



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ MODELY POPULAČNÍ BIOLOGIE

CONTINUOUS AND DISCRETE MODELS OF POPULATION BIOLOGY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Lucie Ondrová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	Lucie Ondrová
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Spojité a diskrétní modely populační biologie

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Populační biologie je vědní disciplínou, ve které se tradičně uplatňují matematické modely ve formě diferenciálních a diferenčních rovnic. Ukazuje se, že v řadě případů jsou vlastnosti řešení příslušných diskrétních (diferenčních) modelů bohatší, než je tomu u odpovídajících modelů spojitých (diferenciálních). Na významu proto nabývá otázka vzájemné komparace těchto modelů, a to jak z hlediska kvalitativního, tak i kvantitativního.

Cíle bakalářské práce:

1. Sestavení základních jednodruhových spojitých a diskrétních modelů populační biologie.
2. Popis významných kvalitativních vlastností jejich řešení (stabilita, otázka periodického chování, konvergence k rovnovážnému stavu).
3. Porovnání vlastností řešení obou typů modelů a jejich diskuse.

Seznam doporučené literatury:

BRAUER, Fred a Carlos CASTILLO-CHÁVEZ. Mathematical models in population biology and epidemiology. New York: Springer, c2001. Texts in applied mathematics, vol. 40. ISBN 0-387-989-2-1.

ELAYDI, Saber N. An Introduction to Difference Equations. 2nd ed. New York: Springer Verlag, 1999. ISBN 0-387-98830-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá analýzou spojitého a diskrétního logistického modelu jednodruhé populace. U každého modelu je diskutována rovnováha, její stabilita a chování řešení modelu při různých počátečních podmínkách. V případě diskrétního modelu je zde podrobně diskutováno periodické chování řešení v závislosti na změně parametru charakterizujícího míru růstu zkoumané populace. V práci je také zmíněno chaotické chování řešení modelu. Grafické interpretace dílčích problémů jsou vytvořeny v softwaru MATLAB. Výpočty jsou kontrolovány softwarem Maple.

Abstract

This thesis analyzes the continuous and discrete logistic model of a single-species population. For both of these models, there are discussed problems of equilibria, their stability and behaviour of the solutions for different initial conditions. In the case of the discrete model, the periodic behaviour of solutions is discussed in detail with respect to change of a parameter characterizing growth of the investigated population. The chaotic behaviour of solutions is mentioned as well. The graphic interpretations of each of the problems are performed using the software MATLAB. The calculations are checked via the software Maple.

Klíčová slova

Autonomní systém diferenciálních rovnic, diferenční rovnice, logistická rovnice, rovnováha modelu, cyklus řádu k , stabilita řešení, periodické chování, chaotické chování.

Keywords

Autonomous system of differential equations, difference equation, logistic equation, model equilibrium, solution of period k , stability of solution, periodic behaviour, chaotic behaviour.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Spojité a diskrétní modely populační biologie* vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Lucie Ondrová

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu práce doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za odborné vedení práce, veškerou pomoc a čas strávený při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat mojí rodině za podporu v bakalářském studiu.

Lucie Ondrová

Obsah

1	Úvod	12
2	Matematický aparát	13
2.1	Rovnováha modelu a její stabilita	13
2.2	Periodické řešení modelu a jeho stabilita	16
3	Spojité logistický populační model	18
3.1	Odvození spojitého populačního modelu	18
3.2	Přechod k logistickému modelu	19
3.3	Rovnováha modelu, stabilita	20
4	Diskrétní logistický populační model	23
4.1	Odvození diskrétního logistického modelu	23
4.2	Rovnováha modelu, stabilita	24
4.3	Periodické chování řešení	25
5	Chaos	41
6	Shrnutí a závěrečné poznámky	42
	Literatura	45
	Použité symboly	47

1 Úvod

V současné době žije na Zemi přes 7,5 miliard lidí¹. Tento fakt v nás může vyvolávat otázky jako „Kolik lidí bude žít na Zemi za pár desítek let?“ nebo „Kolik lidí dokáže Země ještě uživit?“. Odpovědi na tyto otázky lze najít ve vědní disciplíně zvané populační biologie. Tato vědní disciplína zkoumá mimo jiné právě velikost populace určitého druhu (nebo více druhů) v čase. Při studování populace daného druhu je důležité určit, jak se tento druh bude vyvíjet, případně může-li tento vývoj vykazovat i opakované chování (například s další generací druhu) nebo zda různé počáteční velikosti populace mohou zapříčinit odlišné chování ve vývoji populace.

Velikost populace (nebo její změnu) lze popsat logistickou rovnicí, která společně s počáteční velikostí populace tvoří logistický model. Řešení modelu tedy odpovídá velikosti populace v daném čase, případně v daném časovém úseku. Druh modelu závisí na volbě časového intervalu, který může být buď spojitý, nebo diskrétní ve formě stejně dlouhých časových úseků (například měsíce, roky). Pro spojitý časový interval se odvozuje logistická rovnice ve tvaru diferenciální rovnice prvního řádu, která má jako počáteční podmínku právě počáteční velikost populace. Takový model se nazývá spojitý logistický model, jenž jako první sestavil anglický ekonom Thomas Robert Malthus v roce 1798. Později, v roce 1838, upravil tento model belgický matematik Pierre François Verhulst. Jiné formy tohoto modelu, jako model založený na zdrojích nebo epidemiologický model, lze nalézt například v [2].

Pro časový interval ve formě úseků se odvozuje logistická rovnice ve tvaru diferenční rovnice prvního řádu druhého typu. K této rovnici je potřeba opět dodat počáteční velikost populace, aby bylo možné ji řešit. Takový model se nazývá diskrétní logistický model, který vznikl analogickou argumentací a úvahami jako model spojitý. V roce 1845 odvodil P. F. Verhulst také diferenční rovnici popisující situaci, kdy populace kompletně vymře v každé generaci. Jinou formu diferenční rovnice odvodil v roce 1975 Michael Patrick Hassell, popisující zejména populaci hmyzu. Obě zmíněné rovnice jsou méně známé tvary diskrétního logistického modelu a v této práci se neobjeví. Jsou zde pouze pro zajímavost, více o nich je k nalezení v [2].

Tato práce se zabývá upraveným spojitým logistickým modelem od P. F. Verhulsta a analogicky odvozeným diskrétním logistickým modelem. Ve druhé kapitole je uveden veškerý potřebný matematický aparát, který se v práci využívá. Díky němu lze podrobně analyzovat modely popsané v dalších kapitolách. Třetí kapitola se zabývá spojitým logistickým modelem. Tento model je zde odvozen od úplného počátku, je zde určeno řešení modelu, ukázána rovnováha modelu a také diskutována její stabilita. Další kapitola se zabývá diskrétním logistickým modelem. Tento model je zde opět odvozen, je zde provedena podrobná analýza chování řešení v závislosti na speciálním bifurkačním parametru, i diskutována stabilita řešení v závislosti na tomto parametru. V páté kapitole je stručně popsáno chaotické chování diskrétního modelu. Na závěr jsou shrnuty veškeré poznatky a výsledky této práce.

¹převzato z: Worldometers - real time world statistics. *Worldometers.info* [online]. [cit. 2017-05-19]. Dostupné z: <http://www.worldometers.info/>

2 Matematický aparát

V této kapitole jsou uvedeny veškeré pojmy, definice a věty potřebné k porozumění a řešení problémů v dalších kapitolách. Lze je nalézt například v [2], [3], [7], [8], [10].

Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu (ODR1) ve tvaru

$$y' = f(t, y), \quad f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in \langle 0; \infty \rangle, \quad (2.1)$$

kde f je reálná funkce dvou proměnných. Pro rovnici (2.1) uvažujme počáteční podmínku ve tvaru

$$y(0) = y_0.$$

Diskrétní analogií ODR1 je diferenční rovnice prvního řádu ve tvaru

$$x_{n+1} = g(n, x_n), \quad g : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

kde g je reálná funkce dvou proměnných. V dalších částech se budeme zabývat výhradně autonomními (dynamickými) rovnicemi. Znamená to tedy, že pravé strany rovnic (2.1) a (2.2) nezávisí explicitně na t , respektive na n . Rovnice (2.1) přejde na tvar

$$y' = f(y), \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in \langle 0; \infty \rangle, \quad (2.3)$$

a podobně rovnice (2.2) přejde na tvar

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Poznámka 2.1. Jelikož je možné zkoumat populace více druhů najednou, je nezbytné zavést také soustavu dynamických ODR1 pro m druhů jako

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad t \in \langle 0; \infty \rangle, \quad (2.5)$$

a podobně i její diskrétní analogii jako

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

V této kapitole budou následně zavedeny některé pojmy a definice právě pro tyto soustavy. Modely vycházející z rovnice (2.5) nazýváme *spojitými populačními modely*. Modely vycházející z rovnice (2.6) nazýváme *diskrétními populačními modely*.

2.1 Rovnováha modelu a její stabilita

U populačních modelů je jednou z hlavních otázek určení rovnovážného stavu modelu. Je proto nezbytné zavést pojem *rovnováhy*.

Definice 2.2. Rovnováhou spojitého modelu rozumíme všechny $\mathbf{y}^* \in D(\mathbf{f})$ splňující

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}.$$

Definice 2.3. Rovnováhou diskrétního modelu rozumíme všechny $\mathbf{x}^* \in D(\mathbf{g})$ splňující

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*.$$

Každá rovnováha tedy představuje konstantní řešení modelu (spojitého i diskrétního). Pokud pro nějaký model rovnováha existuje, je důležité diskutovat také její stabilitu. Zjistíme tím, zda je chování modelu předvídatelné v blízkém okolí rovnováhy (zda je model citlivý na změnu počátečních podmínek v blízkém okolí rovnováhy). Zaveďme si proto pojem stability pro rovnováhu spojitého modelu.

Definice 2.4. Nechť $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m$ je rovnováha soustavy (2.5). Řekněme, že rovnováha \mathbf{y}^* je *stabilní*, jestliže ke každému okolí \mathcal{O} bodu $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m$ existuje okolí $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$ bodu $\mathbf{y}^* \in \mathcal{O}$ takové, že každé řešení $\mathbf{y}(t)$ s podmínkou $\mathbf{y}(0) \in \mathcal{O}_1$ je definované pro všechna $t > 0$ a platí $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{O}$ pro všechna $t > 0$.

Jestliže navíc platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*,$$

pak se rovnováha \mathbf{y}^* nazývá *asymptoticky stabilní (atraktivní)*. Není-li rovnováha \mathbf{y}^* stabilní, pak ji nazveme *nestabilní*.

Stabilitu rovnováhy \mathbf{y}^* soustavy (2.5) lze určit pomocí reálných částí vlastních čísel Jacobiho matice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{y}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{y}^*) \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Pro danou rovnováhu a jí odpovídající Jacobiho matici se vlastní čísla λ spočítají jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice. Jelikož jsou však modely v této práci odvozeny z nelineárních rovnic, je nutné k řešení stability rovnováhy použít tzv. *linearizační větu*, k jejímuž odvození vedou následující úvahy:

Nechť $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^m$ je rovnováha soustavy (2.5). Označme proměnnou $\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*$, popisující odchylku řešení od rovnováhy. Substitucí dostáváme

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}^* + \mathbf{u}(t)),$$

a aplikací Taylorovy věty dostáváme

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}^*) + \mathbf{f}'(\mathbf{y}^*)\mathbf{u}(t) + \frac{\mathbf{f}''(c)}{2!}(\mathbf{u}(t))^2$$

pro nějaké c mezi \mathbf{y}^* a $\mathbf{y}^* + \mathbf{u}(t)$. Díky použití $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$ a označení $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{f}''(c)}{2!}\mathbf{u}^2$ lze přepsat soustavu (2.5) na ekvivalentní tvar

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}'(\mathbf{y}^*)\mathbf{u} + \mathbf{h}(\mathbf{u}).$$

Funkce $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ je zanedbatelná, jestliže platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taková, že $|\mathbf{h}(\mathbf{u})| < \varepsilon|\mathbf{u}|$, když $|\mathbf{u}| < \delta$. Linearizace soustavy (2.5) v rovnováze \mathbf{y}^* je definovaná jako lineární homogenní diferenciální soustava

$$\mathbf{v}' = \mathbf{f}'(\mathbf{y}^*)\mathbf{v}.$$

Podstata linearizační věty je v tom, že chování řešení linearizace je jednoduché ukázat, a přitom toto chování popisuje i chování řešení původní soustavy (2.5). Pro naše účely stačí linearizační větu uvést v následujícím znění:

Věta 2.5. *Mají-li všechna vlastní čísla λ Jacobiho matice \mathbf{J} soustavy (2.5) zápornou reálnou část, je rovnováha \mathbf{y}^* asymptoticky stabilní. Má-li alespoň jedno vlastní číslo kladnou reálnou část, potom je rovnováha \mathbf{y}^* nestabilní. Jestliže má alespoň jedno vlastní číslo nulovou reálnou část, a žádné jiné kladnou reálnou část, nelze o stabilitě rovnováhy \mathbf{y}^* tímto kritériem rozhodnout.*

Podobným způsobem se zavádí pojem stability pro rovnováhu disktrétního modelu:

Definice 2.6. Necht' $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ je rovnováha soustavy (2.6). Řekněme, že rovnováha \mathbf{x}^* je *stabilní*, jestliže ke každému okolí \mathcal{O} bodu $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ existuje okolí $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$ bodu $\mathbf{x}^* \in \mathcal{O}$ takové, že pro každé řešení \mathbf{x}_n s podmínkou $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}_1$ platí $\mathbf{x}_n \in \mathcal{O}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jestliže navíc platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*,$$

pak se rovnováha \mathbf{x}^* nazývá *asymptoticky stabilní (atraktivní)*. Není-li rovnováha \mathbf{x}^* stabilní, pak ji nazveme *nestabilní*.

Analogicky se klasifikuje stabilita rovnováhy disktrétního modelu, a to opět na základě vlastních čísel Jacobiho matice příslušné linearizované soustavy. Pro disktrétní model má Jacobiho matice tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{n,1}}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n,m}}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_{n,1}}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_{n,m}}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix},$$

kde symbolem $\frac{\partial g_i}{\partial x_{n,j}}$ rozumíme parciální derivaci i -té složky vektoru \mathbf{g} podle j -té složky vektoru \mathbf{x}_n . Rozdíl mezi disktrétním a spojitým modelem je ovšem v lokalizaci vlastních čísel. Věta 2.5 zní proto pro disktrétní případ následovně:

Věta 2.7. *Mají-li všechna vlastní čísla λ Jacobiho matice \mathbf{J} soustavy (2.6) velikost menší než jedna (tj. $|\lambda| < 1$), je rovnováha \mathbf{x}^* asymptoticky stabilní. Má-li alespoň jedno vlastní číslo velikost větší než jedna, potom je rovnováha \mathbf{x}^* nestabilní. Jestliže má alespoň jedno vlastní číslo velikost rovnu jedné, a žádné jiné nemá velikost větší než jedna, nelze o stabilitě rovnováhy \mathbf{x}^* tímto kritériem rozhodnout.*

Modely studované v této práci jsou však pouze skalární (jednodruhové), vycházejí z rovnic (2.3) a (2.4). Jacobiho matice spojitého modelu se proto zjednoduší na

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y^*) \right),$$

a Jacobiho matice disktrétního modelu na

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*) \right).$$

Poznámka 2.8. Podmínky stability rovnováhy modelu jsou z důvodu zjednodušení Jacobiho matice následující:

- rovnováha spojitého modelu je asymptoticky stabilní, jestliže je $f'(y^*) < 0$,
- rovnováha spojitého modelu je nestabilní, jestliže je $f'(y^*) > 0$,
- rovnováha diskrétního modelu je asymptoticky stabilní, jestliže je $|g'(x^*)| < 1$,
- rovnováha diskrétního modelu je nestabilní, jestliže je $|g'(x^*)| > 1$.

2.2 Periodické řešení modelu a jeho stabilita

Kromě posouzení otázky rovnováhy modelu a její stability je u populačních modelů hlavním problémem také otázka existence periodického řešení. Zatímco u diferenciálních rovnic a spojitých modelů je pojem periodického řešení zřejmý, v případě diskrétního modelu je třeba tento pojem blíže specifikovat. Následující pojmy jsou zavedeny pro funkci $g(x)$, která v této práci vystupuje ve tvaru pravé strany rovnice (2.4).

Definice 2.9. Řekněme, že funkce $g(x)$ má *cyklus řádu k* , jestliže existují různé body $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k \in D(g)$, které splňují

$$g(\lambda_1) = \lambda_2, \quad g(\lambda_2) = \lambda_3, \quad \dots \quad g(\lambda_{k-1}) = \lambda_k, \quad g(\lambda_k) = \lambda_1.$$

Body $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ se nazývají body cyklu řádu k funkce $g(x)$.

Poznámka 2.10. Má-li funkce $g(x)$ cyklus řádu k , pak při vhodné volbě počáteční podmínky existuje periodické řešení rovnice (2.4) se základní periodou k .

Pro analýzu diskrétních modelů je vhodné poznamenat, co obecně platí pro cykly funkce $g(x)$. Vztahy mezi cykly obecné funkce popisuje *Šarkovského věta*.

Věta 2.11. (*Šarkovského věta*). *Nechť $g(x)$ je spojitá funkce zobrazující interval I do I a $i, j, k, l \in \mathbb{N}$. Na množině všech přirozených čísel zavedme nové uspořádání definované takto:*

$$1 \succ 2 \succ 4 \succ \dots \succ 2^j \succ 2^{j+1} \succ \dots \succ 2^i 7 \succ 2^i 5 \succ 2^i 3 \succ \dots \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 3 \succ \dots \succ 5 \succ 3$$

Jestliže funkce $g(x)$ má cyklus řádu k a $k \prec l$, pak má funkce $g(x)$ také cyklus řádu l .

Poznámka 2.12. K tomu, abychom dokázali určit body cyklu řádu k , je nutné zavedení pojmu *iterace*: Uvažujme funkci $g^2(x)$ jako funkci $g(g(x))$. Funkce $g^2(x)$ se nazývá *druhou iterací* funkce $g(x)$. Podobně se dá pomocí matematické indukce zavést také *k -tá iterace* funkce $g(x)$ jako $g^k(x)$.

Body cyklu řádu k funkce $g(x)$ pak lze početně najít takto: Bod $\lambda^* \in D(g)$ je bodem cyklu řádu k funkce $g(x)$, jestliže platí $g^k(\lambda^*) = \lambda^*$ a současně $g^l(\lambda^*) \neq \lambda^*$ pro $l = 1, 2, \dots, k - 1$.

Poznámka 2.13. Označením $g^k(x)$, kde $k \in \mathbb{N}$, rozumíme v této práci pouze k -tou iterací funkce $g(x)$, nikoliv k -tou mocninou této funkce. Pro $k = 1$ se jedná o pevný bod funkce $g(x)$ (jedná se o rovnováhu). Ostatní označení typu a^k rozumíme jako k -té mocniny (například $x^k, \lambda^k, (\lambda^*)^k$).

Pokud pro funkci $g(x)$ existuje cyklus řádu k , je opět důležité diskutovat jeho stabilitu. Stabilitu cyklu lze zavést pomocí následující definice využívající Poznámku 2.12:

Definice 2.14. Necht' $g(x)$ je spojitá funkce z intervalu I do I a necht' body $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ tvoří cyklus řádu k . Pak tento cyklus je

- asymptoticky stabilní (atraktivní), jestliže všechny body tohoto cyklu jsou asymptoticky stabilní rovnováhy funkce $g^k(x)$;
- nestabilní, jestliže všechny body tohoto cyklu jsou nestabilní rovnováhy funkce $g^k(x)$.

Poznámka 2.15. Přímým výpočtem společně s použitím Poznámky 2.8 lze ověřit, že je-li jeden bod cyklu řádu k funkce $g(x)$ asymptoticky stabilní (nestabilní), pak jsou všechny body tohoto cyklu asymptoticky stabilní (nestabilní). Z Poznámek 2.8 a 2.12 také vyplývá výpočetní způsob, jak stabilitu příslušných cyklů ověřit.

Poznámka 2.16. Je-li bod λ^* rovnováhou rovnice (2.4) (tedy je-li λ^* bodem cyklu řádu 1 funkce $g(x)$), pak je λ^* také bodem cyklu řádu k , kde $k \in \mathbb{N}$ (pokud takový cyklus existuje). Podobně tato vlastnost platí i v dalších případech; je-li λ^* bodem cyklu řádu 2, pak je také bodem cyklu řádu 2^n , kde $n \in \mathbb{N}$ (pokud takový cyklus existuje).

Poznámka 2.17. Zavedli jsme stabilitu pro cyklus řádu k pomocí rovnováhy k -té iterace $g^k(x)$ funkce $g(x)$. Stabilitu periodického řešení rovnice (2.4) můžeme volně interpretovat právě jako stabilitu tohoto cyklu. Periodické řešení rovnice (2.4) je tedy asymptoticky stabilní, je-li asymptoticky stabilní odpovídající cyklus funkce $g(x)$. Periodické řešení rovnice (2.4) je nestabilní, je-li nestabilní odpovídající cyklus funkce $g(x)$.

3 Spojitý logistický populační model

3.1 Odvození spojitého populačního modelu

Označme hustotu (velikost) populace daného druhu v čase t jako proměnnou $y(t)$. Předpokládejme, že $y(t)$ je hladkou funkcí času, která je všude diferencovatelná - i přes to, že $y(t)$ ve skutečnosti není spojitá (pro populaci s velkým počtem jedinců jsou předpoklady spojitosti a diferencovatelnosti splněny rozumnou aproximací).

Míra změny hustoty populace může být určena, pokud známe míru porodnosti, úmrtnosti a migrace. Pro jednoduchost se budeme zabývat pouze uzavřenou populací (pro uzavřenou populaci platí, že míra migrace je nulová, tedy že se nikdo z populace neodstěhuje ani nepřistěhuje).

Označme míru porodnosti jako b a míru úmrtnosti jako d . Potom $r = b - d$ vyjadřuje míru růstu (nebo poklesu) populace. Jestliže v čase t je velikost populace daná jako $y(t)$, a všichni jedinci v populaci jsou nezávislí (neomezené životní prostředí, jedinci se navzájem neovlivňují), potom za krátký časový interval délky h lze vyjádřit změnu velikosti populace jako aproximaci

$$y(t + h) - y(t) \approx rhy(t).$$

Vydělením aproximace délkou časového úseku h dostaneme

$$\frac{y(t + h) - y(t)}{h} \approx ry(t),$$

a přiblížením se limitně k $h \rightarrow 0$, dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dt} = ry. \tag{3.1}$$

Separací proměnných a následnou integrací

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= r dt, \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int r dt, \\ \ln |y| &= rt + c, \end{aligned}$$

kde c je integrační konstanta, dostaneme po úpravách všechna řešení diferenciální rovnice (3.1)

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \ln e^{rt} + \ln e^c = \ln (e^{rt} e^c), \\ y &= e^{rt} e^c = C e^{rt}, \end{aligned}$$

kde $C = e^c$ je konstanta. Specifikace počáteční velikosti populace v čase $t = 0$, jako počáteční podmínka $y(0) = y_0$, dává partikulární řešení počátečního problému (3.1) ve tvaru

$$y(t) = y_0 e^{rt}. \tag{3.2}$$

Analýzou míry růstu (nebo poklesu) populace r lze dojít k následujícím poznatkům:

- míra růstu populace $r > 0$ implikuje, že velikost populace bude růst nade všechny meze při $t \rightarrow \infty$, generace nahrazuje sama sebe skrze svoji životnost, přispívá k růstu generace po generaci;

- míra poklesu populace $r < 0$ implikuje, že velikost populace bude při $t \rightarrow \infty$ nulová, generace nepřispívá významným způsobem k budoucnosti populace, není schopna nahradit se;
- míra růstu populace $r = 0$ implikuje, že velikost populace bude při $t \rightarrow \infty$ stejná jako na počátku, populace stagnuje.

V modelu (3.1) s řešením (3.2) ovšem nebereme v úvahu vliv životního prostředí na vývoj populace, omezujeme se pouze na malé časové úseky, míru růstu populace uvažujeme konstantní, neuvažujeme omezení pro zdroje, model navíc funguje pro malý počáteční stav populace. Tento model lze použít pro lokální problémy, jako např. pro odhad hodnoty rozšíření škůdce, který právě napadl pole, nebo odhad míry úpadku efektu léku v krevním oběhu jedince.

3.2 Přechod k logistickému modelu

Předpoklad, že míra růstu (nebo poklesu) populace r závisí úměrně pouze na velikosti populace, je vhodný pro jednoduché organismy. Pro složitější organismy jako jsou rostliny, zvířata a lidé je tento předpoklad příliš zjednodušený. Je třeba brát v úvahu i konkurenci a boje mezi druhy, omezené zdroje, kapacitu životního prostředí.

Předpokládejme proto, že r bude záviset lineárně na velikosti populace. Zavedeme tedy r jako $\beta - ay$, čímž přejdeme k diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dt} = y(\beta - ay),$$

kteřou lze upravit do známého tvaru *logistické diferenciální rovnice*

$$\frac{dy}{dt} = r_p y \left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad (3.3)$$

kde $r_p = \beta$, $K = \frac{\beta}{a}$. Parametry r_p, K jsou dány biologickým významem - r_p je přirozená (skutečná) míra růstu (nebo poklesu) populace a K je únosná kapacita prostředí (reprezentuje takovou velikost populace, jejíž potřeby dokážou dostupné zdroje ještě uspokojit). V dalších částech ponechme označení přirozené míry růstu (nebo poklesu) populace jako $r_p = r$.

Logistickou diferenciální rovnici (3.3) lze snadno řešit pomocí separace proměnných:

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) = ry \left(\frac{K - y}{K}\right),$$

$$\frac{dy}{y(K - y)} = \frac{r}{K} dt,$$

$$\int \frac{dy}{y(K - y)} = \int \frac{r}{K} dt.$$

Integrál lze upravit pomocí parciálních zlomků

$$\frac{1}{y(K - y)} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right)$$

na tvar

$$\frac{1}{K} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right) dy = \frac{r}{K} \int dt.$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}(\ln |y| - \ln |K - y|) &= \frac{r}{K}t + c, \\ \frac{1}{K} \left(\ln \left| \frac{y}{K - y} \right| \right) &= \frac{r}{K}t + c,\end{aligned}$$

kde c je integrační konstanta. Specifikace počáteční velikosti populace v čase $t = 0$, jako počáteční podmínka $y(0) = y_0$, dává vyjádření integrační konstanty jako

$$c = \frac{1}{K} \left(\ln \left| \frac{y_0}{K - y_0} \right| \right).$$

Dostáváme tedy rovnici

$$\frac{1}{K} \left(\ln \left| \frac{y}{K - y} \right| \right) = \frac{r}{K}t + \frac{1}{K} \left(\ln \left| \frac{y_0}{K - y_0} \right| \right),$$

ze které lze pomocí úprav

$$\begin{aligned}\ln \left| \frac{y(K - y_0)}{y_0(K - y)} \right| &= rt, \\ \frac{y(K - y_0)}{y_0(K - y)} &= e^{rt},\end{aligned}$$

a vyjádřením $y(t)$ dostat řešení logistické diferenciální rovnice (3.3) ve tvaru

$$y(t) = \frac{Ky_0e^{rt}}{K - y_0 + y_0e^{rt}} = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \quad (3.4)$$

Řešení modelu (3.3) tedy není obtížné najít. Je však nutné ukázat, zda pro tento model existuje nějaký rovnovážný stav, a pokud ano, je třeba posoudit jeho stabilitu.

3.3 Rovnováha modelu, stabilita

Rovnováhu modelu (3.3) lze diskutovat pomocí Definice 2.2 následovně:

$$ry^* \left(1 - \frac{y^*}{K} \right) = 0.$$

Je zřejmé, že model (3.3) má 2 rovnováhy

$$y_1^* = 0, \quad (3.5)$$

$$y_2^* = K. \quad (3.6)$$

Pomocí Poznámky 2.8 nyní můžeme posoudit stabilitu jednotlivých rovnováh.

- Posouzení asymptotické stability rovnováhy (3.5):
Derivací funkce $f(y)$ v této rovnováze

$$f'(y) = r - \frac{2ry}{K},$$

$$f'(0) = r,$$

a užitím Poznámky 2.8 dostáváme

$$r < 0.$$

Pokud je tedy y_0 dostatečně blízko $y^* = 0$ a volíme $r < 0$, pak každé řešení s touto volbou y_0 bude v čase $t \rightarrow \infty$ konvergovat k nule. Pro $r > 0$ je tato rovnováha nestabilní (každá výchylka y_0 od $y^* = 0$ vyvolá odlišné chování řešení).

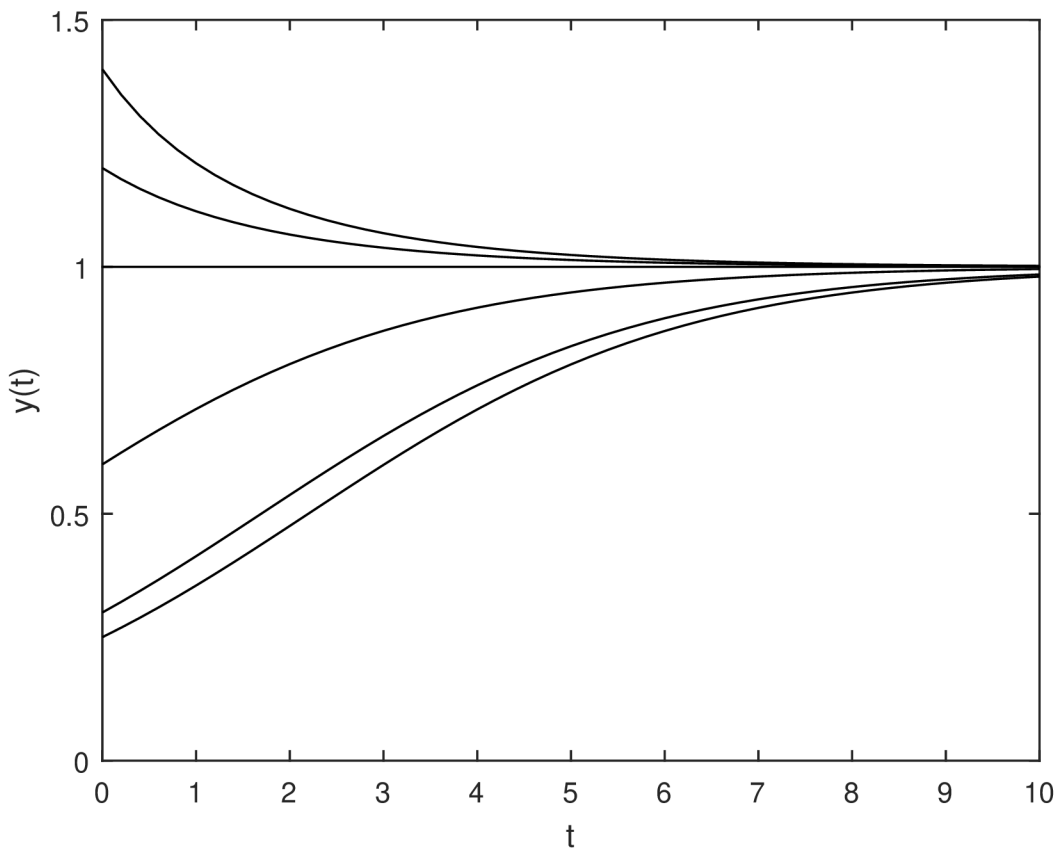
- Posouzení asymptotické stability rovnováhy (3.6):
Analogickým způsobem jako u rovnováhy (3.5) dostáváme

$$f'(y) = r - \frac{2ry}{K},$$

$$f'(K) = -r,$$

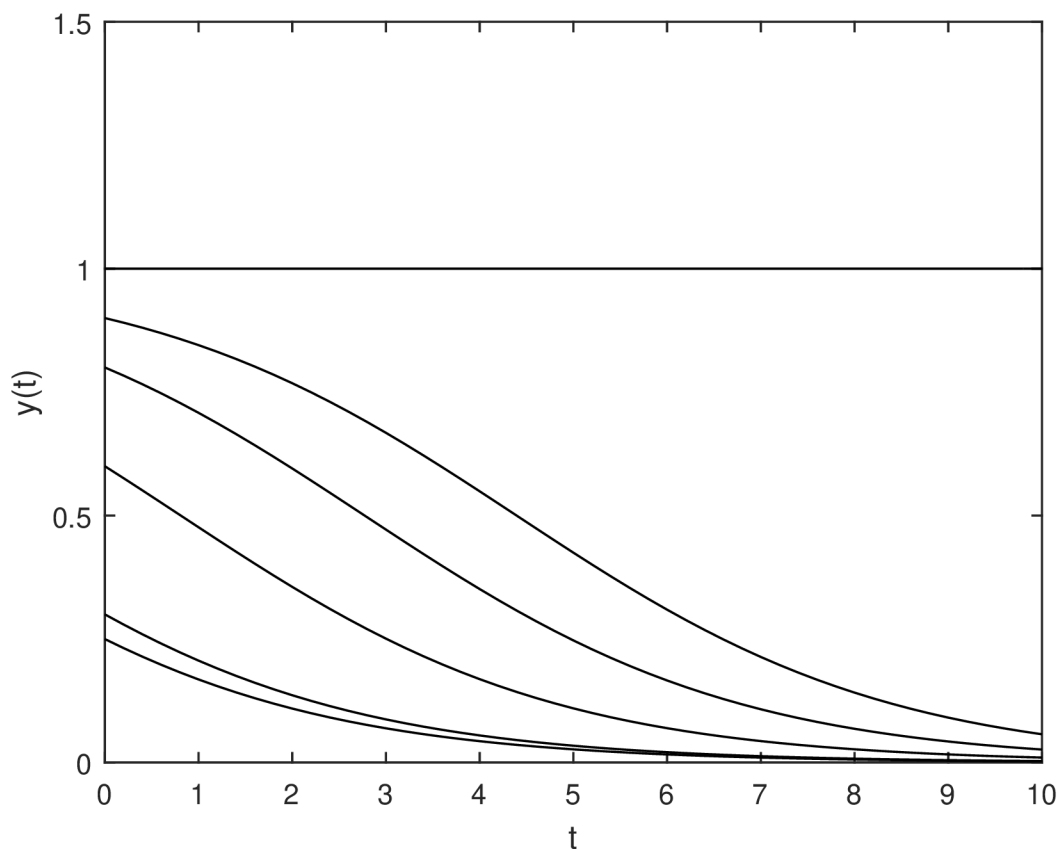
$$r > 0.$$

Pokud je tedy y_0 dostatečně blízko $y^* = K$ a volíme $r > 0$, pak každé řešení s touto volbou y_0 bude v čase $t \rightarrow \infty$ konvergovat k velikosti únosné kapacity prostředí K . Pro $r < 0$ je tato rovnováha nestabilní (každá výchylka y_0 od $y^* = K$ vyvolá odlišné chování řešení).



Obrázek 1: Graf řešení spojitého modelu pro $K = 1$, $r = 0,5$

Podívejme se nyní na graf některých řešení (3.4) modelu (3.3) pro $r > 0$ (viz Obrázek 1). Z obrázku je zřejmé, že pokud je počáteční velikost populace $0 < y_0 < K$, pak bude velikost populace rychle narůstat a konvergovat k velikosti únosné kapacity prostředí K . V případě, že je počáteční velikost populace $y_0 > K$, bude velikost populace rychle klesat a konvergovat k velikosti únosné kapacity prostředí K . Z obrázku je také zřejmá asymptotická stabilita rovnováhy (3.6) a nestabilita rovnováhy (3.5). Graf vykreslující některá řešení (3.4) modelu (3.3) pro $r < 0$ (viz Obrázek 2) ukazuje naopak asymptotickou stabilitu rovnováhy (3.5) a nestabilitu rovnováhy (3.6). Z obrázku je zřejmé, že pro počáteční velikost populace $0 < y_0 < K$ dochází k postupnému úbytku populace s tendencí vyhynutí populace. Při počáteční velikosti populace $y_0 > K$ bude řešení také konvergovat k nule, ovšem se zápornými hodnotami, tedy pro takové podmínky je tento model nevyhovující.



Obrázek 2: Graf řešení spojitého modelu pro $K = 1$, $r = -0,5$

4 Diskrétní logistický populační model

4.1 Odvození diskrétního logistického modelu

Označme x_0 jako počáteční velikost populace daného druhu v čase $n = 0$. Populace v čase $n = 1$ bude mít velikost x_1 , v čase $n = 2$ velikost x_2 , apod. Velikosti populace v daných časových úsecích n (bereme stejně dlouhé časové úseky - roky, měsíce, dny) nám vytvoří posloupnost $\{x_n\}$ s počáteční velikostí populace x_0 . Předpokládejme pro začátek, že se velikost populace mění jen s počtem narozených a zemřelých jedinců, tedy že

$$x_{n+1} - x_n = (b - d)x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

kde b je míra porodnosti a d je míra úmrtnosti. Tuto rovnici

$$x_{n+1} = x_n + (b - d)x_n = (1 + b - d)x_n$$

lze přepsat na lineární homogenní diferenční rovnici

$$x_{n+1} = rx_n, \tag{4.1}$$

kde $r = 1 + b - d$. Pomocí matematické indukce lze ukázat, že v n -tém časovém úseku je řešení modelu (4.1) tvaru

$$x_n = r^n x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

Analýza vlivu velikosti míry růstu (nebo poklesu) populace r na chování řešení x_n pro $n \rightarrow \infty$:

- jestliže $0 \leq r < 1$, řešení x_n se monotónně blíží k nule;
- jestliže $-1 < r < 0$, řešení x_n osciluje mezi kladnými a zápornými hodnotami, a blíží se k nule;
- jestliže $r > 1$, řešení x_n roste nade všechny meze;
- jestliže $r < -1$, řešení x_n osciluje mezi kladnými a zápornými hodnotami, a jeho hodnoty nejsou omezené.

V modelu (4.1) s řešením (4.2) opět nebereme v úvahu omezené zdroje a vliv životního prostředí na velikost populace, což je právě příčina (při $r > 1$) růstu velikosti populace nade všechny meze. Je tedy třeba uvažovat míru růstu populace r závislou na velikosti populace.

Užitím podobných argumentů jako v případě spojitého modelu lze dospět k logistické diferenční rovnici tvaru

$$x_{n+1} = x_n + rx_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right), \tag{4.3}$$

kde $K > 0$ je únosná kapacita prostředí. Navzdory poměrně jednoduchému tvaru (4.3) není možné najít obecné vyjádření jeho řešení. Lze sice postupně určit velikosti populace x_1, x_2, \dots pomocí počáteční velikosti x_0 , ovšem tento iterační proces je časově náročná záležitost, která navíc nedává žádnou informaci o vlastnostech tohoto řešení pro velká n . V tom spočívá první zásadní rozdíl v porovnání se spojitým logistickým modelem (3.3), který lze snadno vyřešit a předpis pro obecné řešení pak jasně vymezuje chování daného řešení pro velká n .

Z tohoto důvodu nabývá na zásadním významu kvalitativní analýza diskrétního modelu (4.3) umožňující nahlédnout základní vlastnosti tohoto modelu v závislosti na změně vstupních parametrů.

4.2 Rovnováha modelu, stabilita

Evidentním požadavkem na řešení diskrétního modelu (4.3) je jeho kladnost, tedy požadavek $x_n > 0$ pro všechna $n = 0, 1, 2, \dots$. Odtud a užitím (4.3) dostáváme

$$x_n + rx_n - x_n^2 \frac{r}{K} > 0,$$

tedy

$$r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right) > -1.$$

V závislosti na velikosti populace lze odtud stanovit podmínku pro míru růstu (nebo poklesu) populace r ve tvaru

$$\begin{array}{llll} r > \frac{x_n}{K} - 1, & \text{je-li} & x_n < K, & \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots, \\ r < \frac{x_n}{K} - 1, & \text{je-li} & x_n > K, & \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

Podobně jako u spojitého logistického modelu je základní otázkou u modelu (4.3) existence a (ne)stabilita jeho rovnováh. Připomeňme, že spojitý logistický model má dvě rovnováhy ($y_1^* = 0, y_2^* = K$), přičemž každé jeho další řešení se v čase $t \rightarrow \infty$ limitně blíží k velikosti únosné kapacity K pro $r > 0$. Otázkou tedy je, zda existuje rovnováha také v případě diskrétního logistického modelu.

Rovnováhu diskrétního modelu diskutujeme pomocí Definice 2.3 následovně: Uvažujme (a následně upravme) rovnici

$$\begin{aligned} x^* + rx^* \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) &= x^*, \\ rx^* - \frac{r}{K}(x^*)^2 &= 0, \\ rx^* \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že i diskrétní model (4.3) má 2 rovnováhy

$$x_1^* = 0, \tag{4.4}$$

$$x_2^* = K. \tag{4.5}$$

Pomocí Poznámky 2.8 posoudíme jejich stabilitu:

- Rovnováha (4.4):

Derivací funkce $g(x)$ v této rovnováze

$$\begin{aligned} g'(x) &= (r + 1) - 2x \frac{r}{K}, \\ g'(0) &= r + 1, \end{aligned}$$

a použitím Poznámky 2.8, z níž vyplývá

$$|r + 1| < 1, \quad \text{tj.} \quad -2 < r < 0,$$

dostaneme interval hodnot r , pro které je tato rovnováha asymptoticky stabilní. Z předchozí diskuze kladnosti řešení však vyplývá, že je-li $x_n < K$, pak k asymptotické stabilitě rovnováhy (4.4) musí r splňovat

$$r > \frac{x_n}{K} - 1 \quad \wedge \quad -2 < r < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < r < 0.$$

Pokud je tedy x_0 dostatečně blízko $x^* = 0$ a volíme $r \in (-1; 0)$, pak každé řešení s touto volbou x_0 bude v časovém úseku $n \rightarrow \infty$ konvergovat k nule. Pro $r > 0$ je tato rovnováha nestabilní (každá výchylka x_0 od $x^* = 0$ vyvolá odlišné chování řešení).

- Rovnováha (4.5):

Analogickým způsobem jako u rovnováhy (4.4) dostáváme

$$g'(K) = 1 - r, \quad \text{tedy} \quad |1 - r| < 1, \quad \text{tj.} \quad 0 < r < 2.$$

Pokud je tedy x_0 dostatečně blízko $x^* = K$ a volíme $r \in (0; 2)$, každé řešení s touto volbou x_0 bude v časovém úseku $n \rightarrow \infty$ konvergovat k velikosti únosné kapacity K . Pro $r > 2$ je tato rovnováha nestabilní (každá výchylka x_0 od $x^* = K$ vyvolá odlišné chování řešení). Podrobnější analýzou, kterou zde nebudeme provádět, lze ukázat, že při $r = 2$ je tato rovnováha asymptoticky stabilní.

Dalším zásadním rozdílem oproti spojitému modelu je nestabilita rovnováhy $x^* = K$ pro $r > 2$. Vzniká tedy otázka, jak se bude chovat diskrétní model pro hodnoty $r > 2$. Chování se zřejmě změní, otázkou ale je, do jaké míry a jak citlivý bude model na řešení s různou počáteční velikostí x_0 , tedy zda budou řešení modelu stabilní.

4.3 Periodické chování řešení

I přes to, že při $r > 2$ jsou obě rovnováhy diskrétního modelu nestabilní, lze pro tyto hodnoty r ukázat jisté zákonitosti v chování řešení modelu (4.3). Pro hodnoty $r > 2$ se jako řešení modelu začínou objevovat periodická řešení vycházející z existence cyklů různých řádů. Po hledání rovnováhy modelu (cyklus řádu 1) má tedy smysl zkoumat, zda se v řešení modelu neobjeví i cykly vyšších řádů. Ze Šarkovského věty (Věta 2.11) plyne, že po rovnováze nastává cyklus druhého řádu (dvojcyklus) - pokud tento cyklus existuje. Pokud by ovšem dvojcyklus neexistoval, neexistoval by podle Šarkovského věty ani žádný další cyklus vyššího řádu (existovala by pouze rovnováha).

Ukažme nyní existenci dvojcyklu. Pomocí Definice 2.9 a Poznámky 2.12 lze určit body dvojcyklu následovně:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+r)x - x^2 \frac{r}{K}, \\ g^2(x) &= (1+r)g(x) - (g(x))^2 \frac{r}{K} = (1+r) \left[(1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right] - \left[(1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \\ &= (1+r)^2 x - x^2 \frac{r(1+r)}{K} - x^2 \frac{r(1+r)^2}{K} + 2x^3 \frac{(1+r)r^2}{K^2} - x^4 \frac{r^3}{K^3} \\ &= (1+r)^2 x - x^2 \frac{r(1+r)}{K} - x^2 \frac{r(1+r)^2}{K} + 2x^3 \frac{(1+r)r^2}{K^2} - x^4 \frac{r^3}{K^3} \\ &= (1+r)^2 x - x^2 \frac{r+r^2+r+2r^2+r^3}{K} + 2x^3 \frac{(1+r)r^2}{K^2} - x^4 \frac{r^3}{K^3} \\ &= -\frac{r^3}{K^3} x^4 + \frac{2r^2(1+r)}{K^2} x^3 - \frac{r(2+r)(1+r)}{K} x^2 + (1+r)^2 x, \end{aligned}$$

kde body dvojcyklu určíme jako kořeny rovnice

$$-\frac{r^3}{K^3}(\lambda^*)^4 + \frac{2r^2(1+r)}{K^2}(\lambda^*)^3 - \frac{r(2+r)(1+r)}{K}(\lambda^*)^2 + (1+r)^2\lambda^* = \lambda^*,$$

$$\frac{r^3}{K^3}(\lambda^*)^4 - \frac{2r^2(1+r)}{K^2}(\lambda^*)^3 + \frac{r(2+r)(1+r)}{K}(\lambda^*)^2 - r(2+r)\lambda^* = 0. \quad (4.6)$$

Rovnice (4.6) má kořeny $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = K$ (plyne z Poznámky 2.16), proto lze vydělením této rovnice součinem příslušných kořenových činitelů $\lambda^* \left(\frac{\lambda^*}{K} - 1\right)$ dostat jednodušší rovnici, ze které se snadněji vyjádří zbývající kořeny λ_3^*, λ_4^* :

$$\left(\frac{r^3}{K^3}(\lambda^*)^4 - \frac{2r^2(1+r)}{K^2}(\lambda^*)^3 + \frac{r(2+r)(1+r)}{K}(\lambda^*)^2 - r(2+r)\lambda^*\right) : \left(\lambda^* \left(\frac{\lambda^*}{K} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{r^3}{K^2}(\lambda^*)^2 - \frac{r^2(2+r)}{K}\lambda^* + r(2+r).$$

Dostáváme a řešíme tedy rovnici

$$0 = \frac{r^3}{K^2}(\lambda^*)^2 - \frac{r^2(2+r)}{K}\lambda^* + r(2+r),$$

$$0 = r^2(\lambda^*)^2 - Kr(2+r)\lambda^* + K^2(2+r),$$

$$\lambda_{3,4}^* = \frac{Kr(2+r) \pm \sqrt{K^2r^2(2+r)^2 - 4K^2r^2(2+r)}}{2r^2},$$

$$\lambda_{3,4}^* = K \frac{(2+r) \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2r}.$$

Kořeny $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = K$ nejsou v rámci této diskuze důležité (pro $r > 2$ jsou tato konstantní řešení nestabilní - viz podkapitola 4.2). Kořeny $\lambda_{3,4}^*$ jsou reálné až pro hodnoty $r \geq 2$, pro $r < 2$ v reálném oboru neexistují. Početně ověříme, že kořeny λ_3^*, λ_4^* jsou právě body λ_1, λ_2 dvojcyklu diskrétního logistického modelu (4.3):

Platí

$$g(\lambda_1) = (1+r)\lambda_1 - \lambda_1^2 \frac{r}{K},$$

a tedy dosazením $\lambda_1 = \lambda_3^*$ dostáváme

$$(1+r) \frac{K(2+r)}{2r} + (1+r) \frac{K\sqrt{r^2-4}}{2r} - \frac{K^2}{4r^2} (r^2 + 4r + 4 + 2(2+r)\sqrt{r^2-4} + r^2 - 4) \frac{r}{K}$$

$$= (1+r) \frac{K(2+r)}{2r} + (1+r) \frac{K\sqrt{r^2-4}}{2r} - \frac{K}{2r} (r^2 + 2r + (2+r)\sqrt{r^2-4})$$

$$= \frac{K(r^2 + 3r + 2) + (K + Kr)\sqrt{r^2-4} - Kr^2 - 2Kr - Kr\sqrt{r^2-4} - 2K\sqrt{r^2-4}}{2r}$$

$$= \frac{K(2+r) - K\sqrt{r^2-4}}{2r} = K \frac{(2+r) - \sqrt{r^2-4}}{2r} = \lambda_2.$$

Obdobně by se ukázala i platnost vztahu $g(\lambda_2) = \lambda_1$.

O stabilitě periodického řešení tvořeného tímto dvojcyklem rozhodneme pomocí Poznámky 2.17, Definice 2.14 a Poznámky 2.8, tedy rozhodneme o stabilitě jednotlivých bodů dvojcyklu. Tyto body lze chápat jako rovnováhy funkce $g^2(x)$, proto diskutujeme jejich stabilitu podobně jako v případě stability rovnováh funkce $g(x)$.

- Rovnováha $x^* = \lambda_1$ funkce $g^2(x)$:

Derivací funkce $g^2(x)$, v bodě $x = \lambda_1$

$$\begin{aligned}
 (g^2)'(x) &= -4\frac{r^3}{K^3}x^3 + 6\frac{r^2(1+r)}{K^2}x^2 - 2\frac{r(2+r)(1+r)}{K}x + (1+r)^2, \\
 (g^2)'(\lambda_1) &= -4\frac{r^3}{K^3}\left(K\frac{(2+r)+\sqrt{r^2-4}}{2r}\right)^3 + 6\frac{r^2(1+r)}{K^2}\left(K\frac{(2+r)+\sqrt{r^2-4}}{2r}\right)^2 \\
 &\quad - 2\frac{r(2+r)(1+r)}{K}\left(K\frac{(2+r)+\sqrt{r^2-4}}{2r}\right) + (1+r)^2 \\
 &= -\frac{((2+r)+\sqrt{r^2-4})^3}{2} + \frac{3(1+r)((2+r)+\sqrt{r^2-4})^2}{2} \\
 &\quad - (2+r)(1+r)((2+r)+\sqrt{r^2-4}) + (1+r)^2 \\
 &= -r^2 + 5,
 \end{aligned}$$

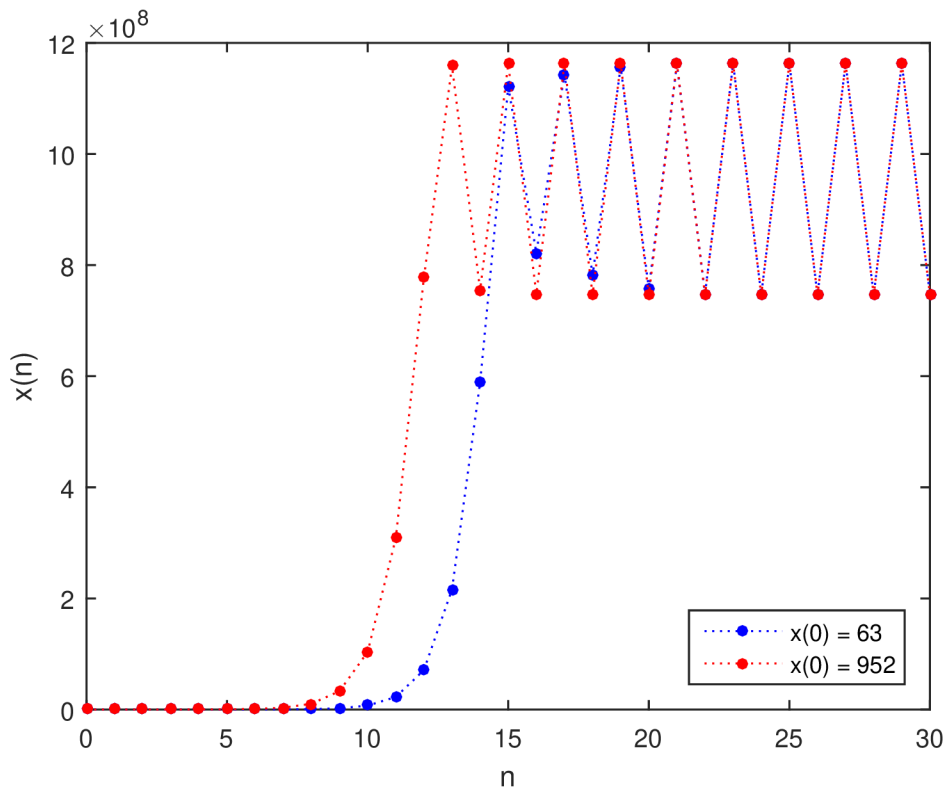
a použitím Poznámky 2.8, kde

$$|5 - r^2| < 1, \quad \text{tj.} \quad 4 < r^2 < 6, \quad \text{tj.} \quad 2 < r < \sqrt{6},$$

dostaneme interval hodnot r , pro který je rovnováha $x^* = \lambda_1$ funkce $g^2(x)$ asymptoticky stabilní (bod dvojcyklu λ_1 je tedy asymptoticky stabilní pro r z tohoto intervalu).

Podobně by proběhla diskuze stability pro případ $x^* = \lambda_2$, která vede ke stejnému závěru (bod dvojcyklu λ_2 je asymptoticky stabilní pro r ze stejného intervalu hodnot). Periodické řešení tvořené dvojcyklem s body λ_1, λ_2 je tedy asymptoticky stabilní pro hodnoty $2 < r < \sqrt{6}$. Znamená to tedy, že pokud je x_0 dostatečně blízko λ_1 nebo λ_2 při $2 < r < \sqrt{6}$, každé řešení s takovým x_0 bude v časovém úseku $n \rightarrow \infty$ konvergovat k dvojcyklu s body λ_1, λ_2 . Pro $r > \sqrt{6}$ je toto periodické řešení nestabilní (každá výchylka x_0 od λ_1, λ_2 zapříčiní odlišné chování). Periodické řešení tvořené dvojcyklem s body λ_1, λ_2 je ukázáno v obrázku (viz Obrázek 3). Z obrázku je dobře vidět asymptotickou stabilitu tohoto řešení pro hodnoty $2 < r < \sqrt{6}$. Obě řešení s různými počátečními velikostmi populace se ustálí do dvojcyklu daného body λ_1, λ_2 .

Nyní je na místě uvažovat, zda existuje i další cyklus. Podle Šarkovského věty je nyní vhodné zabývat se existencí cyklu řádu 4 (čtyřcyklus). Pokud čtyřcyklus neexistuje pro model (4.3), neexistuje pro něj ani žádný další cyklus vyššího řádu než řádu 2 a 1 (tedy než právě nalezený dvojcyklus a rovnováhy).



Obrázek 3: Periodické řešení tvořené dvojcyklem

Ukažme existenci čtyřcyklu, podobným způsobem jako existenci dvojcyklu:

$$\begin{aligned}
g^4(x) &= (1+r)g^3(x) - (g^3(x))^2 \frac{r}{K} \\
&= (1+r) \left[(1+r)g^2(x) - (g^2(x))^2 \frac{r}{K} \right] - \left[(1+r)g^2(x) - (g^2(x))^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \\
&= (1+r) \left[(1+r) \left[(1+r)g(x) - (g(x))^2 \frac{r}{K} \right] - \left[(1+r)g(x) - (g(x))^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \right] \\
&\quad - \left[(1+r) \left[(1+r)g(x) - (g(x))^2 \frac{r}{K} \right] - \left[(1+r)g(x) - (g(x))^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \\
&= (1+r) \left[(1+r) \left[(1+r) \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right) - \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right)^2 \frac{r}{K} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[(1+r) \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right) - \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right)^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \right] \\
&= (1+r) \left[(1+r) \left[(1+r) \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right) - \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right)^2 \frac{r}{K} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[(1+r) \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right) - \left((1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right)^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K}.
\end{aligned}$$

Po roznásobení a úpravách dostaneme čtvrtou iteraci funkce $g(x)$ ve tvaru

$$g^4(x) = \sum_{i=0}^{16} a_i x^i,$$

kde koeficienty a_i jsou dány

$$\begin{aligned} a_{16} &= -\frac{r^{15}}{K^{15}}, \\ a_{15} &= 8(r+1)\frac{r^{14}}{K^{14}}, \\ a_{14} &= -4(7r^2 + 15r + 8)\frac{r^{13}}{K^{13}}, \\ a_{13} &= 14(4r^3 + 14r^2 + 16r + 6)\frac{r^{12}}{K^{12}}, \\ a_{12} &= -2(35r^4 + 182r^3 + 339r^2 + 273r + 81)\frac{r^{11}}{K^{11}}, \\ a_{11} &= 4(14r^5 + 105r^4 + 289r^3 + 380r^2 + 243r + 61)\frac{r^{10}}{K^{10}}, \\ a_{10} &= -2(14r^6 + 154r^5 + 605r^4 + 1177r^3 + 1234r^2 + 671r + 149)\frac{r^9}{K^9}, \\ a_9 &= 2(4r^7 + 70r^6 + 396r^5 + 1100r^4 + 1715r^3 + 1539r^2 + 745r + 151)\frac{r^8}{K^8}, \\ a_8 &= -(r^8 + 36r^7 + 314r^6 + 1254r^5 + 2811r^4 + 3786r^3 + 3051r^2 + 1359r + 258)\frac{r^7}{K^7}, \\ a_7 &= 4(r^8 + 17r^7 + 104r^6 + 339r^5 + 666r^4 + 816r^3 + 612r^2 + 258r + 47)\frac{r^6}{K^6}, \\ a_6 &= -2(3r^8 + 35r^7 + 179r^6 + 525r^5 + 959r^4 + 1113r^3 + 802r^2 + 329r + 59)\frac{r^5}{K^5}, \\ a_5 &= 2(2r^8 + 21r^7 + 103r^6 + 294r^5 + 525r^4 + 600r^3 + 430r^2 + 177r + 32)\frac{r^4}{K^4}, \\ a_4 &= -(r^8 + 14r^7 + 77r^6 + 231r^5 + 427r^4 + 505r^3 + 375r^2 + 160r + 30)\frac{r^3}{K^3}, \\ a_3 &= 2(r^7 + 8r^6 + 29r^5 + 61r^4 + 80r^3 + 65r^2 + 30r + 6)\frac{r^2}{K^2}, \\ a_2 &= -(r^6 + 7r^5 + 21r^4 + 35r^3 + 34r^2 + 18r + 4)\frac{r}{K}, \\ a_1 &= (r^4 + 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1), \\ a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Pomocí Poznámky 2.12 se určí body čtyřcyklu jako reálné kořeny rovnice

$$g^4(\lambda^*) = \sum_{i=0}^{16} a_i (\lambda^*)^i = \lambda^*. \quad (4.7)$$

Rovnici (4.7) však nelze pro neznámou λ^* explicitně řešit vzhledem k vysokému řádu mocnin λ^* , není zde dokonce ani žádná zákonitost mezi koeficienty a_i , která by rovnici zjednodušila. Je sice jasné, že tato rovnice má kořeny λ_1^* , λ_2^* , λ_3^* , λ_4^* (plyne z Poznámky 2.16), ale ani vydělení rovnice (4.7) součinem příslušných kořenových činitelů

$$\lambda^* \left(\frac{\lambda^*}{K} - 1 \right) (r^2(\lambda^*)^2 - Kr(2+r)\lambda^* + K^2(2+r))$$

nezjednoduší tuto rovnici natolik, aby byla řešitelná. Jak tedy obecně vypadá zbylých 12 kořenů této rovnice není známo. Lze ovšem alespoň numericky ukázat, jakých hodnot nabývají kořeny pro různá r (pro celou tabulku platí $K = 1$):

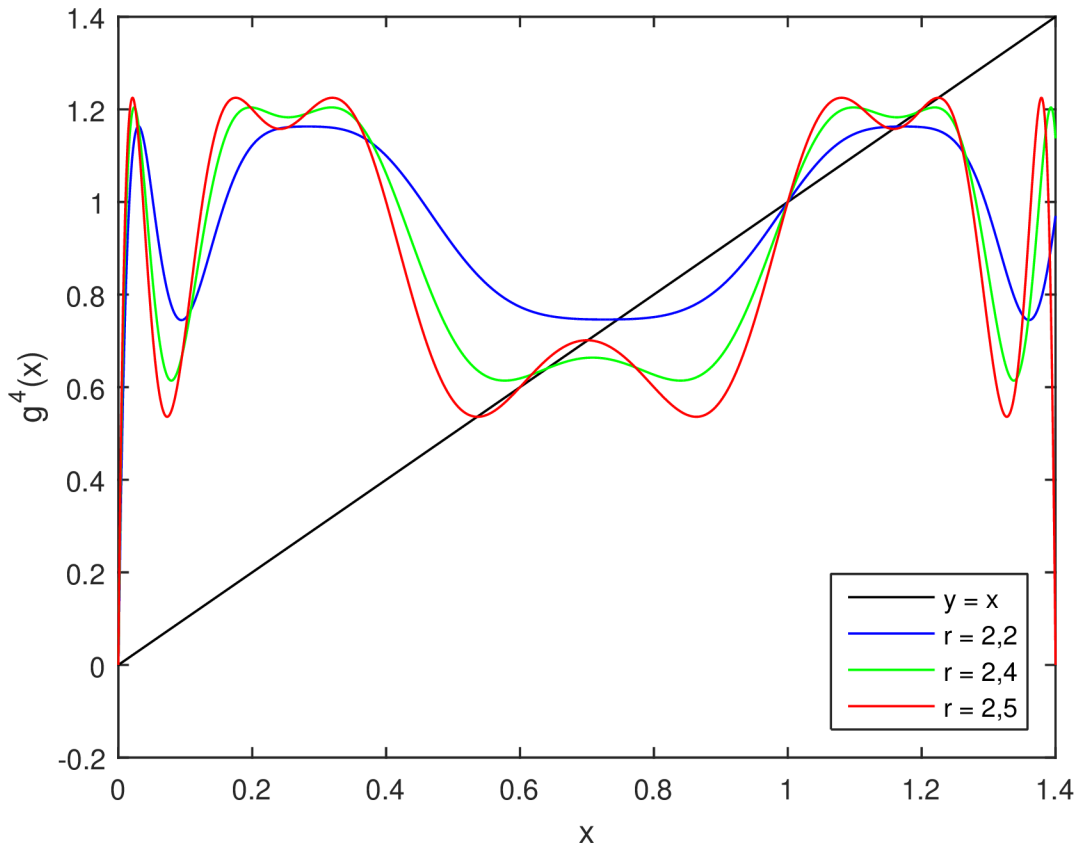
r	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
2,2	$0,74 + 0,35i$	$0,74 - 0,35i$	$1,43 + 0,02i$	$1,43 - 0,02i$	$0,26 + 0,17i$	$0,26 - 0,17i$
2,5	0,5359	0,7012	1,1577	1,2249	$0,71 + 0,25i$	$0,71 - 0,25i$
2,8	0,4122	0,8136	1,0907	1,2382	$0,21 + 0,05i$	$0,21 - 0,05i$

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
$0,07 + 0,03i$	$0,07 - 0,03i$	$1,38 + 0,01i$	$1,38 - 0,01i$	$0,23 + 0,11i$	$0,23 - 0,11i$
$1,23 + 0,09i$	$1,23 - 0,09i$	$0,62 + 0,20i$	$0,62 - 0,20i$	$0,08 + 0,06i$	$0,08 - 0,06i$
$0,68 + 0,14i$	$0,68 - 0,14i$	$1,34 + 0,01i$	$1,34 - 0,01i$	$0,06 + 0,02i$	$0,06 - 0,02i$

Tabulka 1: Hodnoty kořenů funkce $g^4(x)$

V tabulce (Tabulka 1) nejsou uvedeny hodnoty kořenů λ_1^* , λ_2^* , λ_3^* , λ_4^* , protože tyto kořeny jsou známé a pro daná r, K lze jejich hodnotu snadno určit. Z tabulky je vidět, že pro $r = 2,2$ je všech 12 kořenů komplexních, tedy čtyřcyklus pro toto r neexistuje (kořeny λ_1^* , λ_2^* , λ_3^* , λ_4^* nemohou být body čtyřcyklu, protože $g(\lambda_1^*) = \lambda_1^* \neq \lambda_2^* \neq \lambda_3^* \neq \lambda_4^*$). Ovšem pro $r = 2,5$ i $r = 2,8$ je už pouze 8 kořenů komplexních, a zbylé 4 kořeny jsou reálné - a právě tyto 4 kořeny jsou body čtyřcyklu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ (dalo by se ukázat podobně jako u bodů dvojcyklu). Je tedy zřejmé, že mezi hodnotami $r = 2,2$ a $r = 2,5$ existuje taková hodnota r , při které vznikne čtyřcyklus.

Podíváme-li se na rovnici (4.7) z geometrického hlediska, pak průsečíky $g^4(x)$ s přímkou $y = x$ jsou reálné kořeny rovnice (4.7). Tento problém ukážeme v grafu čtvrtých iterací funkce $g(x)$ pro konkrétní hodnoty r při $K = 1$ (viz Obrázek 4). Z obrázku jde vidět, že pro $r = 2,2$ i $r = 2,4$ existují pouze 4 průsečíky $g^4(x)$ s přímkou $y = x$, což jsou již známé kořeny λ_1^* , λ_2^* , λ_3^* , λ_4^* . Pro $r = 2,5$ je vidět (stejně jako z Tabulky 1), že se objeví další 4 průsečíky, tedy 4 nové reálné kořeny.



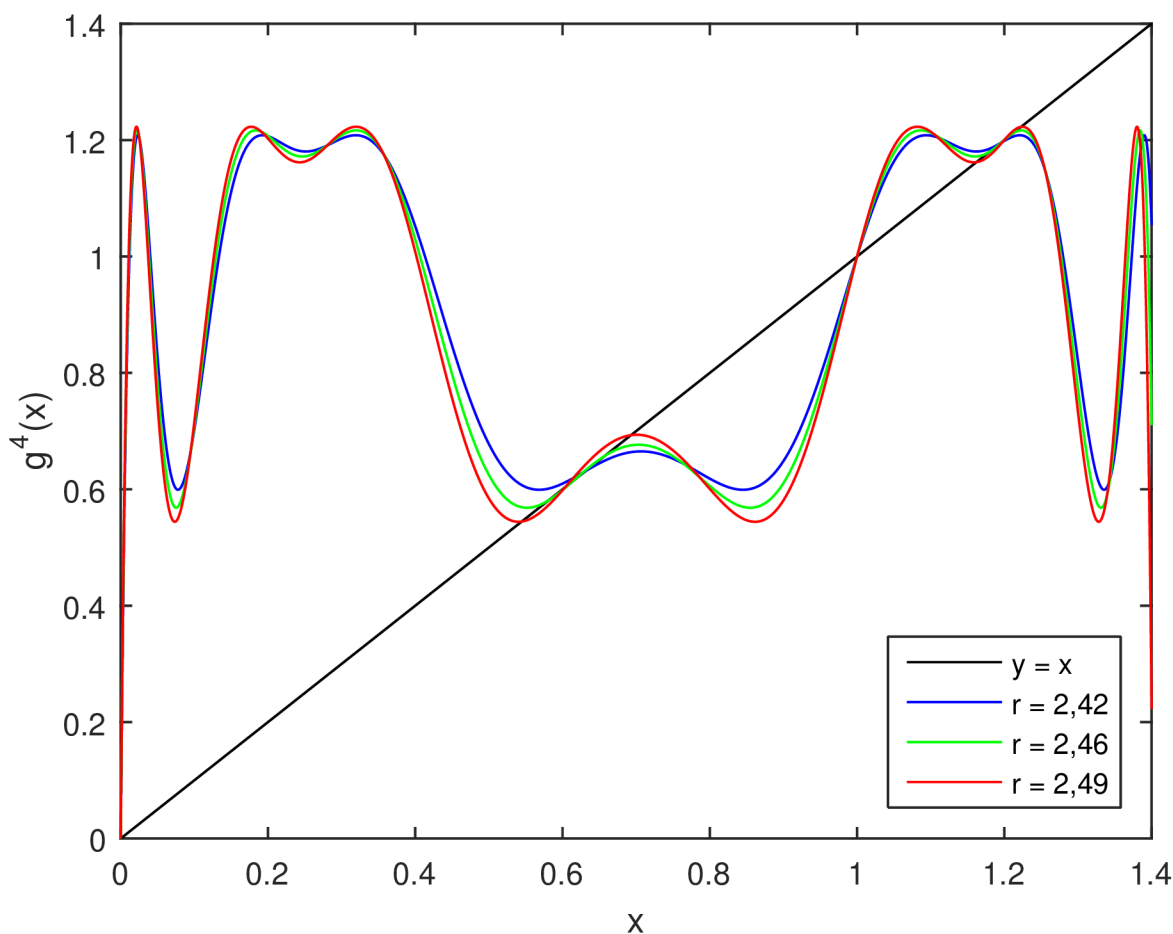
Obrázek 4: Grafy funkce $g^4(x)$ pro různé hodnoty r

Průsečíky $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = K$ se nyní zabývat nemusíme, tyto kořeny jsou jasné a neukazují žádné nové poznatky. Naopak průsečíky $\lambda_{3,4}^* = K \frac{(2+r) \pm \sqrt{r^2-4}}{2r}$ jsou v tomto směru zajímavější. Přibližme si, co se děje mezi $r = 2,4$ a $r = 2,5$. Je zřejmé, že mezi těmito hodnotami r je taková hodnota, při které se objeví čtyřcyklus. Z grafu (viz Obrázek 5) je vidět, že dokud je v průsečíku $\lambda_{3,4}^*$ funkce $g^4(x)$ s přímkou $y = x$ směrnice tečny $(g^4)'(\lambda_{3,4}^*) < 1$, existují jen 4 reálné a 12 imaginárních kořenů. Ovšem jakmile se směrnice tečny dostane na hodnotu $(g^4)'(\lambda_{3,4}^*) > 1$, funkce $g^4(x)$ protne přímkou $y = x$ v dalších 4 bodech. Nové průsečíky vzniknou okolo původních průsečíků λ_3^* , λ_4^* (z původního průsečíku se oddělí dva nové). Z těchto poznatků lze usoudit, že první čtyřcyklus se objeví po překročení hodnoty r , při které je v průsečíku $\lambda_{3,4}^*$ směrnice tečny $(g^4)'(\lambda_{3,4}^*) = 1$. Derivaci funkce $g^4(x)$ a dosazením za x kořen λ_3^* dostáváme jednoduchou rovnici

$$(g^4)'(\lambda_3^*) = r^4 - 10r^2 + 25 = 1. \tag{4.8}$$

Úpravou rovnice (4.8) dostáváme hodnoty r , které vyhovují požadované směrnici tečny $(g^4)'(\lambda_3^*) = 1$:

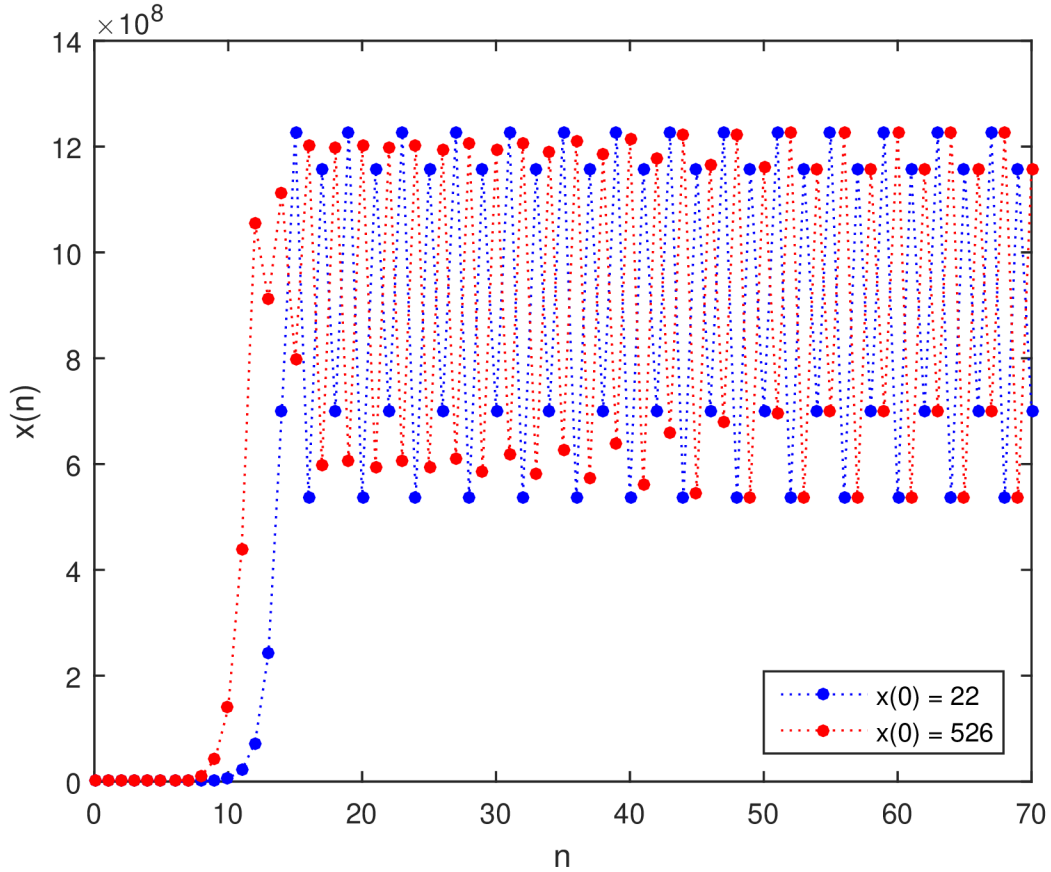
$$\begin{aligned} r^4 - 10r^2 + 24 &= 0 \\ (r-2)(r+2)(r^2-6) &= 0 \\ r_1 = -2, r_2 = 2, r_3 = \sqrt{6} \end{aligned}$$



Obrázek 5: Grafy funkce $g^4(x)$ pro hodnoty $2,4 < r < 2,5$

Hodnoty $r_1 = -2$ ani $r_2 = 2$ neodpovídají intervalu hodnot r , pro který se má čtyřcyklus objevit. Navíc r_1 nemá vzhledem k podmínce kladnosti velikosti populace žádný význam. Hodnota r , od které se začne objevovat čtyřcyklus, je tedy $r = \sqrt{6}$. Jelikož nelze obecně vyjádřit kořeny funkce $g^4(\lambda^*) = \lambda^*$, nelze o stabilitě periodického řešení tvořeného čtyřcyklem rozhodnout (pomocí Definice 2.14, Poznámky 2.8 a Poznámky 2.17), jak tomu bylo u dvojcyklu. Stabilitu lze diskutovat alespoň pomocí grafu a Poznámky 2.8, kde v grafu zkoumáme tečny funkce $g^4(x)$ v bodech čtyřcyklu při různých hodnotách $r > \sqrt{6}$. Dojdeme tím k závěru, že čtyřcyklus je asymptoticky stabilní pro hodnoty $\sqrt{6} < r < 2,544$. Periodické chování tvořené čtyřcyklem s body $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ je ukázáno v obrázku (viz Obrázek 6). Z obrázku je vidět asymptotická stabilita tohoto řešení pro $\sqrt{6} < r < 2,544$. Obě řešení s různými počátečními velikostmi populace se ustálí do čtyřcyklu tvořeného body $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Podle Šarkovského věty by bylo nyní namístě ukázat, zda existuje i cyklus řádu 8. Osmou iterací bychom však dostali polynomiální rovnici řádu 2^8 , a proto se tímto z důvodu početní náročnosti nebudeme zabývat. Jen zmíníme, že cyklus řádu 8 existuje, objeví se při hodnotě $r > 2,544$, a je stabilní pro hodnoty $2,544 < r < 2,564$. Abychom existenci tohoto cyklu (a dokonce i všech ostatních cyklů) potvrdili, ukážeme existenci posledního cyklu, tedy cyklu řádu 3 (trojcyklus).



Obrázek 6: Periodické řešení tvořené čtyřcyklem

Existenci trojcyklu ukážeme opět podobně jako u předešlých cyklů:

$$\begin{aligned}
 g^3(x) &= (1+r)g^2(x) - (g^2(x))^2 \frac{r}{K} \\
 &= (1+r) \left[(1+r)g(x) - (g(x))^2 \frac{r}{K} \right] - \left[(1+r)g(x) - (g(x))^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \\
 &= (1+r) \left[(1+r) \left[(1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right] - \left[(1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \right] \\
 &\quad - \left[(1+r) \left[(1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right] - \left[(1+r)x - x^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K} \right]^2 \frac{r}{K}.
 \end{aligned}$$

Po roznásobení a úpravách dostáváme třetí iteraci funkce $g(x)$ ve tvaru

$$g^3(x) = \sum_{i=0}^8 a_i x^i,$$

kde koeficienty a_i jsou dány

$$\begin{aligned}
 a_8 &= -\frac{r^7}{K^7}, \\
 a_7 &= 4(r+1) \frac{r^6}{K^6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_6 &= -2(3r^2 + 7r + 4) \frac{r^5}{K^5}, \\
a_5 &= 2(2r^3 + 9r^2 + 12r + 5) \frac{r^4}{K^4}, \\
a_4 &= -(r^4 + 10r^3 + 25r^2 + 25r + 9) \frac{r^3}{K^3}, \\
a_3 &= 2(r^4 + 5r^3 + 10r^2 + 9r + 3) \frac{r^2}{K^2}, \\
a_2 &= -(r^4 + 5r^3 + 10r^2 + 9r + 3) \frac{r}{K}, \\
a_1 &= (r^3 + 3r^2 + 3r + 1), \\
a_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Pomocí Poznámky 2.12 se body trojcyklu určí jako reálné kořeny rovnice

$$g^3(\lambda^*) = \sum_{i=0}^8 a_i (\lambda^*)^i = \lambda^*, \quad (4.9)$$

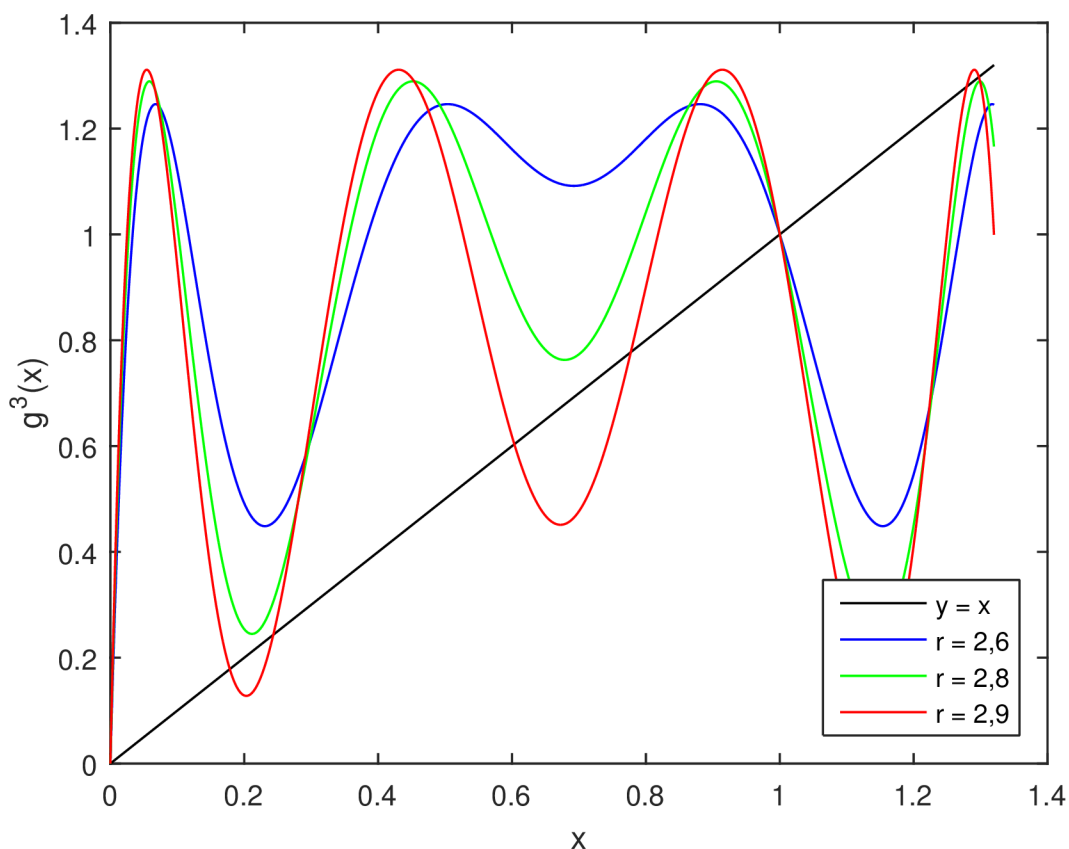
Rovnice (4.9) sice vypadá mnohem jednodušeji než rovnice (4.7), ale z argumentačního hlediska jde o podstatně komplikovanější záležitost. Není zde opět žádná zákonitost mezi koeficienty a_i , která by rovnici zjednodušila. Je sice jasné, že tato rovnice má kořeny $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = K$ (plyne z Poznámky 2.16), ale ani vydělení rovnice (4.9) součinem příslušných kořenových činitelů $\lambda^* \left(\frac{\lambda^*}{K} - 1 \right)$ nezjednoduší tuto rovnici natolik, aby byla řešitelná. Jak tedy obecně vypadá zbylých 6 kořenů této rovnice není známo. Lze však opět alespoň numericky ukázat, jakých hodnot nabývají kořeny pro různá r (pro celou tabulku platí $K = 1$):

r	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2,6	$0,72 + 0,17i$	$0,72 - 0,17i$	$0,24 + 0,07i$	$0,24 - 0,07i$	$1,32 + 0,02i$	$1,32 - 0,02i$
2,8	$0,22 + 0,02i$	$0,22 - 0,02i$	$0,69 + 0,06i$	$0,69 - 0,06i$	$1,29 + 0,01i$	$1,29 - 0,01i$
2,9	0,1784	0,2434	0,6034	0,7774	1,2792	1,2974

Tabulka 2: Hodnoty kořenů funkce $g^3(x)$

V tabulce nejsou uvedeny hodnoty kořenů $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = K$, protože tyto kořeny jsou známé. Z tabulky je vidět, že pro $r = 2,6$ i $r = 2,8$ je všech 6 kořenů komplexních, tedy trojcyklus pro tato r neexistuje (kořeny λ_1^*, λ_2^* nemohou být body trojcyklu, protože do trojcyklu chybí další bod). Ovšem pro $r = 2,9$ je všech 6 kořenů reálných, kde právě tyto kořeny jsou body dvou různých trojcyklů.

Použijeme-li opět geometrický přístup, tentokrát k rovnici (4.9), pak průsečíky funkce $g^3(x)$ s přímkou $y = x$ dávají reálné kořeny této rovnice. Tento problém lze opět ukázat v grafu, a to třetími iteracemi funkce $g(x)$ pro různé hodnoty r při $K = 1$ (viz Obrázek 7). Z obrázku jde vidět, že při hodnotách $r = 2,6$ i $r = 2,8$ protne funkce $g^3(x)$ přímkou $y = x$ pouze v bodech $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = K$, ale pro hodnotu $r = 2,9$ se objeví dalších 6 průsečíků, tedy 6 nových reálných kořenů. Přibližme si, co se děje mezi hodnotami $r = 2,8$ a $r = 2,9$. Je zřejmé, že mezi těmito hodnotami je taková, pro kterou se objeví trojcyklus.



Obrázek 7: Grafy funkce $g^3(x)$ pro různé hodnoty r

Z grafu (viz Obrázek 8) je vidět, že při rostoucím r se dvě lokální minima a jedno lokální maximum funkce $g^3(x)$ postupně přibližují k přímce $y = x$, a že při dosažení jisté kritické hodnoty r je tato přímka tečnou ve všech třech zmíněných bodech. Je-li r vyšší než tato kritická hodnota, pak se na okolí těchto bodů tečna stává sečnou, a objeví se tak 6 reálných kořenů (tedy 2 různé trojčky). Z těchto poznatků lze vyvodit, že první trojcyklus se objeví právě tehdy, když se výše zmíněné lokální extrémy dotknou přímky $y = x$. Tyto body dotyku jsou vlastně body, ve kterých má funkce $g^3(x)$ směrnici tečny rovnou jedné, tj.

$$(g^3)'(x) = 1. \quad (4.10)$$

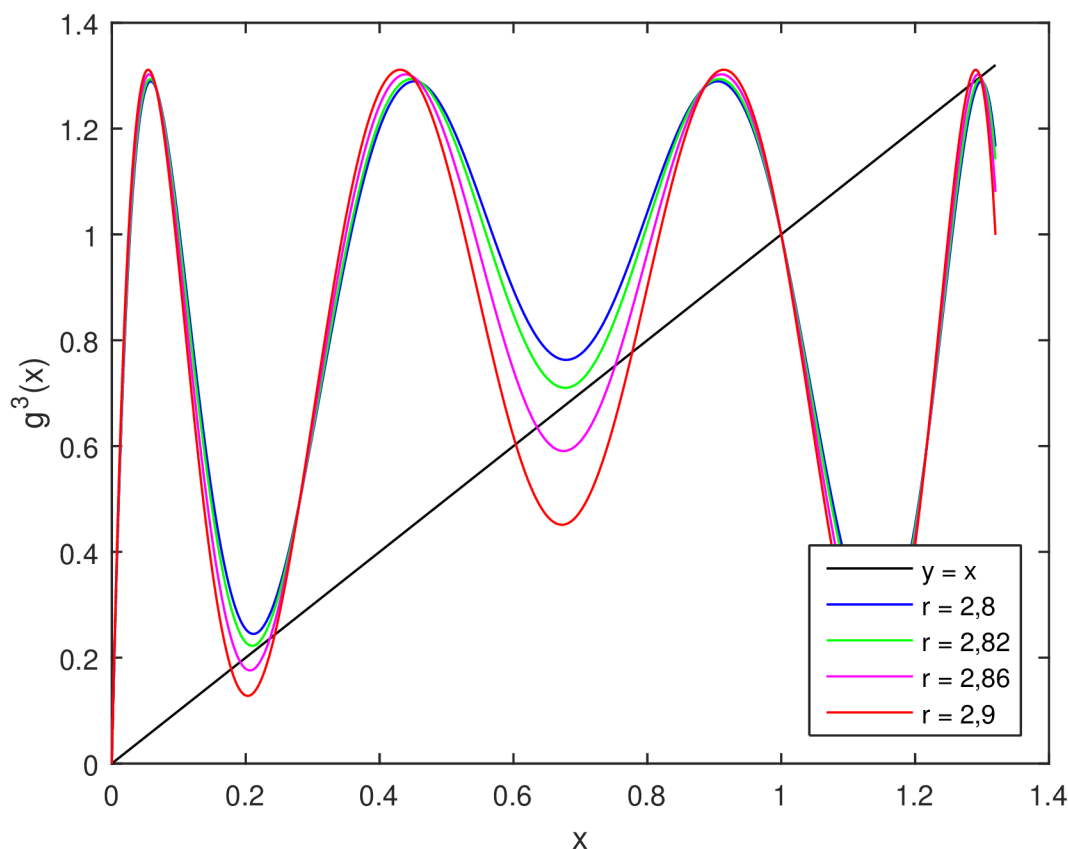
Oproti funkci $g^4(x)$ však nevíme, pro které body je rovnost (4.10) splněna. Je tedy třeba najít jiný způsob, kterým lze tuto rovnost ukázat.

Pomůžeme nám k tomu definice trojcyklu (viz Definice 2.9). Pomocí tvaru funkce $g(x)$ a přeznačení bodů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ z definice trojcyklu na body x, y, z se dostaneme k soustavě rovnic

$$g(x) = y, \quad (1+r)x - \frac{r}{K}x^2 = y, \quad (4.11)$$

$$g^2(x) = g(y) = z, \quad (1+r)y - \frac{r}{K}y^2 = z, \quad (4.12)$$

$$g^3(x) = g^2(y) = g(z) = x, \quad (1+r)z - \frac{r}{K}z^2 = x. \quad (4.13)$$



Obrázek 8: Grafy funkce $g^3(x)$ pro hodnoty $2,8 < r < 2,9$

Rovnici (4.10) lze upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
 1 &= (g^3(x))' = \frac{d(g^3(x))}{dx} \\
 1 &= \frac{d(g^3(x))}{d(g^2(x))} \frac{d(g^2(x))}{d(g(x))} \frac{d(g(x))}{dx} \\
 1 &= \frac{d(g(z))}{dz} \frac{d(g(y))}{dy} \frac{d(g(x))}{dx} \\
 1 &= \left(1 + r - \frac{2rz}{K}\right) \left(1 + r - \frac{2ry}{K}\right) \left(1 + r - \frac{2rx}{K}\right) \\
 1 &= (-2)r \left(\frac{z}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2}\right) (-2)r \left(\frac{y}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2}\right) (-2)r \left(\frac{x}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2}\right) \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Sestavili jsme tedy soustavu 4 rovnic (4.11)-(4.14) pro 4 neznámé x, y, z, r (poznamenejme, že z formálního hlediska je neznámou i K , kterou se však podaří v dalších úpravách eliminovat). Naším cílem tedy je provést diskuzi řešení této soustavy.

Nejprve provedeme úpravu rovnice (4.11):

$$y = x + rx - \frac{rx^2}{K},$$

$$\begin{aligned}
\frac{ry}{K} &= \frac{rx}{K} + \frac{r^2x}{K} - \frac{r^2x^2}{K^2}, \\
\frac{ry}{K} &= -r^2 \left(\frac{x^2}{K^2} - \left(\frac{1}{r} + 1 \right) \frac{x}{K} \right), \\
\frac{ry}{K} &= -r^2 \left(\frac{x}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right)^2 + \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)^2, \\
\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} + 1 \right) &= r^2 \left(\frac{x}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right)^2 + \frac{ry}{K} - \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} + 1 \right), \\
\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} + 1 \right) &= r^2 \left(\frac{x}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right)^2 + r \left(\frac{y}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right). \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Analogicky se upraví i rovnice (4.12) a (4.13):

$$\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} + 1 \right) = r^2 \left(\frac{y}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right)^2 + r \left(\frac{z}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right), \quad (4.16)$$

$$\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} + 1 \right) = r^2 \left(\frac{z}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right)^2 + r \left(\frac{x}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2} \right). \quad (4.17)$$

Zavedením následující substituce dostaneme z rovnic (4.14) - (4.17) soustavu čtyř rovnic o čtyřech nových neznámých, která se ukáže být využitím několika triků řešitelná (vzhledem k neznámé r). Položme

$$\begin{aligned}
p &= \frac{x}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2}, & q &= \frac{y}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2}, & s &= \frac{z}{K} - \frac{\frac{1}{r} + 1}{2}, \\
A &= rp, & B &= rq, & C &= rs, & R &= \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Pak se rovnice (4.14)-(4.17) redukují na tvar

$$R = A^2 + B, \quad (4.18)$$

$$R = B^2 + C, \quad (4.19)$$

$$R = C^2 + A, \quad (4.20)$$

$$1 = -8ABC. \quad (4.21)$$

Nyní s ohledem na rovnice (4.18) - (4.20) je potřeba uvědomit si, že při cyklické záměně $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ nejsou tyto rovnice změněny. Lze tedy uvažovat existenci funkce

$g(u)$, pro kterou platí $g(A) = B, g(B) = C, g(C) = A$, tedy že tato funkce má trojcyklus tvořený body A, B, C . Tyto body jsou proto kořeny nějaké kubické rovnice, tedy platí

$$(u - A)(u - B)(u - C) = 0,$$

tedy

$$u^3 - (A + B + C)u^2 + (AB + AC + BC)u - ABC = 0.$$

Označme koeficienty mocnin u následujícím způsobem:

$$a = A + B + C,$$

$$b = AB + AC + BC,$$

$$c = ABC.$$

Udělejme nyní pár algebraických úprav, které využijeme pro získání rovnic potřebných k vyjádření hodnoty r :

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^2 - 2b, \quad (4.22)$$

$$A^3 + B^3 + C^3 = a^3 - 3ab + 3c, \quad (4.23)$$

$$A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2 = b^2 - 2ac. \quad (4.24)$$

Jako první lze sečtením rovnic (4.18) - (4.20) dostat následující rovnici:

$$3R = A^2 + B + B^2 + C + C^2 + A,$$

$$R = \frac{1}{3}(a^2 + a - 2b). \quad (4.25)$$

Nyní se lze algebraickými úpravami (vynásobením rovnice (4.18) výrazem A , rovnice (4.19) výrazem B , rovnice (4.20) výrazem C a následně jejich sečtením a použitím rovnice (4.25)) dostat k další rovnici závislé na proměnných a, b, c :

$$RA + RB + RC = A^3 + AB + B^3 + BC + C^3 + CA,$$

$$2a^3 - a^2 - 7ab + 3b + 9c = 0. \quad (4.26)$$

Dále lze vynásobením rovnice (4.18) výrazem C , rovnice (4.19) výrazem A , rovnice (4.20) výrazem B , jejich sečtením a použitím (4.25) dojít k následujícímu:

$$A^2C + B^2A + C^2B = A^3 + B^3 + C^3 = a^3 - 3ab + 3c. \quad (4.27)$$

Poslední rovnici závislou na proměnných a, b, c získáme z rovnice

$$(A^2 + B)(B^2 + C) + (B^2 + C)(C^2 + A) + (C^2 + A)(A^2 + B) = 3R^2, \\ A^3 + B^3 + C^3 + A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2 + A^2C + B^2A + C^2B + AB + AC + BC = 3R^2,$$

s využitím algebraicky upravených výrazů (4.22) - (4.24) a (4.27), ve tvaru

$$a^4 - 4a^3 + a^2 - 4a^2b + b^2 + 14ab + 6ac - 3b - 18c = 0. \quad (4.28)$$

Z rovnice (4.21) je zřejmé, že $c = -\frac{1}{8}$. Po dosazení c do rovnice (4.26) lze z této rovnice vyjádřit b jako

$$b = \frac{16a^3 - 8a^2 - 9}{56a - 24},$$

které lze spolu s c dosadit do rovnice (4.28). Tím dostaneme rovnici závislou pouze na proměnné a ve tvaru

$$1536a^6 - 3072a^5 + 4608a^4 + 3456a^3 - 10368a^2 + 15552a - 5832 = 0,$$

jejíž úpravou dostáváme

$$24(2a - 1)(2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)^2 = 0.$$

Tato rovnice má kořeny

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{3,4} = \frac{3}{4}(1 + i\sqrt{3}), \quad a_{5,6} = \frac{3}{4}(1 - i\sqrt{3}),$$

kde kořeny a_3, a_4, a_5, a_6 se dále nemusíme zabývat, jelikož jsou komplexní a vedou také na komplexní hodnotu r . Dosazením kořenů a_1, a_2 spolu s b do rovnice (4.25) dostáváme

$$R_1 = -1, \quad R_2 = \frac{7}{4},$$

což pro substituci

$$R = \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)^2 - \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} + 1 \right)$$

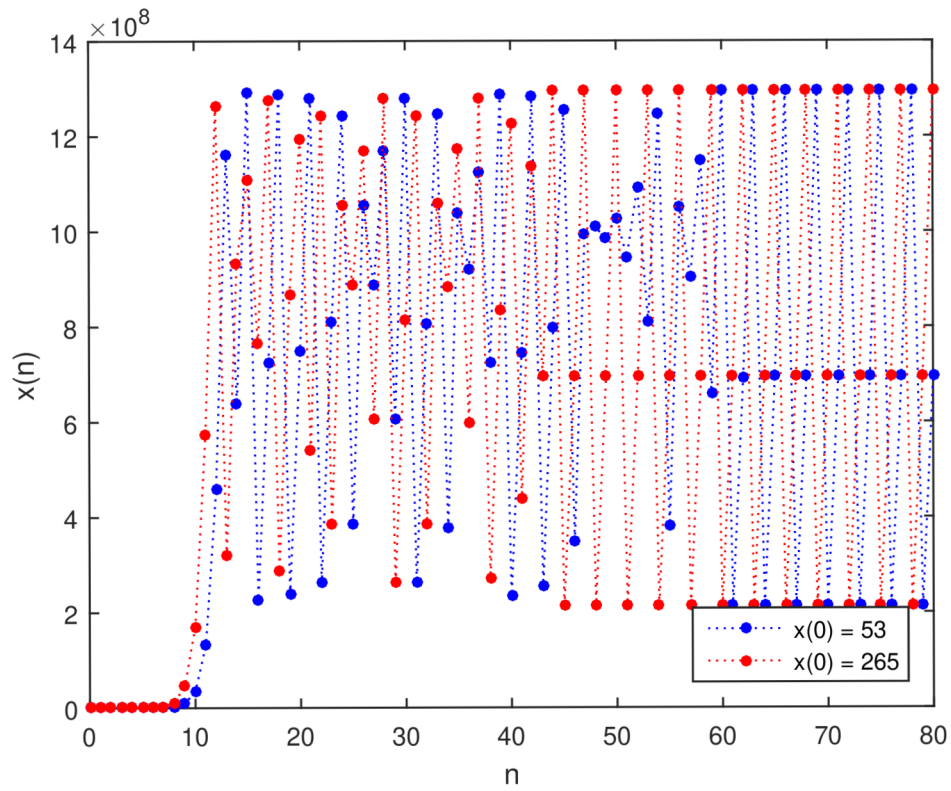
znamená, že

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \sqrt{8}.$$

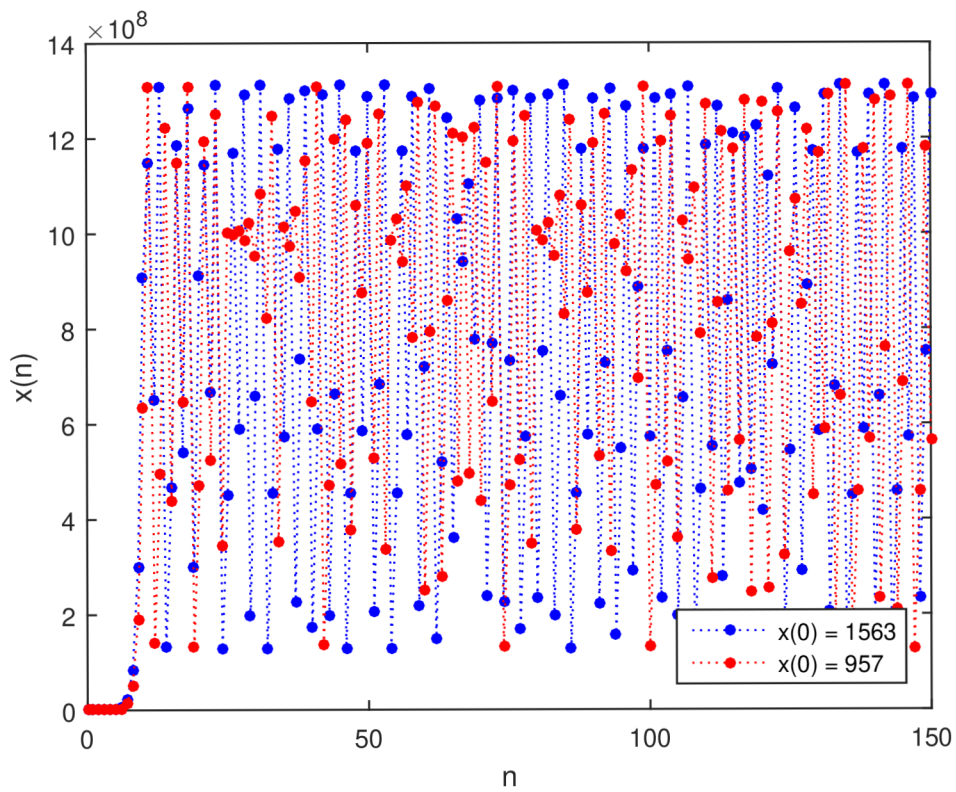
Hodnota r_1 je jedna z rovnováh diskrétního modelu (4.3), není proto hodnotou r , při které se objeví první trojcyklus. Ten se objeví při $r = r_2 = \sqrt{8}$. Kořeny funkce $g^3(\lambda^*) = \lambda^*$ opět nelze obecně vyjádřit, o stabilitě periodického řešení tvořeného trojcyklem tedy nelze rozhodnout (pomocí Definice 2.14, Poznámky 2.8 a Poznámky 2.17). Stabilitu můžeme opět diskutovat alespoň pomocí grafu a Poznámky 2.8, kde v grafu zkoumáme tečny funkce $g^3(x)$ v bodech trojcyklu při různých hodnotách $r > \sqrt{8}$. Připomeňme, že pro $r > \sqrt{8}$ se objeví v řešení 2 různé trojcykly. Periodické chování tvořené trojcyklem s body $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ je ukázáno v obrázku (viz Obrázek 9). Z obrázku jde vidět asymptotická stabilita tohoto řešení pro $r = \sqrt{8}$. Obě řešení s různými počátečními velikostmi populace se ustálí do trojcyklu tvořeného body $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Je třeba podotknout, že nad hodnotou $r = \sqrt{8}$, při které se objeví první trojcyklus, se mnozí matematici zamýšlejí i v současné době. Způsob, kterým jsme tuto hodnotu ukázali (inspirovaný [9]), je zdlouhavý a vyžaduje spoustu triků a doplňujících algebraických úprav. Matematici tak stále hledají efektivnější způsob pro ukázání této hodnoty. Jiné způsoby jsou uvedeny například v [1], [4].

Pro $r > \sqrt{8}$ se jako periodická řešení mohou objevit cykly jakéhokoliv řádu k , kde různé počáteční podmínky mohou vyvolat různé chování řešení. Objevují se také řešení, jejichž chování je nahodilé - taková řešení se nazývají chaotická. V obrázku (viz Obrázek 10) je ukázáno řešení vykazující chaotické chování. Tento typ chování řešení popíšeme v následující kapitole.



Obrázek 9: Periodické řešení tvořené trojcyklem

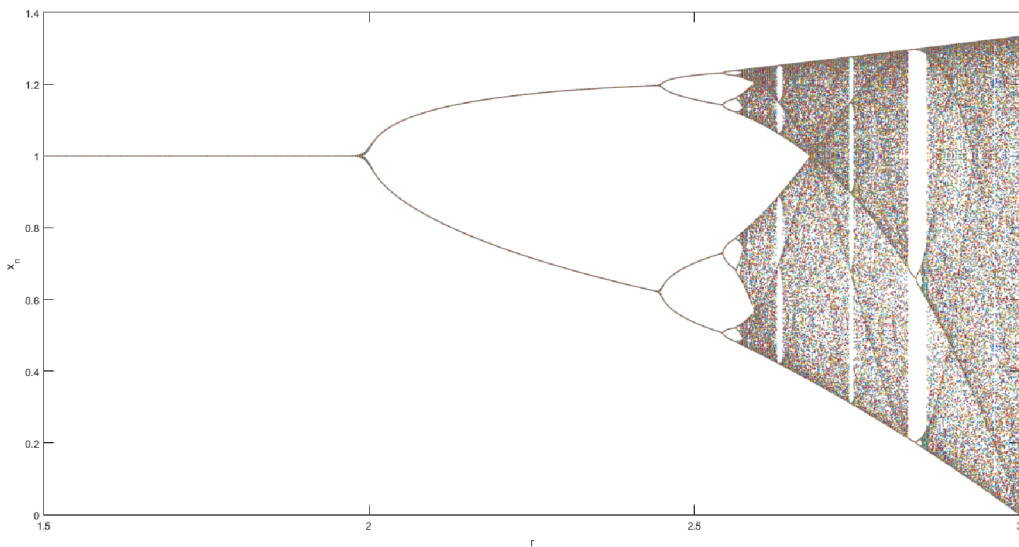


Obrázek 10: Chaotické chování řešení

5 Chaos

System, v němž nejsou zabudované náhodné prvky, který přesto vykazuje nepředvídatelné a neuspořádané chování, se označuje jako systém s deterministickým chaotickým chováním. Pro tyto systémy nejsme schopni analyzovat jejich chování v budoucnosti. Chaos se projevuje při změně počátečních podmínek či paramterů, přičemž taková změna může být i nepatrná.

Chaos lze mimo jiné ilustrovat například v bifurkačním diagramu. Bifurkace je jev, u kterého nastávají kvalitativní změny řešení sledovaného systému při nepatrné změně vstupních parametrů. V případě studovaného diskrétního modelu je vstupním parametrem míra růstu populace r (tzv. bifurkační parametr). Bifurkační diagram na Obrázku 11 dokumentuje teoretické výsledky odvozené v předcházející části, tedy cestu od existence stabilní rovnováhy až k chaotickému chování v závislosti na rostoucím parametru r .



Obrázek 11: Bifurkační diagram

V souvislosti s chaotickým chováním v diskrétním logistickém modelu má velký význam tzn. Feigenbaumova konstanta. Tato konstanta vyjadřuje speciální poměr v bifurkačním diagramu, konkrétně se jedná o limitu poměru následujících bifurkací:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = 4,6692016\dots,$$

kde r_n je taková hodnota r , při které v řešení modelu (4.3) vznikne cyklus řádu 2^n . Konkrétně pro model (4.3) a $r_1 = 2$, $r_2 = \sqrt{6}$, $r_3 = 2,544$ je tato konstanta

$$\frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} = 4,7559889\dots,$$

tedy již velmi blízká Feigenbaumově konstantě. Feigenbaum původně objevil toto číslo právě v bifurkacích logistických zobrazení (v roce 1975). Ukázal však, že toto číslo vzniká i v dalších jednodimenzionálních zobrazeních, v jejichž chování se objevuje tzv. zdvojení periody.

6 Shrnutí a závěrečné poznámky

U obou logistických modelů jsme došli k několika závěrům, které určitým způsobem popisují chování řešení daného modelu. Pro přehlednost těchto výsledků proto nyní porovnejme všechny zásadní rozdíly mezi spojitým a diskrétním logistickým modelem. Začněme nejprve řešitelností modelu. Spojitý logistický model (3.3) je snadné řešit, a to i přes jeho nelinearitu, pomocí vhodné metody pro řešení ODR1 (například pomocí separace proměnných nebo Bernoulliho substituce). Diskrétní logistický model (4.3) je sice podobný spojitému modelu, lze ho ovšem řešit pouze v konečném čase, a to po dlouhém iteračním procesu. Pro tento model neexistuje obecný předpis pro řešení, závisující explicitně pouze na vstupních parametrech.

Další rozdíl zkoumaných modelů spočívá v chování řešení s počátečními podmínkami v blízkém okolí rovnovážných stavů. Oba modely sice mají stejné rovnováhy $y_1^* = x_1^* = 0$, $y_2^* = x_2^* = K$, avšak zatímco k rovnováze y_2^* konvergují řešení (3.4) pro všechna $r > 0$, k rovnováze x_2^* konvergují řešení modelu (4.3) pouze pro $0 < r \leq 2$. V případě rovnováhy y_1^* konvergují k této rovnováze řešení (3.4) pro všechna $r < 0$, k rovnováze x_1^* konvergují řešení modelu (4.3) pouze pro $-1 < r \leq 0$.

Nejzásadnější rozdíl těchto modelů však spočívá v existenci periodického řešení daného modelu. Zatímco chování každého řešení spojitého modelu vykazuje pouze konvergenci k jedné z rovnováh tohoto modelu, chování řešení diskrétního modelu je o mnoho bohatší. Chování každého řešení diskrétního modelu je dané zejména volbou vstupního parametru r . Kromě rovnováh tohoto modelu, se při volbě $r > 2$ (kdy kladná rovnováha ztrácí stabilitu) objevují také periodická řešení tvořená cykly různých řádů. Pro $r > 2$ se objeví dvojcyklus, pro $r > \sqrt{6}$ čtyřcyklus, pro $r > 2,544$ osmicyklus, ..., a pro $r = \sqrt{8}$ první trojcyklus. Pro $r > \sqrt{8}$ se tak v řešení může objevit cyklus kteréhokoliv řádu, řešení se chová chaoticky. V následující tabulce (viz Tabulka 3) jsou shrnuty oblasti asymptotické stability jednotlivých cyklů (oblasti stability cyklů vyšších řádů jsou uvedeny například v [6]):

Spojitý model		Diskrétní model	
Druh řešení	Asympt. stabilita	Druh řešení	Asympt. stabilita
Rovnováha $y^* = 0$	$r < 0$	Rovnováha $x^* = 0$	$-1 < r < 0$
Rovnováha $y^* = K$	$r > 0$	Rovnováha $x^* = K$	$0 < r \leq 2$
		Cyklus řádu 2	$2 < r < \sqrt{6}$
		Cyklus řádu 4	$\sqrt{6} < r < 2,544$
		Cyklus řádu 8	$2,544 < r < 2,564$
		Cyklus řádu 16	$2,564 < r < 2,568$
		\vdots	\vdots
		Cyklus řádu 3	$r = \sqrt{8}$

Tabulka 3: Tabulka shrnutí obou modelů

Je nutné poukázat na skutečnost, že při kritické hodnotě bifurkace r , kdy daný druh řešení (rovnováha nebo cyklus) ztrácí svoji stabilitu, se objeví nový druh řešení, který je od této hodnoty asymptoticky stabilní.

Bohatost chování řešení diskrétního modelu je tedy oproti spojitému modelu opravdu velká. Nastává proto otázka, jak se rozmanitost chování diskrétního modelu dokáže

v případě spojitého modelu redukovat pouze do dvou případů - a to konvergence k jedné z rovnováh. Podívejme se na tento problém z numerického hlediska, kde je možné využitím numerických metod najít řešení dynamického systému. Princip numerického řešení spočívá v diskretizaci proměnných, kdy je řešení dynamického systému nahrazeno posloupností diskrétních bodů $x_0(t_0), x_1(t_1), x_2(t_2), \dots$, kde $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Posloupnost velikostí populace $\{x_n\}$ diskrétního modelu v daných časových úsecích n s počáteční velikostí populace x_0 lze tedy brát jako diskretizaci řešení (3.4) spojitého modelu. Vyjádřeme tento problém pomocí *Eulerovy metody*:

Eulerova metoda určuje nový stav autonomního systému z předchozího na základě vztahu

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

kde $h = t_{i+1} - t_i$ označuje délku diskretizačního kroku. Diskrétní model (4.3) je tedy diskretizací spojitého modelu s délkou diskretizačního kroku $h = 1$. Pokud by však tato diskretizace byla zvolena s krokem $h = 0,5$, vedla by k odlišným závěrům v popisu chování řešení diskrétního modelu. Při takovém kroku by byla rovnováha $x^* = K$ asymptoticky stabilní pro $0 < r < 4$, dvojcykly asymptoticky stabilní pro $4 < r < 2\sqrt{6}$, atd. Postupným zmenšováním h dochází k prodlužování intervalů hodnot r , pro které jsou daná řešení (rovnováhy a periodická řešení) asymptoticky stabilní. Volbou kroku limitně blížícího se $h \rightarrow 0$ dostaneme rovnováhu $x^* = K$ asymptoticky stabilní pro všechna $r > 0$, přičemž model (4.3) přejde na model (3.3). Periodické a chaotické chování řešení modelu je tedy potlačeno („posunuto“ do nekonečna) minimalizací délky diskretizačního kroku.

V návaznosti na tuto práci je možné podrobněji analyzovat chaotické chování řešení diskrétního modelu, které je zde pouze naznačeno. Lze také diskutovat chování řešení modelu v krajních hodnotách intervalů asymptotické stability jednotlivých periodických řešení. Samozřejmě se také naskýtá možnost pokusit se najít efektivnější způsob výpočtu hodnoty $r = \sqrt{8}$, případně určení bodů trojcyklu nebo čtyřcyklu.

Literatura

- [1] BECHHOEFER, John. The birth of period 3, revisited. *Mathematics Magazine* [online]. 1996, roč. 69, č. 2 [cit. 2017-04-05]. Dostupné z: http://www.maa.org/sites/default/files/John_Bechhoefer04536.pdf
- [2] BRAUER, Fred a Carlos CASTILLO-CHÁVEZ. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. 2nd ed. New York: Springer, c2012. ISBN 978-1-4614-1685-2.
- [3] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [4] FENG, Bei Ye. A trick formula to illustrate the period three bifurcation diagram of the logistic map. *Journal of Mathematical Research and Exposition* [online]. 2010, roč. 30, č. 2 [cit. 2017-04-05]. Dostupné z: http://jmre.dlut.edu.cn/en/ch/reader/create_pdf.aspx?file_no=20100211&year_id=2010&quarter_id=2&falg=1
- [5] HLADÍK, Michal. Chaos: Základní pojmy. *Deterministický chaos: Princip a aplikace* [online]. c2006, [cit. 2017-04-19]. Dostupné z: <http://www.hungrylord.wz.cz/data/chaos.php>
- [6] Logistic Map. *Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource* [online]. 1999-2017, [cit. 2017-04-10]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html>
- [7] OBORNÁ, Eliška. *Stabilní a chaotické chování Lorenzova systému*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 36 s.
- [8] PRÁGEROVÁ, Alena. *Diferenční rovnice*. Praha: SNTL, 1971. ISBN 04-018-71.
- [9] SAHA, Partha a Steven H. STROGATZ. The birth of period three. *Mathematics Magazine* [online]. 1995, roč. 68, č. 1 [cit. 2017-04-01]. Dostupné z: <https://www.maa.org/sites/default/files/269137619927.pdf>
- [10] SMÍTAL, Jaroslav. *O funkciách a funkcionálnych rovniciach*. Bratislava: Alfa, 1984. ISBN 63-146-84.

Použité symboly

\mathbb{N}	množina všech přirozených čísel
\mathbb{R}	množina všech reálných čísel
\mathbb{N}_0	množina všech přirozených čísel společně s nulou, tj. $\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}_0^+	množina všech kladných reálných čísel společně s nulou, tj. $\langle 0, \infty \rangle$
$D(f)$	definiční obor funkce f
$g^k(x)$	k -tá iterace funkce $g(x)$