



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

ÚSTAV INFORMATIKY

INSTITUTE OF INFORMATICS

MODELY ÚROKOVÝCH MĚR

INTEREST RATE MODELS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ivana Butkovičová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav informatiky
Studentka: **Ivana Butkovičová**
Studijní program: Kvantitativní metody v ekonomice
Studijní obor: Matematické metody v ekonomice
Vedoucí práce: **RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně zadává bakalářskou práci s názvem:

Modely úrokových měr

Charakteristika problematiky úkolu:

Úvod
Vymezení problému a cíle práce
Teoretická východiska práce
Analýza problému a současné situace
Vlastní návrhy řešení, přínos návrhů řešení
Závěr
Seznam použité literatury
Přílohy

Cíle, kterých má být dosaženo:

Cílem práce je popsat základní vlastnosti nejznámějších modelů úrokových měr a porovnat je navzájem mezi sebou. Práce je zaměřena zejména na Vašíčkův, CIR, Ho-Lee, Hull-White modely, které jsou zadány stochastickou diferenciální rovnicí, a na jejich kalibraci. Je rovněž provedena analýza úrokové sazby LIBOR. Praktická aplikace využívá veřejnou databázi, která je součástí servisu České národní banky.

Základní literární prameny:

CIPRA, Tomáš. Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. 3. vyd. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.

CHVÁTALOVÁ, Zuzana a Jiří HŘEBÍČEK. Optimization of Portfolio with Maple. In Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Finance, Accounting and Auditing (FAA 12). 1. vyd. Zlín: WSEAS Press, 2012. ISBN 978-1-61804-124-1.

MÁLEK, Jiří. Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty. 1. vyd. Praha: Ekopress, 2005. ISBN 80-86119-97-1.

ŠEVČOVIČ, Daniel, Beáta STEHLÍKOVÁ a Karol MIKULA. Analytické a numerické metody oceňovania finančných derivátov. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3.

ZMEŠKAL, Zdeněk, Dana DLUHOŠOVÁ a Tomáš TICHÝ. Finanční modely: koncepty, metody, aplikace. 3. přeprac. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-91-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18.

V Brně, dne 28. 2. 2018



doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.
ředitel



doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D.
děkan

Abstrakt

Táto bakalárska práca je zameraná na popis modelov úrokových mier, ktoré majú uplatnenie v oblasti finančnej matematiky. Konkrétne popisuje Vašíčkov model, Cox-Ingersoll-Rossov model, Ho-Lee model a model Hull-White. Tieto modely sú zadané stochastickými diferenciálnymi rovnicami. Teoretická časť tiež definuje základné pojmy stochastického kalkulusu. Všetky vyššie uvedené modely sú aj kalibrované. Taktiež je v práci popísaná spotová a forwardová medzibanková úroková miera LIBOR. Praktickou aplikáciou konkrétnych dát, ktoré sú dostupné vo verejnej databáze Českej národnej banky, je docielená simulácia Vašíčkovho modelu a modelu Cox-Ingersoll-Ross. Obdržané výsledky sú interpretované.

Abstract

This bachelor's thesis focuses on a description of the interest rate models that are applied in the sphere of financial mathematics. Furthermore, it specifically describes the Vašíček model, Cox-Ingersoll-Ross model, Ho-Lee model and Hull-White model. These models are given by the stochastic differential equations. The main terms of the Stochastic Calculus are described in the theoretical part of the thesis. All the above models are also calibrated. Moreover, the spot and forward interbank interest rate—LIBOR is described in the thesis. By applying specific data, that are available in the public database of the Czech National Bank, we have simulated the Vašíček and Cox-Ingersoll-Ross models. The obtained results are interpreted.

Kľúčové slová

CIR model, Ho-Lee model, Hull-White model, kalibrácia, LIBOR, Vašíčkov model, úrokové miery

Key words

CIR model, Ho-Lee model, Hull-White model, calibration, LIBOR, Vašíček model, interest rates

Bibliografická citácia

BUTKOVIČOVÁ, I. *Modely úrokových měr*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2018.64 . Vedoucí bakalářské práce RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že předložená bakalářská práce je původní a zpracovala jsem ji samostatně. Prohlašuji, že citace použitých pramenů je úplná, že jsem ve své práci neporušila autorská práva (ve smyslu Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském a o právech souvisejících s právem autorským).

V Brně dne 20. května 2018

.....

podpis

Obsah

ÚVOD	6
CIEĽ PRÁCE, MÉTÓDY A POSTUP SPRACOVANIA	7
1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRÁCE	8
1.1 Úroková miera	8
1.1.1 Časová hodnota peňazí	8
1.1.2 Časová štruktúra spotovej úrokovej miery	8
1.1.3 Časová štruktúra forwardovej úrokovej miery	9
1.1.4 Proces výnosových kriviek.....	11
1.1.5 Stochastický kalkulus a teória pravdepodobnosti.....	12
1.2 Deriváty úrokovej miery	18
1.3 Životné poistenie.....	19
2 ANALÝZA SÚČASNÉHO STAVU	21
2.1 Fungovanie modelov.....	22
2.2 Krátkodobé modely.....	23
2.2.1 Vašíčkov model	23
2.2.2 Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR)	27
2.2.3 Ho-Lee model	31
2.2.4 Hull-White model	33
2.3 Kalibrácia modelov	34
2.3.1 Kalibrácia Vašíčkovho a CIR modelu.....	35
2.3.2 Kalibrácia Hull-White modelu	36
2.3.3 Kalibrácia Ho-Lee modelu	37
2.4 Medzibankové úrokové miery	38
2.4.1 Spotový LIBOR.....	39
2.4.2 Forwardový LIBOR.....	39
3 VLASTNÉ NÁVRHY RIEŠENIA.....	41
3.1 Kolmogorov-Smirnovova štatistika.....	41
3.2 Dáta.....	42
3.3 Eulerova metóda - simulácia.....	43

3.4 Výsledky	43
3.5 Simulácia Vašíčkovho model	44
3.6 Simulácia CIR modelu	47
3.7 Porovnanie modelov	52
3.8 Návrh zlepšenia.....	52
ZÁVER	53
ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV	55
ZOZNAM POUŽITÝCH OBRÁZKOV	57
ZOZNAM POUŽITÝCH GRAFOV	58
ZOZNAM POUŽITÝCH TABULIEK.....	59
ZOZNAM PRÍLOH.....	60

ÚVOD

V súčasnej dobe je v oblasti riadenia finančných rizík, riadenia aktív a portfólio managementu nutné zvládnuť pokročilé matematické metódy, ktoré sa stávajú neoddeliteľnou súčasťou moderných financií. Efektívne riadenie úrokového rizika je v dnešnej dobe významné pre strategických investorov s veľmi dlhým investičným horizontom, akými sú hlavne poisťovne. Vďaka mimoriadnemu technickému pokroku došlo k značnému zníženiu časovej náročnosti výpočtov úrokových mier. K dispozícii máme stochastické metódy k modelovaniu úrokových mier, mier úmrtností, ako aj ďalších výpočtových predpokladov, ktoré sú potrebné pri oceňovaní záväzkov. Od výšky záväzkov voči klientom sa odvíja hodnota technických rezerv, ktoré musia mať inštitúcie k dispozícii, aby ich boli schopné plniť.

Táto práca sa venuje problému stochastického modelovania úrokových mier. Je rozdelená na dve časti: teoretickú a praktickú. Teoretická časť obsahuje tri kapitoly, ktoré na seba nadväzujú a postupne zoznamujú čitateľa s nutnými pojmami a matematickými aparátmi, ktoré sa neskôr využívajú v praktickej časti. Práca sa zaoberá hlavne Vašíčkovím, CIR, Ho-Lee, Hull-White modelom, ktoré sú zadané stochastickou diferenciálnou rovnicou a ich kalibráciou. Záver je zameraný na analýzu úrokovej sadzby LIBOR.

Praktická časť obsahuje aplikáciu niektorých vybraných modelov popísané v predchádzajúcej časti, na reálne dáta úrokovej sadzby PRIBOR, ktoré boli získané z verejnej databázy Českej národnej banky.

CIEĽ PRÁCE, MÉTÓDY A POSTUP SPRACOVANIA

Hlavným cieľom práce je popísať vlastnosti modelov úrokových mier.

Aby bol splnený hlavný cieľ práce, je treba na začiatku definovať základné matematické a ekonomické pojmy, ktoré sú potrebné pre pochopenie tejto práce. Bude popísaná časová štruktúra forwardovej a spotovej úrokovej miery, tvar výnosovej krivky, ako aj niektoré deriváty úrokových mier. Keďže úrokové sadzby majú široké využitie v životnom poistení, uvedieme jeho základné delenie.

Aby nám modely správne fungovali, musíme zaistiť všeobecnú rovnováhu nesmie nastať možnosť arbitráže, a zároveň modely musia byť spojité v čase. Pomocou stochastických diferenciálnych rovníc, ktorými sú modely Vašíčkov, CIR, Ho-Lee a Hull-Whiteov zadané, popíšeme základné vlastnosti úrokových mier a následne vykonáme aj ich kalibráciu. Prostredníctvom forwardových a spotových úrokových mier si popíšeme jednu z najznámejších úrokových sadzieb, ktorou je LIBOR.

Nakoniec pomocou Excelu a matematického programu Matlab niektoré vybrané modely nasimulujeme a následne porovnáme medzi sebou. K tomu využijeme verejnú databázu Českej národnej banky ARAD. Všetky použité materiály sú uvedené v zdrojoch.

1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRÁCE

1.1 Úroková miera

V tejto kapitole sa budeme zaoberať základnými pojmami, s ktorými sa môžeme stretnúť pri skúmaní problematiky modelovania úrokových mier. Zameriame sa na vysvetlenie pojmov, ako sú časová hodnota peňazí a úroková miera, diskontovanie, výnosová krivka, bezrizikový bezkupónový dlhopis, vysvetlíme rozdiely medzi niektorými typmi úrokových mier.

1.1.1 Časová hodnota peňazí

Pod pojmom časová hodnota peňazí si môžeme predstaviť, ako peniaze, ktoré máme k dispozícii dnes, majú väčšiu hodnotu ako tie, ktoré by sme získali v budúcnosti. Dôvodom, prečo je tomu tak, je časová preferencia súčasnej spotreby. V prípade, že sme si peniaze vložili do banky na sporiaci účet, úroky pre nás predstavujú odmenu za odloženie terajšej spotreby v prospech budúcej. *Úroková miera* je teda podielom úroku a vloženého majetku, (1, str.53):

$$i = \frac{u}{P} \quad (1.1)$$

kde i je úrok a P je hodnota počiatočného kapitálu.

1.1.2 Časová štruktúra spotovej úrokovej miery

Spotová úroková miera je momentálnym výnosom vychádzajúcim z finančných nástrojov, ktoré vyvolávajú len jeden peňažný tok v dobe splatnosti. Ako príklad takéhoto finančného nástroja si môžeme uviesť bezkupónový alebo kupónový dlhopis, ktorého kupónové platby prebehli v dobe splatnosti pred poslednou platbou. Ak bezkupónový dlhopis má dobu splatnosti v čase T , a zároveň v tomto čase vypláca jednotku meny, môžeme jeho súčasnú hodnotu označiť ako $P(t,T)$ v čase t . Úroková miera $R(t,T)$ v intervale $[t,T]$ je definovaná ako miera výnosnosti do doby splatnosti T bezrizikového nulového kupónu s hodnotu 1 (2, str.9):

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}, \quad t \in (0,T) \quad (1.2)$$

Spotovú úrokovú mieru vyjadríme pomocou vzťahu (1.2), kde $P(t,T)$ je cena bezkupónového dlhopisu v čase t (2, str.9):

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}, \quad t \neq T \quad (1.3)$$

Okamžitú spotovú úrokovú mieru $r(t)$ môžeme zapísať pomocou vzťahu (2, str.9):

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \quad (1.4)$$

Zapíšme tento vzťahy pre jednoduché úročenie (odvodené z (1, str. 16)):

$$P(t, T) \cdot (1 + R(t, T) \cdot (T - t)) = 1 \quad (1.5)$$

kde $P(t, T)$ je cena bezkupónového dlhopisu v čase t , $R(t, T)$ je úroková miera a T je doba splatnosti dlhopisu. Z (1.5) odvodíme tvar vzorca pre súčasnú hodnotu dlhopisu (odvodené z (1, str.15):

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + R(t, T) \cdot (T - t)}, \quad t \in (0, T) \quad (1.6)$$

a z toho pre spotovú úrokovú mieru platí:

$$R(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{P(t, T) \cdot (T - t)}, \quad t \neq T \quad (1.7)$$

Pokiaľ je spotová úroková miera vyjadrená ako funkcia času do doby splatnosti T , hovoríme o *spotovej výnosovej krivke* alebo o *časovej štruktúre spotových úrokových mier*, ktorá je daná grafom funkcie, kde $R(t, T)$ je úroková miera, T doba do splatnosti:

$$T \rightarrow R(t, T), \quad T > t \quad (1.8)$$

Pre $T > t$ výnosová krivka prideluje v čase t osobitným časovým obdobiam do splatnosti hodnoty $P(t, T)$.

1.1.3 Časová štruktúra forwardovej úrokovej miery

Forwardová úroková miera sa fixuje k dnešnému dátumu, ale použijeme ju až v dobe splatnosti forwardovej zmluvy. V čase uzatvorenia forwardovej zmluvy je výška forwardovej úrokovej miery na rovnakej úrovni ako spotové úrokové miery vyskytujúce sa na trhu, čo nám zabezpečí neexistenciu *arbitráže* (profit z rozdielu ceny určitého cenného papiera v rovnakom čase na rôznych trhoch(1, str. 117)). Investujúci si tak môže zvoliť jednu z dvoch možností, ako investuje svoj kapitál. Má možnosť buď vložiť peniaze na účet do doby splatnosti T' , alebo uložiť peniaze na účet v nejakom čase T , $t < T < T'$ pred dobou splatnosti, a potom znovu investovať kapitál spolu s nadobudnutými úrokmi v čase T až do doby splatnosti T' . (2, str. 10)

Pokiaľ investujúci je schopný v túto chvíľu zafixovať úrokovú mieru pre čas v budúcnosti v intervale medzi T a T' , potom je výnos, ktorý plynie z týchto investičných stratégií, rovnaký. V opačnom prípade, ak budú tieto výnosy rozdielne, investujúci má príležitosť na arbitráž a môže dosiahnuť bezrizikový výnos Forwardová úroková miera $f(t; T, T')$ v čase t na dobu od T do T' je hodnota dlhopisu daná vzťahom (2. str.10):

$$P(t, T) = e^{(R(t; T, T')(T'-t))P(t, T')} \quad (1.9)$$

Potom forwardovú úrokovú mieru v čase t na dobu od T do doby splatnosti T' vyjadríme logaritmovaním (1.9) (ekvivalentne z (2, str.9)):

$$R(t; T, T') = -\frac{\ln P(t, T') - \ln P(t, T)}{T' - T} \quad (1.10)$$

Okamžitá forwardová miera sa dá vyjadriť (2. str.10):

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow T'} R(t; T, T') = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (1.11)$$

V procese odvodzovania opäť využijeme vzťah pre jednoduchého úročenie (odvodené z (1, str. 16)):

$$P(t, T) \cdot (1 + R(t, T) \cdot (T - t)) = 1 \quad (1.12)$$

kde $P(t, T)$ je cena bezkupónového dlhopisu v čase t , $R(t; T, T')$ je forwardová úroková miera a T je doba splatnosti dlhopisu. Upravíme na tvar vzorca pre súčasnú hodnotu dlhopisu (vzorce odvodené z (1, str.15)):

$$P(t, T) = (1 + (T' - T) \cdot R(t; T, T')) \cdot P(t, T') \quad (1.13)$$

a z toho pre forwardovú úrokovú mieru platí:

$$R(t; T, T') = \frac{1}{T' - T} \cdot \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T')} - 1 \right), \quad T' \neq T \quad (1.14)$$

V prípade forwardových úrokových mier, výnosová krivka je graf, ktorý vyjadruje závislosť forwardovej úrokovej miery na čase do doby splatnosti zmluvy.

$$T \rightarrow R(t; T, T'), \quad t < T < T' \quad (1.15)$$

Forwardové miery ukazujú, aké hodnoty by mali spotové miery nadobudnúť v budúcnosti, na základe aktuálneho diania na finančnom trhu. Nemôžeme ich však považovať za presnú predikciu. Ak by sme si nakreslili momentálnu forwardovú úrokovú mieru na isté obdobie a po nejakom čase ju porovnali s novou skutočnosťou, tieto dve

krivky sa budú líšiť. Deje sa to kôli tomu, že pri počítaní hodnoty forwardovej miery vychádzame z momentálnych časových štruktúr mier, ktoré odzrkadľujú všetky prístupné informácie ako politické, tak aj ekonomické. Tieto informácie sa pravidelne aktualizujú, a tým sa mení aj tržná predstava o výške úrokových mier a mení sa aj výnosová krivka. (1, str.100)

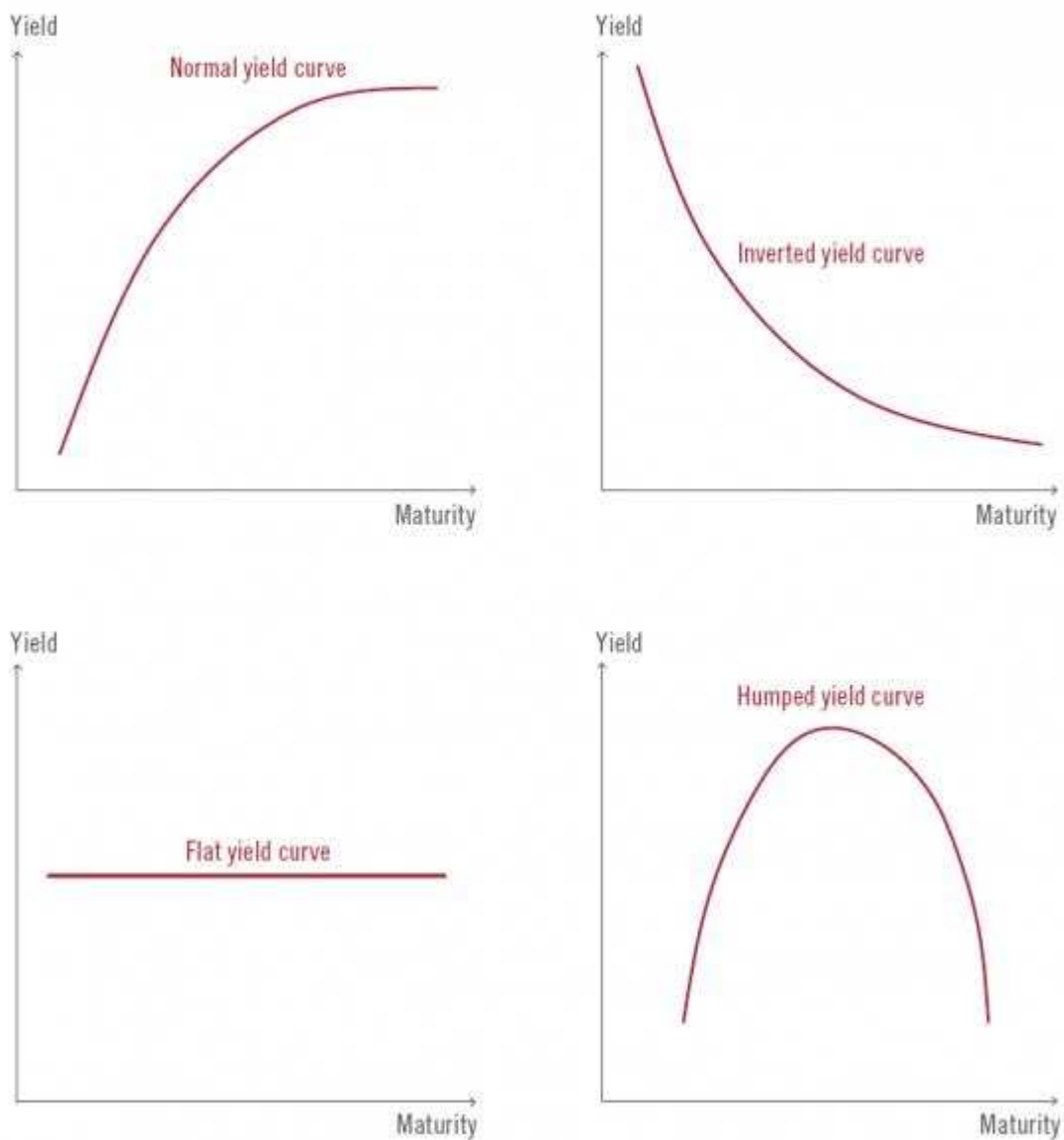
V súvislosti so životným poistením to môžeme chápať ako záväzky, ktoré majú dlhodobý charakter a preto je dôležité si uvedomovať vývoj výnosovej krivky v čase. Problém môže nastať v tom, keď aktuálna výnosová krivka nie je zhotovená na potrebné dlhé časové obdobie, a preto sa musí pristúpiť k jej modelovaniu.

1.1.4 Proces výnosových kriviek

Vzťah medzi úrokovou mierou a časom do splatnosti finančného nástroja, ku ktorému sa táto časová štruktúra vzťahuje, zaznamenáva výnosová krivka. Môžeme ju konštruovať na báze dlhopisov, ktoré majú síce rozdielnu dobu splatnosti, ale rovnakú likviditu, rizikovosť a ďalšie charakteristické vlastnosti. Rozlišujeme ich na (3, str.74):

- *normálna (plochá) výnosová krivka* (flat yeild curve) – výnosy sa pohybujú obvyklej úrovni a s rastúcou dobou splatnosti sa mierne zvyšujú,
- *klesajúca výnosová krivka* (interted yeild curve) – výnosy začínajú na historickom maxime, ale dlhodobé úrokové miery sú menšie ako krátkodobé,
- *rastúca výnosová krivka* (normal yeild curve) – krátkodobé miery sú omnoho menšie ako dlhodobé,
- *skoková výnosová krivka* (humped yeild curve) – krivka rastie v okolí stredne dlhej doby splatnosti a klesá v okolí dlhšej doby splatnosti

V Grafe č. 1 je uvedená ukážka všetkých štyroch typov výnosových kriviek, na ose X je čas do splatnosti a na ose Y je výnos.



Obrázok č.1: Typy výnosových kriviek (Zdroj: 4)

1.1.5 Stochastický kalkulus a teória pravdepodobnosti

Základom oceňovania finančných derivátov je predpoklad, že neexistuje príležitosť na arbitráž (profit z rozdielu ceny určitého cenného papiera v rovnakom čase na rôznych trhoch(1, str. 117)). Arbitrážnou príležitosťou chápeme situáciu, kedy investor môže nadobudnúť kladný zisk s pravdepodobnosťou 1.

Jedna z nutných podmienok, aby sme predišli arbitráži v oceňovaní, je matematický model ktorý popisuje všetky dostupné informácie. Pod pojmom informácie rozumejme jednoznačné určenie, ktorá veličina je pre nás v danej chvíli deterministická, a ktorá stochastická.

σ -algebra

Predpokladáme, že priestor je (Ω, \mathcal{F}) , Ω reprezentuje množinu všetkých možných výstupov, \mathcal{F} je systém podmnožín (subalgebry) Ω , označme $A \subseteq \Omega$. (5, str.31):

\mathcal{F} je σ -algebra, ak (5, str.31):

- Je neprázdna, musí obsahovať $\emptyset \in \mathcal{F}$ a $\Omega \in \mathcal{F}$
- Ak $A \in \mathcal{F}$, potom aj jej doplnok $A^c \in \mathcal{F}$
- Ak postupnosti množín $A_1, A_2 \dots$ náleží \mathcal{F} , potom tam náleží aj ich spoločné zjednotenie $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ a prienik $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Pravdepodobnostná miera

Pokiaľ chceme $A \subseteq \Omega$ priradiť číslo $P(A)$, používame pravdepodobnostnú funkciu P , ktorá priradí $A \subseteq \Omega$ mieru istoty výskytu. Potom je P funkciou, pre ktorú platí $\mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ a splňuje tieto vlastnosti (5, str.33):

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Ak $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{F}$ sú nezlučiteľné javy, potom $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Pravdepodobnostný priestor je popísaný trojicou (Ω, \mathcal{F}, P) , v ktorej je Ω množinou elementárnych javov, \mathcal{F} je σ -algebra pravdepodobnosťou P tj. funkcia $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$. (5, str. 33)

Náhodná veličina $X = X(\omega)$ je funkcia, ktorá nadobúda hodnoty z množiny reálnych čísiel a je definovaná na Ω . X je \mathcal{F} -merateľná, pokiaľ o hodnote X môžeme rozhodnúť na základe informácií obsiahnutých v \mathcal{F} . Pre všetky reálne čísla x musí platiť: $\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}$. (odvodené z (5, str. 51))

Stochastický proces X_t je súbor náhodných veličín t (6, str.228):

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega) \quad (1.16)$$

ktoré sú definované na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) . $\omega \in \Omega$ je elementárny jav, T znamená čas, ktorý môže byť spojité, a preto budeme sledovať vývin náhodnej veličiny na určitom intervale (napr. $[0, t]$). Môžeme tiež pozorovať vývin náhodnej veličiny v konkrétnych časových momentoch (diskrétnom čase).

Filtrácia je súbor $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ σ -algebier na Ω a popisuje vývin informácií v danom pozorovanom systéme, pokiaľ platí (2, str.111):

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_t, \text{ pre všetky } 0 \leq n < t \quad (1.17)$$

Filtrácia je stúpajúci tok informácií, pokiaľ $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ je postupnosť σ -algebier na Ω a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ pre všetky n , potom \mathcal{F}_n je tiež *filtráciou*. Pokiaľ náhodný proces X_t je \mathcal{F}_t merateľný pre všetky t , tak povieme, že X_t je *adaptovaný filtráciou* $\mathcal{F}_t, t \geq 0$. Stochastický proces X_t je prirodzenou *filtráciou* σ -algebier, ktorá je generovaná procesom X_n , Teda (2, str.111):

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_n, n \leq t). \quad (1.18)$$

Podmienená stredná hodnota $E[X|\mathcal{G}]$ je definovaná ako náhodná veličina Y . Nech (Ω, \mathcal{F}, P) je pravdepodobnostný priestor a nech \mathcal{G} je subalgebra \mathcal{F} . Nech X je náhodná veličina na (Ω, \mathcal{F}, P) . Potom podmienená stredná hodnota má vlastnosti (2, str.111):

$$1. Y \text{ je } \mathcal{G}\text{-merateľná} \quad (1.19)$$

$$2. \text{ pre každú množinu } A \in \mathcal{G} \text{ platí: } \int_A Y dP = \int_A X dP$$

Podmienujú strednú hodnotu pre X vieme zapísať aj ako $E[X|\Delta]$. Keďže podmienená stredná hodnota sama o sebe je náhodnou veličinou, predpokladáme, že filtrácia \mathcal{F} sa rovná σ -algebre generovanej Y $\sigma(Y)$, potom platí $E[X|\mathcal{F}] = f(Y)$, $E[X|\sigma(Y)] = E[X|Y]$. (2, str. 111).

Tak isto budeme potrebovať aj **pravidlá pre počítanie s podmienenou strednou hodnotou**. Uvedme niekoľko pár základných pravidiel (2, str. 112):

- Podmienená stredná hodnota je lineárna pre náhodné veličiny X_1 a X_2 , ako aj pre konštanty c_1, c_2 :

$$E[(c_1X_1 + c_2X_2)|\mathcal{G}] = c_1E[X_1|\mathcal{F}] + c_2E[X_2|\mathcal{G}] \quad (1.20)$$

- $E[X]$ a $E[X|\mathcal{G}]$ sú rovnaké:

$$E[X] = E[E(X|\mathcal{G})] \quad (1.21)$$

- Pokiaľ sú X a σ -algebra \mathcal{G} nezávislé, potom $E[X] = E[X|\mathcal{G}]$. Ak X a Y sú nezávislé, tak platí $E[X] = E[X|Y]$.
- Ak je X \mathcal{G} -merateľné, potom platí:

$$E[X|\mathcal{G}] = X \quad (1.22)$$

keď je X funkciou Y , $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$, potom je $E(X|Y) = X$. To znamená, že \mathcal{F} obsahuje všetky informácie o náhodnej veličine X . Práve preto môžeme zaobchádzať s X ako s nenáhodnou veličinou a písať $X(\omega)$ pred $E(1|\mathcal{F}) = X(\omega)$ vo vzťahu:

$$E(X|\mathcal{F})(\omega) = E(X(\omega)|\mathcal{F}) = X(\omega)E(1|\mathcal{F}) = X(\omega) \quad (1.23)$$

- Aj G je \mathcal{G} -merateľná, potom platí:

$$E[XG|\mathcal{F}] = G \cdot E[X|\mathcal{F}] \quad (1.24)$$

Z toho vychádza, že ak je X funkciou Y , $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$, potom je $E[XG|Y] = X \cdot E[G|Y]$.

- Pokiaľ \mathcal{F} a \mathcal{F}' sú σ -algebry a $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, potom

$$\begin{aligned} E[X|\mathcal{F}] &= E[(E[X|\mathcal{F}']|\mathcal{F})] \\ E[X|\mathcal{F}'] &= E[(E[X|\mathcal{F}]|\mathcal{F}')] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Táto vlastnosť vychádza z predpokladu, že ak $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ a $E[X|\mathcal{F}]$ neobsahuje viac informácií ako \mathcal{F}' , smieme $E[X|\mathcal{F}]$ zapísať ako:

$$E[(E[X|\mathcal{F}]|\mathcal{F}')] = E[X|\mathcal{F}]E[1|\mathcal{F}'] = E[(X|\mathcal{F}')] \quad (1.26)$$

- Pokiaľ je X náhodná veličina nezávislá na \mathcal{F} , informácia ktorú obsahuje je tiež stochastický proces G (náhodná veličina alebo náhodný vektor) je obsiahnutý v \mathcal{F} , potom pre akúkoľvek funkciu $h(X,G)$ je platný vzorec:

$$E[h(X,G)|\mathcal{F}] = E[E_x[h(X,G)]|\mathcal{F}], \quad (1.27)$$

$E_x[h(X,G)]$ tu znamená to, že stredná hodnota X sa počíta vzhľadom k fixovanej hodnote G .

Všetky tieto vlastnosti sú uvedené v (2, str.112).

Martingál je stochastickým procesom s nulovým driftom (očakávaný výnos aktíva). Predpokladajme, že máme náhodný proces $X = (X_t, t \geq 0)$ na Ω a informáciu \mathcal{F}_n v súčasnom čase n . Pokiaľ sú \mathcal{F}_n a X nezávislé, môžeme očakávať, že táto informácia, ktorú máme teraz k dispozícii, eliminuje neistotu, ktorá je vzhľadom k hodnotám X_t v budúcnosti v konkrétnom čase t . Pokiaľ máme informácie o určitých udalostiach, ktoré sa stali v minulosti, môžeme ich zahrnúť do výpočtov. To značí, že X_t môžeme najlepšie odhadnúť vďaka informáciám obsiahnutým vo filtrácii \mathcal{F}_n , ako keby sme tieto informácie nemali. Matematické vyjadrenie tohto tvrdenia za pomoci podmienenej strednej hodnoty vyzerá nasledovne (7, str.50):

$$E[X_t | \mathcal{F}_n] \text{ pre } 0 \leq n < t. \quad (1.29)$$

Stochastický proces $X = (X_t, t \geq 0)$ v spojitom čase pre filtráciu $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ je martingálom, pokiaľ (3, str. 326):

- $E[X_t] < \infty$ pre všetky $t \geq 0$
- X je adaptovaný na \mathcal{F}_t
- $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ pre všetky $0 \leq s \leq t$ je najlepšou predikciou X_t danou filtráciou \mathcal{F}_s .

Je zreteľné, že ak zmeníme filtráciu, môže dôjsť k zmene hodnoty $E(X_t | \mathcal{F}_s)$, preto je vždy nutné pri výpočtoch presne určiť, ktorú filtráciu predpokladáme.

Pre diskretný čas môžeme charakterizovať martingál ako stochastický proces $X = (X_n, n = 0, 1, \dots)$ pre filtráciu $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$, ak (3, str. 326):

- $E[X_n] < \infty$ pre všetky $n \geq 0$
- X je adaptovaný na \mathcal{F}_n
- $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ pre všetky $n = 0, 1, \dots$, je najvhodnejšou predikciou X_{n+1} danú filtráciou \mathcal{F}_n

Ak platí $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ pre všetky $0 \leq s < t$, nazveme stochastický proces $X = (X_t, t \geq 0)$ submartingálom. V opačnom prípade, keď je $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ pre všetky $0 \leq s < t$, stochastický proces $X = (X_t, t \geq 0)$ nazveme supermartingálom. (2, str. 119)

Markovský proces je stochastickým procesom, $X = (X_t, t \geq 0)$ je pre všetky $t \geq 0$ adaptovateľný pre filtráciu $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) ak platí (2, str. 113):

$$E[X_s | \mathcal{F}] = E[X_s | X_t], \quad s \geq 0 \quad (1.30)$$

Ľavá strana obsahuje podmienenú strednú hodnotu, ktorá má podmienku σ -algebru vygenerovanú stochastickým procesom X_t .

Markovská vlastnosť značí to, že k určaniu pravdepodobnostných charakteristík (napríklad stredná hodnota E , rozptyl,...) budúceho priebehu procesu stačia len informácie o jeho súčasnom stave.. Aktuálne hodnoty môžu slúžiť ako predpoveď hodnôt budúcich (2, str.113).

Wienerov proces je stochastickým procesom $(W_t, t \geq 0)$, ktorý má tieto vlastnosti (odvodené z (6, str. 470)):

- Wienerov proces začína v 0: $W(0) = 0$
- Prírastok $W(t) - W(n)$ pre $0 \leq n < t < \infty$ nezávisí na minulosti, to znamená, že nezávisí na hodnotách $\{W(\mu), 0 \leq \mu < n\}$, a má normálne rozdelenie $N \sim (0, t - n)$; μ, t, n sú časové hodnoty
- Prírastky $W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ sú nezávislé pre ľubovoľné $0 \leq t_1 < \dots < t_m$; m je reálne číslo

Dôležitou vlastnosťou Wienerového procesu je nediferencovateľnosť jeho trajektórií (tj, nemajú nikde deriváciu, aj keď sú spojité). Práve v dôsledku tejto, a podobným vlastnostiam Wienerového procesu zlyhávajú obyčajné klasické metódy integrovania, a preto musíme použiť stochastický kalkulus.(6, str. 470)

Pre ďalšie využitie Wienerového procesu definujme stochastickú diferenciálnu rovnicu.

Stochastická diferenciálna rovnica má riešenie náhodný proces $X(t)$ a tvar (odvodené z (9, str. 130)):

$$dX(t) = \alpha(X(t), t)dt + \beta(X(t), t)dW(t) \quad (1.32)$$

kde $\alpha(X(t), t)$ a $\beta(X(t), t)$ sú reálne funkcie dvoch premenných, $\alpha(X(t), t)$ sa nazýva drift, $\beta(X(t), t)$ je rozptyl, za podmienky:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(X(s), s) ds + \int_0^t \beta(X(s), s) dW(s) \quad (1.33)$$

a v prípade, že proces $X(t)$ môžeme vyjadriť v tomto tvare, nazývame $X(t)$ **Itôovým stochastickým procesom**. (6, str. 470)

Itôovo lemma je stochastickou paralelou klasického pravidla pre diferencovanie. Nech $f(x,t)$ je hladká (má všetky derivácie vyšších rádov) funkcia dvoch premenných, kde $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, proces $X(t)$ je Itôovým stochastickým procesom. Ak do funkcie $f(x,t)$ dosadíme $X(t)$, potom sa táto funkcia tiež stane stochastickým procesom. (8, str.27):

$$F(t) = f(X(t), t) \quad (1.34)$$

Aby sme mohli zapísať stochastickú diferencálnu rovnicu (1.32) kde W je Wienerovým procesom, použijeme prvý diferenciál funkcie f v tvare (8, str.2):

$$dF(t) = \frac{\partial f}{\partial x} dX(t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \beta^2(X(t), t) dt \quad (1.35)$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferencálnej rovnici (1.32) a dostávame Itôovo lemma (8, str.27):

$$dF(X(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \alpha(t, X(t)) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \beta^2(X(t), t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \beta(X(t), t) dW(t) \quad (1.36)$$

Dôkaz Itôovej lemy sa dá previesť intuitívne rozvojom funkcie $F(t)$ do Taylorového rádu stupňa 2. Tento dôkaz nájdeme v (8, str.28).

1.2 Deriváty úrokovej miery

Finančným derivátom je finančné aktívum, ktorého cena je odvodená od hodnoty podkladových aktív, napríklad akcií, dlhopisov, komodít, výšky úrokových mier. Finančné deriváty sú zmluvou, v ktorej sú zúčastnené dve protistrany, ktoré musia súhlasiť s právami a povinnosťami, ktoré z nej plynú. (1, str. 125)

Úrokovými derivátmi sa rozumejú finančné nástroje, pre ktoré platí, že výška výplat je podmienená vývojom úrokových mier. Tieto finančné nástroje sa využívajú na ochranu proti nežiadúcim zmenám úrokových mier, ale zároveň nie je nutné meniť podmienky podkladovej zmluvy. Vznikli v dvadsiatom storočí ako reakcia na nestabilitu finančných trhov, a z toho vyplývajúcu neistotu vývoja cien. (10, str.243)

Tržné riziko vzniká z dôvodu citlivosti jednotlivého podkladového aktíva alebo portfólia na pohyb úrokových sadzieb. Napríklad pre poisťovne a penzijné fondy je toto riziko veľmi dôležité, pretože so zmenou úrokových mier a miery inflácie sa mení aktuálna hodnota záväzkov plynúcich zo zmlúv, a tým aj hodnota potrebných rezerv, ktoré tieto inštitúcie musia povinne podľa zákona vytvárať. Pokiaľ nemôže byť riziko znížené pomocou diverzifikácie, hedging (zabezpečenie) pomocou derivátov je ďalšou vhodnou možnosťou na elimináciu rizika. Existuje niekoľko druhov úrokových finančných derivátov, medzi ktoré patria napríklad úrokové forwardy, swapy a opcie. (10, str. 143)

Úrokový forward zaisťuje pre nejaké budúce obdobie pevnú úrokovú mieru zo získaného úveru alebo investovaného depozita. Subjekt sa takto zaisťuje voči pádu alebo rastu úrokovej miery tým, že získa na určitú dobu úver za pohyblivú úrokovú mieru, ktorá súvisí s tržnou úrokovou mierou. (1, str 131)

Úrokový swap je dohoda o nasledujúcej periodickej zmene úrokových platieb medzi dvoma stranami, kde tieto platby sú zafinované rozdielne, ale počítajú sa z tej istej nominálnej kapitálovej sumy. Jedná sa vlastne o istú formu zaistenia sa proti riziku kolísania úrokových mier. Pri úrokových swapoch neprichádza k nijakej zmene kapitálu. (1, str.137)

Úrokové opcie sú termínové kontrakty, v nich kupujúci opcie (dlhá pozícia) má právo uskutočniť v dohovorenom termíne dohodnutý obchod, zatiaľ čo predávajúci opcie (krátka pozícia) sa musí podriadiť rozhodnutiu kupujúceho. Vstup do dlhej pozície nie je bezplatný ako u forwardov a swapov, ale „platí“ sa kúpou opcie za opčnú prémii. Obdobne ak vstup do krátkej pozície (predaj opcie za opčnú prémii). (1. str. 142)

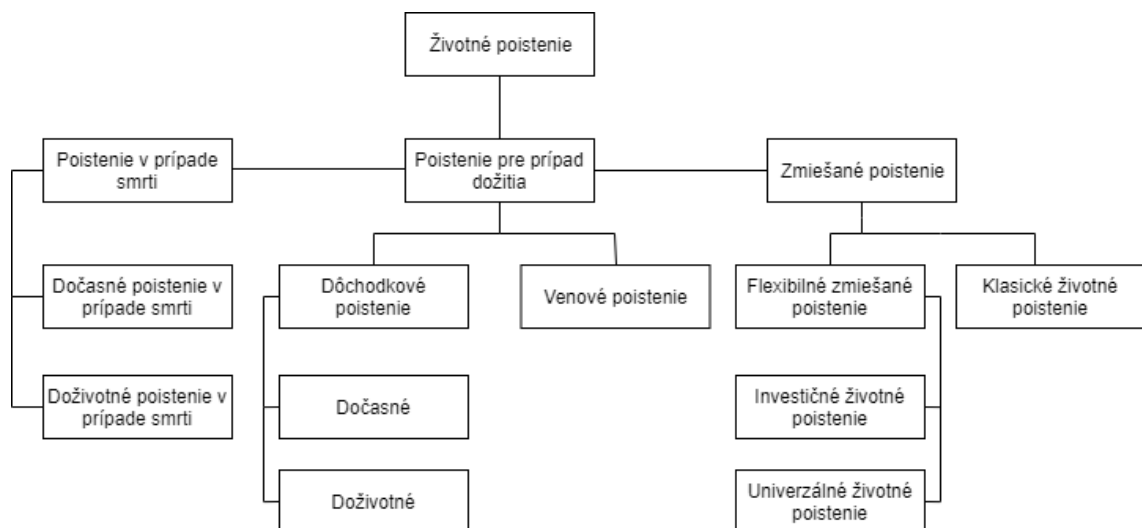
Cap zaručujú svojmu držiteľovi právo na priebežné plnenie od ich predajcu ako úrokový rozdiel, ak sa úroková sadzba zvýši nad zjednanú hranicu. Protikladom ku capom sú floory, ktoré sú založené na obdobnom princípe. (10, str. 276)

1.3 Životné poistenie

Pri životnom poistení je úroková miera vyjadrená v percentách ako úroková sadzba, ktorou sa úročí poistná rezerva. Táto sadzba je v zmluve zaručená po celý čas. Životné poistenie slúži na krytie rizík, ktoré môžu ohroziť život človeka. Pokiaľ dôjde k poistnej udalosti a vznikne ujma na zdraví poisteného, tak on, alebo v prípade smrti pozostalý,

dostanú výplatu s tým spojenú od poisťovne, u ktorej má uzavretú zmluvu. Existuje niekoľko základných druhov životného poistenia (11, str. 21)

- *Poistenie v prípade smrti*
V prípade tohto poistenia bude poistné plnenie vyplácané behom určitej doby alebo jednorazovo po vzniku poistnej udalosti, tj. v prípade smrti poisteného.
- *Poistenie pre prípad dožitia*
Pokiaľ sa poistený dožije určitého veku, dostane poistné plnenie v určitej výške. Do tejto skupiny radíme dôchodkové poistenie, ktoré je poistenie s pravidelne sa opakujúcou výplatom v prípade dožitia poisteného predom určeného veku. Ďalším prípadom je venové poistenie, ktoré je zjednávané v prospech tretej osoby a potom, pokiaľ sa táto osoba dožije určitého veku, sa jej vypláca poistné plnenie, a to buď naraz, alebo postupne.
- *Zmiešané poistenie, ktoré zahŕňa obe predchádzajúce zložky*
Poistnými udalosťami sa chápe smrť alebo dožitie predom určeného veku. Výška poistného závisí na tom, ktorá udalosť nastane skôr. Existujú tiež flexibilné formy zmiešaného poistenia: univerzálne a investičné. Tieto formy životného poistenia sú čím ďalej populárnejšie. Sú výhodné ako z hľadiska klienta, tak aj z hľadiska poisťovne, pretože umožňujú zmeny v rámci už uzatvorenej zmluvy.



Obrázok č.1 : Štruktúra životného poistenia (Zdroj: vlastné spracovanie)

2 ANALÝZA SÚČASNÉHO STAVU

Na to, aby sme dosiahli správne výsledky, musíme najprv pochopiť základné princípy fungovania modelov, ktoré budeme používať. V tejto kapitole popíšeme fundamentálne prístupy vysvetľujúce vývin časovej štruktúry úrokových mier. Ďalej sa zameriame na popis jednotlivých modelov, ktoré sme zvolili pre modelovanie časových štruktúr, a ktoré sa využívajú pri oceňovaní poisťných záväzkov poisťovne.

Vývin úrokových mier, ktorý je spojitým procesom, môžeme popísať pomocou jednej premennej, a to za pomoci okamžitej spotovej úrokovej sadzby. Táto úroková miera ukazuje, aký veľký zisk obchodník obdrží zo svojej investície behom infinite malého časového obdobia. Táto predikcia nám dovoľuje uskutočňovať všetky výpočty v spojitom čase, čo nám uľahčuje matematické výpočty behom modelovania. (3. str. 93-137)

Princíp neexistencie príležitostí na arbitráž, ktorý sme popísali v predchádzajúcej podkapitole, naznačuje, že pokiaľ vytvoríme portfólio z aktív, ktoré sú odvodené z časovej štruktúry, zisk z takto vytvorených portfólií by mal byť, *ceteris paribus*, rovnaký ako pri využití bezrizikovej úrokovej miery. Výkyvy časových štruktúr vyvolajú bezprostrednú reakciu obchodníkov, a tým sa všetky možnosti na uskutočnenie arbitráže vyčerpajú. Aktíva, ktoré vychádzajú z rovnakých časových štruktúr, sa budú správať rovnakým spôsobom, a to môžeme vysvetliť pomocou tržnej ceny rizika. Tržná cena rizika je kompenzáciou za riziko, ktoré investori podstupujú. Požadujú väčšiu výnosnosť než je tá, ktorú poskytujú bezrizikové finančné nástroje. Ak sú aktíva závislé na rovnakom zdroji rizika, ich riziková marža by mala byť priamo úmerná citlivosti ku zmene rizikového faktoru. (3. str. 93-137)

Okrem toho, časová štruktúra úrokových mier môže byť charakterizovaná Markovským procesom. To znamená, že ďalší progres časovej štruktúry je závislý len na jej súčasnom stave a nie na minulosti. Všetky minulé informácie sú už obsiahnuté v časovej štruktúre, ktorú môžeme pozorovať na trhu a využiť k modelovaniu. Ak trh je efektívny, investori majú rovnaký prístup ku všetkým informáciám a chovajú sa rozumne, tak je sa predpokladá, že budú mať nulové transakčné náklady. (3. str. 93-137)

2.1 Fungovanie modelov

Všeobecná rovnováha

Všeobecné modely ekonomickej rovnováhy sa snažia vysvetliť vývoj makroekonomických veličín ako funkciu nejakej danej premennej. Cox, Ingersol a Ross o svojej štúdií (12) dokázali, že model všeobecnej rovnováhy môžeme využívať pri odvodzovaní modelu časovej štruktúry úrokových mier. Úrokové miery, ktoré získame pomocou modelov, by mali zodpovedať rovnovážnemu stavu celej ekonomiky.

Okrem modelov všeobecnej rovnováhy existujú aj modely čiastočnej rovnováhy. Nevyžadujú však, aby konkrétna časová štruktúra bola výsledkom všeobecnej ekonomickej rovnováhy. Tieto modely sú kalibrované na konkrétnych vstupných údajoch, ktorými sú aktuálne časové štruktúry úrokových mier. Takýmito modelmi sú napríklad model Vašíčkov (13) alebo model Ho-Lee (14).

Časová štruktúra bez arbitrážnej možnosti

Fabozzi (3, str.118) vo svojej práci naznačuje, že sledovaná časová štruktúra by nemala umožňovať príležitosť na bezrizikový výnos, tj. príležitosť arbitráže (profit z rozdielu ceny určitého cenného papiera v rovnakom čase na rôznych trhoch(1, str.117)). Nepripúšťame teda také portfólio aktív, ktoré by prinášalo vyššie výnosy pri rovnakej rizikivosti ako iné portfólio. Tento princíp má základ v zákone o jedinej cene, ktorý hovorí, že arbitrážne príležitosti na trhu budú využité obchodníkmi a ceny aktív sa vyrovnajú.

Spojitosť v čase

Stochastický proces vývoja časovej štruktúry prebieha v spojitom čase, ceny dlhopisov a úrokové miery sú definované v každom časovom okamihu behom celej doby životnosti dlhopisu. Tento princíp potom umožňuje využívať stochastický kalkulus v spojitom čase. (3, str.119)

Všeobecnosť modelu

Modely úrokových mier by mali byť obecnými, a to v zmysle, že musia byť formulované tak, aby boli využiteľné pre rôzne účely a na rôznych trhoch s aktívami, napríklad pri oceňovaní derivátov. (3. str.120)

2.2 Krátkodobé modely

V tomto odstavci budú prezentované model Vašíčkovej, CIR model, Hull-White a Ho-Lee model a ich kalibrácia (metóda odhadu parametrov na základe modelového riešenia.).

Za predpoklad modelov okamžitých úrokových mier sa považuje to, že krátkodobé úrokové miery závisia na konštantných faktoroch. To znamená, že tieto modely sú časovo tzv. homogénne (majú rovnaké vlastnosti). Modely sú však súčasťou vnútornej časovej štruktúry úrokových mier, dôsledkom čoho je to, že sa môžu líšiť s pozorovanou časovou štruktúrou na trhu. Pokiaľ máme krivku dlhopisu s nulovým kupónom, ozn.:

$$T \rightarrow P(0, T) \quad (2.1)$$

a požadujeme, aby náš model kopíroval túto krivku čo najpresnejšie, vzhľadom k pozorovanej štruktúre musíme preto tento model kalibrovať (odhadnúť parametre na základe modelového riešenia). Problémom je, že parametre modelov nestačia k tomu, aby krivka perfektne kopírovala model, naviac niektoré formy kriviek nemôžeme získať pomocou modelov. Ako príklad môže slúžiť klesajúca výnosová krivka, ktorú nemôžeme modelovať pomocou Vašíčkovej modelu v závislosti na zvolených potrebných parametroch. V malom počte parametrov je tiež problém pri kopírovaní modelu výnosovou krivkou. Aj napriek tomu sú modely ako Vašíčkov, Cox-Ingersoll-Rossov model sú často využívané pre ich schopnosť analyticky oceniť dlhopisy a ich deriváty.

2.2.1 Vašíčkov model

Autorom je Oldřich Vašíček (13), ktorý ho publikoval v roku 1977. Pripustil, že okamžitá úroková miera r sa v riskantných reálnych podmienkach formuje podľa Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s konštantnými koeficientami. Vo fyzike sa tento proces používa ako alternatíva k Brownovmu pohybu. Vašíčkov model ako prvý zachytil proces mean-reverting, čo znamená návrat náhodnej veličiny k jej dlhodobému rovnovážnemu stavu. Mnoho ďalších modelov je inšpirovaných práve Vašíčkovým modelom.

Úroková miera vychádza zo stochastickej rovnice v tvare (2, str. 17):

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.2)$$

Všetky parametre a , b , σ sú kladné konštanty, $r(0) = r_0$ je úroková miera.

Ak vzorec (2.2) budeme integrovať pre každé $n \leq t$, dostaneme hodnotu dlhopisu (2, str.18) :

$$r(t) = r(n)e^{-a(t-n)} + b(1 - e^{-a(t-n)}) + \sigma \int_n^t e^{-a(t-u)} dW(u) \quad (2.3)$$

z toho plynie, že $r(t)$ má normálne rozdelenie, stredná hodnota E a rozptyl Var sú dané výrazmi (2, str. 18):

$$E[r(t)|r(n)] = r(n)e^{-a(t-n)} + b(1 - e^{-a(t-n)}) \quad (2.4)$$

$$Var[r(t)|r(n)] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-n)}) \quad (2.5)$$

$$r(t) \sim N \left[r(n)e^{-a(t-n)} + b(1 - e^{-a(t-n)}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-n)}) \right] \quad (2.6)$$

kde všetky parametre a , b , σ sú kladné konštanty, $r(n)$ je úroková miera v čase n

Z tohto vyplýva, že úroková miera $r(t)$ s kladnou pravdepodobnosťou môže byť v každom čase t záporná. Zo vzťahu (2.4) je vidieť, že úroková miera je náchylná vracať sa k dlhodobému rovnovážnemu stavu b , ak predpokladáme, že t sa blíži k nekonečnu. Vo vzťahu (2.2) pre Vašíčkov model je vidno vlastnosť mean-reversion (opakovaný návrat k dlhodobému rovnovážnemu stavu). Na parameter b môžeme pozeráť ako na dlhodobu očakávanú hodnotu úrokovej miery (drift). Čiže ak je úroková miera menšia ako b , drift je kladný a úroková miera rastie. Naopak, ak je b menšie ako úroková miera, drift je záporný a úroková miera bude klesať. (2, str.17)

Aby sme boli schopný odvodiť cenu bezkupónového dlhopisu $P(t,T)$, musíme použiť Itôovo lemma (1.36). Predpokladajme teda, že stochastický proces sa riadi rovnicou (1.32) (9, str. 130):

$$dX(t) = \alpha(X(t), t)dt + \beta(X(t), t)dW(t) \quad (2.7)$$

kde $\alpha(X(t), t)$ a $\beta(X(t), t)$ sú reálne funkcie dvoch premenných, $\alpha(X(t), t)$ sa nazýva drift, $\beta(X(t), t)$ je rozptyl, W je Wienerov proces.

Stochastický proces $f(X(t), t)$. vhodný pre rovnicu (2.7) uvažovanú vyššie, je daný diferenciálnu rovnicou (1.36)

$$dF(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \alpha(X(t), t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \beta^2(X(t), t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \beta(X(t), t) dW(t) \quad (2.8)$$

Potom pre úrokovú mieru r , riadiacu sa vzťahom (2.2) a podľa Itôovho lemma (1.36) môžeme upraviť pre zmenu hodnoty dlhopisu v tvare (postup odvodený (16)) :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial P}{\partial r} \sigma_r dW = \tilde{\mu}(t, T) dt + \tilde{\sigma}(t, T) dW. \quad (2.9)$$

kde $\mu_r = a(b - r_t)$, $\sigma_r = \sigma$, $\tilde{\mu}(t, T)$ je drift okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P , $\tilde{\sigma}(t, T)$ je rozptyl okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P .

Zostavme bezrizikové portfólio π (súbor cenných papierov - dlhopisov) z jedného dlhopisu s cenou P_1 a dobou splatnosti v čase T_1 a c dlhopisov s cenou P_2 a dobou splatnosti T_2 (vzťahy odvodené z (2, str. 96)):

$$\pi = P_1(t, T_1) + c \cdot P_2(t, T_2). \quad (2.10)$$

Zmena hodnoty portfólia π za nejaký čas dt je daná vzťahom (2, str.96):

$$d\pi = dP_1(t, T_1) + c \cdot dP_2(t, T_2) \quad (2.11)$$

Po dosadení (2.9) do vzťahu pre zmenu ceny dlhopisu (2.11) vzorec na zmenu hodnoty dlhopisu sa dá prepísať na tvar (2, str.96):

$$d\pi = (\tilde{\mu}_1(t, T_1) dt + \tilde{\sigma}_1(t, T_1) dW) + c \cdot (\tilde{\mu}_2(t, T_2) dt + \tilde{\sigma}_2(t, T_2) dW)$$

po úpravách:

$$d\pi = (\tilde{\mu}_1(t, T_1) + c \cdot \tilde{\mu}_2(t, T_2)) dt + (\tilde{\sigma}_1(t, T_1) + c \cdot \tilde{\sigma}_2(t, T_2)) dW \quad (2.12)$$

kde $\tilde{\mu}_1(t, T_1)$ je drift okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P_1 , $\tilde{\sigma}_1(t, T_1)$ je rozptyl okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P_1 , ekvivalentne pre dlhopisy P_2 .

Z dôvodu nutnosti bezrizikovosti (nemôže nastať príležitosť arbitráže, rozptyl musí byť nulový) portfólia položíme $(\tilde{\sigma}_1(t, T_1) + c \cdot \tilde{\sigma}_2(t, T_2)) = 0$, ďalej sa z tohto dá vyjadriť

$c = -\frac{\tilde{\sigma}_1(t, T_1)}{\tilde{\sigma}_2(t, T_2)}$, potom vzťah (2.12) pre zmenu hodnoty portfólia je možné písať (odvodené z (16)):

$$d\pi = \left(\tilde{\mu}_1(t, T_1) - \frac{\tilde{\sigma}_1(t, T_1)}{\tilde{\sigma}_2(t, T_2)} \tilde{\mu}_2(t, T_2) \right) dt \quad (2.13)$$

Pretože portfólio už nemá rizikovú zložku na pravej strane, jeho hodnota je deterministicky (rovnaká za všetkých podmienok) bezriziková. Výnos bezrizikovou spotovou úrokovou mierou $r(t)$ sa dá napísať $d\pi = r(t) \cdot \pi dt$ (2, str. 89). Dosadením vzťahov (2.10) a (2.13) do tejto rovnice a následnými úpravami dostaneme rovnosť, ktorá musí platiť, aby nevznikla možnosť arbitráže (2, str.96)

$$\frac{r(t)P_1(t, T_1) - \tilde{\mu}_1(t, T_1)}{\tilde{\sigma}_1(t, T_1)} = \frac{r(t)P_2(t, T_2) - \tilde{\mu}_2(t, T_2)}{\tilde{\sigma}_2(t, T_2)} \quad (2.14)$$

kde $\tilde{\mu}_1(t, T_1)$ je drift okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P_1 , $\tilde{\sigma}_1(t, T_1)$ je rozptyl okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P_1 , ekvivalentne pre dlhopisy P_2 .

A preto vzťah pre tržnú cenu rizika λ (je to kompenzácia za riziko, ktoré investori podstupujú) je z tohto dôvodu platný pre rôzne doby splatnosti T , čiže nie je závislý na T ale len na čase a hodnote dlhopisu, čo sa dá zapísať (2, str. 96):

$$\lambda(r, t) = \frac{\tilde{\mu}(t, T) - r(t)P(t, T)}{\tilde{\sigma}(t, T)}. \quad (2.15)$$

Pokiaľ vzťahy pre zmenu ceny dlhopisu (2.9) a tržní cenu rizika (2.15) skombinujeme, obdržíme vzťahy pre $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\sigma}$ (2, str. 97):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \tilde{\mu} &= \lambda \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} + r(t)P = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dosadením (2.16) do (2.15) získame fundamentálnu (základnú) rovnicu hodnoty bezkupónového dlhopisu, ktorá je parciálna derivácia v tvare (2, str.16):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (\mu_r - \lambda \cdot \sigma_r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} - rP &= 0, \\ t &\in (0, T) \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde $\mu_r = a(b - r_t)$, $\sigma_r = \sigma$, a teda dostávame rovnicu (2.2).

Pre podmienku $P(t, T)=1$, môžeme cenu bezkupónového dlhopisu prepísať (2, str.18):

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \quad (2.18)$$

kde

$$A(t, T) = \frac{(B(t, T) - (T - t)) \left(a^2 b - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t, T)}{4a} \quad (2.19)$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (2.20)$$

a, b, σ sú kladné konštanty, $r(t)$ je úroková miera.

Keď dosadíme vzťah (2.18) do (1.3), obdržíme časovú štruktúru úrokových mier $R(t, T)$ v tvare (2, str. 20):

$$R(t, T) = R + (r(t) - R) \frac{1}{a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \quad (2.21)$$

kde

$$R = b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \quad (2.22)$$

a, b, σ sú kladné konštanty, $r(t)$ je úroková miera, T je doba splatnosti a t počiatočný čas.

Pretože podľa Vašíčka (13) časová štruktúra úrokových mier $R(t, T)$ je rastúca, pre (2, str.20):

$$r(0) \leq b - \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{4a} \quad (2.23)$$

Klesajúca pre:

$$r(0) > b - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{4a} \quad (2.24)$$

a skoková pre:

$$b - \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{4a} < r(0) \leq b - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{4a} \quad (2.25)$$

a, b, σ sú kladné konštanty, $r(0)$ je úroková miera v čase 0.

2.2.2 Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR)

Závažný nedostatok Vašíckovho modelu v podobe záporných úrokových mier sa dá ľahko odstrániť napríklad spôsobom, ktorý navrhli v roku 1985 John C. Cox, Johnatan E.

Ingersol a Stephen A. Ross (14) pod názvom Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR). Krátkodobá úroková miera je v CIR modely upravenou Vašíčkovou stochastickou diferenciálnou rovnicou (2.2) v tvare (2, str.20-22):

$$dr(t) = a(b - r(t))dt - \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (2.26)$$

kde všetky parametre a , b , σ sú kladné konštanty, $r(0) = r_0$ je úroková miera v čase 0 .

Tak isto ako vo Vašíčkovom, tak aj v modeli CIR má úroková miera vlastnosť mean-reversion (opakovaný návrat k dlhodobému rovnovážnemu stavu). Proces, ktorý sa riadi rovnicou (2.26) má necentrálne chí-kvadrát rozdelenie (podrobnejšie viz (2, str.20), CIR model tak odstraňuje nedostatok Vašíčkovho modelu, a teda možnosť zápornej úrokovej miery. (2, str. 20)

Nezápornosť tohto modelu je však vidno aj priamo zo vzťahu (2.26). Poznamenajme, že σ v tomto modeli nie je riziko (volatilita), ale parameter. Vzťahom $\sigma\sqrt{r(t)}$ je dané riziko, ktoré závisí na veľkosti úrokovej miery. Z tohto dôvodu sa označuje taktiež ako podmienené riziko. Keďže je z rovnice jasné, že riziko klesá zároveň s klesajúcou úrokovou mierou, potom, ak úroková miera v spojitom čase dosiahne nulovú hodnotu, náhodná zložka bude tiež nulová, a tak isto úroková miera nevyhnutne vzrastie v dôsledku a procesu mean-reverting. (14)

Ekvivalentným postupom ako u Vašíčkovho modelu dostaneme očakávanú strednú hodnotu E a rozptyl Var úrokovej miery v čase n , ktoré sú popísané týmito vzorcami (2, str. 18):

$$E[r(t)|r(n)] = r(n)e^{-a(t-n)} + b(1 - e^{-a(t-n)}) \quad (2.27)$$

$$Var[r(t)|r(n)] = r(n) \left(\frac{\sigma^2}{a} \right) (e^{-a(t-n)} - e^{-2a(t-n)}) + b \left(\frac{\sigma^2}{2a} \right) (1 - e^{-a(t-n)}) \quad (2.28)$$

kde všetky parametre a , b , σ sú kladné konštanty, $r(n)$ je úroková miera v čase n

Z týchto vzťahov sa dá ukázať, že pokiaľ a konverguje k nekonečnu, stredná hodnota E sa limitne rovná b a rozptyl Var sa rovná 0 . V prípade, že a ide do 0, potom stredná hodnota E konverguje k aktuálnej výške úrokovej sadzby, rozptyl Var sa blíži k hodnote $\sigma^2 r(t)(n - t)$. (podrobnejšie (16))

Vzťah (2.26) sa dá vyjadriť pomocou (1.32) v tvare (odvodené z (16)):

$$dX(t) = \alpha(X(t), t)dt + \beta(X(t), t)dW(t) \quad (2.29)$$

kde $\alpha(X(t), t)$ a $\beta(X(t), t)$ sú reálne funkcie dvoch premenných, $\alpha(X(t), t)$ sa nazýva drift, $\beta(X(t), t)$ je rozptyl, W je Wienerov proces.

$$\alpha(X(t), t) = a(b - r(t)) \quad (2.30)$$

$$\beta(X(t), t) = \sigma\sqrt{r(t)} \quad (2.31)$$

kde všetky parametre a , b , σ sú kladné konštanty. Pre zjednodušenie zápisu si $\alpha(X(t), t)$ označme ako μ_r , a $\beta(X(t), t)$ ako σ_r .

Hodnota nulového kupónu v čase t závisí na úrokovej miere $r(t)$ a na čase splatnosti T , čo sa dá vyjadriť ako $P(t, T)$. Ak budeme predpokladať, že cena kupónu je hladká funkcia (má všetky derivácie vyšších rádov), môžeme využiť Itôvho lemma (1.36) na cenu kupónu. Dostaneme opäť (ako v (2.9) tvar (odvodené z (16)):

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \mu_r + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_r^2 \right) dt + \frac{\partial P}{\partial r} \sigma_r dW \quad (2.32)$$

kde $\mu_r = a(b - r_t)$, $\sigma_r = \sigma\sqrt{r(t)}$, Ďalej budeme predpokladať, že rozdelenie ceny $P(t, T)$ kupónu bude normálne, a z tohto dôvodu sa riadi rovnicou (2, str.14)

$$dP(t, T) = P(t, T)\tilde{\mu}(t, T)dt + P(t, T)\tilde{\sigma}(t, T)dW(t) \quad (2.33)$$

kde za pomoci tržnej ceny rizika (je kompenzácia za riziko, ktoré investori podstupujú) a z teórie arbitráže dostaneme (postup ekvivalentný ako v prípade Vašíčkovho modelu (2.16)) (2, str. 15) a (2, str. 97)

$$\tilde{\sigma} = \frac{\partial P}{\partial r} \sigma_r \quad (2.34)$$

$$\tilde{\mu} = \lambda \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} + r(t)P \quad (2.35)$$

$\tilde{\mu}$ je drift okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P , $\tilde{\sigma}$ je rozptyl okamžitej zmeny hodnoty dlhopisu P Ak predpokladáme konštantnú trhovú cenu rizika vzhľadom na úrokovú mieru zvolíme rozptyl (odvodené z (14)):

$$\lambda = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r(t)} \quad (2.36)$$

Dosadením ľavej strany rovnice (2.32) za pravú stranu rovnice (2.33) a za $\mu_r, \sigma_r, \mu_P, \sigma_P$, substituujeme hodnoty podľa vzťahov (2.30), (2.31), (2.34), (2.35) a (2.36), dostaneme fundamentálnu diferenciálnu rovnicu úrokovej miery pre CIR model (2, str. 21):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} r \sigma^2 + \frac{\partial P}{\partial r} (ab - (a + \lambda)r) + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0 \quad (2.37)$$

s okrajovou podmienkou (2, str.21):

$$P(t, T) = 1 \quad (2.38)$$

Cenu bezkupónového dlhopisu podľa CIR modelu získame riešením parciálnej rovnice (2.37) (podrobnejšie v (16)):

$$P(t, T) = A(\tau) e^{B(\tau)r(t)} \quad (2.39)$$

kde (2, str.21):

$$A(\tau) = \left[\frac{2\tau e^{\frac{1}{2}\beta\tau}}{2\gamma + \beta(1 - e^{-\tau\gamma})} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \quad (2.40)$$

$$B(\tau) = \frac{-2(1 - e^{-\gamma\tau})}{2\gamma + \beta(1 - e^{-\gamma\tau})} \quad (2.41)$$

$$\beta = a + \lambda + \gamma \quad (2.42)$$

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \quad (2.43)$$

$$\tau = T - t \quad (2.44)$$

všetky parametre a, b, σ sú kladné konštanty.

Časová štruktúra úrokových mier $R(t, T)$, ktorá je vyjadrená zo vzťahu (1.3), má tvar (2, str. 21)

$$R(t, T) = - \frac{[B(\tau)r(t) + \ln A(\tau)]}{T - t} \quad (2.45)$$

kde $A(\tau)$ je určené vzťahom (2.40), $B(\tau)$ je vzťah (2.41), T je doba splatnosti, t je počiatkový čas.

Limitným prechodom potom dostaneme vzťah pre výnos dlhopisu (2, str. 21):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{2ab}{a + \lambda + \gamma} \quad (2.46)$$

Ďalej sa dá ukázať, že ak je $r(t) < R$, potom časová štruktúra úrokových mier monotónna a rastúca. Pre $r(t) > \frac{ab}{(a+\lambda)}$ je časová štruktúra monotónna a klesajúca. Ak hodnoty $r(t)$ ležia medzi týmito dvoma intervalmi, hovoríme že časová štruktúra je „skoková“. Ako môžeme vidieť, CIR model umožňuje len veľmi malý rozsah skokových časových štruktúr. V porovnaní CIR modelu a Vašíčkovho modelu, pri voľbe „rozumných“ (nezáporných) hodnôt parametrov, sú časové štruktúry úrokových mier oboch modelov identické.

2.2.3 Ho-Lee model

Ako prvý model bez možnosti arbitráže (profit z rozdielu ceny určitého cenného papiera v rovnakom čase na rôznych trhoch(1, str.117)) bol navrhnutý v roku 1986 Thomasom Ho and Sang Bin Leem (14). Okamžitá úroková miera sa v tomto modeli pri rizikovo neutrálnej miere (neberie do úvahy možnosť rizika) riadi stochastickou rovnicou (2, str. 22)

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t) \quad (2.47)$$

kde očakávaný výnos (drift)

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad (2.48)$$

σ je rozptyl úrokovej miery Pripomeňme, že $\partial f(0, t)$ je okamžitá úroková miera (2, str. 22). Model síce nedisponuje vlastnosťou mean-reversion (opakovaný návrat k dlhodobému rovnovážnemu stavu), ale na druhej strane v sebe, prostredníctvom forwardových rokových mier $f(0, t)$ a deterministickej (rovnakej za všetkých podmienok) funkcie $\theta(t)$, zahŕňa všetky dostupné informácie.

Predpokladajme, že rozptyl (volatilit) okamžitých forwardových úrokových mier $f(t, T)$ je konštantná. Teda $\sigma(t, T) = \sigma$ pre všetky t, T . Potom drift forwardovej miery pri rizikovo neutrálnej miere (neberie do úvahy možnosť rizika) má tvar (2, str.38):

$$\mu(t, T) = \sigma \int_t^T \sigma du = \sigma^2 (T - t) \quad (2.49)$$

kde $\mu(t, T)$ je funkcia v čase t do času T .

Zmena forwardovej miery je potom (2, str. 38):

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma^2(T - u) du + \int_0^t \sigma dW(u) \quad (2.50)$$

kde $f(t, T)$ je forwardová miera, T, t, u sú časové hodnoty.

Keďže $f(t, t) = r(t)$ (forwardová úroková miera sa rovná okamžitej úrokovej miere), potom týmto vzťahom zabezpečíme to, že prvotnú hodnotu $r(t)$ krivky forwardových úrokových mier môžeme voliť ľubovoľne. Dostaneme (2, str. 38):

$$r(t) = f(0, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + \int_0^t \sigma dW(u) \quad (2.51)$$

$f(0, t)$ je forwardová úroková miera, t je časová hodnota.

A pomocou Itôovej lemma (1.36) dostaneme (2, str.38):

$$dr(t) = \left[\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t \right] dt + \sigma dW(t) \quad (2.52)$$

čo odpovedá vzťahu (2.48). Zderivovaním vzťahu (2.51) podľa t nadobudneme obdržíme pre drift spomínaný vzťah (2, str. 22):

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad (2.53)$$

Tento vzťah (2.53) popisuje drift, ktorý odráža sklon forwardovej krivky a rizikovosť úrokovej miery. Cena dlhopisu $P(t, T)$ v čase t sa dá napísať v tvare (2, str. 43):

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \quad (2.54)$$

kde

$$A(t, T) = \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^3 - \int_t^T \theta(s)(T - s) ds \quad (2.55)$$

$$B(t, T) = T - t \quad (2.56)$$

T, t, s sú časové hodnoty, θ je drift a σ je rozptyl (2, str. 43).

Možné očakávané zmeny okamžitých úrokových mier tohto modelu môžu eventuálne nadobúdať nemalé rozpätie hodnôt. V štruktúre $\sigma(t, T) = \sigma$ má základ jednoduchosť

tohto modelu. Podľa autorov má cena diskontného dlhopisu v Ho-Lee modeli log normálne rozdelenie. (14)

2.2.4 Hull-White model

V snahe o zlepšenie výsledkov Vašíčkovho modelu vyvinuli Hul a White (15) jeho rozšírenie, do ktorého zahrnuli premenlivý parameter v čase t . Hull-Whiteov model predpokladá, že proces má normálne rozdelenie v každom čase t . Toto zaisťuje pohodlnosť výpočtov a využitie efektívnych a jednoduchých postupov pre oceňovanie derivátov, na druhú stranu, normálne rozdelenie nevyklučuje možnosť záporných hodnôt, preto sa nemôže využiť v množstve prípadov spojených s oceňovaním. Hull-White model aj napriek tomu, že bol vyvinutý v roku 1990, je stále aktuálny a v súčasnosti sa používa pre rôzne účely.(15)

Vzťah pre zmenu krátkodobej úrokovej miery je daný nasledujúcou rovnicou (2, str. 23)

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.57)$$

Kde $\frac{\theta(t)}{a}$ je dlhodobý priemer výšky úrokovej miery, a je miera mean-reverting (rýchlosti návratu k dlhodobej hodnote)

Integrovaním pre každé $n \leq t$ dostaneme (2, str. 39):

$$r(t) = r(n)e^{-a(t-n)} + \int_n^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \sigma \int_n^t e^{-a(t-u)}dW(u) \quad (2.58)$$

t, n sú časové hodnoty, a je parameter, σ je rozptyl a θ je očakávaný výnos.

z toho plynie, že $r(t)$ má normálne rozdelenie, stredná hodnota E a rozptyl Var sú dané výrazmi (odvodené z (2, str. 18)):

$$E[r(t)|r(n)] = r(n)e^{-a(t-n)} + \gamma(n)e^{-a(t-n)} \quad (2.59)$$

$$Var[r(t)|r(n)] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-n)}) \quad (2.60)$$

kde všetky parametre a, b, σ sú kladné konštanty, $r(n)$ je úroková miera v čase n , pre prehľadnosť sme si zaviedli $\gamma(t)$, ktoré má tvar (odvodené z (2, str.39))

$$\gamma(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 \quad (2.61)$$

$f(0,t)$ je forwardová úroková miera.

Súhrnne sa potom dá vyjadriť normálne rozdelenie (odvodené z (15)):

$$r(t) \sim N \left[r(n)e^{-a(t-n)} + \gamma(t) - \gamma(n)e^{-a(t-n)}; \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-n)}) \right] \quad (2.62)$$

Pre odvodenie vzťahu pre cenu bezkupónového dlhopisu využijeme Itôovo lemma (1.36). Fundamentálny (základný) vzorec pre cenu dlhopisu P za predpokladu okrajovej podmienky $P(t,T) = 1$ je (odvodené z (2, str. 16)) :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left(a \left(\frac{\theta}{a} - r \right) - \lambda \sigma \right) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0, \quad (2.63)$$

$$t \in (0, T)$$

a je parameter, σ je rozptyl a θ je očakávaný výnos, λ je tržná cena rizika.

Cena dlhopisu sa dá vyjadriť pomocou vzťahu (2, str. 45)

$$P(t, T) = e^{(A(t,T) - B(t,T) \cdot r(t))} \quad (2.64)$$

kde

$$A(t, T) = \int_t^T \left[\frac{1}{2} \sigma^2 B^2(s, T) - \theta(s) B(s, T) \right] ds \quad (2.65)$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad (2.66)$$

kde t, s, T sú časové hodnoty, a, σ sú kladné konštanty.

Pretože v modeli vyvinutom Hull a Whitom sú parametre závislé na čase, všetky ich hodnoty musia byť dostupné v čase t , aby bolo možné vyčíslit' hodnotu dlhopisu k tomuto momentu. (15)

2.3 Kalibrácia modelov

Všetky vyššie popísané modely obsahujú parametre, ktorých hodnoty sú závislé na konkrétnych historických dátach. Je veľmi dôležité tieto parametre odhadnúť čo najpresnejšie. Akékoľvek chyby v odhadoch môžu spôsobiť skreslené ocenenie finančného aktíva. Odhad týchto parametrov sa nazýva *kalibrácia* (odhad týchto parametrov).

2.3.1 Kalibrácia Vašíčkovho a CIR modelu

Predpokladajme, že okamžitá úroková miera $r(t)$ má tvar (17, str. 5):

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma r^\gamma(t)dW(t)$$

Kde $t \geq 0$, a , b , σ sú kladné konštanty a γ je nezáporné a $W(t)$ je Wienerov proces. Parameter γ určuje, o aký typ modelu ide. Pre $\gamma = 0$ ide o Vašíčkov model, pre $\gamma = \frac{1}{2}$ ide o model CIR. (17, str. 5)

Cena bezkupónového dlhopisu $P(t, T)$ je určená parciálnou diferenciálnou rovnicou (17, str. 5):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (a(b - r(t)) - \hat{\lambda}\sigma r^\gamma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (2.67)$$

Kde $t \in (0, T)$ a $r > 0$. Pre $P(t, T) = 1$.

Tržná cena rizika $\hat{\lambda}$ (to kompenzácia za riziko, ktoré investori podstupujú) je rozdielna pre Vašíčkov a pre CIR model. V prípade Vašíčka $\hat{\lambda}(r) = \lambda$, zataľ čo pre CIR $\hat{\lambda}(r) = \frac{\lambda r^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$, kde λ je konštanta. (17, str.5)

Ak je počet parametrov konečný, tak pri nekonečnej sústave rovníc nemôžeme očakávať, že v čase 0 sa pre každé T (čas splatnosti) bude modelová cena dlhopisu zhodovať s cenou odporozovanou na trhu. Preto sa pridávajú dodatočné kritériá, ktoré vyjadrujú rozdiel modelovej a skutočnej ceny. Toto kritérium sa potom minimalizuje. Z dôvodu sú výhodnejšie modely s nekonečne veľa parametrami (napr. Hull-White model a Ho-Lee model). (2, str.45)

Uvedme základnú metodiku kalibrácie. (2, str. 44)

Predpokladajme, že zmena okamžitej úrokovej miery $r(t)$ je (2, str.44):

$$dr(t) = \mu(t, r(t); \alpha)dt + \sigma(t, r(t); \alpha)dW(t) \quad (2.68)$$

kde $\mu(\cdot), \sigma(\cdot)$ sú známe funkcie a α je vektor neznámych parametrov.

1. Vyriešime (pre každé pevné T) rovnicu (2, str.44):

$$\frac{\partial F_T(t, r; \alpha)}{\partial t} + \mu \frac{\partial F_T(t, r; \alpha)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F_T(t, r; \alpha)}{\partial r^2} - rF_T(t, r; \alpha) = 0 \quad (2.69)$$

$$F_T(t, r, ; \alpha) = 1$$

ktorá nám určí modelovú cenu dlhopisu $P(t, T; \alpha) = F_T(t, r, ; \alpha)$

2. Teraz je treba zlúčiť túto cenu s napozorovanými veličinami. Keďže čas $t = 0$ označuje súčasnosť, budeme predpokladať, že pre každé $T > 0$ poznáme skutočnú cenu dlhopisu $P^*(0, T)$.

Položíme $P(t, r, ; \alpha) = P^*(0, T)$. Dostávame (nekonečnú) sústavu rovníc, kde neznáma je vektor parametrov α . (2, str. 44-45)

3. Označíme riešenie sústavy α^* a dostávame rovnicu úrokovej miery $r(t)$ (2, str.45)

$$dr(t) = \mu(t, r(t); \alpha^*)dt + \sigma(t, r(t); \alpha^*)dW(t) \quad (2.70)$$

4. Uvedený postup opakujeme v pravidelných intervaloch.

2.3.2 Kalibrácia Hull-White modelu

Z kapitoly (2.2.4) vieme, že model je zadaný rovnicou (2.57) z (2, str.45):

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.71)$$

a, σ sú známe konštanty, σ je rozptyl. Naším cieľom je nájsť drift $\theta(t)$ (2, str. 45).

Cena dlhopisu je zadaná rovnicou (2, str. 45):

$$P(t, T) = e^{(A(t, T) - B(t, T)r(t))} \quad (2.72)$$

Kde $A(t, T)$ a $B(t, T)$ majú tvar (2, str. 45):

$$A(t, T) = \int_t^T \left[\frac{1}{2} \sigma^2 B^2(s, T) - \theta(s)B(s, T) \right] ds \quad (2.73)$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad (2.74)$$

Takto vypočítané modelové ceny kupónov sa majú rovnať (pre $t = 0$) napozorovaným aktuálnym cenám $P^*(0, T)$. Je výhodnejšie použiť forwardové miery, ktoré sú ekvivalentné (rovnaké) k znalosti cien dlhopisov. Pre známe forwardové miery máme (2, str. 45):

$$f^*(0, T) = - \frac{\partial \log P^*(0, T)}{\partial T} \quad (2.75)$$

Pre modelové forwardové miery dosadením (2.73) a (2.74) do (2.72) dostaneme (2, str. 46):

$$f(0, T) = e^{-aT}r(0) - \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-aT})^2 + \int_0^T e^{-a(T-s)}\theta(s)ds \quad (2.76)$$

Položením do rovnosti známou forwardovú mieru $f^*(0, T)$ a modelovú $f(0, T)$ dostaneme rovnicu (2, str. 46):

$$f^*(0, T) = e^{-aT}r(0) - \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-aT})^2 + \int_0^T e^{-a(T-s)}\theta(s)ds \quad (2.77)$$

Jej riešením je (2, str. 46):

$$\theta(t) = \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + g(t) + a[f^*(0, t) + g(t)] \quad (2.78)$$

kde

$$g(t) = \frac{\sigma^2}{2a}B^2(0, t) \quad (2.791)$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

Táto voľba driftu $\theta(t)$ nám zaručí, že na začiatku sa modelová cena dlhopisu bude rovnať cene pozorovanej, teda

$$P(0, T) = P^*(0, T), \quad T > 0 \quad (2.80)$$

Dosadením (2.73) a (2.74) do (2.72) dostaneme modelovú cenu dlhopisu v budúcnosti (2, str. 46):

$$P(t, T) = \frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} e^{\left\{B(t, T)f^*(0, t) - \frac{\sigma^2}{2a}B^2(t, T)(1 - e^{-2at}) - B(t, T)t(t)\right\}} \quad (2.81)$$

kde $B(t, T)$ je dané pomocou (2.79) (2, str. 46).

2.3.3 Kalibrácia Ho-Lee modelu

Z kapitoly (2.2.3) vieme, že model Ho-Lee je daný rovnicou(2.47) z (2, str. 46):

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t)$$

θ je drift a σ rozptyl.

Môžeme tento model chápať ako špeciálny prípad Hull-Whiteovho modelu, kde (2, str. 47):

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= T - t \\
 A(t, T) &= \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^3 - \int_t^T \theta(s)(T - s) ds \\
 \theta(t) &= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t
 \end{aligned}
 \tag{2.82}$$

Dosadením a následnými úpravami dostaneme budúcu modelovú cenu dlhopisu (2, str. 47):

$$P(t, T) = \frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)}
 \tag{2.83}$$

Kde modelová cena sa na začiatku rovná cene odpozorovanej.

$$P^*(0, T) = P(0, T), T > 0$$

2.4 Medzibankové úrokové miery

LIBOR (London InterBank Offered Rate) je úroková miera na londýnskom medzibankovom trhu. Zobrazuje úrokové sadzby rôznych mien. Využíva sa ako referenčná sadzba pri oceňovaní úrokových derivátov (kapitola 1.2). Napriek tomu, že existuje istá minimálna šanca nesplácania, budeme LIBOR považovať za bezrizikovú mieru. Ďalšou medzibankovou úrokovou mierou, ktorá má rovnaké vlastnosti je napr. PRIBOR (Prague InterBank Offered Rate). (2, str. 59)

Následujúce vzorce vychádzajú zo zdroja (2, str.59-61)

Nech $Z(t, \delta)$ udáva hodnotu bezkupónového dlhopisu v čase t , splatného za čas δ , platí¹

$$Z(t, \delta) = P(t, T), \text{ kde } \delta = T - t
 \tag{2.84}$$

a $r(t, u)$ nech je okamžitá forwardová miera $f(t, s)$ v čase t na čas $t + u$:

$$r(t, u) = f(t, s), \text{ kde } u = s - t
 \tag{2.85}$$

¹ Druhý časový údaj v hodnotách dlhopisov okamžitých forwardových úrokových mier udáva „za ako dlho“ a nie „kedy“, ako sme používali doteraz. (2, str. 59)

a platí (2, str. 59):

$$Z(t, \delta) = e^{(-\int_0^\delta r(t,u)du} \quad (2.86)$$

Ak okamžitá forwardová miera $f(t,s)$ splňuje rovnicu (2, str. 59):

$$df = \sigma(t, s)\hat{\sigma}(t, s)dt + \sigma(t, s)dW(t) \quad (2.87)$$

kde $s = T - t$, σ a $\hat{\sigma}$ sú rozptyly (2, str. 59):

$$\hat{\sigma}(t, s) = \int_0^s \sigma(t, u)du \quad (2.88)$$

Potom pre $r(t,u)$ platí rovnica (2, str. 60):

$$dr(t, u) = \frac{\partial}{\partial u} \left[r(t, u) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}(t, u)^2 \right] dt + \sigma(t, u)dW(t) \quad (2.89)$$

2.4.1 Spotový LIBOR

Nech δ je teraz najkratší čas, na ktorý je LIBOR kótovaný (úradný záznam kurzov cenných papierov na burze). Spotový LIBOR $L(t,0)$ je potom definovaný na základe tohto vzťahu (2, str. 60):

$$Z(t, \delta)(1 + \delta L(t, 0)) = 1 \quad (2.90)$$

Ak teda investujeme na LIBOR $L(t,0)$ v čase t sumu $Z(t,\delta)$ do doby $t + \delta = T$, čo je čas splatnosti dlhopisu, potom v čase T musíme získať čiastku rovnú 1. Potom platí (2, str. 60):

$$1 + \delta L(t, 0) = \frac{1}{Z(t, \delta)} = e^{\int_0^\delta r(t,u)ds} \quad (2.91)$$

$$L(t, 0) = \frac{(e^{\int_0^\delta r(t,u)du} - 1)}{\delta} \quad (2.92)$$

2.4.2 Forwardový LIBOR

V ďalšom kroku vyjadríme forwardový LIBOR. Za predpokladu spojitého úročenia, uvažujeme investovať v čase t čiastku $\frac{Z(t,\tau+\delta)}{Z(t,\tau)}$ od $(t + \tau)$ do $(t + \tau + \delta)$ (δ, τ sú časové hodnoty). Podľa (2.86) si vyjadríme hodnotu kúpnu a dostaneme (2, str. 60):

$$\frac{\exp(-\int_0^{\tau+\delta} r(t,u)du)}{\exp(-\int_0^{\tau} r(t,u)du)} \int_0^{\delta} r(t,\tau+u)du = 1 \quad (2.93)^2$$

Vidíme, že táto investícia nám prinesie v čase $(t + \tau + \delta)$ čiastku 1. Ak investujeme teraz čiastku $\frac{Z(t,\tau+\delta)}{Z(t,\tau)}$ forwardovým LIBOR $L(t, \tau)$ (dohodnutým v čase t) od doby $(t + \tau)$ do doby $(t + \tau + \delta)$, musíme inkasovať rovnako (aby neexistovala arbitráž). Preto musí platiť (2, str. 61):

$$\frac{Z(t, \tau + \delta)}{Z(t, \tau)} (1 + \delta L(t, \tau)) = 1 \quad (2.94)$$

Podľa tohto vzťahu sa dá vypočítať $L(t, \tau)$. Máme (2, str. 61):

$$\begin{aligned} 1 + \delta L(t, \tau) &= \frac{Z(t, \tau)}{Z(t, \tau + \delta)} = \frac{\exp\{-\int_0^{\tau} r(t, s)ds\}}{\exp\{-\int_0^{\tau+\delta} r(t, s)ds\}} \\ &= \exp\left\{-\int_{\tau}^{\tau+\delta} r(t, s)ds\right\} \\ \Rightarrow L(t, \tau) &= \frac{\exp\{-\int_{\tau}^{\tau+\delta} r(t, s)ds\} - 1}{\delta} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Na záver si okrem toho vyjadríme aj $\lim_{\delta \rightarrow 0} L(t, \tau)$. Lahko sa presvedčíme, že (2, str. 61):

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} L(t, \tau) = \left. \frac{\partial L(t, \tau)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = r(t, \tau). \quad (2.96)$$

² Z dôvodu prehľadnosti je e^x písané ako $\exp\{x\}$.

3 VLASTNÉ NÁVRHY RIEŠENIA

V tejto kapitole aplikujeme dva z vyššie uvedených modelov: konkrétne Vašíčkov model a CIR model. Model CIR odstraňuje nedostatok Vašíčkovho modelu, ktorým je možnosť, že úroková miera $r(t)$ môže byť záporná. Zaujímalo ma, či sa to prejaví aj pri praktickej aplikácií.

Použijeme reálne dáta medzibankovej úrokovej miery PRIBOR ktorá má rovnaké vlastnosti ako iné medzibankové úrokové miery, napríklad LIBOR. Naším cieľom je ukázať, akým spôsobom sa dajú uvedené modely aplikovať na dáta prostredníctvom software a porovnať jednotlivé modely medzi sebou. Štatistické a optimalizačné metódy, ktoré použijeme, nie sú popísané podrobne, avšak sú odkazované a ľahko dohľadateľné.

3.1 Kolmogorov-Smirnovova štatistika

Aby sme mohli v praktickej časti práce vykonať porovnanie vybraných modelov (konkrétne sa bude jednať o model Vašíčkov a CIR model), potrebujeme definovať kumulatívnu distribučnú funkciu ktorá nie je daná teoreticky, ale vychádza z pozorovaných dát. K tomuto účelu bude slúžiť tzv. empirická distribučná funkcia.

Majme n -rozmerný vektor reálnych čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) . *Empirickou distribučnou funkciou* nazveme funkciu F_n , ktorá je na množine \mathbb{R} definovaná (17, str.9):

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{(j,x)}(x_i) \quad (3.1)$$

kde $Y_{(j,x)}$ je charakteristická funkcia, ktorá je uzatvorená sprava na intervale (j, x) .

Dále uvažujeme charakteristickou funkciou na intervale, ktorá sa rovná jednej, pokiaľ jej argument v danom intervale leží, a je rovný nule, ak leží mimo neho. Empirická distribučná funkcia sa tiež nazýva *výberovou distribučnou funkciou*. Je evidentní, že sa jedná o nespojitú funkciu so skokmi v každom $x_i, i = 1, \dots, n$. Je ale spojitá zľava.

Majme dve rôzne empirické distribučné funkcie F_m a G_n . Nech F_m je daná realizáciou náhodného výberu (x_1, x_2, \dots, x_m) a G_n náhodného výberu realizáciou (y_1, y_2, \dots, y_n) , $m, n \in \mathbb{N}$. Pak Kolmogorov-Smirnovova štatistika (označme D) je daná (18, str. 72):

$$D = \max_{1 \leq j \leq m+n} |F_m(z_j) - G_n(z_j)| \quad (3.2)$$

kde z_j je j -tý člen postupnosti, ktorá vznikne zlúčením prvkov (x_1, x_2, \dots, x_m) s prvkami (y_1, y_2, \dots, y_n) a usporiadaním tejto zlúčenej množiny podľa veľkosti vzostupne.

Kolmogorov-Smirnovova štatistika je teda maximom vzdialenosti medzi dvoma empirickými distribučnými funkciami. Túto štatistiku použijeme v pri porovnaní aplikovaných modelov.

3.2 Dáta

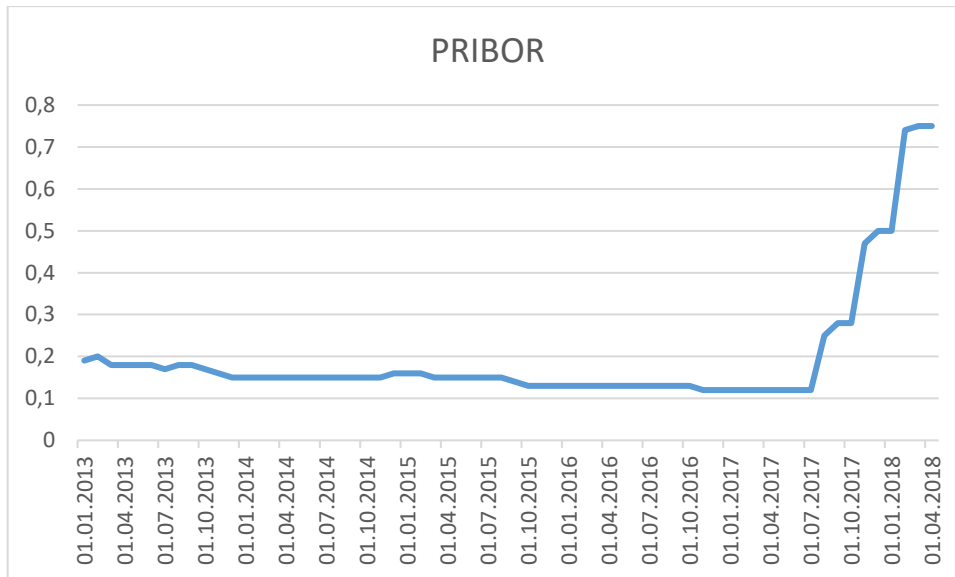
Pre aplikáciu modelov použijeme dáta z verejne prístupnej databázy ARAD. Ide o databázu, ktorá je k dispozícii na stránkach Českej národnej banky (19). Pre naše potreby využijeme časovú radu medzibankovej úrokovej sadzby PRIBOR (Prague Inter Bank Offered Rate) na české koruny, a to na mesačnej báze v období od 1.1.2013 do 31.4.2018. Jedná sa o časovú radu s 64 pozorovaniami. Hodnoty časovej rady sú v databáze uložené ako desatinné čísla, jednotky sú v miliónoch Kč.

V Tabuľke č.1 uvediem spočítané základné štatistické charakteristiky (5, str. 51):

Tabuľka 1: Štatistické charakteristiky tejto časovej štruktúry úrokových mier PRIBOR (Zdroj: vlastné spracovani, podľa ARAD)

Priemerná hodnota	0,19646875
Výberový rozptyl	0,021320634
Výberová smerodajná odchýlka	0,146015869
Minimum	0,12
Maximum	0,75
Medián	0,15
Prvý kvartil	0,13
Tretí kvartil	0,17675
Priemerná diferencia	0,0086875
Výberový rozptyl diferencií	0,001724155

Z Grafu č.2 môžeme vidieť, že úroková miera PRIBOR, v pozorovanom období, nevykazovala extrémne kolísanie hodnôt. Zlom nastal až v lete 2017, a ako môžeme vidieť, od tohto obdobia rastie. Na ose X je čas a na ose Y sú hodnoty, ktoré PRIBOR dosahuje:



Graf č.2: Vývoj úrokovej sadzby PRIBOR od 1.1.2013 do 30.4.2018 (Zdroj: Autor)

3.3 Eulerova metóda - simulácia

Pre zvolené modely (Vašíčkov a CIR) urobíme odhad parametrov modelu a simuláciu úrokovej sadzby PRIBOR. K simulácii využijeme Eulerovú metódu, ktorá sa používa pomerne obecné hlavne vtedy, keď neexistuje alebo nie je známe explicitné analytické riešenie. *Eulerova metóda* je založená na *Eulerovej diskretizácii*. Tá spočíva v definovaní časových okamihov $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ a nahradením stochastickej diferenciálnej rovnice (2.36) jej diskretnou verziou (7):

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + (\alpha - \beta r(t_i))[t_{i+1} - t_i] + \sigma \sqrt{R(t_i)} \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z(t_i) \quad (3.3)$$

kde Z_1, Z_2, \dots, Z_n je šum. Tu je nutné spomenúť problém, a tým je možnosť, že hodnota $r(t_i)$ môže byť záporná a teda odmocnina z nej je možná. Tento problém sa rieši buď tým, že sa vždy, keď vyjde záporná hodnota, položí rovno nule, alebo cez tzv. reflexiu, tj. použije sa absolútna hodnota hodnoty $r(t_i)$, kedykoľvek bude záporná a pokračuje sa od tejto novej hodnoty.

3.4 Výsledky

Použijeme Vašíčkov model a model CIR na reálne úrokové sadzby. Táto aplikácia spočíva vždy v dvoch krokoch. V prvom kroku musíme odhadnúť parametre modelu, a v druhej budeme simulovať trajektórie výsledného náhodného procesu pomocou

Eulerovej metódy. Jednotlivé odhady parametrov si popíšeme detailnejšie. Pre obidva prípady budú uvedieme použité skripty pre odhad parametrov, pre vytvorenie príslušného objektu a tiež aj pre simulácie trajektórií riešení každého modelu.

3.5 Simulácia Vašíčkovho model

Aplikovaný postup nižšie je inšpirovaný zdrojom. (20) Diskrétnou verziou vzorca (2.3):

$$r(t_{i+1}) = c + br(t_i) + \delta Z(t_i) \quad (3.4)$$

kde Z_1, Z_2, \dots, Z_n sú šumy asú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny, ktorých majú normálne rozdelenie, kde (20):

$$c = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)}) \quad (3.5)$$

$$b = (1 - e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)})$$

parameter δ môžeme zistiť pomocou Itôovej izometrie (7, str.85):

$$\delta = \sigma \sqrt{\frac{1}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_{i+1}-t_i)})}. \quad (3.6)$$

Priebeh $r(t_i)$ daný (3.4) je autoregresný proces prvého rádu AR(1). Pokiaľ je $\beta > 0$, potom $0 < b < 1$ a takýto proces je stály a vracia sa k dlhodobému priemeru, ktorý sa rovná $\frac{\alpha}{\beta}$. Zo strednej hodnoty (2.4) plynie (5, str. 54)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_t | x_s) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.7)$$

A z (2.5) plynie: (20)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var(x_t | x_s) = \frac{\sigma^2}{2\beta} \quad (3.8)$$

K výpočtu parametrov modelu z dát môžeme využiť metódu najmenších štvorcov, ktorá je bežne v literatúre popísaná. Počítame parametre b a c v (3.4) následnou minimalizáciou (20):

$$(\hat{b}, \hat{c}) = \arg \min_{b,c} \sum_{i=1}^{n-1} (r(t_{i+1}) - c - br(t_i))^2 \quad (3.9)$$

Pričom odhad parametru $\hat{\delta}$ z δ je zadaný ako priemerná štandardná odchýlka rezíduí metódy najmenších štvorcov (20):

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (r(t_{i+1}) - \hat{b}r(t_i) - \hat{c})^2} \quad (3.10)$$

Pôvodné parametre a , b a σ v modeli (2.2) môžeme pomocou vypočítaných koeficientov \hat{b} , \hat{c} a $\hat{\delta}$ ľahko odvodiť z (3.5) a dostaneme (20)

$$\begin{aligned} a &= \frac{-\hat{c} \ln(\hat{b})}{(t_{i+1} - t_i)(1 - \hat{b})} \\ b &= \frac{-\ln(\hat{b})}{(t_{i+1} - t_i)} \\ \sigma &= \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{\frac{(\hat{b}^2 - 1)(t_{i+1} - t_i)}{2 \ln(\hat{b})}}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pre konkrétnu realizáciu dát využijem systém Matlab. Skript vyzerá nasledovne (20):

```
Model.Data=xlsread('dataPRIBOR2','B2:B1341');
Model.Time=xlsread('dataPRIBOR2','D2:D1341');
ML_VPar = Vasicek_calibration(Model.Data,1);
Hwvm=hwm(ML_VPar(1),ML_VPar(2),ML_VPar(3),'StartState',Model.Data(1));
[Y,T]=simByEuler(Hwvm,64);
t=T(1:end-1);
plot(T,Y,'red',t,Model.Data,'blue');
hist(Y);
```

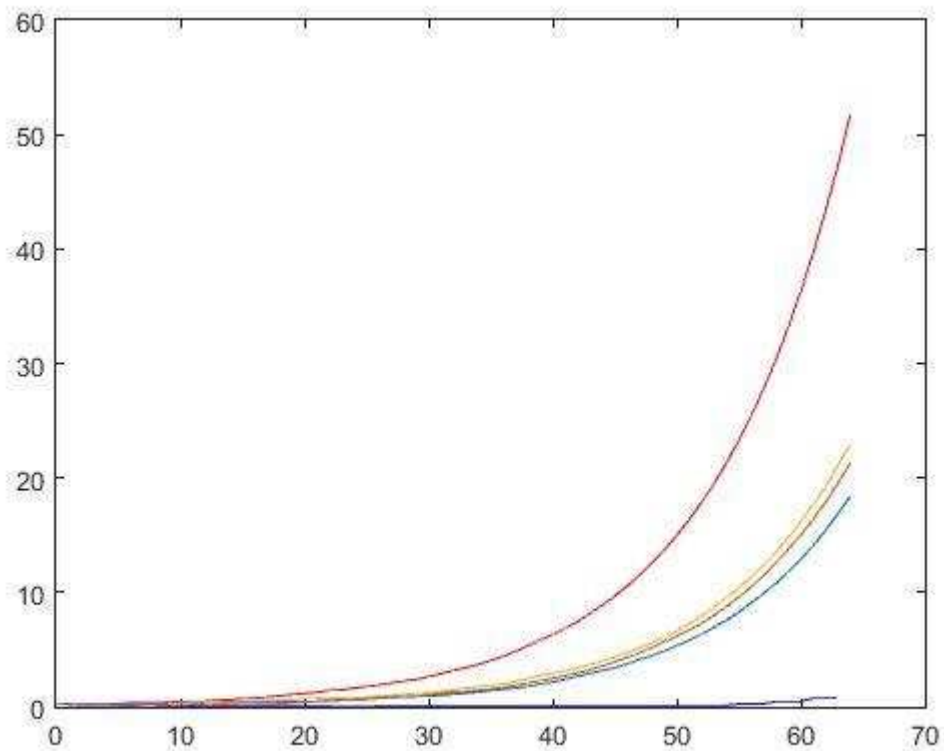
Skript s názvom Vasicek_calibration je procedúra odhadujúca parametre Vašíčkovho modelu pomocou metódy najmenších štvorcov (20):

```
function ML_VPar = Vasicek_calibration(V_data,dt)
% =====
% CIEL : OLS odhad pre Vašíčkov model
% =====
% použitie : Model.Time = Delta t
% Model.Data = vyjadrenie úrokových mier
% Parametre = modelove parametre (alpha, beta, sigma)
% =====
N=length(V_data);
x=[ones(N-1,1) V_data(1:N-1)];
ols=(x'*x)^(-1)*(x'*V_data(2:N));
resid = V_data(2:N)-x*ols;
c=ols(1);
b=ols(2);
delta=std(resid);
alpha=-log(b)/dt;
theta=c/(1-b);
sigma=delta/sqrt((b^2-1)*dt/(2*log(b)));
```



```
ML_VPar=[alpha theta sigma];  
end
```

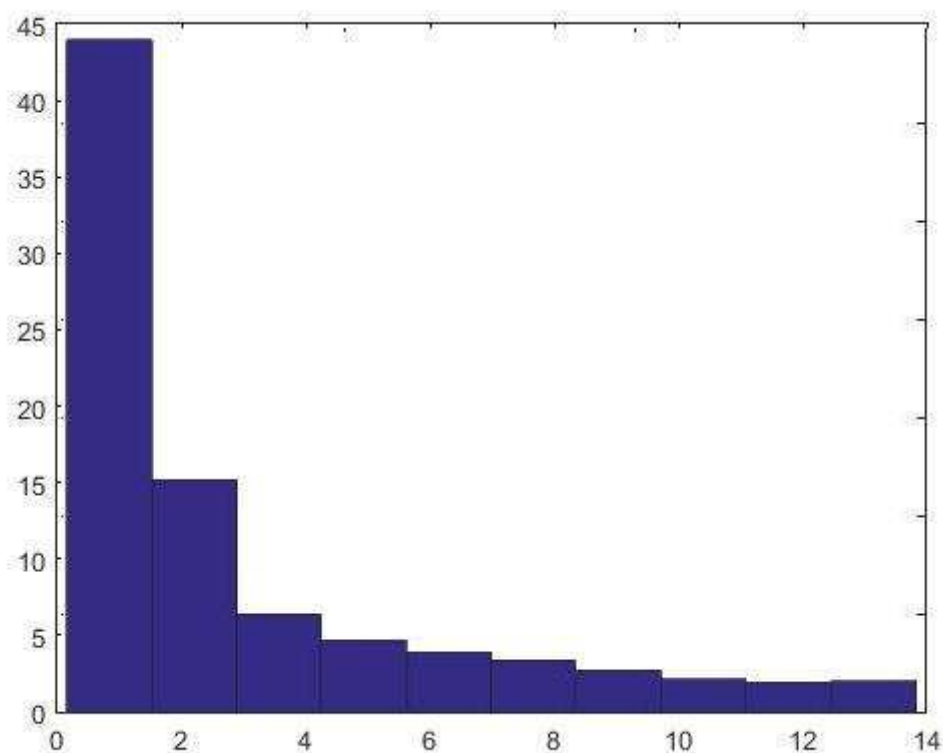
Výstupom simulovanej trajektórie procesu je Graf č.3, čo je riešením tohto modelu. Simulujeme trajektóriu prostredníctvom Eulerovej metódy, a to tak, aby proces začínal v počiatočnom stave. Skutočné dáta sú vyjadrené modrou farbou. Proces má vlastnosť mean-reversion (návrat k dlhodobej strednej hodnote).



Graf č.3: Simulácia Vašíčkovho modelu (Zdroj: Vlastné spracovanie)

Na ose Y sú odhadnuté simulované hodnoty úrokovej miery PRIBOR a na ose X je čas (pre nutnosť fungovania programu som sú hodnoty PRIBOR označené od 1 do 64, a nie konkrétnym dátumom)

Histogram simulovaných hodnôt zobrazuje početnosť hodnôt úrokovej miery PRIBOR v jednotlivých intervaloch.



Graf č.4: Histogram simulovaných hodnôt úrokových mier (Vašíčkov model) (Zdroj: vlastné spracovanie)

Na ose Y početnosť vypočítaných hodnôt, na ose X sú intervaly hodnôt.

3.6 Simulácia CIR modelu

Aplikácia postupu je inšpirovaná prácou (21). Keď a, b a σ sú kladné reálne konštanty a $2a \leq \sigma^2$, potom riešenie CIR modelu je vyhovujúco definované a má marginálnu distribúciu, ktorá sama má gamma rozdelenie. Pre odhad parametrov a, b a σ využijeme pravdepodobnosť prechodu (21):

$$p(r_{t_{i+1}} | r_{t_i}; a, b, \sigma) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}) \quad (3.12)$$

kde parametre (21):

$$c = \frac{2b}{\sigma^2(1 - e^{-b(t_{i+1}-t_i)})} \quad (3.13)$$

$$u = cr_{t_i} e^{-b(t_{i+1}-t_i)}$$

$$v = cr_{t_{i+1}}$$

$$q = \frac{2a}{q^2} - 1$$

$I_q(2\sqrt{uv})$ je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu pre stupňa q . (21)

Parametre a, b, σ odhadneme pomocou metódy maximum likelihood L.

Hľadáme hodnoty parametrov, pre ktoré bude

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{a, b, \sigma} \ln L(a, b, \sigma) \quad (3.14)$$

Pre riešenie maximalizačnej úlohy (3.13) sa musíme spoľahnúť na aproximačné numerické metódy. V našom prípade použijeme simplexovú metódu, vyžadujúcu vstupné hodnoty parametrov, ktoré sú ich prvou aproximáciou. Pre tento účel použijeme klasickú metódu najmenších štvorcov na (3.1) Najprv podelíme (3.1) výrazom $\sqrt{r(t_i)}$ a dostaneme:

$$\frac{r(t_{i+1})}{\sqrt{r(t_i)}} = \frac{r(t_i)}{\sqrt{r(t_i)}} + \frac{(\alpha - \beta r(t_i))[t_{i+1} - t_i]}{\sqrt{r(t_i)}} + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z(t_i) \quad (3.15)$$

Vyriešime minimalizčnú úlohu

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg \min_{a, b} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{r(t_{i+1})}{\sqrt{r(t_i)}} - \frac{r(t_i)}{\sqrt{r(t_i)}} + \frac{(\alpha - \beta r(t_i))[t_{i+1} - t_i]}{\sqrt{r(t_i)}} \right)^2 \quad (3.16)$$

Minimalizáciou (3.15) podľa parametrov a a b obdržíme odhady metódou najmenších štvorcov týchto parametrov a odhad parametru σ získame ako štandardnú odchýlku reziduí.

Pre konkrétnu realizáciu dát využijem systém Matlab. Skript vyzerá nasledovne (21):

```
Model.Data=xlsread('dataPRIBOR2','B2:B1341');
Model.Time=xlsread('dataPRIBOR2','D2:D1341');
x = Model.Data(1:end-1);
dx = diff(Model.Data);
dx = dx./x.^0.5;
reg = [Model.Time(1:end-1)./x.^0.5,Model.Time(1:end-1).*x.^0.5];
```

```

drift = reg\dx;
res = reg*drift - dx;
alpha = -drift(2);
mu = -drift(1)/drift(2);
sigma = sqrt(var(res, 1)/min(Model.Time));
Params = [alpha mu sigma];
[coef, val]=fminsearch(@(Params) CIRObjective1(Params,Model),Params);
Cirm=cir(coef(1),coef(2),coef(3), 'StartState',Model.Data(1));
[Y,T]=simByEuler(Cirm,64);
t=T(1:end-1);
plot(T,Y, 'red ',t,Model.Data, 'blue ');
hist(Y);

```

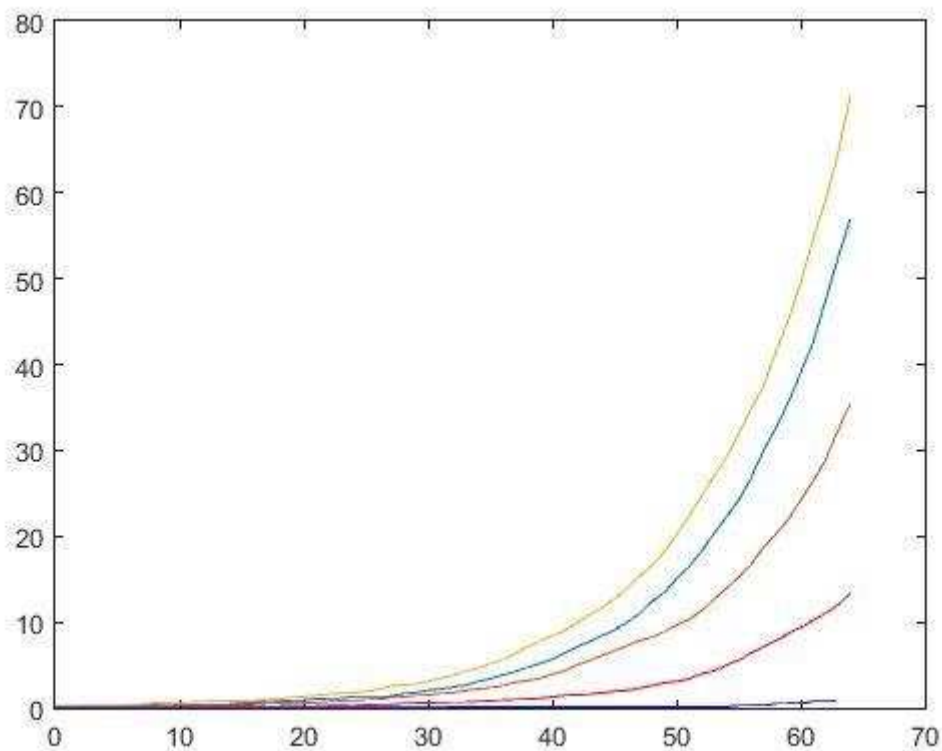
Skript s názvom CIRObjective1 je procedúra odhadujúca parametre CIR modelu (21)

```

function lnL = CIRObjective1( Params, Model )
%%=====
% CIEL : Log-likelihood odhad pre CIR model
% =====
% pužietie: Model.Time = Delta t
% Model.Data = vyjadrenie úrokových mier
% Parametre = Modelové parameters (alpha, mu, sigma)
% =====
% výstup : lnL = objektívna hodnota funkcie
% =====
Data = Model.Data;
DataF = Data(2:end);
DataL = Data(1:end-1);
Nobs = length(Data);
Time = min(Model.Time);
alpha = Params(1);
mu = Params(2);
sigma = Params(3);
c = 2*alpha/(sigma^2*(1-exp(-alpha*Time)));
q = 2*alpha*mu/sigma^2-1;
u = c*exp(-alpha*Time)*DataL;
v = c*DataF;
z = 2*sqrt(u.*v);
bf = besseli(q,z,1);
lnL= -(Nobs-1)*log(c)+sum(u+v-0.5*q*log(v./u)-log(bf)-z);
end

```

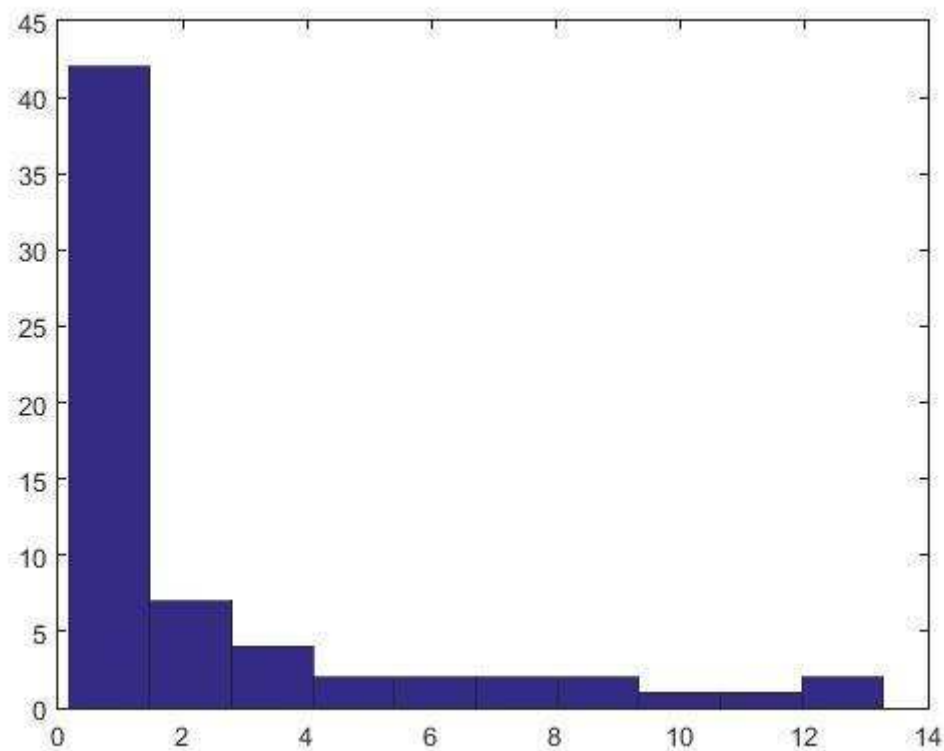
Výstupom je Graf č.6 simulovanej trajektórie procesu čo je riešením tohto modelu. Simulujeme trajektoriu prostredníctvom Eulerovej metódy, a to tak, aby proces začínal v počiatočnom stave. Skutočné dáta sú vyjadrené modrou farbou. Proces má vlastnosť mean-reversion.



Graf č.5: Simulácia CIR modelu (Zdroj: Autor)

Na ose Y sú odhadnuté simulované hodnoty úrokovej miery PRIBOR a na ose X je čas (pre nutnosť fungovania programu som sú hodnoty PRIBOR označené od 1 do 64, a nie konkrétnym dátumom)

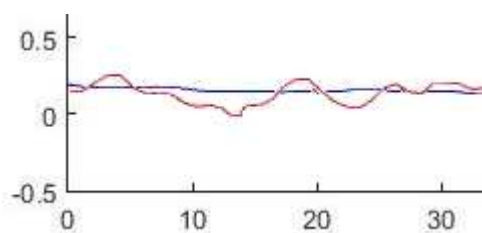
Histogram simulovaných hodnôt zobrazuje početnosť hodnôt úrokových mier v jednotlivých intervaloch, pričom k tomuto účelu sme vykonali 100 nezávislých simulácií.



Graf č.6: Histogram simulovaných hodnôt úrokových mier (CIR model) (Zdroj: Autor)

Na ose Y početnosť vypočítaných hodnôt, na ose X sú intervaly hodnôt.

Na Grafe č.7 je znázornený zoom simulácie Vašíčkovho modelu použitím modifikovaného Matlab skriptu. Pre kratší časový úsek je vidieť, že model má vlastnosť mean-reverting (návrat k rovnovážnej hodnote)



Graf č.7: Zoom simulácie Vašíčkovho modelu (Zdroj: Autor)

3.7 Porovnanie modelov

K porovnaniu prevedených modelov použijeme KS štatistiku, ktorú sme bližšie opísali v kapitole 3. Spočítame hodnoty KS pre obidva modely, ktoré budú tým väčšie, čím bude väčšia maximálna odchýlka empirickej distribučnej funkcie. Čím nižšia hodnota KS štatistiky bude pre daný model vychádzať, tým lepšie tento model charakterizuje chovanie skutočných úrokových mier. Hodnoty KS pre jednotlivé modely sú uvedené v tabuľke Tabuľka č.2

Tabuľka č.2: KS štatistiky (Zdroj: vlastné spracovanie)

Vašíčkov model	$4,7409 * 10^{-19}$
CIR model	$3,3721 * 10^{-20}$

Z uvedených hodnôt je zrejmé, že hodnota KS štatistiky je nižšia pre model CIR . A preto by sme navrhli jeho aplikáciu.

Nedokonalosť simulácií môže to byť spôsobená výberom dátového súboru, jeho veľkosťou, ako aj samotnými hodnotami. Na obrázku Graf č.2 je zobrazený vývoj úrokovej sadzby PRIBOR. Všimnime si, že sadzba sa od začiatku držala na skoro rovnakej úrovni. Avšak od istého momentu začala rapídne, môžeme povedať že takmer exponenciálne, stúpať. Z toho stanoviska vychádzali aj použité modely.

3.8 Návrh zlepšenia

Modelov úrokových mier existuje v literatúre celá rada. Nejedná sa len o modely krátkodobé, ale tak isto aj o dlhodobé modely, modely jednofaktorové, viacfaktorové ako aj modely založené na iných princípoch. V práci som sa zamerala len na malú skupinu jednofaktorových modelov. V praxi sa však viac osvedčili viacfaktorové modely, ktoré majú oveľa širšie spektrum fixovacích vlastností, ktorými odstraňujú nedokonalosti modelov. Napríklad ide o existenciu záporných sadzieb. Musíme však pripomenúť, že neexistuje dokonalý model, ktorým by sa dala s vysokou presnosťou predikovať cena portfólia tak, aby odpovedala skutočným trhovým hodnotám.

ZÁVER

Vo finančnej praxi sa stretávame s rôznym správaním úrokových mier. V niektorých obdobiach je ich rizikovosť vyššia a inokedy nižšia. Vývoj úrokových mier je často závislý na náhlych a ťažko predvídateľných hospodárskych, politických, spoločenských, prírodných a iných zmenách a udalostiach významného rozmeru. Podstatou stochastických modelov nie je teda presne predikovať vývoj úrokových mier, ale zachytiť v čase vlivy na ich chovanie z povahy historického vývoje hodnôt. Prostredníctvom ich charakteru potom predikovať ich správanie sa v budúcnosti na základe identifikovaných historických zmien a udalostí.

Cieľom tejto bakalárskej práce bol popis modelov úrokových mier, ktoré sú zadané stochastickou diferenciálnou rovnicou a ich kalibráciou, a ďalej praktická aplikácie vybraných z nich na konkrétnych dátach. Pro teoretický popis som sa zamerala na Vašíčkov, Cox- Ingersoll-Rossov, Ho-Lee a Hull-Whitov model. Najprv boli zavedené dôležité matematické a ekonomické pojmy, ktoré sú významné pre pochopenie spracovávanie problematiky. Potom boli predstavené stochastické rovnice modelov úrokových mier a bola odvodená ich kalibrácia. ďalej bola prevedená analýza úrokovej miery LIBOR, ktorá zobrazuje úrokové miery rôznych mien. Pro praktickú aplikáciu modelov v tejto práci som zvolila Vašíčkov model a Cox- Ingersoll-Rossov model a konkrétne dáta dostupné v databázy Českej národnej banky. Monitorovaný časový interval som zvolila v období od 1.1.2013 do 30.4.2018 a to voľbou 64 meraných hodnôt. Na základe prakticky uskutočnených simulácií obidvoch modelov, realizovaných skripty aplikovanými v software Matlab, a ich porovnaním som zistila, že k predpovedaniu správania sa úrokových sadzieb je vhodnejší model Cox- Ingersoll-Rossov. Vlastnosť mean-reversion (návrat k dlhodobej hodnote) lepšie zachytáva Vašíčkov model pri zoom časového obdobia .V prípade obidvoch modelov sú prezentované štyri simulácie pre rôzne druhy vstupných parametrov. Do ich vizualizácie je zahrnutý skutočný priebeh simulovanej závislosti. Je evidentné, že koncové hodnoty časovej rady monitorovaných úrokových mier, ktoré násobne prevyšujú prevažnú časť predchádzajúcich hodnôt, majú za následok výrazný rast (vyjadrený takmer exponenciálnou závislosťou) simulovaných hodnôt s rastúcim časom. Pre počiatočné dáta časovej rady (hlavne bez zaradenia koncových extrémne vysokých hodnôt) simulácie lepšie zachytáva vývoj úrokových mier

v čase. Pre presnú identifikáciu prečo posledné hodnoty takto stúpili je treba sledovať ďalší vývoj.

Je treba poznamenať, že v literatúre je popísaná celá rada ďalších modelov, zložitejších, ktoré pracujú s viacerými predpokladmi a dokážu zachytiť omnoho viac zmien výnosovej krivky. Takéto modely sú adekvátnejšie pri oceňovaní a zaistovaní finančných rezerv. Pretože pracujú s väčším počtom parametrov, je i ich kalibrácia omnoho výpočtetne náročnejšia. Z dôvodu rozsahu tejto bakalárskej práce považujem za neúčelné zaradiť ich popisy.

K riešeniu vyššie uvedenej problematiky bolo potrebné preštudovať mnoho teoretických zdrojov a formálne zjednotiť „matematické vyjadrovanie“. Pri tomto postupe sa mi otvorila celá rada zaujímavých problematík z oblasti finančnej matematiky.

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

1. CIPRA, Tomáš. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Vydání III., v Ekopressu II. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
2. MÁLEK, Jiří. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*. 1. vydání. Nakladatelství EKOPRESS, s.r.o., 2005. ISBN 80-86119-97-1
3. FABOZZI, Frank J. *Interest rate, term structure, and valuation modeling*. Hoboken, N.J.: Wiley, c2002. ISBN 0-471-22094-9.
4. Example of yeild curves. Perspectives [online]. Picket [cit. 2018-05-18]. Dostupné z: <https://perspectives.pictet.com/glossary/yeild-curve/>
5. KARPÍŠEK, Zdeněk. *Matematika IV. 4., přeprac. vyd.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014. ISBN 978-80-214-4858-2.
6. CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress, 2008. ISBN 978-80-86929-43-9.
7. STEELE, Michael J. *Stochastic Calculs and Financial Applications*. New York: Springer, 2001. ISBN 0-387-95016-8.
8. ŠEVČOVIČ D. STEHLÍKOVÁ, B. MIKULA, K. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. 1. vydanie. Nakladateľstvo STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3
9. ZMEŠKAL, Zdeněk, Dana DLUHOŠOVÁ a Tomáš TICHÝ. *Finanční modely: koncepty, metody, aplikace*. 3., přeprac. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-91-0.
10. REJNUŠ, Oldřich. *Finanční trhy: učebnice s programem na generování cvičných testů*. Praha: Grada Publishing, 2016. ISBN 978-80-247-5871-8.
11. CIPRA, Tomáš. *Pojistná matematika: teorie a praxe*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Ekopress, 2006. ISBN 8086929116.
12. COX, John, INGERSOLL, Jonathan, ROSS, Stephen, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica* (March 1985)

13. Oldrich Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," Journal of Financial Economics (1977)
14. Thomas S.Y. Ho and Sang B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," Journal of Finance (December 1986)
15. Hull, J., and A. White 1990. "Pricing Interest Rate Derivatives Securities," *The Review of Financial Studies*, vol. 3, no. 4, 573–92.
16. Lund, J.: Dynamic Models of the Term Structure of Interest Rate (Master's thesis), The Aarhus school of Business 1993
17. URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, Alexandra. *Kalibrácia modelov úrokovej miery* [online]. Bratislava, 2007 [cit. 2018-05-4]. Dostupné z: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/urbanova/urbanova-autoreferat.pdf>. Autoreferát. Univerzita Komenského v Bratislave.
18. KROPÁČ, Jiří. *Statistika B: jednorozměrné a dvourozměrné datové soubory, regresní analýza, časové řady*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2007. ISBN 80-214-3295-0.
19. ČNB. *Česká národní banka* [online]. [Praha]: Česká národní banka, © 2003-2015 [cit. 2018-05-13]. Dostupné z: https://www.cnb.cz/cnb/STAT.ARADY_PKG.PARAMETRY_SESTAVY?p_sestuid=85&p_strid=AEAB&p_lang=CS
20. BRIGO, D. et al. A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management. Journal of Risk Management for Financial Institutions. 2017, [cit. 2018-9-5] Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/0812.4210v1>
21. KLADÍVKO, Kamil. MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION OF THE COX-INGERSOLL-ROSS PROCESS: THE MATLAB IMPLEMENTATION [online]. Praha, 2007 [cit. 2018-05-17]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.456.4683&rep=rep1&type=pdf>. Technical Computing Prague.

ZOZNAM POUŽITÝCH OBRÁZKOV

Obrázok č.1 : Štruktúra životného poistenia	20
--	-----------

ZOZNAM POUŽITÝCH GRAFOV

Obrázok č.1: Typy výnosových kriviek (Zdroj: 4)	12
Graf č.3: Vývoj úrokovej sadzby PRIBOR od 1.1.2013 do 30.4.2018 (Zdroj: Autor)	43
Graf č.4: Simulácia Vašíčkovho modelu (Zdroj: Autor)	46
Graf č.5: Histogram simulovaných hodnôt úrokových mier (Vašíčkov model) (Zdroj: Autor)	47
Graf č.6: Simulácia CIR modelu (Zdroj: Autor)	50
Graf č.7: Histogram simulovaných hodnôt úrokových mier (CIR model) (Zdroj: Autor)	51
Graf č.8: Zoom simulácie Vašíčkovho modelu (Zdroj: Autor)	52

ZOZNAM POUŽITÝCH TABULIEK

Tabuľka 1: Štatistické charakteristiky časovej štruktúry úrokových mier PRIBOR	42
Tabuľka č.2: KS štatistiky	52

ZOZNAM PRÍLOH

Príloha č.1: Dáta – PRIBOR 1.1.2018-30.4.2018.....i

Príloha č.1: Dáta – PRIBOR 1.1.2018-30.4.2018

Obdobie	PRIBOR (v mil. KČ)
31.01.2013	0,194
28.02.2013	0,199
31.03.2013	0,18
30.04.2013	0,182
31.05.2013	0,18
30.06.2013	0,181
31.07.2013	0,171
31.08.2013	0,179
30.09.2013	0,176
31.10.2013	0,171
30.11.2013	0,157
31.12.2013	0,146
31.01.2014	0,15
28.02.2014	0,15
31.03.2014	0,15
30.04.2014	0,15
31.05.2014	0,15
30.06.2014	0,15
31.07.2014	0,15
31.08.2014	0,15
30.09.2014	0,15
31.10.2014	0,15
30.11.2014	0,15
31.12.2014	0,158
31.01.2015	0,16
28.02.2015	0,158
31.03.2015	0,152
30.04.2015	0,15
31.05.2015	0,149
30.06.2015	0,15
31.07.2015	0,15
31.08.2015	0,147

30.09.2015	0,139
31.10.2015	0,13
30.11.2015	0,13
31.12.2015	0,13
31.01.2016	0,13
29.02.2016	0,13
31.03.2016	0,13
30.04.2016	0,13
31.05.2016	0,13
30.06.2016	0,13
31.07.2016	0,13
31.08.2016	0,13
30.09.2016	0,13
31.10.2016	0,13
30.11.2016	0,124
31.12.2016	0,12
31.01.2017	0,12
28.02.2017	0,12
31.03.2017	0,12
30.04.2017	0,12
31.05.2017	0,12
30.06.2017	0,12
31.07.2017	0,12
31.08.2017	0,251
30.09.2017	0,28
31.10.2017	0,28
30.11.2017	0,474
31.12.2017	0,5
31.01.2018	0,5
28.02.2018	0,736
31.03.2018	0,75
30.04.2018	0,75