

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Jan Pospíšil

Kruhová inverze

Olomouc 2020

vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci zpracoval samostatně, pouze na základě uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 15. dubna 2020

Jan Pospíšil

Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za trpělivost a cenné rady při vedení a zpracování této bakalářské práce. Mé díky patří též Ing. Radimu Dudkovi za pomoc s důkazy některých teorémů a také Mgr. Terezii Hiklové za provedenou jazykovou korekturu.

Rád bych též poděkoval svým prarodičům Vlastislavovi a Jindřišce, kteří mě při psaní této práce podporovali.

OBSAH

ÚVOD	6
1 KRUHOVÁ INVERZE JAKO ZOBRAZENÍ V ROVINĚ	7
1.1 Lineární a nelineární transformace.....	7
1.2 Konformní zobrazení, involuce, samodružnost.....	8
1.3 Euklidovská a Möbiova rovina, nevlastní bod.....	9
1.4 Kruhové křivky a sinové spirály.....	10
1.5 Kruhová inverze.....	14
2 VLASTNOSTI OBRAZŮ KŘIVEK V KRUHOVÉ INVERZI	26
2.1 Kruhové křivky.....	26
2.1.1 Bod (nulová kruhová křivka).....	26
2.1.2 Přímka (nestředová kruhová křivka).....	31
2.1.3 Kružnice (středová kruhová křivka).....	39
2.1.4 Části kruhových křivek.....	52
2.1.5 Svazky kruhových křivek.....	63
2.2 Sinové spirály.....	69
2.2.1 Rovnoosá hyperbola a Bernoulliho lemniskáta.....	69
2.2.2 Parabola a kardioida.....	74
2.3 Kuželosečky.....	77
2.3.1 Elipsa.....	77
2.3.2 Hyperbola.....	79
3 APLIKACE KRUHOVÉ INVERZE	82
3.1 Apolloniova a Pappova úloha.....	82
3.1.1 Apolloniova úloha typu BBB.....	88
3.1.2 Apolloniova úloha typu PPP.....	88
3.1.3 Apolloniova úloha typu BBP / Pappova úloha typu (BP)B.....	89
3.1.4 Apolloniova úloha typu BPP / Pappova úloha typu (BP)P.....	91
3.1.5 Apolloniova úloha typu BBK / Pappova úloha typu (BK)B.....	92
3.1.6 Apolloniova úloha typu BPK.....	93
3.1.7 Pappova úloha typu (BP)K / Pappova úloha typu (BK)P.....	95
3.1.8 Apolloniova úloha typu PPK.....	97

3.1.9 Apolloniova úloha typu BKK.....	100
3.1.10 Pappova úloha typu (BK)K.....	103
3.1.11 Apolloniova úloha typu PKK.....	105
3.1.12 Apolloniova úloha typu KKK.....	108
3.2 Určení počtu řešení Apolloniovy/Pappovy úlohy.....	109
3.2.1 Kanonické formy.....	110
3.2.2 Společné tečny.....	116
3.3 Geometrické problémy řešené pomocí kruhové inverze.....	118
3.3.1 Steinerův řetěz (<i>Steiner Chain</i>).....	118
3.3.2 Pappův arbelos (<i>Arbelos of Pappus</i>).....	119
3.2.1 Ptolemaiova věta (<i>Ptolemy's Theorem</i>).....	120
3.2.2 Miquelova věta (<i>Miquel's Theorem</i>).....	121
ZÁVĚR	122
SEZNAM LITERATURY	124
PŘÍLOHY	128
Příloha č. 1: Přehled obrazů křivek v kruhové inverzi.....	128
Příloha č. 2: Přehled inverzních křivek kuželoseček.....	129
Příloha č. 3: Přehled vzájemných poloh tří kruhových křivek.....	130

ÚVOD

Bakalářská práce se zabývá nelineárním geometrickým zobrazením zvaným kruhová inverze. Toto zobrazení bylo známo již ve 2. stol. př. n. l. Apolloniovi z Pergy, jenž s jeho pomocí řešil některé geometrické úlohy. Zhruba o pět set let později se o kruhové inverzi zmiňuje i Pappus z Alexandrie, který studoval obrazy přímek a kružnic v tomto zobrazení. Po skončení zlaté éry řecké geometrie bylo toto zobrazení zapomenuto a zájem o něj a o studium jeho vlastností se opět objevil až v 19. stol.

Cíle této práce jsou dva. První z nich je sesbírat, porovnat a utřídit základní poznatky o kruhové inverzi v české odborné literatuře a doplnit je o poznatky publikované v zahraničí. Druhým cílem je prozkoumat vlastnosti tohoto zobrazení a objevit nové, dosud nepublikované či autorem práce nenalezené, poznatky o kruhové inverzi. K tomuto účelu bude využito práce s dynamickým geometrickým softwarem *GeoGebra*. Dílčím cílem práce je též prezentovat všechny uvedené poznatky v graficky srozumitelné a estetické formě.

V textu práce se objevují tři druhy matematických vět. Označení *věta* používá autor pro matematické tvrzení, které společně s důkazem přejímá ze zdrojů uvedených v seznamu literatury. Jako *teorém* jsou označeny věty, jež byly objeveny autorem při zkoumání vlastností inverze a společně s nimi předkládá i jejich důkaz. Věty, které se autorovi nepodařily dokázat, nesou označení *hypotéza*.

Bakalářská práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola je teoretická a zavádí všechny potřebné pojmy a jejich definice, které vyústí na konci kapitoly v definici samotné kruhové inverze. Druhá kapitola se postupně zabývá všemi druhy kuželoseček, jejich obrazy v kruhové inverzi a vlastnostmi těchto obrazů. Nejvíce prostoru je věnováno přímkám a kružnicím, jelikož jsou tyto znalosti prakticky upotřebitelné při řešení nejrůznějších geometrických problémů. Pojednání o obrazech ostatních kuželoseček je naopak zajímavější a rozšiřuje čtenáři obzor o poznání křivek vyšších řádů. Třetí kapitola je věnována praktickým řešením geometrických problémů s využitím kruhové inverze. Značná část této kapitoly je zaměřena na řešení Apolloniových a Pappových úloh, přičemž při řešení určitých typů těchto úloh je využití kruhové inverze nezbytné. Zbytek kapitoly se věnuje některým dalším, méně známým, úlohám využívající při řešení kruhovou inverzi.

1 KRUHOVÁ INVERZE JAKO ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy, které jsou třeba pro definici kruhové inverze jako zobrazení v rovině. Je pojednáno o různých druzích zobrazení v rovině a jejich vlastnostech a je rozšířen pojem Euklidovské roviny. Dále jsou zmíněny dvě třídy křivek, jejichž obrazy v kruhové inverzi se zabývá následující kapitola. Na závěr je pak definovaná samotná kruhová inverze a její vlastnosti.

1.1 Lineární a nelineární transformace

Definice 1.1

Geometrickým zobrazením nazýváme předpis $f: A \rightarrow B$, který každému bodu X (tzv. *vzor*) z množiny A přiřazuje nejvýše jeden bod $X' = f(X)$ (tzv. *obraz*) z množiny B .

(Lávička, 2006, s. 7)

Mezi typická geometrická zobrazení patří např. identita, translace (posunutí), rotace (otočení), osová či středová symetrie (souměrnost) nebo homotetie (stejnolehlost). Všechna tato zobrazení jsou bijektivní¹ a zobrazují celou množinu A samu na sebe; jedná se tedy o tzv. **geometrické transformace** (Lávička, 2006, s. 8).

Definice 1.2

Bijektivní zobrazení $f: A \rightarrow A$ afinního bodového prostoru A sama na sebe se nazývá **afinní transformace**, právě když každé tři navzájem různé kolineární² body B, C, D zobrazují buď do jediného bodu nebo do tří různých kolineárních bodů $f(B), f(C), f(D)$ tak, že tyto body zachovávají dělicí poměr $(BCD) = (f(B)f(C)f(D))$.

(Leischner, 2010, s. 26; Lávička, 2006, s. 13)

Vlastností afinní transformace je, že zobrazuje přímky opět na přímky, případně na body. Zobrazení, která převádějí přímky na přímky se nazývají lineární.

1 Bijektivní zobrazení – jedná se o zobrazení, které je injektivní (tedy různým vzorům jsou přiřazeny různé obrazy) a zároveň surjektivní (každý prvek z množiny, do níž se zobrazuje má alespoň jeden vzor).

2 Kolineární – ležící na jedné přímce.

Transformace můžeme rozdělit na lineární a nelineární. **Lineární transformace** je takové zobrazení, jehož asociované zobrazení³ splňuje následující vlastnosti:

1. *aditivita* $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
2. *homogenita* $\varphi(k \cdot \vec{v}) = k \cdot \varphi(\vec{v})$ $k \in \mathbb{R}$

(Balková, 2013, s. 60)

Lineární transformace jsou všechny výše uvedené geometrické transformace, protože všechny zobrazují přímky opět na přímky (příp. body). Oproti tomu **nelineární transformace** nesplňují vlastnosti aditivity nebo homogenity. V důsledku toho se v ní přímky nezobrazují vždy na přímky, ale obecně na křivky.

1.2 Konformní zobrazení, involuce, samodružnost

Konformní zobrazení je takové zobrazení, které je spojitě a izogonální, tj. zachovává odchylky křivek (Pospíšilová, 2012, s. 13). Většina afinních transformací jsou konformní zobrazení, např. translace, rotace, symetrie (středová i osová) a homotetie. Naopak osová afinita či elace konformní transformace nejsou.

Involutorní zobrazení (neboli **involuce**) je zobrazení, které složeno samo se sebou dává identitu (Chodorová, 2013, s. 39). Involuce je tedy sama sobě inverzním zobrazením.

$$f \circ f = \text{id} \quad \rightarrow \quad f(f(X)) = X \quad \rightarrow \quad f = f^{-1}$$

V tomto zobrazení se nerozlišuje vzor a obraz. Příkladem involuce může být třeba osová a středová souměrnost. *Středem involuce* se nazývá takový vlastní bod, který v zobrazení odpovídá nevlastnímu bodu⁴. Pokud nevlastnímu bodu odpovídá opět nevlastní bod (např. u osové souměrnosti), střed involuce neexistuje (Chodorová, 2013, s. 40).

3 Asociované zobrazení – zobrazení, podle něhož se transformují všechny vektory daného afinního prostoru.

4 O nevlastním bodě viz dále podkapitulu 1.3.

Involuce může být určena třemi způsoby:

1. dvěma páry odpovídajících si bodů (Chodorová, 2013, s. 39)
2. středem involuce a jedním párem odpovídajících si bodů (Chodorová, 2013, s. 40)
3. středem involuce a *samodružným bodem*

Definice 1.3

Bud' $f: A \rightarrow B$ geometrické zobrazení z množiny A do množiny B , přičemž předpokládejme $A \cap B \neq \emptyset$. Bod $S \in A \cap B$ se nazývá **samodružný bod** zobrazení f , právě když $f(S) = S$; bodová množina $M \in A \cap B$ se nazývá **samodružná množina** zobrazení f , právě když $f(M) = M$. Množina M se nazývá **množina samodružných bodů**, je-li každý její bod samodružný.

(Lávička, 2006, s. 9)

Samodružný bod či **samodružná množina** jsou tedy objekty, které se zobrazují sami na sebe.

Slabě samodružná množina je taková množina, která se zobrazí sama na sebe, ale jednotlivé body této množiny samodružné nejsou. Jako příklad lze uvést přímku v osově souměrnosti, která je kolmá na osu souměrnosti. Kolmá přímka je slabě samodružná, protože se sice celá přímka zobrazí sama na sebe, ale jednotlivé body přímky se zobrazí na jiné body této přímky. Jiným příkladem může být libovolná kružnice ve středové souměrnosti se středem ve středu souměrnosti. Kružnice se zobrazí sama na sebe, její body však nikoliv.

Silně samodružná množina je množina, která je zároveň i *množinou samodružných bodů*, tedy celá množina se zobrazí sama na sebe a jednotlivé body této množiny se též zobrazí sami na sebe. Příkladem může být osa v osově souměrnosti. Ta se zobrazí sama na sebe a též všechny její body se zobrazí na sebe.

1.3 Euklidovská a Möbiova rovina, nevlastní bod

Definice 1.4

Euklidovská rovina je dvoudimenzionální afinní prostor, jehož zaměření je vektorový prostor se skalárním součinem, s Euklidovskou metrikou: $|XY| = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}}$.

(Leischner, 2010, s. 14)

Definice 1.5

Möbiova rovina je Euklidovská rovina doplněná o právě jeden *nevlastní bod* M^∞ , který se nazývá **Möbiův bod**. Möbiův⁵ bod je různý od všech vlastních bodů roviny a leží na všech přímkách roviny a vně každé kružnice v rovině.

(Říha, 2010, s. 20; Lávička, 2006, s. 35)

Bodům Euklidovské roviny říkáme **vlastní body**. Ostatní body, které byly k původní rovině přidány (o tyto body rozšířeny) nazýváme **nevlastní body**.

Möbiova rovina se liší od projektivně rozšířené Euklidovské roviny. Základním rozdílem je, že Möbiova rovina obsahuje pouze jediný nevlastní bod M^∞ a všechny přímky roviny se v tomto bodě protínají. Oproti tomu projektivně rozšířená Euklidovská rovina obsahuje nekonečně mnoho různých nevlastních bodů (tvořících *nevlastní přímku*) takových, že každé dvě rovnoběžné přímky se protínají právě v jednom nevlastním bodě, zatímco jiné dvě rovnoběžné přímky (s jiným směrovým vektorem) se protínají v jiném nevlastním bodě.⁶

1.4 Kruhové křivky a sinové spirály

Kruhová křivka je zobecněním pojmu kružnice pro všechny možné kladné poloměry.

- a) $r \in (0, \infty)$ poloměr kružnice je reálné číslo, jedná se tedy o *kružnici*
- b) $r \rightarrow \infty$ poloměr kružnice jde limitně k nekonečnu, výsledkem je *přímka*
- c) $r = 0$ poloměr kružnice je nulový a stává se z ní jediný *bod*

V kartézských souřadnicích má kruhová křivka tuto rovnici:

$$[1] \quad A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{Leischner, 2010, s. 111})^7$$

⁵ August Ferdinand Möbius (1790–1868) – německý matematik.

⁶ *Nevlastní bod* přímky p je definován jako *svazek rovnoběžek* (svazek přímek 2. druhu) určený přímkou p . *Svazek různoběžek* (svazek přímek 1. druhu) o středu S je množina všech přímek procházejících bodem S .
(Chodorová, 2013, s. 14–15)

⁷ Rovnice je ve zdroji uvedena v komplexních souřadnicích ve tvaru $Az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + C$, kde $A, C \in \mathbb{R}$ a $b, z \in \mathbb{C}$. Komplexní čísla lze zapsat jako $b = b_x + b_y i$ a $z = x + y i$.

Úprava na tvar uvedený výše je následující:

$$A(x + yi)(x - yi) + (b_x - b_y i)(x + yi) + (b_x + b_y i)(x - yi) + C$$

$$A(x^2 + y^2) + (b_x x + b_x yi - b_y xi + b_y y) + (b_x x - b_x yi + b_y xi + b_y y) + C \quad \dots$$

Podle hodnot koeficientů rovnice vyjadřuje **kružnici** (*středová kruhová křivka*), **přímku** (*nestředová kruhová křivka*), **bod** (*nulová kruhová křivka*) či prázdnou množinu. (Janyška, 2019, s. 111). Tyto možnosti znázorňuje následující tabulka:

přímka	$A = 0$	
kružnice⁸	$A \neq 0$	$\frac{D^2 + E^2}{4} - AF > 0$
bod	$A \neq 0$	$\frac{D^2 + E^2}{4} - AF = 0$
prázdná množina	$A \neq 0$	$\frac{D^2 + E^2}{4} - AF < 0$

(Leischner, 2010, s. 111)

Obecná *kuželosečka*⁹ v rovině má v kartézských souřadnicích rovnici tvaru $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Vhodným otočením souřadnic se můžeme zbavit členu xy , tzn. že rovnici lze psát ve tvaru $A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$. Kruhová křivka je tedy speciálním případem obecné kuželosečky pro koeficienty $A' = C'$ (Weisstein, Quadratic Curve; Abramson, 2014, p. 910).

V polárních souřadnicích má kuželosečka obecnou rovnici $r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cdot \cos \theta}$ ^{10 11}.

... $A(x^2 + y^2) + 2b_x x + 2b_y y + C$. Ve výsledné úpravě jsou pak koeficienty přejmenovány takto:
 $A = A \quad D = 2b_x \quad E = 2b_y \quad F = C$

8 Kružnice se středem $x_0 = -\frac{D}{2A}$; $y_0 = -\frac{E}{2A}$ a poloměrem $r = \frac{1}{|A|} \sqrt{\frac{D^2 + E^2}{4} - AF}$.

9 *Kuželosečka* je rovinná křivka vzniklá jako průnik roviny s rotační kuželovou plochou. Dělí se na *regulární*, kdy rovina neprochází vrcholem kuželové plochy a *singulární*, kdy rovina prochází vrcholem. Mezi regulární kuželosečky patří *kružnice*, *elipsa*, *parabola* a *hyperbola*. Mezi singulární kuželosečky patří *přímka* (případně dvojice přímek) a *bod*. (Kocourek, 2016, s. 21; Abramson, 2014, p. 909)

10 Parametr ε (*číslná excentricita / výstřednost*) určuje výsledný tvar kuželosečky:

$\varepsilon = 0$ kružnice, $\varepsilon < 1$ elipsa, $\varepsilon = 1$ parabola,
 $\varepsilon > 1$ hyperbola, $\varepsilon = \sqrt{2}$ rovnoosá hyperbola, $\varepsilon \rightarrow \infty$ přímka.

Pro bod můžeme položit $a = 0$.

11 Další možné tvary jsou $r = \frac{a}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta}$, $r = \frac{a}{1 - \varepsilon \cdot \sin \theta}$ a $r = \frac{a}{1 + \varepsilon \cdot \sin \theta}$.

Záměna znamének a funkce sinus za kosinus způsobuje pouze otočení kuželosečky o úhel 90° .

(Abramson, 2014, p. 923)

Takto zadaná kuželosečka má jedno ze svých ohnisek ve středu souřadné soustavy.

Odchylka kruhových křivek je dána obecně odchylkou jejich tečen ve společném bodě. V případě přímky je její tečna sama přímka; v případě kružnice se jedná o kolmici na přímku vedenou jejím středem a bodem dotyku, kterým tato kolmice prochází.

Odchylka dvou kruhových křivek $\sphericalangle(c_1, c_2) = \varphi$ je dána následujícím vztahem:

$$[2] \quad \varphi = \arccos\left(\frac{|D_1 D_2 + E_1 E_2 - 2 A_1 F_2 - 2 A_2 F_1|}{\sqrt{(D_1^2 + E_1^2 - 4 A_1 F_1)} \sqrt{(D_2^2 + E_2^2 - 4 A_2 F_2)}}\right)$$

(Janyška, 2019, s. 111)¹²

Sinová spirála¹³ je druhem spirály¹⁴, u níž je závislost vzdálenosti od středu dána některou z goniometrických funkcí. Vzhledem k tomu, že se jedná o funkci ohraničenou, a to na intervalu $[0, 1]$, výsledná křivka se již nepodobá „klasické“ spirále.

Spirála je v polárních souřadnicích určena následující rovnicí:

$$r^n = a^n \cdot \cos(n \cdot \theta) \quad (\text{Jarešová, 2009, s. 16})$$

12 Původní vztah je ve zdroji uveden v jiném tvaru. Uvažujme obecnou rovnici přímky a kružnice

$p: ax + by + d = 0$ a $k: x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + c = 0$. Jednotlivé odchylky jsou pak tyto:

Odchylka dvou přímek $\sphericalangle(p_1, p_2) = \varphi$ je dána vztahem $\cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)} \sqrt{(a_2^2 + b_2^2)}}$.

Odchylka přímky a kružnice $\sphericalangle(p, k) = \varphi$ vztahem $\cos \varphi = \frac{|am + bn + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2)} \sqrt{(m^2 + n^2 - c)}}$.

Odchylka dvou kružnic $\sphericalangle(k_1, k_2) = \varphi$ vztahem $\cos \varphi = \frac{|2m_1 m_2 + 2n_1 n_2 - c_1 - c_2|}{2\sqrt{(m_1^2 + n_1^2 - c_1)} \sqrt{(m_2^2 + n_2^2 - c_2)}}$.
(Janyška, 2019, s. 106–107)

Do uvedených vztahů dosadíme následující koeficienty:

$$a = D, \quad b = E, \quad d = F, \quad m = -\frac{D}{2A}, \quad n = -\frac{E}{2A}, \quad c = \frac{F}{A}$$

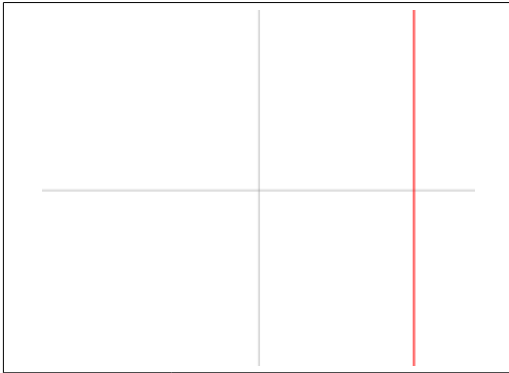
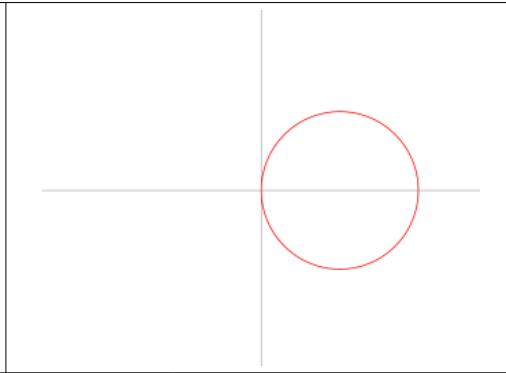
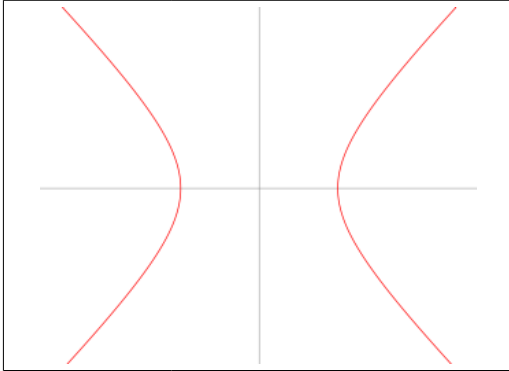
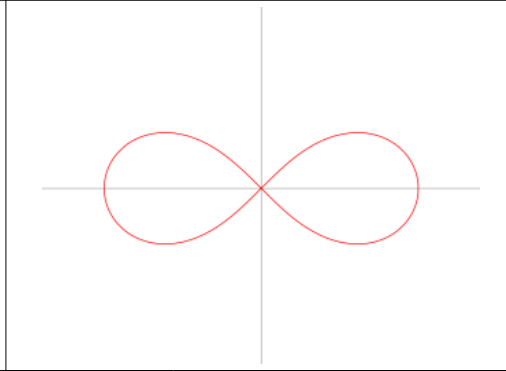
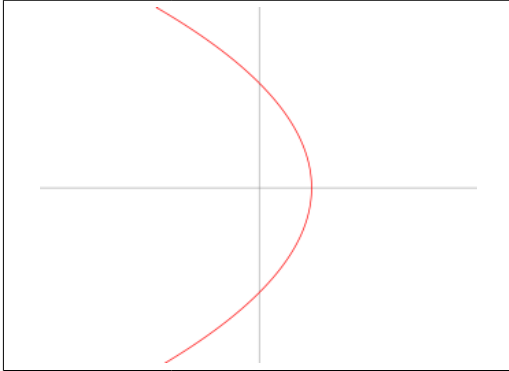
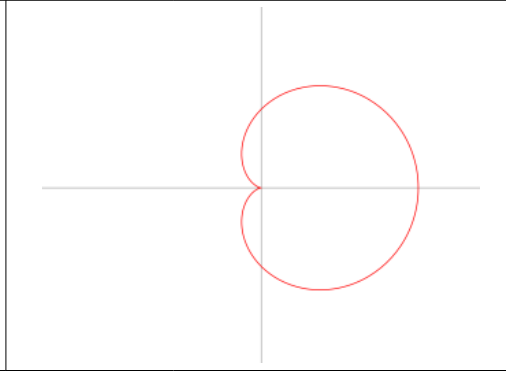
Po úpravě pak jednotlivé vztahy odpovídají výše uvedenému, když v případě přímky dosadíme za $A = 0$.

13 Touto spirálou se poprvé zabýval skotský matematik *Colin Maclaurin* (1698–1746).

14 *Spirála* je rovinná křivka, která vzniká jako stopa bodu pohybující se po polopřímce od počátečního bodu (závislost je obecně funkční) zatímco polopřímka se otáčí kolem pólu při konstantní úhlové rychlosti.

(Jarešová, 2009, s. 5)

Podle hodnoty parametru n se může jednat o následující křivky:

			
$n = -1$	přímka	$n = 1$	kružnice
			
$n = -2$	hyperbola¹⁵	$n = 2$	lemniskáta¹⁶
			
$n = -1/2$	parabola	$n = 1/2$	kardioida

(Jarešová, 2009, s. 16–17; Weisstein, Sinusoidal Spiral; Ferréol, Sinusoidal Spiral)

¹⁵ V tomto případě se jedná o *rovnoosou hyperbolu!*

¹⁶ Tzv. *Bernoulliho lemniskáta*, kterou popsal švýcarský matematik a fyzik *Jacob Bernoulli* (1655–1705) v roce 1694.

1.5 Kruhová inverze

Definice 1.6

Nechť je v Euklidovské rovině dána kružnice $\omega(S, r)$. Transformace $I_\omega: M_2 \rightarrow M_2$ v Möbiově rovině se nazývá **kruhová inverze**, právě když splňuje následující podmínky:

1. $I_\omega(S) = M^\infty$
2. $I_\omega(M^\infty) = S$
3. $I_\omega(X) = X' \quad X \neq S \wedge X \neq M^\infty$ a platí, že $X' \in \overrightarrow{SX} \wedge |SX| \cdot |SX'| = r^2$

Kružnice ω se nazývá **řídící kružnice** inverze, bod S **střed kruhové inverze** a kladné číslo $k = r^2$ **koeficient kruhové inverze**¹⁷.

(Lávička, 2006, s. 37; Říha, 2010, s. 20)

Kruhová inverze je *nelineární transformací* (Lávička, 2006, s. 35), která zobrazuje body vnitřní oblasti řídící kružnice na body její vnější oblasti a vice versa¹⁸. Body řídící kružnice se zobrazují sami na sebe a jsou tedy samodružné (Říha, 2010, s. 20).

Pro jednoduchost budeme nadále předpokládat, že střed kruhové inverze je zároveň počátkem souřadné soustavy. Z definice pak plyne analytické vyjádření obrazu bodu zapsané v kartézských souřadnicích takto:

$$[3a] \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{k}{x^2 + y^2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{Lávička, 2006, s. 38})^{19}$$

V polárních souřadnicích jsou rovnice inverze následující:

$$[3b] \quad r' = \frac{k}{r} \quad \theta' = \theta \quad (\text{Skříšovský, 2012, s.23})$$

¹⁷ Též *mocnost kruhové inverze*.

¹⁸ Body vnější a vnitřní oblasti kružnice jsou určeny tzv. *mocností*. **Mocnost bodu** ke kružnici s rovnicí

$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0 \text{ je číslo } K = x_0^2 + y_0^2 + \frac{D}{A}x_0 + \frac{E}{A}y_0 + \frac{F}{A}, \text{ kde } x_0, y_0 \text{ jsou}$$

souřadnice tohoto bodu. Pro hodnoty K mocnosti bodu ke kružnici nastávají tyto případy:

$K < 0$: bod vnitřní oblasti kružnice $K > 0$: bod vnější oblasti kružnice

$K = 0$: bod leží na kružnici

(Janyška, 2019, s. 103)

¹⁹ Pro kruhovou inverzi s obecným středem s_x, s_y je rovnice inverze následující:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{k}{(x - s_x)^2 + (y - s_y)^2} \cdot \begin{bmatrix} x - s_x \\ y - s_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix}$$

Tyto rovnice plynou přímo z definice kruhové inverze, která ve 3. bodě říká, že násobek vzdálenosti vzoru a obrazu je roven koeficientu (mocnosti) inverze a že obraz bodu leží na polopřímce určené středem inverze a vzorem bodu.

Věta 1.1

Kruhová inverze je *involutorní zobrazení*. Středem involuce je střed S řídicí kružnice.

(Skříšovský, 2012, s. 23)

Důkaz:

V polárních souřadnicích je důkaz triviální. V kartézských souřadnicích si nejprve podle předpokladu involutornosti vyjádříme složky x, y :

$$x = \frac{k}{x'^2 + y'^2} \cdot x' \quad y = \frac{k}{x'^2 + y'^2} \cdot y'$$

Nyní stačí dosadit do vyjádřené složky x' (pro složku y' je důkaz identický):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{k}{x^2 + y^2} \cdot x = \frac{k}{\left(\frac{k}{x'^2 + y'^2} \cdot x'\right)^2 + \left(\frac{k}{x'^2 + y'^2} \cdot y'\right)^2} \cdot \left(\frac{k}{x'^2 + y'^2} \cdot x'\right) = \\ &= \frac{k^2}{\left(\left(\frac{k}{x'^2 + y'^2}\right)^2 \cdot (x'^2 + y'^2)\right) \cdot (x'^2 + y'^2)} \cdot x' = \frac{k^2 \cdot (x'^2 + y'^2)^2}{(x'^2 + y'^2)^2} \cdot x' = x' \end{aligned}$$

Vidíme, že obrazem obrazu je původní vzor, což jsme měli dokázat. □

Jak již bylo zmíněno výše, každou involuci lze zadat třemi různými způsoby; stejně tak je možné zadat i kruhovou inverzi. Navíc lze zadat inverzi ještě dalšími způsoby výše neuvedenými.

A) Kruhová inverze zadaná středem S a samodružným bodem X :

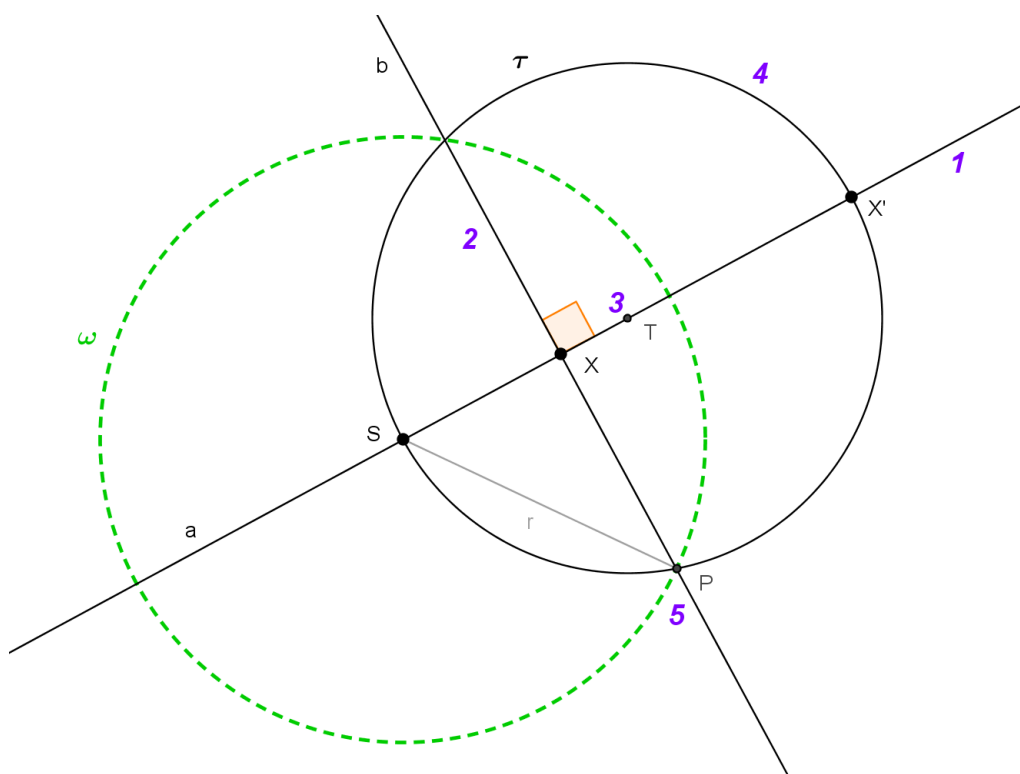
Jedná se o klasické zadání. Samodružné body kruhové inverze leží na řídicí kružnici, tudíž je bodem X určen poloměr této kružnice $r = |SX|$.

Popis konstrukce řídicí kružnice:

1. ω ; $\omega(S, |SX|)$

B) Kruháová inverze zadaná středem S a párem odpovídajících si bodů X, X' :

Podmínkou takto zadané inverze je, aby všechny tři body S, X, X' byli kolineární, jinak se totiž nejedná o kruhovou inverzi. Bez újmy na obecnosti označíme bod bližší středu X a vzdálenější bod X' . Řídící kružnici konstruujeme pomocí *Euklidovy věty o odvěsně*.²⁰ Konstrukce se tak zaměřuje na hledání bodu P , který leží na kolmici k přímce, na níž leží všechny zadané body a procházející bodem X a zároveň takového, které svírá se středem a bodem X' pravý úhel $|\sphericalangle SPX'| = 90^\circ$. Takový bod nalezneme jako průnik *Thaletovy kružnice*²¹ sestrojené nad úsečkou SX' a zmíněné kolmice. (Chodorová, 2013, s. 41)



Popis konstrukce řídící kružnice:

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. a ; $a = SX \wedge X' \in a$ | 4. τ ; $\tau(T, ST)$ |
| 2. b ; $X \in a \wedge a \perp b$ | 5. P ; $P \in \{b \cap \tau\}$ |
| 3. T ; $T \in a \wedge ST = TX' $ | 6. ω ; $\omega(S, SP)$ |

²⁰ V každém pravouhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a přilehlého úseku. (Pomykalová, 1997, s. 74)

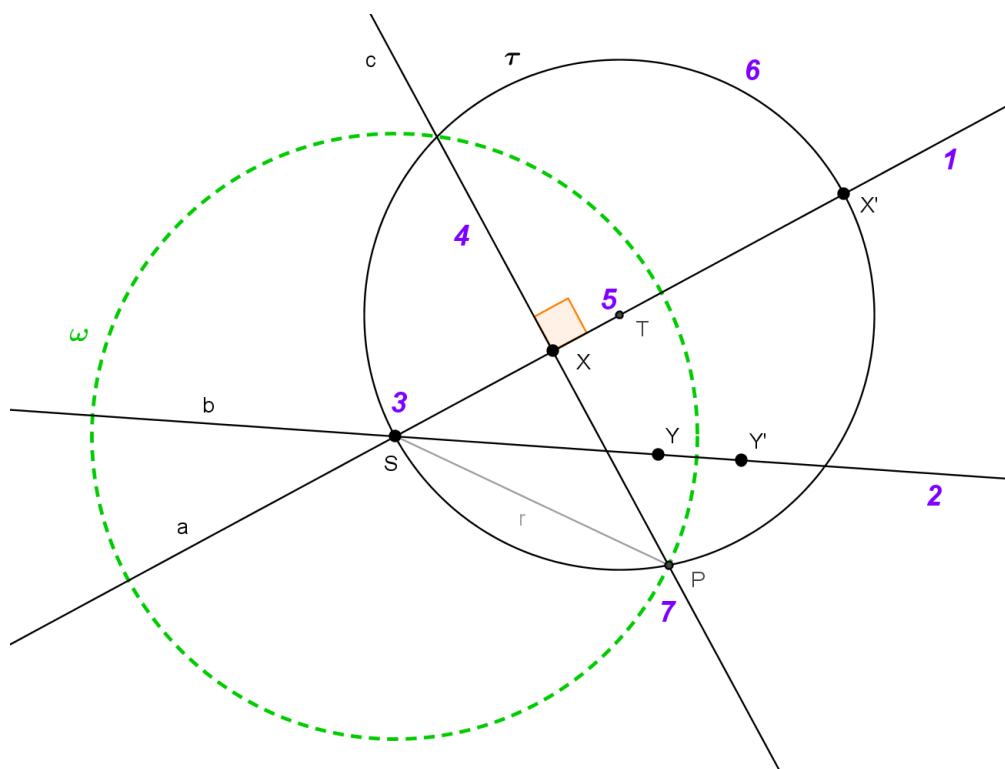
V uvedeném příkladu konstrukce se jedná o vztah $|SX'| \cdot |SX| = |SP|^2$ v trojúhelníku SPX' .

²¹ Množina vrcholů všech pravých úhlů, jejichž ramena procházejí body A, B ($A \neq B$), tj. množina všech bodů, z nichž vidíme úsečku AB pod pravým úhlem, je kružnice s průměrem AB kromě bodů A, B .

(Pomykalová, 1997, s. 92)

C) Kruhová inverze zadaná dvěma páry odpovídajících si bodů X, X' a Y, Y' :

Přímky XX' a YY' nesmí být rovnoběžné.²² Průsečík obou přímek se též nesmí nacházet ve vnitřní oblasti čtyřúhelníku $XX'YY'$; takto zadaná inverze neexistuje. Bez újmy na obecnosti označíme body z dvojice blíže průsečíku přímek bez apostrofu, body vzdálenější s apostrofem. Daný průsečík je hledaným středem kruhové inverze, zbytek konstrukce pak kopíruje předchozí zadání.

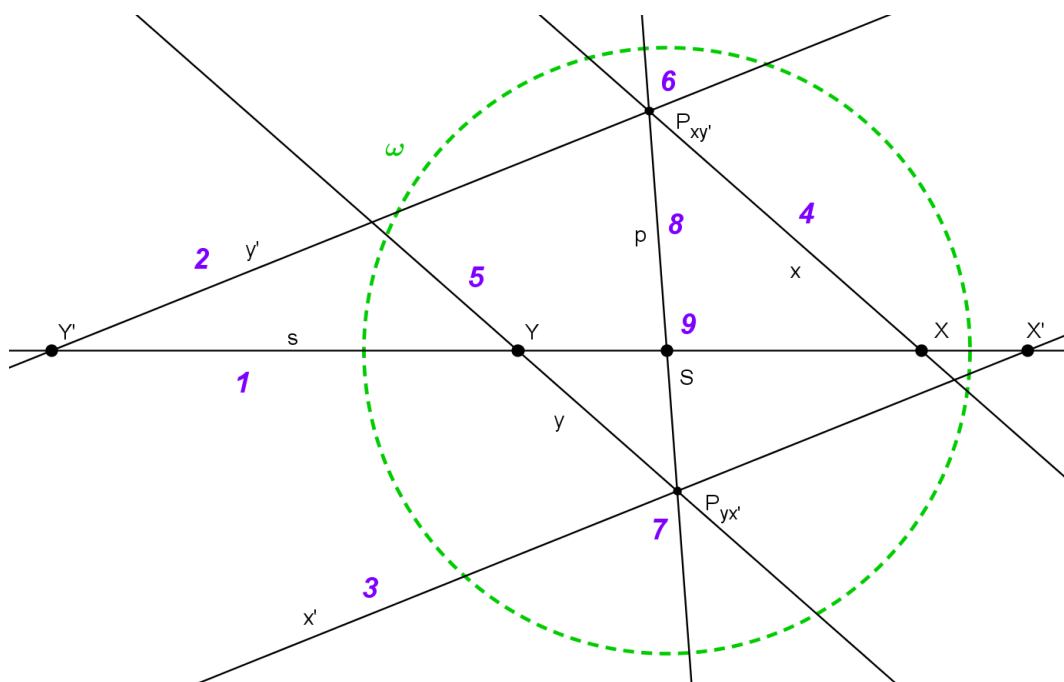


Popis konstrukce řídicí kružnice:

1. a ; $a = XX'$
2. b ; $b = YY'$
3. S ; $S \in \{a \cap b\}$
4. c ; $X \in c \wedge a \perp c$
5. T ; $T \in a \wedge |ST| = |TX'|$
6. τ ; $\tau(T, |ST|)$
7. P ; $P \in \{c \cap \tau\}$
8. ω ; $\omega(S, |SP|)$

²² Na každé přímce podle definice leží střed inverze a neexistoval by tak jediný střed.

Může též nastat případ, kdy jsou všechny čtyři zadané body kolineární. Úsečky XX' a YY' nesmí obsahovat stejné body²³, jinak inverze neexistuje. Opět označíme bližší si z dvojice bodů bez apostrofu, vzdálenější s apostrofem. Střed inverze leží na úsečce XY . Z bodu X vedeme libovolnou přímku x a k ní rovnoběžku y z bodu Y . Z bodu X' vedeme k oběma přímek libovolnou různoběžku x' a z bodu Y' k ní další rovnoběžku y' . Průsečík přímek x a y' označíme $P_{xy'}$, a průsečík přímek y a x' označíme $P_{yx'}$. Průnikem přímky, na níž leží všechny zadané body a přímky, která vede průsečíky $P_{xy'}$ a $P_{yx'}$ je hledaný střed inverze. (Chodorová, 2013, s. 40) Zbytek konstrukce je již identický s výše uvedenými.



Popis konstrukce řídicí kružnice:

1. s ; $s = XX' = YY'$
2. y' ; $Y' \in y'$
3. x' ; $X' \in x' \wedge x' \parallel y'$
4. x ; $X \in x$
5. y ; $Y \in y \wedge x \parallel y$
6. $P_{xy'}$; $P_{xy'} \in \{x \cap y'\}$
7. $P_{yx'}$; $P_{yx'} \in \{y \cap x'\}$
8. p ; $p = P_{xy'} P_{yx'}$
9. S ; $S \in \{p \cap s\}$

10. dále postupujeme podle konstrukcí uvedených výše

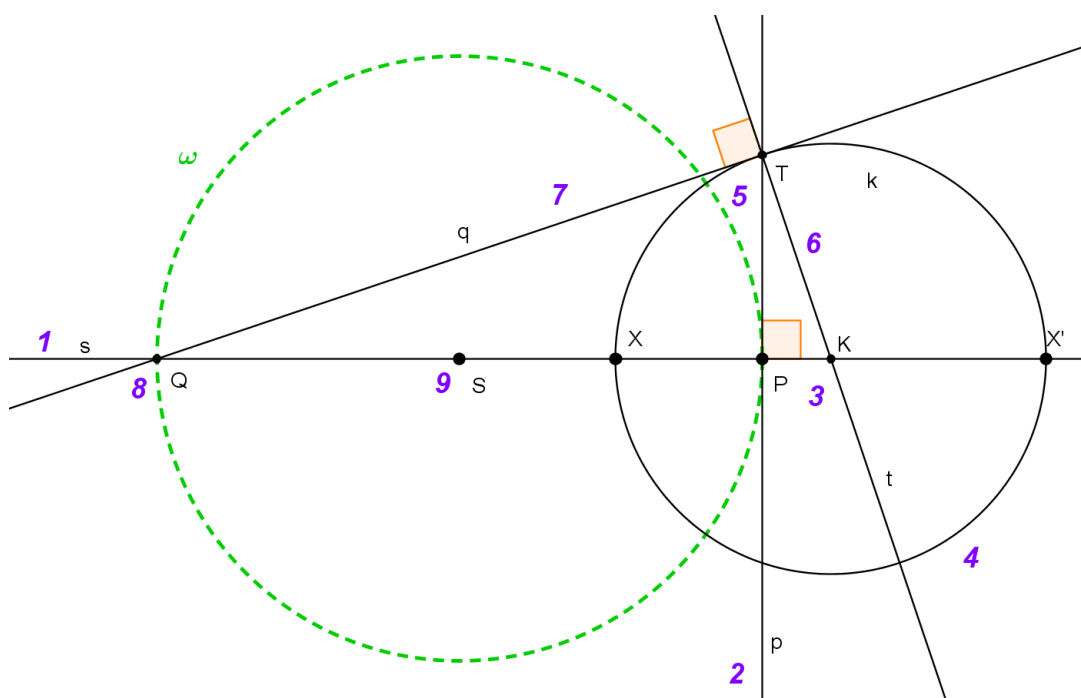
²³ Průnik obou úseček musí být prázdná množina. $XX' \cap YY' = \emptyset$

D) Kruháová inverze zadaná párem odpovídajících si bodů X , X' a samodružným bodem P :

Teorém 1.1

Kruháovou inverzi lze zadat párem odpovídajících si bodů a s nimi kolineárním samodružným bodem ležícím mezi těmito body.

Střed inverze leží na polopřímce \overrightarrow{PX} , kde bod X označíme bod dvojice bližší k samodružnému bodu P a bod X' vzdálenější od samodružného bodu.



Popis konstrukce řídicí kružnice:

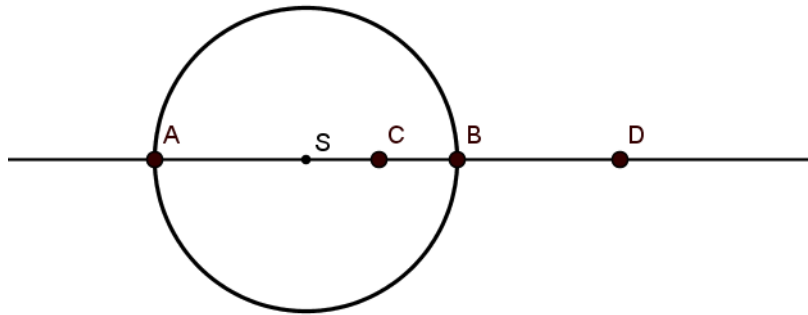
1. s ; $s = XX' \wedge P \in s$
2. p ; $P \in p \wedge p \perp s$
3. K ; $K \in s \wedge |XK| = |KX'|$
4. k ; $k(K, |XK|)$
5. T ; $T \in \{p \cap k\}$
6. t ; $T, K \in t$
7. q ; $T \in q \wedge q \perp t$
8. Q ; $Q \in \{q \cap s\}$
9. S ; $S \in s \wedge |QS| = |SP|$
10. ω ; $\omega(S, |SP|)$

Pro potřebu důkazu uvedeného teoremu vyslovme následující lemma:

Lemma A

Čtyři kolineární body $ABCD$, z nichž body AB jsou samodružnými body kruhové inverze a body CD jsou vzájemně si odpovídající body této inverze tvoří *harmonickou čtveřici* (resp. body AB jsou *harmonicky sdruženy* s body CD). Pro dvojpoměr²⁴ těchto bodů platí:

$$(ABCD) = -1$$



Důkaz (lemmatu A):

Máme dokázat, že $(ABCD) = -1$. Rovnici přepíšeme v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{AD}|} &= \frac{(|SB| + |SC|) \cdot (-|SB| + |SD|)}{(-|SB| + |SC|) \cdot (|SB| + |SD|)} = \\ &= \frac{-|SB|^2 + |SB| \cdot |SD| - |SB| \cdot |SC| + |SC| \cdot |SD|}{-|SB|^2 - |SB| \cdot |SD| + |SB| \cdot |SC| + |SC| \cdot |SD|} \end{aligned}$$

Pro kruhovou inverzi platí $|SB|^2 = |SC| \cdot |SD|$. Po dosazení dostáváme:

$$\frac{|SB| \cdot |SD| - |SB| \cdot |SC|}{-|SB| \cdot |SD| + |SB| \cdot |SC|} = -1$$

□

Důkaz (teorému 1.1):

Pro výše uvedenou konstrukci platí, že $(QPXX') = -1$. Z vlastností dvojpoměru plyne, že $(QPXX') = (XX'QP)$. Podle uvedeného můžeme tedy považovat body XX' za samodružné body jiné kruhové inverze a bod P za vzor. Výše uvedená konstrukce je pak konstrukcí obrazu Q v inverzi podle kružnice $k(K, |XK|)$ (viz oddíl 2.1.1). □

²⁴ Dvojpoměr bodů je reálné číslo, pro které platí $(ABCD) \equiv \frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{AD}|}$, kde $|\vec{XY}|$ jsou tzv.

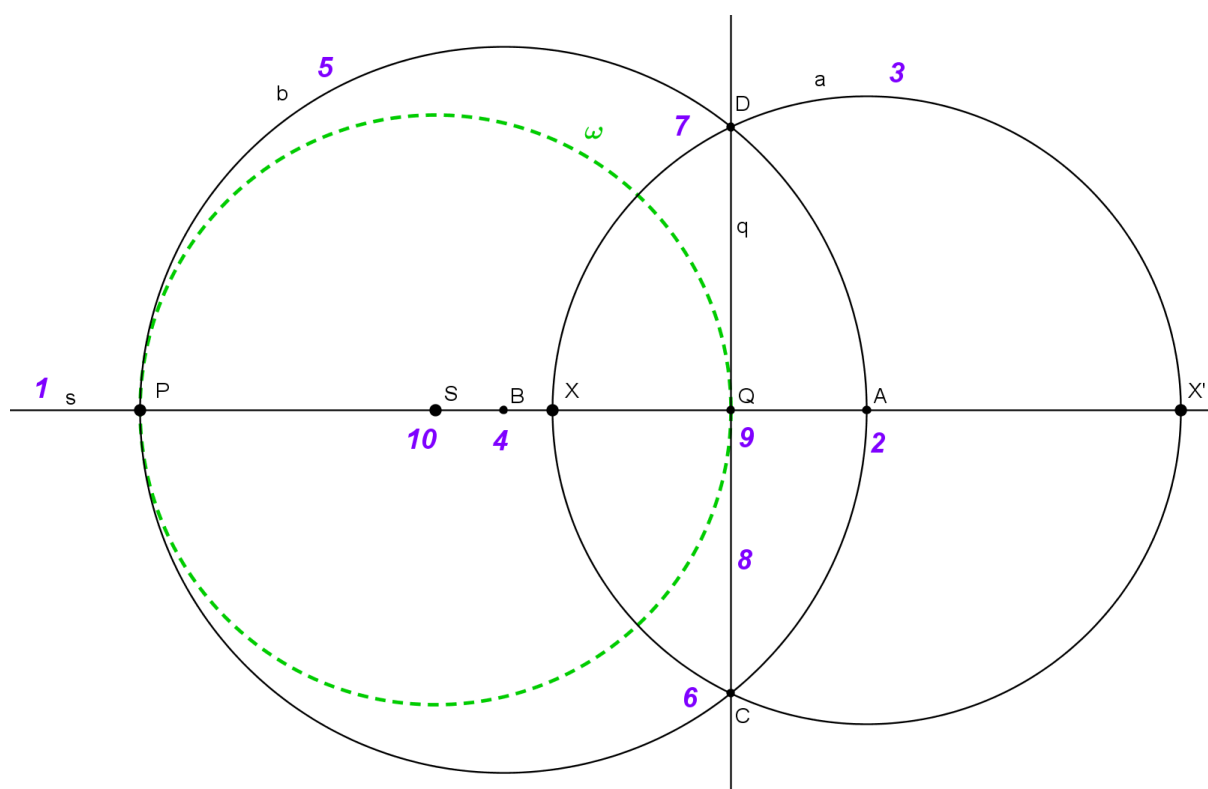
orientované vzdálenosti.

(Chodorová, 2013, s. 17)

Teorém 1.2

Kruhovou inverzi lze zadat párem odpovídajících si bodů
a s nimi kolineárním samodružným bodem neležícím mezi těmito body.

Střed inverze leží na úsečce PX , kde bod X označíme bod dvojice bližší k samodružnému bodu P a bod X' vzdálenější od samodružného bodu.



Popis konstrukce řídicí kružnice:

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. s; $s = XX' \wedge P \in s$ 2. A; $A \in s \wedge XA = AX'$ 3. a; $a(A, XA)$ 4. B; $B \in s \wedge PB = BA$ 5. b; $b(B, PB)$ 6. C; $C \in \{a \cap b\}$ | <ol style="list-style-type: none"> 7. D; $D \in \{a \cap b\} \wedge C \neq D$ 8. q; $q = CD \wedge q \perp s$ 9. Q; $Q \in \{q \cap s\}$ 10. S; $S \in s \wedge PS = SQ$ 11. ω; $\omega(S, SP)$ |
|---|---|

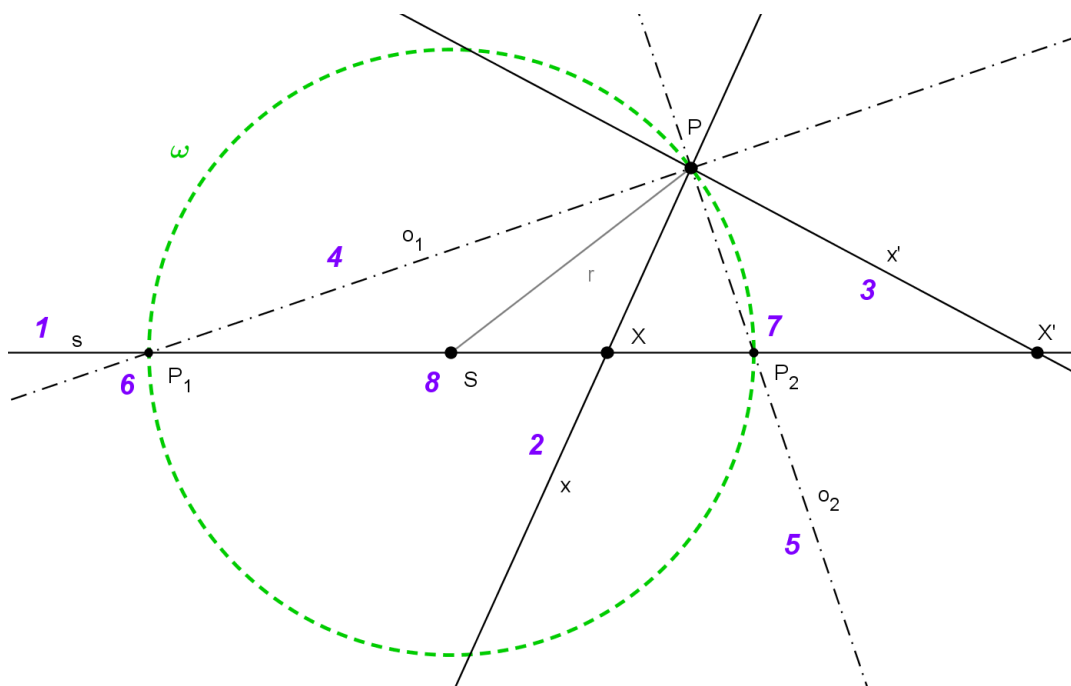
Důkaz:

Vycházíme opět z faktu, že $(PQXX') = (XX'PQ)$. Sestrojujeme tedy bod Q jako obraz bodu P v inverzi $a(A, |XA|)$ (viz oddíl 2.1.1). □

Teorém 1.3

Kruhovou inverzi lze zadat párem odpovídajících si bodů
a s nimi nekolineárním samodružným bodem.

Bod X označíme bod dvojice bližší k samodružnému bodu P a bod X' vzdálenější od samodružného bodu.



Popis konstrukce řídicí kružnice:

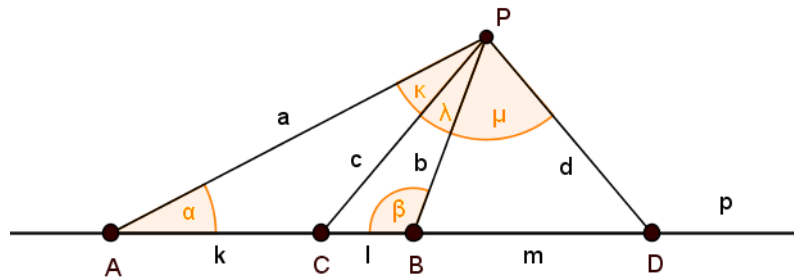
1. s ; $s = XX'$
2. x ; $x = PX$
3. x' ; $x' = PX'$
4. o_1 ; $o_1 = \{B; |Bx| = |Bx'|\}$
5. o_2 ; $o_2 = \{B; |Bx| = |Bx'|\} \wedge o_1 \perp o_2$
6. P_1 ; $P_1 \in \{o_1 \cap s\}$
7. P_2 ; $P_2 \in \{o_2 \cap s\}$
8. S ; $S \in s \wedge |P_1S| = |SP_2|$
9. ω ; $\omega(S, |SP|)$

K důkazu posledního teoremu je zapotřebí dalšího lemmatu:

Lemma B

Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů je jednoznačně určen poměrem hodnot sinů velikostí čtyř *orientovaných úhlů*, pod nimiž jsou jednotlivé body promítány z libovolného bodu neležícím na přímce, s nimiž jsou tyto body incidentní²⁵.

$$(ABCD) \equiv \frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{\sin(|\sphericalangle APC|) \cdot \sin(|\sphericalangle BPD|)}{\sin(|\sphericalangle BPC|) \cdot \sin(|\sphericalangle APD|)}, \quad P \notin p$$



Důkaz (lemmatu B):

Podle výše uvedeného obrázku platí: $\frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{k \cdot m}{-l \cdot (k + l + m)}$.

Ze *sinové věty*²⁶ plynou následující rovnosti: $k = c \cdot \frac{\sin(\kappa)}{\sin(\alpha)}$, $-l = c \cdot \frac{\sin(-\lambda)}{\sin(\beta)}$,

$$m = d \cdot \frac{\sin(\mu)}{\sin(180^\circ - \beta)}, \quad (k + l + m) = d \cdot \frac{\sin(\kappa + \lambda + \mu)}{\sin(\alpha)}$$

Po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{k \cdot m}{-l \cdot (k + l + m)} &= \frac{c \cdot \sin(\kappa) \cdot d \cdot \sin(\mu) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(180^\circ - \beta) \cdot c \cdot \sin(-\lambda) \cdot d \cdot \sin(\kappa + \lambda + \mu)} = \\ &= \frac{\sin(\kappa) \cdot \sin(\mu)}{\sin(-\lambda) \cdot \sin(\kappa + \lambda + \mu)} \cdot \left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(180^\circ - \beta)} \right) = \frac{\sin(|\sphericalangle APC|) \cdot \sin(|\sphericalangle BPD|)}{\sin(|\sphericalangle BPC|) \cdot \sin(|\sphericalangle APD|)} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že všechny úhly v trojúhelníku jsou menší než 180°, je výraz v závorce roven jedné. □

²⁵ Pokud jsou body incidentní s přímkou, znamená to, že na dané přímce tyto body leží.

²⁶ Pro každý trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhly mají velikost α , β , γ a strany délky a , b , c platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{Odvárko, 2003, s. 104})$$

Důkaz (teorému 1.3):

Konstrukce je založena na sestrojení os úhlu $\sphericalangle XPX'$. Tyto osy vytínají na přímce s body P_1 a P_2 . Dokažme nyní, že $(P_1P_2XX') = -1$:

Označme orientovaný úhel $\sphericalangle XPX' = \theta$ a dosaďme do lemmatu B:

$$\frac{\sin(|\sphericalangle P_1PX|) \cdot \sin(|\sphericalangle P_2PX'|)}{\sin(|\sphericalangle P_2PX|) \cdot \sin(|\sphericalangle P_1PX'|)} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(90^\circ + \frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ + \frac{\theta}{2}\right)}$$

Uplatníme vztah pro součet/rozdíl argumentů funkce sinus (Abramson, 2014, p. 573):

$$-\frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ + \frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\sin(90^\circ) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(90^\circ) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin(90^\circ) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos(90^\circ) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -1$$

Protože se jedná o harmonickou čtveřici, jsou podle lemmatu A body P_1 a P_2 samodružné body hledané kruhové inverze, v níž si body X a X' vzájemně odpovídají.

Podle *Thaletovy věty*²⁷ musí bod P nutně ležet na řídicí kružnici dané inverze, protože $|\sphericalangle P_1PP_2| = 90^\circ$. □

Věta 1.2

Kruhová inverze je *konformní zobrazení* (zachovává odchylky kruhových křivek).

(Leischner, 2010, s.99; Lávička 2016, s. 41)

Důkaz:

Vycházíme z obecné rovnice kruhové křivky [1], aplikujeme na ni transformaci podle vzorce [3a] a výraz upravíme:

$$A \left[\left(\frac{k}{x^2 + y^2} x \right)^2 + \left(\frac{k}{x^2 + y^2} y \right)^2 \right] + D \frac{k}{x^2 + y^2} x + E \frac{k}{x^2 + y^2} y + F = 0$$

$$A \left[\frac{k^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] + D \frac{kx}{x^2 + y^2} + E \frac{ky}{x^2 + y^2} + F = 0$$

Celou rovnici dále vynásobíme výrazem $(x^2 + y^2)$:

$$Ak^2 + Dkx + Eky + F(x^2 + y^2) = 0$$

Po přejmenování koeficientů se opět jedná o kruhovou křivku v obecném tvaru:

[4] $A'(x^2 + y^2) + D'x + E'y + F' = 0$; $A' = F$, $D' = Dk$, $E' = Ek$, $F' = Ak^2$

²⁷ Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

(Pomykalová, 1997, s. 92)

Dosaďme nyní transformované křivky do vztahu [2]:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \arccos\left(\frac{|D'_1 D'_2 + E'_1 E'_2 - 2A'_1 F'_2 - 2A'_2 F'_1|}{\sqrt{(D'^2_1 + E'^2_1 - 4A'_1 F'_1)}\sqrt{(D'^2_2 + E'^2_2 - 4A'_2 F'_2)}}\right) = \\
 &= \arccos\left(\frac{|D_1 k D_2 k + E_1 k E_2 k - 2F_1 A_2 k^2 - 2F_2 A_1 k^2|}{\sqrt{(D^2_1 k^2 + E^2_1 k^2 - 4F_1 A_1 k^2)}\sqrt{(D^2_2 k^2 + E^2_2 k^2 - 4F_2 A_2 k^2)}}\right) = \\
 &= \arccos\left(\frac{k^2 |D_1 D_2 + E_1 E_2 - 2A_1 F_2 - 2A_2 F_1|}{k\sqrt{(D^2_1 + E^2_1 - 4A_1 F_1)} k\sqrt{(D^2_2 + E^2_2 - 4A_2 F_2)}}\right) = \varphi \quad \square
 \end{aligned}$$

2 VLASTNOSTI OBRAZŮ KŘIVEK V KRUHOVÉ INVERZI

Tato kapitola se zabývá obrazy křivek v kruhové inverzi a jejich vlastnostmi. Nejprve je pojednáno o kruhových křivkách (bod, přímka a kružnice), jejichž inverzní vlastnosti jsou nejčastěji používány při řešení praktických úloh v rovinné geometrii. V další podkapitole jsou uvedeny vybrané příklady třídy křivek (tzv. sinových spirál), které se v kruhové inverzi zobrazují na jiné křivky stejné třídy.

Třetí podkapitola se zabývá obecnými středovými kuželosečkami jako doplnění k již dříve uvedeným kuželosečkám speciálním, tj. kuželosečkám singulárním (bod, přímka), nestředovým (parabola) a speciálním středovým (kružnice, rovnoosá hyperbola). Tím jsou zahrnuty všechny existující typy kuželoseček a vlastnosti jejich obrazů v kruhové inverzi.

2.1 Kruhové křivky

Věta 2.1

Kruhová inverze zobrazuje kruhové křivky opět na kruhové křivky.

(Lávička, 2006, s. 39)

Důkaz:

Je součástí důkazu věty 1.2, konkrétně vztah [4].

□

2.1.1 Bod (nulová kruhová křivka)

Transformace bodu v kruhové inverzi je analyticky dána vztahem [3a] v kartézských a vztahem [3b] v polárních souřadnicích.

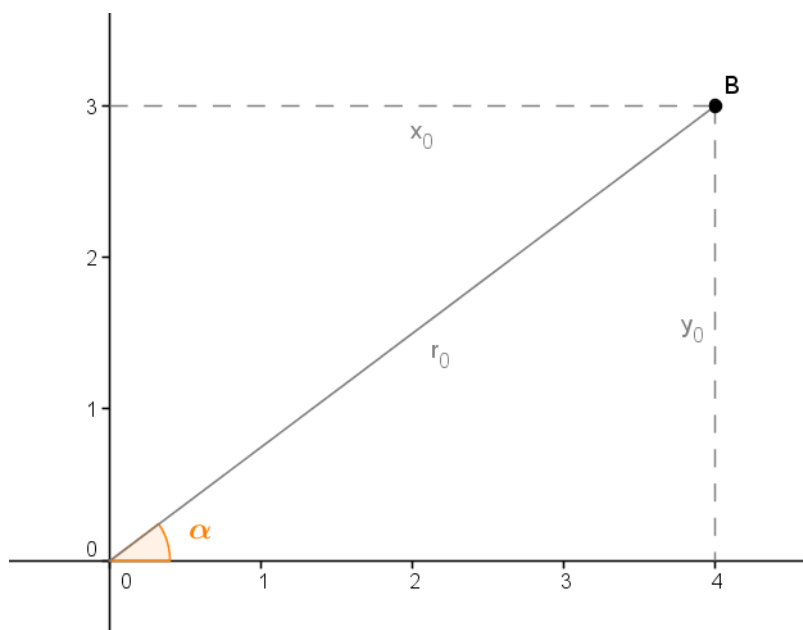
Pokud chápeme bod $B = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ jako nulovou kruhovou křivku (kružnici s poloměrem

rovným nule), lze ji též zapsat rovnicí v kartézských souřadnicích:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$$

V polárních souřadnicích má bod $B = \begin{bmatrix} r_0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ následující rovnici:

$$r = r_0 \cdot \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{r_0^2 \cdot \cos^2(\theta - \alpha) - r^2} \quad 28$$



Při konstrukci obrazu bodu X v kruhové inverzi $\omega(S, r)$ musíme vycházet z polohy bodu vůči řídicí kružnici. Mohou nastat celkem tři případy:

A) Bod leží na řídicí kružnici:

V tomto případě se bod zobrazí sám na sebe a není potřeba žádné konstrukce.

28 Pro odvození z kartézských souřadnic položíme $x = r \cdot \cos \theta$, $y = r \cdot \sin \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ a obdobně $x_0 = r_0 \cdot \cos \alpha$, $y_0 = r_0 \cdot \sin \alpha$, $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$.

V rovnici $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ provedeme umocnění závorek a vhodně přeskládáme členy:

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 = 0. \text{ Aplikujeme výše uvedené převodní vzorce:}$$

$$r^2 - 2rr_0(\cos \theta \cdot \cos \alpha + \sin \theta \cdot \sin \alpha) + r_0^2 = 0.$$

Dále uplatníme vztah pro rozdíl argumentů funkce kosinus (Abramson, 2014, p. 571):

$$r^2 - 2rr_0\cos(\theta - \alpha) + r_0^2 = 0. \text{ Nakonec použijeme vzorec pro kořeny kvadratické rovnice.}$$

Ještě si povšimněme, že celá funkce je definována pouze pro úhel $\theta = \alpha$; v tomto případě je výraz pod odmocninou roven nule. Pro ostatní úhly je výraz pod odmocninou záporný.

Věta 2.2

Body ležící na řídicí kružnici inverze jsou samodružné.

(Říha, 2010, s. 20)

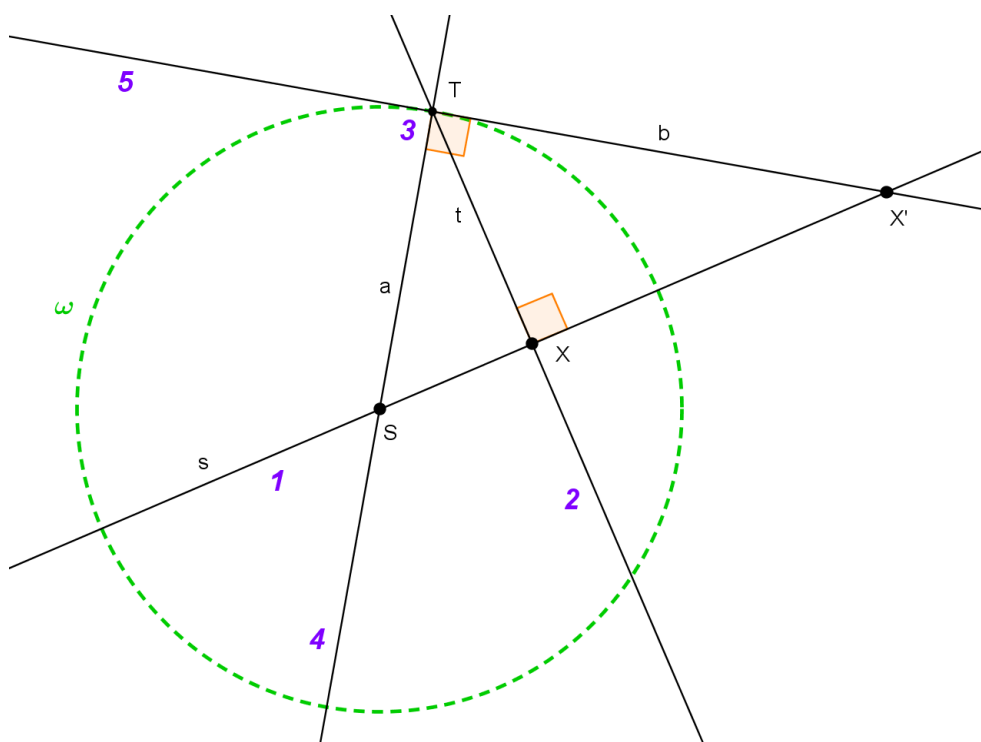
Důkaz:

Pokud leží bod X na řídicí kružnici, platí $|SX| = r$.

Podle definice 1.6 $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, tedy $|SX'| = r$ a tudíž $X = X'$. \square

B) Bod leží ve vnitřní oblasti řídicí kružnice:

Ke konstrukci obrazu bodu využijeme Euklidovu větu o odvěsně.

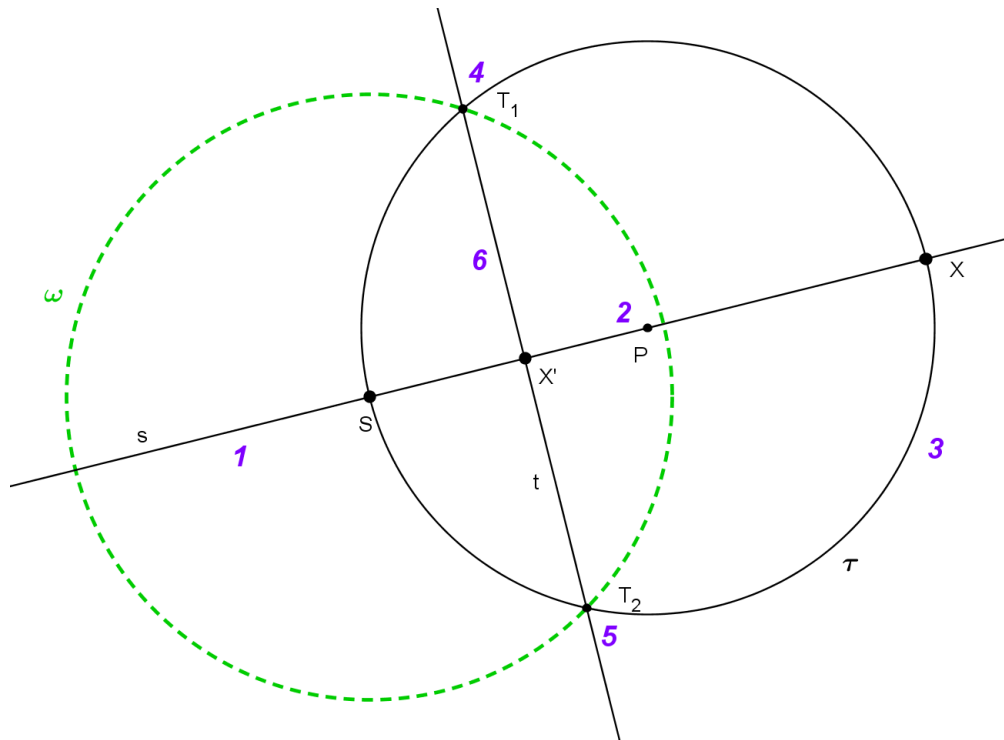


Popis konstrukce:

1. s ; $S, X \in s$
2. t ; $X \in t \wedge t \perp s$
3. T ; $T \in \{t \cap \omega\}$
4. a ; $a = ST$
5. b ; $T \in b \wedge a \perp b$
6. X' ; $X' \in \{s \cap b\}$

C) Bod leží ve vnější oblasti řídicí kružnice:

Ke konstrukci obrazu bodu využijeme opět *Euklidovu větu o odvěsně*.



Popis konstrukce:

1. s ; $s = SX$
2. P ; $P \in s \wedge |SP| = |PX|$
3. τ ; $\tau(P, |PS|)$
4. T_1 ; $T_1 \in \{\tau \cap \omega\}$
5. T_2 ; $T_2 \in \{\tau \cap \omega\} \wedge T_1 \neq T_2$
6. t ; $t = T_1T_2$
7. X' ; $X' \in \{s \cap t\}$

Uvažujme nyní nad dvojicí bodů a jejich obrazů v kruhové inverzi. Z *věty 1.2* víme, že kruhová inverze zachovává odchylky úhlů. Následující věta říká, že orientované úhly se zobrazují na opačné. Kruhová inverze je tedy **nepřímé zobrazení**.

Věta 2.3

Nechť X' a Y' jsou obrazy bodů X a Y v dané kruhové inverzi. Pak $|\sphericalangle SXY| = |\sphericalangle SY'X'|$.
(Leischner, 2010, s. 96)

Důkaz:

Z definice kruhové inverze plyne, že $k = |SX| \cdot |SX'| = |SY| \cdot |SY'|$.

Trojúhelníky SXY a $SY'X'$ mají společný úhel při vrcholu S a poměry jejich stran jsou $\frac{|SX|}{|SY|} = \frac{|SY'|}{|SX'|}$. Jsou tedy podobné podle věty sus.²⁹ Z této podobnosti následně vyplývá $|\sphericalangle SXY| = |\sphericalangle SY'X'|$.

Pokud jsou body S, X, Y kolineární, pak je tvrzení věty zřejmé. □

Dále nás zajímá vztah mezi vzdáleností dvou bodů a vzdáleností jejich obrazů.

Věta 2.4

Vzdálenost obrazů X', Y' bodů X a Y v kruhové inverzi $\omega(S, r)$ je dána vztahem:

$$|X'Y'| = \frac{r^2}{|SX| \cdot |SY|} \cdot |XY|$$

(Leischner, 2010, s. 98)

Důkaz:

Označme složky bodů takto: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $Y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix}$.

Vzdálenost obrazů je dána vztahem: $|X'Y'| = \sqrt{(x'_1 - y'_1)^2 + (x'_2 - y'_2)^2}$.

Dosadíme ze vztahu [3a]: $|X'Y'| = \sqrt{\left(\frac{kx_1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{ky_1}{y_1^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{kx_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{ky_2}{y_1^2 + y_2^2}\right)^2}$.

Vytkneme k a roznásobíme závorky. Dále dosadíme $k = r^2$ a výraz upravujeme:

$$\begin{aligned} |X'Y'| &= k \cdot \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} - \frac{(2x_1y_1 + 2x_2y_2)}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)}} = \\ &= r^2 \cdot \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)}} = r^2 \cdot \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \sqrt{(y_1^2 + y_2^2)}} = \frac{r^2 \cdot |XY|}{|SX| \cdot |SY|} \end{aligned}$$

□

²⁹ Věta sus: Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu a v poměru délek stran ležících na jeho ramenech. (Pomykalová, 1997, s. 36)

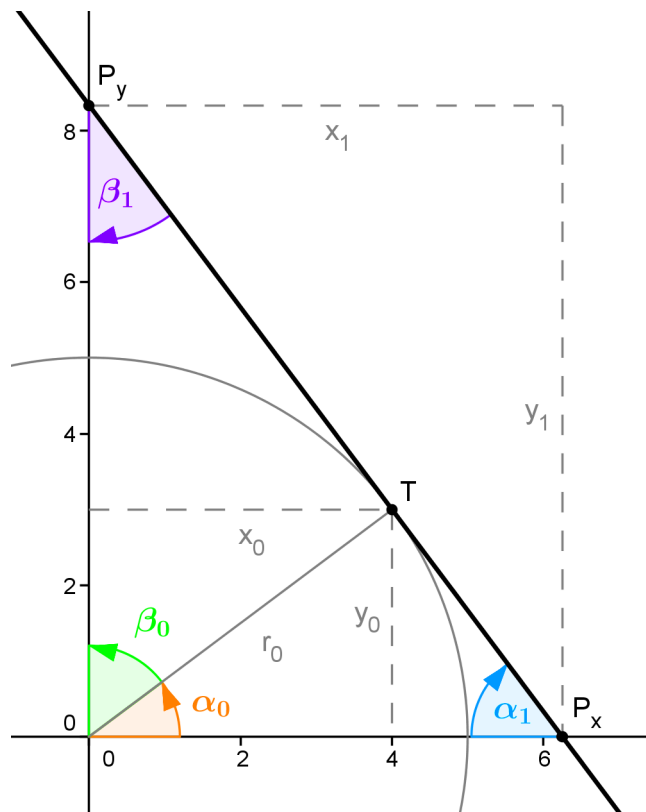
2.1.2 Přímka (nestředová kruhová křivka)

Rovnice přímky může mít v kartézských souřadnicích jeden z následujících tvarů.³⁰

$$\begin{aligned} y &= ax + y_1 & x &= by + x_1 \\ y &= a(x - x_1) & x &= b(y - y_1) \end{aligned}$$

V polárních souřadnicích má přímka rovnici:

$$r = r_0 \cdot \sec(\theta - \alpha_0) \quad ^{31}$$



Při konstrukci obrazu přímky p v kruhové inverzi $\omega(S, r)$ musíme vycházet z polohy přímky vůči řídicí kružnici. Mohou nastat celkem tři případy:

30 Koeficienty x_1, y_1 udávají průsečíky přímky s osami $P_x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $P_y = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

Koeficienty a, b mají vztah k orientovaným odchylkám mezi přímkou a osami:

$$\alpha_1 = \sphericalangle(p, o_x) = \arctan(a) = \arctan\left(-\frac{y_1}{x_1}\right) \text{ a } \beta_1 = \sphericalangle(p, o_y) = \arctan(b) = \arctan\left(-\frac{x_1}{y_1}\right).$$

Koeficient a se nazývá *směrnice* přímky.

Vzájemný vztah všech koeficientů je následující: $a^{-1} = b, y_1 = -a x_1$ a $x_1 = -b y_1$.

31 V polárních souřadnicích je přirozenější pracovat s kružnicemi nežli s přímkami.

Přímku proto vyjádříme pomocí kružnice a to jako tečnu k určenému bodu kružnice.

Tečna ke kružnici má následující vyjádření:

$$(x - s_x)(x_0 - s_x) + (y - s_y)(y_0 - s_y) = r_0^2 \text{ s bodem dotyku } T = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Pro zjednodušení předpokládejme střed kružnice v počátku souřadné soustavy, tedy $S = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rovnice tečny je pak následující: $x_0 x + y_0 y = r_0^2$. Poloměr r_0 udává vzdálenost přímky od počátku.

Rovnici dále upravíme podle převodních vztahů pro polární souřadnice:

$$r_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot r \cdot \cos \theta + r_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot r \cdot \sin \theta = r_0^2. \text{ Vytkneme } r \text{ a } r_0 \text{ a vyměníme součiny:}$$

$$r r_0 (\cos \theta \cdot \cos \alpha_0 + \sin \theta \cdot \sin \alpha_0) = r_0^2. \text{ Použijeme vztah pro rozdíl argumentů funkce kosinus:}$$

$r r_0 \cdot \cos(\theta - \alpha_0) = r_0^2$. Zkrátíme r_0 a převedeme kosinus na pravou stranu, čímž obdržíme výsledný výraz (funkce sekans je reciproká funkce k funkci kosinus).

Vztahy dalších koeficientů jsou následující:

$$\alpha_0 = \sphericalangle(r_0, o_x) = \arctan(-a) = \arctan\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \text{ a } \beta_0 = \sphericalangle(r_0, o_y) = \arctan(-b) = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right).$$

Dále platí, že $x_0 \cdot x_1 = y_0 \cdot y_1 = r_0^2$ a podle *Euklidovy věty o výšce* též následující vztahy:

$$x_0^2 = y_0 \cdot (y_1 - y_0) \text{ a } y_0^2 = x_0 \cdot (x_1 - x_0).$$

Jednotlivé orientované odchylky splňují tyto rovnice: $\alpha_0 = -\beta_1$ a $\beta_0 = -\alpha_1$. Dále též platí, že:

$$\alpha_0 - \alpha_1 = \beta_0 - \beta_1 = 90^\circ.$$

Pro $r_0 = 0$ je nutno rovnici upravit takto:

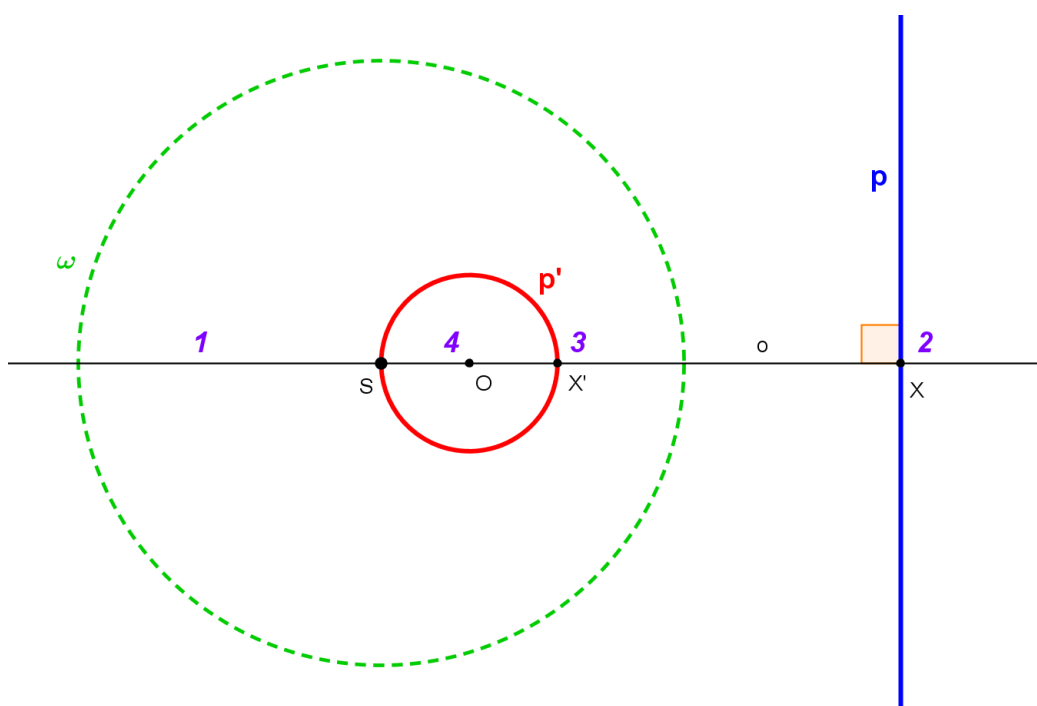
$$r \cdot \cos(\theta - \alpha_0) = r_0. \text{ Převedeme } r \text{ na pravou stranu a použijeme inverzní funkci k funkci kosinus:}$$

$$\theta - \alpha_0 = \arccos\left(\frac{r_0}{r}\right). \text{ Po dosazení za } r_0 = 0 \text{ obdržíme: } \theta = 90^\circ + \alpha_0 = \alpha_1.$$

A) Přímka je vnější přímkou řídicí kružnice:

Přímka se zobrazí na kružnici, která prochází středem inverze³² a celá leží ve vnitřní oblasti řídicí kružnice.³³

Konstrukci provedeme tak, že nalezneme bod obrazu (kružnice), který leží nejdále od středu inverze a tvoří se středem inverze průměr hledané kružnice. Z vlastností kruhové inverze víme, že jeho vzor leží naopak co nejbližě středu inverze a jedná se tedy o bod vzoru (přímky) s nejkratší vzdáleností od středu inverze. Tento bod i jeho obraz leží na kolmici k zadané přímce vedoucí středem inverze. Z obrazu nakonec sestrojíme střed výsledné kružnice a samotnou kružnici.



Popis konstrukce:

1. o ; $S \in o \wedge o \perp p$
2. X ; $X \in \{o \wedge p\}$
3. X' ; $\mathbf{I}_\omega(X) = X'$ viz konstrukce v oddíle 2.1.1
4. O ; $O \in o \wedge |SO| = |OX'|$
5. p' ; $p'(O, |SO|)$

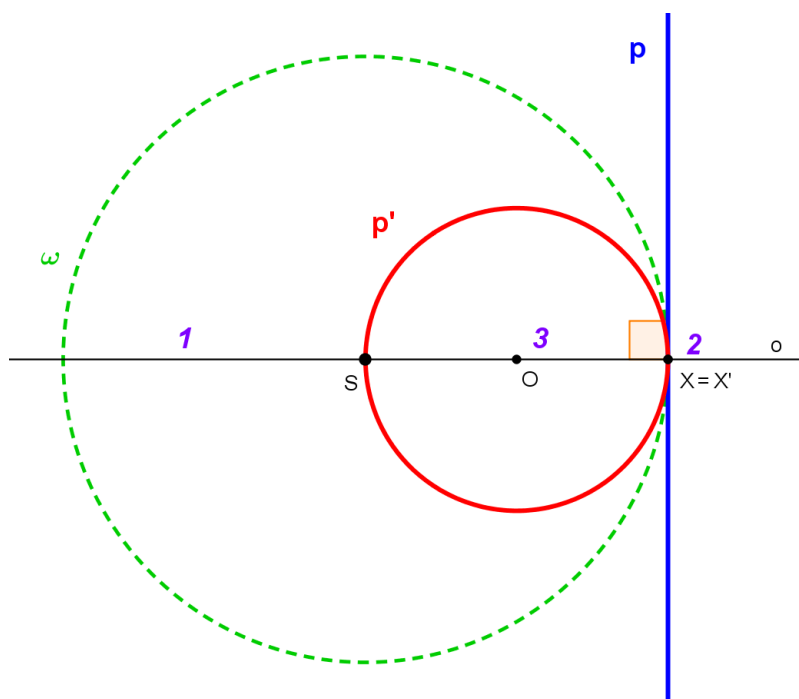
³² Na střed inverze se vždy zobrazuje nevlastní Möbiův bod M^∞ , který je součástí každé přímky.

³³ Protože přímka naopak leží celá ve vnější oblasti řídicí kružnice.

B) Přímka je tečnou řídící kružnice:

Přímka se zobrazí na kružnici procházející středem inverze a dotýkající se řídící kružnice v bodě dotyku s přímkou.

Vzhledem k tomu, že body řídící kružnice jsou samodružné, máme již dva body obrazu, a sice střed inverze a bod dotyku přímky s řídící kružnicí. Navíc se jedná o nejvzdálenější bod obrazu/nejbližší bod vzoru k řídící kružnici, tedy *Thaletova kružnice* sestrojená nad těmito body je námi hledaný obraz.



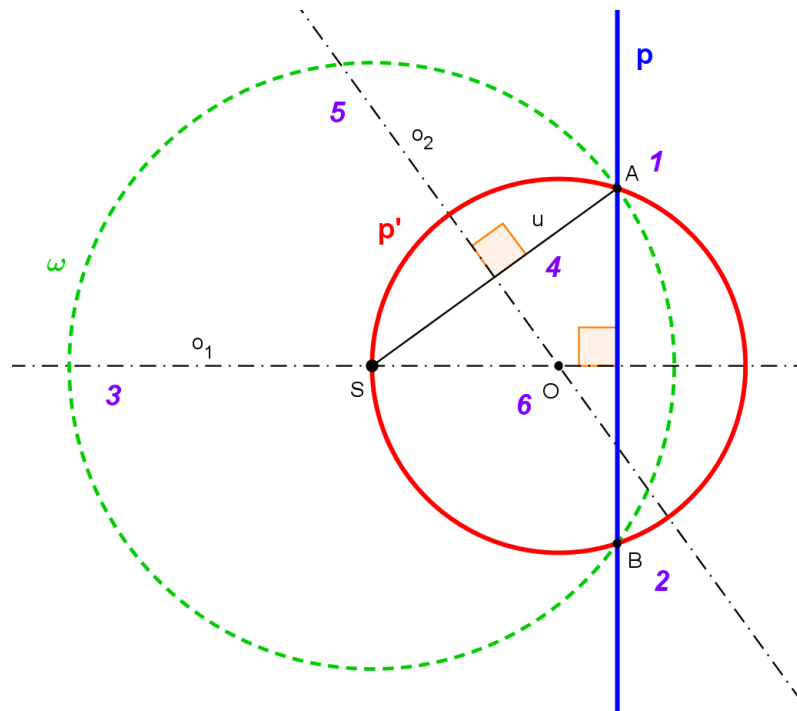
Popis konstrukce:

1. o ; $S \in o \wedge o \perp p$
2. X ; $X \in \{o \wedge p\} \wedge X = X'$
3. O ; $O \in o \wedge |SO| = |OX|$
4. p' ; $p'(O, |SO|)$

C) Přímka je sečnou řídící kružnice:

Přímka se zobrazí na kružnici procházející středem inverze a protínající řídící kružnici ve dvou bodech.

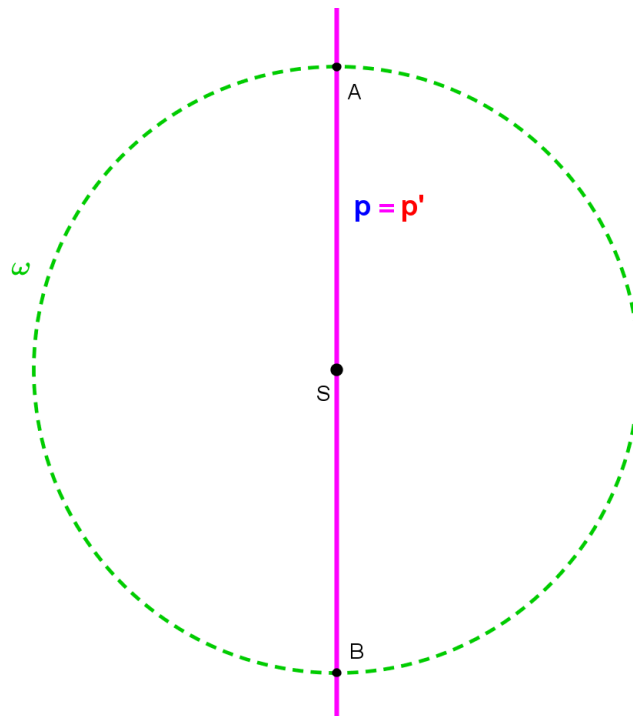
Konstrukce obrazu (kružnice) je jednoduchá, protože máme k dispozici již tři obrazy jejích bodů, které ji určují – střed inverze a oba body protínající řídící kružnici.



Popis konstrukce:

1. A ; $A \in \{\omega \cap p\}$
2. B ; $B \in \{\omega \cap p\} \wedge A \neq B$
3. o_1 ; $o_1 = \{X; |AX| = |BX|\} \wedge S \in o_1$
4. u ; $u = SA$
5. o_2 ; $o_2 = \{X; |SX| = |AX|\} \wedge o_2 \perp u$
6. O ; $O = \{o_1 \cap o_2\}$
7. p' ; $p'(O, |SO|)$

Speciální případ nastává, když přímka prochází středem inverze. V tomto případě jsou oba protínající body a střed inverze kolineární. Nelze použít konstrukci pomocí trojúhelníku, avšak víme, že obrazem bude kruhová křivka obsahující tyto tři body; obrazem je tedy přímka shodná se svým vzorem.



Vlastnosti obrazů přímky můžeme shrnout následujícími větami.

Věty 2.5 a 2.6

Přímka neprocházející středem inverze se zobrazí na kružnici procházející středem inverze.
 Přímka procházející středem inverze se zobrazí sama na sebe a je *slabě samodružná*.

(Janyška, 2019, s. 117)

Důkazy:

Věta o přímce procházející středem inverze vyplývá z *definice 1.6* (bod 3). □

Pokud přímka neprochází středem inverze, platí podle *věty 2.3* $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SX'P'|$, kde bod S je střed inverze, bod X libovolný bod přímky a bod P pata kolmice ze středu inverze na danou přímku. Protože platí, že $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SX'P'| = 90^\circ$, musí ležet všechny body X' na *Thaletově kružnici* s průměrem SP' . □

Zajímavá je též otázka, jaká je závislost mezi vzdáleností přímky od středu inverze a poloměrem inverzní kružnice; poloměr kružnice zároveň udává vzdálenost středu kružnice od středu inverze.³⁴ Odpověď dává následující teorém.

Teorém 2.1

Poloměr kružnice vzniklé inverzí přímky v kruhové inverzi $\omega(S, r)$ je dán vztahem:

$$R = \frac{k}{2d}$$

kde R je poloměr kružnice, $k = r^2$ mocnost inverze a d je vzdálenost přímky od středu.

Důkaz:

Z definice kruhové inverze platí, že $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. Podle věty 2.5 je obrazem přímky v inverzi kružnice procházející středem. Označme O střed kružnice vzniklé inverzí a X patu kolmice ze středu inverze na zobrazovanou přímku. Pak jistě platí:

$$R = |SO| = \frac{|SX'|}{2} = \frac{r^2}{2 \cdot |SX|} = \frac{k}{2d} \quad \square$$

V případě, že se přímka dotýká či protíná řídicí kružnici, můžeme se ptát jaká je odchylka mezi přímkou a řídicí kružnicí, případně mezi obrazem přímky a řídicí kružnicí, v závislosti na vzdálenosti od středu inverze. Odpověď podává následující teorém.

Teorém 2.2

Odchylka přímky p a jejího obrazu, kružnice p' , od řídicí kružnice inverze $\omega(S, r)$, kde $k = r^2$ je mocnost inverze a d vzdálenost přímky od středu inverze, je dána vztahem:

$$\varphi = \sphericalangle(p, \omega) = \sphericalangle(p', \omega) = \arccos\left(\frac{d}{\sqrt{k}}\right)$$

Důkaz:

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že střed inverze je v počátku soustavy souřadné a poloměr řídicí kružnice je $r = \sqrt{k}$. Podle obecné rovnice kruhové křivky [1] má řídicí kružnice následující koeficienty: $A_\omega = 1$, $D_\omega = 0$, $E_\omega = 0$ a $F_\omega = -k$.

³⁴ Jedním z bodů kružnice je totiž střed inverze, protože kružnice vznikla inverzí přímky, která vždy obsahuje nevlastní bod M^∞ , jenž se podle definice zobrazuje na střed inverze.

Přímka p má koeficient $A_p = 0$, ostatní koeficienty jsou libovolná čísla. Kružnice p' má podle [4] tyto koeficienty: $A_{p'} = F_p$, $D_{p'} = D_p \cdot k$, $E_{p'} = E_p \cdot k$ a $F_{p'} = 0$.

Vzdálenost bodu od přímky je dána následujícím vztahem:

$$|Bp| = \frac{|a \cdot b_x + b \cdot b_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (Dofková – Kopecký, 2007, s. 34)$$

Po dosazení koeficientů přímky p a středu souřadné soustavy získáváme vztah:

$$d = \frac{|F_p|}{\sqrt{D_p^2 + E_p^2}}$$

Odchylky vypočteme podle [2]:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(p, \omega) &= \arccos \left(\frac{|D_\omega D_p + E_\omega E_p - 2A_\omega F_p - 2A_p F_\omega|}{\sqrt{(D_\omega^2 + E_\omega^2 - 4A_\omega F_\omega)} \sqrt{(D_p^2 + E_p^2 - 4A_p F_p)}} \right) = \\ &= \arccos \left(\frac{|-2F_p|}{\sqrt{4k} \sqrt{(D_p^2 + E_p^2)}} \right) = \arccos \left(\frac{|F_p|}{\sqrt{k} \sqrt{D_p^2 + E_p^2}} \right) = \arccos \left(\frac{d}{\sqrt{k}} \right) \\ \sphericalangle(p', \omega) &= \arccos \left(\frac{|D_\omega D_{p'} + E_\omega E_{p'} - 2A_\omega F_{p'} - 2A_{p'} F_\omega|}{\sqrt{(D_\omega^2 + E_\omega^2 - 4A_\omega F_\omega)} \sqrt{(D_{p'}^2 + E_{p'}^2 - 4A_{p'} F_{p'})}} \right) = \\ &= \arccos \left(\frac{|2A_{p'} k|}{\sqrt{4k} \sqrt{(D_{p'}^2 + E_{p'}^2)}} \right) = \arccos \left(\frac{|F_p k|}{\sqrt{k} \sqrt{(D_p^2 k^2 + E_p^2 k^2)}} \right) = \\ &= \arccos \left(\frac{|F_p|}{\sqrt{k} \sqrt{(D_p^2 + E_p^2)}} \right) = \arccos \left(\frac{d}{\sqrt{k}} \right) \quad \square \end{aligned}$$

35 $B = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$, $p: ax + by + c = 0$

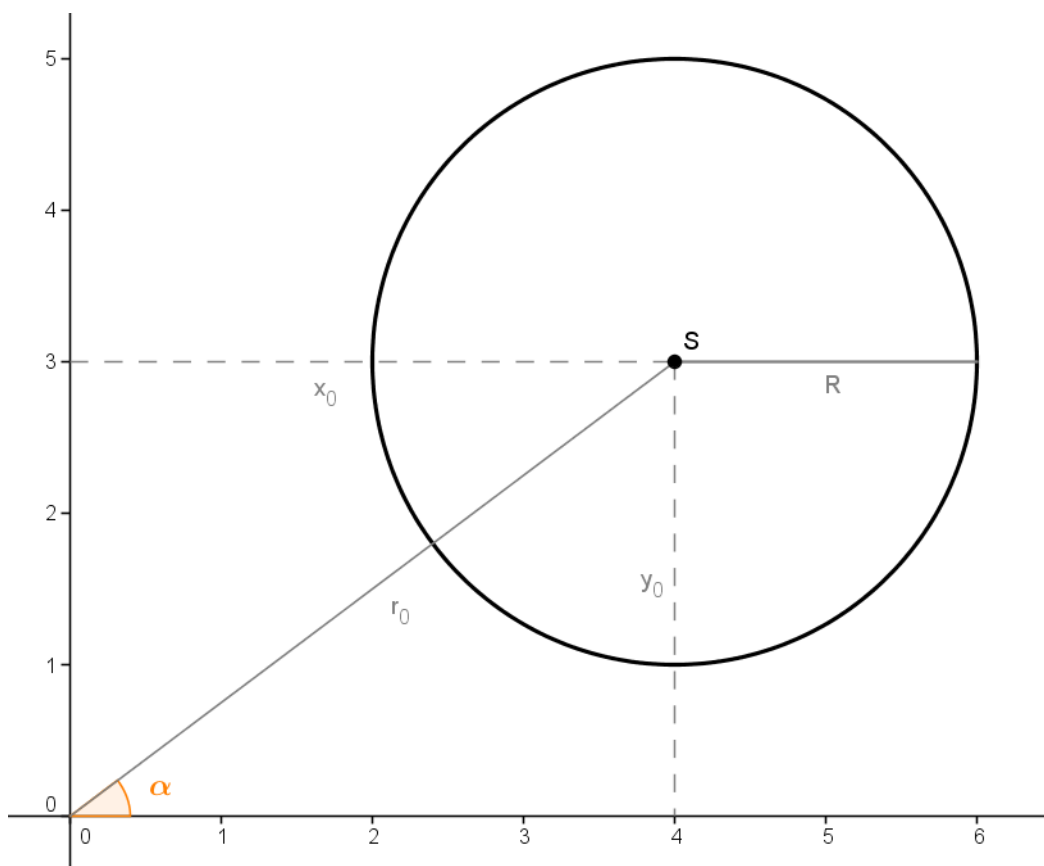
2.1.3 Kružnice (středová kruhová křivka)

Rovnice kružnice $k(S, R)$ se středem $S = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ má v kartézské souřadné soustavě tvar:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

V polárních souřadnicích má kružnice rovnici:

$$r = r_0 \cdot \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{r_0^2 \cdot \cos^2(\theta - \alpha) - r_0^2 + R^2} \quad 36$$



Při konstrukci obrazu kružnice k v kruhové inverzi $\omega(S, r)$ musíme vycházet z polohy kružnice vůči řídicí kružnici. Mohou nastat celkem čtyři případy:

36 Odvození je totožné jako pro rovnici bodu, pouze nesmíme zapomenout na člen R^2 .

A) Kružnice prochází středem řídicí kružnice:

Střed řídicí kružnice se zobrazuje do Möbiova bodu, tedy obrazem kružnice libovolného poloměru je přímka. Protože je kruhová inverze involutorní zobrazení, jsou všechny konstrukce shodné s konstrukcí obrazu přímky neprocházející středem inverze, avšak prováděné „opačně“.

Univerzální postup je tedy zkonstruovat obraz nejvzdálenějšího bodu kružnice od středu inverze, vést jím přímku do středu inverze a v tomto bodě vést k přímce kolmici. Tato přímka je obrazem zadané kružnice.

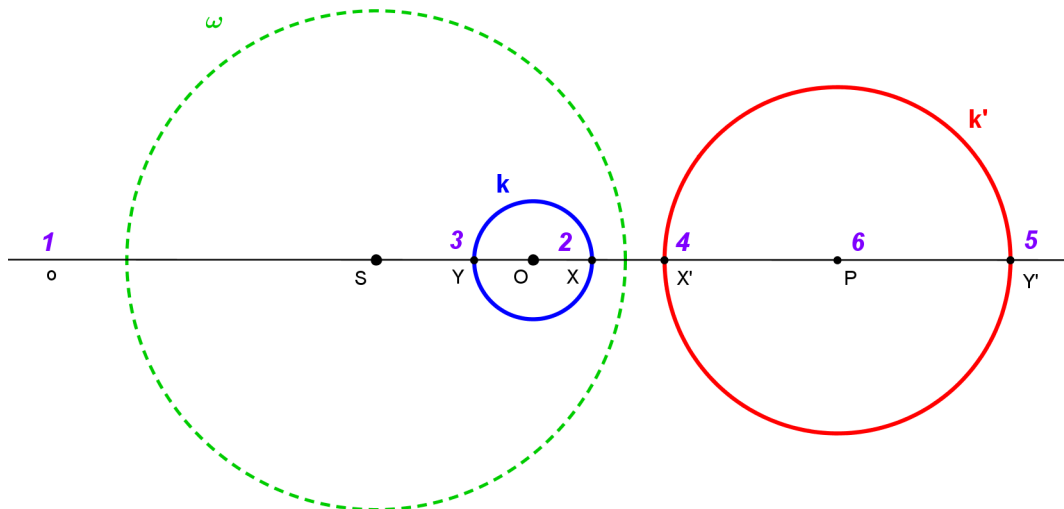
Popis konstrukce (obrázky viz oddíl 2.1.2):

1. X ; $X \in k \wedge |SO| = |OX|$
2. o ; $o = SX$
3. X' ; $\mathbf{I}_\omega(X) = X'$ viz konstrukce v oddíle 2.1.1
4. k' ; $X' \in k' \wedge k' \perp o$

Další tři případy se zabývají kružnicí, která neprochází středem řídicí kružnice.

B) Kružnice se celá nachází ve vnitřní či vnější oblasti řídicí kružnice:

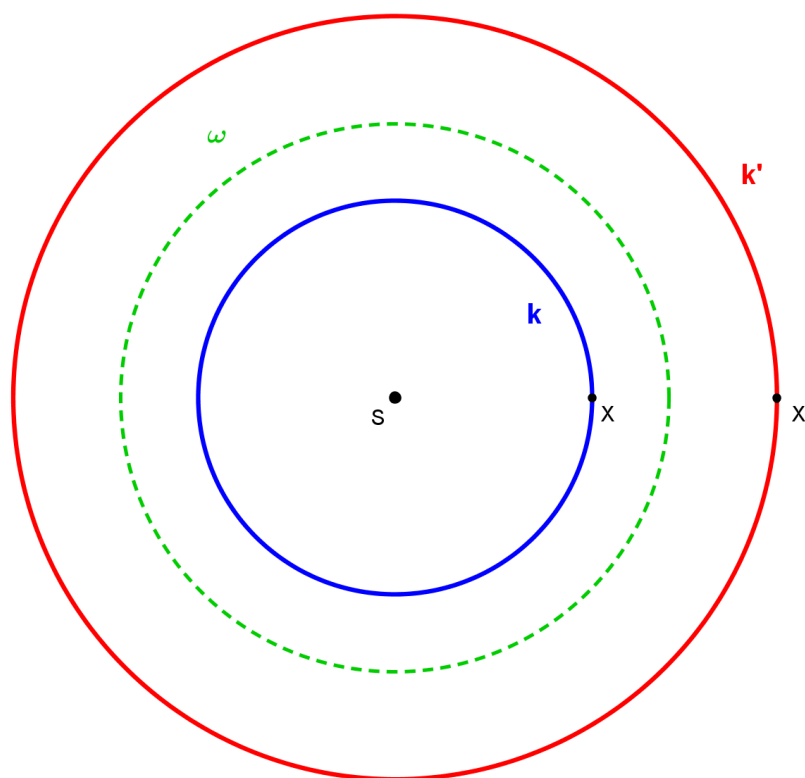
Obrazem je kružnice, jež se nachází v opačné oblasti řídicí kružnice, než její vzor. Sestrojíme obraz nejvzdálenějšího a nejbližšího bodu vzoru ke středu inverze. Tím získáme průměr, nad nímž pak sestrojíme *Thaletovu kružnici*, která je výsledným obrazem.



Popis konstrukce:

1. o ; $o = SO$
2. X ; $X \in \{k \wedge o\}$
3. Y ; $Y \in \{k \wedge o\}$
4. X' ; $\mathbf{I}_\omega(X) = X'$ viz konstrukce v oddíle 2.1.1
5. Y' ; $\mathbf{I}_\omega(Y) = Y'$ viz konstrukce v oddíle 2.1.1
6. P ; $P \in o \wedge |X'P| = |PY'|$
7. k' ; $k'(P, |PY'|)$

Speciální případ nastává, když je střed zobrazované kružnice totožný se středem inverze. Obě kružnice jsou soustředné a z vlastností kruhové inverze vyplývá, že i obraz této kružnice s nimi bude soustředný. Při konstrukci tedy stačí zobrazit libovolný bod kružnice vzoru, protože jeho vzdálenost od středu inverze je poloměrem kružnice obrazu, jejíž střed je středem inverze.



C) Kružnice se dotýká řídicí kružnice:

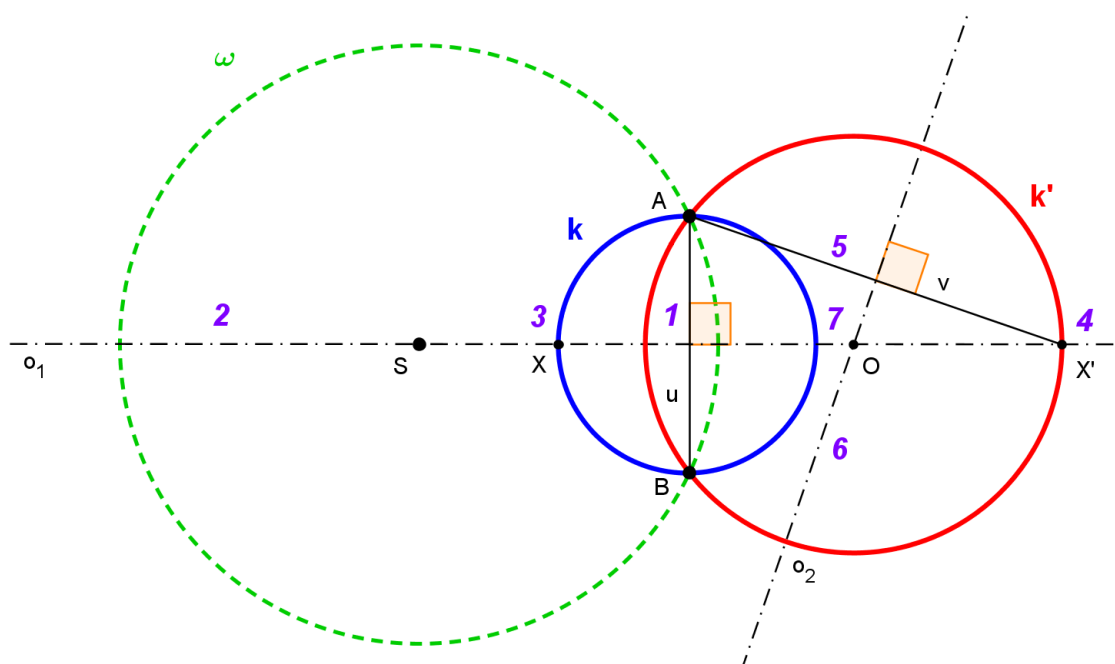
Vlastnosti obrazu i konstrukce jsou stejné jako v předchozím případě, pouze je při konstrukci vynechán krok č. 4, protože je samodružným bodem inverze.

V případě, že uvažujeme speciální případ jako v předchozím bodě, tedy že kružnice se dotýká řídicí kružnice a zároveň má střed shodný se středem inverze, dojdeme k případu, kdy jsou kružnice vzoru, obrazu i řídicí kružnice totožné. Z toho vyplývá, že řídicí kružnice inverze je samodružnou kružnicí.

D) Kružnice má dva společné body s řídicí kružnicí:

Obrazem bude kružnice procházející společnými body vzoru a řídicí kružnice.

Konstrukce je jednodušší, protože již máme dva samodružné body. Stačí tedy zobrazit jakýkoliv jiný bod kružnice a výslednému trojúhelníku opsat kružnici. Pro větší jednoduchost zobrazíme bod ležící na ose úsečky obou samodružných bodů, jež zároveň prochází středem inverze.



Popis konstrukce:

1. u ; $u = AB$
2. o_1 ; $o_1 = \{Z; |AZ| = |BZ|\}$
3. X ; $X = \{o_1 \cap k\}$
4. X' ; $\mathbf{I}_\omega(X) = X'$
5. v ; $v = AX'$
6. o_2 ; $o_2 = \{Z; |AZ| = |X'Z|\}$
7. O ; $O = \{o_1 \cap o_2\}$
8. k' ; $k'(O, |OX'|)$

Vlastnosti obrazů kružnice můžeme shrnout následujícími větami.

Věty 2.7 a 2.8

Kružnice procházející středem inverze se zobrazí na přímku nepocházející středem inverze.

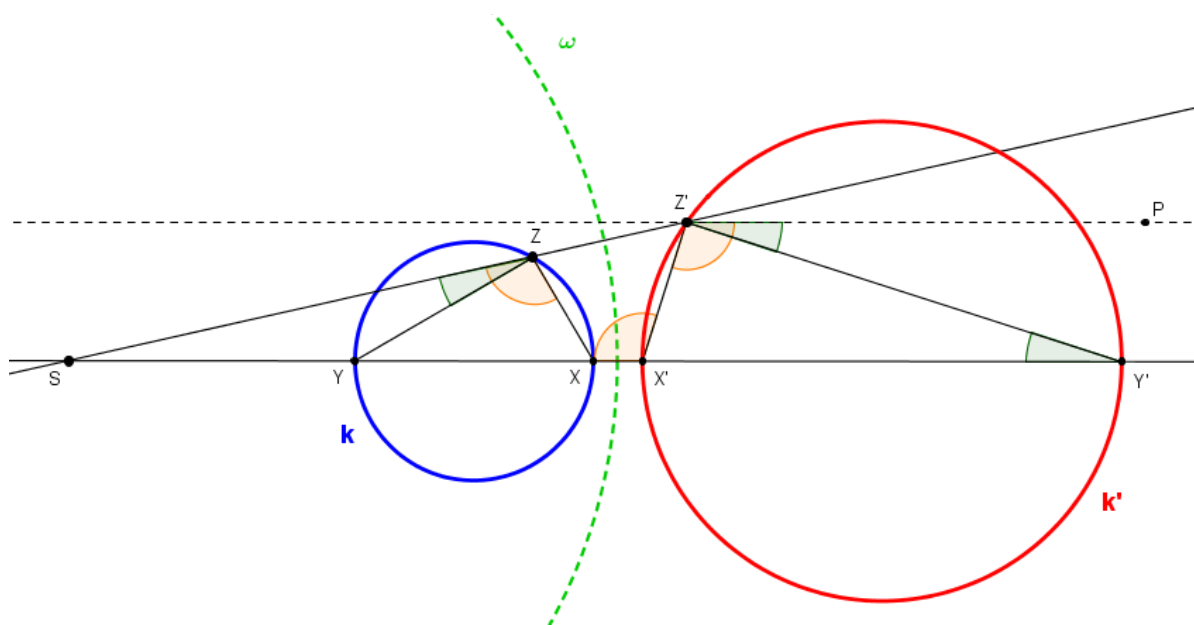
Kružnice nepocházející středem inverze se zobrazí na kružnici nepocházející středem inverze.

(Janyška, 2019, s. 118–119)

Důkazy:

Věta o kružnici procházející středem inverze vyplývá z důkazu věty 2.5 a z faktu, že kruhová inverze je involutorní zobrazení. \square

K důkazu věty o kružnici nepocházející středem použijeme následující obrázek:



V důkazu využijeme především větu 2.3. Necht' je bod Z libovolný bod kružnice k . Pak platí, že $|\sphericalangle SZX| = |\sphericalangle SX'Z'|$ a $|\sphericalangle SZY| = |\sphericalangle SY'Z'|$. Bodem Z' vedme rovnoběžku k přímce XY a zvolme na ní pomocný bod P . Z vlastností souhlasných a vrcholových úhlů vyplývá, že $|\sphericalangle SX'Z'| = |\sphericalangle PZ'X'|$ a $|\sphericalangle SY'Z'| = |\sphericalangle PZ'Y'|$. Z vlastností *Thaletovy kružnice* plyne, že $|\sphericalangle SZX| - |\sphericalangle SZY| = 90^\circ$, tudíž $|\sphericalangle PZ'X'| - |\sphericalangle PZ'Y'| = 90^\circ$. Množina všech bodů Z' tedy leží na *Thaletově kružnici* nad průměrem $X'Y'$. \square

Pojďme se nyní zabývat samodružnými nenulovými kruhovými křivkami v kruhové inverzi. Podle věty 2.6 je přímka procházející středem inverze slabě samodružná. V části C tohoto oddílu jsme ukázali, že řídicí kružnice inverze je též samodružná. Z věty 2.2 vyplývá, že tato kružnice je *silně samodružná*.

V kruhové inverzi existují i jiné samodružné kružnice, než je řídicí kružnice inverze. Na tyto kružnice jsou však kladeny jisté podmínky. Předně jejich střed musí ležet ve vnější oblasti řídicí kružnice a jejich poloměr musí mít konkrétní hodnotu závislou na vzdálenosti jejich středů od středu inverze. Takové kružnice se nazývají *ortogonální* vůči řídicí kružnici.³⁷

Věty 2.9 a 2.10

Kružnice $k = \omega$ se v kruhové inverzi zobrazí sama na sebe a je *silně samodružná*.
 Kružnice $k \neq \omega$ je *slabě samodružná*, právě když je ortogonální vůči řídicí kružnici inverze.
 (Liška, 2007, s. 64; Lávička, 2006, s. 41)

Důkazy:

První tvrzení přímo vyplývá z věty 2.2. □

Druhé tvrzení dokážeme tak, že z ortogonality kružnice s řídicí kružnicí vyplývá její samodružnost. Opačná implikace se dokáže obrácením tohoto postupu.

Označme řídicí kružnici $\omega(S, r)$, samodružnou kružnici $k(O, r')$ a jeden z průsečíků obou kružnic jako bod T . Z ortogonality plyne, že přímka ST je tečna kružnice k . Zvolme libovolný bod X kružnice k a pomocnou přímku SX , jejíž druhý průsečík s kružnicí k označme X' . Z vlastností mocnosti bodu ke kružnici plyne, že $|SX| \cdot |SX'| = |ST|^2$ (Pomykalová, 1997, s. 83). Vzhledem k tomu, že bod $T \in \omega$, je tento vztah definicí kruhové inverze se středem S a mocností $|ST|^2$, tedy libovolný bod kružnice k se zobrazí na jiný bod téže kružnice. □

Jak bylo popsáno v předchozím odstavci, kružnice ortogonální vůči řídicí kružnici musí mít specifický poloměr v závislosti na vzdálenosti jejího středu od středu řídicí kružnice. Hodnota tohoto poloměru je dána následujícím teorémem.

³⁷ Dvě kružnice jsou ortogonální, právě když střed jedné z nich leží na tečně sestrojené k druhé kružnici v jejich průsečíku. (Leischner, 2010, s. 96)

Teorém 2.3

Kružnice $k \perp \omega$, jež je samodružná v kruhové inverzi $\omega(S, r)$, má následující poloměr:

$$R = \sqrt{d^2 - k} \quad 38$$

kde R je poloměr kružnice k , $k = r^2$ mocnost inverze, O střed kružnice k a $d = |SO|$.

Důkaz:

Vztah vyplývá z *Pythagorovy věty* a z faktu, že střed ortogonální kružnice leží na průsečíku tečen vedených z druhé kružnice body, které jsou průsečíky obou kružnic. \square

U středů kružnic se ještě pozastavme. Pokud sestrojíme v inverzi obraz libovolné kružnice, která neprochází středem inverze ani k ní není ortogonální, a poté k ní obraz jejího středu, zjistíme, že obraz původního středu kružnice se v inverzi nezobrazuje na střed této kružnice. Je to také důvod, proč jsme obraz středu kružnice nepoužívali při konstrukci obrazu celé kružnice.

Vyvstává otázka, jakým způsobem lze nalézt a zkonstruovat střed obrazu kružnice v kruhové inverzi. Odpověď dává následující věta.

Věta 2.11

Kružnice, která neprochází středem inverze, a její obraz v kruhové inverzi jsou stejnohlé se středem stejnohllosti ve středu inverze.

(Janyška, 2019, s. 121)

Důkaz:

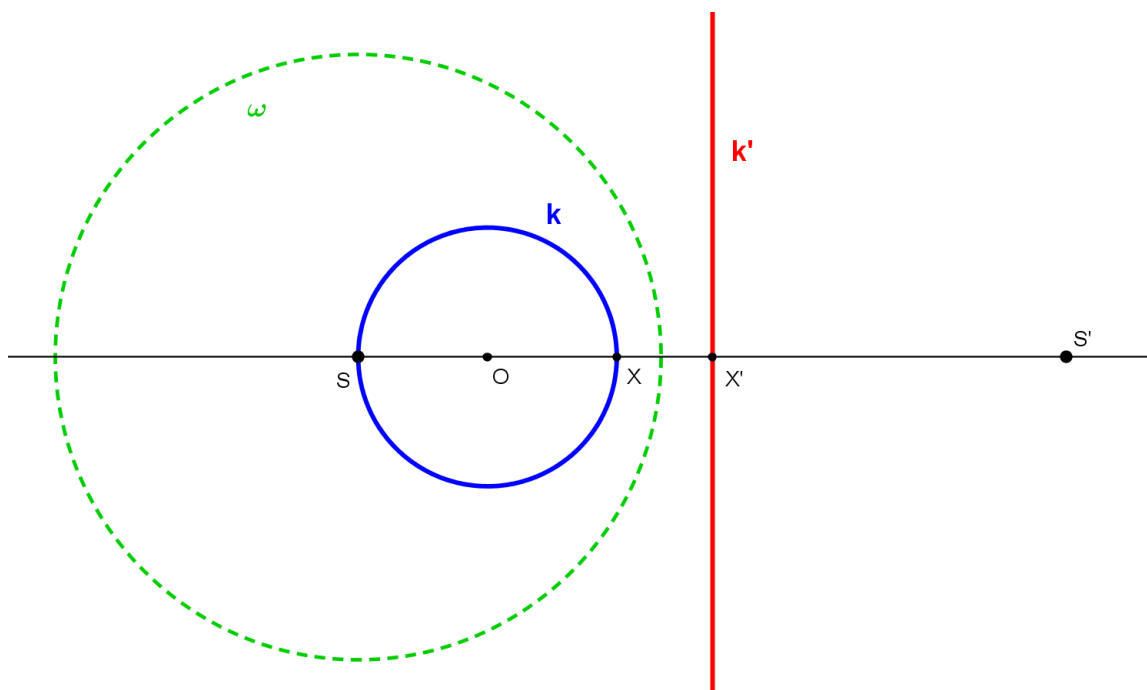
Podle *věty 1.2* zachovává kruhová inverze odchylky křivek. Uvažujme libovolnou kružnici neprocházející středem inverze a k ní obě tečny vedoucí ze středu inverze. Kružnice se v inverzi zobrazí na jinou kružnici, zatímco obě tečny se zobrazí samy na sebe. Protože se zachovávají odchylky křivek, jsou obě tečny opět tečny zobrazené kružnice a z toho vyplývá, že jsou obě kružnice stejnohlé se středem stejnohllosti ve středu inverze. \square

Konstrukci středu obrazu kružnice pomocí homotetie zde rozebírat nebudeme. Zabývejme se ale otázkou, kam se zobrazí původní střed kružnice. U obecné kružnice to bude bod ve vnitřní oblasti obrazu kružnice. Následující dva teorémy se zabývají specifitějšími případy. První z nich pojednává o kružnici procházející středem inverze.

38 Ze vztahu přímo vyplývá podmínka, že střed ortogonální kružnice musí ležet ve vnější oblasti řídicí kružnice.

Teorém 2.4

Střed O kružnice k procházející středem inverze $\omega(S, r)$ se zobrazí na bod S' , jenž je totožný s obrazem středu inverze S v osové souměrnosti podle přímky k' , která je obrazem kružnice k v této inverzi.



Důkaz:

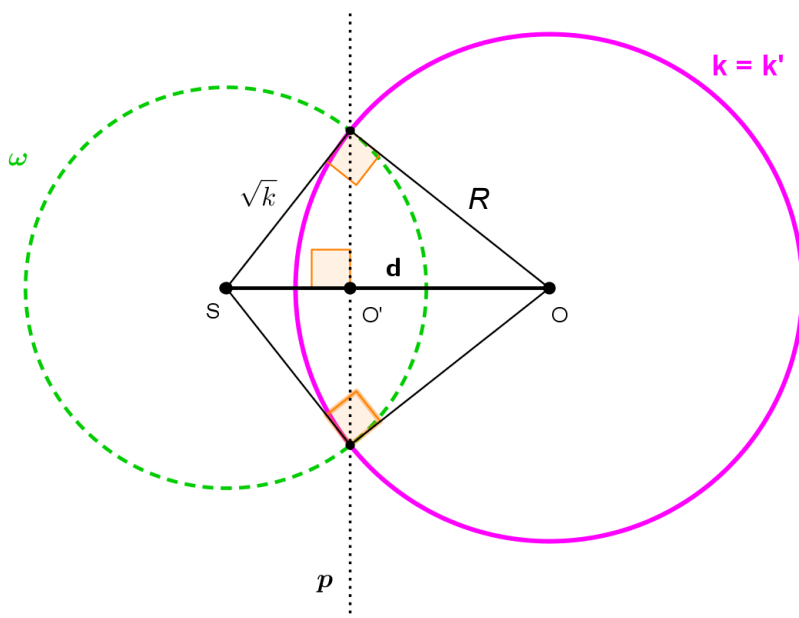
Z definice kruhové inverze plyne, že $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. Z vlastnosti středu kružnice také vyplývá vztah $|SX| = 2 \cdot |SO|$. Označme bod O' obrazem bodu O v kruhové inverzi a dosadíme uvedené vztahy do definice inverze:

$$|SO'| = \frac{r^2}{|SO|} = 2 \cdot \frac{r^2}{|SX|} = 2 \cdot |SX'| = |SS'| \quad \rightarrow \quad O' = S' \quad \square$$

V případě, že kružnice neprochází středem inverze, je jejím obrazem opět kružnice a původní střed se zobrazí do vnitřní oblasti této kružnice. Speciálním případem jsou kružnice ortogonální vůči řídicí kružnici. Jejich střed, který leží ve vnější oblasti řídicí kružnice, se zobrazuje do její vnitřní oblasti a je kolineární s průsečíky těchto dvou kružnic. Přímka, na které tyto body leží, vykazuje speciální vlastnosti vůči původnímu středu kružnice ve vztahu s řídicí kružnicí inverze. Dále o tom pojednává následující teorém a definice.

Teorém 2.5

Střed O kružnice $k \perp \omega$ se v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ zobrazí na bod O' , který je kolineární s průsečíky kružnice k s řídicí kružnicí ω .



Důkaz:

Vyplývá přímo z definice kruhové inverze a Eukleidovy věty o odvěsně. \square

Definice 2.1

Polára bodu P vzhledem ke kružnici k je přímka, na níž leží body dotyku tečen vedených bodem P ke kružnici k . Bod P se nazývá **pól** přímky p vzhledem ke kružnici k .

(Šindelář, 1959, s. 152–153)

K důkazu následujícího teorému je třeba uvést další pomocné lemma:

Lemma C

Dvě kružnice, jež jsou vzájemnými obrazy v kruhové inverzi, jsou stejnohlé se středem stejnohllosti ve středu inverze a mají koeficient stejnohllosti:

$$h = \frac{k}{(d + R)(d - R)}$$

kde $k = r^2$ je mocnost kruhové inverze, R poloměr vzorové kružnice a d je vzdálenost středu vzorové kružnice od středu inverze.

Důkaz:

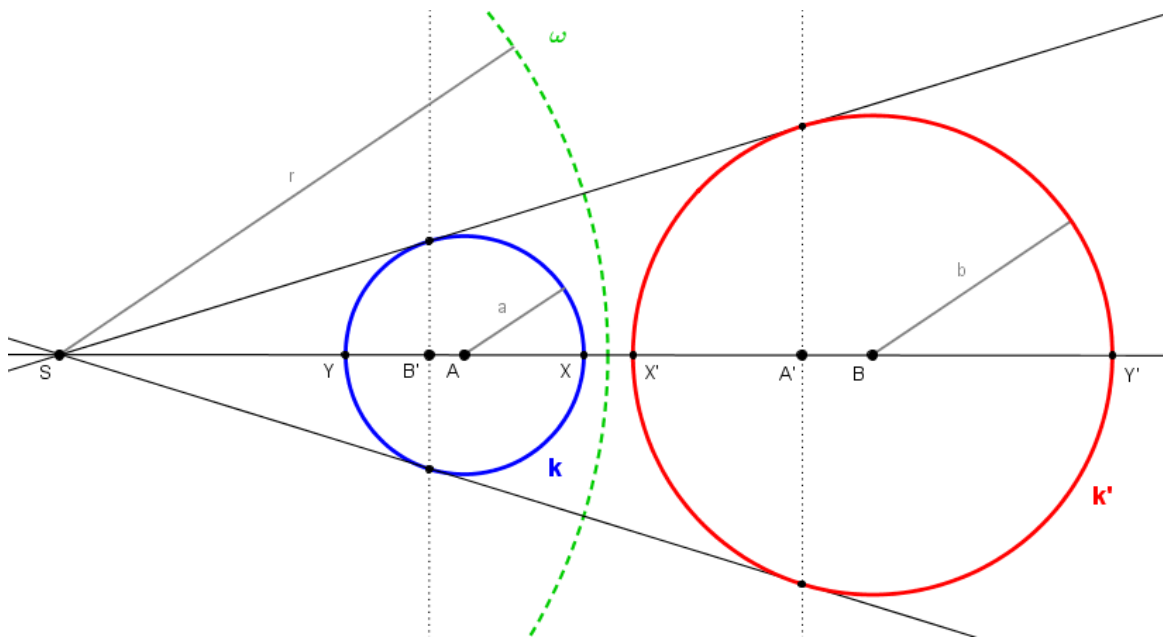
K důkazu využijeme větu 2.4 a dosadíme do ní následující vzdálenosti:

$$|X'Y'| = 2b, |XY| = 2a, |SX| = |SA| + a \text{ a } |SY| = |SA| - a$$

$$\text{Obdržíme vzorec: } 2b = \frac{r^2}{(|SA| + a)(|SA| - a)} \cdot 2a.$$

Pro koeficient stejnolehlosti platí, že $b = h \cdot a$. Po dosazení do předchozího vzorce

$$\text{dostáváme: } h = \frac{r^2}{(|SA| + a)(|SA| - a)} = \frac{k}{(d + R)(d - R)}. \quad \square$$



Předchozí dva teoremy se zabývaly obrazem středu vzorové kružnice a to ve speciálních případech, kdy tato kružnice buď procházela středem inverze, nebo byla vůči řídicí kružnici inverze ortogonální. Následující teorem popisuje obraz středu obecné kružnice, jež neprochází středem kruhové inverze. Je také zobecněním *teorému 2.5* a dává tak do souvislosti polární vlastnosti středu řídicí kružnice inverze vůči vzorové kružnici a jejímu obrazu.

Teorem 2.6

Střed A kružnice $k(A, a)$ neprocházející středem inverze $\omega(S, r)$ se zobrazí na bod A' , jenž je totožný s obrazem středu inverze S v kruhové inverzi podle kružnice $k'(B, b)$, která je obrazem kružnice k v inverzi s řídicí kružnicí ω .

Důkaz:

Podle definice kruhové inverze předpokládáme, že $|SB| \cdot |A'B| = b^2$.

Využijeme vlastnosti stejnolehlosti: $b = h \cdot a$, $|SB| = h \cdot |SA|$.

$$\begin{aligned} |SB| \cdot |A'B| &= |SB| \cdot (|SB| - |SA'|) = h \cdot |SA| \cdot (h \cdot |SA| - |SA'|) = \\ &= h^2 \cdot |SA|^2 - h \cdot |SA| \cdot |SA'| = h^2 \cdot \left(|SA|^2 - \frac{|SA| \cdot |SA'|}{h} \right) = h^2 \cdot \left(|SA|^2 - \frac{r^2}{h} \right). \end{aligned}$$

Z lemmatu C dosadíme za koeficient stejnolehlosti ve jmenovateli zlomku:

$$\begin{aligned} h^2 \cdot \left(|SA|^2 - \frac{r^2}{h} \right) &= h^2 \cdot \left(|SA|^2 - \frac{r^2(|SA| + a)(|SA| - a)}{r^2} \right) = \\ &= h^2 \cdot (|SA|^2 - |SA|^2 + a^2) = h^2 \cdot a^2 = b^2 \end{aligned} \quad \square$$

Poznámka:

Vzhledem k tomu, že je kruhová inverze involutorní zobrazení, je též bod B' obrazem středu inverze S v kruhové inverzi podle kružnice $k(A, a)$.

Podle *definice 2.1* se polára pólu P zobrazí v kruhové inverzi jako *Thaletova kružnice* nad poloměrem SP a také obraz pólu P vždy leží na její poláře p . Mimo to má polára i pól další zajímavou vlastnost, o které mluví následující věta (uvedená bez důkazu).

Věta 2.12

Nechť je přímka procházející pólem P sečnou kružnice k , body X a Y průsečíky kružnice se sečnou a bod P_0 průsečík sečny a poláry p .

Pak platí, že tyto body tvoří harmonickou čtveřici, tedy $(XYP_0P) = -1$.

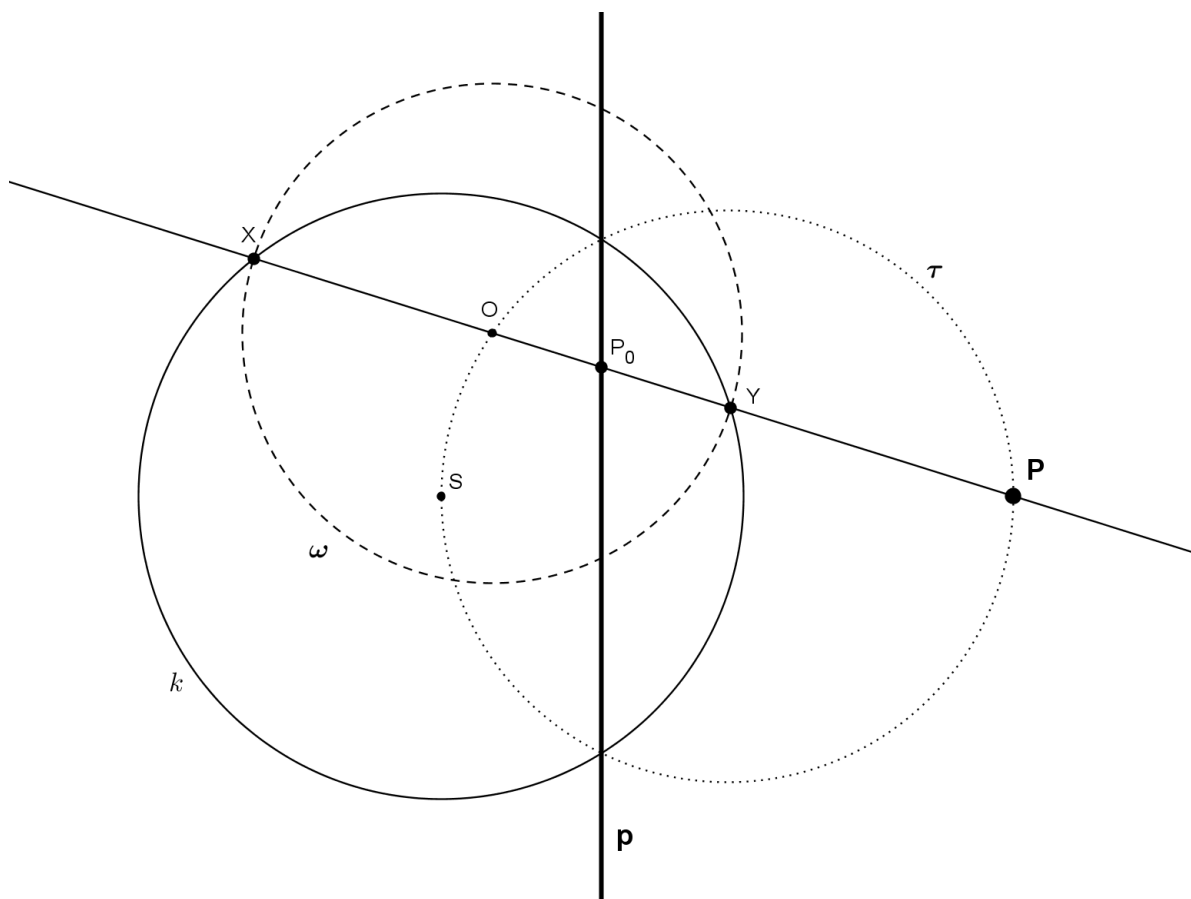
(Šindelář, 1959, s. 152; Chodorová, 2013, s. 72)

Z věty 2.12 a lemmatu A vyplývá, že úsečka XY je průměrem řídicí kružnice inverze, v níž si navzájem odpovídají body P a P_0 .³⁹

³⁹ Též obráceně: Úsečka PP_0 je průměrem řídicí kružnice inverze, v níž si navzájem odpovídají body X a Y .

Hypotéza 2.1

Je-li přímka p polárou pólu P vzhledem ke kružnici k se středem S ,
body X a Y průsečíky sečny kružnice k , která zároveň prochází pólem P
a bod P_0 průsečík této sečny s polárou p ,
pak bod O , jenž je středem kružnice ω sestrojené nad průměrem XY
leží na *Thaletově kružnici* τ sestrojené nad průměrem SP .



Definice 2.2

Chordála dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2 je přímka, která je množinou všech bodů majících k těmto kružnicím stejnou mocnost.

(Říha, 2010, s. 14)

Hypotéza 2.2

Nechť je dána kružnice ω se středem S , kružnice k se středem A a kružnice k' se středem B , jež je obrazem kružnice k v inverzi s řídicí kružnicí ω .

Dále přímka p_k , která je polárou bodu S vzhledem ke kružnici k ,

přímka $p_{k'}$, která je polárou bodu S vzhledem ke kružnici k' ,

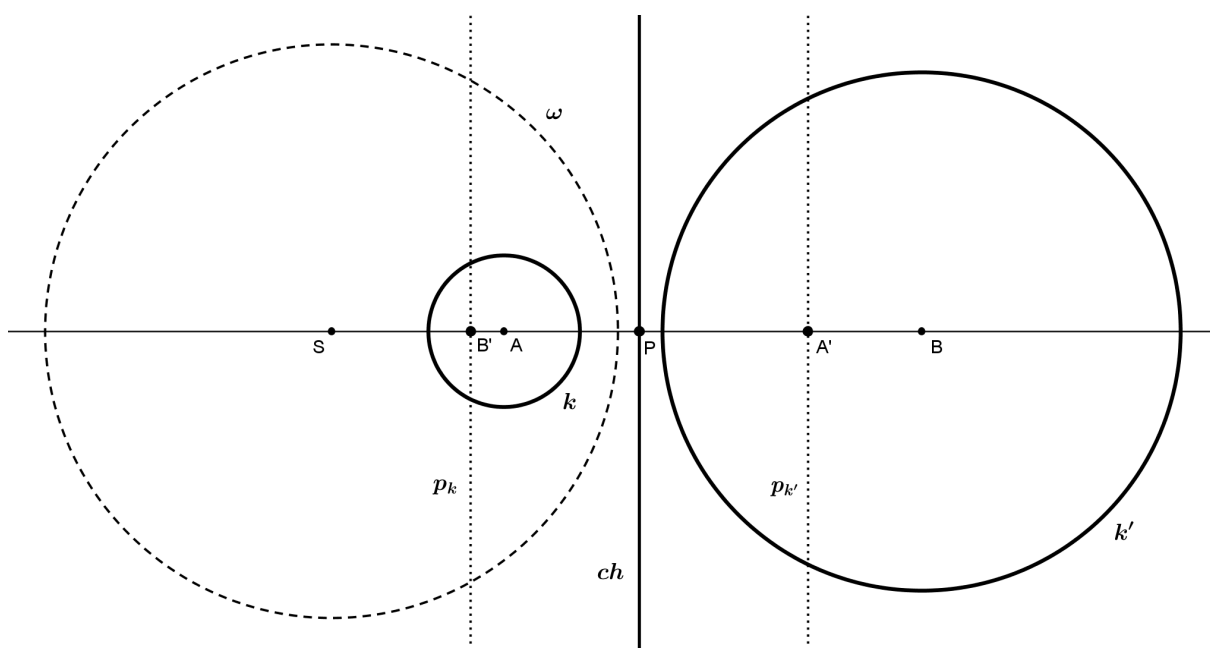
bod A' , jenž je obrazem bodu A v inverzi s řídicí kružnicí ω a leží na poláře $p_{k'}$,

bod B' , jenž je obrazem bodu B v inverzi s řídicí kružnicí ω a leží na poláře p_k

a bod P , který je středem úsečky $B'A'$.

Pak je přímka ch , procházející bodem P a rovnoběžná s polárami p_k a $p_{k'}$,

společnou chordálou kružnic ω, k a k' .



2.1.4 Části kruhových křivek

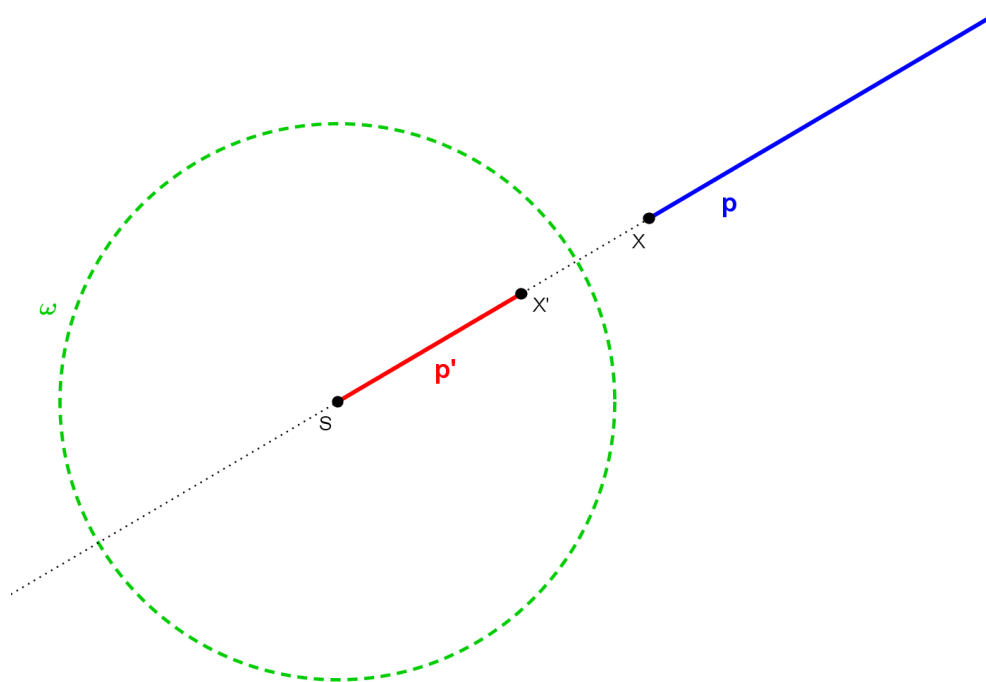
V předchozích odstavcích jsme se zabývali zobrazením různých případů kruhových křivek. V tomto oddíle postupně probereme zobrazení částí jednotlivých kruhových křivek se zaměřením na jejich metrické vlastnosti, tedy závislosti změny délek jednotlivých křivek v dané inverzi.

Nejprve se budeme zabývat **polopřímkou**. Každou polopřímku můžeme proložit právě jednu přímkou, kterou budeme pro potřeby tohoto textu nazývat *určující přímkou*. Vlastnosti obrazu dané polopřímky jsou pak závislé na vlastnostech této určující přímky.

Z oddílů výše víme, že v kruhové inverzi záleží na tom, zda přímka prochází středem inverze či nikoliv. V závislosti na tom pak rozlišujeme tyto tři možné polohy polopřímky v inverzi:

a) **Určující přímka prochází středem inverze, ale polopřímka jím neprochází**

Jelikož je obraz přímky procházející středem opět přímka (s ní totožná) a polopřímka je část přímky, bude též obraz polopřímky část přímky, tedy úsečka. Polopřímka vede z určitého bodu přímky X do bodu v nekonečnu M^∞ , který se zobrazí na střed inverze S . Výsledným obrazem polopřímky bude úsečka SX' .



Teorém 2.7

Délka l úsečky p' v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ kde $k = r^2$, jenž je obrazem polopřímky p , která leží na určující přímce procházející středem inverze, je závislá na vzdálenosti d počátečního bodu polopřímky od středu inverze a je rovna:

$$l = \frac{k}{d}$$

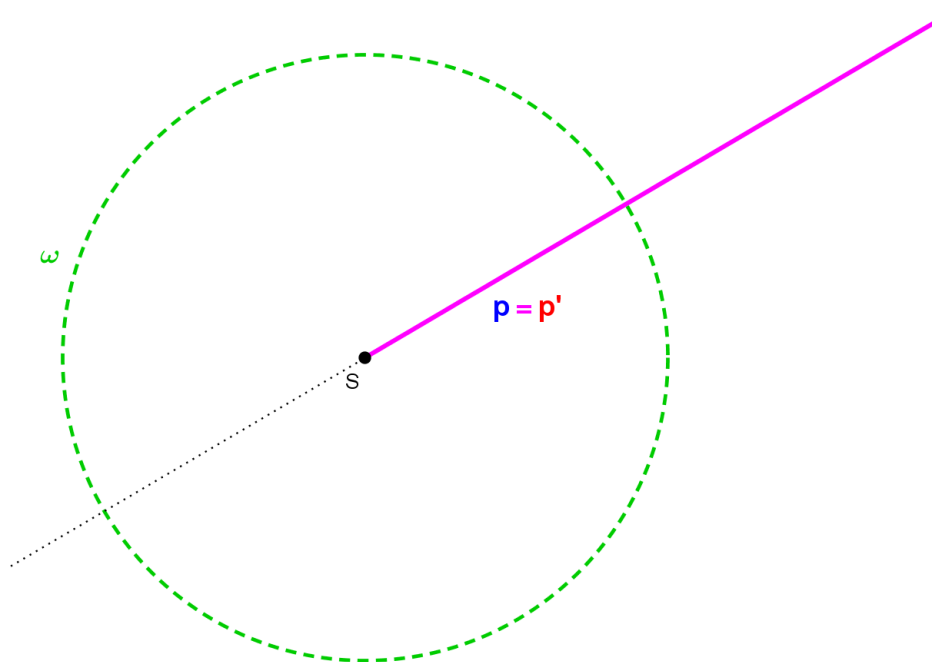
Důkaz:

Vyplývá přímo z definice kruhové inverze, kde $l = |SX'|$ a $d = |SX|$. \square

b) Určující přímka i polopřímka prochází středem inverze

Polopřímka se zobrazí na dvojici vzájemně se nepřekrývajících polopřímek ležících na určující přímce. Tímto případem se nebudeme více zabývat.

Speciálně, když je počáteční bod polopřímky shodný se středem inverze, je obrazem polopřímky polopřímka s ní shodná.



Teorém 2.8

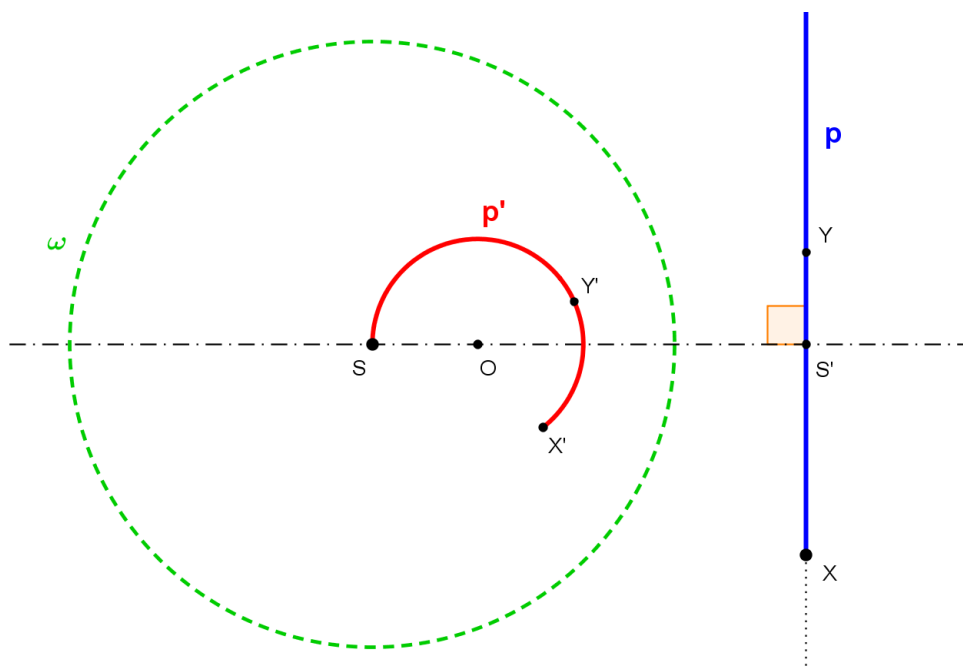
Polopřímka s počátečním bodem ve středu inverze se zobrazí sama na sebe a je slabě samodružná.

Důkaz:

Vyplývá přímo z definice 1.6 (bod 3). \square

c) **Určující přímka neprochází středem inverze**

Z předchozího textu víme, že přímka neprocházející středem inverze se zobrazí na kružnici procházející středem inverze. Polopřímka ležící na této určující přímce se tedy zobrazí na kruhový oblouk, jehož krajními body jsou střed inverze S a obraz počátečního bodu polopřímky X .



Při konstrukci kruhového oblouku je třeba nalézt střed oblouku O . Ten nalezneme pomocí *teorému 2.4* tak, že zobrazíme střed inverze S v osově souměrnosti přes určující přímku a poté tento obraz znovu zobrazíme v kruhové inverzi přes kružnici ω . Nyní vedeme oblouk středem O z bodu S do bodu X' .

Pro určení délky kruhového oblouku je nutné uvažovat další bod. Patu kolmice vedenou ze středu S na určující přímku označme S' a nazvěme *středový bod*.

Pokud je krajním bodem polopřímky středový bod, je obrazem polopřímky kruhový půloblouk. V případě, že polopřímka středovým bodem prochází (resp. neprochází), je jejím obrazem oblouk delší (resp. kratší) než tento půloblouk.

Teorém 2.9

Velikost středového úhlu α příslušného k oblouku p' v inverzi s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ závisí na poloze počátečního bodu polopřímky p vůči středu inverze S a je rovna:

a) $\alpha = 180^\circ$ pokud $S' = X$

b) $\alpha = 180^\circ + 2 \cdot \arccos\left(\frac{d}{|SX|}\right)$ pokud $S' \in p$

c) $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \arccos\left(\frac{d}{|SY|}\right)$ pokud $S' \notin p$

kde $d = |SS'|$ je vzdálenost určující přímky od středu inverze.

Teorém 2.10

Délka l kruhového oblouku p' v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ kde $k = r^2$, jenž je obrazem polopřímky p , která leží na určující přímce neprocházející středem inverze,

je závislá na vzdálenosti určující přímky od středu inverze $d = |SS'|$

a vzdálenosti počátečního bodu polopřímky od středu inverze $|SX|$ a je rovna:

a) $l = \frac{k\pi}{2d}$ pokud $S' = X$

b) $l = \frac{k\pi}{d} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\arccos\left(\frac{d}{|SX|}\right)}{180^\circ}\right)$ pokud $S' \in p$

c) $l = \frac{k\pi}{d} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\arccos\left(\frac{d}{|SY|}\right)}{180^\circ}\right)$ pokud $S' \notin p$

Důkazy:

Platí, že velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku (Pomykalová, 1997, s. 60), tedy $|\sphericalangle X'OS'| = 2 \cdot |\sphericalangle XSS'|$.

Dále platí, že $\cos|\sphericalangle XSS'| = \frac{|SS'|}{|SX|}$. V případě, že polopřímka p prochází (resp. neprochází) středovým bodem, je velikost středového úhlu oblouku p' rovna velikosti přímého úhlu zvětšeného (resp. zmenšeného) o velikost úhlu $|\sphericalangle X'OS'|$ (resp. $|\sphericalangle Y'OS'|$). \square

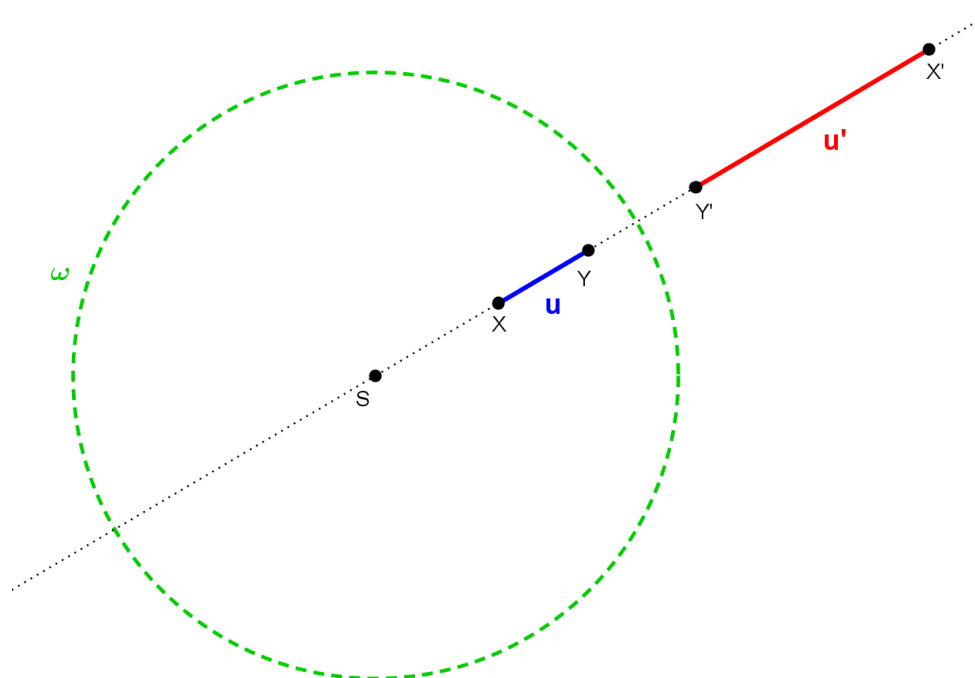
Délka kruhového oblouku, ke kterému přísluší středový úhel α je dána vzorcem $l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ (Pomykalová, 1997, s. 68). Poloměr kruhového oblouku dosadíme

z teorému 2.1: $r = \frac{k}{2d}$. Velikost středového úhlu α se vypočte z teorému 2.9. \square

Dále se zabýváme **úsečkou**. Stejně jako polopřímka, leží každá úsečka na *určující přímce*, jejíž vlastnosti určují vlastnosti obrazu dané úsečky. Opět se budeme zabývat třemi polohami úsečky v kruhové inverzi:

a) **Určující přímka prochází středem inverze, ale úsečka jím neprochází**

Obrazem úsečky v inverzi bude úsečka, která leží na určující přímce a neprochází středem inverze.



Teorém 2.11

Délka úsečky u' v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ kde $k = r^2$, jenž je obrazem úsečky u , která leží na *určující přímce* procházející středem inverze, je závislá na vzdálenosti úsečky⁴⁰ u od středu inverze a je rovna:

$$l' = \frac{kl}{d(d+l)}$$

kde l' je délka úsečky u' , l délka úsečky u a d vzdálenost úsečky od středu inverze.

Důkaz:

Vyplyvá z věty 2.4, kde $l' = |X'Y'|$, $l = |XY|$, $d = |SX|$ a $d+l = |SY|$. □

⁴⁰ Vzdálenost úsečky od středu inverze je dána vzdáleností jejího nejbližšího bodu od tohoto středu.

Teorém 2.12

Úsečka se v kruhové inverzi zobrazí sama na sebe a je *slabě samodružná* právě tehdy, jsou-li její krajní body vzájemnými obrazy v dané inverzi.

Taková úsečka je průměrem samodružné (ortogonální) kružnice v této inverzi.

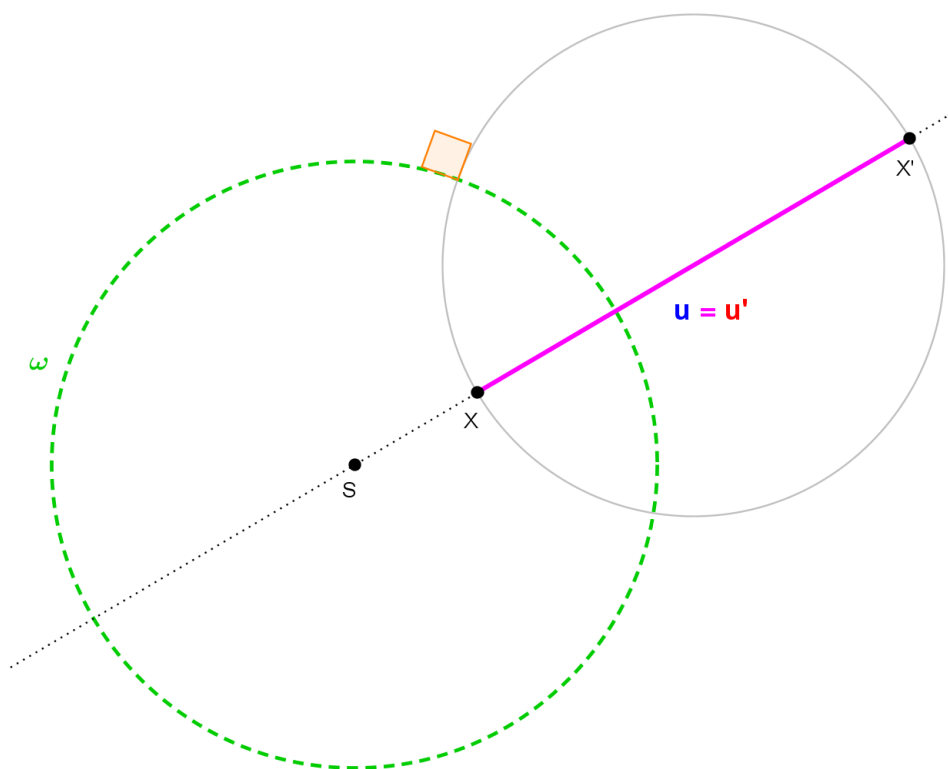
Délka samodružné úsečky závisí na její vzdálenosti od středu inverze a je rovna:

$$l = \frac{k}{d} - d$$

kde l je délka úsečky, d vzdálenost od středu inverze s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ a $k = r^2$.

Důkaz:

Vyplyvá z definice kruhové inverze a *teorému 2.11*. □



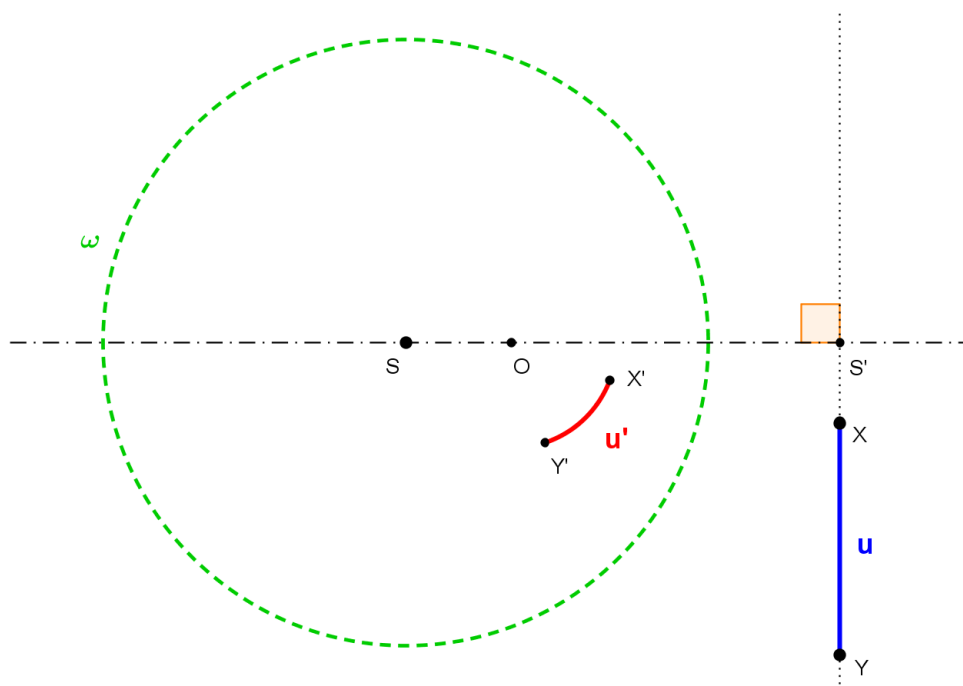
b) Určující přímka i úsečka prochází středem inverze

Úsečka se zobrazí na dvojici vzájemně se nepřekrývajících polopřímek ležících na určující přímce. Tímto případem se opět nebudeme více zabývat.

V situaci, kdy leží jeden z koncových bodů úsečky ve středu inverze, je obrazem úsečky polopřímka, jejíž počáteční bod je obrazem druhého koncového bodu této úsečky.

c) **Určující přímka neprochází středem inverze**

Úsečka XY se zobrazí na kruhový oblouk $X'Y'$, jenž leží na kružnici procházející středem inverze. Střed kružnice, na níž leží tento oblouk, nalezneme stejně jako v případě konstrukce obrazu polopřímky, která leží na určující přímce neprocházející středem inverze (viz výše). Pro určení délky kruhového oblouku opět použijeme *středový bod* S' .



Teorém 2.13

Velikost středového úhlu α příslušného k oblouku u' v inverzi s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ závisí na vzdálenosti určující přímky a krajních bodů úsečky u od středu inverze a je rovna:

a) $\alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{d}{|SY|}\right)$ pokud $S' = X$ ⁴¹

b) $\alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{d}{|SY|}\right) + 2 \cdot \arccos\left(\frac{d}{|SX|}\right)$ pokud $S' \in u$

c) $\alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{d}{|SY|}\right) - 2 \cdot \arccos\left(\frac{d}{|SX|}\right)$ pokud $S' \notin u$

kde $d = |SS'|$ je vzdálenost určující přímky od středu inverze.

Důkaz:

Vyplývá z *teorému 2.9*. □

⁴¹ Pokud úsečka neprochází středovým bodem, označíme krajní body úsečky tak, aby platilo $|XS'| < |YS'|$.

Teorém 2.14

Délka l kruhového oblouku u' v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(S, r)$ kde $k = r^2$, jenž je obrazem úsečky u , která leží na určující přímce neprocházející středem inverze,

je závislá na vzdálenosti určující přímky od středu inverze $d = |SS'|$

a vzdáleností krajních bodů úsečky od středu inverze⁴² a je rovna:

$$\text{a) } l = \frac{k \pi}{d} \cdot \left(\frac{\arccos(d / |SY|)}{180^\circ} \right) \quad \text{pokud } S' = X$$

$$\text{b) } l = \frac{k \pi}{d} \cdot \left(\frac{\arccos(d / |SY|)}{180^\circ} + \frac{\arccos(d / |SX|)}{180^\circ} \right) \quad \text{pokud } S' \in u$$

$$\text{c) } l = \frac{k \pi}{d} \cdot \left(\frac{\arccos(d / |SY|)}{180^\circ} - \frac{\arccos(d / |SX|)}{180^\circ} \right) \quad \text{pokud } S' \notin u$$

Důkaz:

Je obdobný důkazu *teorému 2.10* při použití velikosti úhlu z *teorému 2.13*. □

Nakonec se budeme zabírat **kruhovým obloukem**. Podobně, jako pro části přímky udává jejich vlastnosti určující přímka, tak pro kruhový oblouk vyplývají vlastnosti jeho obrazu z tzv. *určující kružnice*, na níž tento oblouk leží. Nastat mohou dva případy:

a) Určující kružnice prochází středem řídicí kružnice:

Pokud kruhový oblouk neprochází středem inverze, je jeho obrazem úsečka. V případě, že je jedním z krajních bodů oblouku střed inverze, je výsledným obrazem polopřímka. Pokud oblouk prochází středem inverze, zobrazí se na dvojici polopřímek. Vzhledem k tomu, že je kruhová inverze involutorní zobrazení, odpovídají všechny tři polohy oblouku a jejich obrazy jednotlivým případům uvedeným výše u polopřímky a úsečky.

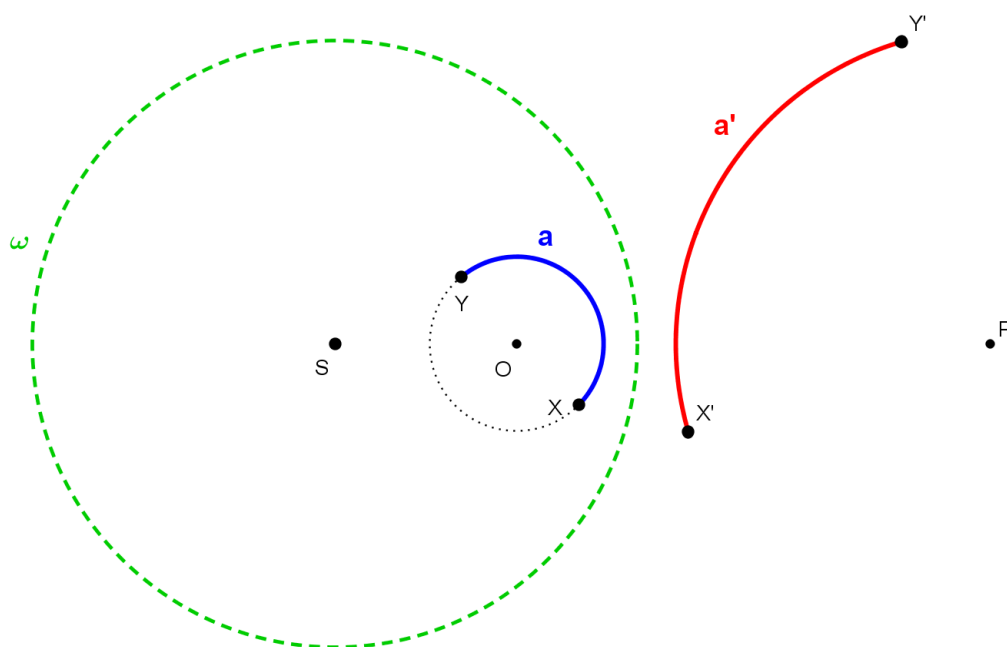
Délku úsečky, která je obrazem kruhového oblouku neprocházejícího středem inverze je možné vyjádřit obráceným postupem z *teorému 2.14*.⁴³ Délka není závislá pouze na poloměru určující kružnice a délce samotného oblouku, ale také na poloze tohoto oblouku na určující kružnici. Čím blíže se nachází oblouk ke středu inverze, tím delší bude výsledná úsečka.

42 Opět platí, že pokud úsečka neprochází středovým bodem, tak $|XS'| < |YS'|$.

43 Z délky a polohy oblouku zjistíme středový úhel k němu příslušný, z něj pak obvodový úhel ze středu inverze a následně vyjádříme velikost úsečky pomocí goniometrických funkcí a vzdáleností jejich krajních bodů od středu inverze. Pro výpočet je ještě nutná vzdálenost středu inverze od přímky, s níž je úsečka incidentní.

b) **Určující kružnice neprochází středem řídicí kružnice:**

Obrazem je kruhový oblouk. Při konstrukci postupujeme tak, jako bychom konstruovali obraz určující kružnice, na níž zobrazíme krajní body, které určují výsledný oblouk. Střed P zobrazeného oblouku nalezneme pomocí stejnolehlosti.



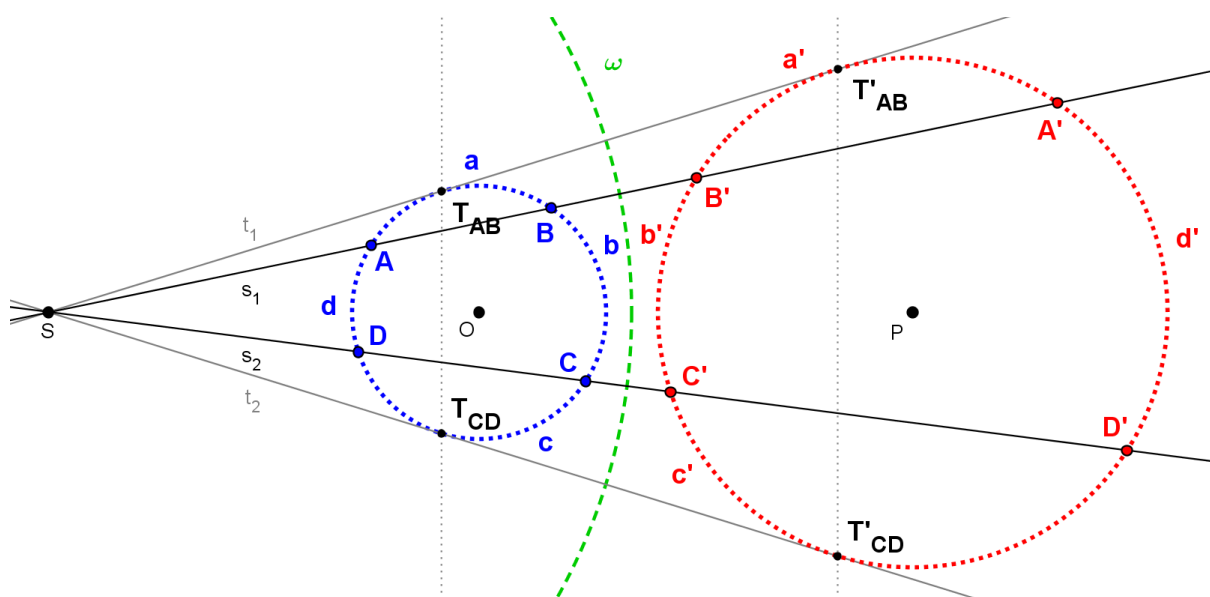
Délka výsledného oblouku závisí na poloměru určující kružnice, vzdálenosti jejího středu od středu inverze, samozřejmě mocnosti dané inverze, ale také na samotné poloze vzorového oblouku na určující kružnici, tedy na poloze jeho krajních bodů.

Určení délky inverzního oblouku je poněkud složitější a vyžaduje úvahu. Středem kruhové inverze S vedme přímky procházející počátečním a koncovým bodem původního oblouku. Tyto přímky, které jsou nejčastěji sečny určující kružnice, označme s_1 a s_2 . Obě přímky vytínají na určující kružnici čtyři body, jež označíme A , B , C a D . Dvojice po sobě jdoucích bodů pak určují čtyři kruhové oblouky $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ a $d = DA$, které dohromady tvoří určující kružnici.

V případě, že je jedna z přímek vedoucí středem inverze a počátečním/koncovým bodem oblouku tečna určující kružnice, označíme ji t_1 (příp. t_2). Body A a B splynou v jediný bod T_{AB} (příp. body C a D splynou v bod T_{CD}), oblouk a (příp. c) nebude existovat a bude platit, že $b = T_{AB}C$ a $d = DT_{AB}$ (příp. $b = BT_{CD}$ a $d = T_{CD}A$).

Pokud by byly obě přímky jdoucí středem a počátečním/koncovým bodem oblouku tečny určující kružnice, budou na ní vytínat pouze dva body T_{AB} a T_{CD} . Oblouky a a c nebudou existovat a pro zbylé dva oblouky bude platit, že $b = T_{AB}T_{CD}$ a $d = T_{CD}T_{AB}$.

Dále platí, že polára bodu S vzhledem k určující kružnici, tedy přímka $p = T_{AB}T_{CD}$, rozděluje určující kružnici na dva oblouky. Body A a D se pak nacházejí na oblouku, jenž leží v polorovině pS , body B a C se nacházejí na oblouku ležící v polorovině pO , kde bod O je středem určující kružnice. Vše přehledně zachycuje následující obrázek:



Při výpočtu délky inverzního oblouku vycházíme z faktu, že určující kružnice a její obraz v kruhové inverzi jsou stejnohlé se středem stejnohllosti v bodě S . Za pomoci lemmatu C nalezneme koeficient stejnohllosti h . Z vlastností kruhové inverze pak vyplývají následující rovnosti:

$$a' = h \cdot a \quad b' = h \cdot d \quad c' = h \cdot c \quad d' = h \cdot b$$

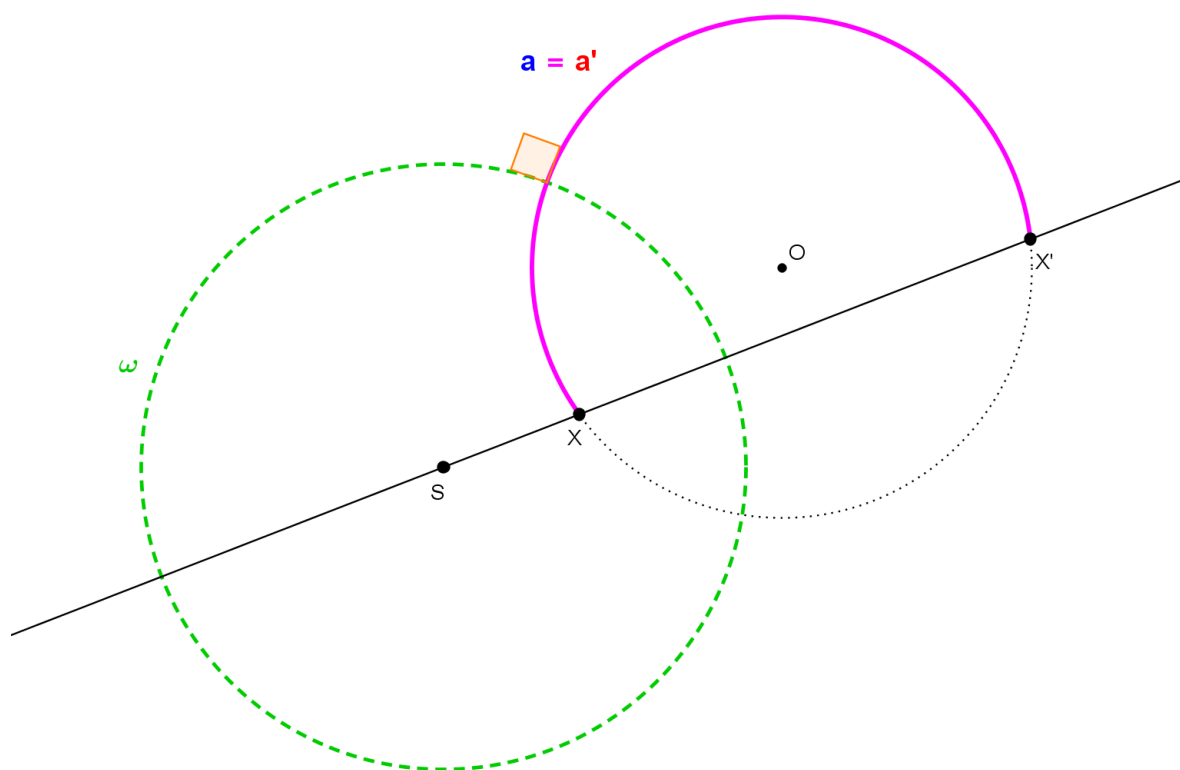
Původní oblouk je v závislosti na své poloze na určující kružnici složen z jednotlivých dílčích oblouků a , b , c příp. d . Pokud známe jejich délky, můžeme pak již snadno určit velikosti jejich obrazů pomocí výše uvedených vztahů a prostým sčítáním získat délku inverzního oblouku.

Teorém 2.15

Kruhový oblouk se v kruhové inverzi zobrazí sám na sebe a je *slabě samodružný* právě tehdy, je-li jeho určující kružnice ortogonální vůči řídicí kružnici dané inverze, a zároveň pokud jsou jeho počáteční a koncový bod vzájemnými obrazy v této inverzi.

Důkaz:

Vyplyvá z definice kruhové inverze a věty 2.10. □



2.1.5 Svazky kruhových křivek

Definice 2.3

Svazek kruhových křivek je množina kruhových křivek o rovnicích:

$$\lambda_1[A_1(x^2 + y^2) + D_1x + E_1y + F_1] + \lambda_2[A_2(x^2 + y^2) + D_2x + E_2y + F_2] = 0$$

kde $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ se nazývají *parametry kruhové křivky* patřící do svazku a platí, že

$$(\lambda_1 = \lambda_2) \rightarrow (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0), \quad h \begin{pmatrix} A_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_2 & D_2 & E_2 & F_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{a} \quad \frac{D^2 + E^2}{4} - AF \geq 0$$

kde $M = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)$, $M \in \{A, D, E, F\}$.

(Janyška, 2019, s. 112)

Existuje celkem šest typů svazků v závislosti na typu a poloze kruhových křivek (Janyška, 2019, s. 112–113):

I. svazek různoběžných přímek

- všechny kruhové křivky svazku se protínají ve dvou bodech:
střed (vrchol) svazku S a Möbiův bod M[∞]

II. svazek rovnoběžných přímek

- všechny kruhové křivky svazku se protínají v jednom bodě:
Möbiův bod M[∞]

III. svazek soustředných kružnic

- kruhové křivky svazku se neprotínají v žádném bodě
- všechny kružnice svazku mají společný střed S

IV. svazek protínajících se kruhových křivek

- mimo kružnice se společnými dvěma body je součástí svazku i jedna přímka (procházející oběma body), jež je zároveň společnou *chordálou* všech kružnic

V. svazek dotýkajících se kruhových křivek

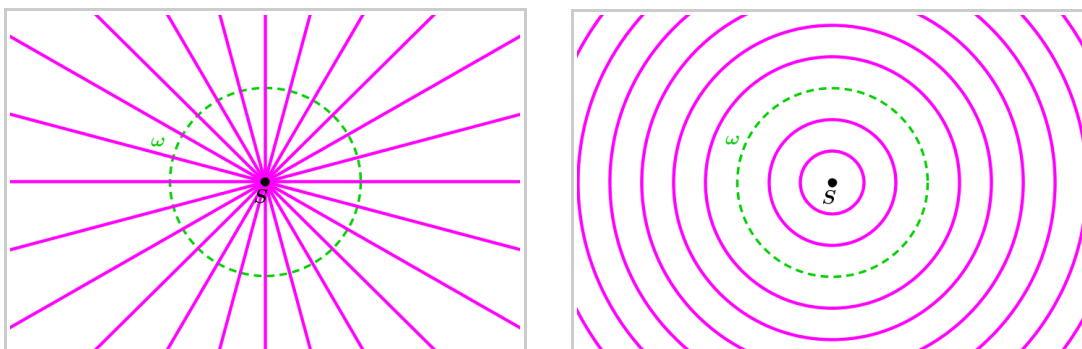
- mimo kružnice se společným bodem dotyku je součástí svazku i jedna přímka (procházející tímto bodem), jež je zároveň společnou *chordálou* všech kružnic

VI. svazek mimoběžných kruhových křivek

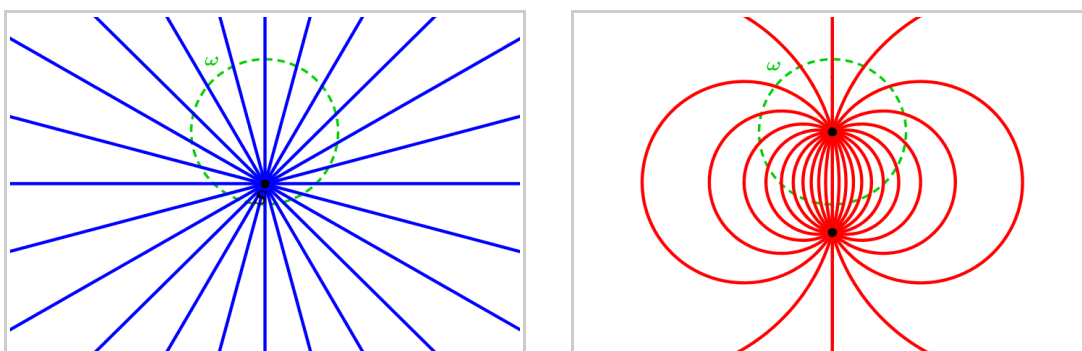
- mimo kružnice jsou součástí svazku dvě nulové kruhové křivky (dva body) a jedna přímka, která je zároveň společnou *chordálou* všech kružnic

Středů všech kružnic leží na přímce kolmé na chordálu zvané *centrála svazku*.

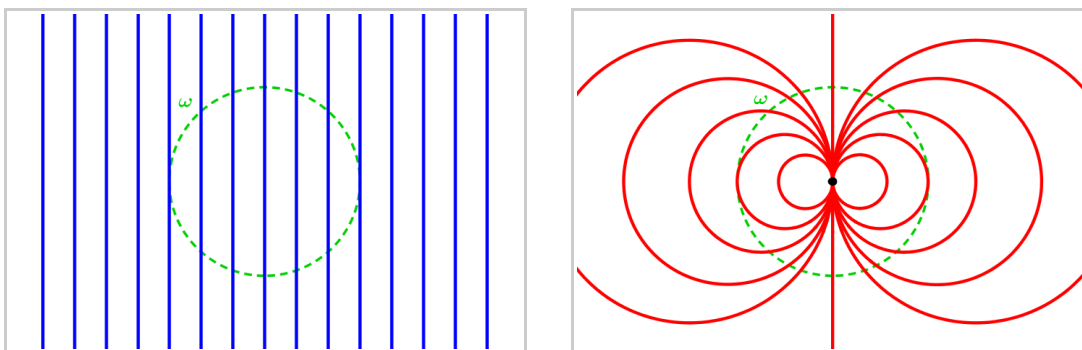
V případě, že umístíte střed kruhové inverze do středu S svazku různoběžných přímek (příp. svazku soustředných kružnic), obdržíme jako obraz svazek stejného typu. Jsou tedy oba tyto svazky se středem inverze ve středu svazku samodružné.⁴⁴



Obrazem svazku různoběžných přímek se středem inverze v jiném bodě, než je střed svazku, je svazek protínajících se kruhových křivek. Vzory společných bodů v tomto svazku jsou střed svazku různoběžných přímek S a Möbiův bod M^∞ .

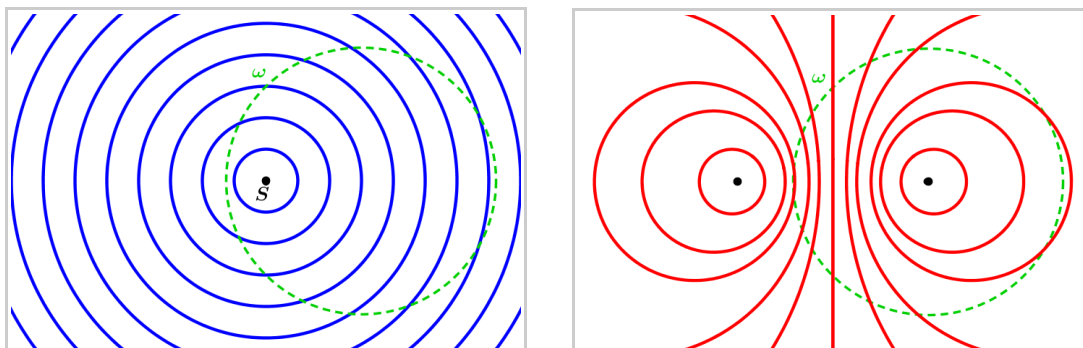


Svazek rovnoběžných přímek se v kruhové inverzi s libovolným středem zobrazí na svazek dotýkajících se kruhových křivek. Vzorem společného bodu tohoto svazku je Möbiův bod M^∞ .



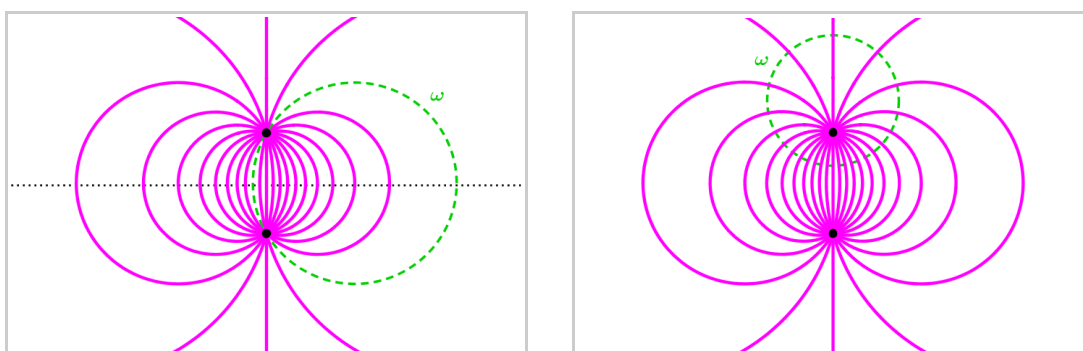
⁴⁴ Svazek různoběžných přímek je *silně samodružný* (přímky se zobrazí samy na sebe), zatímco svazek soustředných kružnic je *slabě samodružný* (kružnice se zobrazí na jiné kružnice téhož svazku).

Obrazem svazku soustředných kružnic se středem inverze v jiném bodě, než je střed svazku, je svazek mimoběžných kruhových křivek. Vzory nulových kruhových křivek v tomto svazku jsou střed svazku různoběžných přímek S a Möbiův bod M^∞ .



Svazek protínajících se kruhových křivek se v kruhové inverzi zobrazí na jiný svazek protínajících se kruhových křivek, jehož společné body jsou obrazy společných bodů vzoru v této inverzi. Pokud je středem inverze jeden ze společných bodů, zobrazí se svazek na svazek různoběžných přímek. Střed tohoto svazku bude obrazem druhého společného bodu.

V případě, že leží střed kruhové inverze na centrále svazku a řídicí kružnice inverze prochází oběma společnými body svazku, zobrazí se svazek sám na sebe.⁴⁵ Samodružný bude též svazek, v němž leží střed kruhové inverze na chordále svazku a její řídicí kružnice je ortogonální ke všem křivkám svazku.⁴⁶

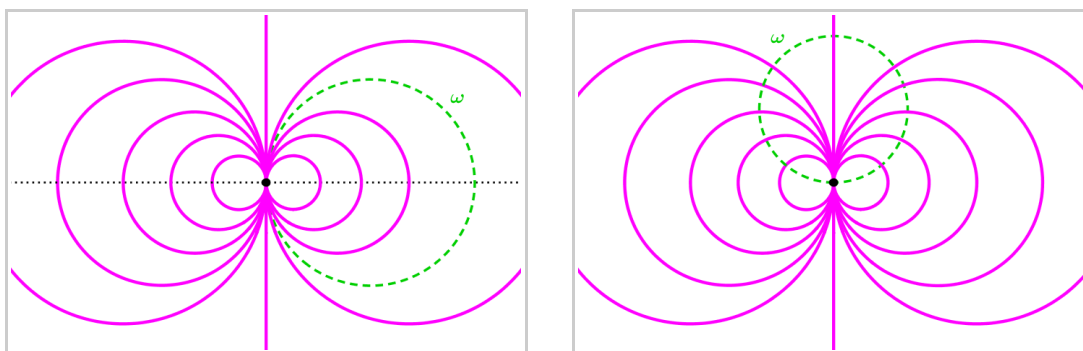


Svazek dotýkajících se kruhových křivek se v kruhové inverzi zobrazí na jiný svazek dotýkajících se kruhových křivek, jehož společný bod je obrazem společného bodu vzoru v této inverzi. Pokud je středem inverze přímo společný bod, zobrazí se svazek na svazek rovnoběžných přímek.

⁴⁵ Svazek bude *slabě samodružný*.

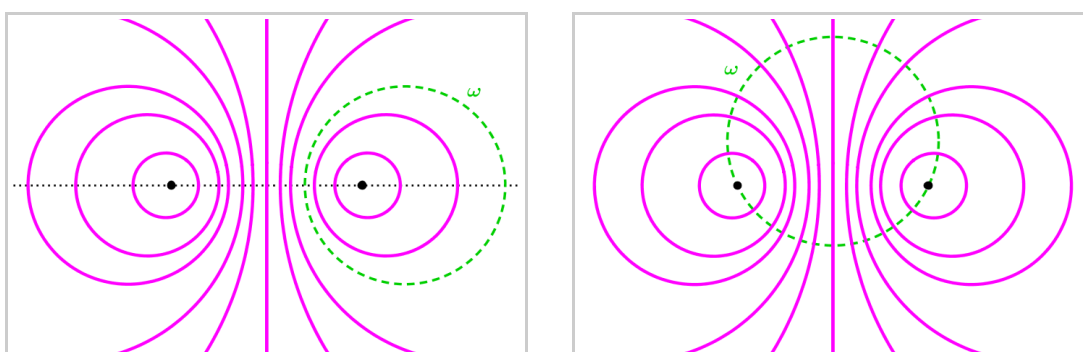
⁴⁶ Svazek bude *silně samodružný*.

V případě, že leží střed kruhové inverze na centrále svazku a řídící kružnice inverze prochází společným bodem svazku, zobrazí se svazek sám na sebe.⁴⁷ Samodružný bude též svazek, v němž leží střed kruhové inverze na chordále svazku a její řídící kružnice prochází společným bodem svazku.⁴⁸



Svazek mimoběžných kruhových křivek se v kruhové inverzi zobrazí na jiný svazek mimoběžných kruhových křivek, jehož nulové kruhové křivky jsou obrazem nulových kruhových křivek vzoru v této inverzi. Pokud je středem inverze jedna z nulových kruhových křivek, zobrazí se svazek na svazek soustředných kružnic.

V případě, že leží střed kruhové inverze na centrále svazku a řídící kružnice inverze je totožná s kružnicí daného svazku⁴⁹, zobrazí se svazek sám na sebe.⁴⁷ Samodružný bude též svazek, v němž leží střed kruhové inverze na chordále svazku a její řídící kružnice prochází oběma nulovými křivkami svazku.⁴⁸



47 Svazek bude *slabě samodružný*.

48 Svazek bude *silně samodružný*.

49 Pro daný střed kruhové inverze na centrále svazku existuje jediná kružnice, která patří do tohoto svazku.

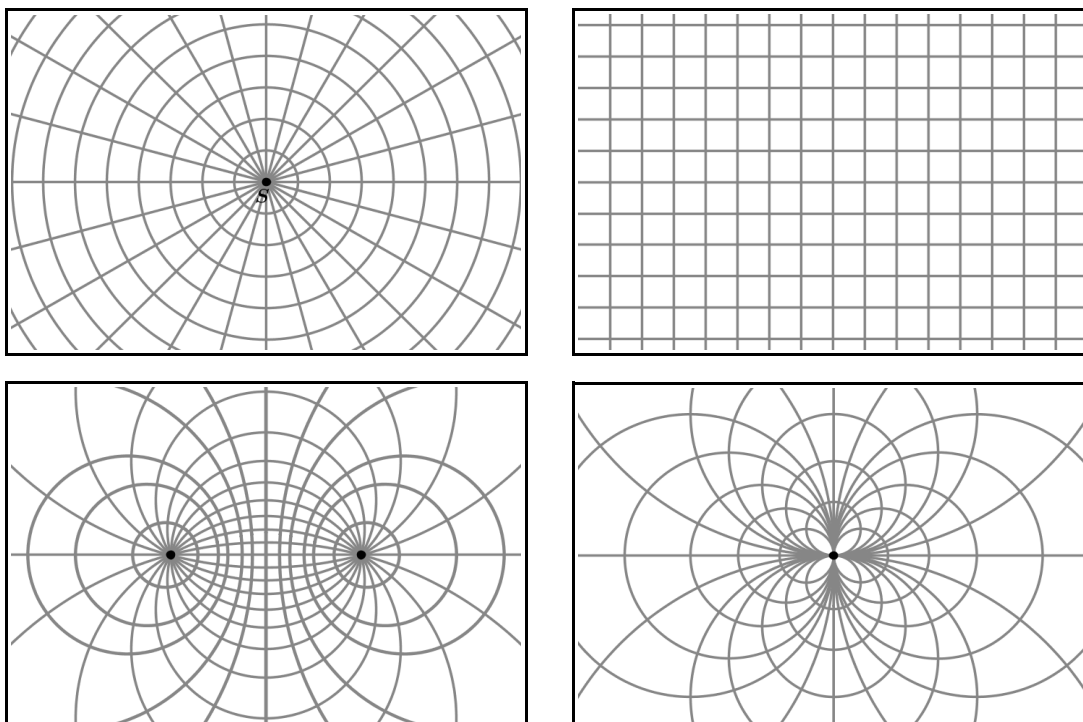
Definice 2.4

Duální svazky kruhových křivek jsou takové dva svazky, pro něž platí, že každá kruhová křivka jednoho svazku kolmo protíná každou kruhovou křivku druhého svazku.

(Janyška, 2019, s. 113)

Existují celkem čtyři páry duálních svazků (Janyška, 2019, s. 114):

- svazek různoběžných přímek je vzájemně duální se svazkem soustředných kružnic
 - oba svazky mají společný střed S
- svazek rovnoběžných přímek je vzájemně duální se svazkem rovnoběžných přímek
 - přímky prvního svazku musí být kolmé na přímky druhého svazku
- svazek protínajících se kruhových křivek je vzájemně duální se svazkem mimoběžných kruhových křivek
 - společné body svazku protínajících se kruhových křivek jsou nulovými kruhovými křivkami svazku mimoběžných kruhových křivek
 - chordála prvního svazku je centrálou druhého svazku a vice versa
- svazek dotýkajících se kruhových křivek je vzájemně duální se svazkem dotýkajících se kruhových křivek
 - chordála prvního svazku je centrálou druhého svazku a vice versa



Definici kruhové inverze lze zobecnit tak, že místo řídicí kružnice inverze budeme uvažovat obecně nenulovou kruhovou křivku. Mimo všechny obvyklé případy, kdy je řídicí kruhovou křivkou kružnice tak přibývá možnost inverze podle kruhové křivky, která je přímkou. V tomto případě již nelze použít *definici 1.6*.

Při konstrukci obrazu a hledání vlastností inverze přes přímkou však stále můžeme použít lemma A. Protože přímka je limitním případem kružnice, v němž se střed kružnice přibližuje bodu v nekonečnu, uvažujeme v lemmatu A jeden ze dvou samodružných bodů zobecněné inverze jako bod v nekonečnu. Obraz bodu C pak nalezneme tak, aby byly on a jeho vzor D harmonicky sdruženy se samodružným bodem B a bodem v nekonečnu A_∞ , tedy aby splňovali podmínku $(A_\infty BCD) = -1$.

Z vlastností dvojpoměru plyne, že samodružný bod zobecněné inverze je středem úsečky vzoru a jeho obrazu.⁵⁰ Z toho vyplývá, že kruhová inverze s řídicí kruhovou křivkou, která je přímkou, je lineární zobrazení známé jako osová souměrnost.

Většina dosud uvedených vlastností kruhové inverze platí i pro osovou souměrnost. Obě zobrazení jsou konformní, involutorní (u osové souměrnosti neexistuje střed involuce) a množina jejich samodružných bodů je řídicí kruhová křivka. Obě zobrazují kruhové křivky opět na kruhové křivky a ortogonální kruhové křivky vůči řídicí kruhové křivce jsou v obou zobrazení slabě samodružné. Kružnice a její obraz jsou stejnohlé se středem stejnohllosti ve středu inverze; u osové souměrnosti je tento střed stejnohllosti bodem v nekonečnu. Obě zobrazení jsou nepřímá zobrazení.

Teorém 2.16

Svazek kruhových křivek je v kruhové inverzi se zobecněnou řídicí kruhovou křivkou *slabě samodružný*, pokud řídicí kruhová křivka patří do daného svazku, nebo *silně samodružný* v případě, že řídicí kruhová křivka patří do jeho duálního svazku.

Důkaz:

Tvrzení o slabě samodružném svazku vyplývá z vlastností kruhové inverze (osové souměrnosti) a faktu, že kruhová inverze (osová souměrnost) zachovává incidenci bodů.

Tvrzení o silně samodružném svazku vyplývá z týchž vlastností a z *věty 2.10*. □

⁵⁰ $(A_\infty BCD) = \frac{|\vec{A_\infty C}| \cdot |\vec{BD}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{A_\infty D}|} = \frac{|\vec{BD}|}{|\vec{BC}|} = -1 \rightarrow |\vec{CB}| = |\vec{BD}|$ (Chodorová, 2013, s. 17)

2.2 Sinové spirály

Věta 2.13

Kruhová inverze se středem v počátku soustavy souřadné zobrazuje sinové spirály opět na sinové spirály.

Důkaz:

Obecnou rovnici spirály $r^n = a^n \cdot \cos(n \cdot \theta)$ odmocníme číslem n :

$r = a \cdot \cos^{1/n}(n \cdot \theta)$. Dále transformujeme podle vztahu [3b]:

$$\frac{k}{r} = a \cdot \cos^{1/n}(n \cdot \theta) . \text{ Výraz upravíme: } r = \frac{k}{a} \cdot \cos^{-1/n}(n \cdot \theta) .$$

Uvažujme $n = -m$: $r = \frac{k}{a} \cdot \cos^{1/m}(-m \cdot \theta)$. Funkce kosinus je sudá, tudíž:

$$r = \frac{k}{a} \cdot \cos^{1/m}(m \cdot \theta) . \text{ Umocníme číslem } m : r^m = \left(\frac{k}{a}\right)^m \cdot \cos(m \cdot \theta) .$$

Nakonec upravíme na $r^m = b^m \cdot \cos(m \cdot \theta)$, což je opět rovnice sinové spirály. \square

Důsledek:

Sinové spirály s parametrem n se zobrazí na spirály s parametrem $-n$.

2.2.1 Rovnoosá hyperbola a Bernoulliho lemniskáta

Rovnoosá hyperbola je speciálním typem hyperboly, pro niž platí $\varepsilon = \sqrt{2}$. Patří mezi *regulární kuželosečky* a vzniká řezem rotační kuželové plochy, jejíž povrchové přímky svírají s osou rotace kužele úhel o velikosti 45° .

Rovnice rovnoosé hyperboly se středem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = a \cdot \sec^{1/2}(2\theta) \qquad x^2 - y^2 = a^2 \qquad (\text{Jarešová, 2009, s. 17})$$

Koeficient a udává vzdálenost vrcholu hyperboly od jejího středu. Vzdálenost ohnisek hyperboly od středu je dána vztahem $e = \varepsilon \cdot a = \sqrt{2}a$.

Bernoulliho lemniskáta je křivka čtvrtého řádu a je definována jako množina bodů, jejichž součin vzdáleností od dvou pevných bodů F_1, F_2 , tzv. *ohnisek*, je roven čtverci poloviny vzdálenosti obou ohnisek, tedy: $L_B = \left\{ X; |XF_1| \cdot |XF_2| = \left(\frac{|F_1F_2|}{2} \right)^2 \right\}$.

Rovnice Bernoulliho lemniskáty se středem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = a \cdot \cos^{1/2}(2\theta) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (\text{Bímová, 2006, s. 53})$$

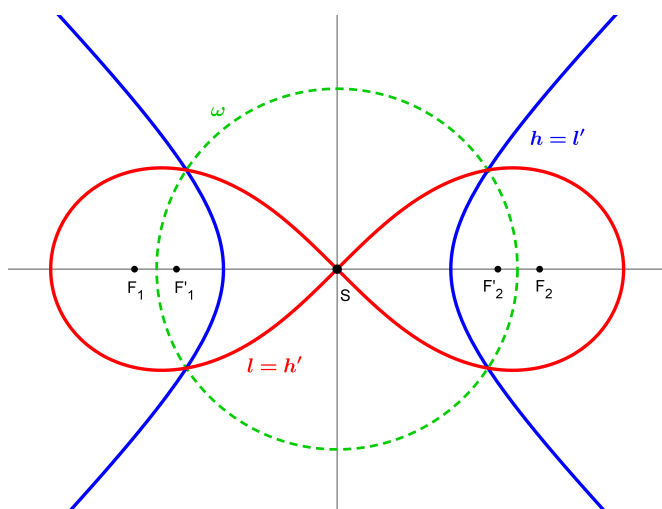
Koeficient a udává vzdálenost vrcholu lemniskáty od jejího středu. Vzdálenost ohnisek lemniskáty od středu je dána vztahem $e = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Důkazy všech následujících vět této a příští podkapitoly se provedou tak, že se rovnice příslušné křivky v polárních souřadnicích dosadí do vztahu [3b], čímž obdržíme rovnici křivky inverzní.

Věta 2.14 a 2.15

Inverzní křivkou hyperboly se středem inverze v jejím středu je Bernoulliho lemniskáta.
 Inverzní křivkou Bernoulliho lemniskáty se středem inverze v jejím středu je hyperbola.

(Kocourek, 2016, s. 35)



Pascalova závitnice je speciálním příkladem *prodloužené epicykloidy*⁵¹, která vznikne kotálením tvořící kružnice po pevné kružnici se stejným poloměrem (Bímová, 2006, s. 40).

Rovnice Pascalovy závitnice vzniklé inverzí rovnoosé hyperboly s ohniskem ve středu souřadné soustavy jsou:

$$r = a(1 + \sqrt{2} \cdot \cos \theta) \quad (x^2 + y^2 - \sqrt{2}ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

(Ferréol, Limaçon of Pascal)

Koeficient a udává vzdálenost středu soustavy souřadné od průsečíků s osou y .

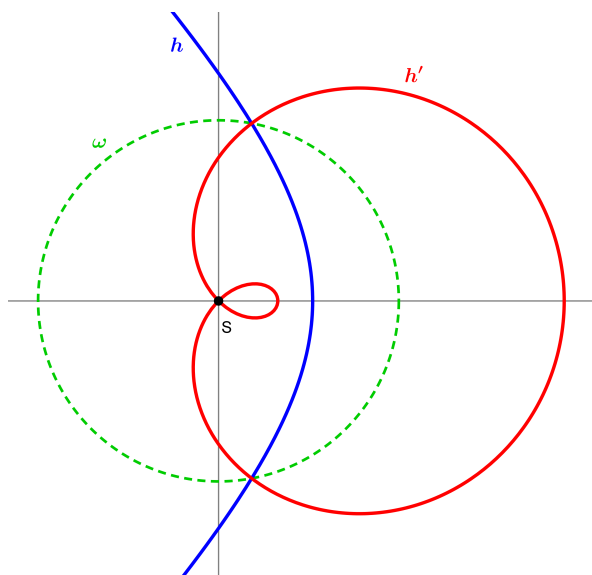
Věta 2.16

Inverzní křivkou hyperboly se středem inverze v jejím ohnisku je Pascalova závitnice.

(Kocourek, 2016, s. 36)

Rovnice rovnoosé hyperboly s ohniskem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \frac{a}{1 + \sqrt{2} \cdot \cos \theta} \quad y^2 - x^2 + 2\sqrt{2}ax = a^2$$



⁵¹ **Epicykloida** – rovinná křivka, která vzniká při kotálení tvořící kružnice po pevné kružnici s vnějším dotykem.

Prodloužená epicykloida – je epicykloida, jejíž tvořící bod má větší vzdálenost od středu tvořící kružnice, než poloměr této kružnice. (Bímová, 2006, s. 34)

Přímá strofoida je množina všech krajních bodů průměrů vedených bodem $A = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$

ke svazku kružnic o společné tečně v ose x s bodem dotyku v počátku (Bímová, 2006, s. 16).

Rovnice přímé strofoidy jsou:

$$r = a \cdot \cos 2\theta \cdot \sec \theta \quad y^2(a+x) = x^2(a-x) \quad (\text{Bímová, 2006, s. 16})$$

Koeficient a udává vzdálenost středu soustavy souřadné od průsečíku s osou x .

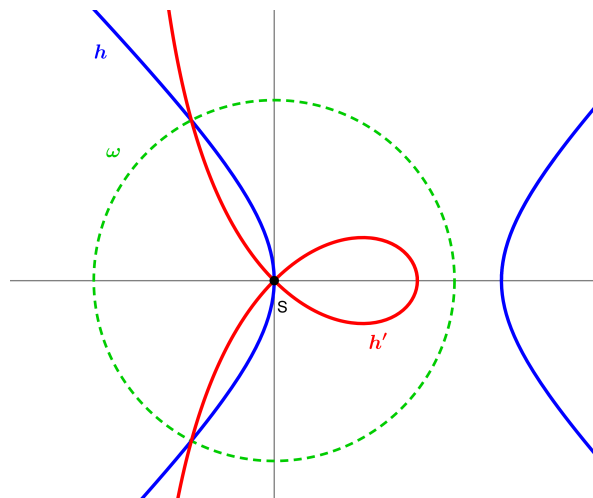
Věta 2.17

Inverzní křivkou hyperboly se středem inverze v jejím vrcholu je přímá strofoida.

(Kocourek, 2016, s. 38)

Rovnice rovnoosé hyperboly s vrcholem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = 2a \cdot \cos \theta \cdot \sec 2\theta \quad (x-a)^2 - y^2 = a^2$$



52 Z obecné rovnice $x^2 - y^2 = a^2$ odvozeno takto:

Střed hyperboly je posunut vpravo o vzdálenost $e = \sqrt{2}a$, čímž se do počátku dostává ohnisko:

$(x - \sqrt{2}a)^2 - y^2 = a^2$. Po algebraických úpravách obdržíme výsledný tvar.

53 Z kartézských souřadnic $(x-a)^2 - y^2 = a^2$ odvozeno takto:

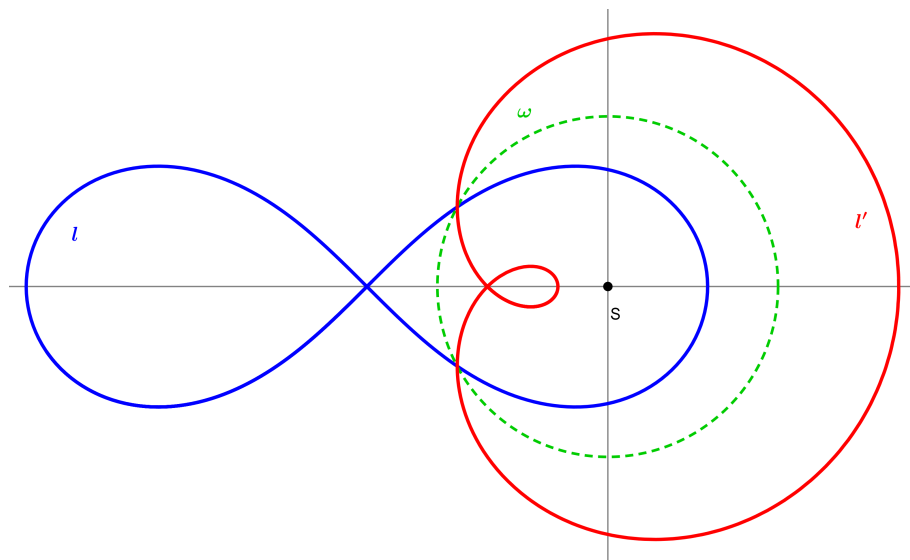
$x^2 - y^2 - 2ax = 0$. Dosadíme polární souřadnice: $r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2ar \cdot \cos\theta = 0$.

Upravíme výraz v závorce a vydělíme rovnicí r : $r \cdot \cos 2\theta - 2a \cdot \cos\theta = 0$.

Osamostatníme r : $r = 2a \cdot \frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$. Nakonec nahradíme kosinus v čitateli funkcí sekans.

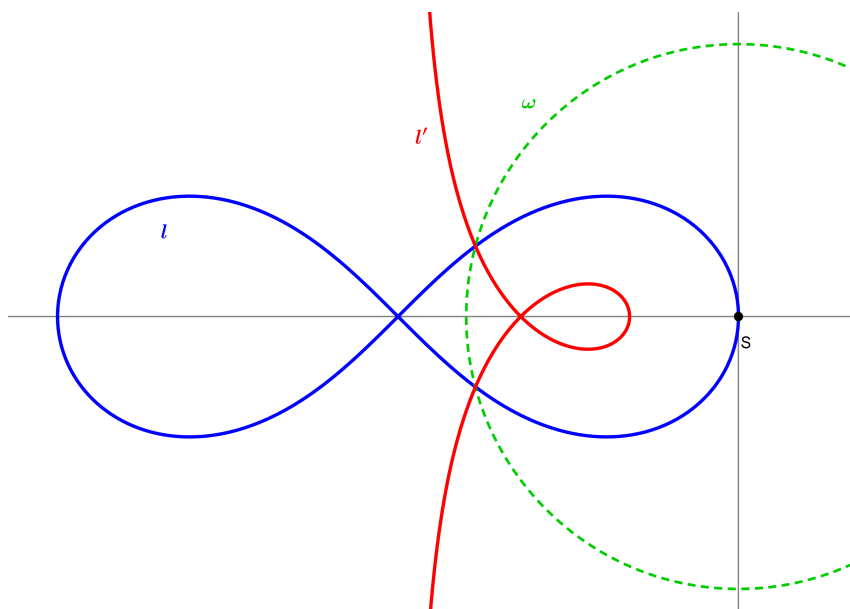
Hypotéza 2.3

Inverzní křivkou Bernoulliho lemniskáty
se středem inverze v jejím ohnisku je Pascalova závitnice.



Hypotéza 2.4

Inverzní křivkou Bernoulliho lemniskáty
se středem inverze v jejím vrcholu je přímá strofoida.



2.2.2 Parabola a kardioida

Parabola patří mezi *regulární kuželosečky* a vzniká řezem rotačního kužele s rovinou, která je rovnoběžná s libovolnou tečnou rovinou této kuželosečky.

Rovnice paraboly s ohniskem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = a \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad y^2 + 4ax = 4a^2 \quad (\text{Jarešová, 2009, s. 17})$$

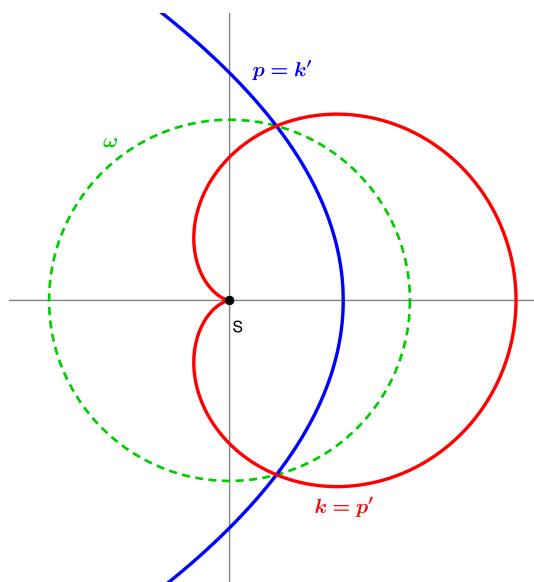
Koeficient a udává vzdálenost vrcholu paraboly od jejího ohniska.

Kardioida je *prostá epicykloida*⁵⁴, která vznikne kotálením tvořící kružnice po pevné kružnici se stejným poloměrem. Je to též speciální případ Pascalovy závitnice⁵⁵. (Bímová, 2006, s. 55–56)

Rovnice kardioidy s hrotem (bodem vratu) v počátku souřadné soustavy jsou:

$$r = a \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \left(x^2 + y^2 - \frac{a}{2}x\right)^2 = \frac{a^2}{4}(x^2 + y^2) \quad (\text{Ferréol, Cardioid})$$

Koeficient a udává vzdálenost hrotu a druhého průsečíku kardioidy s osou x .



⁵⁴ **Prostá epicykloida** – je epicykloida, jejíž tvořící bod má stejnou vzdálenost od středu tvořící kružnice jako poloměr této kružnice. Tvořící bod tedy leží na tvořící kružnici. (Bímová, 2006, s. 34)

⁵⁵ S rovnicí v polárních souřadnicích: $r = a(1 + \cos\theta)$. (Ferréol, Limaçon of Pascal)

Věta 2.18 a 2.19

Inverzní křivkou paraboly se středem inverze v jejím ohnisku je kardioida.

Inverzní křivkou kardioidy se středem inverze v jejím hrotu je parabola.

(Kocourek, 2016, s. 43)

Dioklova kisioida vzniká valivým pohybem vrcholu paraboly, která se odvaluje po shodné parabole (Bimová, 2006, s. 24).

Rovnice Dioklovy kisioidy s vratným bodem ve středu souřadné soustavy jsou:

$$r = a \cdot \tan \theta \cdot \sin \theta \qquad y^2(a - x) = x^3 \qquad (\text{Bimová, 2006, s. 24})$$

Koeficient a udává vzdálenost asymptoty křivky od středu souřadné soustavy.

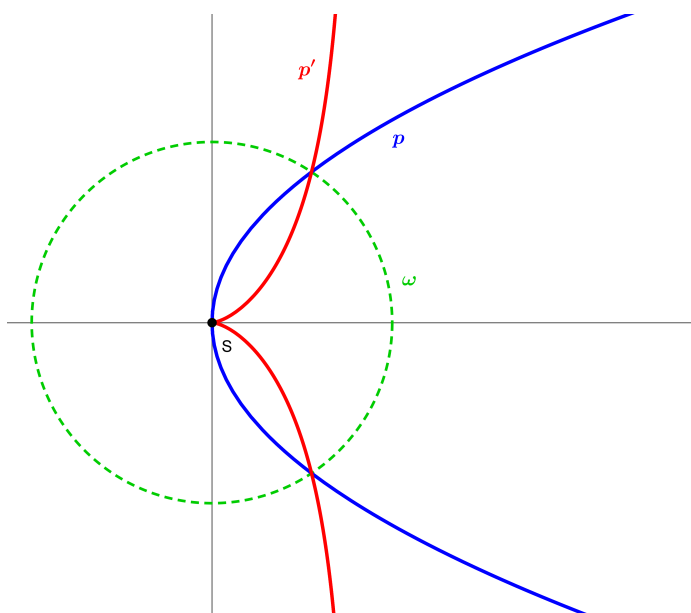
Věta 2.20

Inverzní křivkou paraboly se středem inverze v jejím vrcholu je Dioklova kisioida.

(Kocourek, 2016, s. 42)

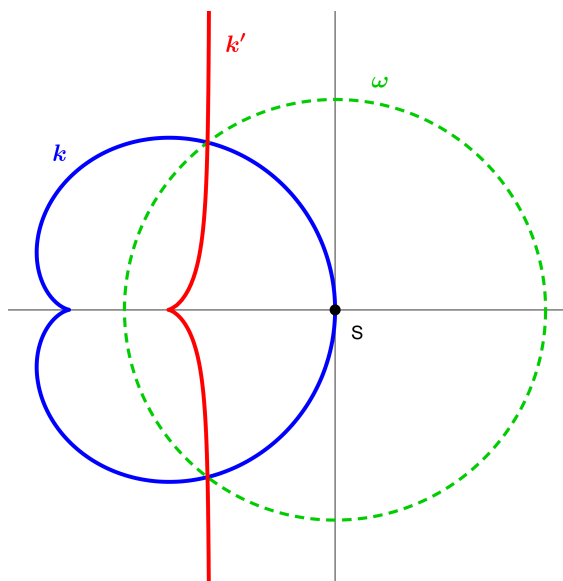
Rovnice paraboly s vrcholem v počátku souřadné soustavy jsou:

$$r = a \cdot \cot \theta \cdot \csc \theta \qquad y^2 = ax \qquad (\text{Ferréol, Parabola})$$



Hypotéza 2.5

Inverzní křivkou kardioidy se středem inverze v jejím vrcholu⁵⁶ je Dioklova kisoída.



⁵⁶ Za vrchol kardioidy vyjádřené v polárních souřadnicích uvedených výše je považován bod protínající osu x , který není jejím vratným bodem (hrotem).

2.3 Kuželosečky

2.3.1 Elipsa

Elipsa je *regulární kuželosečka* a vzniká řezem rotační kuželové plochy rovinou, jejíž odchylka od osy rotačního kužele je větší než odchylka libovolné povrchové přímky kuželové plochy od této osy.

Rovnice elipsy se středem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Ferréol, Ellipse})$$

Boothův ovál (též *eliptická lemniskáta*) je množina bodů, které jsou ortogonálními projekcemi středu elipsy na všechny její tečné přímky.

Rovnice Boothovy eliptické lemniskáty se středem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta)} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 \quad (\text{Ferréol, Booth's curve})$$

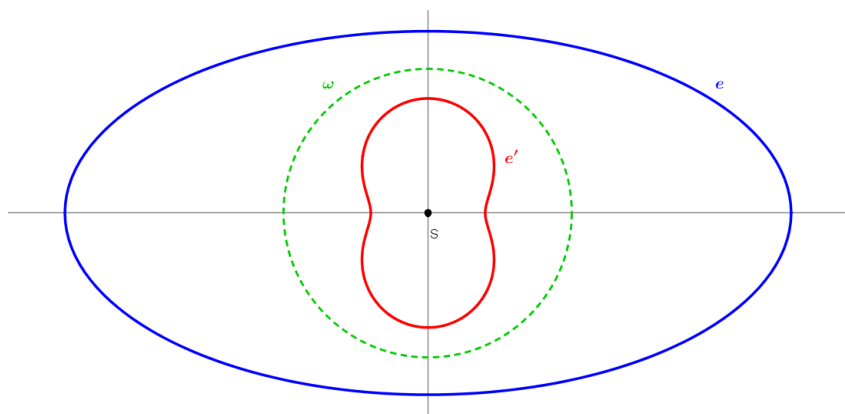
Koeficient a u obou křivek udává vzdálenost průsečíku s osou x od počátku soustavy souřadné, koeficient b obdobně vzdálenost průsečíku s osou y .

Věta 2.21 a 2.22

Inverzní křivkou elipsy se středem inverze ve středu elipsy je Boothův ovál.

Inverzní křivkou Boothova oválu se středem inverze ve středu oválu je elipsa.

(Ferréol, Booth's curve)



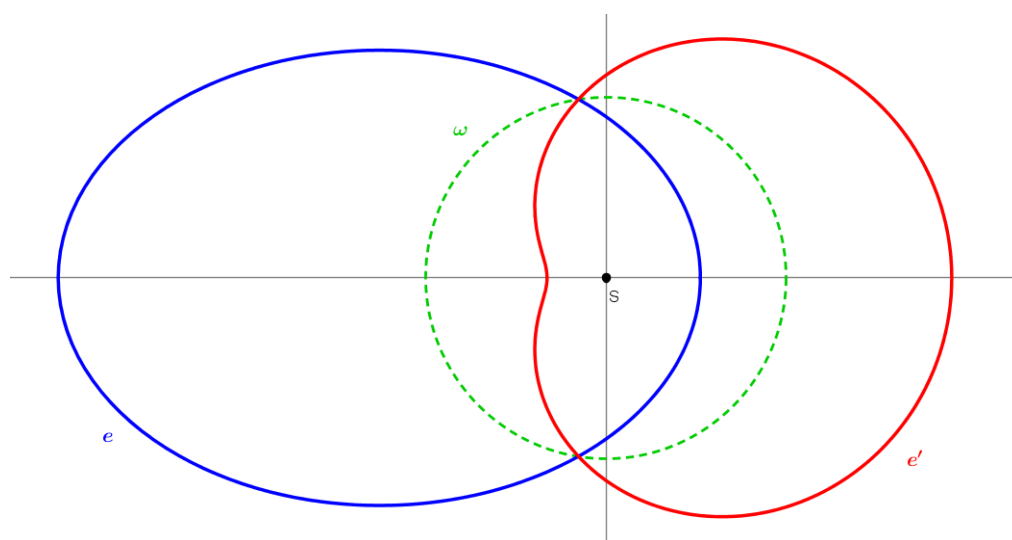
Věta 2.23

Inverzní křivkou elipsy se středem inverze v jejím ohnisku je Pascalova závitnice⁵⁷.

(Kocourek, 2016, s. 30)

Rovnice elipsy s ohniskem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \cos \theta} \quad 58 \quad \frac{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Ferréol, Ellipse})$$



Cramerova křivka je *úpatnice* paraboly, jejímž *úpatníkem* je bod ležící na ose této paraboly⁵⁹ (Ferréol, Right circular rational cubic). Speciálními případy této křivky jsou Dioklova kisoida, jejímž *úpatníkem* je vrchol paraboly a přímá strofoida, jejímž *úpatníkem* je průsečík osy paraboly s její řídicí přímkou (Bímová, 2006, s. 16).

Rovnice Cramerovy křivky se singulárním bodem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = a \sec(\theta) + b \cos(\theta) \quad (x - a)(x^2 + y^2) = bx^2 \quad 60$$

(Ferréol, Right circular rational cubic)

57 Rovnice obecné Pascalovy závitnice jsou:

$$r = a(1 + \varepsilon \cdot \cos \theta) \quad (x^2 + y^2 - \varepsilon ax)^2 = a^2(x^2 + y^2) \quad (\text{Ferréol, Limaçon of Pascal})$$

58 Ve zdroji uvedeno takto: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta}$, $p = \frac{b^2}{a}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

59 *Úpatnice dané křivky je množina bodů, v nichž se tečna křivky protíná s kolmicí spuštěnou na ni z pevného bodu, který se nazývá pól úpatnice, anebo někdy též úpatník.* (Bímová, 2006, s. 15)

60 Pro Dioklovu kisoidu platí, že $b = -a$, pro přímou strofoidu platí $b = -2a$.

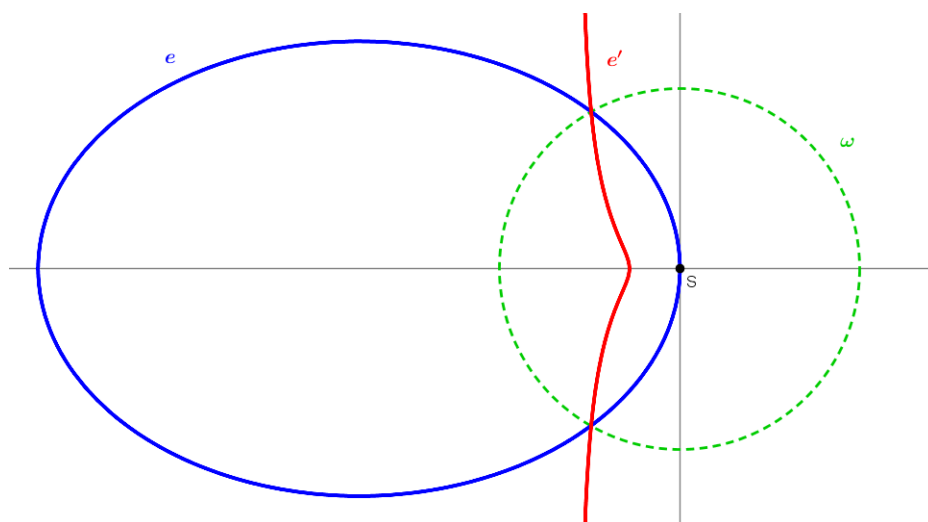
(Ferréol, Right circular rational cubic)

Věta 2.24

Inverzní křivkou elipsy se středem inverze v jejím hlavním vrcholu je Cramerova křivka.
(Ferréol, Right circular rational cubic)

Rovnice elipsy s hlavním vrcholem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \frac{2ab^2 \cdot \cos \theta}{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)} \quad 61 \quad \frac{(x+a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



2.3.2 Hyperbola

Obecná **hyperbola** je *regulární kuželosečka*, která vzniká řezem rotační kuželové plochy rovinou, jejíž odchylka od osy rotačního kužele je menší než odchylka libovolné povrchové přímky kuželové plochy od této osy.

Rovnice obecné hyperboly se středem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) - a^2 \sin^2(\theta)}} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Ferréol, Hyperbola})$$

61 Odvozeno z rovnice v kartézských souřadnicích.

Boothova lemniskáta (též *hyperbolická lemniskáta*) je množina bodů, které jsou ortogonálními projekcemi středu hyperboly na všechny její tečné přímky.

Rovnice Boothovy hyperbolické lemniskáty se středem v počátku jsou:

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2(\theta) - b^2 \sin^2(\theta)} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2$$

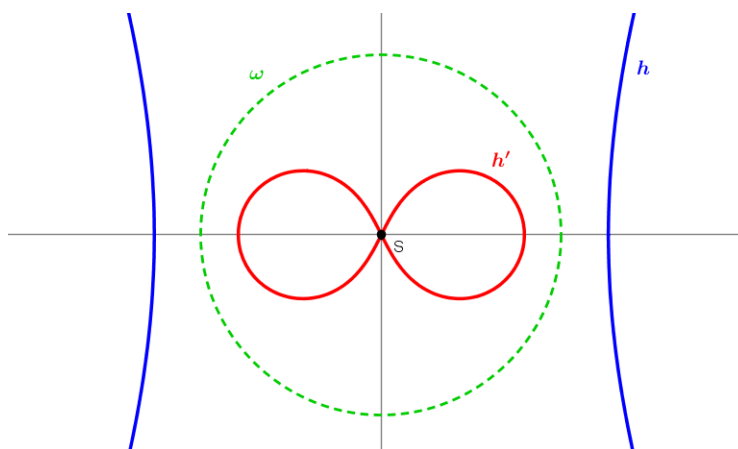
(Ferréol, Booth's curve)

Koeficient a u obou křivek udává vzdálenost průsečíku s osou x od počátku soustavy souřadné, koeficient b určuje výsledný tvar křivky (odchylku asymptot u hyperboly a vzdálenost tečen kolmých na osu y od osy x u lemniskáty).

Věta 2.25 a 2.26

Inverzní křivkou hyperboly se středem inverze ve středu hyperboly je Boothova lemniskáta. Inverzní křivkou Boothovy lemniskáty se středem inverze ve středu lemniskáty je hyperbola.

(Ferréol, Booth's curve)



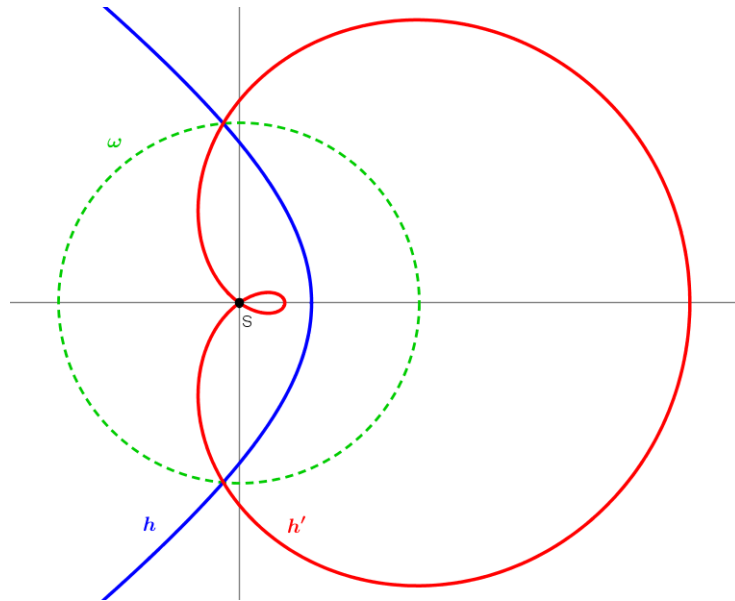
Věta 2.27

Inverzní křivkou hyperboly se středem inverze v jejím ohnisku je Pascalova závitnice.

(Kocourek, 2016, s. 36)

Rovnice hyperboly s ohniskem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \theta} \quad \frac{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Ferréol, Hyperbola})$$

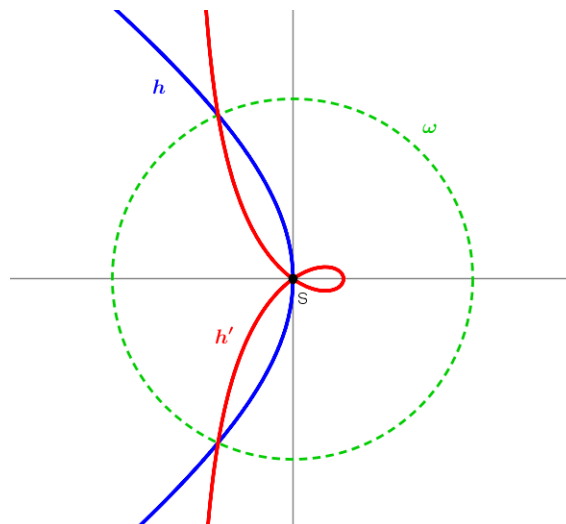


Věta 2.28

Inverzní křivkou hyperboly se středem inverze v jejím vrcholu je Cramerova křivka.
(Ferréol, Right circular rational cubic)

Rovnice hyperboly s vrcholem v počátku soustavy souřadné jsou:

$$r = \frac{2ab^2 \cdot \cos\theta}{b^2 \cos^2(\theta) - a^2 \sin^2(\theta)} \qquad \frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



3 APLIKACE KRUHOVÉ INVERZE

V této kapitole jsou uvedeny praktické aplikace kruhové inverze na nejruznějších geometrických problémech. První podkapitola se detailně zabývá nejtypičtějším použitím kruhové inverze a to při řešení tzv. Apolloniových a Pappových úloh. Uvádí všechny možné typy zadání úlohy a podává jejich vyčerpávající výčet, společně s počty a způsoby řešení. Dále ukazuje možnosti řešení úloh pomocí kruhové inverze a metody užití inverze.

Na tuto podkapitolu navazuje druhá, jež se snaží pomocí inverze kategorizovat polohy jednotlivých zadání těchto úloh a podat jejich souhrnný přehled společně s počty řešení. Ve třetí podkapitole jsou pak uvedeny méně známé geometrické problémy, které je možno elegantně řešit právě užitím kruhové inverze.

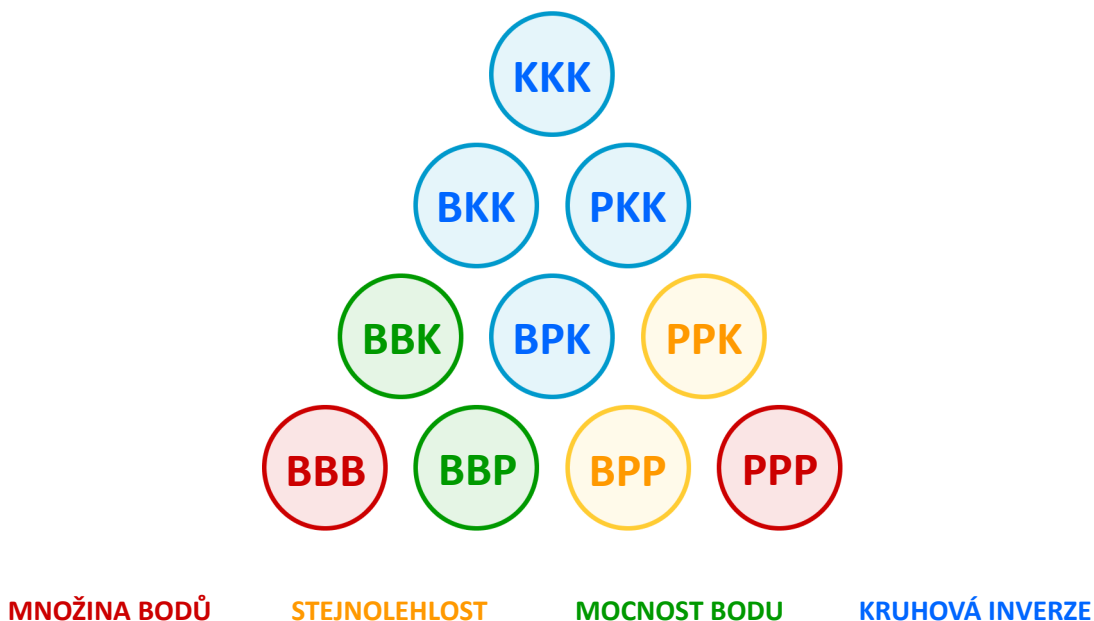
3.1 Apolloniova a Pappova úloha

Klasickým případem využití kruhové inverze jsou starověké geometrické úlohy známé jako úlohy Apolloniovy a Pappovy formulované cca ve 3. – 2. stol. př. n. l. a 3. – 4. stol. n. l. Původní úloha Apolloniova zní takto: „*Jsou dány tři kružnice. Sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří daných kružnic.*“. Později byla úloha aktualizována a tři zadané kružnice mohly být nahrazeny přímkou či bodem. Zadání se tak rozšířilo na deset různých možností. (Říha, 2010, s. 5)

Dalším rozšířením Apolloniovy úlohy jsou tzv. Pappovy úlohy, které jsou pouze speciálním případem již výše uvedených úloh. Jedná se o variantu, kdy je součástí původní úlohy alespoň jeden bod a alespoň jedna nenulová kruhová křivka (tedy přímka či kružnice), přičemž tento bod leží na dané kruhové křivce. Úloha zní takto: „*Sestrojte kružnici, která se dotýká zadané kruhové křivky v daném bodě a dále se dotýká další kruhové křivky nebo prochází jiným zadaným bodem.*“. Počet Pappových úloh je šest. (Patáková, 2005, s. 30)

V následujících oddílech budou u každého typu úlohy rozebrány jednotlivé možné konfigurace zadaných kruhových křivek a stanoveny počty řešení. Úlohy budou řešeny především pomocí kruhové inverze, avšak bude zmíněno i použití jiných metod řešení. Pod řešením budou uvedeny dva náčrty; vlevo původní úloha, vpravo úloha inverzní. Modrou barvou budou znázorněny zadané kruhové křivky, červenou křivky inverzní, fialovou samodružné kruhové křivky, zelenou řídicí kružnice a zlatou výsledná řešení a body dotyku.

Nejjednodušší Apolloniovy úlohy jsou typu BBB⁶² a PPP, které lze řešit již se znalostmi geometrie ze základní školy, konkrétně se znalostmi kružnic opsaných a vepsaných trojúhelníku a množin bodů dané vlastnosti. Se středoškolskými znalostmi je možno řešit úlohy typu BPP a PPK pomocí stejnolehlosti a úlohy typu BBP a BBK užitím mocnosti bodu ke kružnici. Úlohy typu BPK, BKK, PKK a KKK se řeší užitím kruhové inverze nebo dilatace, kteréžto patří mezi znalosti vysokoškolské. (Říha, 2010, s. 6)



V případě použití kruhové inverze při řešení Apolloniovy či Pappovy úlohy se zobrazí původní body na jiné body, přímky na kružnice (nebo zůstanou beze změny) a kružnice na jiné kružnice či přímky (nebo též beze změny). Po této transformaci se tak kompletně mění charakter původní úlohy; dokonce můžeme místo kružnice hledat přímku, která se ostatních tří objektů dotýká.⁶³ Tato nová, charakterově odlišná, úloha se nazývá **inverzní úloha**.⁶⁴

Benefitem při použití kruhové inverze pro řešení úloh je to, že při správně zvolené řídicí kružnici inverze⁶⁵ je inverzní úloha mnohem jednodušší na konstrukci, než úloha původní. Při volbě řídicí kružnice používáme jednu z následujících metod:

62 Každý typ Apolloniovy úlohy je označen třemi velkými písmeny podle toho, které kruhové křivky se v něm vyskytují: B – bod, P – přímka a K – kružnice. U Pappových úloh je incidence bodu s jinou nenulovou kruhovou křivkou zaznačena závorkou uzavírající obě křivky.
63 Vzhledem k tomu, že kruhová inverze mění kruhové křivky na kruhové křivky, může změnit i původní řešení, jímž byla kružnice, na kruhovou křivku, které je nyní přímku.
64 Nebo též úloha vnitřní.
65 Vhodně zvolený střed a poloměr řídicí kružnice.

a) **Metoda odstranění bodu**

Spočívá v tom umístit střed řídicí kružnice (střed inverze) do jednoho ze zadaných bodů úlohy. Inverzní úloha tak obsahuje pouze dvě jiné kruhové křivky a jejím řešením je nalézt takové přímky (nikoli kružnice), které se obou těchto kruhových křivek dotýkají. Tím se úloha výrazně zjednodušuje.

b) **Metoda inverze společných bodů**

Střed řídicí kružnice se umístí do bodu dotyku či průniku dvou (příp. všech) zadaných kruhových křivek. Ty se v inverzní úloze transformují do přímek. Inverzní úloha je jednodušší v tom, že zpravidla obsahuje méně kružnic než úloha původní.

c) **Metoda soustředných kružnic**

Tato metoda se používá v případech, kde jsou zadány dvě kružnice bez společného bodu nebo kružnice a její vnější přímka. Pomocí níže uvedených konstrukcí nalezneme jeden ze dvou konkrétních bodů, do něhož umístíme střed řídicí kružnice. Inverzní úloha pak bude obsahovat dvě soustředné kružnice a jednu další kruhovou křivku. Úlohu tohoto typu je pak možné řešit množinou bodů daných vlastností či dilatací.

Body, do nichž je třeba umístit střed inverze pro použití metody soustředných kružnic, se tradičně hledají konstrukcí s využitím chordály obou kružnic. Chordála dvou protínajících se kružnic je přímka vedená body průniku obou kružnic a zároveň přímka kolmá na tzv. střednou⁶⁶ (Liška, 2007, s. 13). Při konstrukci chordály dvou neprotínajících se kružnic použijeme libovolnou⁶⁷ třetí kružnici (tzv. pomocnou), která obě zadané kružnice protíná. Body těchto průniků vedeme chordály daných kružnic s kružnicí pomocnou. Průnik těchto chordál je tzv. *potenční střed* všech tří kružnic. Potenčním středem musí procházet i chordála dvou zadaných kružnic. (Říha, 2010, s. 14) Tu pak jednoduše sestojíme jako přímku procházející potenčním středem a kolmou na střednou obou kružnic.

Na chordále zvolíme libovolný bod. Tento bod má k oběma kružnicím stejnou mocnost, tedy délka tečny⁶⁸ vedená z tohoto bodu k oběma kružnicím je stejná. Sestojíme-li

66 Středná – úsečka spojující středy dvou kružnic.

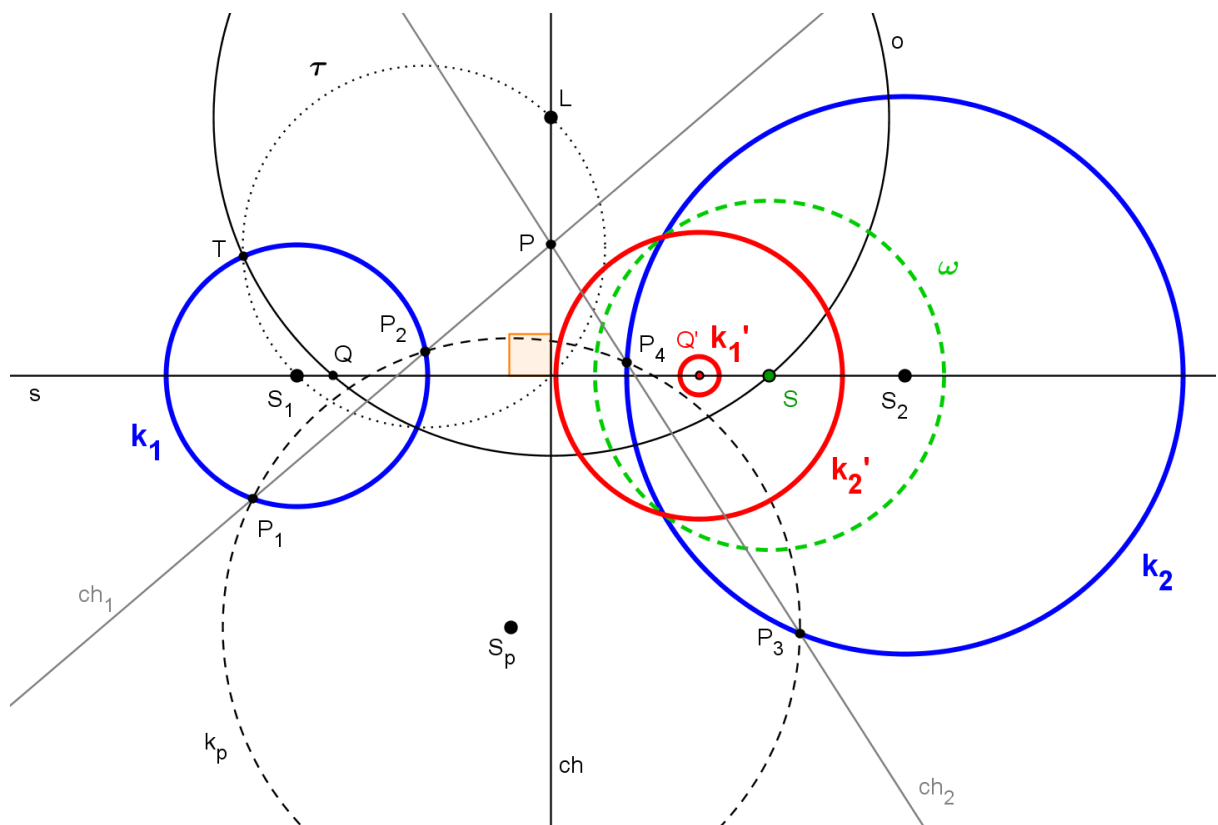
67 Střed této kružnice nesmí být kolineární se středy dalších dvou kružnic.

(Říha, 2010, s. 14)

68 Délkou tečny je zde míněna úsečka ležící na tečně ke kružnici, vedoucí ze zmíněného bodu do bodu dotyku.

tedy kružnici se středem ve zvoleném bodě a s poloměrem velikosti délky tečny, obdržíme kružnici, která bude ortogonální vůči oběma zadaným kružnicím.⁶⁹ Její průsečíky se střednou jsou námi hledanými body; do jednoho z nich umístíme střed kruhové inverze, která následně převede obě zadané kružnice na kružnice soustředné. Obraz druhého z bodů v takto zvolené inverzi je pak středem soustředných kružnic.

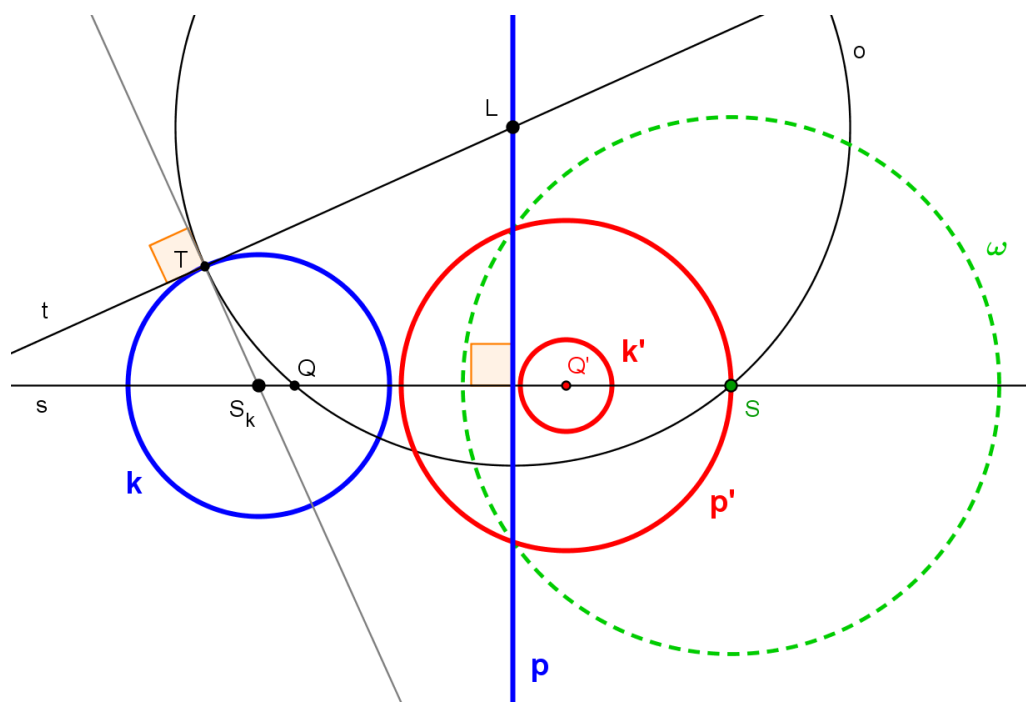
V případě, že bychom umístili střed kruhové inverze na kružnici ortogonální vůči oběma zadanými, obdrželi bychom jako obraz dvě jiné kružnice, jejichž středy leží na přímce, jež je rovnoběžná k tečně ortogonální kružnice vedené středem inverze. Z vlastností kruhové inverze také vyplývá, že pokud bychom umístili střed inverze na přímku spojující oba středy zadaných kružnic, obdržíme jako obrazy jiné kružnice, jejichž středy opět leží na této přímce. V případě, že zvolíme jako střed průnik těchto dvou přímek, musí středy obrazů obou kružnic ležet zároveň na obou přímkách, což je možné jedině v případě, že jsou oba středy totožné. Nalezli jsme tedy dva body, v nichž kruhová inverze převádí dvě zadané kružnice na jiné kružnice se stejným středem, tedy soustředné kružnice.



Podrobný popis konstrukce podává např. Patáková (2005, s. 42).

⁶⁹ Zdůvodnění viz poznámka pod čarou č. 37.

Při hledání středů inverze u dvojice kružnice a přímka je postup konstrukce teoreticky naprosto stejný, avšak prakticky se velice zjednodušuje. Předně chordála obou kruhových křivek je shodná se zadanou přímkou.⁷⁰ Dále stačí zvolit libovolný bod dotyku (vyjma bodů ležících na středně) na kružnici a jím vést tečnu. Bod, v němž tečna protne zadanou přímku, se stane středem ortogonální kružnice a délka této tečny jejím poloměrem. Průniky ortogonální kružnice se střednou jsou hledané středy inverze. Opět platí, že obraz druhého ze středů inverze se stává středem soustředných kružnic.



Středů kruhové inverze, v níž se dvě kružnice zobrazí na soustředné lze nalézt též jiným způsobem. Čtyři společné tečny těchto kružnic se vzájemně protínají v šesti bodech. Dva z těchto bodů, H_1 a H_2 , leží na přímce s určené středy obou kružnic a jsou to středy stejnolehlostí těchto kružnic. Zbývající čtyři body tvoří dva páry osově souměrných bodů K_1 , K_1' a K_2 , K_2' , přičemž osou souměrnosti těchto párů je přímka s . Průsečíky I_1 a I_2 přímky s a přímek k_1 a k_2 , určených těmito páry bodů, jsou hledanými středy inverze.

⁷⁰ Průsečíky přímky pomocné kružnice s přímkou nutně leží na této přímce, leží na ní tedy i potenční střed obou křivek. Středná obou kruhových křivek je z podstaty kolmice na přímku vedoucí středem zadané kružnice. Z toho vyplývá, že zadaná přímka je i hledaná chordála.

Hypotéza 3.1

Nechť jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a body K_1, K_1', K_2 a K_2' , jenž jsou průsečíky společných tečen těchto kružnic a neleží na přímce s , která je dána body S_1, S_2 .

Nechť jsou přímky k_1 a k_2 dány dvojicemi bodů K_1, K_1' a K_2, K_2'

a vytínají na přímce s body I_1 a I_2 .

Pak je bod I_1 obrazem bodu I_2 v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $k_1(S_1, r_1)$

a bod I_2 obrazem bodu I_1 v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $k_2(S_2, r_2)$.

Hypotéza 3.2

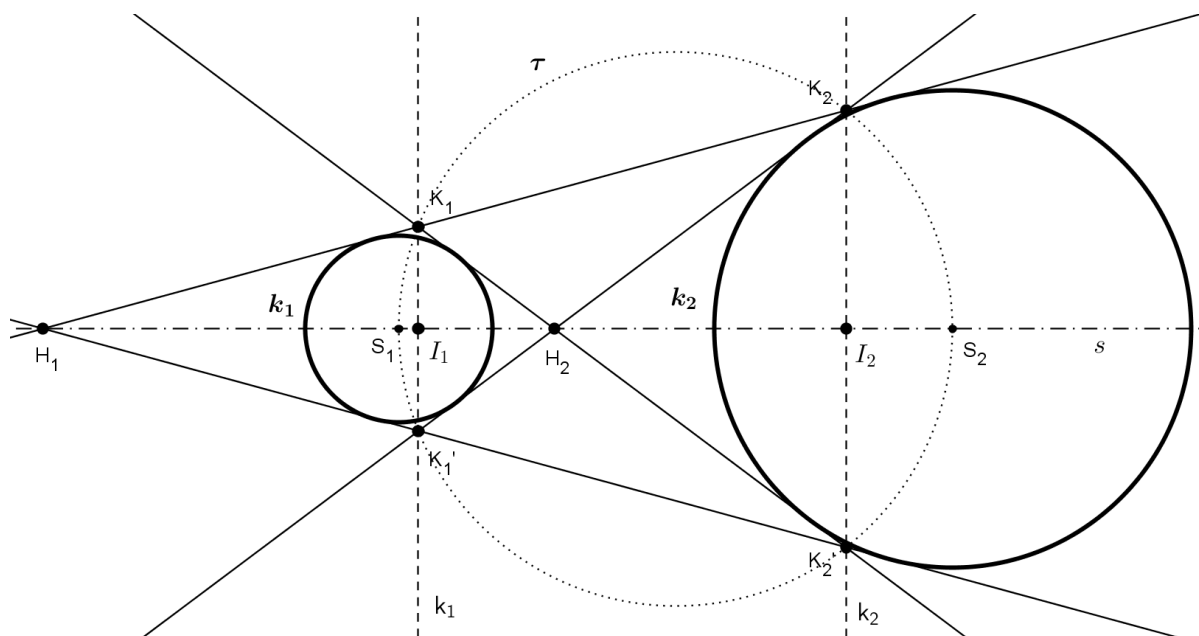
Nechť jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a body K_1, K_1', K_2 a K_2' , jenž jsou průsečíky společných tečen těchto kružnic a neleží na přímce s , která je dána body S_1, S_2 .

Pak body K_1, K_1', K_2 a K_2' leží na *Thaletově kružnici* τ nad průměrem $|S_1S_2|$.

Hypotéza 3.3

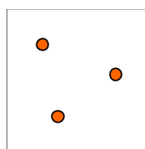
Nechť jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a body H_1 a H_2 , jenž jsou průsečíky společných tečen těchto kružnic ležící na přímce s , která je dána body S_1, S_2 .

Pak body H_1, H_2, S_1 a S_2 tvoří *harmonickou čtveřici*, tedy $(H_1H_2S_1S_2) = -1$.



3.1.1 Apolloniova úloha typu BBB

- *počet možných konfigurací zadání:* 1
- *obvyklá metoda řešení:* množina bodů dané vlastnosti

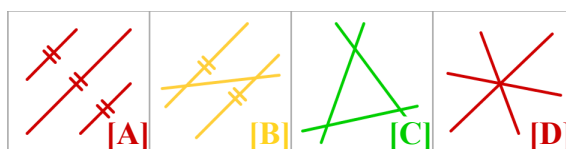


Nejjednodušší Apolloniova úloha. V případě tří nekolineárních bodů stačí sestrojít kružnici opsanou trojúhelníku tvořeného zadanými body; řešení je tedy pouze jedno. Pokud jsou body kolineární, řešení úlohy neexistuje.

Použití kruhové inverze v tomto případě vede ke zbytečně komplikovanému nalezení výsledného řešení a není tedy žádoucí.

3.1.2 Apolloniova úloha typu PPP

- *počet možných konfigurací zadání:* 4
- *obvyklá metoda řešení:* množina bodů dané vlastnosti



Zadání kategorizujeme podle počtu rovnoběžných přímek. V případě, že jsou všechny tři přímky rovnoběžné [A], úloha nemá řešení. Pokud jsou dvě přímky rovnoběžné a třetí k nim různoběžná [B], existují celkem dvě řešení konstruované pomocí průniku os úhlů. Pokud jsou všechny tři přímky různoběžné a protínají se v jednom bodě [D], úloha nemá řešení. Pokud se protínají ve třech různých bodech [C], má úloha celkem 4 řešení; jedna kružnice trojúhelníku vepsaná a tři kružnice trojúhelníku připsané.

Použití kruhové inverze, stejně jako v předešlém případě, proces nalezení řešení výrazně komplikuje.

3.1.3 Apolloniova úloha typu BBP / Pappova úloha typu (BP)B

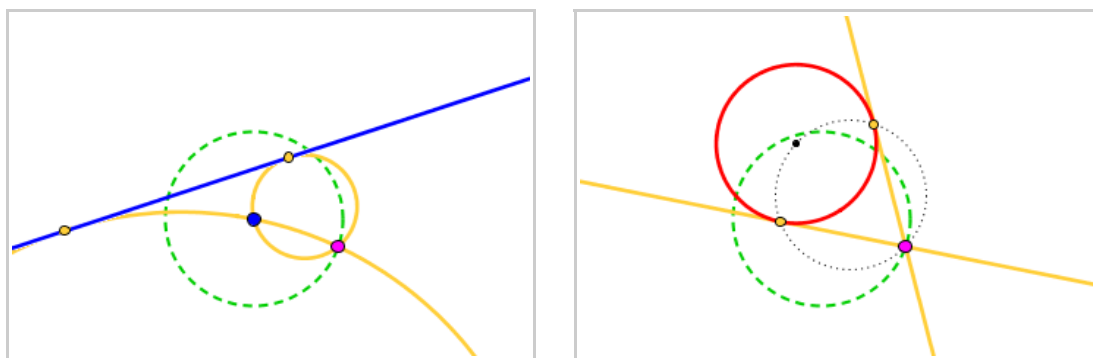
- počet možných konfigurací zadání: 2 / 2
- obvyklá metoda řešení: mocnost bodu ke kružnici / MBDV⁷¹



Pokud leží oba body v téže polorovině určené přímkou [A], existuje řešení úlohy. Úloha má obecně dvě řešení, avšak v případě, že přímka určená oběma body je rovnoběžná se zadanou přímkou, redukuje se počet řešení na jedno. Obvyklé řešení vyžaduje znalosti mocnosti bodu ke kružnici, ale úlohu je možné řešit i pomocí kruhové inverze. Varianta zadání, kdy každý bod leží v jiné polorovině určené přímkou [B] nemá žádné řešení.

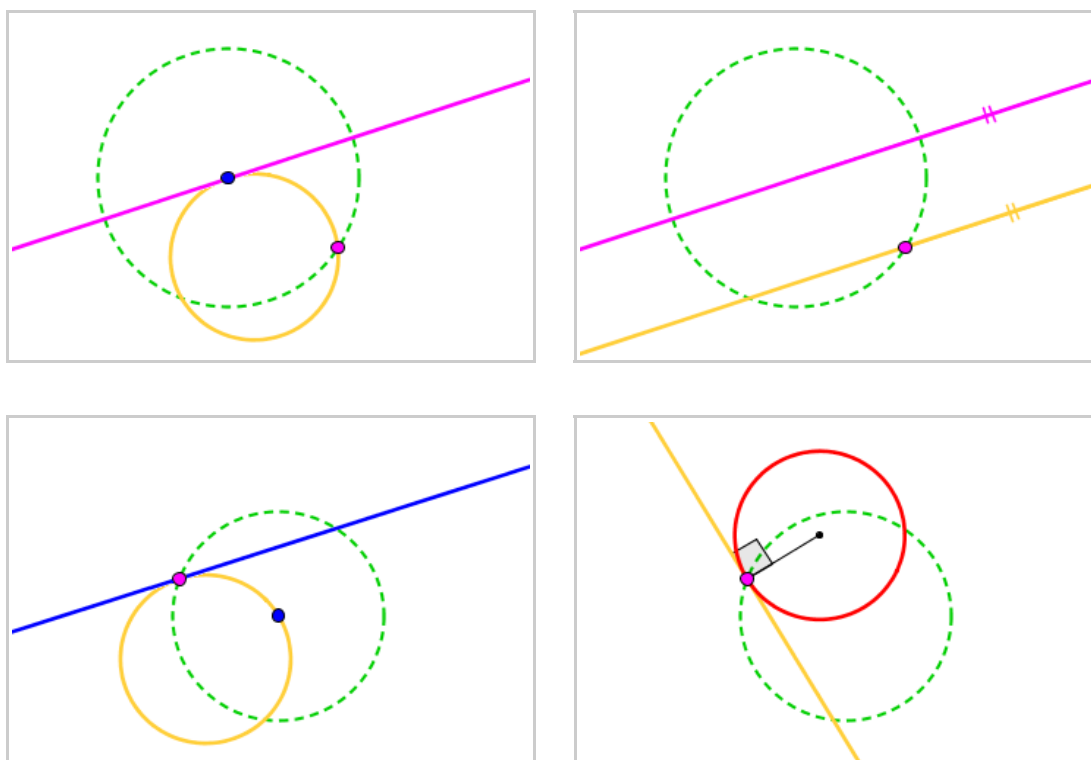
Pappova úloha, kdy jeden z bodů leží na přímce [C] má jedno řešení. Je možné jej získat konstrukcí průniku kolmice k přímce z bodu na ní ležícím a osy úsečky tvořené zadanými body. Je též možné použít kruhovou inverzi a to dvojnásobem. V případě, kdy oba body leží na přímce [D], úloha řešení nemá.

Při aplikaci kruhové inverze v případě Apolloniovy úlohy [A] použijeme metodu odstranění bodu. Střed inverze volíme v jednom ze zadaných bodů a pro usnadnění konstrukce volíme poloměr řídicí kružnice tak, aby druhý z bodů ležel na řídicí kružnici a byl tedy samodružný. V inverzní úloze se přímka mění na kružnici a bod, který byl ve středu inverze se nyní nachází v nekonečnu. Cílem inverzní úlohy je tedy sestavit tečnu ke kružnici daným bodem, který leží na řídicí kružnici. Tato konstrukce je triviální a vyžaduje použití *Thaletovy kružnice*. Z konstrukce tečny ke kružnici daným bodem plynou dvě řešení úlohy.



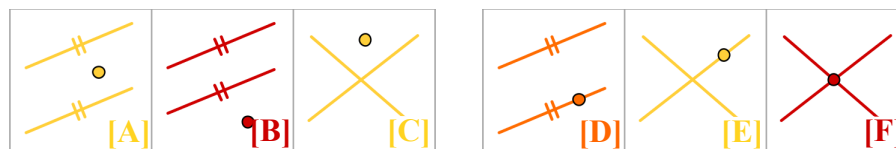
71 MBDV – množina bodů dané vlastnosti.

V Pappově úloze [C] opět použijeme metodu odstranění bodu. Za střed kruhové inverze můžeme volit buďto bod ležící na přímce, nebo bod ležící mimo přímku. V prvním případě se tohoto bodu zbavíme, přičemž přímka zůstane samodružná. Pokud zvolíme poloměr inverze tak, aby bod mimo přímku ležel na řídicí kružnici, získáme úlohu, při níž máme vést rovnoběžku k zadané přímce. Pokud zvolíme za střed inverze bod mimo přímku a poloměr opět takový, aby byl druhý z bodů samodružný, čeká nás úloha na sestavení tečny ke kružnici (která bude obrazem přímky) v daném bodě. V obou případech plyne z konstrukce inverzní úlohy jediné řešení.



3.1.4 Apolloniova úloha typu BPP / Pappova úloha typu (BP)P

- počet možných konfigurací zadání: 3 / 3
- obvyklá metoda řešení: translace a stejnolehlost / MBDV



Výčet možností zadání rozdělíme podle toho, zda jsou přímky rovnoběžné či různoběžné. Pokud v Apolloniově úloze, která obsahuje rovnoběžné přímky, neleží zadaný bod uvnitř rovinného pásu daného přímkami [B], úloha nemá řešení. V případě, že bod leží v rovinném pásu [A] má úloha dvě řešení, které se konstruují pomocí translace libovolné kružnice dotýkající se obou přímek. V případě různoběžných přímek [C] je počet řešení stejný jako u [A], ale při konstrukci se využívá stejnolehlosti.

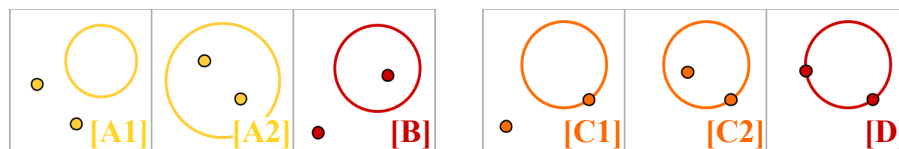
Pappova úloha s rovnoběžnými přímkami [D] má jedno řešení konstruované pomocí kolmice na obě přímky procházející zadaným bodem. Úloha s různoběžnými přímkami [E] má řešení dvě, a to pomocí konstrukce průniku os úhlů a kolmice na přímku, na níž leží bod, a která prochází daným bodem. V případě, že je zadaný bod totožný s průnikem obou přímek [F], úloha nemá řešení.

Aplikace kruhové inverze na Apolloniovu úlohu se zadáním [A] převádí úlohu na nalezení společných tečen dvou dotýkajících se kružnic. Vzhledem k náročnosti této konstrukce, oproti využití translace, se použití inverze nedoporučuje. Inverzní úloha k úloze [C] je opět konstrukcí společných tečen (za předpokladu, že střed inverze byl zvolen v zadaném bodě). Stejně jako v původní úloze, je i v inverzní úloze nutné pracovat se znalostí homotetie a tudíž se použití inverze opět nedoporučuje. Vzhledem k triviálním řešením Pappových úloh je použití kruhové inverze pro tyto úlohy bezpředmětné.

Použití kruhové inverze je u těchto typů úloh kontraproduktivní, protože její aplikace inverzní úlohu komplikuje, místo toho aby ji zjednodušovala. Je to z toho důvodu, že při použití inverze se v inverzní úloze navyšuje počet kružnic oproti úloze původní.

3.1.5 Apolloniova úloha typu BBK / Pappova úloha typu (BK)B

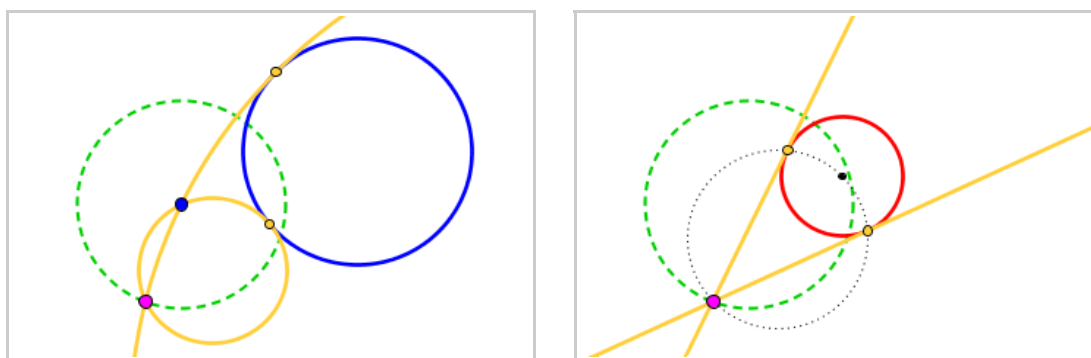
- počet možných konfigurací zadání: 3 / 3
- obvyklá metoda řešení: mocnost bodu ke kružnici / MBDV



Varianta Apolloniovy úlohy, kdy jeden z bodů leží vně a druhý uvnitř zadané kružnice [B] nemá žádné řešení. Pokud oba body leží ve vnitřní/vnější oblasti kružnice [A], má úloha celkem dvě řešení, které se standardně řeší pomocí mocnosti bodu ke kružnici, konkrétně využitím potenčního středu. V případě, kdy jsou oba body vně kružnice [A1] se může počet řešení zredukovat na jedno a to tehdy, leží-li oba body na tečně k zadané kružnici.

Pappova úloha [C] má pouze jedno řešení konstruované pomocí průniku osy úsečky dané zadanými body a přímkou určené středem kružnice a bodem na ní ležícím. Pokud leží druhý z bodů ve vnější oblasti kružnice [C1] a je incidentní s tečnou procházející bodem ležícím na kružnici, úloha nemá žádné řešení. Bez řešení je též případ, kdy oba zadané body leží na kružnici [D].

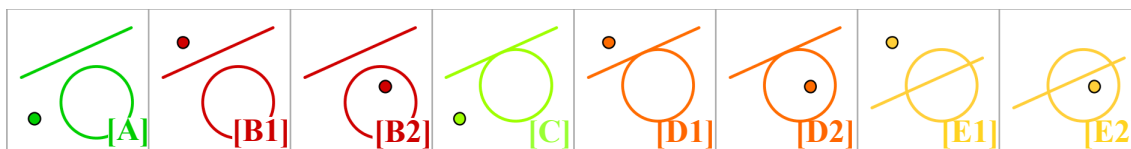
Při aplikaci kruhové inverze v případech [A] volíme metodu odstranění bodu; střed řídicí kružnice volíme v jednom ze zadaných bodů a poloměr kružnice takový, aby byl druhý bod samodružný. V obou variantách obdržíme kružnici a bod v její vnější oblasti. Inverzní úlohou je opět sestavení tečny ke kružnici z daného bodu, z čehož vyplývá počet řešení.



Pappovu úlohu typu (BK)B můžeme převést na úlohu typu (BP)B, když nahradíme zadanou kružnici její tečnou, která prochází bodem na ní ležícím (Patáková, 2005, s. 30).

3.1.6 Apolloniova úloha typu BPK

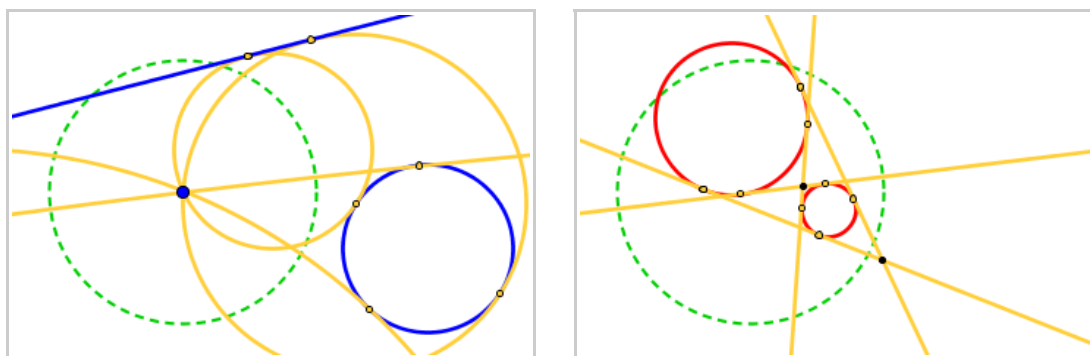
- počet možných konfigurací zadání: 8
- obvyklá metoda řešení: kruhová inverze



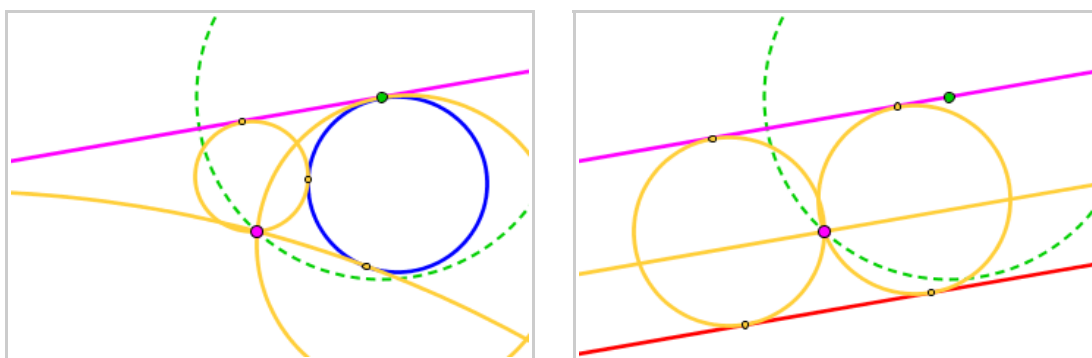
Jednotlivé konfigurace rozdělme podle vzájemné polohy zadané přímky a kružnice. Pokud nemají žádný společný bod, existují čtyři řešení v případě, že kružnice a bod leží ve stejné polorovině určené přímkou a bod je vně kružnice [A]. V případě, že zadaný bod leží na tečně ke kružnici, která je zároveň rovnoběžná se zadanou přímkou, redukuje se počet řešení na tři. Žádné řešení nemají varianty, kdy bod a kružnice leží v opačných polorovinách [B1], nebo v případě, kdy sice leží ve stejné polorovině, ale bod se nachází ve vnitřní oblasti kružnice [B2].

Pokud se přímka dotýká kružnice, pak se počet řešení redukuje na tři [C] tam, kde původně byla řešení čtyři [A], a naopak se počet řešení navyšuje na jedno [D] tam, kde původně žádné řešení nebylo [B]. U konfigurace [C] se může počet řešení dokonce snížit na dvě a to pokud zadaný bod leží na tečně ke kružnici, která je zároveň rovnoběžná se zadanou přímkou. V případě že přímka prochází kružnicí, existují řešení dvě, nezávisle na tom, kde se nachází zadaný bod [E]. Avšak pokud u konfigurace [E1] leží bod na tečně ke kružnici, která je rovnoběžná se zadanou přímkou, je řešení pouze jedno.

Při řešení úlohy pomocí kruhové inverze volíme u konfigurace [A] metodu odstranění bodu. Obdržíme dvě kružnice a inverzní úlohu, v níž máme sestavit všechny společné tečny k těmto kružnicím. Inverzní úloha se řeší pomocí vlastností stejnolehlosti.

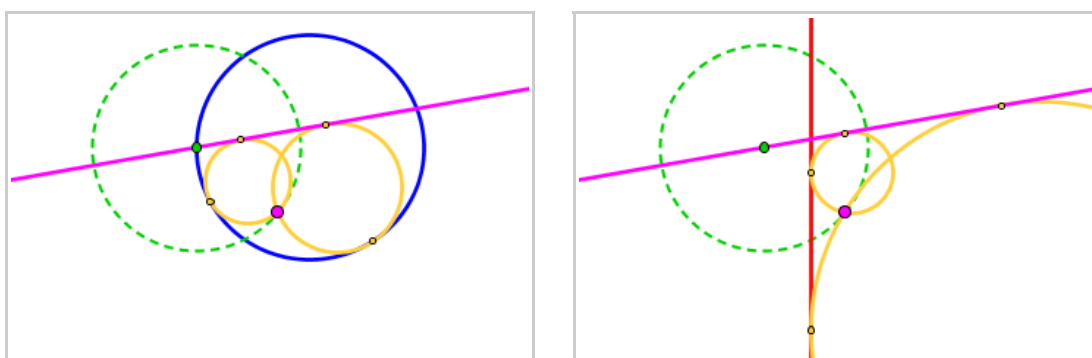


U konfigurace [C] použijeme metodu inverze společných bodů, tedy zvolíme za střed inverze bod dotyku kružnice a přímky. Poloměr opět volíme tak, aby byl zadaný bod samodružný. Obdržíme inverzní úlohu typu BPP, kde bod leží v rovinném pásu určeném rovnoběžkami. Tímto případem jsme se již zabývali v oddíle 3.1.4. Inverzní úloha má však pouze dvě řešení oproti původní úloze, která má mít řešení tři. Poslední řešení dostaneme v inverzní úloze tak, že obrazem bodu vedeme rovnoběžku k obrazům původní přímky a kružnice. Při zpětném převodu úlohy obdržíme výslednou třetí kružnici.



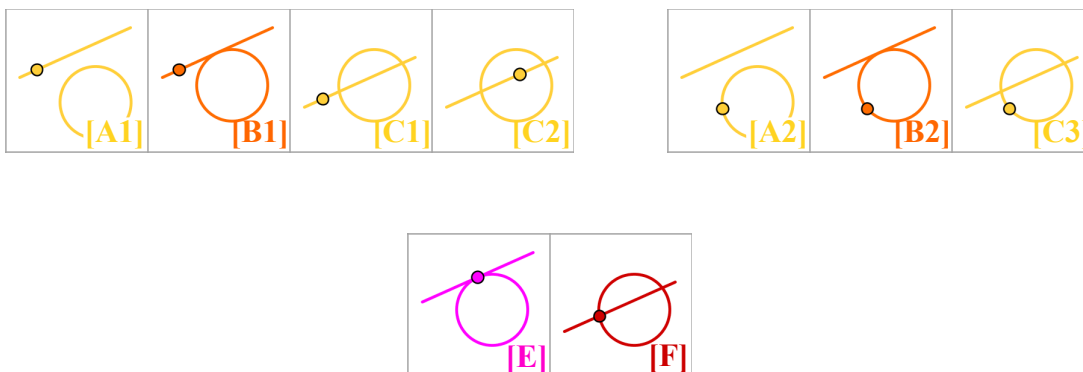
Konfigurace [D] můžeme převést na Pappovu úlohu typu (BP)B tak, že nahradíme kružnici jejím bodem dotyku s přímkou. Tímto případem jsme se zabývali v oddíle 3.1.3.

U konfigurací [E] volíme metodu inverze společných bodů. Poloměr inverze opět volíme tak, aby zadaný bod byl samodružný. Úloha se převede na Apolloniovu úlohu typu BPP, která se řeší pomocí stejnolehlosti.



3.1.7 Pappova úloha typu (BP)K / Pappova úloha typu (BK)P

- počet možných konfigurací zadání: 4 / 3 / 2
- obvyklá metoda řešení: kruhová inverze



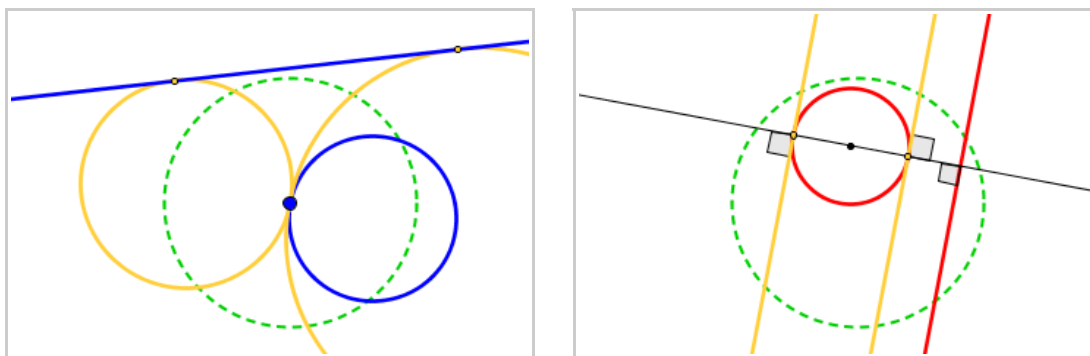
Nejprve podotkněme, že nezáleží na tom, zda je zadaný bod incidentní s přímkou nebo kružnicí, a to jak v případě počtu řešení, tak při aplikaci kruhové inverze. Konfigurace, v nichž je přímka vnější přímkou kružnice [A] nebo je její sečnou [C] mají vždy dvě řešení. Konfigurace, kde je přímka tečnou kružnice [B] ztrácí jedno řešení oproti předešlým. Výjimku z tohoto pravidla jsou konfigurace, v nichž je bod incidentní s kružnicí a je zároveň bodem dotyku tečny k této kružnici, která je rovnoběžná se zadanou přímkou. V tomto případě klesá o jedno počet řešení, tedy [A2] a [C3] budou mít jedno řešení a [B2] žádné řešení.

Ve speciálních Pappových úlohách, kdy je zadaný bod incidentní s oběma kruhovými křivkami mohou nastat dvě varianty. Pokud je přímka tečnou kružnice [E], existuje nekonečně mnoho řešení.⁷² Pokud je přímka sečnou kružnice [F], úloha nemá žádné řešení.

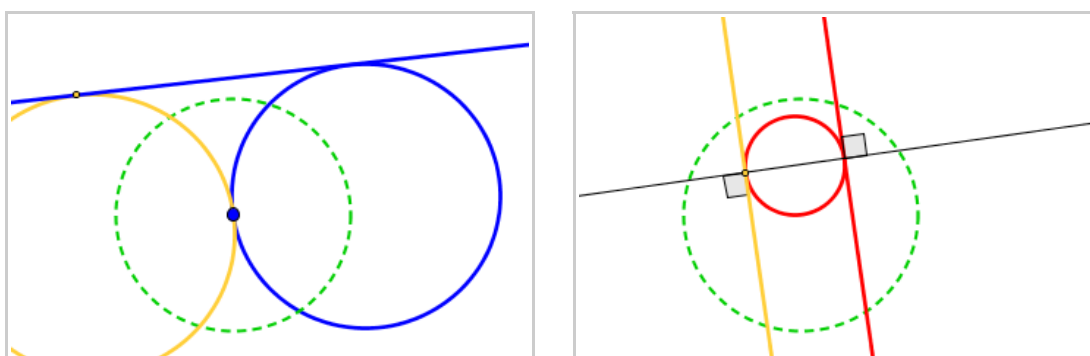
Při použití kruhové inverze v úloze, kdy je přímka vnější přímkou kružnice [A] používáme metodu odstranění bodu. Střed inverze volíme v zadaném bodě, poloměr můžeme zvolit libovolně. Ideálně však tak, aby se nám konstrukce obrazů prováděly příjemně.⁷³ V obou variantách obdržíme jako obrazy novou přímku a kružnici. Inverzní úloha se řeší konstrukcí rovnoběžek k dané přímce, které jsou zároveň tečny dané kružnice. Z inverzní úlohy vyplývají dvě řešení úlohy původní.

⁷² Jedná se o svazek dotýkajících se kružnic.

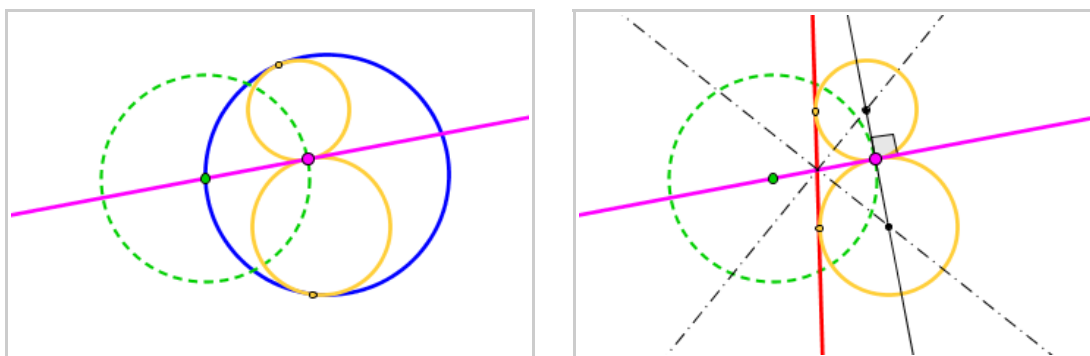
⁷³ To znamená, aby obrazy kruhových křivek nebyly příliš malé nebo naopak příliš velké.



U konfigurací [B], kdy je přímka tečnou kružnice volíme opět metodu odstranění bodu. Střed inverze v zadaném bodě a poloměr opět může být libovolný. Obdržíme novou kružnici a přímku a inverzní úlohu, v níž máme sestrojiti tečnu ke kružnici, která je rovnoběžná k dané přímce. Variantu úlohy kdy je bod incidentní s přímku si můžeme velice usnadnit tím, že poloměr volíme tak, aby byl bod dotyku přímky s kružnicí samodružný, čímž obdržíme inverzní úlohu, v níž jsou přímka a kružnice totožné s úlohou původní.

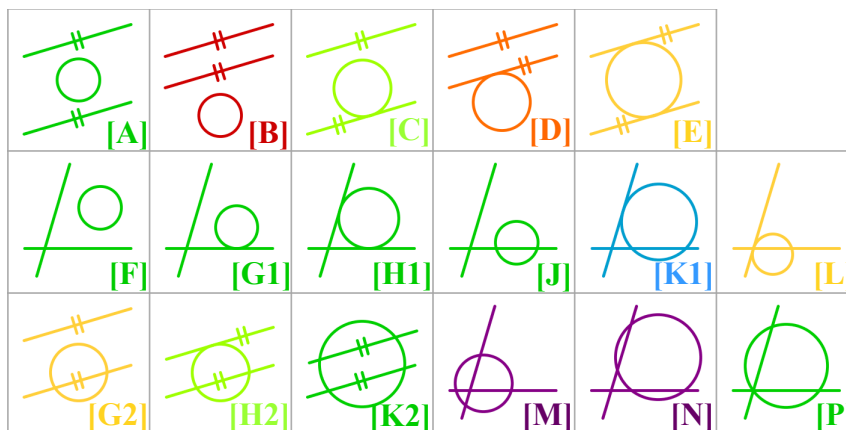


V případě konfigurací, kdy je zadaná přímka sečnou kružnice [C] využíváme metodu inverze společných bodů. Z dvou možných bodů středu inverze můžeme volit libovolně, poloměr volíme tak, aby zadaný bod byl samodružný. Inverzní úloha je Pappova úloha typu (BP)P, která se řeší pomocí průniku os úhlů protínajících se přímek a kolmice z daného bodu.



3.1.8 Apolloniova úloha typu PPK

- počet možných konfigurací zadání: 17
- obvyklá metoda řešení: stejnolehlost a dilatace



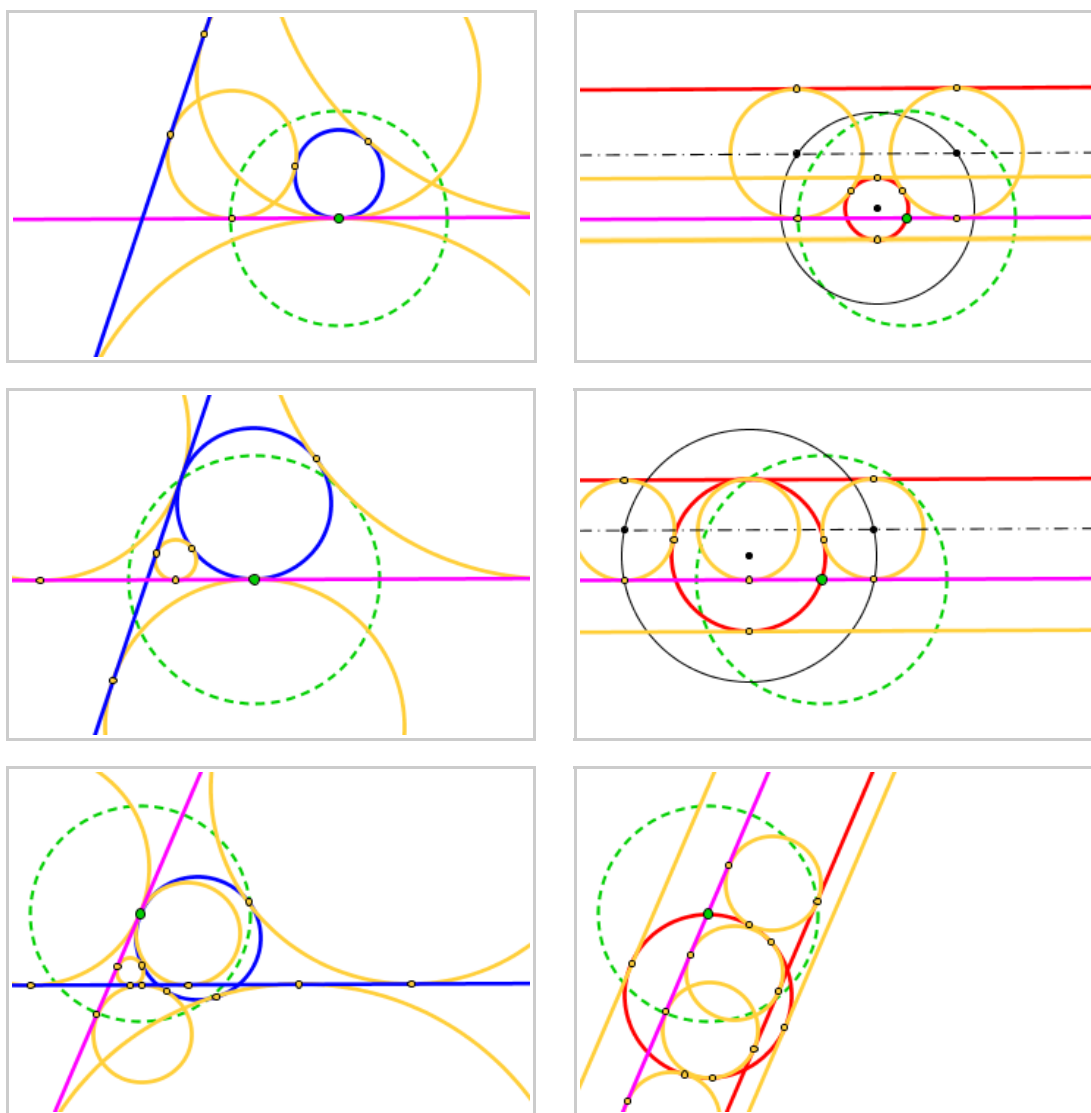
Jednotlivé možnosti zadání se dělí podle toho, zda jsou přímky rovnoběžné či různoběžné, a podle počtu společných bodů kružnice a obou přímek. Nejprve se zabýváme variantou zadání rovnoběžných přímek. Pokud obě přímky a kružnice nemají žádné společné body, existují dvě různé konfigurace. První z nich, kdy kružnice leží v rovinném pásu určeném přímkami [A], má celkem čtyři řešení. Druhá, kdy kružnice leží mimo tento pás [B], žádné řešení nemá. Z těchto poloh vycházejí další, v nichž má kružnice s přímkou společný bod dotyku. V prvním případě se počet řešení redukuje na tři [C], ve druhém případě se rozšiřuje na jedno řešení [D]. V případě kružnice nacházející se v rovinném pásu se při dalším doteku s druhou přímkou [E] dále redukuje počet řešení na dvě. Dvě řešení má též varianta, kdy je jedna z přímek sečnou kružnice a druhá je její vnější přímkou [G2]. Z tohoto případu vychází další, kdy každý přidání společný bod navyšuje počet řešení o jedno; tedy tři řešení v případě, že původní vnější příмка je tečnou kružnice [H2] a čtyři řešení, když jsou obě přímky sečnami kružnice [K2].

Uveďme nyní počty řešení u konfigurací, v nichž jsou zadané přímky různoběžné. Pokud žádná z přímek není sečnou zadané kružnice [F][G1][H1] jsou řešení celkem čtyři. Stejný počet řešení je i v případě, že jedna z přímek je sečnou kružnice a druhá její vnější přímkou [J]. V případě, že se vnější příмка stane tečnou kružnice [K1], rozšiřuje se počet řešení na šest, avšak je-li zároveň bodem dotyku této tečny společný bod obou přímek [L], počet řešení se naopak redukuje na dvě. Pokud jsou obě přímky sečnami kružnice [M][N], je počet řešení maximální, tedy osm. Speciálním případem je konfigurace, kdy společný bod

obou sečen zároveň leží na kružnici [P]. Tehdy se redukuje počet řešení na čtyři.

Všechny výše uvedené konfigurace se zadanými rovnoběžnými přímkami se řeší pomocí dilatace.⁷⁴ Výjimku tvoří konfigurace [E], kterou lze jednodušeji řešit translací. Konfigurace s různoběžnými přímkami [F][J][M][N] se řeší pomocí stejnolehlosti.⁷⁵

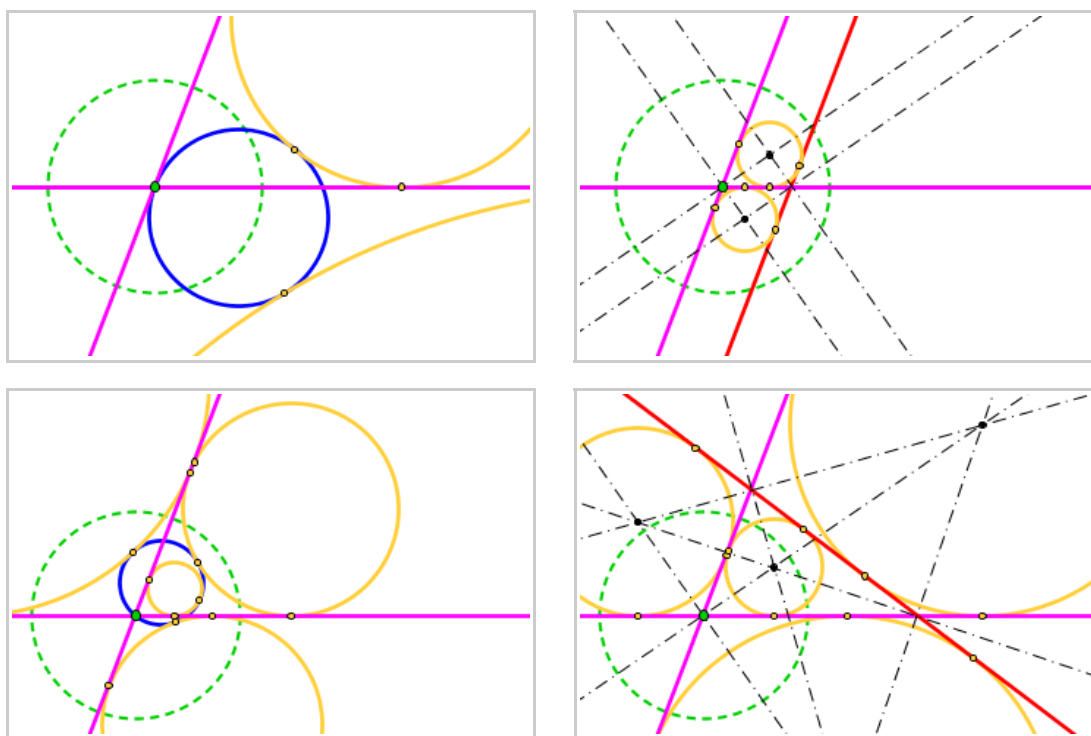
Konfigurace [G1][H1][K1] lze pomocí kruhové inverze transformovat na konfigurace [G2][H2][K2] a řešit pomocí dilatace. Střed inverze je třeba umístit do bodu, v němž se přímka dotýká zadané kružnice. Všechny takto inverzní úlohy mají menší počet řešení než úloha původní a je třeba je doplnit o řešení, která vzniknou konstrukcí přímek/přímky rovnoběžné s danými přímkami a zároveň tečné k dané kružnici (viz následující obrázky).



74 Tato práce se o zobrazení nazvaném *dilatace* nezmiňuje. Více informací podávají např. Říha (2010, s. 42–44) nebo Liška (2010, s. 31–33).

75 Více informací o příslušné konstrukci uvádí Říha (2010, s. 10–11).

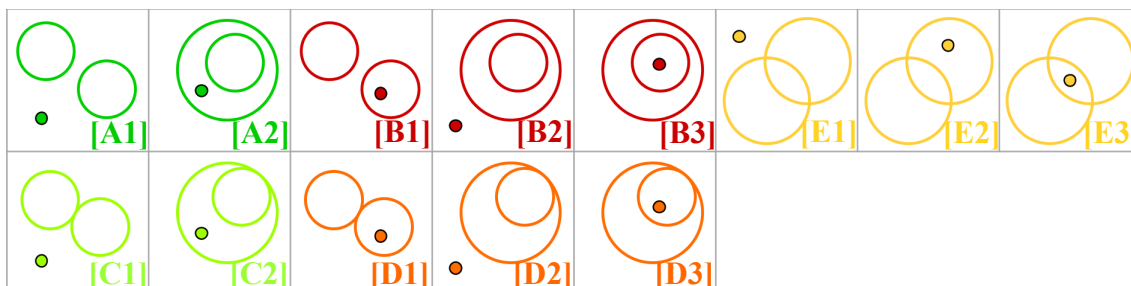
Konfigurace [L] a [P] můžeme pomocí kruhové inverze převést na Apolloniovu úlohu typu PPP. Střed inverze volíme v tzv. „přetíženém“ bodě⁷⁶, což je bod společný všem třem kruhovým křivkám. Počet řešení inverzní úlohy zůstává stejný, jako počet řešení úlohy původní. Řešení úloh typu PPP zmiňuje oddíl 3.1.2.



⁷⁶ Termín „přetížený“ bod je převzat z příspěvku Josefa Tkadlece *Kruhová inverze* ve sborníku matematického korespondenčního semináře PraSe na <https://prase.cz/library/KruhovaInverzePT/KruhovaInverzePT.pdf>

3.1.9 Apolloniova úloha typu BKK

- počet možných konfigurací zadání: 13
- obvyklá metoda řešení: kruhová inverze

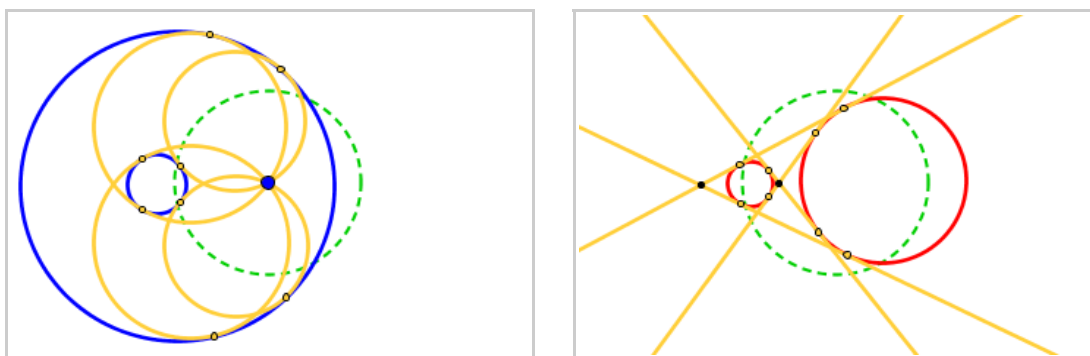


Konfigurace tohoto typu úlohy můžeme rozdělit na tři případy podle toho, zda zadané kružnice nemají společný bod, dotýkají se či se protínají. V prvním případě mohou být kružnice každá ve vnější oblasti té druhé, nebo je jedna z nich ve vnitřní oblasti druhé kružnice. Pokud se zadaný bod nalézá u první možnosti vně obou kružnic [A1] nebo u druhé možnosti v oblasti mezikruží [A2], má úloha celkem čtyři řešení. Jiná poloha zadaného bodu nevede k žádnému řešení [B]. V případě konfigurace [A1] může být počet řešení snižen o jedno, pokud zadaný bod leží na společné tečně obou kružnic, nebo o dvě v případě, že je totožný s průnikem společných tečen obou kružnic.

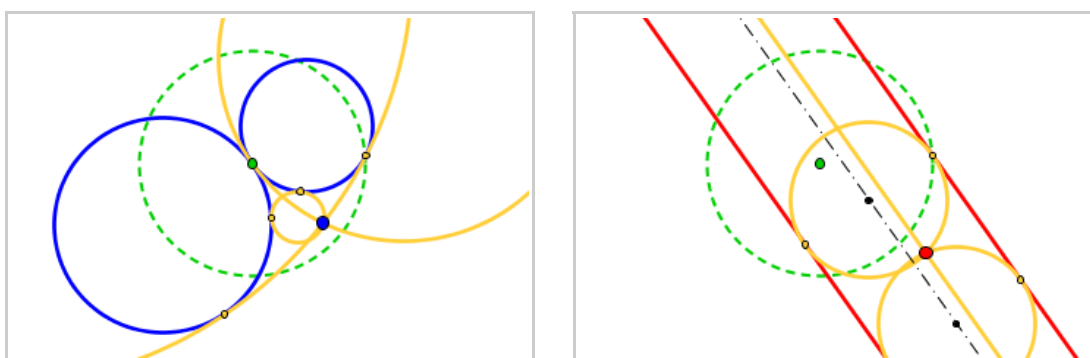
Ve druhém případě, kdy se kružnice vzájemně dotýkají, existují tři řešení, pokud leží zadaný bod ve vnější oblasti obou kružnic s vnějším dotykem [C1], nebo leží-li zadaný bod v „mezikruží“ u kružnic s vnitřním dotykem [C2]. Ostatní varianty [D] nabízejí jediné řešení. Opět platí, že u konfigurace [C1] se sníží počet řešení o jedno, pokud zadaný bod leží na společné tečně kružnic a o dvě, pokud je bod totožný s průsečíkem společných tečen. U konfigurace [D2] též může nastat situace, v níž tato úloha nemá žádné řešení. Jedná se o případ, kdy zadaný bod leží na jediné společné tečně obou kružnic.

Ve třetím případě, kdy se kružnice vzájemně protínají [E], existují vždy dvě řešení vyjma situace, kdy bod leží vně obou kružnic [E1]. Pokud zároveň leží na společné tečně, redukuje se počet řešení na jedno. V případě kdy leží na obou společných tečnách (tj. v jejich průniku), žádné řešení neexistuje.

Při aplikaci kruhové inverze na konfigurace [A] používáme metodu odstranění bodu. Střed inverze je zadaným bod, poloměr je libovolný. Řešením inverzní úlohy je nalezení společných tečen dvou kružnic; z toho vyplývají čtyři řešení původní úlohy. V obou variantách konfigurace [A] se v inverzní úloze nacházejí kružnice, jež leží ve vnější oblasti druhé z kružnic.

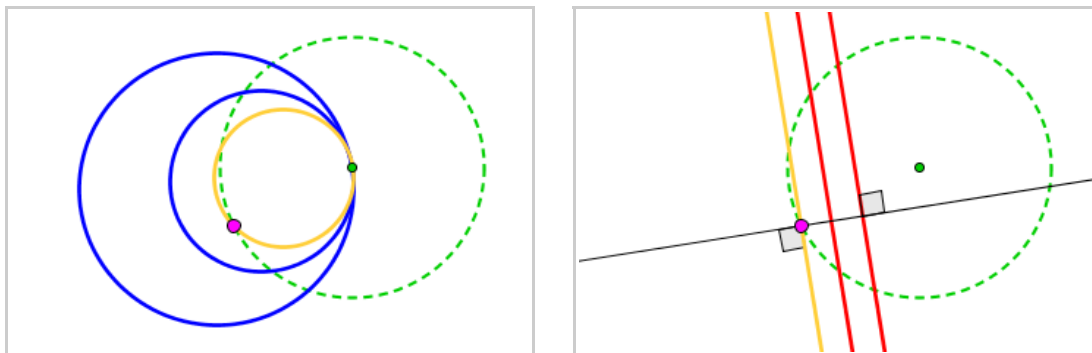


Konfigurace [C] vedou při volbě metody inverze společných bodů na inverzní úlohu typu BPP, v níž jsou přímky rovnoběžné, a bod leží v rovinném pásu určeném těmito přímkami. Při volbě poloměru inverze je vhodné, aby řídicí kružnice protínala obě zadané kružnice, čímž se velmi usnadní konstrukce přímek, jež jsou jejími obrazy. Abychom získali úplný počet řešení (inverzní úloha poskytuje pouze dvě), musíme jako řešení inverzní úlohy počítat i přímku, která prochází daným bodem a je rovnoběžná k oběma daným přímkám.

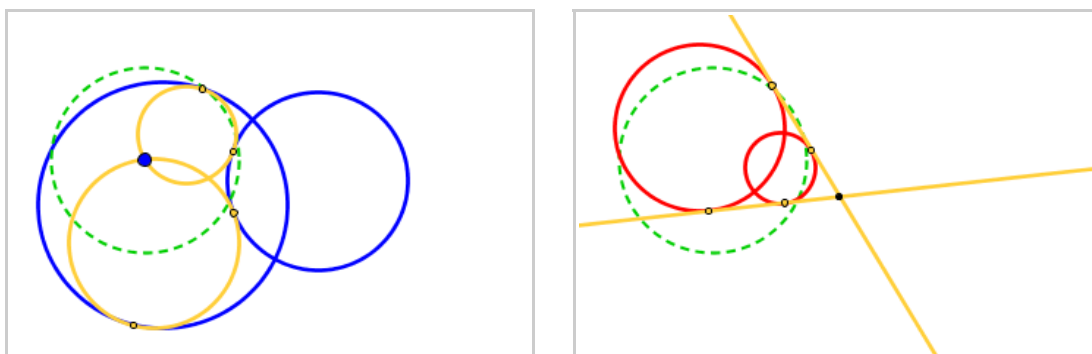


U konfigurací [D] volíme opět metodu inverze společných bodů. Inverzní úloha je Apolloniova úloha typu BPP, v níž bod leží mimo rovinný pás určený danými přímkami. Tato úloha, jak víme, nemá řešení, ale pokud přidáme (obdobně jako u konfigurací [C]) jako řešení přímku procházející daným bodem a rovnoběžnou k daným přímkám, obdržíme jediné řešení této konfigurace. Při praktickém řešení navíc stačí zobrazit pouze jednu ze zadaných kružnic,

protože ke konstrukci rovnoběžky procházející bodem nejsou dvě přímky zapotřebí. U konfigurací [D1] a [D3] též můžeme pro zjednodušení volit poloměr inverze takový, aby zadaný bod byl samodružný.

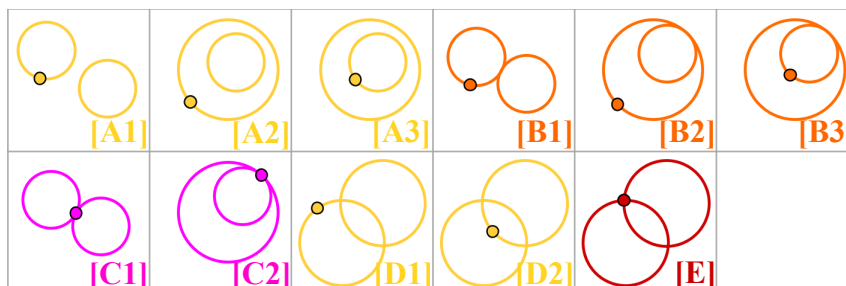


Na konfigurace [E] můžeme použít buďto metodu odstranění bodu, nebo metodu inverze společných bodů. První možnost dává inverzní úlohu, v níž hledáme společné tečny dvou protínajících se kružnic, druhá možnost dává Apolloniovu úlohu typu BPP s různoběžnými přímkami. Obě inverzní úlohy se řeší pomocí stejnolehlosti.



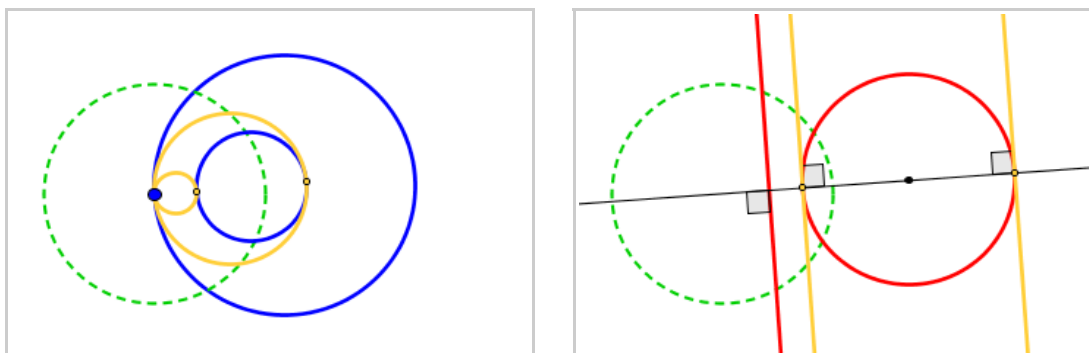
3.1.10 Pappova úloha typu (BK)K

- počet možných konfigurací zadání: 11
- obvyklá metoda řešení: kruhová inverze

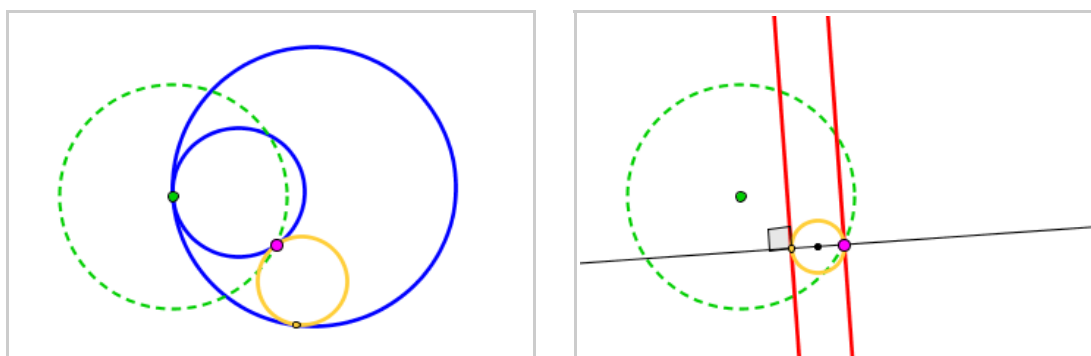


Počet řešení úlohy je závislý na vzájemné poloze zadaných kružnic. Pokud kružnice nemají žádný společný bod [A] nebo mají dva společné body [D], existují dvě řešení úlohy. Pouze v případě, kdy je zadaný bod zároveň společným bodem protínajících se kružnic [E] řešení neexistuje. Dále pokud leží u konfigurací [A1] či [D1] zadaný bod na společné tečně obou kružnic, redukuje se počet řešení na jedno. Jinak nemá poloha bodu na počet řešení vliv. Pokud se kružnice vzájemně dotýkají, nezávisle na tom, zda je dotyk vnitřní či vnější [B], je řešení úlohy pouze jedno. U konfigurace [B1] pak řešení neexistuje, pokud leží zadaný bod zároveň na společné tečně obou kružnic. Naopak, je-li zadaný bod totožný s bodem dotyku obou kružnic [C], existuje nekonečně mnoho řešení této úlohy.

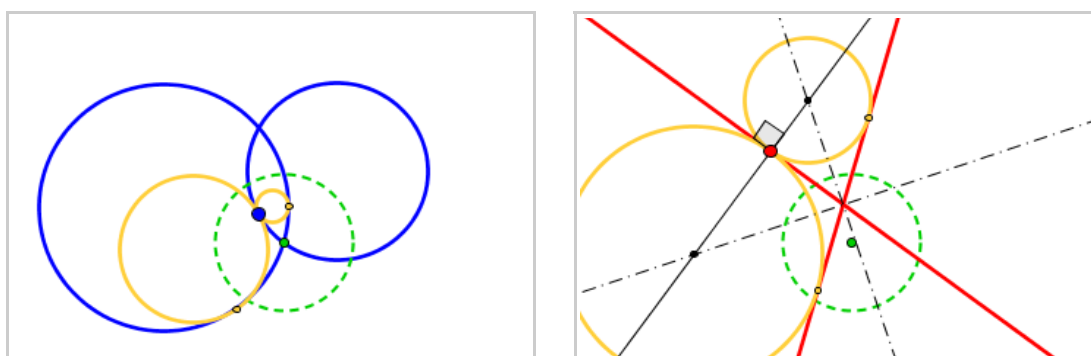
Konfigurace [A] se řeší metodou odstranění bodu. Získáme inverzní úlohu, v níž máme sestrojít tečny k dané kružnici, jež jsou rovnoběžné k dané přímce.



Konfigurace [B] řešíme metodou inverze společných bodů. Obdržíme Pappovu úlohu typu (BP)P, v níž jsou dané přímky rovnoběžné. Pro zjednodušení konstrukce volíme poloměr tak, aby byl zadaný bod samodružný. Také stačí zobrazit pouze tu kružnici, na níž zadaný bod neleží; druhá není k vyřešení inverzní úlohy potřeba.

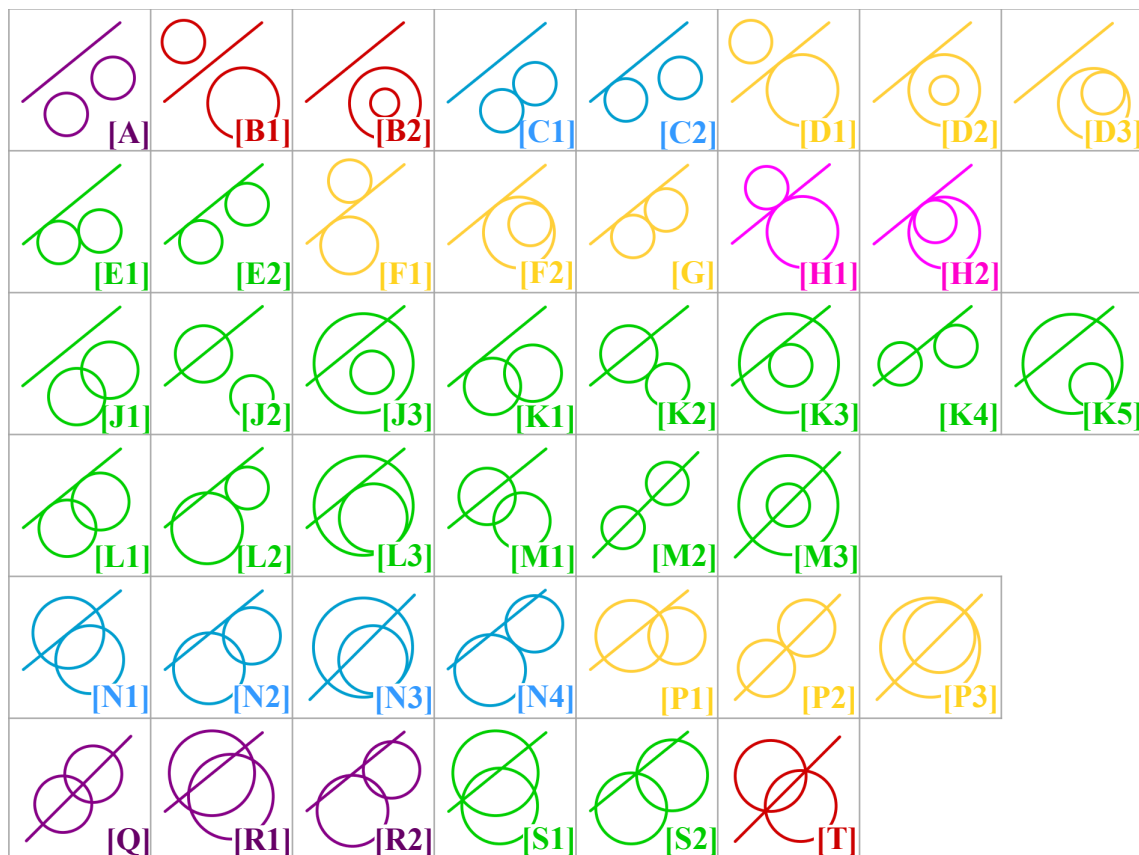


Též konfigurace [D] řešíme metodou inverze společných bodů. Inverzní úloha je opět Pappova úloha typu (BP)P, tentokrát však s různoběžnými přímkami.



3.1.11 Apolloniova úloha typu PKK

- počet možných konfigurací zadání: 42
- obvyklá metoda řešení: kruhová inverze a dilatace



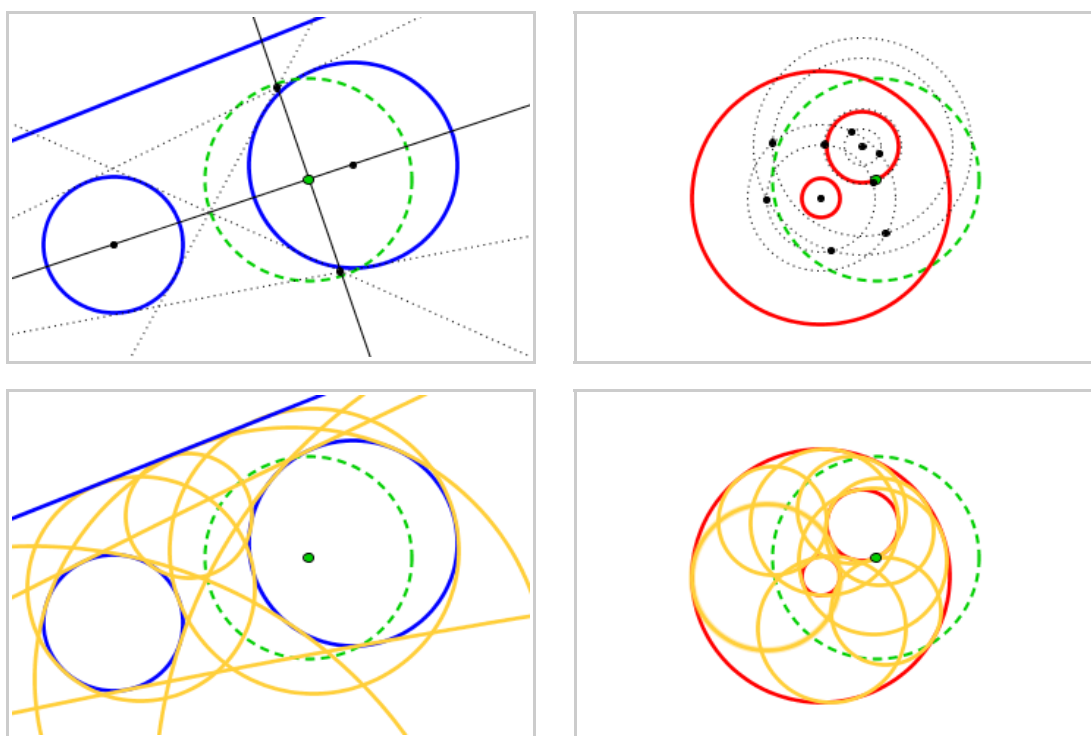
Počet řešení Apolloniovy úlohy podle konfigurace zadání rozdělme do čtyř kategorií, podle toho, kolik kruhových křivek se vzájemně protíná. V první kategorii se žádné kruhové křivky neprotínají. Vezměme v úvahu situaci, kdy také nemají žádný společný bod. V případě, že obě kružnice leží ve stejné polorovině určené přímkou [A], existuje celkem osm řešení. Pokud naopak každá z kružnic leží v jiné polorovině [B1], úloha nemá řešení. Též v případě, kdy obě kružnice leží ve stejné polorovině, ale zároveň jedna z nich se nachází ve vnitřní oblasti té druhé [B2], úloha nemá žádné řešení. Z těchto situací vychází i další konfigurace. Pokud vycházíme z konfigurace [A], tak za každý dotyk navíc, které kruhové křivky mají, se snižuje počet řešení o dvě, tedy u konfigurací [C] na šest, u konfigurací [E] na čtyři a u konfigurace [G] pouze dvě řešení. U poloh vycházejících z konfigurací [B] stoupá počet řešení na dvě nezávisle na tom, zda mají jeden dotyk [D], či dva dotyky [F] navíc. Pokud však existuje jeden společný dotyk všech křivek [H], řešení úlohy je nekonečně mnoho.

Ve druhé kategorii se protínají právě dvě kruhové křivky. Nezávisle na počtu doteků křivek mezi sebou, existují vždy čtyři řešení úlohy. Jedná se o konfigurace [J][K][L].

Třetí kategorie obsahuje dvě dvojice protínajících se kruhových křivek. Pokud je třetí dvojice křivek bez dotyku [M], existují celkem čtyři řešení. V případě, že má třetí dvojice dotyk [N], navyšuje se počet řešení na šest, avšak je-li bod dotyku zároveň jedním z bodů průniku křivek [P], redukuje se počet řešení na dvě.

Ve čtvrté kategorii jsou polohy zadání, v nichž se protínají všechny kruhové křivky. Ty mají standardně osm řešení; jedná se o konfigurace [Q][R]. V případě, že všechny křivky mají jeden společný bod, v němž se protínají [S], redukuje se počet řešení na čtyři. Pokud se všechny křivky protínají ve dvou společných bodech [T], řešení neexistuje.

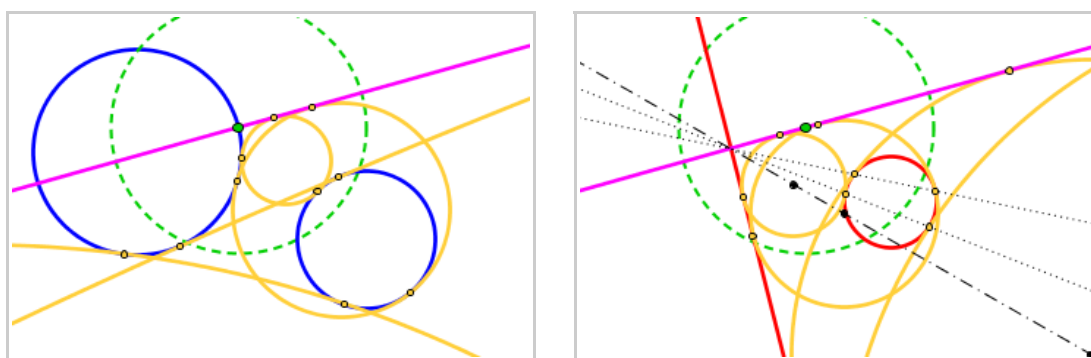
Konfiguraci [A] řešíme pomocí metody soustředných kružnic, případně můžeme využít k řešení dilataci. Střed inverze nalezneme výše uvedeným postupem, poloměr volíme takový, aby se inverzní úloha dobře konstruovala.



Konfigurace [C][D][E][F][G][K][L][N] se řeší metodou inverze společných bodů a převádí se tím na Apolloniovu úlohu typu PPK s rovnoběžnými přímkami, které se řeší pomocí dilatace. Střed inverze je třeba umístit do bodu dotyku kruhových křivek. Při umístění středu inverze do průniku kruhových křivek obdržíme úlohu typu PPK s různoběžnými přímkami, kterou bychom museli další inverzí opět převádět na úlohu s rovnoběžnými přímkami (viz oddíl 3.1.8).

Inverzní úlohy těchto konfigurací nabízejí téměř vždy (vyjma konfigurace [G]) nižší počet řešení, než má původní úloha. Pro obdržení plného počtu řešení je nutné zahrnout do řešení inverzní úlohy také tečny dané kružnice, jež jsou rovnoběžné s danými přímkami. Např. inverzní úloha u konfigurace [D] nemá žádné řešení, avšak připočítáme-li dvě rovnoběžky tečné ke kružnici, dostaneme po zpětné inverzi obě řešení dané úlohy.

Konfigurace [J][M][Q][R] se řeší také metodou inverze společných bodů a jak bylo řečeno výše, převádí se tím na inverzní úlohu typu PPK s různoběžnými přímkami⁷⁷, které je třeba řešit užitím stejnolehlosti.

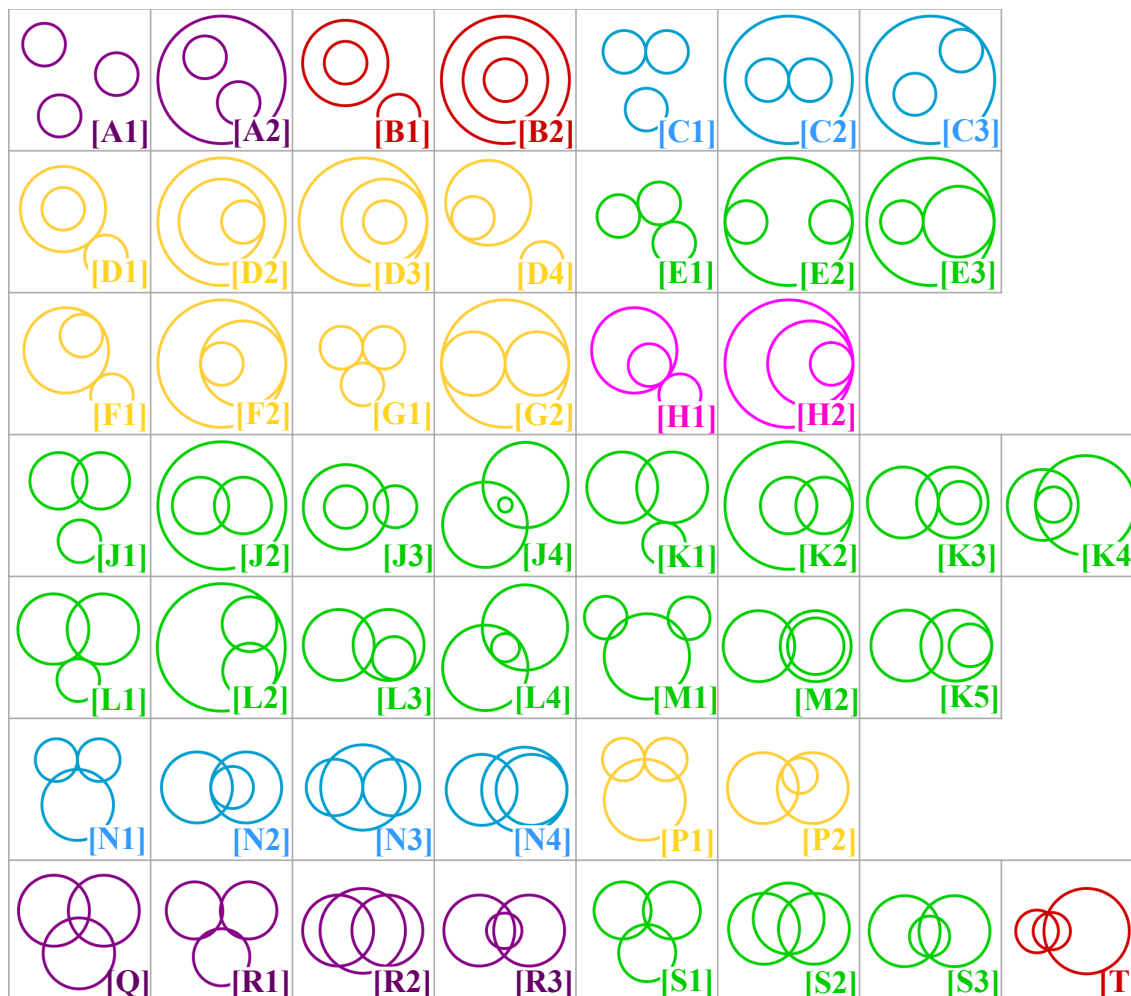


Konfiguraci [P] je možné převést na Apolloniovu úlohu typu PPP s párem rovnoběžek a jednou k nim různoběžnou přímkou. Střed inverze se umístí do „přetíženého“ bodu, poloměr je libovolný. U konfigurace [S] také využíváme volbu středu inverze v „přetíženém“ bodě, opět s libovolným poloměrem. Inverzní úlohou je Apolloniova úloha typu PPP tří vzájemně různoběžných přímek.

⁷⁷ Neboť společným bodem může být pouze jeden z bodů průniku dvou kruhových křivek.

3.1.12 Apolloniova úloha typu KKK

- počet možných konfigurací zadání: 49
- obvyklá metoda řešení: kruhová inverze a dilatace



Počty řešení jednotlivých poloh zadání, metoda jejich řešení a písmenná označení korespondují s konfiguracemi uvedenými v oddíle 3.1.11. Zde je pouze stručně zopakujeme a kde bude potřeba, uvedeme doplňující informace.

Konfigurace, v nichž se žádné kruhové křivky neprotínají mají celkem osm řešení v případě, že nemají žádný dotyk [A], šest řešení při jednom [C], čtyři řešení při dvou [E] a dvě řešení při třech [G] dotycích. Pro konfiguraci [A] platí, že vezmeme-li libovolnou její kružnici, pak zbylé dvě kružnice leží obě ve stejné oblasti vůči této zvolené kružnici (vnější nebo vnitřní). Tato podmínka neplatí pro konfiguraci [B], která tak nemá žádné řešení a z ní vycházející konfigurace [D] a [F], jež mají dvě řešení. Mají-li všechny tři kruhové křivky společný bod dotyku [H], existuje nekonečně mnoho řešení.

Konfigurace, v níž se protínají právě dvě kruhové křivky nezávisle na počtu dotyků mezi nimi $[J][K][L]$ mají vždy čtyři řešení. Při existenci dvou dvojic vzájemně se protínajících křivek existují čtyři řešení, pokud je zadání bez dalších dotyků $[M]$, šest řešení mají-li dvě křivky jeden dotyk $[N]$ a pouze dvě řešení, nachází-li se v zadání „přetížený“ bod, tedy mají-li všechny kruhové křivky jeden společný bod $[P]$.

V případě, že se všechny křivky vzájemně protínají v různých bodech $[Q][R]$, existuje celkem osm řešení. Mají-li jeden společný („přetížený“) bod $[S]$, jsou řešení pouze čtyři, a pokud jsou v zadání dva „přetížené“ (společné) body $[T]$, řešení úlohy neexistuje.

Metody řešení úloh při aplikaci kruhové inverze jsou totožné s těmi uvedenými v oddíle 3.1.11 a je zbytečné je zde opakovat, stejně jako náčrty řešení, které by byly velmi podobné těm ve zmiňovaném oddíle.

3.2 Určení počtu řešení Apolloniovy/Pappovy úlohy

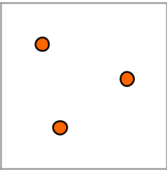
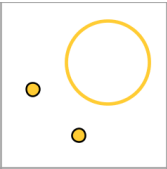
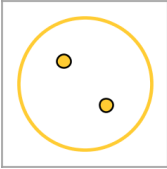
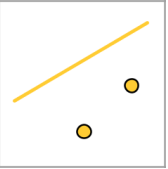
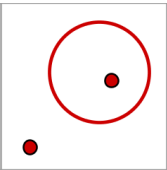
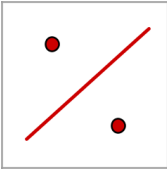
Určení počtu řešení Apolloniovy či Pappovy úlohy závisí na konkrétní konfiguraci zadaných kruhových křivek v úloze. Celkem existuje 170 různých vzájemných poloh tří kruhových křivek, jak bylo uvedeno v předchozí podkapitole. Provést klasifikaci všech těchto rozdílných poloh společně s určením celkového počtu řešení úloh dané konfigurace se může zdát být nadlidským úkolem.

Tento problém se však stává daleko jednodušším v případě použití kruhové inverze. Při aplikaci inverze na jednotlivé konfigurace obdržíme jako obraz jinou konfiguraci. Vzhledem k tomu, že kruhová inverze zachovává incidenci bodů, mají všechny vzájemné polohy zadání vzniklé aplikací inverze stejné množství řešení. Existuje tak jakási třída konfigurací, jež jsou vzájemně inverzní a mají stejný počet a také stejný postup řešení Apolloniovy/Pappovy úlohy.

Při hledání počtu řešení daného zadání pak stačí určit tento počet a postup řešení pouze u jedné z konfigurací dané třídy a výsledek bude platit pro všechny zbylé konfigurace. Jako *kanonickou formu* nazvěme jednu vybranou konfiguraci z každé třídy, která tak bude reprezentovat všechny vzájemně inverzní polohy kruhových křivek v dané třídě. Původních 170 různých možností vzájemných poloh se tak zredukuje na pouhých 33 kanonických forem, u nichž stačí určit počet řešení úlohy. (Bruen – Fischer – Wilker, 1983, p. 98–101)

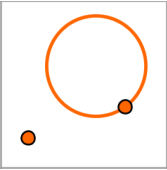
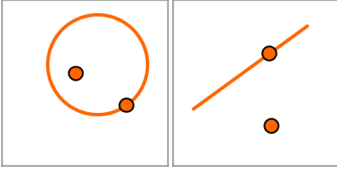
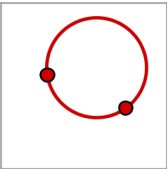

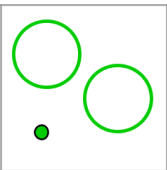
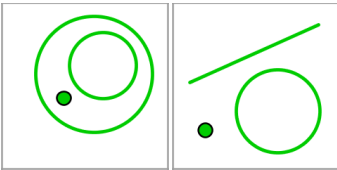
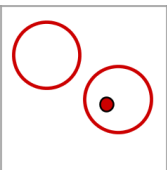
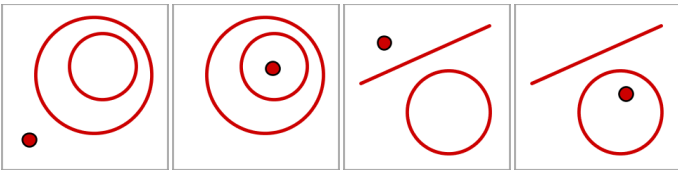
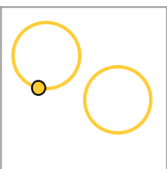
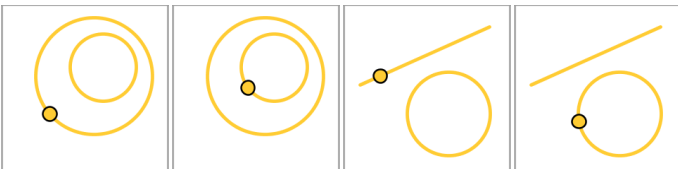
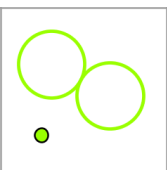
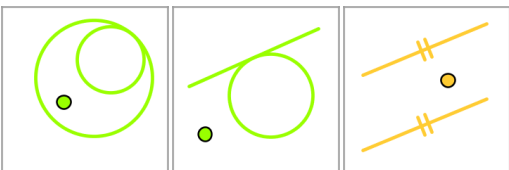
3.2.1 Kanonické formy

Následuje výčet všech kanonických forem s uvedením popisu, označení, počtu řešení úlohy a ostatních vzájemně inverzních konfigurací dané třídy.⁷⁸ Pro zjednodušení popisu budeme v následujícím textu pod pojmem kruhová křivka předpokládat pouze nenulovou kruhovou křivku, tedy přímku nebo kružnici.

#	kan. forma	označ.	inverzní konfigurace + popis	
1		\emptyset		
počet řešení: 1		<i>tři body</i>		
2		M		
počet řešení: 2		<i>kruhová křivka a dva body ve stejné oblasti dané křivkou</i>		
3		S		
počet řešení: 0		<i>kruhová křivka a dva body v různých oblastech daných křivkou</i>		

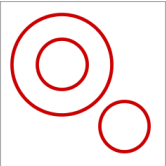


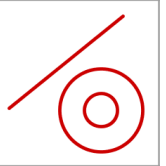
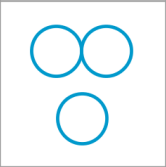

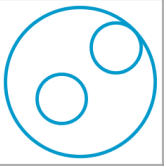
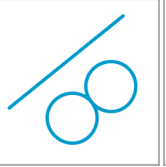
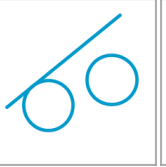
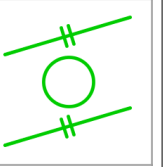



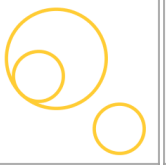

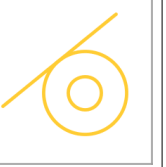
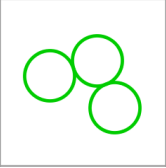
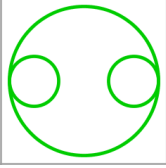
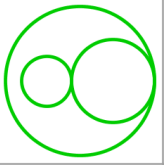
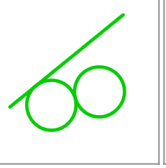
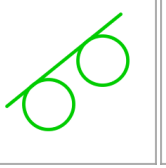
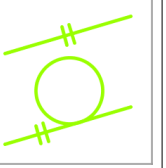




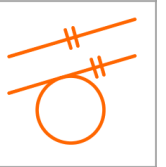
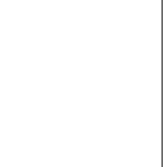
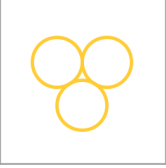
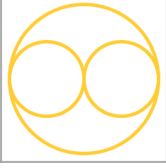
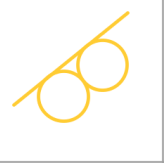
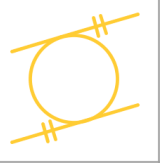

⁷⁸ Následující tabulka čerpá z Bruena, Fischera a Wilkera (1983, p. 100–101), avšak z pedagogických a estetických důvodů jsou jako kanonické formy vybrány jiné konfigurace dané třídy, než je uvedeno ve zdroji. Také počty řešení jednotlivých konfigurací se neshodují se zdrojem. Je to z toho důvodu, že v této bakalářské práci se za legitimní řešení úlohy považují pouze kružnice (nikoliv obecné kruhové křivky) a to navíc takové, jež nejsou jednou z kružnic v zadání. Proto nalezneme v uvedeném zdroji u některých kanonických forem větší počet řešení než v této práci!

V textu se také vyskytují písmenná označení kanonických forem, která vychází z Fitz-Geraldova značení těchto forem (viz uvedený zdroj), avšak je zde počestěno, upraveno a rozšířeno. Původní označení zahrnovalo pouze 18 případů kanonických forem, v nichž se nevyskytoval bod. Symbol **I** (intersection) je ve značení nahrazen symbolem **P** (průnik) a symbol **T** (tangent) symbolem **D** (dotyk). Symbol **S** (separation - oddělení) byl ponechán, stejně tak použití hranatých závorek [] pro označení společných bodů a dolních indexů pro rozlišení některých konfigurací. Přidán byl symbol **M** (mimoběžný) pro doplnění původního značení do celkového počtu nenulových kruhových křivek, což umožnilo vytvořit totožné značení pro zbylých 15 kanonických forem obsahujících body. Pro označení bodu ležícího na křivce je užito symbolu **P**.

4		P_1		
počet řešení: 1		<i>kruhová křivka a dva body, z nichž jeden leží na křivce</i>		
5		P_2		
počet řešení: 0		<i>kruhová křivka a dva body ležící na křivce</i>		
6		MM		
počet řešení: 4		<i>dvě mimoběžné kruhové křivky a bod v jejich společné oblasti</i>		
7		SM		
počet řešení: 0		<i>dvě mimoběžné kruhové křivky a bod v jedné z oddělených oblastí</i>		
8		PM_1		
počet řešení: 2		<i>dvě mimoběžné kruhové křivky a bod ležící na jedné z nich</i>		
9		DM		79
počet řešení: 3		<i>dvě dotýkající se kruhové křivky a bod v jejich společné oblasti</i>		

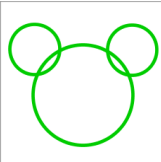
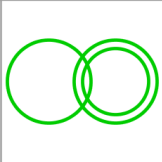
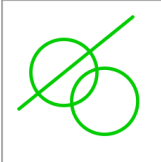
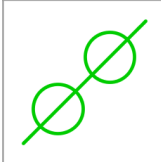
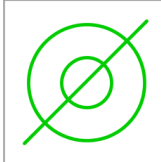

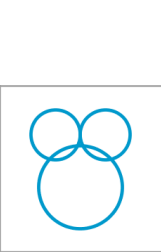
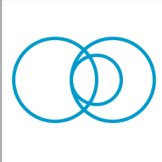
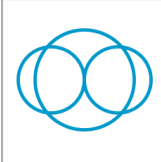
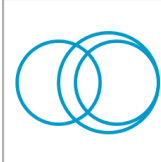

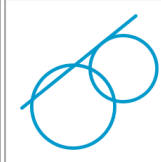

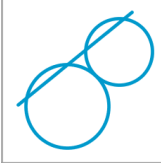

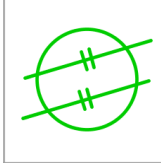
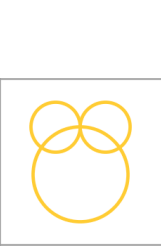

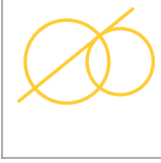
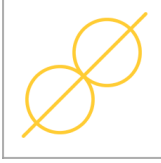


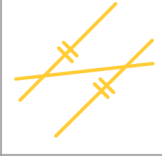
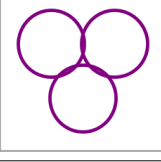
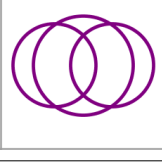
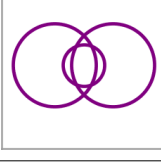
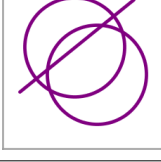
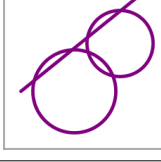

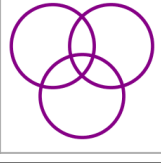
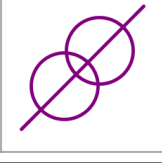
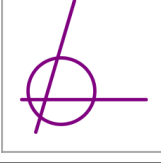
79 Dvě dotýkající se kruhové křivky se v kruhové inverzi se středem v bodě dotyku zobrazí na dvě rovnoběžné přímky. Společně s nimi se jako další rovnoběžné přímky zobrazí i řešení Apolloniovy úlohy. Protože v této práci nepovažujeme přímky za řešení úlohy, je třeba v konfiguracích, v nichž se vyskytují dvě rovnoběžky a bod (resp. kružnice), odečíst od původního počtu řešení tato „pseudo-řešení“, tedy počet všech přímek, které jsou s těmito rovnoběžkami rovnoběžné a zároveň prochází daným bodem (resp. jsou tečnami dané kružnice).

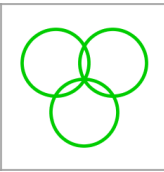
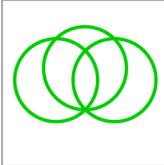
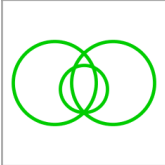
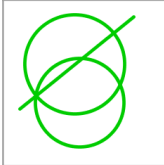
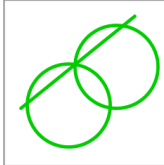
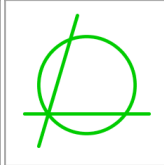
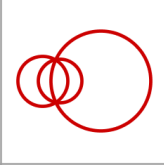
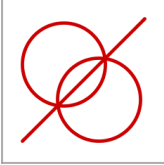
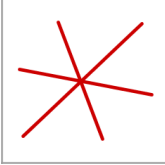
10		SD						
počet řešení: 1		<i>dvě dotýkající se kruhové křivky a bod v jedné z oddělených oblastí</i>						
11		PD						
počet řešení: 1		<i>dvě dotýkající se kruhové křivky a bod ležící na jedné z nich</i>						
12		[PD]						
počet řešení: ∞		<i>dvě dotýkající se kruhové křivky a bod, v němž se křivky dotýkají</i>						
13		PM ₂						
počet řešení: 2		<i>dvě protínající se kruhové křivky a bod</i>						
14		PP						
počet řešení: 2		<i>dvě protínající se kruhové křivky a bod ležící na jedné z nich</i>						
15		[PP]						
počet řešení: 0		<i>dvě protínající se kruhové křivky a bod, v němž se křivky protínají</i>						
16		MMM						
počet řešení: 8		<i>tři mimoběžné kruhové křivky se společnou oblastí</i>						

17		SMM					
počet řešení: 0		<i>tři mimoběžné kruhové křivky bez společné oblasti</i>					
18		DMM					
počet řešení: 6		<i>dvě dotýkající se kruhové křivky a třetí v jejich společné oblasti</i>					
19		SDM					
počet řešení: 2		<i>dvě dotýkající se kruhové křivky a třetí v jedné z oddělených oblastí</i>					
20		DDM					
počet řešení: 4		<i>tři dotýkající se kruhové křivky ve dvou bodech, se společnou oblastí</i>					
21		SDD					
počet řešení: 2		<i>tři dotýkající se kruhové křivky ve dvou bodech, bez společné oblasti</i>					
22		DDD					
počet řešení: 2		<i>tři dotýkající se kruhové křivky ve třech bodech</i>					

23		[DDD]					80
počet řešení: ∞		<i>tři dotýkající se kruhové křivky v jednom společném bodě</i>					
24		PMM					
24		PMM					
počet řešení: 4		<i>dvě protínající se kruhové křivky a třetí k nim mimoběžná</i>					
25		PDM					
25		PDM					
25		PDM					
počet řešení: 4		<i>dvě protínající se kruhové křivky a třetí dotýkající se jedné z nich</i>					
26		PDD					
26		PDD					
počet řešení: 4		<i>dvě protínající se kruhové křivky a třetí obou se dotýkající</i>					

80 I když má úloha nekonečně mnoho řešení, všechna řešení procházejí společným bodem dotyku kruhových křivek. V kruhové inverzi se středem v tomto společném bodě, kdy se úloha převede na tři vzájemně rovnoběžné přímky, jsou všechna řešení taktéž rovnoběžky (procházejí společným bodem v nekonečnu). Z toho důvodu, že přímku nepovažujeme za legitimní řešení úlohy, vyplývá, že tato konfigurace řešení nemá.

27		PPM					
počet řešení: 4 <i>dvě protínající se kruhové křivky a třetí protínající se s jednou z nich</i>							
28		PPD					
							
počet řešení: 6 <i>dvě dotýkající se kruhové křivky a třetí protínající obě z nich</i>							
29		[PPD]					
							
počet řešení: 2 <i>dvě dotýkající se kruhové křivky a třetí protínající je obě v bodě dotyku</i>							
30		PPP ₁					
počet řešení: 8 <i>tři vzájemně se protínající kruhové křivky v šesti bodech</i>							
31		PPP ₂					
počet řešení: 8 <i>tři vzájemně se protínající kruhové křivky v šesti bodech</i>							

32		[PPP] ₁					
počet řešení: 4		<i>tři vzájemně se protínající kruhové křivky ve čtyřech bodech</i>					
33		[PPP] ₂					
počet řešení: 0		<i>tři vzájemně se protínající kruhové křivky ve dvou bodech</i>					

3.2.2 Společné tečny

Pro správné určení počtu řešení Apolloniovy či Pappovy úlohy nestačí pouze pomocí kruhové inverze nalézt kanonickou formu zadání a podle ní určit počet řešení. Existují totiž varianty zadání úlohy, které mají menší počet řešení, než udává jejich kanonická forma. „Nevhodnou“ volbou poloh jednotlivých kruhových křivek (případně poloměrů kružnic) se totiž může jedna či více kružnic řešení transformovat na přímky, které se do výsledného počtu řešení nezapočítávají.

Takový případ může nastat ve chvíli, kdy všechny tři kruhové křivky zadání „sdílí společnou tečnu“. V tomto kontextu je „tečnou“ přímky libovolná její rovnoběžka a „tečna“ bodu je přímka, jež tímto bodem prochází. Každá tato „sdílená tečna“ redukuje počet řešení úlohy o jedno řešení.⁸¹

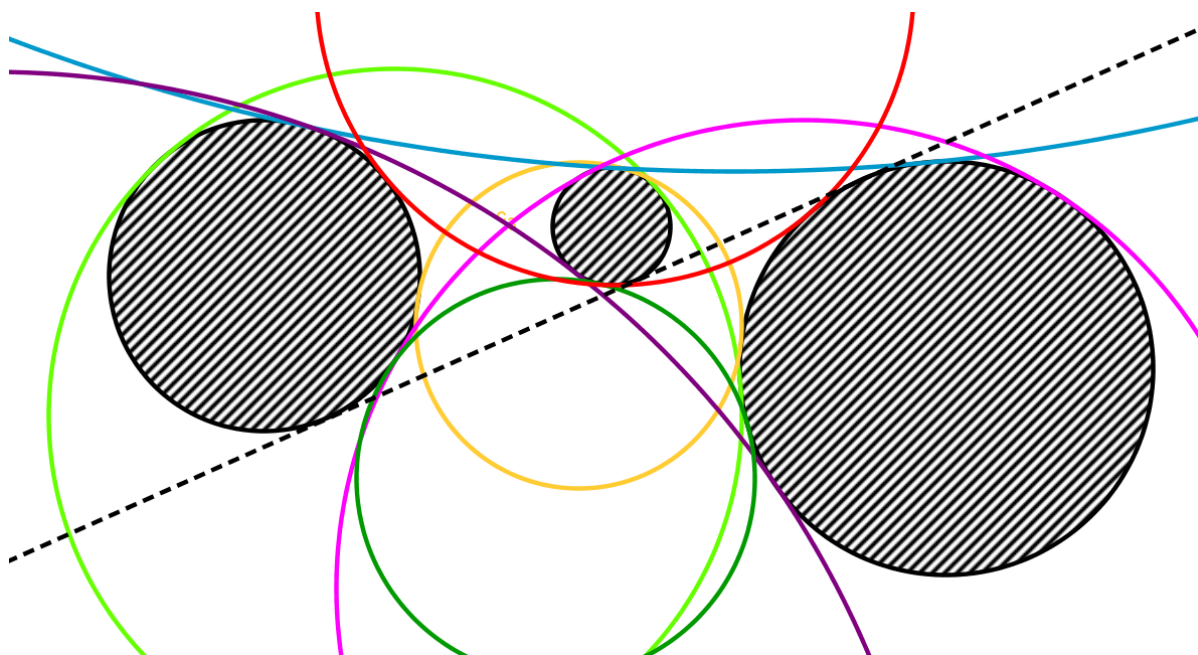
Uvedme několik příkladů. Tři kolineární body mají „společnou tečnu“ přímku, která jimi prochází. Takto zadaná úloha nemá žádné řešení. Pokud prochází dvěma zadanými body přímka, která je rovnoběžná se zadanou přímkou (příp. je tečnou zadané kružnice), sníží se počet řešení této úlohy na jedno. Máme-li v zadání bod, přímku a kružnici, pak se sníží počet řešení, pokud je jedna z tečen kružnice procházející daným bodem zároveň rovnoběžná se zadanou přímkou.

⁸¹ Některé z těchto případů byly zmíněny v předchozím oddíle, kdy se u konfigurací se dvěma rovnoběžnými přímkami a bodem/kružnicí tato řešení odčítala.

Jsou-li zadány dvě kružnice a bod, může být snížen počet řešení až o dvě. Pokud leží bod na jedné ze společných tečen kružnic, sníží se řešení o jedno, avšak je-li zadán bod totožný s jedním z průsečíků společných tečen, sníží se počet řešení o dvě. Úloha, v níž jsou zadány tři vzájemně stejnohlé kružnice má celkem šest řešení.

Petr Liška (2010, s. 17) uvádí ve své diplomové práci *Apolloniovy úlohy* tvrzení, že neexistuje taková konfigurace zadání, která by měla právě sedm řešení. Toto tvrzení je však chybné a v rozporu s výše uvedenými principy; vychází totiž z chybného předpokladu uvedeného v jeho práci: „*Chceme-li získat právě sedm řešení, musíme vytvořit takovou konfiguraci kružnic, aby jeden konjugovaný pár kružnic splynul v jednu kružnici.*“.

Jako důkaz chybnosti tohoto tvrzení je zde uveden protipříklad. Pro lepší čitelnost obrázku je každá jednotlivá kružnice řešení vyvedena jinou barvou a kružnice zadání jsou šrafované. Čárkovaně je vyvedena společná tečna všech tří kružnic, tedy osmé „pseudo-řešení“ úlohy.



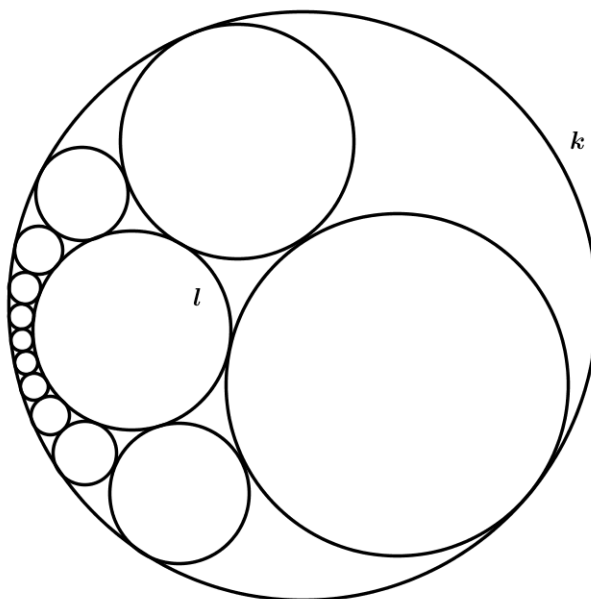
3.3 Geometrické problémy řešené pomocí kruhové inverze

3.3.1 Steinerův řetěz (*Steiner Chain*)⁸²

Problém

Je dána kružnice k a kružnice l , která se nachází ve vnitřní oblasti kružnice k , avšak není s ní soustředná. Do oblasti mezikruží obou kružnic vepíšme libovolnou kružnici, která se zároveň dotýká kružnic k i l . Pokračujme s vepisováním dalších kružnic, které se všechny budou dotýkat kružnic k , l a předchozí vepsané kružnice. Vznikne „řetěz“ dotýkajících se kružnic vepsaných do mezikruží kružnic k a l . Dokažte, že v případě, kdy se poslední vepsaná kružnice zároveň dotýká první vepsané kružnice, platí, že v dané konfiguraci kružnic k , l vznikne tento „řetěz“ dotýkajících se kružnic nezávisle na tom, kam v mezikruží umístíme první vepsanou kružnici.

(Davis, 2011, p. 12–13)



Řešení:

Kružnice k a l převedeme pomocí kruhové inverze na soustředné kružnice. Protože vepsané kružnice tvořící „řetěz“ se dotýkají kružnic k a l , budou v takto zadané inverzi převedeny na kružnice o stejném poloměru. U „řetězu“ dotýkajících se kružnic stejného poloměru vepsaných do mezikruží dvou soustředných kružnic nezávisí na poloze těchto kružnic a tudíž nezávisí na poloze kružnic ani v inverzním případě.

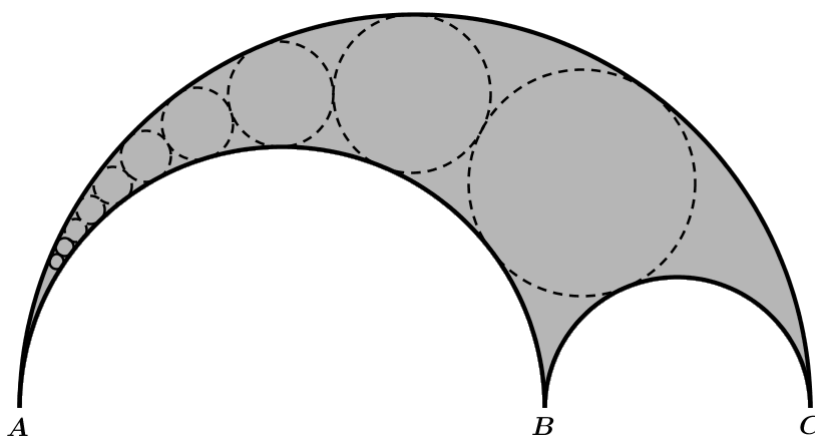
⁸² Někdy též uváděno jako Steinerův porismus (*Steiner porism*).

3.3.2 Pappův arbelos (*Arbelos of Pappus*)

Problém

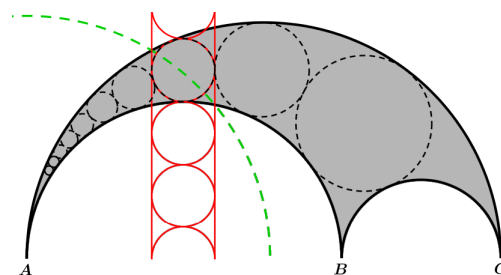
Nechť jsou A , B a C tři různé kolineární body určující přímku p . Sestrojme tři půlkružnice nad průměry AB , BC a AC ve stejné polorovině určené přímkou p . Oblast ohraničená těmito půlkružnicemi se nazývá arbelos.⁸³ Do této oblasti postupně vepisujeme kružnice, které se dotýkají půlkružnic AB a AC a zároveň poslední vepsané kružnice. Pro první takto vepsanou kružnici platí, že se též dotýká půlkružnice BC . Dokažte, že pro první takto vepsanou kružnici platí, že vzdálenost jejího středu od přímky p je rovna průměru této kružnice. Pro druhou vepsanou kružnici platí, že vzdálenost jejího středu od přímky p je rovna dvojnásobku průměru této kružnice a obecně pro n -tou kružnici je vzdálenost jejího středu od přímky p rovna n -násobku průměru této kružnice.

(Davis, 2011, p. 14–16)



Řešení:

Zobrazíme-li celou konstrukci v kruhové inverzi se středem v bodě A a poloměrem řídicí kružnice takovým, aby jedna z vepsaných kružnic byla samodružná, zobrazí se půlkružnice AB a AC na rovnoběžné přímky. Všechny obrazy vepsaných kružnic se musí dotýkat těchto rovnoběžek a též sebe navzájem. Z toho vyplývá, že obrazy všech kružnic budou mít stejný průměr rovný průměru samodružné kružnice v inverzi. Sečtením všech průměrů obrazů kružnic vepsaných před zvolenou kružnicí společně s jejím poloměrem a poloměrem obrazu půlkružnice BC obdržíme výslednou vzdálenost.



⁸³ Název pochází z řeckého výrazu používaného pro označení tvaru ševcovského nože.

(Davis, 2011, p. 14)

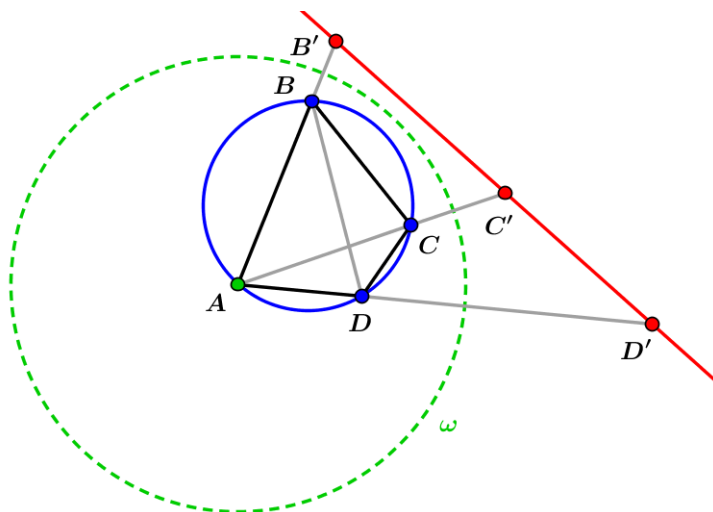
3.3.3 Ptolemaiova věta (*Ptolemy's Theorem*)

Problém

Dokažte, že v libovolném tětivovém čtyřúhelníku⁸⁴ $ABCD$ platí následující rovnost:

$$|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD|$$

(Davis, 2011, p. 8–9)



Řešení:

Zvolme bod A za střed kruhové inverze. Z vlastností kruhové inverze vyplývá, že kružnice opsaná tětivovému čtyřúhelníku se zobrazí na přímku. Pro obrazy bodů jistě platí, že $|B'D'| = |B'C'| + |C'D'|$. Podle věty 2.4 platí pro vzdálenosti dvou bodů a jejich

obrazů v kruhové inverzi následující vztah: $|X'Y'| = \frac{r^2}{|SX| \cdot |SY|} \cdot |XY|$, kde bod S je střed kruhové inverze a r je poloměr řídicí kružnice. Dosazením do předchozí rovnice získáme:

$$\frac{r^2}{|SB| \cdot |SD|} \cdot |BD| = \frac{r^2}{|SB| \cdot |SC|} \cdot |BC| + \frac{r^2}{|SC| \cdot |SD|} \cdot |CD|, \text{ jež po vynásobení koeficientem}$$

$$\frac{|SB| \cdot |SC| \cdot |SD|}{r^2} \text{ přechází na: } |SC| \cdot |BD| = |SD| \cdot |BC| + |SB| \cdot |CD|. \text{ Vzhledem k tomu,}$$

že jsme za střed inverze zvolili bod A , je tímto Ptolemaiova rovnost dokázána.

Poznámka:

Výše uvedenou rovnost lze zobecnit na tzv. *Ptolemaiovu nerovnost*, jež platí pro libovolné čtyři body v rovině a má tvar: $|AC| \cdot |BD| \leq |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD|$. Více o této nerovnosti uvádí Leischner (2010, s.106–108).

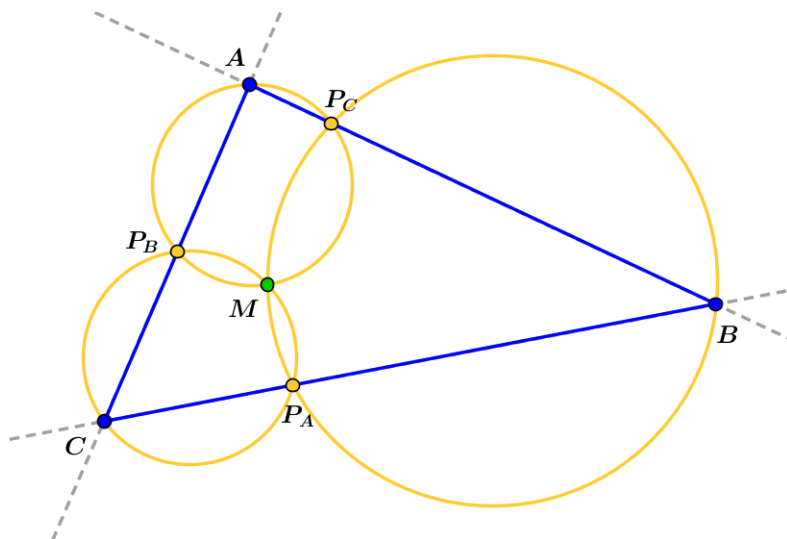
⁸⁴ Jako *tětivový* označujeme takový čtyřúhelník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na jedné kružnici.

3.3.4 Miquelova věta (*Miquel's Theorem*)

Problém

Nechť je dán trojúhelník ABC a necht' zvolíme po řadě body P_A , P_B a P_C na úsečkách BC , AC a AB tak, aby nesplyvaly s žádným vrcholem trojúhelníku. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AP_BP_C , BP_CP_A a CP_AP_B se protínají v jednom bodě.

(Davis, 2011, p. 10; Hajmová, 2018, s. 53)

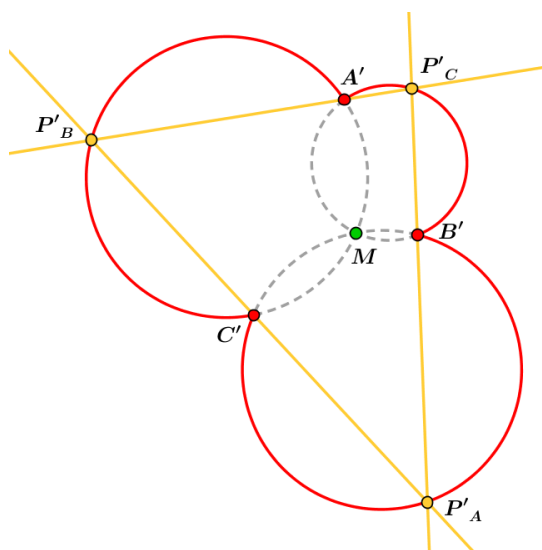


Řešení:

Bod průniku, zvaný též *Miquelův bod trojúhelníku*, označme M a zvolme jej za střed kruhové inverze. Uvažujme pouze kružnice opsané trojúhelníkům AP_BP_C , CP_AP_B a ukažme, že jejich společný bod M leží na kružnici BP_CP_A , tedy že po aplikaci kruhové inverze bod B' leží na přímce $P'_AP'_C$. Víme, že součet protilehlých úhlů je v tětiovém čtyřúhelníku roven 180° . Označme úhly $\alpha = \sphericalangle B'P'_AC'$, $\beta = \sphericalangle C'P'_BA'$ a $\gamma = \sphericalangle A'P'_CB'$. Pro plný úhel okolo bodu M musí platit následující:
 $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 360^\circ$.
 Z toho vyplývá, že $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Avšak pokud by bod B' neležel na přímce $P'_AP'_C$, tato rovnost by neplatila. Tím je důkaz u konce.

Poznámka:

Věta platí, i když některý z bodů P leží mimo stranu trojúhelníka na přímce jí určené.



ZÁVĚR

Kruhová inverze je nelineární, involutorní a konformní geometrická transformace Möbiovy roviny s kružnicí samodružných bodů, která převádí kruhové křivky (tj. přímky a kružnice) na kruhové křivky a sinové spirály na sinové spirály, je-li středem inverze střed spirály.

První kapitola práce shrnuje výše uvedené vlastnosti kruhové inverze a podává jejich definice společně s definicí samotné inverze. Druhá kapitola se zabývá vlastnostmi obrazů kruhových křivek, sinových spirál a kuželoseček. Poslední dva oddíly její první podkapitoly přinášejí nový pohled na inverzi kruhových křivek. Oddíl 2.1.4 zkoumá inverzní vlastnosti pouze jednotlivých částí kruhových křivek, zatímco oddíl 2.1.5 se zabývá inverzí celých svazků kruhových křivek, tj. nekonečných množin kruhových křivek s danou vlastností. Shrnutí poznatků této kapitoly nalezne čtenář v přílohách č. 1 a 2.

Třetí kapitola představuje praktická využití kruhové inverze při řešení geometrických problémů. Její značná část se zabývá řešením Apolloniovy a Pappovy úlohy. První podkapitola čtenáře seznamuje s oběma úlohami, předkládá obecné metody jejich řešení a v dalším textu postupně rozebírá všechna možná zadání úlohy a postup při jejich řešení. Autor soustavně pracoval na nalezení všech existujících konfigurací zadání úlohy, kterých objevil celkem 170 a jejich přehled podává v příloze č. 3.

Druhá podkapitola se věnuje použití kruhové inverze při klasifikaci vzájemných poloh tří kruhových křivek v zadání těchto úloh a určení počtu řešení úlohy v závislosti na tomto zadání. Kategorizuje tak původních 170 konfigurací do přehledných 33 kanonických forem. Závěr kapitoly zmiňuje použití inverze při řešení některých méně známých geometrických problémů.

Při studiu jiných prací s tematikou kruhové inverze byly nalezeny nesrovnalosti v identifikaci některých inverzních křivek kuželoseček. Po prostudování zahraniční literatury na toto téma a ověření pomocí analytického vyjádření daných křivek byly tyto nesrovnalosti v bakalářské práci opraveny.

Mimo matematické věty nalezené v uvedených zdrojích je v práci publikováno 19 originálních teorémů zabývajících se především metrickými vlastnostmi obrazů kruhových křivek. Dále autor předkládá k dalšímu bádání celkem 8 nedokázaných hypotéz zabývajících se polárními vlastnostmi kružnic či obrazy křivek vyšších řádů v kruhové inverzi.

Všechny obrázky použité v této bakalářské práci byly autorem práce vytvořeny v dynamickém geometrickém softwaru *GeoGebra* a naplňují tak dílčí cíl práce opatřit všechna uvedená tvrzení srozumitelným, výstižným a estetickým grafickým vyjádřením, čímž vytvářejí integrální součást této práce. Při jejich tvorbě byly uvedené požadavky naplňovány především těmito zásadami: vypuštění méně podstatných pomocných konstrukcí, hojné využití grafické stylizace křivek (typ, tloušťka a barva) a intuitivní písmenné značení. Grafická prezentace obsahu vrcholí ve dvou přílohách, které tak shrnují poznatky druhé a třetí kapitoly této bakalářské práce.

SEZNAM LITERATURY

ABRAMSON, Jay, 2014. *Precalculus*. Arizona State University: OpenStax. PDF ISBN-13 978-1-947172-06-7. Dostupné z:
<https://d3bxy9euw4e147.cloudfront.net/oscms-prodcms/media/documents/Precalculus-OP.pdf>

BALKOVÁ, Lubomíra, 2013. *Lineární algebra I* [skripta]. V Praze: České vysoké učení technické. ISBN 978-80-01-05346-1.

BÍMOVÁ, Daniela, 2006. *Kinematická geometrie n-rozměrného euklidovského prostoru*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Disertační práce. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/42747/>

BRUEN A., FISCHER J. C. and WILKER J. B., 1983. Apollonius by Inversion.
In: *Mathematics Magazine*. Vol. 56 (Mar., 1983), No. 2, 97–103.
Dostupné z: <https://www.jstor.org/stable/2690380>

DAVIS, Tom, 2011. *Inversion in a Circle* [online]. © 2011. [cit. 2019-08-20]. Dostupné z:
<http://www.geometer.org/mathcircles/inversion.pdf>

DOFKOVÁ Radka a Milan KOPECKÝ, 2007. *GEOMETRIE 2* [skripta]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky.

FERRÉOL, Robert. *Booth's curve* [online]. © 2017. [cit. 2019-12-10].
Dostupné z: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/booth/booth.shtml>

FERRÉOL, Robert. *Cardioid* [online]. © 2017. [cit. 2019-08-20].
Dostupné z: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/cardioid/cardioid.shtml>

FERRÉOL, Robert. *Ellipse* [online]. © 2017. [cit. 2020-04-08].
Dostupné z: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/ellipse/ellipse.shtml>

FERRÉOL, Robert. *Hyperbola* [online].© 2017. [cit. 2020-04-08].

Dostupné z: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/hyperbole/hyperbole.shtml>

FERRÉOL, Robert. *Limaçon (or snail) of Pascal* [online].© 2017. [cit. 2019-08-10].

Dostupné z: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/limaçon/limaçon.shtml>

FERRÉOL, Robert. *Parabola* [online].© 2017. [cit. 2019-08-20].

Dostupné z: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/parabole/parabole.shtml>

FERRÉOL, Robert. *Right rational circular cubic* [online].© 2017. [cit. 2020-04-08].

Dostupné z: <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/cubiccirculairerationnelle/cubiccirculairerationnelledroite.shtml>

FERRÉOL, Robert. *Sinusoidal Spiral* [online].© 2017. [cit. 2019-07-24]. Dostupné z:

<https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/spiralesinusoidale/spiralesinusoidale.shtml>

HAJMOVÁ, Kateřina, 2018. *Pokročilé partie planimetrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Diplomová práce.

Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/187996/>

CHODOROVÁ, Marie, 2013. *Projektivní geometrie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta. Skripta. ISBN 978-80-244-4000-2.

Dostupné z: https://kag.upol.cz/m-dg/texty/Projektivni_geometrie.pdf

JANYŠKA, Josef, 2019. *Geometrická zobrazení* [online skripta]. [Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky]. [cit. 2019-07-13].

Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~janyska/ZobrazeniWS.pdf>

JAREŠOVÁ Miroslava a Jaroslav ZHOUF, 2009. Spirály a jejich význam v praxi. In: *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Vol. 84 (2009), No. 3, 5–19. Jednota českých matematiků a fyziků. ISSN 0035-9343. Dostupné z:

https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146312/Rozhledy_084-2009-3_2.pdf

KOCOUREK, Jan, 2016. *Kuželosečky v kruhové inverzi*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy. Diplomová práce. Dostupné z: <https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/24199/1/Jan%20Kocourek%20Kuzelosecky%20v%20kruhove%20inverzi%202016.pdf>

LÁVIČKA, Miroslav, 2006. *KMA/G2 GEOMETRIE 2: Pomocný učební text* [skripta]. Západočeská univerzita v Plzni. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~sir/soubory/G2_text.pdf

LEISCHNER, Pavel, 2010. *Geometrická zobrazení*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita. ISBN 978-80-7394-243-4.

LIŠKA, Petr, 2007. *Apolloniova úloha*. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Bakalářská práce. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/150476/prif_b/Bakalarska_prace.pdf

LIŠKA, Petr, 2010. *Apolloniovy úlohy*. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Diplomová práce. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/je847/Apolloniovy_ulohy.pdf

ODVÁRKO, Oldřich, 2003. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie*. 3. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-203-1.

PATÁKOVÁ, Eva, 2005. *Webová interaktivní sbírka geometrických úloh*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky. Diplomová práce. Dostupné z: http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/matematika/planimetrie/06_konstrukci_ulohy/05_apolloniovy_pappovy/dp_text.pdf

POMYKALOVÁ, Eva, 1997. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. 3. vyd. Praha: Prometheus. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-045-4.

POSPÍŠILOVÁ, Hana, 2012. *Konformní zobrazení*. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky. Diplomová práce. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/ti11g/diplomova_prace_konformni_zobrazeni.pdf

ŘÍHA, Ota, 2010. *Kruhová inverze*. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-5149-2.

SKŘÍŠOVSKÝ, Emil, 2012. *Transformace jistých křivek a ploch v kruhové inverzi*. České Budějovice: Gymnázium Česká a Olympijských nadějí. Středoškolská odborná činnost.

[cit. 2019-07-16]. Dostupné z:

<https://docplayer.cz/2764728-Transformace-jistych-krivek-a-ploch-v-kruhove-inverzi.html>

ŠINDELÁR, Karel, 1959. Kuželosečky. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Vol. 4 (1959), No. 2, 145–156. Jednota českých matematiků a fyziků. ISSN 0032-2423. Dostupné z:

https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138690/PokrokyMFA_04-1959-2_1.pdf

WEISSTEIN, Eric W. *Quadratic Curve* [online]. From MathWorld--A Wolfram Web

Resource. [cit. 2019-07-10]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticCurve.html>

WEISSTEIN, Eric W. *Sinusoidal Spiral* [online]. From MathWorld--A Wolfram Web

Resource. [cit. 2019-07-11]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/SinusoidalSpiral.html>

PŘÍLOHY

Příloha č. 1: Přehled obrazů křivek v kruhové inverzi

<i>vzor / obraz</i>	<i>obraz / vzor</i>
bod ve vnitřní oblasti řídicí kružnice	bod ve vnější oblasti řídicí kružnice
bod ležící na řídicí kružnici	
přímka neprocházející středem inverze	kružnice procházející středem inverze
přímka procházející středem inverze	
kružnice neprocházející středem inverze	kružnice neprocházející středem inverze
kružnice ortogonální vůči řídicí kružnici	
rovnoosá hyperbola (střed inverze v jejím středu)	Bernoulliho lemniskáta (střed inverze v jejím středu)
rovnoosá hyperbola (střed inverze v jejím ohnisku)	Pascalova závitnice (střed inverze v singulárním bodě)
rovnoosá hyperbola (střed inverze v jejím vrcholu)	přímá strofoida (střed inverze v singulárním bodě)
parabola (střed inverze v jejím ohnisku)	kardioida (střed inverze v singulárním bodě)
parabola (střed inverze v jejím vrcholu)	Dioklova kisoida (střed inverze v singulárním bodě)
elipsa / hyperbola (střed inverze v jejím středu)	Boothův ovál / lemniskáta (střed inverze v jeho / jejím středu)
elipsa / hyperbola (střed inverze v jejím ohnisku)	Pascalova závitnice (střed inverze v singulárním bodě)
elipsa / hyperbola (střed inverze v jejím vrcholu)	Cramerova křivka (střed inverze v singulárním bodě)

Příloha č. 2: Přehled inverzních křivek kuželoseček

Zde bude vlepena
složená příloha č. 2
ve formátu A3

Příloha č. 3: Přehled vzájemných poloh tří kruhových křivek

Zde bude vlepena
složená příloha č. 3
ve formátu A3

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Jan Pospíšil
Katedra nebo ústav:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2020

Název práce:	Kruhová inverze
Název v angličtině:	Circle inversion
Anotace práce:	Bakalářská práce se zabývá geometrickým zobrazením zvaným kruhová inverze. První kapitola obsahuje definice použitých pojmů a základních vlastností kruhové inverze. Druhá kapitola zkoumá vlastnosti obrazů kruhových křivek, sinových spirál a kuželoseček v inverzi. Poslední kapitola práce uvádí aplikace kruhové inverze a zaměřuje se především na řešení Apolloniových a Pappových úloh.
Klíčová slova:	kruhová inverze, nelineární transformace, Möbiova rovina, kruhové křivky, sinové spirály, kuželosečky, inverzní křivka, Apolloniova úloha, Pappova úloha, kanonické formy
Anotace v angličtině:	This bachelor's thesis deals with a geometric transformation called circle inversion. The first chapter contains the definitions of used concepts and the basic properties of circle inversion. The second chapter explores the inverse images of generalised circles, sinusoidal spirals, and conic sections. The last chapter of the thesis describes the applications of circle inversion, primarily focusing on solving Apollonius' and Pappus' problems.
Klíčová slova v angličtině:	circle inversion, nonlinear map, Möbius plane, generalized circles, sinusoidal spiral, conic sections, inverse curve, Apollonius' problem, Pappus' problem, canonical forms
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1: Přehled obrazů křivek v kruhové inverzi Příloha č. 2: Přehled inverzních křivek kuželoseček Příloha č. 3: Přehled vzájemných poloh tří kruhových křivek
Rozsah práce:	130 stran
Jazyk práce:	český jazyk