$
$$y \cdot 2\,877{,}7 < x \leq y \cdot 2919{,}7$$

Z výpočtu plyne závěr, že v případě, kdy stroj vyplatí více tisícikorun než jednu, je vyplacená částka vždy vyšší než 69% vhozené částky.

Honza mohl vhodit do stroje částku od 1 439 do 1 444 Kocourkovských korun.

Příklad 3.4.19
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/61-rocnik-11-12)

Organizátor výstavy „Stavím, stavíš, stavíme“ rozdělil expozici do dvou částí. Protože ho zajímala reakce návštěvníků výstavy, vyplnil každý návštěvník při odchodu jednoduchý dotazník. Vyplynuly z něj tyto zajímavé skutečnosti:

- 96% návštěvníků, kterým se líbila první část, se líbila i druhá část,
- 60% návštěvníků, kterým se líbila druhá část, se líbila i první část,
- 59% návštěvníků se nelíbila ani první část, ani druhá část.

Kolik procent všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy?

Řešení:

počet návštěvníků…………………………………..…..n
počet návštěvníků, kterým se líbila první část….………p
počet návštěvníků, kterým se líbila druhá část…………d

Hledáme nějaký vztah mezi p a n, ze kterého bychom snadno odvodili odpověď na otázku. Vyjádříme počet návštěvníků, kterým se líbily obě části: z první podmínky to je $0{,}96p$, z druhé podmínky $0{,}6d$.

$$0{,}96p = 0{,}6d$$
$$96p = 6d$$
$$1{,}6p = d$$

Odtud můžeme vyjádřit počet lidí v jednotlivých skupinách pomocí p.

- Počet lidí, kterým se líbila první část, ale ne druhá část je $p - 0{,}96p = 0{,}04p$.
- Počet lidí, kterým se líbila druhá část, ale ne první část je $d - 0{,}6d = 0{,}4d = 0{,}4 \cdot 1{,}6p = 0{,}64p$.
- Počet lidí, kterým se líbila první i druhá část je samozřejmě $0{,}96p$.

Sečtením zjistíme, kolika lidem se líbila alespoň jedna část výstavy.

$$0{,}04p + 0{,}64p + 0{,}96p = 1{,}64p$$

Podle třetí podmínky v zadání víme, že $0{,}59n$ návštěvníkům se nelíbila ani jedna část výstavy. Tedy $0{,}41n$ návštěvníkům se alespoň jedna část výstavy líbila. Tento počet zároveň podle předchozího odpovídá $1{,}64p$.

$$0{,}41n = 1{,}64p$$
$$41n = 164p$$
$$n = 4p$$
$$0{,}25n = p$$

Odtud plyne, že 25% všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy.

Příklad 3.4.20
(http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani)

Přečtěte si výsledky ankety konané v Peci pod Sněžkou, při níž bylo osloveno 1 240 lidí: „V existenci Krakonoše věří 46% dotázaných (zaokrouhleno na celé číslo), 31% v jeho existenci nevěří (zaokrouhleno na celé číslo). Ostatní dotazovaní odmítli na tuto otázku jakkoli reagovat.“

a) Kolik nejméně lidí mohlo v anketě odpovědět, že věří v existenci Krakonoše?
b) Kolik nejvíce lidí mohlo odmítnout na anketu odpovědět?

Uveďte konkrétní počty, nikoli procenta.

Řešení:

kladná odpověď…………………………x lidí
záporná odpověď………………………..y lidí

$$0{,}455 \cdot 1\,240 \leq x < 0{,}465 \cdot 1\,240$$
$$564{,}2 \leq x < 576{,}6$$

$$0{,}305 \cdot 1\,240 \leq y < 0{,}315 \cdot 1\,240$$
$$378{,}2 \leq y < 390{,}6$$

Kladně odpovědělo nejméně 565 lidí. Záporně odpovědělo nejméně 379 lidí. Tedy reagovat odmítlo maximálně 1240 – 565 – 379 = 296 lidí.

Příklad 3.4.21
(http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani)

Maminka připravila na oslavu Jirkových narozenin pomerančový džus tak, že smíchala 1 litr 100% džusu s $\frac{2}{3}$ litru 30% džusu. Jirka si odlil do skleničky a ochutnal. Protože má radši slabší koncentraci, dolil připravený džus na původní množství. Výsledný džus měl koncentraci 61,2%, to mu vyhovovalo. Jaké množství džusu si Jirka odlil do skleničky?

Řešení:

koncentrace směsi dvou druhů džusů…………….x
množství, které Jirka odlil……………...………..y

$$1 \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 30 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot x$$

$$100 + 20 = \frac{5}{3}x$$

$$x = 72\%$$

Koncentrace směsi je tedy 72%.

$$\left(\frac{5}{3} - y\right) \cdot 72 = \frac{5}{3} \cdot 61{,}2$$

$$y = 0{,}25\ l$$

Jirka si odlil do skleničky 0,25 l džusu.

Příklad 3.4.22
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/61-rocnik-11-12)

Korespondenční matematická soutěž probíhá ve třech kolech, jejichž náročnost se stupňuje. Do druhého kola postupují jen ti řešitelé, kteří byli úspěšní v prvním kole, do třetího kola postupují jen úspěšní řešitelé druhého kola. Vítězem je každý, kdo je úspěšným řešitelem posledního, tedy třetího kola.

V posledním ročníku této soutěže bylo přesně 14% řešitelů úspěšných v prvním kole, přesně 25% řešitelů druhého kola postoupilo do třetího kola a přesně 8% řešitelů třetího kola zvítězilo. Jaký je nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola? Kolik by v takovém případě bylo vítězů?

Řešení:

počet řešitelů 1. kola………………………x
počet řešitelů 2. kola……………………...14% z $x = 0{,}14x$

počet řešitelů 3. kola……………………..…..25% z $0{,}14x = 0{,}24 \cdot 0{,}14x = 0{,}035x$

počet vítězů………………………………8% z $0{,}035x = 0{,}08 \cdot 0{,}035x = 0{,}0028x$

Protože jsou výpočty přesné (bez zaokrouhlování), musí být čísla x; $0{,}14x$; $0{,}035x$; $0{,}0028x$ přirozená. Začneme u posledního z nich.

$$0{,}0028x = \frac{28}{10\,000}x = \frac{7}{2\,500}x$$

Číslo x tedy musí být násobek čísla 2 500. Protože hledáme nejmenší řešení, budeme postupně zkoušet násobky 2 500, a to tak dlouho, než všechna zmiňovaná čísla budou přirozená.

x	$0{,}14x$	$0{,}035x$	$0{,}0028x$	závěr
2 500	350	87,5	7	nevyhovuje
5 000	700	175	14	vyhovuje

Nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola, je 5 000. Vítězů by v takovém případě bylo 14.

Příklad 3.4.23
(http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/63-rocnik-13-14)

V hostinci U tří prasátek obsluhují Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hostovi připočítá k celkové ceně 10 krejcarů. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje přesně to, co snědl a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hostovi dá slevu z celkové útraty ve výši 20%. Prasátka si jsou tak podobná, že žádný host nepozná, které zrovna obsluhuje.

Beránek Vendelín si v pondělí objednal tři koláčky a džbánek džusu. Zaplatil za to 56 krejcarů. Byl spokojen, takže hned v úterý snědl pět koláčků, vypil k nim tři džbánky džusu a platil 104 krejcary. Ve středu snědl osm koláčků, vypil čtyři džbánky džusu a zaplatil 112 krejcarů.

a) Kdo obsluhoval Vendelína v pondělí, kdo v úterý a kdo ve středu?

b) Kolik krejcarů účtuje Rašík za jeden koláček a kolik za jeden džbánek džusu?

(Všechny koláčky jsou stejné, stejně tak všechny džbánky džusu. Ceny uváděné v jídelním lístku se v uvedených dnech neměnily.)

Řešení:

Vendelín snědl a vypil ve středu to samé, co v pondělí a v úterý dohromady.

pondělí a úterý……………………..$56 + 104 = 160$ krejcarů

středa…………………………….....112 krejcarů (což je o 48 krejcarů méně)

Nyní provedeme diskusi, kdo mohl obsluhovat Vendelína ve středu:

- Kdyby to byl poctivec Rašík, musel by hostinec v pondělí a v úterý ošidit Vendelína o 48 krejcarů. Při dvou placení je možné ošidit maximálně o 20 krejcarů. Možnost, že obsluhoval Rašík, zavrhujeme.
- Kdyby to byl Pašík, byla by skutečná středeční útrata 112 – 10 = 102 krejcarů. Vendelína by museli během prvních dvou dní ošidit dokonce o 58 krejcarů. Možnost, že obsluhoval Pašík, též zavrhujeme.
- Kdyby to byl Sašík, představovala by útrata 112 krejcarů 80% skutečné ceny. To znamená, že skutečná středeční cena by byla $112 \cdot 0{,}8 = 140$ krejcarů. Hostinec by musel během pondělka a úterka ošidit Vendelína o 20 krejcarů. To se mohlo stát jen tehdy, když ho během obou dnů obsluhoval nečestný Pašík. Tato možnost nám vyhovuje.

Nyní známe odpověď na první otázku: V pondělí a v úterý obsluhoval Pašík, ve středu Sašík.
Skutečné ceny, ceny podle Rašíka, tedy byly:

- pondělí (3 koláčky, 1 džbánek džusu): 56 – 10 = 46 krejcarů
- úterý (5 koláčků, 3 džbánky džusu): 104 – 10 = 94 krejcarů
- středa (8 koláčků, 4 džbánky džusu): 112 : 0,8 = 140 krejcarů

Z Vendelínové středeční objednávky můžeme odvodit, že 2 koláčky a 1 džbánek džusu stojí 140 : 4 = 35 krejcarů. Porovnáním s Vendelínovou pondělní objednávkou zjistíme, že skutečná cena jednoho koláčku je 46 – 35 = 11 krejcarů. Podle pondělní objednávky určíme i skutečnou cenu jednoho džbánku: $46 - 3 \cdot 11 = 13$ krejcarů. Tím známe odpověď na druhou otázku: Rašík účtuje za jeden koláček 11 krejcarů a za jeden džbánek džusu 13 krejcarů.

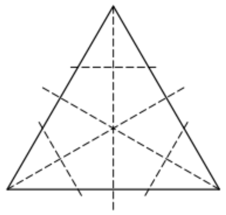
Příklad 3.4.24 (http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani)

V rovnostranném trojúhelníku označte každý bod, jehož vzdálenost od nejbližšího vrcholu je menší než vzdálenost od těžiště. Kolik procent plochy rovnostranného trojúhelníku zaujímají body se zmíněnou vlastností?

Řešení:

Do rovnostranného trojúhelníku si narýsujeme těžnice. Poté si sestrojíme osy úseček, jejichž jedním krajním bodem je těžiště a druhým vrchol zadaného trojúhelníku (obrázek č. 17).

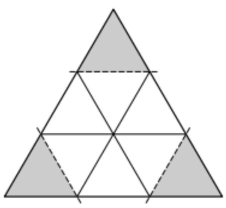
Obrázek č. 17: Řešení 3.4.24a



Zdroj: http://www.zshorakhk.cz/matematika/souteze/2005_6/Z9IIR.PDF

Protože osa úsečky je množina bodů, jejichž vzdálenost od obou krajních bodů úsečky je stejná, vyhovují vždy ty body trojúhelníků, které leží v polorovině obsahující příslušný vrchol trojúhelníku (obrázek č. 18).

Obrázek č. 18: Řešení 3.4.24b



Zdroj: http://www.zshorakhk.cz/matematika/souteze/2005_6/Z9IIR.PDF

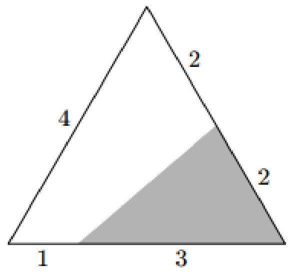
Rovnostranný trojúhelník lze rozdělit na 9 shodných rovnostranných trojúhelníků (obrázek č.), přičemž tři z nich odpovídají bodům s uvedenou vlastností. To znamená, že tyto body zaujímají $33,\overline{3}\%$ plochy trojúhelníku.

Příklad 3.4.25

(http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani)

Je dán rovnostranný trojúhelník o straně 4 cm (obrázek č. 19). Určete obsah tmavé části a také, kolik procent plochy původního trojúhelníku zaujímá tmavá část?

Obrázek č. 19.: Příklad 3.4.25

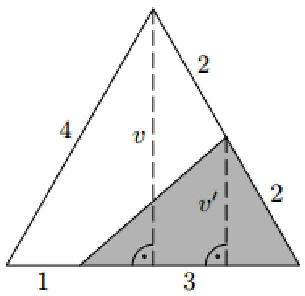


Zdroj: http://www.zshorakhk.cz/matematika/souteze/2004_5/Z8II-R.PDF

Řešení:

Označíme v výšku daného trojúhelníku jako na obrázku č. 20.

Obrázek č. 20: Řešení 3.4.25



Zdroj: http://www.zshorakhk.cz/matematika/souteze/2004_5/Z8II-R.PDF

Podle Pythagorovy věty platí:

$v^2 = 4^2 - 2^2$

$v = 2\sqrt{3}cm$

Tedy obsah rovnostranného trojúhelníku je $S = 4\sqrt{3}cm^2$. Vzhledem k tomu, že základna tmavého trojúhelníku má délku $\frac{3}{4}$ délky základny velkého trojúhelníku a výška v' tmavého trojúhelníku je polovinou výšky velkého trojúhelníku, tvoří obsah tmavého trojúhelníku $\frac{3}{8}$ obsahu celého trojúhelníku, tj. 37,5%. Obsah tmavého trojúhelníku je $\frac{3}{8} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ cm^2$.

4. ZÁVĚR

Cílem diplomové práce nebylo seznámit čtenáře jen s problematikou procent na základních školách, ale také uvést dostatečné množství informací o matematické olympiádě, korespondenčních seminářích a mezinárodních výzkumech PISA a TIMSS.

Aby byly splněny všechny cíle diplomové práce, je první kapitola ryze teoretická. Nejprve je kladen důraz na seznámení čtenáře s výukou procent na základních školách podle rámcově vzdělávacího programu. Až poté následují kapitoly věnované matematické olympiádě, korespondenčním seminářům a výzkumům PISA a TIMSS.

V praktické části práce byl splněn hlavní cíl práce – vytvoření sbírky řešených úloh na procenta, které se vyskytují v matematických olympiádách, korespondenčních seminářích a výzkumech PISA, TIMSS. Sbírka se skládá ze čtyř podkapitol a všechny úlohy jsou řazeny podle stupně obtížnosti od nejjednodušších po ty složité.

Práce je určená především učitelům na druhém stupni základních škol. Ti zde mohou čerpat jak teoretické znalosti (například přehled aktuálních korespondenčních seminářů, do kterých by se mohla jejich škola zapojit), tak i jednotlivé příklady uvedené ve sbírce. Díky tomu, že sbírka obsahuje jednodušší i těžší příklady, mohou ji učitelé využívat v běžné hodině matematiky, i například v matematických kroužcích.

Učitelé nejsou však jediní, pro které je práce určena. Může také sloužit talentovaným žákům k prohlubování jejich znalostí, či k přípravě na účast v matematické olympiádě nebo jiné matematické soutěži.

5. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A OSTATNÍCH ZDROJŮ

Seznam knižních zdrojů:

Binterová, H., Tlustý, P. (2013): *Učení matematiky s počítačem.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 131 s. ISBN: 978-80-7394-410-0.

Boček, L. (2000): *50 let matematické olympiády*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 4 s. Dostupné z: http://katmatprf.ujepurkyne.com/data/KMA_50let.pdf

Calábek, P., Švrček, J., Vaněk, M. (2007): *Péče o matematické talenty v České republice*. Olomouc: Univerzita Palackého, 33 s. Dostupné z: http://esfmoduly.upol.cz/texty/pece_o_m_tal.pdf

Hejný, M., Jirotková, D. a kol. (2010): *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 111 s. ISBN: 978-80-211-0612-3.

Hejný, M., Jirotkovák D. a kol. (2012): *Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti: Utváření kompetencí žáků na základně zjištění šetření PISA 2009.* Praha: Česká školní inspekce, 111 s. ISBN: 978-80-905370-0-2.

Hošpesová, A., Kuřina, F. a kol. (2011): *Matematická gramotnost a vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 232 s. ISBN: 978-80-7394-259-5.

Hrubý, D., Chodorová, M. (2009): *Příručka pro začínající učitele matematiky*. Šumperk: Trifox, s. r. o., 175 s. ISBN 978-80-904309-7-6.

Kitzberger, J. (2010): *Rámcové vzdělávací programy a jejich úpravy*. Dostupné z: http://clanky.rvp.cz/clanek/s/Z/9327/RAMCOVE-VZDELAVACI-PROGRAMY-A-JEJICH-UPRAVY.html/

Kocourek, J. (2012): *Organizační řád Matematické olympiády*. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/mo/

Koman, M., Boček, L., Repáš, V. (1988): *35. ročník matematické olympiády na základních školách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 104 s. ISBN 14-668-88.

Koman, M., Repáš, V. (1989): *36. ročník matematické olympiády na základních školách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 145 s. ISBN 80-04-23726-6.

Národní ústav pro vzdělávání (2011): *Matematická gramotnost ve výuce: metodická příručka*. Praha: Národní ústav pro vzdělávání, 71 s. ISBN: 978-80-87000-97-7.

Odvárko, O. (2005): *Procenta a jejich užití*. Dostupné z: http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/324/PROCENTA-A-JEJICH-UZITI.html/

Palečková, J., Tomášek, V. (2005): *Učení pro zítřek: Výsledky výzkumu OECD PISA 2003*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 98 s. ISBN: 80-211-0500-3.

Palečková, J., Tomášek, V. a kol. (2013): *Hlavní zjištění PISA 2012: Matematická gramotnost patnáctiletých žáků*. Praha: Česká školní inspekce, 51 s. ISBN: 978-80-905632-0-9.

Repáš, V., Pribišová, A., Vantuch, J. (1991): *Úlohy z matematických olympiád na základní škole*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 190 s. ISBN 80-04-25439-X.

Straková, J. a kol. (2002): *Vědomosti a dovednosti pro život: Čtenářská, matematická a přírodovědná gramotnost patnáctiletých žáků v zemích OECD*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 111 s. ISBN: 80-211-0411-2.

Tomášek, V. a kol. (2008): *Výzkum TIMSS 2007: Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 35 s. ISBN: 978-80-211-0565-2.

Tomášek, V. a kol. (2009): *Výzkum TIMSS 2007: Úlohy z matematiky pro 8. ročník.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 109 s. ISBN: 978-80-211-0591-1.

Tomášek, V. a kol. (2012): *Národní zpráva TIMSS 2011*. Praha: Česká školní inspekce, 35 s. ISBN: 978-80-905370-4-0.

Tomášek, V., Frýzek, M. (2013): *Matematická gramotnost: Úlohy z šetření PISA 2012*. Praha: Česká školní inspekce, 85 s. ISBN: 978-80-905632-1-6.

Ústav pro informace ve vzdělávání (2004): *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 50 s., jako překlad The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.

Ústav pro informace ve vzdělávání (2006): *Netradiční úlohy: Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 65 s. ISBN: 80-211-0522-4.

Výzkumný ústav pedagogický (2006): *Manuál pro tvorbu školních vzdělávacích programů v základním vzdělávání.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 104 s. ISBN: 80-87000-03-X. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2010/02/Manual_SVP-ZV.pdf

Výzkumný ústav pedagogický (2007): *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 126 s. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf

Výzkumný ústav pedagogický (2010): *Gramotnosti ve vzdělávání: příručka pro učitele*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 64 s. ISBN: 978-80-87000-41-0.

Výzkumný ústav pedagogický (2011): *Gramotnosti ve vzdělávání: soubor studií*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 98 s. ISBN: 978-80-87000-74-8.

Zhouf, J. a kol. (1999): *10 (+1) let korespondenčního semináře PIKOMAT v Praze*. Praha: Gymnázium Christina Dopplera, 180 s.

Zhouf, J. (2001): *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice: doktorandská disertační práce.* Praha: UK Fakulta matematicko-fyzikální, 124 s.

Zhouf, J. a kol. (2006): *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů*. Praha: Prometheus, 375 s. ISBN: 80-7196-304-6.

Seznam internetových odkazů:

Gymnázium J. K. Tyla: Matematický korespondenční seminář. [online]. [cit. 2014-01-15]. Dostupné z: http://mks.gjkt.cz/

KoMáR. [online]. [cit. 2014-03-05]. Dostupné z: http://komar.math.muni.cz/

Koperníkův Korespondenční Seminář. [online]. [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://kokos.gmk.cz/

Matematická Olympiáda. [online]. [cit. 2014-02-16]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz//

Matematický korespondenční seminář KOS. [online]. [cit. 2014-02-21]. Dostupné z: http://www.kos-ujep.estranky.cz/

MATES: Oficiální stránky matematické korespondenční soutěže Mates. [online]. [cit. 2014-03-05]. Dostupné z:http://www.matesonline.wz.cz/novinky.php

Oficiální stránka ZŠ Milady Horákové. [online]. [cit. 2014-01-22]. Dostupné z: http://www.zshorakhk.cz/

PIKOMAT v Praze: Matematický korespondenční seminář. [online]. [cit. 2013-12-19]. Dostupné z: http://www.pikomat.unas.cz/

6. SEZNAM OBRÁZKŮ

7. SEZNAM TABULEK

8. SEZNAM GRAFŮ