



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## HYPERBOLICKÉ GEOMETRIE

HYPERBOLIC GEOMETRIES

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Johanka Brdečková

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.

BRNO 2021



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	<b>Johanka Brdečková</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.</b>
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Hyperbolické geometrie

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Hyperbolická geometrie je příkladem neeuklidovské geometrie. Práce se zabývá jejím vznikem a popisem. Zejména srovnává její vlastnosti s vlastnostmi geometrie euklidovské. Dále se zabývá modely hyperbolické geometrie a tím, kde se s ní setkáme.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Na základě studia odborné literatury popsat základní vlastnosti hyperbolické geometrie.
2. Porovnat vlastnosti hyperbolické geometrie s vlastnostmi geometrie euklidovské.
3. Popsat rovněž některé modely hyperbolické geometrie.

### **Seznam doporučené literatury:**

GÓMEZ, J. Neeuklidovské geometrie: když se přímky zakřivují. Praha: Dokořán, 2018. ISBN 978-8-7363-844-3.

PRESSLEY, A. Elementary Differential Geometry. London: Springer, 2001. ISBN 978-1-84882-890-2.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce popisuje vlastnosti hyperbolické geometrie. Je zde odvozena parametrizace křivky traktrix a plochy pseudosféry. Dále jsou ukázány dva modely hyperbolické geometrie odvozené z parametrizace pseudosféry.

## **Abstract**

The present thesis deals with hyperbolic geometry. We derive parametric equations of the curve tractrix and the surface pseudosphere. Then we discuss two models of hyperbolic geometry, which are derived from the parametrization of pseudosphere.

## **Klíčová slova**

hyperbolická geometrie, traktrix, pseudosféra

## **Keywords**

hyperbolic geometry, tractrix, pseudosphere

BRDEČKOVÁ, Johanka. Hyperbolické geometrie. Brno, 2021. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Miroslav Doupovec.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Hyperbolické geometrie* zpracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Miroslava Doupovce, CSc., dr. h. c. Odbornou literaturu, kterou jsem při zpracování využívala, v práci cituji a uvádím v seznamu literatury.

Johanka Brdečková





Chtěla bych poděkovat vedoucímu práce prof. RNDr. Miroslavu Doupovcovi, CSc., dr. h. c. za ochotu při konzultacích práce a poskytnutí potřebných materiálů.

Johanka Brdečková

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Motivace</b>	<b>2</b>
1.1 Eliptická geometrie . . . . .	4
1.2 Hyperbolická geometrie . . . . .	6
1.3 Trigonometrie . . . . .	7
<b>2 Základní pojmy</b>	<b>9</b>
2.1 Křivky . . . . .	9
2.2 Plochy . . . . .	11
<b>3 Traktrix</b>	<b>15</b>
<b>4 Obecná rotační plocha</b>	<b>18</b>
<b>5 Pseudosféra</b>	<b>20</b>
5.1 Upper half plane model . . . . .	21
5.2 Poincarého diskový model . . . . .	25
<b>6 Závěr</b>	<b>27</b>
Literatura	28
Seznam obrázků	29
Seznam tabulek	29

# Úvod

V našem reálném světě jsme zvyklí vnímat okolní svět očima eukleidovské geometrie.

To se projevuje zejména v tom, jak vyhodnocujeme vzdálenosti, plošné obsahy, popř. jak si hledáme nejkratší cestu.

Po formální stránce je eukleidovská geometrie postavena na pěti postulátech.

Pátý z nich říká, že bodem, který neleží na dané přímce, lze vést právě jednu rovnoběžku. Pokud tento postulát pozměníme, dostaneme jiný typ geometrie, což se projeví v hodnocení vzdáleností, velikostí úhlů a podobně.

První kapitola předložené práce uvádí historii objevování hyperbolické geometrie, která úzce souvisí s pátým postulátem. Význam tohoto postulátu spočívá v řadě tvrzení, která jsou s ním ekvivalentní.

Pokud tento postulát odmítneme, musíme se zříct i těchto často přesvědčivých tvrzení. Tak vznikne neeukleidovská geometrie. Pokud pátý postulát nahradíme tvrzením, že bodem  $P$ , který neleží na přímce, lze vést více rovnoběžek s touto přímkou, dostáváme hyperbolickou geometrii. V závěru kapitoly je provedeno srovnání hyperbolické, eliptické a eukleidovské geometrie.

Druhá kapitola zavádí základní pojmy klasické diferenciální geometrie křivek a ploch, které jsou potřebné k hlubšímu zkoumání vlastností hyperbolické geometrie. Jsou to zejména Gaussova křivost, první základní forma plochy, geodetiky.

V následujících kapitolách se zabýváme hledáním vhodné plochy, na níž je možné hyperbolickou geometrii sestrojít. Takovou plochou je například pseudosféra. Namísto přímk zde figurují geodetiky. Pseudosféra je rotační plocha, jejíž profil tvoří křivka traktrix. Odvození této křivky se věnuje třetí kapitola. Ve čtvrté kapitole jsou odvozeny základní charakteristiky pro obecnou rotační plochu. Tyto jsou pak využity v páté kapitole, která se podrobněji zabývá geometrií pseudosféry. V posledních dvou podkapitolách je uveden popis některých modelů hyperbolické geometrie odvozených z pseudosféry. Jedná se o podmnožinu  $R^2$  nebo komplexní roviny s přidruženou první základní formou. V těchto modelech vzdálenosti definujeme pomocí metriky, která vychází z první základní formy a tvaru geodetik. Takto můžeme zkoumat vlastnosti hyperbolické geometrie v rovině a nejsme vázáni na prostorový model.

Poznamenejme ještě, že více než dva tisíce let trvající historie pátého postulátu a následný vznik neeukleidovských geometrií v devatenáctém století patří k nejúžasnějším příběhům matematiky vůbec. Je rovněž třeba uvést, že neeukleidovské geometrie našly své uplatnění a mají celou řadu aplikací, například v teorii relativity. Toto je však již mimo rozsah této práce.

Vlastní obrázky jsou tvořeny v programech GeoGebra a Matlab.

# 1 Motivace

V této kapitole čerpáme zejména z knihy [4]. Eukleidovská geometrie, se kterou jsme se setkali na základní nebo střední škole, je vystavena na následujících pěti postulátech, které napsal Eukleides kolem roku 300 před Kristem ve svém nejznámějším díle *Základy*:

1. Lze vytvořit úsečku, která spojuje dva dané body.
2. Danou úsečku lze na jedné i druhé straně prodloužit tak daleko, jak potřebujeme.
3. Lze vytvořit kruh o daném středu, na jehož obvodě leží daný bod.
4. Všechny pravé úhly sobě rovny jsou.
5. Nechť dvě úsečky protínají třetí úsečku tak, že součet vnitřních úhlů na jedné straně je menší než dva pravé úhly. Potom lze na této straně prodloužit první dvě úsečky tak, aby se jejich prodloužení protnula.

Zhruba řečeno, postuláty jsou výroky, jejichž pravivost přijímáme bez důkazu a které představují naprosto zřejmé a intuitivní pravdy. Na základě axiomů a postulátů se pak pomocí logických dedukcí dokazují další tvrzení. V této souvislosti uvádíme odkaz na poslední český překlad Eukleidových *Základů* s komentáři Petra Vopěnky, viz [3].

První čtyři postuláty zní jednoduše a asi bychom je nezpochybovali. Na druhou stranu pátý postulát se od prvních čtyř odlišuje. Je totiž složitější, není tak intuitivně zřejmý jako první čtyři postuláty a má dokonce téměř charakter tvrzení (tj. matematické věty). Nemůžeme se tedy divit tomu, že tento postulát matematiky v průběhu historie provokoval. Někteří pochybovali o tom, zda se skutečně jedná o postulát a snažili se ho dokázat pomocí předešlých čtyř. To se ovšem nikomu nepodařilo, podařilo se tak jen najít tvrzení, která jsou s ním ekvivalentní. I tato dále uvedená tvrzení zní logicky a většinou je bereme jako fakt. Nyní uvedeme některá tvrzení, která jsou ekvivalentní s pátým Eukleidovým postulátem:

- Pythagorova věta: *V pravoúhlém trojúhelníku se čtverec nad přeponou rovná součtu čtverců nad oběma odvěsnami.*
- Gaussův postulát o obsahu trojúhelníka: *Obsah trojúhelníka může být libovolně velký.*
- Postulát o třech bodech, jehož autorem je Maďar János Bolyai: *Tři body, které neleží na jedné přímce, vždy jednoznačně určují kružnici.*
- Postulát ekvidistance, který formuloval řecký filozof Proklos: *Rovnoběžka k dané přímce k ní má v každém bodě stejnou vzdálenost.*
- *Součet vnitřních úhlů trojúhelníka se rovná dvěma pravým úhlům.*

- *Existují podobné troujúhelníky, které nejsou shodné.*
- Postulát rovnoběžek (který formuloval John Playfar): *Bodem, který neleží na dané přímce, prochází právě jedna rovnoběžka.* Toto tvrzení se nejčastěji používá místo původního Eukleidova pátého postulátu.

Výše uvedený výčet není úplný, ale poslouží k představě o důležitosti pátého postulátu.

Jak jsme již uvedli výše, více než 2000 let trvající nespokojenost s pátým Eukleidovým postulátem v průběhu historie podnítila řadu matematiků, aby se jej snažili dokázat z předchozích čtyř. Tyto (marné) snahy byly ukončeny v průběhu devatenáctého století, kdy si někteří matematici položili "revoluční" otázku: a co když pátý Eukleidův postulát neplatí? To nakonec vedlo ke vzniku tzv. neeukleidovských geometrií (tj. geometrií, ve kterých neplatí pátý Eukleidův postulát). Ke vzniku neeukleidovských geometrií nejvíce přispěli Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, János Boylai, Karl Fridrich Gauss a Bernhard Riemann. V dalším se budeme neeukleidovským geometriím věnovat podrobněji.

Ruský matematik Nikolaj Lobačevskij (1792-1856) a maďarský matematik a kavalierista János Bolyai (1802-1860) jsou považováni za zakladatele hyperbolické geometrie. Žili ve stejné době, ale jejich práce byla nezávislá. Bolyai byl původně důstojník kavalerie, vynikal však v mnoha směrech. Kvůli špatnému zdravotnímu stavu odešel roku 1833 do penze a nechal se pohltit světem neeukleidovské geometrie. Jeho otec Farkas Bolyai, také matematik, se ho pokoušel od „marnění času“ polemikami s postulátem rovnoběžek odradit. Dokonce si na Jánose stěžoval svému příteli Carlu Friedrichu Gaussovi. Gauss se ale Jánose zastal a řekl, že došel ke stejným výsledkům.

Lobačevského práce probíhala nezávisle, došel svou vlastní cestou k podobným výsledkům. Neúspěch při hledání důkazu pátého postulátu ho vedl k myšlence, co by se stalo, kdyby tento postulát odmítl. Je zřejmé, že tímto odmítá i ostatní ekvivalentní tvrzení. Potřeboval tedy nějakou náhradu. Proto změnil postulát rovnoběžek na tento: *Bodem  $P$ , který neleží na přímce, procházejí dvě různé rovnoběžky k této přímce.* Zde pojem rovnoběžka nabývá jiného významu, než na který jsme zvyklí. Výše uvedenou formulací vznikl základ hyperbolické (Lobačevského) geometrie.

Bernhard Riemann se zabýval jinou alternativou pátého postulátu: *Bodem  $P$ , který neleží na přímce, neprochází žádná rovnoběžka k této přímce.* Tím Riemann položil základ pro geometrii eliptickou.

Pro počet různých rovnoběžek procházejících bodem neležícím na dané přímce máme tedy následující tři možnosti:

- *Bodem  $P$ , který neleží na dané přímce, prochází právě jedna rovnoběžka.* (Eukleidovská geometrie).

- Bodem  $P$ , který neleží na přímce, prochází více různých rovnoběžek  $k$  této přímce. (Hyperbolická geometrie).
- Bodem  $P$ , který neleží na přímce, neprochází žádná rovnoběžka  $k$  této přímce. (Elipstická geometrie).

Geometrii eukleidovskou nalezneme například v rovině. Její vlastnosti dobře známe a nebudeme se jí v této práci dále zabývat. Ve zbytku této kapitoly popíšeme některé vlastnosti hyperbolické a eliptické geometrie. Poznamenejme, že v neeukleidovských geometriích může být pozměněn význam některých základních geometrických pojmů. Např. přímka je jakákoli čára, která nejkratším způsobem spojuje dva body. Tedy "přímky" na sféře (která je modelem neeukleidovské geometrie) jsou zakřivené - jedná se o hlavní kružnice sféry. Rovnoběžky jsou přímky, které se neprotínají.

V tabulce 1 jsou přehledně uvedeny hlavní rozdíly mezi eukleidovskou, hyperbolickou a eliptickou geometrií.

Typ geometrie	Eukleidovská	Hyperbolická	Eliptická
Autor	Eukleides	Bolyai a Lobačevskij	Riemann
Typická plocha	rovina	pseudosféra	sféra
Počet různých rovnoběžek	1	více než 1	0
Součet úhlů trojúhelníka	$\pi$	méně než $\pi$	více než $\pi$
Max. počet pravých úhlů trojúhelníka	1	1	3
Obsah trojúhelníka	neomezený	omezený	omezený
Obvod kružnice (o poloměru $r$ )	$2\pi r$	$k\pi \left( e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right)$	více než $2\pi r$

(Kružnicí rozumíme množinu bodů, které mají od středu stejnou vzdálenost.)

Tabulka 1: Srovnání geometrií

Ve srovnání typů geometrií a jejich typických ploch uvidíme souvislost s Gaussovou křivostí. Rovina má v každém bodě nulovou křivost, sféra kladnou a pseudosféra zápornou.

## 1.1 Eliptická geometrie

Příkladem plochy, na níž je možné sestrojít eliptickou geometrii, je elipsoid. Nejjednodušším elipsoidem je sféra. Za sféru bychom mohli považovat například povrch Země, který je nám dobře známý. Přesvědčme se nyní, zda je na sféře splněn požadavek pátého postulátu.

## Postulát o rovnoběžkách

Vidíme, že se jakékoli dvě hlavní kružnice na sféře protínají ve dvou protilehlých bodech, tedy požadavek postulátu o rovnoběžkách pro eliptickou geometrii je jistě splněn. K „přímce“  $l$  nenajdeme žádnou jinou rovnoběžku, natož dvě různé, procházející týmž bodem. Jedná se tedy o vhodný model eliptické geometrie.

## Křivost

S typem geometrie úzce souvisí Gaussova křivost plochy, na niž ji lze sestrojít. Pojem bude definován později, zatím nám postačí intuitivní představa a vzorec pro Gaussovu křivost sféry:  $K = \frac{1}{R^2}$ . Sféra se s rostoucím poloměrem  $R$  více a více podobá rovině. Např. poloměr Země většinou natolik převyšuje vzdálenosti, které denně urazíme, že můžeme o svém pohybu uvažovat, jako by se odehrával v rovině. Podobně malé plochy (např. pozemky) bereme jako rovinné.

## Neplatnost ekvivalentních tvrzení

Když jsme se rozhodli odmítnout původní pátý postulát a zvolili jsme si jiný, odmítli jsme spolu s ním i ostatní ekvivalentní tvrzení. Podíváme se, jaký dopad má tato změna. Vezměme trojúhelník na Zemi (na obrázku 1), jehož vrcholy tvoří severní pól  $C$  a dva body  $A, B$  na rovníku. Obsah trojúhelníka  $CAB$  se zvětšuje, když se  $A, B$  vzdalují a zároveň se zvětšuje i úhel u pólu  $C$ . Vidíme tedy, že oproti rovině není součet vnitřních úhlů roven  $\pi$ .



Obrázek 1: Sférické trojúhelníky (převzato z [1])

Dá se ukázat, že na sféře o poloměru  $R$  je plocha trojúhelníka  $ABC$  závislá na součtu

vnitřních úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  takto

$$S(ABC) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

Toto platí i naopak. Kdybychom chtěli trojúhelník  $ABC$  zvětšit nebo zmenšit, změnil by se součet vnitřních úhlů a vzniklý trojúhelník nebude podobný. Všechny podobné trojúhelníky jsou shodné. Přesuňme se nyní k hyperbolické geometrii.

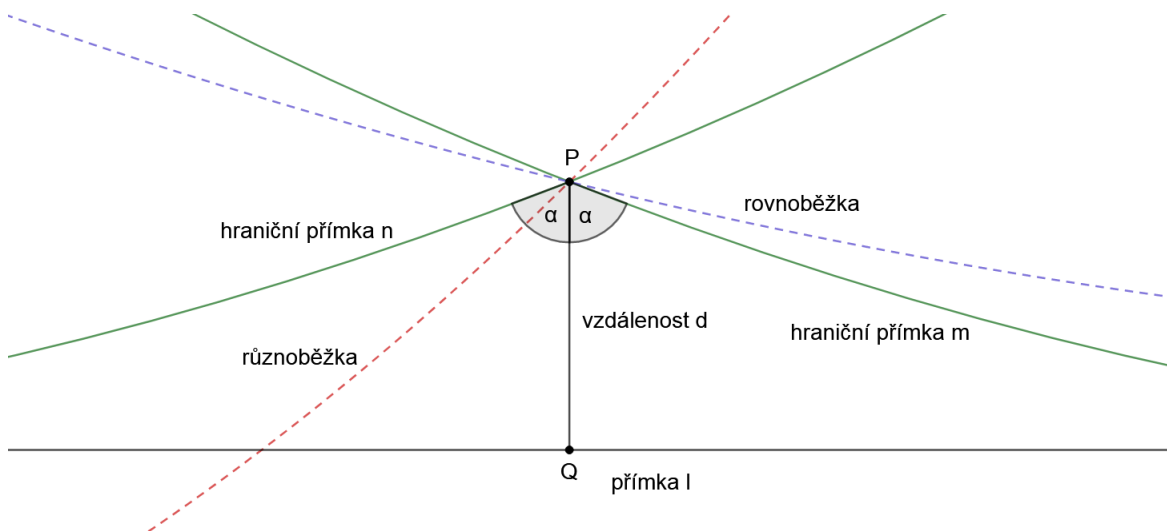
## 1.2 Hyperbolická geometrie

Můžeme k ní přistupovat přímo ze strany axiomů nebo najít konkrétní plochu, na níž lze sestavit geometrii, která splňuje požadované axiomy. Protože zde představa plochy trochu "pokulhává", budeme se hyperbolické geometrii více věnovat v kapitole o modelech.

### Rovnoběžnost

Na obrázku 2 vidíme přímku  $l$  a bod  $P$ , který na ní neleží. Pátý postulát pro hyperbolickou geometrii žádá, aby bodem  $P$  procházelo více rovnoběžek s  $l$ . Přímky procházející bodem  $P$  se dělí na rovnoběžky (neprotínají  $l$ ) a různoběžky (protínají  $l$ ). Přímky  $m$  a  $n$  se nazývají hraniční a oddělují rovnoběžky od různoběžek. Přímky  $m$  a  $n$  svírají úhel  $2\alpha$ , v jehož rozmezí se pohybují různoběžky. Úhel  $\alpha$  se nazývá úhel rovnoběžnosti. Existuje konstanta  $k$ , pro níž platí:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = e^{-d/k}.$$



Obrázek 2: Axiom rovnoběžek v hyperbolické geometrii



## Plocha trojúhelníka

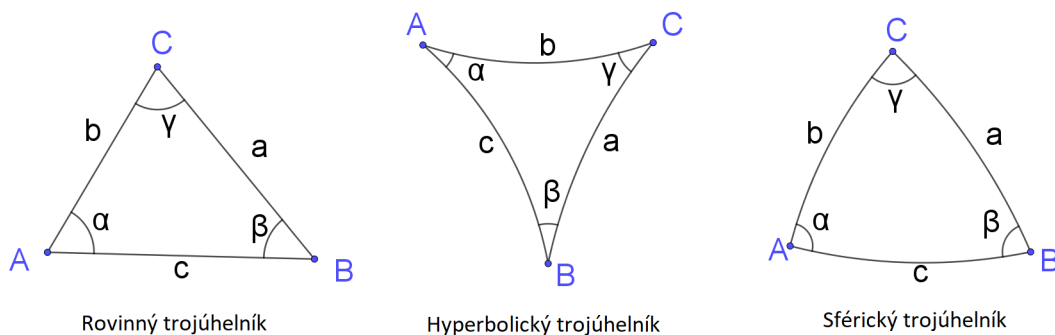
Hyperbolická geometrie je v některých aspektech protějškem eliptické geometrie, v jiných se jí podobá. Např. pro trojúhelník v hyperbolické geometrii platí, že, čím je větší, tím menší je součet jeho vnitřních úhlů. A opět čím je menší, tím více se podobá rovinnému. V obou geometriích je plocha trojúhelníka omezená.

## Plochy

Hyperbolickou plochou je například sedlo nebo rozšiřující se konec trubky. Vhodnou plochou pro studium hyperbolické geometrie je pseudosféra. Jedná se o plochu s konstantní zápornou Gaussovou křivostí a konci trubky se trochu podobá. Pseudosféře se věnujeme podrobně v páté kapitole. Budeme se v ní věnovat modelům hyperbolické geometrie, které mají pro pseudosféru podobný význam jako mapy pro Zemi.

### 1.3 Trigonometrie

Podíváme se, jak podobné jsou kosinová a sinová věta pro trojúhelník  $ABC$  se stranami  $a, b, c$ , v různých geometriích (viz obrázek 3). Sféra je jednotková, Gaussova křivost hyperbolické plochy je  $-1$ . (Argumentem hyperbolických a goniometrických funkcí jsou úhly nebo délky stran.)



Obrázek 3: Trojúhelníky v různých geometriích

*Srovnání sinové věty:*

- v rovině:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta},$$

- ve sférické geometrii:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta},$$

- v hyperbolické geometrii:

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b}.$$

*Srovnání kosinové věty:*

- v rovině:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

- na sféře:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

- v hyperbolické geometrii:

- věta o úhlech:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh a,$$

- věta o stranách:

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha.$$

Speciálním případem kosinové věty je *Pythagorova věta*, kdy úhel  $\alpha$  je roven  $\frac{\pi}{2}$ . Platí:

- v rovině:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

- na sféře:

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

- v hyperbolické geometrii:

$$\cosh a = \cosh b \cosh c.$$

Uvedeme vztahy pro použité hyperbolické funkce:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

## 2 Základní pojmy

V této kapitole uvedeme některé základní pojmy a výsledky z klasické diferenciální geometrie křivek a ploch, které budeme potřebovat v další části práce. Budeme čerpat zejména ze skript [2]. Uvažujme vektorový prostor  $R^n$ . Zobrazení  $v : I \mapsto R^n$  se nazývá vektorová funkce na intervalu  $I \subset R$ . Ve standardní bázi vektorového prostoru  $R^n$  má pak  $v$  souřadnicové vyjádření  $v = (v^1, \dots, v^n)$ , kde  $v^i : I \rightarrow R$  jsou reálné funkce, které se nazývají složky vektorové funkce  $v$ .

**Definice 2.1** Vektorová funkce  $v$  má v bodě  $t_0 \in I$  limitu  $v_0 \in R^n$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že

$$|t - t_0| < \delta, \quad t \neq t_0 \implies \|v(t) - v_0\| < \varepsilon.$$

Vektorová funkce  $v$  se nazývá spojitá v bodě  $t_0$ , jestliže  $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v(t_0)$ .

**Definice 2.2** Jestliže existuje limita  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ , pak tuto limitu nazýváme derivací vektorové funkce  $v(t)$  v bodě  $t_0$  a značíme  $\frac{dv(t_0)}{dt}$  nebo též  $v'(t_0)$ . Iterací pak definujeme derivace vyššího řádu.

Platí

**Věta 2.1** Vektorová funkce je spojitá v bodě  $t_0 \in I$ , právě když jsou v tomto bodě spojitě všechny její složky. Vektorová funkce  $v(t)$  má derivaci v bodě  $t_0 \in I$ , právě když všechny její složky  $v^i(t)$  mají v tomto bodě derivaci, přičemž platí

$$\frac{dv(t_0)}{dt} = \left( \frac{dv^1(t_0)}{dt}, \dots, \frac{dv^n(t_0)}{dt} \right).$$

### 2.1 Křivky

**Definice 2.3** Spojité zobrazení:  $f : I \mapsto R^n$  se nazývá pohyb v prostoru  $R^n$ .

Řekneme, že pohyb  $f$  je třídy  $C^r$ , jestliže všechny jeho složky  $f^i(t)$  mají spojitě derivace až do řádu  $r$ . Vektor  $f' = \frac{df}{dt} : I \rightarrow R^n$  se pak nazývá vektor rychlosti pohybu  $f$ . Řekneme dále, že pohyb  $f$  je regulární, jestliže  $\frac{df}{dt} \neq \vec{0}$ . Bod  $f(t_0) \in R^n$  splňující  $\frac{df(t_0)}{dt} = \vec{0}$  se nazývá singulární bod pohybu  $f$ .

Je-li zobrazení  $f$  injektivní, pohyb se označuje jako jednoduchý. U tohoto pohybu tedy nedochází k samoprotnutí.

**Definice 2.4** Jednoduchá křivka třídy  $C^r$  je podmnožina  $\mathcal{C} \subset R^n$ , pro kterou existuje jednoduchý regulární pohyb  $f : I \rightarrow R^n$  třídy  $C^r$  tak, že  $\mathcal{C} = f(I)$ .

Zobrazení  $f$  se pak označuje jako parametrizace jednoduché křivky  $\mathcal{C}$  a vektor  $f'(t)$  se nazývá tečný vektor křivky  $\mathcal{C}$ . Příímka určená bodem  $f(t_0) \in \mathcal{C}$  a tečným vektorem  $f'(t_0)$  je tečna křivky  $\mathcal{C}$  v jejím bodě  $f(t_0)$ . Je zřejmé, že podmínka regularity nám zajistí existenci tečny v libovolném bodě křivky  $\mathcal{C}$ .

Jedna a tatáž křivka může mít nekonečně mnoho parametrických vyjádření. Podle následující věty se každé dvě parametrizace téže jednoduché křivky liší o reparametrizaci.

**Věta 2.2** *Zobrazení  $f(t) : I \rightarrow R^n$  a  $g(\tau) : J \rightarrow R^n$  jsou dvě parametrizace téže jednoduché křivky  $\mathcal{C}$  třídy  $C^r$ , právě když existuje bijekce  $\varphi : J \rightarrow I$ ,  $t = \varphi(\tau)$  třídy  $C^r$  taková, že pro všechny  $\tau \in J$  platí  $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$  a  $g(\tau) = f(\varphi(\tau))$ . Funkce  $\varphi$  se pak nazývá reparametrizace nebo též transformace parametru křivky  $\mathcal{C}$ .*

**Definice 2.5** *Podmnožina  $\mathcal{C} \subset R^n$  se nazývá křivka třídy  $C^r$ , jestliže pro každý bod  $X \in \mathcal{C}$  existuje takové jeho okolí  $U$  v  $R^n$ , že  $\mathcal{C} \cap U$  je jednoduchá křivka třídy  $C^r$ . Parametrizace průniků  $\mathcal{C} \cap U$  se pak nazývají lokální parametrizace křivky  $\mathcal{C}$ .*

Připomeňme dále, že podle známého vzorečku z matematické analýzy je délka oblouku jednoduché křivky  $\mathcal{C} = f(I)$  mezi body  $f(t_1)$  a  $f(t_2)$  rovna

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f'(u)\| du.$$

Nechť nyní  $f : I \rightarrow R^n$  je parametrizace jednoduché křivky  $\mathcal{C} = f(I)$ . Tato parametrizace se nazývá přirozená, jestliže  $\|f'(s)\| = 1$ . Parametr  $s$  se pak nazývá oblouk nebo též přirozený parametr. Při parametrizaci obloukem má tedy pohyb po křivce v každém bodě jednotkovou rychlost a rozdíl parametrů  $(s_2 - s_1)$  vyjadřuje délku oblouku křivky mezi body  $f(s_1)$  a  $f(s_2)$ .

**Definice 2.6** *Řekneme, že dvě křivky  $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}} \subset R^n$  mají ve společném bodě  $X \in \mathcal{C} \cap \bar{\mathcal{C}}$  styk  $k$ -tého řádu, jestliže existují takové jejich lokální parametrizace  $f(t)$  a  $\bar{f}(t)$ ,  $f(t_0) = \bar{f}(t_0) = X$ , že platí*

$$\frac{d^i f(t_0)}{dt^i} = \frac{d^i \bar{f}(t_0)}{dt^i}$$

pro všechna  $i = 1, \dots, k$ .

Pak tečna křivky  $\mathcal{C}$  je jediná příímka, která má s touto křivkou styk prvního řádu. Pokud má  $\mathcal{C}$  v nějakém bodě styk druhého řádu se svojí tečnou, bod se označuje jako inflexní bod křivky  $\mathcal{C}$ .

Dá se rovněž ukázat, že v neinflexním bodě rovinné křivky  $\mathcal{C} \subset R^2$  existuje k této křivce jediná kružnice, která má s  $\mathcal{C}$  styk druhého řádu. Tato kružnice se označuje jako oskulační kružnice křivky  $\mathcal{C}$ . Převrácená hodnota poloměru oskulační kružnice rovinné křivky  $\mathcal{C}$  v jejím neinflexním bodě  $X \in \mathcal{C}$  se pak nazývá křivostí křivky  $\mathcal{C}$  v bodě  $X$  a

značí se symbolem  $\kappa$ . Je-li  $f$  přirozená parametrizace křivky  $\mathcal{C}$ , vektor  $f''$  se nazývá vektor křivosti a jeho velikost je rovna křivosti křivky, tj.

$$\kappa(s) = \|f''(s)\|.$$

## 2.2 Plochy

**Definice 2.7** Množina  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  se nazývá jednoduchá plocha třídy  $C^r$ , jestliže existuje otevřená množina  $D \subset \mathbb{R}^2$  a injektivní zobrazení  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  třídy  $C^r$  takové, že  $\mathcal{S} = f(D)$  a vektory  $f'_u$  a  $f'_v$  jsou lineárně nezávislé v každém bodě  $z \in D$ . Množina  $D$  se nazývá oblast parametrů a zobrazení  $f$  parametrizace jednoduché plochy  $\mathcal{S}$ .

Podmínka lineární nezávislosti vektorů  $f'_u$  a  $f'_v$  zajistí existenci tečné roviny  $\tau_X \mathcal{S}$  v libovolném bodě  $X \in \mathcal{S}$ . Tečná rovina  $\tau_X \mathcal{S}$  je pak určena bodem  $X \in \mathcal{S}$  a lineárně nezávislými tečnými vektory  $f'_u$  a  $f'_v$ . Tečným prostorem plochy  $\mathcal{S}$  nazýváme dvourozměrný vektorový prostor  $T_X \mathcal{S}$ , jehož bázi tvoří tečné vektory  $f'_u, f'_v$ .

Analogicky jako u křivek definujeme plochu jako podmnožinu  $\mathbb{R}^3$ , kterou lze v okolí jejího libovolného bodu lokálně parametrizovat.

**Definice 2.8** Podmnožina  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  se nazývá plocha třídy  $C^r$ , jestliže pro každý bod  $X \in \mathcal{S}$  existuje takové jeho okolí  $U$  v  $\mathbb{R}^3$ , že  $\mathcal{S} \cap U$  je jednoduchá plocha třídy  $C^r$ . Parametrizace průniků  $\mathcal{S} \cap U$  se pak nazývají lokální parametrizace plochy  $\mathcal{S}$ .

Podle následující věty je prostorová křivka  $\mathcal{C}$  ležící na ploše  $\mathcal{S}$  určena zadáním rovinné křivky  $c$  v oblasti parametrů  $D$  plochy  $\mathcal{S}$ .

**Věta 2.3** Nechť  $c$  je jednoduchá křivka v oblasti parametrů  $D$  jednoduché plochy  $\mathcal{S} = f(D)$ . Nechť  $\gamma : I \rightarrow D$ ,  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  je parametrizace křivky  $c$  a  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizace plochy  $\mathcal{S}$ . Pak  $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(f \circ \gamma)(t) = f(u(t), v(t))$  je parametrizace křivky  $\mathcal{C}$  ležící na ploše  $\mathcal{S}$ .

K orientaci na ploše slouží souřadnicová síť. Je to obraz rovinné sítě v oblasti parametrů  $D$ , která je tvořena přímkami  $u = \text{const}$  a  $v = \text{const}$ . Příslušné křivky na ploše  $\mathcal{S}$  se pak nazývají souřadnicové křivky plochy  $\mathcal{S}$ .

Koeficienty první základní formy plochy  $\mathcal{S}$  definujeme jako skalární součiny bázových tečných vektorů

$$g_{11} = f'_u \cdot f'_u, \quad g_{12} = g_{21} = f'_u \cdot f'_v, \quad g_{22} = f'_v \cdot f'_v.$$

**Definice 2.9** První základní forma plochy  $\mathcal{S}$  je kvadratická forma na vektorovém prostoru  $T_X \mathcal{S}$  definovaná vztahem

$$\varphi_1(a) = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

pro  $a = (du, dv) \in T_X \mathcal{S}$ .

Pomocí první základní formy umíme vypočítat délky oblouků křivek, plošné obsahy a úhly křivek na ploše.

**Věta 2.4** *Délka oblouku křivky  $(u(t), v(t))$  na ploše  $f(u, v)$  mezi body o parametrech  $t_1, t_2$  je rovna*

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g_{22} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt.$$

**Věta 2.5** *Plošný obsah ohraničené plochy  $f(u, v)$  na ohraničené oblasti parametrů  $D \subset \mathbb{R}^2$  je roven*

$$\iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} dudv.$$

**Věta 2.6** *Jsou-li  $a = a^1 f'_u + a^2 f'_v$  a  $b = b^1 f'_u + b^2 f'_v$  tečné vektory křivek  $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}$  ve společném bodě  $X \in \mathcal{C} \cap \bar{\mathcal{C}}$ , pak pro jejich úhel platí*

$$\cos \alpha = \frac{|g_{ij} a^i b^j|}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j} \sqrt{g_{ij} b^i b^j}}.$$

V předchozí větě se používá Einsteinova sumační konvence, tj.  $i, j$  jsou sčítací indexy.

Normála plochy  $\mathcal{S}$  v bodě  $X \in \mathcal{S}$  je přímka kolmá k tečné rovině  $\tau_X \mathcal{S}$ . Pak jednotkový vektor normály je tvaru

$$n = \frac{f'_u \times f'_v}{\|f'_u \times f'_v\|}.$$

Nechť nyní  $\mathcal{C}$  je křivka na ploše  $\mathcal{S}$  procházející bodem  $X \in \mathcal{S}$ . Je-li  $\gamma(s)$  přirozená parametrizace křivky  $\mathcal{C}$ , tak  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  je vektor křivosti.

**Definice 2.10** *Normálovou křivostí křivky  $\mathcal{C}$  na ploše  $\mathcal{S}$  v bodě  $X$  rozumíme číslo  $\kappa_n = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$ .*

Jedná se o skalární součin vektoru křivosti  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  křivky a jednotkového vektoru normály plochy. Geometricky je  $\kappa_n$  rovna velikosti kolmého průmětu vektoru křivosti  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  do směru normály. V klasické diferenciální geometrii se dá ukázat, že normálová křivost  $\kappa_n$  je pro všechny křivky na ploše  $\mathcal{S}$ , mající v bodě  $X \in \mathcal{S}$  společnou tečnu, v tomto bodě stejná. Má tedy smysl definovat normálovou křivost  $\kappa_n^a$  plochy v daném bodě  $X \in \mathcal{S}$  a daném tečném směru  $a \in T_X \mathcal{S}$ . Konkrétně, pro jednotkový tečný vektor  $a = \frac{d\gamma}{ds} \in T_X \mathcal{S}$  definujeme normálovou křivost  $\kappa_n^a$  plochy  $\mathcal{S}$  ve směru vektoru  $a$  jako skalární součin  $\kappa_n^a = n \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2}$ . Je-li  $a \in T_X \mathcal{S}$  libovolný (ne nutně jednotkový) tečný vektor, definujeme  $\kappa_n^a$  jako normálovou křivost ve směru jednotkového vektoru  $\frac{a}{\|a\|}$ . Takto definovaná normálová křivost plochy pak vyjadřuje zakřivení (ohýbání) plochy ve směru vektoru  $a \in T_X \mathcal{S}$ .

Směry, ve kterých normálová křivost nabývá v daném bodě extrémů, nazýváme hlavní směry. K jejich určení poslouží druhá základní forma:

$$\varphi_2(a) = h_{11} du^2 + 2h_{12} dudv + h_{22} dv^2, \quad a = (du, dv) \in T_X \mathcal{S},$$

jejíž koeficienty jsou definovány jako následující skalární součiny

$$h_{11} = f''_{uu} \cdot n, \quad h_{12} = h_{21} = f''_{uv} \cdot n, \quad h_{22} = f''_{vv} \cdot n.$$

**Věta 2.7** *Nechť  $a = (du, dv) \in T_X \mathcal{S}$  je tečný vektor. Pak pro normálovou křivost ve směru  $a$  platí  $\kappa_n^a = \frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)}$ .*

Hlavní směry  $(du, dv)$  splňují následující rovnost

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Extrémní hodnoty normálové křivosti se nazývají hlavní křivosti  $\kappa_1, \kappa_2$ . Jedná se o normálové křivosti v hlavních směrech. Hlavní křivosti splňují kvadratickou rovnici

$$\begin{vmatrix} \kappa g_{11} - h_{11} & \kappa g_{12} - h_{12} \\ \kappa g_{12} - h_{12} & \kappa g_{22} - h_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Bod se nazývá sférický, jestliže  $\varphi_2(u_0, v_0)$  je konstantním násobkem  $\varphi_1(u_0, v_0)$ . V takovém bodě je normálová křivost ve všech směrech stejná a hlavní směry nejsou definovány.

**Definice 2.11** *Nechť  $\kappa_1, \kappa_2$  jsou hlavní křivosti v nesférickém bodě  $X \in \mathcal{S}$ . Jejich součin  $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$  nazýváme Gaussovou (úplnou) křivostí.*

Ve sférickém bodě je Gaussova křivost definována jako součin normálových křivostí v libovolných dvou směrech. Pro výpočet Gaussovy křivosti lze využít také vzorec

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Body na ploše jsou eliptické pro  $K > 0$ , hyperbolické pro  $K < 0$ , parabolické pro  $K = 0$ .

**Definice 2.12** *Geodetická křivost křivky  $\mathcal{C}$  na ploše  $\mathcal{S}$  v bodě  $X$  je číslo  $\kappa_g = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot (n \times \frac{d\gamma}{ds})$ .*

Geometricky se jedná o velikost kolmého průmětu vektoru křivosti  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  do tečné roviny  $\tau_X \mathcal{S}$ . Z Pythagorovy věty pak plyne následující vztah mezi křivostí  $\kappa$ , normálovou křivostí  $\kappa_n$  a geodetickou křivostí  $\kappa_g$  křivky  $\mathcal{C}$  na ploše  $\mathcal{S}$

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2.$$

**Definice 2.13** *Křivka na ploše se nazývá geodetikou, jestliže v každém bodě této křivky je geodetická křivost  $\kappa_g$  nulová.*

Geodetiky mají na křivé ploše podobnou roli jako přímky v rovině - jsou to nejkratší spojnice bodů.

V poslední části této kapitoly se budeme věnovat zobrazením mezi plochami. Bijektivní zobrazení  $g : S \mapsto \bar{S}$  se nazývá izometrie, jestliže  $g$  zachovává délky odpovídajících si křivek na  $S$  a  $\bar{S}$ . Pokud  $g$  zachová úhly, označuje se jako konformní zobrazení. Pokud  $g$  zachovává obsahy odpovídajících si částí ploch na  $S$  a  $\bar{S}$ , nazývá se rovnoploché zobrazení. Necht'  $\varphi_1$  a  $\bar{\varphi}_1$  jsou první základní formy ploch  $S$  a  $\bar{S}$  a necht'  $g_{ij}$  a  $\bar{g}_{ij}$  jsou příslušné koeficienty.

**Věta 2.8** *Necht'  $g : S \mapsto \bar{S}$  je bijektivní zobrazení. Pak platí:*

- (1)  *$g$  je izometrie právě tehdy, když v odpovídajících si bodech platí  $\varphi_1 = \bar{\varphi}_1$ ,*
- (2)  *$g$  je konformní zobrazení, právě když v odpovídajících si bodech jsou úměrné první základní formy obou ploch,*
- (3)  *$g$  je rovnoploché zobrazení, právě když v odpovídajících si bodech platí  $\det(g_{ij}) = \det(\bar{g}_{ij})$ .*

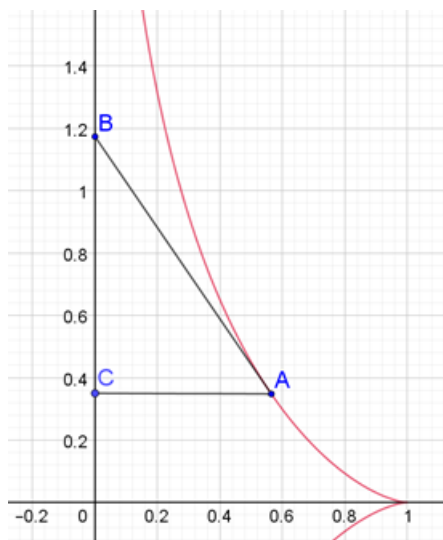


### 3 Traktrix

V této kapitole čerpáme z knih [4] a [5]. Pseudosféra je rotační plocha, jejíž profil tvoří křivka zvaná traktrix. V následujícím textu popíšeme základní vlastnosti traktrix.

Název traktrix vychází z latinského trahere (táhnout) [6]. Nejdříve odvodíme diferenciální rovnici traktrix. Přesuňme se do roviny  $xz$  a uvažujme objekt umístěný do bodu  $[1, 0]$  a provázek délky 1 natažený k počátku. Za provázek táhněme v kladném směru osy  $z$  tak, aby byl po celou dobu napnutý. Posun probíhá ve směru tečny k provázku. Trajektorie objektu pak opisuje část křivky traktrix. Nyní tuto situaci popíšeme rovnicí. Označíme  $A = [x, z]$  polohu objektu,  $B = [0, z_b]$  bod, ve kterém konec provázku držíme, a dále bod  $C = [0, z]$ . Takto dostaneme pravoúhlý trojúhelník  $ABC$ . Délka přepony  $AB$ , která odpovídá délce provázku, je po celou dobu tažení rovna jedné. Platí, že  $z_b - z = \sqrt{1 - x^2}$ . Posun objektu proběhne o  $(dx, dz)$ . Poměr  $\frac{dz}{dx}$  odpovídá poměru stran  $BC$  a  $CA$ . Diferenciální rovnice traktrix je tedy

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$



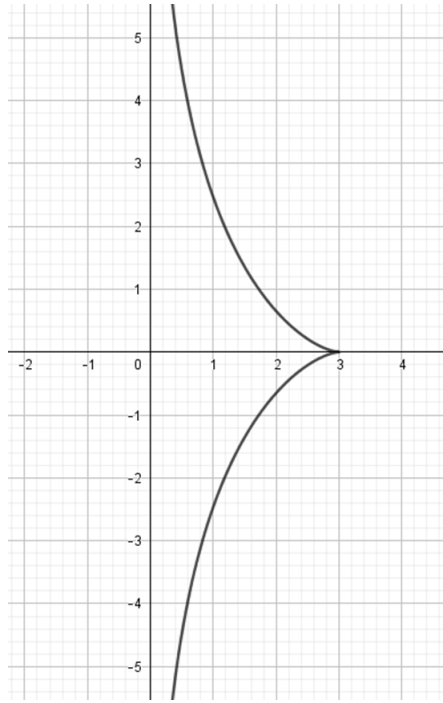
Obrázek 4: Vznik traktrix tažením provázku

V literatuře se však používá obecnější diferenciální rovnice (která odpovídá provázku o délce  $a > 0$ )

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Ukážeme si řešení této diferenciální rovnice s kladnou pravou stranou

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$



Obrázek 5: Traktrix

Použijeme substituci  $x = a \sin v$ , tedy  $dx = a \cos v dv$ .

$$\frac{dz}{a \cos v dv} = \frac{\sqrt{a^2 - (a \sin v)^2}}{a \sin v}$$

$$dz = \frac{\sqrt{(a \cos v)^2} a \cos v dv}{a \sin v} = \frac{a \cos^2 v dv}{\sin v} = \frac{a(1 - \sin^2 v) dv}{\sin v} = \frac{a dv}{\sin v} - a \sin v dv$$

$$z = \int \frac{a}{\sin v} dv - \int a \sin v dv = I + a \cos v$$

Nyní se budeme zabývat prvním integrálem označeným  $I$ . Použijeme substituci  $\cos v = t$ , tedy  $dv = -\frac{dt}{\sin v}$ .

$$I = \int \frac{a}{\sin v} dv = - \int \frac{a}{1-t^2} dt = -\frac{a}{2} \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} dt$$

$$I = \frac{a}{2} (\ln(1-t) - \ln(1+t)) = a \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

Převědeme zpět do proměnné  $v$ . A využijeme vztah  $\cos v = \cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2}$ .

$$I = a \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = a \ln \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}} = a \ln \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \frac{v}{2} + \sin^2 \frac{v}{2}}{1 + \cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2}}}$$

$$I = a \ln \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{v}{2}}{2 \cos^2 \frac{v}{2}}} = a \ln \tan \frac{v}{2}$$

Dostáváme tak parametrické vyjádření řešení  $\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

$$\begin{aligned}x &= a \sin v \\z &= a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \cos v \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Nyní vyjádříme  $z$  pomocí  $x$ . Nejprve zjednodušíme argument přirozeného logaritmu

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}} = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}} \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}} = \\&= \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - (a^2 - x^2)}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.\end{aligned}$$

Odtud

$$z = a \ln \left( \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Řešením diferenciální rovnice  $\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ ,  $z(a) = 0$  je funkce

$$z = a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2},\tag{4}$$

kteřá má asymptotu bez směrnice  $x = 0$ . Grafem funkce (4) je křivka, která se nazývá traktrix.

Přímým derivováním (3) ihned dostaneme, že tečný vektor traktrix je roven

$$f'(v) = \left( a \cos v, \frac{a \cos^2 v}{\sin v} \right),$$

takže tato křivka má pro  $v_0 = \frac{\pi}{2}$  singulární bod, čemuž odpovídá bod  $[a, 0]$ .

Kromě výše uvedené parametrizace (3) traktrix se ještě používají následující parametrizace (uvedeny jsou rovnice pro  $a = 1$ )

$$x = \frac{1}{w}, \quad z = \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}} - \operatorname{arg} \cosh(w)\tag{5}$$

a

$$x = e^u, \quad z = \sqrt{1 - e^{2u}} - \operatorname{arg} \cosh(e^{-u}),\tag{6}$$

kde  $\operatorname{arg} \cosh(x)$  je inverzní funkce k hyperbolickému kosinu  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . Přitom platí známá identita

$$\operatorname{arg} \cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).\tag{7}$$

## 4 Obecná rotační plocha

Rotační plocha vznikne rotací rovinné křivky kolem osy rotace. Jako osu rotace si zvolíme osu  $z$ . Pokud křivka leží v rovině procházející osou, nazývá se profil. Je-li

$$x = x(u), \quad z = z(u) \quad (8)$$

křivka neprotínající osu  $z$ , která rotuje kolem osy  $z$  (tj. profil), tak lokální parametrizace obecné rotační plochy s profilem (8) je

$$f(u, v) = (x(u) \cos(v), x(u) \sin(v), z(u)). \quad (9)$$

Rotací jednoho bodu profilu kolem osy rotace vznikne tzv. rovnoběžková kružnice, tedy křivka s konstantním  $u$ . Poledník je křivka s konstantním  $v$ . Rovnoběžkové kružnice a poledníky se nazývají souřadnicové křivky a tvoří souřadnicovou síť. Souřadnicovou síť obecné rotační plochy tedy tvoří poledníky  $v = \text{const}$  a na ně kolmé rovnoběžkové kružnice  $u = \text{const}$ .

Pro tečné vektory platí

$$\begin{aligned} f'_u &= (x'(u) \cos(v), x'(u) \sin(v), z'(u)), \\ f'_v &= (-x(u) \sin(v), x(u) \cos(v), 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Normálu získáme vektorovým součinem tečných vektorů:

$$n = f'_u \times f'_v = (-z'(u)x(u) \cos(v), -z'(u)x(u) \sin(v), x(u)x'(u)).$$

Pro velikost normály platí

$$\|n\| = |x(u)| \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}.$$

Normála není nikdy rovna nulovému vektoru. Dále určíme koeficienty první základní formy:

$$g_{11} = f'_u \cdot f'_u = x'^2(u) + z'^2(u), \quad g_{12} = g_{21} = f'_u \cdot f'_v = 0, \quad g_{22} = f'_v \cdot f'_v = x^2(u).$$

Přímým výpočtem ihned odvodíme, že první základní forma obecné rotační plochy má tvar

$$\varphi_1 = (x'^2(u) + z'^2(u))du^2 + x^2(u)dv^2. \quad (11)$$

Protože koeficient  $g_{12}$  první základní formy je roven nule, tak ze vzorce pro úhel dvou křivek na ploše ihned plyne, že souřadnicové křivky obecné rotační plochy tvoří ortogonální souřadnicovou síť. Přímým výpočtem pak odvodíme vyjádření pro druhou základní formu. Pro koeficienty druhé základní formy platí

$$h_{11} = n \cdot f''_{uu}, \quad h_{12} = h_{21} = n \cdot f''_{uv}, \quad h_{22} = n \cdot f''_{vv},$$

kde  $n$  je míněn jednotkový vektor normály. Druhá základní forma má tvar

$$\varphi_2 = \frac{(x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u)) du^2 + x(u)z'(u)dv^2}{\sqrt{x'^2(u) + z'^2(u)}}. \quad (12)$$

Hlavní směry  $(dv, du)$  splňují rovnost (1). Koeficienty  $g_{12}$  i  $h_{12}$  jsou nulové. Při výpočtu determinantu tedy zůstává pouze rovnice  $du dv (g_{11}h_{22} - g_{22}h_{11}) = 0$ .  $du$  nebo  $dv$  musí být nulové, tedy  $u = \text{const}$  a  $v = \text{const}$ .

Hlavní křivosti jsou extrémní křivosti, kterých mohou nabývat křivky procházející daným bodem. Jsou řešením kvadratické rovnice (2). Koeficienty  $g_{12}$  i  $h_{12}$  jsou nulové. Řešíme tedy rovnici  $(\kappa g_{11} - h_{11})(\kappa g_{22} - h_{22}) = 0$ .

$$\kappa_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{-z'(u)x''(u) + z''(u)x'(u)}{(x'^2(u) + z'^2(u))^{\frac{3}{2}}}, \quad \kappa_2 = \frac{h_{22}}{g_{22}} = \frac{z'(u)}{x(u)\sqrt{x'^2(u) + z'^2(u)}}. \quad (13)$$

Ve skriptech [2] je dále ukázáno, že Gaussova křivost obecné rotační plochy má vyjádření

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{z'(u) z''(u) x'(u) - x''(u) z'(u)}{x(u) (x'^2(u) + z'^2(u))^2}. \quad (14)$$

V případě obecné rotační plochy můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že její profil má přirozenou parametrizaci, tj.

$$x'^2(u) + z'^2(u) = 1. \quad (15)$$

Pak (11) přejde na jednodušší tvar

$$\varphi_1 = du^2 + x^2(u)dv^2,$$

rovnice(12) přejde na tvar

$$\varphi_2 = (x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u)) du^2 + x(u)z'(u)dv^2$$

a Gaussova křivost obecné rotační plochy [5] je

$$K = -\frac{x''(u)}{x(u)}. \quad (16)$$

## 5 Pseudosféra

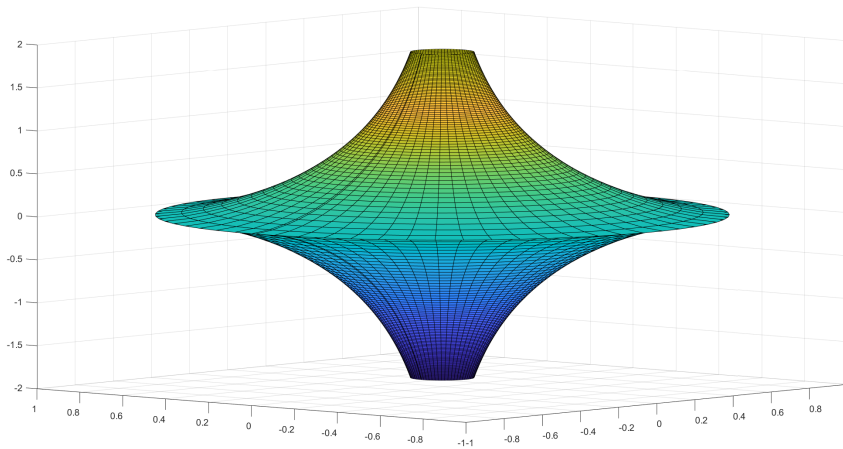
Nyní se budeme věnovat pseudosféře, což je rotační plocha, jejíž profil tvoří naše křivka traktrix. Ze vztahů (3), (8) a (9) ihned plyne, že parametrické rovnice pseudosféry jsou

$$\begin{aligned}x &= a \sin u \cos v, \\y &= a \sin u \sin v, \\z &= a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right).\end{aligned}\tag{17}$$

Dosazením do vztahu (14) pak dostaneme Gaussovu křivost pseudosféry rovnu

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Tedy pseudosféra má konstantní všude zápornou Gaussovu křivost.



Obrázek 6: Pseudosféra

V dalším ukážeme, že pseudosféra je jediná rotační plocha s touto vlastností. Zde čerpáme z knihy [5]. Přesněji řečeno, určíme rovnice rotační plochy z podmínky pro předepsanou Gaussovu křivost tvaru  $K = -1$ . Je zřejmé, že stačí najít rovnice rotující křivky (tj. profilu (8)). Ze vztahu (16) pro Gaussovu křivost dostaneme diferenciální rovnici  $x''(u) - x(u) = 0$ , která má obecné řešení

$$x(u) = ce^u + de^{-u}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Druhou funkci  $z(u)$  z rovnice profilu (8) pak určíme z podmínky pro přirozenou parametrizaci profilu. Funkci  $z(u)$  však lze vyjádřit z rovnice (15) pomocí elementárních funkcí pouze tehdy, když jedna z konstant  $c, d$  je rovna nule. Předpokládejme tedy  $d = 0$ . Reparametrizací  $u \mapsto u + \text{const}$  pak dosáhneme toho, že  $c = 1$ , takže celkem pro  $c = 1$  a  $d = 0$  je  $x(u) = e^u$ . Z podmínky (15) pak dostaneme  $z'(u) = \sqrt{1 - e^{2u}}$ , takže

$$z(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du.$$

Aby byl u výše uvedeného integrálu výraz pod odmocninou kladný, musíme předpokládat  $u \leq 0$ . Integrál pak vypočteme substitucí  $\cos \alpha = e^u$  a nakonec vyjde

$$\int \sqrt{1 - e^{2u}} du = \sqrt{1 - e^{2u}} - \ln(e^{-u} + \sqrt{e^{-2u} - 1}).$$

S využitím identity (7) pak dostáváme

$$z(u) = \sqrt{1 - e^{2u}} - \arg \cosh(e^{-u}).$$

Integrační konstantu jsme mohli položit rovnu nule vzhledem k možným translacím plochy. Odvodili jsme tak výše uvedenou rovnici (6) traktrix. Rotací kolem osy  $z$  nakonec dostaneme plochu, která má ve všech bodech konstantní Gaussovu křivost  $K = -1$ . Poznamenejme, že vzhledem k výše uvedenému předpokladu  $u \leq 0$  platí  $0 < x(u) = e^u \leq 1$ . Substitucí  $w = e^{-u}$  dostáváme parametrické vyjádření traktrix (9) a parametrizaci pseudosféry nazývanou Upper half plane model.

## 5.1 Upper half plane model

Poznamenejme na začátek, že všechna tvrzení z této i následující kapitoly jsou dokázána v knize [5]. Podle věty 5.5 uvedené níže, na pseudosféře neplatí axiom rovnoběžek. Pseudosféra je tedy jedním z modelů neeukleidovské geometrie. Tento model dále označujeme symbolem  $\mathcal{H}$ .

Uvažujme parametrizaci traktrix (5) a příslušnou parametrizaci pseudosféry

$$f(w, v) = \left( \frac{1}{w} \cos v, \frac{1}{w} \sin v, \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}} - \ln(w + \sqrt{w^2 - 1}) \right). \quad (18)$$

Plocha je korektně definovaná pro  $w > 1$ . Podle [5], geodetiky této plochy odpovídají segmentům kružnic a přímkám kolmo protínajícím osu  $v$  v rovině parametrů  $vw$ . Pro tečné vektory platí

$$f'_w = \left( -\frac{1}{w^2} \cos v, -\frac{1}{w^2} \sin v, -\frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w^2} \right),$$

$$f'_v = \left( -\frac{1}{w} \sin v, \frac{1}{w} \cos v, 0 \right).$$

Koeficienty první základní formy jsou pak tvaru

$$g_{11} = \frac{1}{w^4}(\sin^2 v + \cos^2 v) + \frac{w^2 - 1}{w^4} = -\frac{1}{w^4}(1 + w^2 - 1) = \frac{1}{w^2},$$

$$g_{12} = \frac{1}{w^3}(\cos v \sin v - \sin v \cos v) = 0, \quad g_{22} = \frac{1}{w^2}.$$

Takže první základní forma je rovna

$$\varphi_1 = \frac{dw^2 + dv^2}{w^2}. \quad (19)$$

Podle známé Hilbertovy věty (viz [5]) neexistuje plocha s konstantní Gaussovou křivostí, která je "geodeticky kompletní", tj. plocha v níž lze všechny geodetiky nekonečně prodlužovat v obou směrech. To se dá obejít tak, že všechny vlastnosti plochy závisující na první základní formě (tj. délky, úhly, geodetiky apod.) studujeme v oblasti

$$\mathcal{H} = \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 | w > 0\} \quad (20)$$

se zadanou první základní formou (19). V  $\mathcal{H}$  totiž umíme sestavit geodetiky, jak uvidíme dále. Výše uvedené vlastnosti se pak nazývají *hyperbolické délky*, *hyperbolické úhly* apod. Označení (20) pak ospravedlňuje název této kapitoly "Upper half plane model". Využívá se také identifikace  $\mathbb{R}^2$  s množinou komplexních čísel  $\mathbb{C}$  pomocí zobrazení  $(v, w) \mapsto v + iw$ , takže

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}.$$

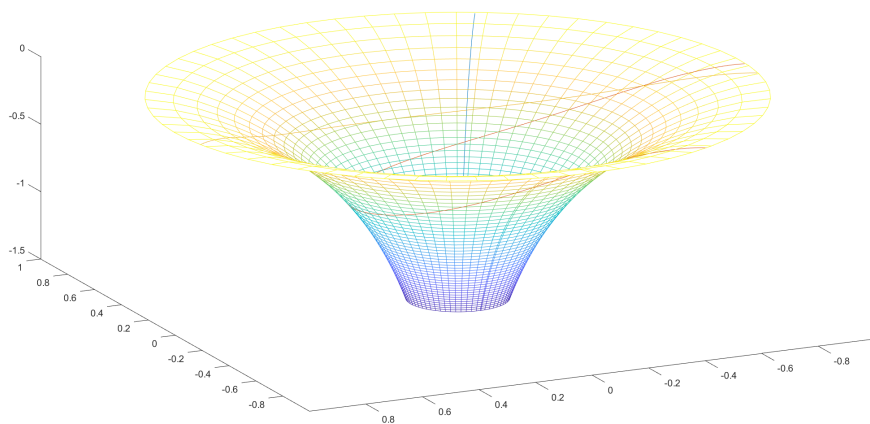
Protože první základní forma (19) je  $\frac{1}{w^2}$  násobkem první základní formy  $dw^2 + dv^2$  roviny  $(v, w, 0)$ , tak existuje konformní zobrazení z  $\mathcal{H}$  do roviny. Platí tedy

**Věta 5.1** *Hyperbolické úhly v  $\mathcal{H}$  jsou stejné jako eukleidovské úhly.*

Vidíme, že se jedná o konformní model. Následující věta popisuje geodetiky v  $\mathcal{H}$ .

**Věta 5.2** *Geodetiky v  $\mathcal{H}$  jsou polopřímky rovnoběžné s imaginární osou a segmenty kružnic se středy na reálné ose.*

Jak již bylo řečeno, roli přímek v hyperbolické geometrii zastupují geodetiky, přičemž na  $\mathcal{H}$  je nazýváme hyperbolickými přímkami. Tedy uvedené křivky v oblasti parametrů se zobrazují na geodetiky na pseudosféře. Na plochu pseudosféry se zobrazí pouze ta část půlkružnice nebo polopřímky, která leží nad přímkou  $w = 1$  neboli  $\text{Im}(z) = i$ . Na obrázcích 7 a 8 si odpovídají křivky se stejnou barvou.



Obrázek 7: Geodetiky na pseudosféře

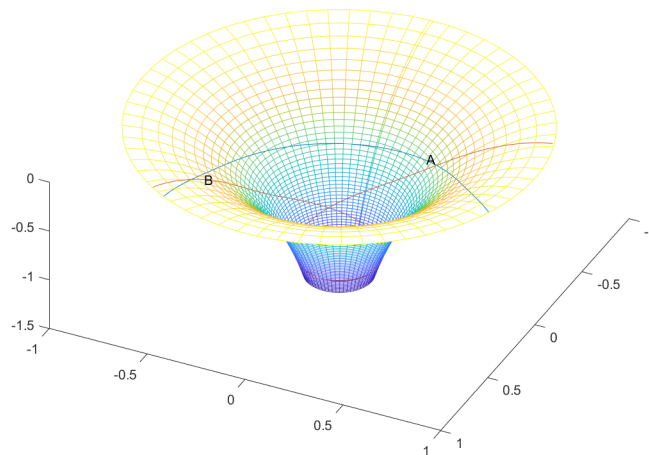




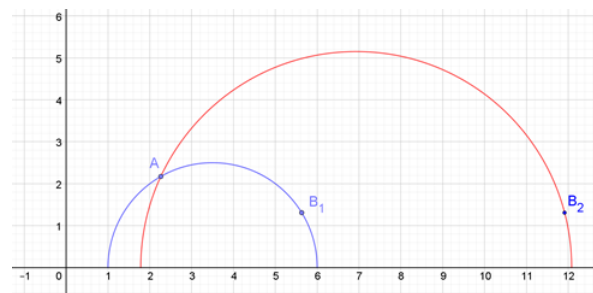
Obrázek 8: Geodetické přímky v  $\mathcal{H}$

**Věta 5.3** *Libovolnými dvěma různými body na  $\mathcal{H}$  prochází jediná hyperbolická přímka.*

Za různé body přitom považujeme různé body v  $\mathcal{H}$ , i když se zobrazí na stejný bod pseudosféry. Geodetika je určena jednoznačně dvěma body v  $\mathcal{H}$ , nikoli jen dvěma body na pseudosféře, jak je vidět na obrázcích 9 a 10.



Obrázek 9: Různé geodetiky  $AB$ :  $B$  je obrazem  $B_1$  i  $B_2$



Obrázek 10: Různé hyperbolické přímky:  $AB_1$  a  $AB_2$

Protože existuje jediná hyperbolická přímka procházející libovolnými dvěma body  $a, b \in \mathcal{H}$ , má smysl definovat tzv. *hyperbolickou vzdálenost*  $d_{\mathcal{H}}(a, b)$  bodů  $a, b$  jako délku hyperbolického přímého segmentu, který tyto body spojuje. Hyperbolická vzdálenost bodů

je tedy určena délkou úseku geodetiky, která jimi prochází. Body  $a, b$  jsou komplexní čísla v  $\mathcal{H}$ . Označme  $\bar{a}$  komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu  $a$ . Pak platí

**Věta 5.4** *Hyperbolická vzdálenost mezi dvěma body  $a, b \in \mathcal{H}$  je*

$$d_{\mathcal{H}}(a, b) = 2 \operatorname{arg} \tanh \frac{|b - a|}{|b - \bar{a}|}.$$

Přitom  $\operatorname{arg} \tanh(x)$  značí inverzní funkci k hyperbolickému tangensu

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Připomeňme zde známý vzorec

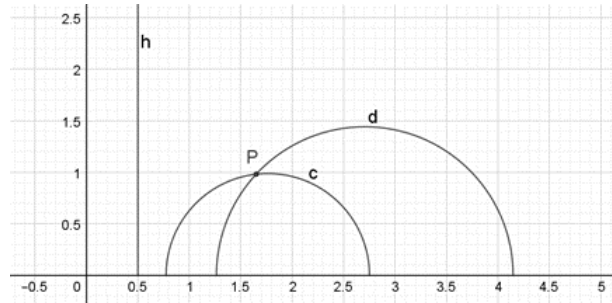
$$\operatorname{arg} \tanh(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Poznamenejme, že hyperbolický tangens v předchozí větě je dalším ospravedlněním toho, že geometrie v  $\mathcal{H}$  se nazývá *hyperbolickou geometrií*. Na první pohled by se mohlo zdát, že hyperbolická přímka tvořená půlkružnicí je krátká. Když však uvážíme metriku  $d_{\mathcal{H}}$ , vidíme, že hyperbolické přímky jsou nekonečné.

Podle následující věty je  $\mathcal{H}$  modelem neeuclidovské geometrie.

**Věta 5.5** *V  $\mathcal{H}$  neplatí axiom rovnoběžek.*

Na obrázku 11 vidíme hyperbolickou přímku  $h$  a bod  $P$ , kterým prochází dvě různé hyperbolické přímky  $c, d$  rovnoběžné s  $h$ .



Obrázek 11: Axiom rovnoběžek v  $\mathcal{H}$

Následující věta uvádí vzorec pro výpočet plošného obsahu hyperbolického polygonu, tj. polygonu, jehož strany tvoří hyperbolické přímky.

**Věta 5.6** *Nechť  $P$  je hyperbolický  $n$ -úhelník v  $\mathcal{H}$ , jehož vnitřní úhly jsou  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Pak pro hyperbolickou plochu tohoto  $n$ -úhelníka platí:*

$$A(P) = (n - 2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n.$$

## 5.2 Poincarého diskový model

Od Upper half plane modelu se přesuneme k Poincarého diskovému modelu pomocí zobrazení

$$\mathcal{P}(z) = \frac{z - i}{z + i}. \quad (21)$$

Jedná se o bijekci mezi komplexní rovinou bez  $-i$  a komplexní rovinou bez  $1$ . Inverzní zobrazení vypadá takto:

$$\mathcal{P}^{-1}(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)i}.$$

Je zřejmé, že zobrazení  $\mathcal{P}$  je definováno ve všech bodech  $\mathcal{H}$ . Určíme nyní obraz  $\mathcal{H}$  při zobrazení  $\mathcal{P}$ . Platí

$$\mathcal{P}(v + iw) = \frac{v + i(w - 1)}{v + i(w + 1)},$$

takže

$$|\mathcal{P}(v + iw)| = \left( \frac{v^2 + w^2 + 1 - 2w}{v^2 + w^2 + 1 + 2w} \right)^{1/2}.$$

Odtud dostáváme  $|\mathcal{P}(v + wi)| < 1$  právě když  $w > 0$ ,  $|\mathcal{P}(v + wi)| = 1$  pro  $w = 0$  a  $|\mathcal{P}(v + wi)| > 1$  pro  $w < 0$ . Tedy  $\mathcal{P}$  zobrazí  $\mathcal{H}$  na jednotkový disk

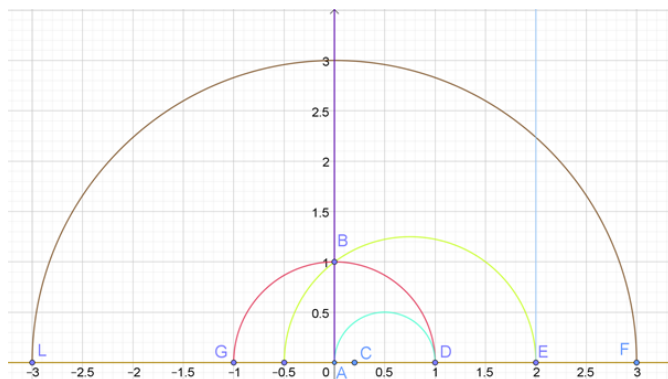
$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

a reálnou osu na jednotkovou kružnici  $\mathcal{C}$  danou rovnicí  $|z| = 1$ . Poincarého diskový model  $\mathcal{D}_P$  hyperbolické geometrie je disk  $\mathcal{D}$  s první základní formou takovou, že  $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}_P$  je izometrie. Zobrazení  $\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}_P$  je ilustrováno obrázky 12 a 13.

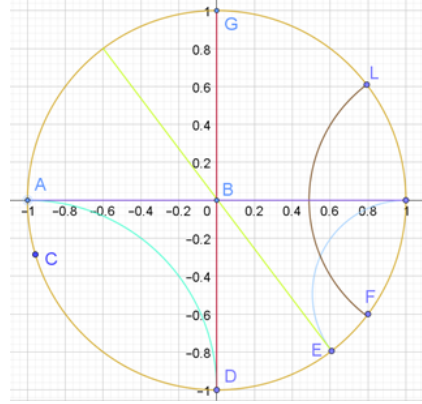
Přímým výpočtem odvodíme:

**Věta 5.7** *První základní forma je tvaru*

$$\varphi_1 = \frac{4(dw^2 + dv^2)}{(1 - v^2 - w^2)^2}.$$



Obrázek 12: Geodetiky v  $\mathcal{H}$



Obrázek 13: Geodetiky v  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$

Podle předchozí věty  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  je opět konformním modelem hyperbolické geometrie. Vzdálenost dvou bodů v  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  definujeme vztahem

$$d_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}}(a, b) = d_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}^{-1}(a), \mathcal{P}^{-1}(b)).$$

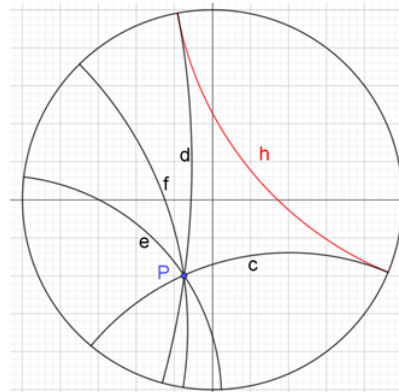
Pak platí následující věta:

**Věta 5.8** Pro vzdálenost bodů  $a, b \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  platí:

$$d_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}}(a, b) = 2 \arg \tanh \frac{|b - a|}{|1 - \bar{a}b|}.$$

Pro hyperbolické přímky v  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  platí:

**Věta 5.9** Hyperbolické přímky v  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  jsou přímky a segmenty kružnic, které kolmo protínají hraniční kružnici  $\mathcal{C}$ .



Obrázek 14: Axiom rovnoběžek v  $\mathcal{D}$

Axiom rovnoběžek opět neplatí. Na obrázku 14 bodem  $P$  procházejí geodetiky  $e$  a  $f$  rovnoběžné s  $h$ . Geodetiky  $c$  a  $d$  jsou hraniční.

## 6 Závěr

V první kapitole jsme uvedli tvrzení, na kterých je postavena hyperbolická geometrie. Srovnali jsme geometrii eukleidovskou, eliptickou a hyperbolickou. Ukázali jsme, že vhodnou plochou pro studium vlastností hyperbolické geometrie je pseudosféra, na které hrají roli přímek geodetiky. Bohužel na pseudosféře není možné geodetiky libovolně prodlužovat. Parametrizací pseudosféry jsme získali Upper half plane model, který umožňuje libovolné prodlužování geodetik. Kvalitou tohoto modelu je, že je konformní. Pomocí vhodné transformace jsme pak získali Poincarého diskový model, který využívá pouze jednotkový kruh v komplexní rovině. Jedná se také o konformní model.

## Reference

- [1] BUMBÁLKOVÁ, Adéla. Sférická geometrie. Brno, 2020. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Josef JANYŠKA.
- [2] DOUPOVEC, Miroslav. Diferenciální geometrie a tenzorový počet. VUT v Brně, FSI, Brno, 1999, 83 s. ISBN 80-214-1470-7.
- [3] EUKLEIDES. Základy, Nymburk, 2008. ISBN 978-80-903773-7-0.
- [4] GÓMEZ, Joan. Neeukleidovské geometrie. Dokořán, 2018. 134 s. ISBN 978-80-7363-844-3.
- [5] PRESSLEY, Andrew. Elementary Differential Geometry. Second edition. Springer-Verlag London, 2010, 473 s. ISBN 978-1-84882-890-2.
- [6] <https://en.wikipedia.org/wiki/Tractrix>.

## Seznam obrázků

1	Sférické trojúhelníky (převzato z [1]) . . . . .	5
2	Axiom rovnoběžek v hyperbolické geometrii . . . . .	6
3	Trojúhelníky v různých geometriích . . . . .	7
4	Vznik traktrix tažením provázku . . . . .	15
5	Traktrix . . . . .	16
6	Pseudosféra . . . . .	20
7	Geodetiky na pseudosféře . . . . .	22
8	Geodetické přímky v $\mathcal{H}$ . . . . .	23
9	Různé geodetiky $AB$ : $B$ je obrazem $B_1$ i $B_2$ . . . . .	23
10	Různé hyperbolické přímky: $AB_1$ a $AB_2$ . . . . .	23
11	Axiom rovnoběžek v $\mathcal{H}$ . . . . .	24
12	Geodetiky v $\mathcal{H}$ . . . . .	25
13	Geodetiky v $\mathcal{D}_p$ . . . . .	26
14	Axiom rovnoběžek v $\mathcal{D}$ . . . . .	26

## Seznam tabulek

1	Srovnání geometrií . . . . .	4
---	------------------------------	---