Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
Katedra algebry a geometrie

Algebry v kladném a záporném kuželu *l*-grupy

Bakalářská práce

Vedoucí bakalářské práce:
Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.

Vypracovala:
Šárka Dosoudilová
3. ročník F-M

Rok odevzdání: 2008

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně za vedení doc. RNDr. Jana Kühra a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

Ve Šternberku dne 15.4.2008 ....

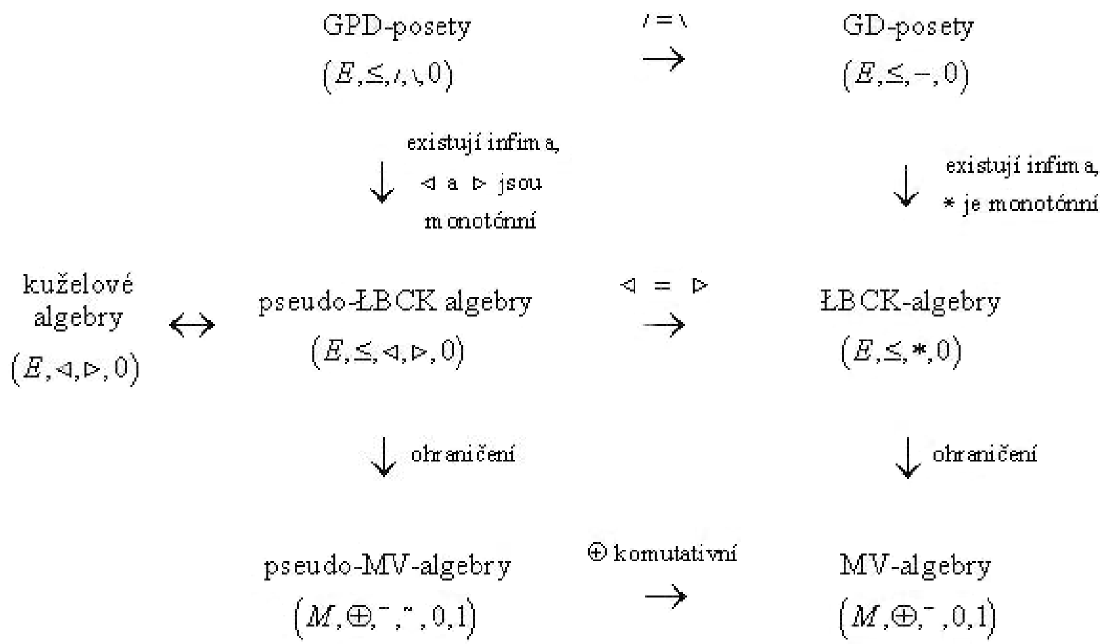
Děkuji doc. RNDr. Janu Kührovi za pomoc a cenné rady, které mi poskytl při zpracování bakalářské práce.

Obsah:

1 Úvod

Některé algebry, které se intenzivně studují v posledních letech, je možné reprezentovat v kladném nebo záporném kuželu uspořádaných grup. Ve své práci se zabývám algebrami, které vycházejí z kladných kuželů uspořádaných grup. V textu jsou obsaženy MV-algebry, pseudo-MV-algebry, ŁBCK-algebry, pseudo-ŁBCK-algebry, kuželové algebry, GD-posety a GPD-posety.

Vztahy mezi těmito algebrami jsou shrnuty níže ve schématu. Oboustranná šipka mezi dvěma typy algeber říká, že obě můžeme považovat za ekvivalentní. Šipka od jedné algebry k druhé znamená, že první je zobecněním druhé a druhá algebra je ve skutečnosti charakterizována prostřednictvím první přidáním dalšího axiomu, který je uveden vedle šipky.



2 Svazově uspořádané grupy

V této části zopakujeme základní pojmy teorie svazově uspořádaných grup a uvedeme několik příkladů, jejichž význam se ukáže při ověřování základních vět pro svazově uspořádané grupy.

Pro svazově uspořádané grupy se užívá aditivní i multiplikativní zápis. Zde budeme používat aditivní zápis, ale čtenář by z toho neměl vyvozovat, že všechny uvedené grupy jsou abelovské.

Řekneme, že $G,+<$ je *uspořádaná grupa*, jestliže $G,+$ je grupa a $<$ je uspořádání na G, které je kompatibilní s $,$, tj. jestliže $g<$, pak $g+\ <\ +$ a $k+\ <\ +$, pro všechna $g,h,k\in$.

Množina $G+ = \ \in\ >$ kladných prvků se nazývá *kladný kužel grupy* G.

Lze snadno ověřit, že uspořádání je určeno kladným kuželem $G+$, tedy $g<$, právě když $h-\ \in$, tj. $h-\ >$.

Navíc každá podmnožina $\varnothing \neq\ \subset$, která splňuje vlastnosti:

(*i*) $t+\ \subset$ (uzavřená na sčítání),

(*ii*) $t\cap -\varnothing$,

(*iii*) $\forall\in\ +\ -\ -$ (*P* je normální),

indukuje uspořádání na G:

$$g< \ \leftrightarrow\ -\ \in$$

Nyní předpokládejme, že uspořádaná množina $G,<$ je ve skutečnosti svaz, tj. každé dva prvky $a,b\in$ mají nejmenší horní závoru (spojení) $a\vee$ a největší dolní závoru (průsek) $a\wedge$. Pak G je *svazově uspořádaná grupa* (*l-grupa*).

Svazově uspořádanou grupu lze definovat i jako algebru $G,+\vee\wedge$, kde

1. $G,+$ je grupa,
2. $G,\vee\wedge$ je svaz,
3. $\forall\ \in$: $x+\ \vee\ =\ +\ \vee\ +$ a $x\vee\ +=\ +\ \vee\ +$.

Spojením $\bigvee$ rozumíme supremum množiny $g:i\in$, pokud existuje. Podobně použijeme $\bigwedge$ pro infimum $g:i\in$, pokud existuje. Definice *l*-grup však nutně neimplikuje existenci spojení a průniků nekonečných množin.

Jestliže svazové uspořádání na některé *l*-grupě je lineární uspořádání (tj. pro jakékoliv $g, h \in$ buď $g \geq$ nebo $h \geq$), pak nazýváme G *lineárně uspořádanou grupou* (*o-grupou*). Poznamenejme, že v tomto případě kladný kužel navíc splňuje kritérium $F\ (\ \ ) \cup (\ ) =$.

Vztah mezi svazovými operacemi a inverzním prvkem je dán DeMorganovými zákony:

$$- \vee = - \wedge - ,$$
$$- \wedge = - \vee - .$$

Obecně:

Věta: *Nechť* G *je svazově uspořádaná grupa a* $f, g \in$ $(i \in$). *Jestliže existuje* $\vee$ *v* G, *pak existuje také* $\wedge$, $\vee$ *a* $\vee$. *Navíc:*

(*a*) $\wedge$ $\vee$,

(*b*) $\vee$ $\vee$,

(*c*) $\vee$ $\vee$,

a duálně. (Poznamenejme, že existence nekonečných svazových operací napravo nemusí implikovat existenci nalevo.)

Důkaz: Nechť $g = \vee$. Zřejmě $- \leq -$, $f + \geq +$ a $f \wedge \geq$ $\geq \wedge$ pro všechna $i \in$.

(*a*) Jestliže $h \leq -$ pro všechna $i \in$, pak $- \geq$ pro všechna $i \in$, tudíž $- \geq$. Proto $h \leq -$, takže $- = \wedge$.

(*b*) Jestliže $h \geq +$ pro všechna $i \in$, pak $- + \geq$ pro všechna $i \in$. Odtud plyne $- + \geq$, takže $h \geq +$. Tedy $f +$ je supremum množiny $f + \quad \in$.

(*c*) $0 = - \vee$. Pak z (*a*) a (*b*) plyne, že $\wedge$ existuje a rovná se 0. Dále $- + \wedge = - + \wedge \leq - + \wedge = - + \wedge \Rightarrow \leq$ $\leq \wedge - \wedge \leq - \Rightarrow \wedge$ $\wedge \in =$. Odtud $0 = \wedge +$ $+ \wedge$ $\vee$, a tedy $\vee$ $= \wedge$. □

Z důkazu můžeme odvodit další výsledky. Uspořádaná grupa, pro kterou je definováno spojení (nebo průsek), je nutně *l*-grupa. Užitečná rovnost vyplývá také z následující věty:

Věta: *Platí* $a\_ \quad \wedge \quad + = \vee$ (protože $a\_ \quad \wedge \quad = \vee \quad - \quad = \quad \vee \quad -$).

Pro $g \in$, *kladná část* $g+$ prvku g je $g \vee$; *záporná část* $g-$ je $\_ \vee$. Potom $g+ \quad = + - \vee \quad = \vee =$, a tedy také $g = \quad -$. Pak $g+ \wedge \quad = \quad + \quad \wedge$ $\wedge \quad = \quad \wedge \quad + \quad = - \quad + \quad =$.

Jestliže $a \wedge \quad \_$, říkáme, že a a b jsou *ortogonální*.

Poznamenejme, že sčítání ortogonálních prvků je komutativní; je-li $a \wedge \quad \_$, potom $a \perp \quad \_ \quad \vee$, neboť

$$a + \quad - \quad \vee \quad = \quad + \quad + - \wedge - \quad = \quad + - \quad \wedge = + \quad \wedge \quad - = .$$

Věta (Reiszova interpolační vlastnost): *Jestliže* $g, \ldots, g_n \in$ *a* $0 < \quad <$ $< \quad + \quad +$, *pak* $f = \quad + \quad +$ *pro některá* $f_j \in$, *kde* $0 < \quad <$ $(1 < \quad <)$.

Důkaz: Indukcí podle n: Pro $n\_$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení platí pro *n*. Jestliže $0 < \quad < \quad + \quad +$, pak $0 < \quad - \quad \vee < \quad + \quad +$. Podle indukčního předpokladu $f\_ \quad \vee = \quad + \quad +$ pro některá $f_j \in$, kde $f_j <$ $(1 < \quad <)$. Ale $f\_ \quad \wedge \quad = \vee \quad -$, tedy $f = \quad + \quad + \quad + \quad \wedge$. $\sqcap$

Poznámka: Existují uspořádané grupy, které mají tuto vlastnost a nejsou to *l*-grupy.

Z Reiszovy interpolační vlastnosti plyne:

Důsledek: *Pro kladné* g, h, a, k, $g \wedge \quad + \quad < \quad \wedge \quad + \quad \wedge$.

Následující věta popisuje základní vlastnosti nosných svazů a grup *l*-grup:

Věta: (*a*) *Svaz l-grupy je distributivní.*

(*b*) *Grupa l-grupy je bez torze.*

(*c*) *V l-grupě platí:* $m\_ \quad \_ \quad \perp \quad \perp \quad -$ *pro některé* c $(n \in \mathbb{N})$.

Důkaz: (*a*): Dokážeme, že svaz je distributivní. Stačí ukázat, že jestliže $g \wedge \; = \; - \; \wedge$ a $g \vee \; = \; \vee$, pak $g =$. Z předchozích vět dostáváme $g = \; \vee \; - \; - \; - \; \wedge \; = \; \vee \; - \; - \; \wedge \; =$.

(*b*): Předpokládejme, že $ng =$ pro některý prvek g *l*-grupy a přirozené n. Potom (opětovně rozvedením sčítání přes spojení) $n g \vee \; = \; \vee \; - \; \vee \; \vee \; \vee \; \vee = \; - \; \vee \; \vee \; \vee = \; - \; \vee$. Ale potom $g \vee \; =$. Podobně, $- \; \vee \; =$, a tedy $g =$.

(*c*): Nechť $c = \; - \; \vee \; - \; + \vee \vee + \; - \; \vee \; -$. Pak $a \perp -$ $- \perp$. ∎

Příklad 1: Aditivní grupy celých čísel $\mathbf{Z}, + <$, racionálních čísel $\mathbf{Q}, + <$ a reálných čísel $\mathbf{R}, + <$ jsou lineárně uspořádané grupy s přirozeným uspořádáním.

Příklad 2: Grupu $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ lze uspořádat „po složkách“. Tím dostaneme svazově uspořádanou grupu, která ale není lineárně uspořádaná. $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ je možné uspořádat i lineárně:

(*a*) $k, l \; <$ $\Leftarrow$ (*i*) $k \; <$, nebo

(*ii*) $k = \; <$.

(*b*) Nechť ξ je libovolné iracionální reálné číslo. Pak $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ je lineárně uspořádaná komutativní grupa s uspořádáním: $k, l \; >$, tj. $k - \; - \; >$, právě když $k - \; + \; - \; >$ v $\mathbf{R}$.

Příklad 3: Nechť $\mathbf{V}$ je racionální vektorový prostor s bází $\vec{\iota} \; \in$. Nechť $\vec{\;} \vec{\;} -$; $\vec{\;} - \sum$ a $\vec{\;} - \sum$, kde I_0 je konečná podmnožina množiny I a $q, r_i \in \mathbf{Q}$. Definujme $\vec{\;} \; \vec{\;}$, právě když $q_i <$ pro všechna $i \in$. Potom $\mathbf{V}$ je svazově uspořádaná grupa.

Příklad 4: Nechť $C\mathbf{R}$ je aditivní grupa reálných spojitých funkcí. $C\mathbf{R}$ je *l*-grupa s obvyklým uspořádáním „po bodech“: $f <$, právě když $f \; x <$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$. Modifikace tohoto základního příkladu se vyskytují v matematické analýze.

Příklad 5: Nechť $G = \mathbf{Z} +$ je grupa, kde sčítání je definováno takto:

$$k_1, m_1, n_1 + \quad = \quad k \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \qquad \text{sudé,} \quad \text{liché,}$$

nulový prvek: $0,0,0$ a opačné prvky: $- \quad = \quad - \quad - \quad - \quad - \qquad n\ \text{sudé,} \quad n\ \text{liché.}$

Na G definujme uspořádání takto:

$$k_1, m_1, n_1 < \quad \Leftarrow \quad (i)\ n_1 < \text{, nebo}$$

$$(ii)\ n_1 = \quad < \quad < .$$

Potom $G = \mathbf{Z} + \leq$ je svazově uspořádaná grupa (tzv. *Scrimgerova 2-grupa*), kde:

$$k_1, m_1, n_1 \vee \quad = \quad k_1, m_1, n_1 \ \text{pro}\ n_1 > \quad k_1 \vee \quad \vee \quad = \quad k_2, m_2, n_2 \ \text{pro}\ n_1 <$$

$$k_1, m_1, n_1 \wedge \quad = \quad k_2, m_2, n_2 \ \text{pro}\ n_1 > \quad k_1 \wedge \quad \wedge \quad = \quad k_1, m_1, n_1 \ \text{pro}\ n_1 <$$

Kladný kužel *l*-grupy G je ve tvaru: $G^+ = \quad > \cup \quad > .$

Příklad 6: Nechť $G = \{ \quad \mathbf{R} \quad \}$. Pak G je vzhledem k násobení matic nekomutativní grupa s jednotkou $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ a inverzními prvky $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$. Na G definujme uspořádání:

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \quad (i)\ a_1 < \text{, nebo}$$

$$(ii)\ a_1 = \quad < .$$

Potom $G, \leq$ je lineárně uspořádaná grupa. Kladný kužel *l*-grupy G je ve tvaru:

$$G^+ = \{ \quad \mathbf{R} \quad \} \cup \{ \quad \mathbf{R} \quad \}.$$

Příklad 7: Nechť $\mathbf{Z} W r \mathbf{Z}$ je množina všech uspořádaných dvojic b, a, kde b je zobrazení $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ a $a \in \mathbf{Z}$. Definujme na $\mathbf{Z} W r \mathbf{Z}$ sčítání takto:

$$(b, a_1 + b \quad = c \quad + \quad ,$$

kde $c\, x = b \quad + b \quad +$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$, a opačným prvkem k $(b, a$ je dvojice

$$- b \quad = c - \quad ,$$

kde $c\, x = -b \quad -$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Dále definujme uspořádání:

$$(b, a_1 < b \qquad \Leftrightarrow \quad (i) \quad a_1 < \quad , \text{ nebo}$$

$$(ii) \quad a_1 = \quad \text{a} \quad b_1\, x < b \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{Z}.$$

Potom $\mathbb{Z}\,\mathrm{Wr}\,\mathbb{Z}, +, <$ je svazově uspořádaná grupa. (Kladným kuželem je množina dvojic $(b, a$ takových, že (*i*) $a >$, nebo (*ii*) $a =$ a $b\, x >$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$.) Tato *l*-grupa se nazývá *věncový součin* $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ (označení Wr pochází z anglického *wreath product*).

Příklad 8: Nechť T je lineárně uspořádaná množina. Označme $\mathrm{Aut}\, T$ množinu všech bijekcí $f : T \rightarrow$ takových, že pro $\forall \quad \in \quad : \; x < \quad \Leftrightarrow f(x) <$; taková zobrazení se nazývají automorfismy na $(T, <$. Na $\mathrm{Aut}\, T$ definujme uspořádání „po bodech“, tj.

$$f < \quad \Leftrightarrow f(x) < \qquad \text{pro každé } x \in \quad .$$

Potom $(\mathrm{Aut}(T), \circ$, kde $\circ$ značí obvyklé skládání zobrazení, je nekomutativní svazově uspořádaná grupa. Kladný kužel je tvořen takovými automorfismy $f \in$, pro které platí: $x <$ pro každé $x \in$.

Věta (Hollandova): *Pro každou l-grupu G existuje lineárně uspořádaná množina T taková, že G lze izomorfně vnořit do l-grupy $\mathrm{Aut}\, T$.*

3 MV-algebry a pseudo-MV-algebry

MV-algebry zavedl a studoval *C. C. Chang* v [1] a [2] jako algebraický model Łukasiewiczovy nekonečně hodnotové výrokové logiky. Navíc Chang dokázal, že každá lineárně uspořádaná MV-algebra je izomorfní s MV-algebrou ve tvaru Γ , kde G je komutativní lineárně uspořádaná grupa, $0 <$, $\Gamma = =$
$= \in < <$ a pro libovolné $x, y \in \Gamma$:

$$1 ,$$

$$- ,$$

$$x \oplus = + .$$

D. Mundici v [3] zobecnil tento výsledek pro libovolné MV-algebry. Jmenovitě, nechť G je komutativní svazově uspořádaná grupa (*l*-grupa) a $0 <$. Jestliže $x \oplus = + \wedge$, pro libovolné $x, y \in$, pak $\Gamma =$
$= \oplus \neg$ je MV-algebra. Mundici dokázal, že každá MV-algebra je izomorfní s Γ pro některou komutativní *l*-grupu G a některý prvek $0 <$. V [4] ukázal, že MV-algebry jsou také ekvivalentní s ohraničenými komutativními BCK-algebrami.

MV-algebra je algebra $M, \oplus, \neg$ taková, že $M, \oplus$ je komutativní monoid s unární operací a konstantou 1 splňující následující rovnosti:

(*MV1*) $x \oplus$,

(*MV2*) ,

(*MV3*) ,

(*MV4*) $\neg \neg \oplus \oplus = \neg \neg \oplus \oplus$.

Věta: *V MV-algebře* $M, \oplus, \neg$ *definujme uspořádání takto:*

$$a < \oplus .$$

Pak $M, <$ *je ohraničený a distributivní svaz, kde:*

$$x \vee = \neg \neg \oplus \oplus ,$$

$$x \wedge = \neg \neg \vee \neg = \neg \neg \oplus \neg \oplus \neg .$$

Věta: *Nechť* $G_{+\vee\wedge}$ *je komutativní l-grupa,* u . *Na intervalu* $0,u$ *definujme operace* $\oplus$:

$$\_\ -\ \_\ ,$$

$$x\oplus\ =\ +\ \wedge\ .$$

Potom $\Gamma\ =\ \oplus\neg$ *je MV-algebra. Svazové operace v MV-algebře* Γ *jsou stejné jako v l-grupě* $G_{+\vee\wedge}$.

Důkaz: Nechť $G_{+\vee\wedge}$ je komutativní *l*-grupa, u . Pro $\forall\ \in$ platí:

$$x\oplus\ \oplus\ =\ +\ \ +\ \wedge\ \ \wedge =\ +\ +\ \wedge\ +\ \wedge =\ +\ +\ \wedge =$$

$= + + \wedge + \wedge = + \wedge + \wedge = \oplus\ \oplus$. Dál $x\oplus = + \wedge$
$\wedge = + \wedge = \oplus$ a $x\oplus = + \wedge = \wedge =$, tedy $0,u,\oplus$ je komutativní monoid.

(*MV1*) $x\oplus = + \wedge = .$

(*MV2*) $\_\ -\ \_\ -\ .$

(*MV3*) $\neg\neg=\neg\ -\ =-\ -\ =+-=\ .$

(*MV4*) $\neg\neg\oplus\ \oplus = -\ \ -+\ \wedge\ \ \oplus = + - + -\ \vee-\ \oplus$
$\oplus = \ -\ \vee\ \oplus = \ -\ \vee + \wedge = \vee\ \wedge = \vee$ a $\neg\neg\oplus\ \oplus =$
$= -\ -+\wedge\ \ \oplus = +-+-\ \vee-\ \ \oplus = \ -\ \vee\ \oplus =$
$= \ -\ \vee + \wedge = \vee\ \wedge = \vee = \vee\ .$ $\square$

Pseudo-MV-algebry zavedli *G. Georgescu* a *A. Iorgulescu* v [5]. Nezávisle na nich *J. Rachůnek* v [6] zavedl GMV-algebry, které jsou s pseudo-MV-algebrami ekvivalentní.

Pseudo-MV-algebra je algebra $M,\oplus$ taková, že $M,\oplus$ je monoid se dvěma unárními operacemi $-$ a $\sim$ a konstantou 1 splňující rovnosti:

(*PMV1*) $x\oplus\ \_\ \_\ \oplus$,

(*PMV2*) $1-\_\ \_$,

(*PMV3*) $x-\ \_$,

(*PMV4*) $x-\oplus\ \ =\ \oplus$,

($PMV5$) $x \oplus \cdot \; = \oplus \cdot \; = \; \cdot \oplus = \; \cdot \oplus$,

($PMV6$) $x^{-} \oplus \cdot = \cdot \oplus$,

kde binární operace je definována: $x \cdot = \oplus$.

Poznámka: Lze snadno ověřit, že operace je asociativní.

Pseudo-MV-algebry jsou nekomutativním zobecněním MV-algeber (nepředpokládá se komutativnost operace $\oplus$). MV-algebry jsou ekvivalentní s pseudo-MV-algebrami, pro které je sčítání $\oplus$ komutativní: jestliže $M, \oplus$ je pseudo-MV-algebra splňující identitu $x \oplus = \oplus$, potom obě negace $-$ a $\sim$ splývají a $M, \oplus$ je MV-algebra. Jak uvidíme v následujícím příkladu, pokud splývají $-$ a $\sim$, operace $\oplus$ nemusí být nutně komutativní.

Příklad: Nechť $G, + \; <$, $\mathbf{Z}, + \; <$ jsou l-grupy. Lexikografický součin $\mathbf{Z} \vec{\times}$ je direktní součin grup uspořádaný lexikálně:

$$m, g < \quad \Leftarrow \quad (i) \; m < \text{, nebo}$$

$$(ii) \; m = \quad < .$$

Pak $\Gamma \, \mathbf{Z} \vec{\times} \quad = [\quad] \quad 1, 0$, kde

$$[\quad] \quad \geq \cup \quad \leq ,$$

je pseudo-MV-algebra, kde

$$m, g \oplus \quad = \quad + \quad \wedge \quad = + \quad + \wedge \quad ,$$

$$0, g^{-} = \quad - \quad = \; - \quad \text{a} \quad 1, g^{-} = \quad - \quad = \; - \; ,$$

$$0, g^{\sim} = - \quad + \quad = \; - \quad \text{a} \quad 1, g^{\sim} = - \quad + \quad = \; - \; ,$$

tedy operace $-$ a $\sim$ splývají, přestože $\oplus$ není komutativní, když G není komutativní.

Stejně jako MV-algebry nesou pseudo-MV-algebry přirozené svazové uspořádání:

Věta: *V pseudo-MV-algebře* $M, \oplus$ *definujme uspořádání takto:*

$$a \leq \;\Leftrightarrow\; \oplus = \;\Leftrightarrow\; \oplus = \; .$$

Pak $M, \leq$ *je ohraničený a distributivní svaz, kde:*

$$a \vee = \oplus \cdot \; = \; \cdot \oplus , \quad a \wedge = \cdot \oplus \; = \; \oplus \cdot \; .$$

Věta: *Nechť* $G, +, \vee, \wedge$ *je l-grupa,* u . *Na intervalu* $0, u$ *definujme operace* $\oplus, -, \sim$:

$$x \oplus \; = \; + \; \wedge \; ,$$
$$x^{-} \; \_ \; \_ \; , \; x^{\sim} \; \_ \; \_ \; \perp \; .$$

Potom Γ $=$ $\oplus$ *je pseudo-MV-algebra.*

Důkaz: Nechť $G, +, \vee, \wedge$ je l-grupa, u . Podobně jako v případě MV-algeber by se dokázalo, že $0, u, \oplus$ je monoid. Pro $\forall \; \in$ platí:

(*PMV1*) $x \oplus \; = \; + \; \wedge \; = \; = \; + \; \wedge \; = \; \oplus \; .$

(*PMV2*) $u^{-} \; \_ \; \_ \; - \; - \; \_ \; \perp \; - \; .$

(*PMV3*) $x^{-} \; = \; - \; - \; + \; = \; - \; + \; = \; .$

(*PMV4*) $x^{-} \oplus \; = \; - \; - \; + \; - \; \wedge \; + \; = \; - \; - \; + \; - \; \vee \; - \; + \; =$
$= \; - \; + \; - \; \vee \; - \; + \; = \; - \; + \; \vee$ a $x^{\sim} \oplus \; = \; - \; - \; + \; - \; + \; \wedge \; =$
$= \; + \; - \; + \; - \; + \; \vee \; - \; = \; - \; + \; \vee \; .$

(*PMV5*) $x \oplus \; \cdot \; = \; \oplus \; \oplus \; = \; - \; - \; + \; \wedge \; + \; \wedge \; =$
$= \; + \; - \; + \; - \; \vee \; - \; + \; \wedge \; = \; \vee \; \wedge \; = \; \vee$ a podobně $y \oplus \; \cdot \; = \; \vee \; =$
$= \; \vee \; .$ Dál $y^{-} \cdot \; \oplus \; = \; \oplus \; \oplus \; = \; - \; - \; + \; \wedge \; + \; \wedge \; =$
$= \; + \; - \; + \; - \; \vee \; - \; + \; \wedge \; = \; \vee \; \wedge \; = \; \vee \; = \; \vee$ a podobně $x^{-} \cdot \; \oplus \; =$
$= \; \vee \; .$

(*PMV6*) Využijeme rovnosti získané ve čtvrtém bodě: $x^{-} \oplus \; = \; \cdot \; =$
$= \; - \; + \; \vee$. Tedy $x^{-} \oplus \; \cdot \; = \; - \; + \; \oplus \; \vee \; = \; - \; + \; - \; + \; \wedge \; \vee$
$\vee \; = \; - \; + \; - \; + \; \wedge \; - \; + \; \vee \; = \; \wedge \; \vee \; = \; \wedge$ a podobně $y . \; \oplus \; =$
$= \; \oplus \; - \; + \; \vee \; = \; - \; + \; \wedge \; - \; + \; \vee \; = \; \wedge \; \vee \; = \; \wedge \; = \; \wedge \; .$ $\square$

Poznámka: *A. Dvurečenskij* dokázal v [7], že pro každou pseudo-MV-algebru $M, \oplus$ existuje l-grupa $G, +, \vee, \wedge$ a kladný prvek u tak, že M je izomorfní s Γ z předchozí věty.

Vraťme se k příkladům 5 a 6 z druhé části:

Příklad: Nechť $G = (\mathbf{Z}, +, \leq)$ je l-grupa z příkladu 5, $(1,1,1) \in$. Na intervalu

$\geq \cup$ $\leq$ definujme operace takto:

$$k, m, n \oplus \; = \; + \; \wedge ,$$

$$k, m, n^{-} = \; - \; ,$$

$$k, m, n^{\sim} = - \; + \; .$$

Potom $\Gamma \; = \; (1,1)$ je pseudo-MV-algebra.

Příklad: Nechť $G, \cdot, <$ je l-grupa z příkladu 6, . Na intervalu

definujme operace takto:

Potom Γ je pseudo-MV-algebra.

4 Pseudo-ŁBCK-algebry

Dlouho byly studovány také BCK-algebry (souhrn teorie BCK-algeber je možné najít v [9]). Zde budeme uvažovat komutativní BCK-algebry s relativním krácením, označené jako Łukasiewiczovy BCK-algebry (ŁBCK-algebry). ŁBCK-algebry existují i v nekomutativní formě: pseudo-ŁBCK-algebry, které studovali *A. Dvurečenskij* a *T. Vetterlein* [10].

ŁBCK-algebra je struktura $E,<*$, kde $E,<$ je uspořádaná množina s nejmenším prvkem 0 a $*$ je binární operace taková, že pro všechna $a,b,c \in$:

(*ŁB1*) $a<$ $\rightarrow$ $* -$,

(*ŁB2*) $a*$ $*$ $=$ $*$ $*$,

(*ŁB3*) $a*$ $*$ $=$ $*$ $*$,

(*ŁB4*) $c<$ $*$ $=$ $*$ $\rightarrow$ $=$ (relativní krácení).

Struktura $E,<\lhd\rhd$, kde $E,<$ je uspořádaná množina s nejmenším prvkem 0 a $\lhd$, $\rhd$ jsou binární operace, se nazývá *pseudo-ŁBCK-algebra*, jestliže pro všechna $a,b,c \in$ platí:

(*PŁB1*) $a<$ $\rightarrow$ $\lhd$ $\rhd$,

(*PŁB2*) $a\lhd$ $\rhd$ $\lhd$ $\rhd$ a $a\rhd$ $\lhd$ $\rhd$ $\lhd$,

(*PŁB3*) $a\lhd$ $\rhd$ $\rhd$ $\lhd$,

(*PŁB4*) jestliže $c<$, pak z $a\lhd$ $\lhd$ nebo $a\rhd$ $\rhd$ vyplývá, že $a=$ (relativní krácení).

Vlastnosti pseudo-ŁBCK-algeber:

Nechť $E,<\lhd\rhd$ *je pseudo-ŁBCK-algebra. Pak pro všechna* $a,b,c \in$ *platí:*

(*PŁB i*) $a\lhd$ $\rhd$ *a* $a\lhd$ $\rhd$.

(*PŁB ii*) $E,<$ *je dolní polosvaz, kde* $a\wedge = \lhd$ $\rhd$ $\rhd$ $\lhd$. *Navíc* $a\lhd$ $\lhd$ *a* $a\rhd$ $\rhd$.

(*PŁB iii*) *Jestliže* $a<$ *, pak* $a\lhd$ $\lhd$ *a* $a\rhd$ $\rhd$. *Předpokládejme, že* $c<$ *. Jestliže* $a\lhd$ $\lhd$ *nebo* $a\rhd$ $\rhd$ *, pak* $a<$.

(*PŁB iv*) *Jestliže* $a<$ *, pak* $c\lhd$ $\lhd$ *a* $c\rhd$ $\rhd$ *. Navíc* $a\lhd$ $\rhd$.

(*PŁB v*) $a\lhd$ *, právě když* $a\rhd$.

(*PŁB vi*) $a\lhd$ $\lhd$ $\lhd$ $\lhd$ $\lhd$ *a* $a\rhd$ $\rhd$ $\rhd$ $\rhd$ $\rhd$.

Pseudo-ŁBCK-algebry splývají s Bosbachovými kuželovými algebrami [8].

Kuželová algebra je algebra $E, \lhd, \rhd$, kde $\lhd$ a $\rhd$ jsou binární operace takové, že pro všechna $a, b, c \in$ platí:

(*CA1*) $c \lhd \lhd \lhd \quad \lhd \lhd \lhd$ a $c \rhd \rhd \rhd \quad \rhd \rhd \rhd$,

(*CA2*) $a \lhd \rhd \quad \rhd \lhd$,

(*CA3*) $a \lhd \rhd \quad \rhd \lhd$,

(*CA4*) $a \lhd \quad \rhd$ a $a \lhd \quad \rhd$.

Lemma: *Nechť* $E, \lhd, \rhd$ *je kuželová algebra. Definujme relaci:*

$$a \le \quad \lhd \qquad \textit{pro } a, b \in .$$

Relace $\le$ *je uspořádání na* E.

Důkaz: (*reflexivita*) $x \lhd$.

Platí $0 \lhd \quad \lhd \lhd \lhd \overset{(CA1)}{} \lhd \lhd \lhd \overset{(CA4)}{}$. Dále $x \lhd$ implikuje $x \rhd \lhd \quad \rhd$. Ale podle (*CA3*) $x \rhd \lhd \quad \lhd \rhd$. Z toho vyplývá, že $x \rhd \quad \lhd \rhd \rhd \overset{(CA2)}{} \rhd \lhd \rhd \quad \lhd \rhd$. Platí tedy, že

$$x \lhd \qquad \rhd .$$

(*antisymetrie*) $x \le \quad \le \Rightarrow = \lhd \quad \lhd \rhd \overset{(CA3)}{} \rhd \lhd \quad \rhd$.

(*tranzitivita*) Nechť $z \le \quad \le$. Platí $z \lhd \lhd \lhd \overset{(CA1)}{} \lhd \lhd \lhd$. Z předpokladu ale vyplývá, že $z \lhd \lhd \lhd \quad \lhd \lhd \quad \lhd$ a $z \lhd \le \lhd \lhd \quad \lhd \lhd$. Dohromady $z \lhd$, což znamená $z \le$.

Relace $\le$ je tedy uspořádání na E, 0 je nejmenší prvek. $\square$

Věta: *Nechť* $E, \le, \lhd, \rhd$ *je pseudo-ŁBCK-algebra. Potom* $E, \lhd, \rhd$ *je kuželová algebra s uspořádáním* $\le$. *Naopak, mějme kuželovou algebru* $E, \lhd, \rhd$ *s uspořádáním* $\le$:

$$x \le \Leftrightarrow \lhd \qquad \rhd .$$

Pak $E, \le, \lhd, \rhd$ *je pseudo-ŁBCK-algebra.*

Důkaz: Nechť $E, \le, \lhd, \rhd$ je pseudo-ŁBCK-algebra. Platí:

(*CA1*) $c \lhd \lhd \lhd \quad \lhd \quad \lhd \quad \lhd \quad \lhd \quad \lhd <$ $\lhd \lhd$ a podobně $c \rhd \rhd \rhd \quad \rhd \rhd \rhd$.

(*CA2*) Shoduje se s (*PŁB3*).

(*CA3*) $a \lhd \rhd \quad \lhd \rhd \quad \rhd \lhd$.

(*CA4*) Shoduje se s (*PŁB i*).

Tedy E je kuželová algebra, jejíž uspořádání je podle (*PŁB1*) shodné s $\leq$.

Nechť E je kuželová algebra s uspořádáním $\leq$. Platí:

(*PŁB1*) Uspořádání $\leq$ v kuželové algebře je definováno stejně jako uspořádání v pseudo-ŁBCK-algebře.

(*PŁB2*) $x \rhd \lhd \quad \lhd \rhd \quad \rhd$ (a stejně $x \lhd$). Podle (*CA1*) $z < \longrightarrow \lhd \quad \lhd \quad \rhd \quad \rhd$. Z $x <$ plyne, že $z \lhd \lhd \lhd$ $= \lhd$, ale $z \lhd \lhd \lhd \quad \lhd$, tedy $z \lhd \quad \lhd$ (a stejně $z \rhd \quad \rhd$). Dále $x \rhd \lhd \quad \lhd \rhd$. Když $z <$, pak $z = \lhd \quad \lhd \rhd$ $= \rhd \lhd \quad \rhd \lhd$ (protože $z < \longrightarrow \lhd \quad \lhd$). Proto $x \rhd \lhd$ $=$. Ale $x \wedge = \wedge$, celkem tedy $x \rhd \lhd \quad \rhd \lhd$ a $x \lhd \rhd$ $= \lhd \rhd$.

(*PŁB3*) Shoduje se s (*CA2*).

(*PŁB4*) Mějme $a, b, c \in$ taková, že $c <$ a $a \lhd \quad \lhd$. Potom podle (*CA1*) a (*CA4*) dostaneme $0 = \lhd \lhd \lhd \quad \lhd \lhd \lhd \quad \lhd \lhd \quad \lhd$, tedy $a <$. Podobně získáme $0 = \lhd \lhd \lhd \quad \lhd \lhd \lhd \quad \lhd \lhd \quad \lhd$, tedy $b <$. Dohromady $a =$. Druhou část (*PŁB4*) ověříme analogicky. $\square$

Věta: *Nechť* $E, <, \lhd, \rhd$ *je pseudo-ŁBCK-algebra. Jestliže* $\lhd \quad \rhd$*, pak* $E, <, *$*, kde* $* = \lhd \quad \rhd$*, je ŁBCK-algebra. Naopak, mějme ŁBCK-algebru* $E, <, *$*. Potom* $E, <, *, *$ *je pseudo-ŁBCK-algebra.*

Věta: *Každou pseudo-ŁBCK-algebru* $E, <, \lhd, \rhd$ *lze izomorfně vnořit do kladného kuželu* G^+ *některé l-grupy* G *tak, že konečná infima zůstanou zachována. Za předpokladu, že* $E \subseteq$*, uspořádání* $\leq$ *na* E *je restrikcí uspořádání na grupě* G *na podmnožinu* E*,* 0 *je neutrální prvek grupy* G *a* $\lhd, \rhd$ *jsou definovány:*

$$a \lhd \quad \wedge = - \vee,$$

$a_{\triangleright}$ ' $\wedge + = - + \vee$.

Navíc můžeme předpokládat, že $Ł$ je konvexní podmnožina G^{+}. Když je $Ł$ ŁBCK-algebra (tj. $\swarrow$ $\nwarrow$), pak G je komutativní.

Opět se podívejme na příklady 5 a 6 ze druhé části:

Příklad: Nechť $G = \mathbf{Z}$ $+ \leq$ je *l*-grupa z příkladu 5. Pak G^{+}, $\triangleleft \triangleright$ je kuželová algebra, kde operace $\swarrow$ a $\nwarrow$ jsou definovány takto:

$$k_1, m_1, n_1 \triangleleft ' \quad n_2 = \quad - \quad \vee \quad ,$$
$$k_1, m_1, n_1 \triangleright ' \quad n_2 = - \quad + \quad \vee \quad .$$

Příklad: Nechť $G, \cdot, <$ je *l*-grupa z příkladu 6. Pak $(\quad \triangleleft \triangleright \quad)$ je kuželová algebra, kde operace $\swarrow$ a $\nwarrow$ jsou definovány takto:

$$(\quad) \triangleleft (\quad) \quad (\quad) (\quad) (\quad) (\quad) ,$$
$$(\quad) \triangleright (\quad) \quad (\quad) (\quad) (\quad) (\quad) .$$

Lemma: *Nechť $A, <, \triangleleft \triangleright$ je ohraničená pseudo-ŁBCK-algebra. Potom platí:*

$$1_{\triangleright} \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleright \triangleright \triangleright .$$

Důkaz: Označme $A = \triangleright \triangleleft \triangleleft \triangleleft$ a $B = \triangleleft \triangleright \triangleright \triangleright$. Nejprve $1_{\triangleleft}$ $\triangleleft \triangleleft \triangleleft$. Dál $1_{\triangleleft} \triangleleft \triangleright \triangleleft \triangleleft \overset{(CA2)}{}$ $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleright \triangleright \triangleleft$, tedy $1_{\triangleleft} \triangleleft \triangleright \triangleleft$. Odtud $A_{\triangleleft} \triangleleft \triangleright \triangleleft \triangleleft <$ $\overset{(CA2)}{\triangleleft}$ $\triangleleft \triangleright \triangleleft \triangleleft \overset{(CA2)}{}$ $\triangleleft \triangleleft \triangleright \triangleleft$. Tedy $A_{\triangleleft} \triangleright \overset{(CA2)}{}$ $\overset{(PŁBv)}{=} \triangleright \triangleleft$, což je podle (*PŁB v*) ekvivalentní s $A_{\triangleright} \triangleright$. Proto $1_{\triangleright} \triangleright \triangleleft \triangleright \triangleleft \triangleright \triangleright \triangleright \triangleright \triangleright$. Odtud $1_{\triangleright} \triangleright \triangleright$ $\nwarrow$ $\nwarrow$ a odtud podle (*PŁB* iv) plyne $B = \triangleleft \triangleright \triangleright \triangleright \triangleleft \triangleright$. Podobně by se dokázalo, že $B \swarrow$. Dohromady tedy $A =$. □

Poznámka: Vezmeme-li $y =$, máme: $1 \lhd \rhd \rhd \rhd \lhd \lhd$.

Věta: *Nechť* $A, <, \lhd, \rhd$ *je ohraničená pseudo-ŁBCK-algebra. Definujme operace* $\oplus$, $^-$, $^\sim$ *takto:*

$$x \oplus = \rhd \lhd \lhd ,$$
$$x^- = \lhd , \quad x^\sim = \rhd .$$

Potom $A, \oplus$ *je pseudo-MV-algebra.*

Důkaz: Nechť $x, y \in$. Podle předchozího lemmatu platí $x \oplus \oplus = < \lhd \rhd \rhd \lhd \rhd \lhd \rhd \rhd \rhd \lhd \rhd \rhd \rhd$ a stejně $x \oplus \oplus = \rhd \lhd \lhd \lhd \lhd \rhd \rhd \rhd$. Dál platí $x \oplus =$ $\rhd \rhd \lhd \lhd$ a podobně $0 \oplus =$. Celkem tedy $A, \oplus$ je monoid.

(*PMV1*) $x \oplus = \rhd \lhd \lhd \rhd \lhd$ a $1 \oplus = \rhd \lhd \lhd$ $\overset{(PLB1)}{}$ (protože $1 \lhd$).

(*PMV2*) $1^- = \lhd \rhd$.

(*PMV3*) $x^- = \rhd \lhd \overset{(PLB2)}{} \rhd \lhd$.

(*PMV4*) $x^- \oplus = \rhd \lhd \rhd \lhd \rhd \lhd \rhd \lhd$ a stejně $x^\sim \oplus = \lhd \rhd \lhd \rhd \lhd \rhd \lhd \rhd$. Dál platí $x \rhd \lhd = \lhd \rhd \rhd \lhd \rhd \lhd \lhd \rhd \lhd \rhd$, celkem tedy $x^- \oplus = = \oplus = \cdot$.

(*PMV5*) Dle předchozího bodu platí $y \cdot = \lhd \rhd \rhd \lhd \rhd \overset{(PLB3)}{} = \lhd \rhd \rhd \rhd$, podobně $x \cdot = \rhd$, $y^- \cdot = \lhd$, $x^- \cdot = \lhd$. Tedy $y^- \cdot \oplus = \lhd \rhd \lhd \lhd \lhd \overset{(CA1)}{} \rhd \lhd \lhd \lhd \lhd \oplus = \cdot \oplus = \vee$. Stejně $x \oplus \cdot = \oplus \rhd \lhd \rhd \rhd \rhd \overset{(CA1)}{} = \lhd \rhd \rhd \rhd \rhd \cdot = \vee$. Dohromady $x \oplus \cdot = = \oplus \cdot = \cdot \oplus = \cdot \oplus$.

(*PMV6*) $x^{-} \oplus \cdot = \triangleleft \; \triangleright \; \triangleleft \; \triangleright \qquad \triangleleft \; \triangleright \; \triangleleft \; \triangleright$

$= \triangleleft \; \triangleright \quad \backslash$ a stejně $y. \; \oplus \; = \cdot \; \triangleright \; \triangleleft \; \triangleright \; \triangleleft \; \triangleright \; \triangleleft \; <$
$\triangleleft \; \triangleright \quad \triangleleft \; \triangleright \; \triangleright \; \triangleleft \; \triangleright \; \triangleleft \quad .$ $\sqcap$

Důsledek: *Nechť* $A_{<\triangleleft\triangleright}$ *je pseudo-ŁBCK-algebra,* $a_{\subset}$. *Pak algebra* $0,a,_{\oplus} \quad 0,a$ *je pseudo-MV-algebra, kde:*

$$x_{\oplus} = \triangleleft \; \triangleright \; \triangleright \quad \triangleright \; \triangleleft \; \triangleleft \; ,$$
$$x^{-} \_ \triangleleft \, , \; x^{a} \_ \triangleright \, .$$

Důkaz: $a_{\triangleleft}$, $a_{\triangleright}$, tedy $a_{\triangleleft} \; \triangleright$ a interval $0,a$ je uzavřen na obě operace $\swarrow$, $\searrow$. Zbytek plyne z předchozí věty. $\sqcap$

Věta: *Nechť* $A,_{\oplus}$ *je pseudo-MV-algebra. Pak* $A,_{<\triangleleft\triangleright}$ *je pseudo-ŁBCK-algebra, kde:*

$$x_{\triangleleft} \quad \oplus = \cdot \, ,$$
$$x_{\triangleright} \quad \oplus = \cdot \, .$$

Důkaz: Víme, že $A,_{<}$ je svaz s 0. Pak pro všechna $a,b,c_{\subset}$ platí:

(*PŁB1*) $a_{\leq} \Rightarrow \oplus = \Rightarrow = \oplus = \triangleright$, $a_{\triangleright} \quad \triangleright$
$= \oplus = \oplus \Rightarrow \leq$. Celkem $a_{<} \quad \triangleright$ (a analogicky $a_{<}$ $\quad \triangleleft$).

(*PŁB2*) $a_{\triangleleft} \; \triangleright \quad \triangleright \quad \oplus \cdot = \oplus \cdot = \wedge = \wedge =$
$= \oplus \cdot = \oplus \cdot = \triangleright \quad \triangleleft \; \triangleright$ (analogicky $a_{\triangleright} \; \triangleleft \quad \triangleright$
$\triangleright \; \triangleleft$).

(*PŁB3*) $a_{\triangleleft} \; \triangleright \quad \triangleleft \quad . \; .$. Protože operace je asociativní, platí: $t^{-} . \; . = . \; . = . \; \triangleright \quad \triangleright \; \triangleleft$. Tedy $a_{\triangleleft} \; \triangleright \quad \triangleright \; \triangleleft$.

(*PŁB4*) Nechť $c_{<}$ a $a_{\triangleleft} \quad \triangleleft$. Pak $c^{-} . = . \Rightarrow . \oplus =$
$= . \oplus$. Ale $c^{-} . \oplus = \vee =$ a $c^{-} . \oplus = \vee =$. Z toho vyplývá, že $a_{=}$. Analogicky $c_{<} \quad \triangleright \quad \triangleright \quad =$. $\sqcap$

5 GPD-posety

Zobecněné pseudo-D-posety (GPD-posety) studovali *A. Dvurečenskij* a *T. Vetterlein* [10]. GPD-posety mají dvě parciální rozdílové operace; pokud se tyto operace shodují, přecházejí GPD-posety v zobecněné D-posety (GD-posety).

Zobecněný D-poset je systém $E, < \_$, kde $E, <$ je uspořádaná množina s nejmenším prvkem 0 a parciální binární operací takovou, že $b \_$ je definováno pro $a, b \in$, právě když $a <$, a pro libovolná $a, b, c \in$ platí:

(*GD1*) jestliže $a <$, pak $b \_ <$ a $b \_ \_ =$,

(*GD2*) jestliže $a < <$, pak $c \_ < \_$ a $c \_ \_ \_ = \_$,

(*GD3*) jestliže $a <$, pak z $b \_ \_ \_$ vyplývá, že $b \_$.

Systém $E, <$, kde $E, <$ je uspořádaná množina s nejmenším prvkem 0 a $/, \backslash$ jsou parciální binární operace takové, že pro $a, b \in$ je b/a definováno, právě když je definováno $b \backslash a$, a to je definováno, právě když $a <$, se nazývá *zobecněný pseudo-D-poset*, jestliže pro všechna $a, b, c \in$ platí:

(*GPD1*) jestliže $a <$, pak $b/a, b \backslash a <$ a platí: $b \backslash b/a =$, $b / b \backslash a =$,

(*GPD2*) jestliže $a < <$, pak $c/b <$ a $c \backslash b <$ a platí: $c/a \backslash c/b =$,
$c \backslash a / c \backslash b =$,

(*GPD3*) jestliže $c <$, pak z $a/c \_$ nebo $a \backslash c \_$ vyplývá, že $a \_$.

Příklad: Nechť G je uspořádaná grupa a G_0 je podmnožina $G+$ taková, že pro všechna $a, b \in$, kde $b <$, také $a \_ \_ + \in$. Potom $G_0, <$ je GPD-poset, kde $<$ je uspořádání na grupě, 0 je neutrální prvek grupy a pro všechna $a, b \in$ taková, že $b <$, definujeme operace $/, \backslash$ takto: $a/b \_ \_$, $a \backslash b \_ \_ \perp$.

Vlastnosti GPD-posetů:

Nechť $E, <$ *je GPD-poset. Pak pro všechna* $a, b, c \in$ *platí:*

(*GPD i*) $a/a \_ \_$ *a* $a/0 \_ \_$,

(*GPD ii*) *jestliže* $a < <$, *pak* $b/a <$ *a* $b \backslash a <$ *a platí:* $c/a /$
$/ b/a =$, $c \backslash a \backslash b \backslash a =$,

(*GPD iii*) *jestliže* $a, b <$, *pak z* $c/a \_$ *nebo* $c \backslash a \_$ *vyplývá, že* $a \_$.

Důkaz: 0 je nejmenší prvek. Z (*GPD1*) a (*GPD2*) dostaneme $0 =$ $>$, a tedy $a/a =$. Podobně se ukáže, že $a\backslash a =$. První část (*i*) je tedy dokázána.

Nechť $a, b <$ a $c/a =$. Pak z (*GPD1*) plyne $a =$ $=$ $=$. Tedy první část (*iii*) je dokázána a podobně dokážeme druhou část.

Z první části (*i*) a (*GPD1*) dostáváme $a\backslash a = =$), takže z (*iii*) plyne $a =$ a podobně $a =$. Tedy (*i*) je dokázáno.

Nechť $a < <$. Podle (*GPD2*) platí $b/a =$ $<$. Z (*GPD1*) a (*GPD2*) máme $c/b =$ $=$. První část (*ii*) je tedy dokázána a podobně se dokáže druhá část. $\square$

Věta: *Nechť* $E, <$ *je GPD-poset. Jestliže* $/ =$ *, pak* $= =$ *a* $E, <, =$ *je GD-poset. Naopak, nechť* $E, <, =$ *je GD-poset. Potom* $E, <, = =$ *je GPD-poset.*

Věta: *Nechť* $E, <$ *je GPD-poset, který splňuje následující podmínku:*

(*) $E, <$ *je dolní polosvaz a pro všechna* $a, b, c \in$ *z toho, že* $a <$ *, vyplývá:*

$$a/\, a \wedge\ <\ \wedge \quad a \quad a\backslash\, a \wedge\ <\ \wedge\ .$$

Potom E *lze izomorfně vnořit do kladného kuželu* G^+ *některé l-grupy* G *tak, že konečná infima zůstanou zachována. Za předpokladu, že* $E \subset$ *, uspořádání* $<$ *na* E *je restrikcí uspořádání na grupě* G *na podmnožinu* E*,* 0 *je neutrální prvek grupy* G *a parciální operace* $/$*,* $\backslash$ *jsou definovány:*

$$a/b = \;\_\;,\quad a\backslash b = \;\_\;\perp,\quad \text{pro } a > .$$

Jak bude níže ukázáno, jistou podtřídu GPD-posetů lze ztotožnit s pseudo-ŁBCK-algebrami. Skutečně, parciální rozdílové operace libovolného GPD-posetu, jenž je dolním polosvazem, mohou být rozšířeny na totální operace; pro každé dva prvky definujme nové rozdíly pomocí původních tak, že od prvního prvku odečteme infimum prvního a druhého prvku. Za předpokladu, že totální rozdílové operace jsou monotónní v první složce (viz podmínka (*)), dostaneme přesně pseudo-ŁBCK-algebry. Podobně můžeme prezentovat komutativní verzi, tj. ŁBCK-algebry.

Věta: *Nechť* $E, <, \triangleleft, \triangleright$ *je pseudo-ŁBCK-algebra. Mějme* $/$*,* $\backslash$ *parciální operace na* E *takové, že pro* $a, b \in$ *,* b/a *je definováno, právě když je definováno* $b\backslash a$ *a to je definováno, pokud* $a <$ *; pak platí:*

$$b/a\_ \lhd \; , \; b\backslash a\_ \rhd \; .$$

Potom $E, <$ *je GPD-poset splňující* (*). *Navíc:*

$$b \lhd \quad \wedge \; , \; b \rhd \quad \wedge \; .$$

Důkaz: Podle předpokladu $E, <$ je uspořádaná množina s nejmenším prvkem 0.

Jestliže $a <$, pak podle (*PŁB iv*) platí $b/a\_ \lhd$; tedy podle (*PŁB ii*) $b\backslash b/a = \rhd \lhd \quad \backslash =$. Druhá část (*GPD1*) se ukáže analogicky.

Předpokládejme, že $a < <$. Potom podle (*PŁB iv*) $c \lhd \quad \lhd$, tedy $c/b <$ a $c/a \backslash c/b = \lhd \rhd \lhd \quad \rhd \lhd \lhd \quad \lhd$ $\_ \lhd$. Druhá část (*GPD2*) se dokáže analogicky.

Mějme $a <$ a $b/a\_$. Pak $b \lhd \quad \lhd$ a podle (*PŁB4*) dostáváme $b\_$. Druhá část (*GPD3*) se dokáže analogicky.

Nakonec, pro libovolné $a,b \in$ dle (*PŁB ii*) platí $a \lhd \quad \lhd$ $= \quad \wedge$. Analogicky se dokáže $b \rhd \quad \wedge$.

Podle (*PŁB ii*) je $E, <$ dolní polosvaz, což je první část podmínky (*). Pro $a,b,c \in$ z předchozího vyplývá, že je-li $a <$, pak $a \lhd \quad \lhd$ a $a \rhd \quad \rhd$, čímž je splněna (*). $\square$

Věta: *Nechť* $E, <$ *je GPD-poset splňující* (*). *Definujme pro libovolné* $a,b \in$:

$$b \lhd \quad \wedge \; , \; b \rhd \quad \wedge \; .$$

Potom $E, <, \lhd, \rhd$ *je pseudo-ŁBCK-algebra.*

Vztah mezi pseudo-ŁBCK-algebrami a GPD-posety lze snadno aplikovat i na komutativní případ. Evidentně můžeme ztotožnit ŁBCK-algebry s těmi GD-posety $E, <, \_$, ve kterých existují konečná infima. Na základě této podmínky můžeme definovat $a * = \_ \wedge$ pro $a,b \in$ a $a <$ implikuje $a * < *$ pro libovolná $a,b,c \in$.

Poznamenejme, že poslední podmínku můžeme nahradit následující: pro všechna $a,b,c \in$, $a * \; * = * \; *$.

Použitá literatura:

[1] C. C. Chang, *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 467-490.

[2] C. C. Chang, *A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 74-80.

[3] D. Mundici, *Interpretation of AFC^*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus*, J. Funct. Anal. 65 (1986), 15-63.

[4] D. Mundici, *MV-algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK-algebras*, Math. Japon. 31 (1986), 889-894.

[5] G. Georgescu a A. Iorgulescu, *Pseudo-MV-algebras*, Mult.-Valued Log. 6 (2001), 95-135.

[6] J. Rachůnek, *A non-commutative generalization of MV-algebras*, Czechoslovak Math. J. 52 (2002), 255-273.

[7] A. Dvurečenskij, *Pseudo-MV-algebras are intervals in l-groups*, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 70 (2002), 427-445.

[8] B. Bosbach, *Concerning cone algebras*, Algebra Universalis 15 (1982), 58-66.

[9] Y. B. Jun a J. Meng, *BCK-algebras*, Kyung Moon Sa Co., Seoul (1994).

[10] A. Dvurečenskij a T. Vetterlein, *Algebras in the positive cone of po-groups*, Order 19 (2002), 127-146.

[11] A. M. W. Glass, *Partially Ordered Groups*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong (1999).

[12] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D´Ottaviano a D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000).

[13] M. Anderson a T. Feil, *Lattice-Ordered Groups (An Introduction)*, D. Reidel, Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo (1988).