UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Řešení algebraických rovnic a jeho historie

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Pavel Gebhart**
Studijní program: B0114A170003 Matematika pro vzdělání
Studijní obor: Matematika-Geografie se zaměřením pro vzdělání
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2023

Bibliografická identifikace

Autor: Pavel Gebhart

Název práce: Řešení algebraických rovnic a jeho historie

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2023

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá řešením algebraických rovnic a jeho historií. Práce je rozdělena do sedmi kapitol. V první kapitole se práce zabývá základními pojmy algebraických rovnic a je zde uvedena také jejich historie. V dalších kapitolách se práce zabývá algebraickými rovnicemi podle jejich stupně. Jsou zde uvedeny metody jejich řešení a také je zde zmíněna jak historie rovnic, tak i historie daných metod. U uvedených metod jsou vypočítané úlohy, pro jejich lepší pochopení. U grafických metod jsou uvedeny grafy, které byly vytvořeny v programu GeoGebra.

Klíčová slova: algebraická rovnice, metoda řešení, kořen polynomu, lineární rovnice, kvadratická rovnice, kubická rovnice, kvartická rovnice, binomická rovnice, reciproká rovnice

Počet stran: 54

Počet příloh: 0

Jazyk: český

Bibliographical identification

Author:	Pavel Gebhart
Title:	Algebraic equations solving and its history
Type of thesis:	Bachelor’s
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.
The year of presentation:	2023

Abstract:

This bachelor´s thesis deals with the solution of algebraic equations and its history. The thesis is divided into seven parts. In the first part, the thesis deals with basic concepts of algebraic equations and their history is also presented there. In other parts, the work deals with algebraic equations according to their degree. The methods of solving them are presented there and we also deal with both the history of the equations and the history of the given methods. For better understanding of the mentioned methods, solved examples are shown there. For graphical methods, graphs that were created in program called GeoGebra are listed.

Key words: algebraic equation, solution method, root of the polynomial, linear equation, quadratic equation, cubic equation, quartic equation, binomial equation, reciprocal equation

Number of pages:	54
Number of appendixes:	0
Language:	Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Petra Emanovského, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ………………………… ………………………………………

podpis

Poděkování

Mé poděkování patří panu doc. RNDr. Petru Emanovskému, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování bakalářské práce věnoval.

Obsah

Úvod

Cílem bakalářské práce je vytvořit přehledný ucelený celek na téma řešení algebraických rovnic a jeho historie.

V matematice rozdělujeme rovnice na dva základní druhy. Prvním druhem jsou rovnice algebraické (nazývané též rovnicemi polynomickými), kterými se budeme zabývat v této práci. Dalším druhem rovnic jsou rovnice nealgebraické. Mezi tyto rovnice řadíme rovnice goniometrické nebo rovnice iracionální. Algebraické rovnice lze algebraicky řešit jen do stupně čtyři. Pro rovnice stupně pět a vyšších stupňů už dané rovnice nejdou řešit pomocí vzorců, ale kořeny se dají najít pomocí přibližných metod. Existují i rovnice stupně vyššího než čtyři ve speciálním tvaru, které lze řešit algebraicky (reciproké, binomické). Historie algebraických rovnic je velmi bohatá, protože se jedná o jednu z nejstarších částí matematického oboru algebra. Historie sahá až do období starověkého Babylonu, tedy do období asi 2000 let př. n. l.

V první části této práce zavedeme definici algebraických rovnic a zavedeme pojem kořen polynomu. Popsána bude stručná historie algebraických rovnic a zmíněny budou i významné osobnosti v daném oboru.

V dalších částech se postupně budou rozebírat jednotlivé typy algebraických rovnic (rovnice kvadratické, kubické, kvartické, …), jejich metody řešení a popsaná bude i historie daných metod. Dále zde budou vyřešené rovnice danými metodami pro lepší pochopení metod.

Seznam použitých znaků

V této práci budeme pracovat s následující znaky:

$=$	se rovná
$\neq$	se nerovná
$>$	větší než
$<$	menší než
$\geq$	větší nebo rovno
$\leq$	menší nebo rovno
$\mathbb{N}$	obor přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	obor celých čísel
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel
$\mathbb{C}$	obor komplexních čísel
$+$	operace sčítání
$\cdot$	operace násobení
$-$	operace odčítání
$:$	operace dělení
i	imaginární jednotka komplexního čísla
$\wedge$	a
$\vee$	nebo
$\in$	je prvkem
$\notin$	není prvkem
$D[x]$	obor integrity polynomů jedné neurčité x nad D

Kapitola 1

V této úvodní kapitole se budeme zabývat zavedením pojmu algebraická rovnice *n*-tého stupně. Jedná se o jednu ze základních a nejstarších částí matematického oboru algebra. Zavedeme zde definici algebraických rovnic, řekneme, co je řešením rovnice a uvedeme jejich historii a významné osobnosti v daném oboru.

1. Úvod do algebraických rovnic

Definice 1.1.1. *Polynom (neboli mnohočlen) stupně n nad* $\mathbb{C}$ je výraz psaný ve tvaru

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde čísla a_i z $\mathbb{C}$ nazýváme koeficienty daného polynomu (v polynomu platí, že $a_n \neq 0$ a x je jeho neurčitá).

Definice 1.1.2. *Algebraickou rovnicí stupně* n nazýváme každou rovnici ve tvaru

$$f(x) = 0,$$

kde $f(x)$ je polynom nad $\mathbb{C}$ stupně $n \geq 1$.

V rovnicích se x nazývá neznámá.

Definice 1.1.3. Nechť *D* je obor integrity a $f(x) \in D[x]$ polynom stupně ≥ 1. Pak prvek $c \in D$ nebo c z nadoboru integrity nazveme *kořenem* $f(x)$, když $x - c$ dělí $f(x) \in D[x]$, tj. když $f(c) = 0$ v *D.*

Definice 1.1.4. *Řešením* algebraické rovnice $f(x) = 0$ rozumíme každý *kořen* polynomu $f(x)$.

Definice 1.1.5. *Binomická rovnice* je rovnice ve tvaru

$$x^n - a = 0,$$

kde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice 1.1.6. Rovnice $f(x) = 0$ nazýváme *algebraicky řešitelné* (neboli *řešitelné v radikálech*) právě tehdy, když existuje konečná posloupnost binomických rovnic

$$x^{n_1} + b_1 = 0, \ldots, x^{n_t} + b_t = 0$$

taková, že platí:

a) Koeficienty *i*-té rovnice b_i $(i = 1,2,3, \ldots, t)$ můžeme racionálně vyjádřit (konečným počtem racionálních operací +, -, ·, :) pomocí koeficientů polynomu $f(x) = 0$ a kořenů předchozích rovnic.

b) Každé řešení dané rovnice $f(x) = 0$ lze získat konečným počtem racionálních operací z koeficientů $f(x)$ a kořenů rovnic $x^{n_1} + b_1 = 0, \dots, x^{n_t} + b_t = 0$ (Emanovský a Kühr, 2020).

Řekneme, že dané rovnice řešíme *algebraicky* (neboli v *radikálech*) tak, že hledáme všechny kořeny daného polynomu $f(x)$, a to konečným počtem racionálních operací +, -, ·, :, a také pomocí přirozených odmocnin.

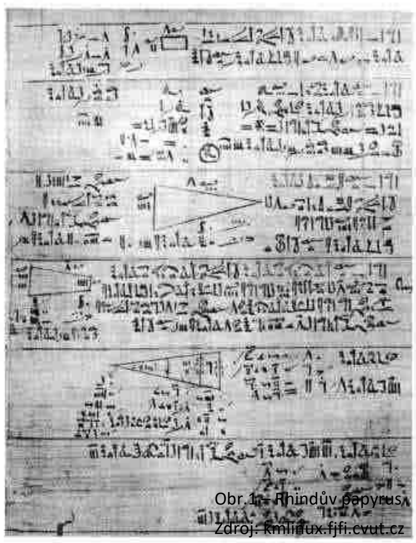
Algebraické rovnice *n*-tého stupně můžeme řešit algebraicky pouze pro rovnice stupně $n \leq 4$. Rovnice stupně $n > 4$ nelze řešit pomocí obecných vzorců. Zde pro vypočet reálných kořenů využíváme přibližných metod. Některé rovnice speciálního tvaru lze algebraicky řešit i pro vyšší stupně např. reciproké, binomické (Emanovský a Kühr,2020).

Věta 1 (Základní věta algebry) Nechť máme polynom $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ s komplexními koeficienty $a_0, a_1 \dots, a_n$, kde $a_n \neq 0$, stupně $n \geq 1$. Pak existuje $a \in \mathbb{C}$, takové že $f(a) = 0$.

Základní věta algebry nám říká, že každý polynom s komplexními koeficienty stupně většího nebo rovného jedné má alespoň jeden komplexní kořen. Důsledek základní věty algebry tvrdí, že polynom stupně *n* má právě *n* komplexních kořenů, pokud počítáme každý tolikrát, kolikrát je jeho násobnost. Jako první základní větu algebry vyslovil *Albert Girard* (1595-1632), který začal uznávat i záporná čísla. Důkazů základní věty algebry je mnoho. Za první platný důkaz považujeme až důkaz německého matematika *Carla Friedricha Gausse* (1777-1855), který ho publikoval ve své práci v roce 1799. V této práci kritizoval důkazy ostatních a vydal svůj, který dnes bere za první platný důkaz (Polák, 2014).

1.1. Historie algebraických rovnic

Samotná matematika se začala vyvíjet už v dávné historii. Už na počátku lidské společnosti potřebovali lidé zaznamenávat množství jako například množství dobytka, jídla nebo peněz. S postupem času se matematika začala zdokonalovat. První lidé se začali matematikou více zabývat, vznikaly první matematické věty a zákony. Jedním z prvních matematických problémů, které lidstvo řešilo, byly rovnice. Už ze Starověkého Egypta existují důkazy, že lidé řešili slovní úlohy, které v dnešní době vyjadřujeme pomocí rovnic. Z této doby pochází dva významné



Obr.1: Rhindův papyrus
Zdroj: kmlinux.fjfi.cvut.cz

matematické papyry. Oba papyry obsahovaly slovní úlohy, kde na jednom bylo 87 a druhém 25 řešených úloh i s postupy. Papyrus, kde se nacházely konkrétní postupy, se nazýval Rhindův papyrus z 16 stol. př. n. l., který se dodnes nezachoval v originále. Dnes známe pouze jeho přepis uložený v Londýně. Právě na tom papyru byl například uveden příklad: Hromada a její čtvrtina nám dávají dohromady patnáct (v této době nebyla známá ještě matematická symbolika, proto se vše zapisovalo slovně). V dnešní době bychom tento příklad přepsali na jednoduchou lineární rovnici $x + \frac{1}{4}x = 15$. Dále se zde například vyskytuje úloha jak rozdělit 6 bochníků mezi 10 strávníků.

Ve starověkém Egyptě už lidé byli schopni řešit problémy, které v dnešní době řešíme pomocí lineárních rovnic nebo kvadratických rovnic bez lineárního členu (Mareš, 2011).

Významnou postavou v zavedení pojmů algebraických rovnic, respektive lineárních a kvadratických rovnic, byl řecký matematik *Diofantos z Alexandrie* (200 n. l.-284 n. l.), který se proslavil především spisem *Aritmetika* z 2. poloviny 3. století. Tento spis byl složen z 13 knih, kde bylo popsáno vše, co bylo prozatím zjištěno o řešení lineárních a kvadratických rovnic. Nachází se zde i řešení jednoho speciálního případu kubické rovnice. Bohužel se dochovalo pouze 6 knih, ale i tak se toto dílo stalo základem matematiky pro Středověk. *Diaofantos* byl díky tomuto dílu považován za „*otce algebry*“ (Kolman, 1968).

Samotné slovo algebra pochází z díla jednoho z nejvýznamnějších osobností arabské matematiky *Al-Chwárizmího* (780-850). *Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí* se proslavil především dvěma knihami. První kniha nesla název *Hisáb al-Džabr wa al-Muqabala*. Právě z tohoto díla pochází pojem Algebra (al-džabr = algebra), tedy název matematického odvětví, které se zabývá čísly, polynomy, maticemi apod. Dále zde také zavádí poprvé pojem neznámé. Jeho druhé dílo je pro nás důležitější a nese název *al- Kitab al-muktasar fi hisáb al-gabr wa-al-mugábala*. V této knize najdeme podrobné mechanické postupy pro řešení rovnic, které se učí žáci ve škole dodnes. Další, kdo nám přinesl něco nového z okruhu rovnic, byl perský matematik *Omar Chajjám* (1084-1123). Právě *Chajjám* se zabýval rovnicemi kubickými, které rozdělil na několik typů a snažil se odvozovat postupy pro řešení daných rovnic. Zabýval se řešením jak aritmetickým, tak i řešením geometrickým (Willers, 2012).

Dalším významným obdobím pro algebraické rovnice bylo 15. stol., kde františkánský mnich *Luca Pacioli* (1445-1514) prohlásil, že neexistuje řešení kubické rovnice. S tímto faktem se nesmířil *Scipione del Ferro* (1465-1526), který řešení našel, ale pouze pro kubické rovnice, které neobsahovaly kvadratický člen. Na řešení obecné kubické rovnice se zaměřil *Niccola Fontana* (1500-1577), kterého známe především pod přezdívkou *Tartaglia*, který na postup řešení nakonec přišel. *Tartaglia* byl velmi pověrčivý, a proto nechtěl postup řešení nikomu prozradit. Po dlouhém naléhaní prozradil pouze výsledný vzorec pro řešení kubické rovnice svému příteli *Girolamovi Cardanovi* (1501-1576), který se mu musel zaručit, že informaci neprozradí. Poté co se mu podařilo výsledný vzorec v roce 1545 odvodit, uveřejnil jej ve svém díle *Ars Magma*. Bylo zde napsáno, že kubické rovnice mají obecně tři řešení, kde dvě z nich můžou obsahovat $\sqrt{-1}$. Díky této situaci *Cardano* zavedl pojem komplexního čísla, tedy takového čísla, které je tvořeno dvojicí reálného a imaginárního čísla. Postupem času se zjistilo, že algebraické rovnice prvního, druhého, třetího a čtvrtého stupně lze vypočítat ze vzorců (Mareš, 2011).

Další významnou osobností spojenou s algebraickými rovnicemi byl norský matematik *Niels Henrik Abel* (1802-1829). V roce 1822 uveřejnil svůj první objev, a to metodu řešení algebraické rovnice pátého stupně. Během dvou let sám *Abel* přišel na to, že algebraické rovnice pátého stupně nelze algebraicky řešit, protože se jednalo o pouhou náhodu. Na to, kdy je obecná algebraická rovnice řešitelná algebraicky, přišel francouzský matematik *Evariste Galois* (1811-1832), který vytvořil *Galoisovu teorii*, kterou považujeme za základní kámen moderní algebry. (Mrázek, 1986).

1.2. Významné osobnosti

V dané podkapitole budou uvedeny významné osobnosti, které se zasloužily o rozvoj problematiky řešení algebraických rovnic.

Obr. 2 -Diofantos z Alexandrie
Zdroj: famousmathematicians.net

Diofantos z Alexandrie (200-284) byl řecký matematik, který velkou část svého života strávil v alexandrijské knihovně. Mezi jeho významná díla patří například spis o teorii polygonálních čísel. Ale jeho nejvýznamnějším dílem je *Aritmetika*, spis o řešení algebraických rovnic a o teorii čísel. Patří mezi dílo, které ovlivnilo celé dějiny matematiky. Skládá se ze 13 knih, ve kterých je sepsáno vše, co prozatím lidstvo vědělo o algebraických rovnicích. Bohužel úlohy, které byly řešeny v těchto spisech, nevedly k žádnému obecnému řešení. Všechny úlohy byly řešeny jedinečně. Dále zde byly poprvé použity matematické symboly. Právě díky zavedení matematických symbolů se verbální období matematiky (matematické vztahy a rovnice byly vyjadřovány pouze slovně) změnilo na období matematických symbolů (matematické vztahy a rovnice jsou psány pomocí symbolů). Právě díky tomuto dílu si Diofantos z Alexandrie vysloužil označení „*otec algebry*“. Po Diofantovi z Alexandrie jsou pojmenovány *diofantické rovnice*, tedy rovnice o dvou proměnných x, y vyjádřené ve tvaru $ax + by = c$, kde a, b, c jsou kladné celočíselné konstanty a proměnné x, y jsou kladná celá čísla.

Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí (780-850) byl perský astronom a matematik, který žil v Bagdádu. Al-Chwárizmí patřil mezi učence, kteří působili v domě moudrosti (dnešní akademie), kde se zabýval psaním knih o matematice. Proslavily ho především 2 knihy. První z nich byla kniha *Al-Džabr wa al-Muqabala*, ze které pochází slovo algebra. V jeho druhé knize jsou uvedeny postupy pro řešení matematických úloh, které se učí dodnes. Dále zde jsou popsané postupy pro řešení rovnic a počítání se zlomky.

Obr. 3 – Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí
Zdroj: famousmathematicians.net

Omar Chajjám (1048-1123) byl perský učenec, básník, filozof, lékař a astronom a jeden z největších matematiků 11. století. V oboru matematiky se věnoval především tématu kubických rovnic, které rozdělil na několik typů a zabýval se postupy řešení (aritmetickými i geometrickými postupy). Zavedl postup geometrického řešení kubické rovnice přes protnutí paraboly a kružnice. Dále Chajjám po letech oživil téma iracionálních čísel a díky tomu posunul vývoj blíže k zavedení reálných čísel.

Obr. 4 – Omar Chajjám
Zdroj: famousmathematicians.net

Luca Pacioli (1445-1514) byl františkánský mnich, italský matematik a přítel Leonarda da Vinciho, kterému pomáhal s počítáním proporcí podle zlatého řezu. Je považován za *„otce účetnictví“* díky tomu, že zavedl bilanční listy a snažil se o to, aby obchodníci uměli ve svém účetnictví udržet pořádek. A do historie matematiky se také dostal díky jednomu omylu. Prohlásil, že najít řešení pro kubické rovnice je nemožné, což pozdější matematici vyvrátili. Nejvýznamnější knihou tohoto italského matematika *je Summa de Artihmetica, Geometrica, proportioniet propotionalita*, kde shrnul vše, co se prozatím o matematice vědělo (Hoffmann, 2019).

Obr. 5 – Luca Pacioli
Zdroj: famousmathematicians.net

Scipione del Ferro (1465-1526) byl matematik z Boloňské univerzity, kde se živil jako přednášející aritmetiky a geometrie. Studoval zlomky a rozšířil vzorce pro součty řad z druhých na třetí mocniny. Nejvíc se proslavil tím, že vyvrátil tvrzení Luca Paciolliho. Dokázal, že kubické rovnice mají řešení. Tuto metodu řešení rovnic si velmi dlouho nechával pro sebe a odmítal ji komukoliv říct. Nakonec se později rozhodl, že ji řekne svému žáku Mariu Fiorovi, který se s touto metodou pochlubil.

Niccola Fontana (1500-1577) spíše známý pod přezdívkou Tartaglia, byl významný matematik a fyzik 16. století. Jednalo se o velmi nadaného a talentovaného vědce, který měl těžký osud. Ve 12 letech zažil Fontana děsivý zážitek, kdy francouzská armáda zaútočila na Brescii, kde chlapcova rodina žila. Při tomto útoku byl chlapcův obličej poraněn mečem. Fontana tento útok přežil, ale poté trpěl poruchou řeči. Díky této poruše vznikla jeho přezdívka Tartaglia (Koktavec).

Obr. 6 – Niccola Fontanu
Zdroj: http://people.ciirc.cvut.cz/

V matematice mu vděčíme především za řešení kubické rovnice nebo za tzv. *Tartaglivou formuli* pro výpočet objemu libovolného čtyřstěnu. Tartaglia byl velmi opatrný, co se týkalo jeho objevů, proto dlouho nikomu svoje výsledky nechtěl říct, až nakonec se rozhodl vše říct svému vrstevníkovi Girolamovi Cardanovi.

Girolamo Cardano (1501-1576) byl italský matematik a lékař. Jednalo se o zakladatele počtu pravděpodobnosti a prvního, kdo zveřejnil vzorce pro výpočet kubické rovnice. Sám Cardano ale nebyl ten, kdo zjistil vzorce pro výpočet kubické rovnice. Tuto informaci mu předal Tartaglia, který mu sdělil jen výsledný vzorec bez odvození a Cardano mu musel slíbit, že tento vzorec nikomu neřekne. Po několika letech Cardano na odvození tohoto vzorce přišel a rozhodl se ho zveřejnit. Stalo se tak roku 1545 v knize *Ars Magma.* Díky tomuto dílu také bylo zavedené komplexní číslo v podobě, které je známo dnes. Komplexní číslo chápeme jako uspořádanou dvojici reálných čísel – reálná a imaginární část.

Obr. 7 – Girolamo Cardano
Zdroj: onthisday.com

Niels Henrik Abel (1802-1829) byl významný norský matematik a fyzik s těžkým osudem. Přestože zemřel velmi mladý, stal se průkopníkem v oborech algebry, geometrie, teorie čísel a komplexní analýzy. Mezi jeho nejvýznamnější objevy patří objev eliptických funkcí jako inverzních funkcí eliptických integrálů. Dokonce ve svých teprve 16 letech podal jako první důkaz pro Newtonovu binomickou větu. Také dokázal, že rovnice pátého stupně nelze řešit algebraicky. Abel byl tak významný matematik, že od roku 2003 uděluje Norská královská akademie cenu za přínos pro rozvoj matematiky. Cena obnáší i finanční prémii ve výši 800 tisíc amerických dolarů. Z důvodu, že se neuděluje Nobelova cena v oboru matematiky, je tato cena označována za „Nobelovu cenu za matematiku“.

Obr. 8 – Niels Henrik Abel
Zdroj: sapaviva.com

Evariste Galois (1811-1832) byl francouzský matematik, který vytvořil metodu určování, kdy obecná rovnice může být řešena algebraicky. Dále se proslavil vývojem teorie grup. Nejdůležitější okamžik, který ovlivnil Galoise byl, když si jeho článek přečetl slavný matematik Cauchy, který mu poradil, jakým způsobem může svůj článek o řešitelnosti rovnic upravit. Upozornil ho také na dřívější práce Abela na toto téma. Vydal tedy nový článek o podmínkách, za kterých by byla řešitelná algebraická rovnice pátého stupně. Tato práce se bohužel nedochovala (O´Connor, 1999).

Obr. 9 Evariste Galois
Zdroj: mathshistory.st-andrews.ac.uk

Kapitola 2

V této kapitole se budeme zabývat nejjednodušším typem algebraických rovnic. Jedná se o lineární rovnice, tedy rovnice, kde polynom je stupně jedna.

2. Lineární rovnice

Definice 2.1.1. *Lineární rovnice* (neboli rovnice prvního stupně) je rovnice ve tvaru

$$ax + b = 0,$$

kde koeficienty $a, b \in \mathbb{C}$ a $a \neq 0$.

Člen ax představuje lineární člen a koeficient b představuje absolutní člen.

Definice 2.1.2 *Řešením* lineární rovnice je číslo ve tvaru

$$x = -\frac{b}{a} \text{ z } \mathbb{C}.$$

Matematické úlohy, které v dnešní době představují lineární rovnice, uměli lidé řešit už ve starověké Mezopotámii. V té době ještě neznali žádný obecný postup pro řešení takových rovnic. K řešení se dokázali postupnými kroky pouze přiblížit. První, kdo popsal vše, co se vědělo o lineárních rovnicích a metodách jeho řešení, byl Diofantos z Alexandrie v jednom ze svých spisů. Důležité, proč lidé v té době potřebovali umět řešit lineární rovnice, bylo, aby si dokázali spočítat množství obilí, dobytka nebo například peněz (Mareš, 2011).

2.1. Metoda ekvivalentních úprav

Jedná se o současnou metodu, která se učí na základní škole. Je založena na ekvivalentních úpravách, které nám pomohou nalézt řešení zadané rovnice. Ekvivalentní úpravy jsou úpravy, které nám nezmění množinu řešení. Mezi tyto úpravy řadíme přičítání výrazů, násobení a dělení nenulovým výrazem, záměnu stran rovnic, převrácení stran. U této metody není nutné provádět zkoušku. Jde o to, abychom osamostatnili neznámou x na jedné straně rovnice.

Řešené úlohy

V $\mathbb{N}$ řešte následující rovnice:

Některé uvedené rovnice nejsou algebraické. Po úpravách vedou na algebraické rovnice. Lineární rovnice má vždy jedno řešení. Jiné případy nastávají, pokud původní rovnice není lineární.

a) $\boldsymbol{\frac{x+4}{x-2} - \frac{7x-8}{x^2-2x-8} = 1}$

$$\frac{x^2 + 8x + 16 - 7x + 8}{(x-2)(x+4)} = 1$$

$$\frac{x^2 + x + 24}{(x-2)(x+4)} \cdot \frac{x+4}{x-2} = 1$$

$\frac{x^2+x+24}{x^2-4x+4} = 1 \qquad /\cdot\, (x^2 - 4x + 4)$

$x^2 + x + 24 = x^2 - 4x + 4 \qquad / +(-x^2), +4x, +(-24)$

$5x = -20 \qquad /: (5)$

$x = -4$

Po dosazení -4 do zadaní dostaneme 0 ve jmenovateli. Proto -4 nevyhovuje zadané rovnici.

Řešením zadané úlohy je množina $\boldsymbol{K} = \emptyset$

V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:

a) $\boldsymbol{(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x+2)(x-1) + 9(x+1) - 9(x-1)}$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 6x^2 - 6x + 12x - 12 + 18$

$6x^2 + 2 = 6x^2 + 6x + 6 \qquad /+(-6x^2), +(-6)$

$6x = -4 \qquad / : 6$

$\boldsymbol{x = -\frac{2}{3}}$

$\boldsymbol{K} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

b) $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2x-3}} - \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{(x-3)^2}}{\boldsymbol{2x^2-3x}}$

$\frac{x^2-6x+9}{x(2x-3)} = \frac{(x-3)^2}{x(2x-3)}$

$(x^2 - 6x + 9)(2x^2 - 3x) = (x - 3)^2(2x^2 - 3x)$

$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 \ /+(-x^2), +6x, +(-9)$

$0 = 0$

$\boldsymbol{K} = \mathbb{R}$

c) $\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 2\right) - 1\right] - 1\right\} + 1 = 2}$

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x - 2\right] - 1\right\} + 1 = 2$

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{8}x - 2\right\} + 1 = 2$

$\frac{1}{16}x - 1 + 1 = 2$

$\frac{1}{16}x = 2 \qquad /\cdot 16$

$\boldsymbol{x = 32}$

$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{32}\}$

2.2. Metoda chybného předpokladu

Tato metoda je historickou metodou pocházející z období Starověkého Egypta, a to přesněji z roku 1850 př. n. l. Metoda byla popsána na Rhindově papyru. Na tomto papyru se neznámá v rovnici nazývá *aha*.

Metoda řešení se využívá pro rovnice psané ve tvaru

$$x + \frac{1}{A} \cdot x = B,$$

kde x se nazývá *aha* (neznámá). Hodnotu neznámé x vypočítáme pomocí vzorce $A \cdot \frac{B}{A+1}$. V této metodě je důležité udělat zkoušku, která nás ujistí o správnosti výsledku (Vymazalová, 2006).

Řešené úlohy

V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:

a) $\boldsymbol{x+\frac{1}{7}\cdot x=19}$ (uvedeno v Rhindově papyru)

$\boldsymbol{x=7\cdot\frac{19}{8}}$

Zkouška: $\mathbf{L}$ (levá strana rovnice): $7\cdot\frac{19}{8}+\frac{1}{7}\cdot 7\cdot\frac{19}{8}=\mathbf{19}$

$\mathbf{P}$ (pravá strana rovnice): $\mathbf{19}$

$\mathbf{L=P}$

$\boldsymbol{K=\left\{7\cdot\frac{19}{8}\right\}}$

b) $\boldsymbol{x+\frac{1}{5}\cdot x=21}$

$\boldsymbol{x=5\cdot\frac{21}{6}}$

Zkouška: $\mathbf{L}$: $5\cdot\frac{21}{6}+\frac{1}{5}\cdot 5\frac{21}{6}=\frac{126}{6}=\mathbf{21}$

$\mathbf{P: 21}$

$\mathbf{L=P}$

$\boldsymbol{K=\left\{5\cdot\frac{21}{6}\right\}}$

c) $\boldsymbol{12x+x=696}$ /:12

$x+\frac{1}{12}x=58$

$\boldsymbol{x=12\cdot\frac{58}{13}}$

Zkouška: $\mathbf{L}$: $12\cdot\frac{58}{13}+\frac{1}{12}\cdot 12\cdot\frac{58}{13}=\frac{754}{13}=\mathbf{58}$

$\mathbf{P: 58}$

$\mathbf{L=P}$

$\boldsymbol{K=\left\{12\cdot\frac{58}{13}\right\}}$

2.3. Metoda přímého dělení

Tato metoda pochází ze Starověkého Egypta. Příklady, které byly jednodušší na výpočty, byly i s postupy popsány na dvou matematických papyrech. Jedním z nich byl papyrus Moskevský a druhý papyrus Káhúnský. Úlohy, které byly složitější na výpočet, byly popsaný až ve třetím papyru, a to na papyru Rhindově.

Metoda dělení pro výpočet kořenu lineární rovnice spočívá v tom, že na levou stranu rovnice si převedeme neznámou a na pravou stranu rovnice absolutní členy. Poté provedeme dělení pravé strany rovnice násobkem neznámé (Vymazalová, 2006).

Řešené úlohy **V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:**

a) $\boldsymbol{x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot x = 5}$ (Káhúnský papyrus)

$x = 5 : \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$x = 5 : \frac{1}{4}$

$\boldsymbol{x = 20}$

Zkouška: **L:** $20 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot 20 = 20 - \frac{3}{4} \cdot 20 = \mathbf{5}$

$\mathbf{P: 5}$

$\mathbf{L = P}$

$\boldsymbol{K = \{20\}}$

b) $\boldsymbol{x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) x = 33}$ (Rhindův papyrus)

$x = 33 : \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)$

$x = 33 : \frac{97}{42}$

$\boldsymbol{x = \frac{1386}{97}}$

Zkouška: **L:** $\frac{1386}{97} + \left(\frac{55}{42} \cdot \frac{1386}{97}\right) = \mathbf{33}$

$\mathbf{P: 33}$

$\mathbf{L = P}$

$\boldsymbol{K = \left\{\frac{1386}{97}\right\}}$

c) $\boldsymbol{2x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x = 10}$

$x = 10 : \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right)$

$\boldsymbol{x = \frac{20}{7}}$

Zkouška: **L:** $2 \cdot \frac{20}{7} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{20}{7} = \frac{40}{7} + \frac{30}{7} = \mathbf{10}$

$\mathbf{P: 10}$

$\mathbf{L = P}$

$\boldsymbol{K = \left\{\frac{20}{7}\right\}}$

2.4. Metoda grafického řešení lineárních rovnic

Metodu grafického řešení lineárních rovnic, kterou známe dnes, vymyslel v 19. století irský matematik a fyzik William Rowan Hamilton. Tato metoda má své výhody i nevýhody. Mezi její výhody patří především názornost a přehlednost grafu. Nevýhodami dané metody jsou časová náročnost oproti početnímu řešení a při rýsování dostáváme často pouze přibližný výsledek z důvodu nepřesnosti rýsování.

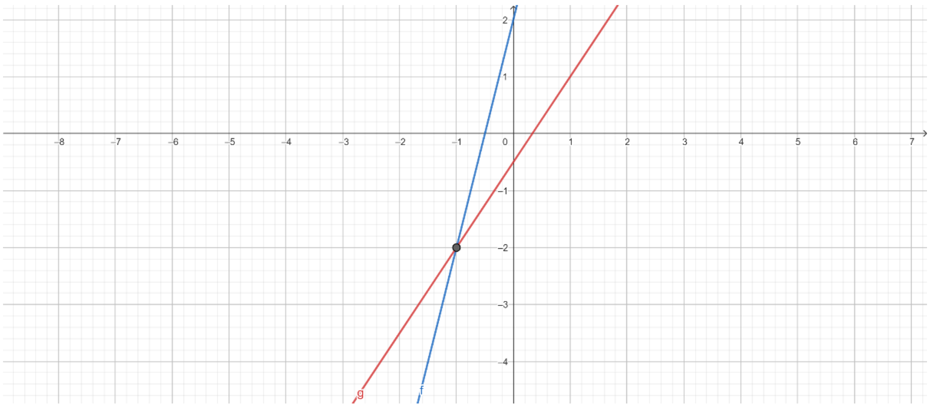
Dané rovnice si můžeme upravit na tvar lineární rovnice $ax + b = cx + d$, kde $a \neq c$. Vytvoříme graf funkce $f(x) = ax + b$, tedy levou stranu rovnice a graf funkce $g(x) = cx + d$, který nám tvoří pravou stranu rovnice. Grafem obou funkcí jsou přímky. Řešením lineární rovnice bude *x*-ová souřadnice průniku přímek v soustavě souřadnic (Zeman, 2023).

<u>Řešené úlohy</u>

Řešte graficky následující lineární rovnice:

a) $\mathbf{4x + 2 = \frac{3x-1}{2}}$

$f(x) = 4x + 2;\ g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$



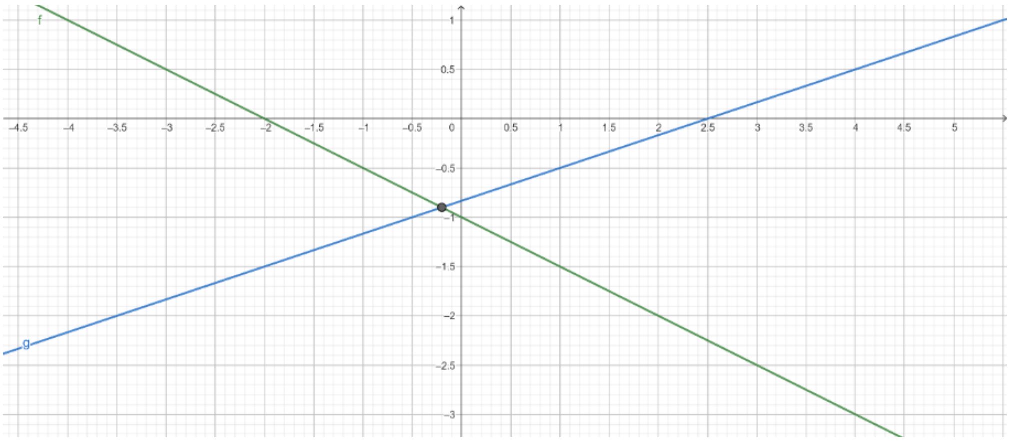
Obr. 10 – Graf funkcí $f(x) = 4x + 2;\ \ g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Množinou řešení zadané lineární rovnice bude *x*-ová souřadnice průsečíku obou přímek na obrázku č. 10, kterým je bod [-1; -2].

$\boldsymbol{K = \{-1\}}$

b) $$-\mathbf{1}-\frac{\mathbf{3x-x}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{2x-5}}{\mathbf{6}}$$

$$f(x)=-\frac{x}{2}-1;\ g(x)=\frac{x}{3}-\frac{5}{6}$$

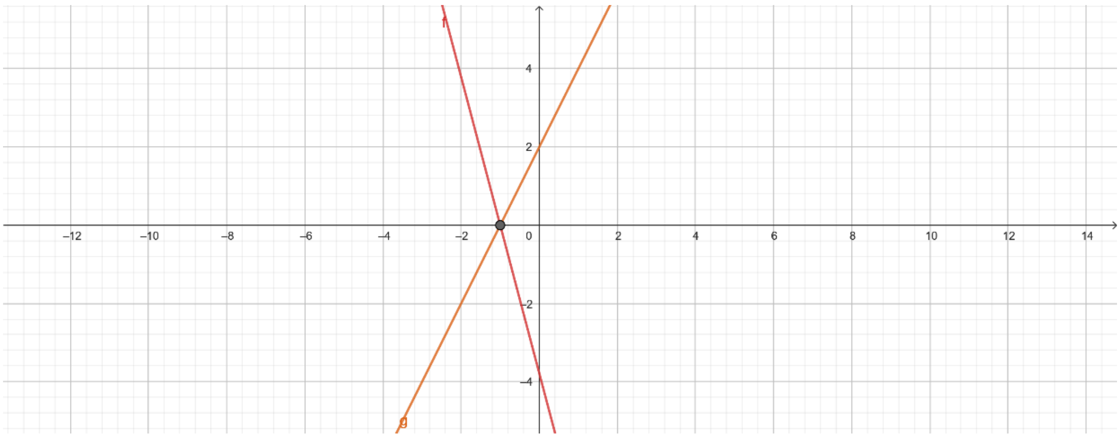


Obr. 11 – Graf funkcí $f(x)=-\frac{x}{2}-1;\ g(x)=\frac{x}{3}-\frac{5}{6}$

$$\boldsymbol{K}=\left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right\}$$

c) $$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{5}-\mathbf{3x})-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}(\mathbf{4x}+\mathbf{11})=\mathbf{2x}+\mathbf{2}$$

$$f(x)=-\frac{53}{14}x-\frac{53}{14};\ g(x)=x+1$$



Obr. 12 – graf funkcí $f(x)=-\frac{53}{14}x-\frac{53}{14};\ g(x)=x+1$

$$\boldsymbol{K}=\{-\mathbf{1}\}.$$

Kapitola 3

V kapitole číslo tři se budeme zabývat algebraickými rovnicemi, kde polynom je stupně dva a nazýváme je rovnicemi kvadratickými.

3. Kvadratické rovnice

Definice 3.1.1. *Kvadratická rovnice* (neboli algebraická rovnice druhého stupně) je rovnice ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a \neq 0$ a koeficienty $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Člen ax^2 se nazývá kvadratický člen, bx lineární člen a c absolutní člen.

Název kvadratická rovnice se začal využívat až v 1. polovině 18. století, kdy tento název poprvé použil Němec *Christian Wolff* (1679-1754). V dřívějších dobách se o kvadratických rovnicích mluvilo jen jako o rovnicích 2. stupně (Polák, 2014).

Při řešení kvadratické rovnice můžou nastat dva případy pro množinu řešení. Prvním případem je, že nám vyjdou dvě různá řešení rovnice v $\mathbb{C}$. Dále může nastat případ, kdy nám vyjde tzv. dvojnásobný reálný kořen.

Historie kvadratických rovnic je velmi bohatá. Už v období Babylonu (asi 400 př. n. l.) byli lidé schopni řešit problémy, které v dnešní době zapisujeme v podobě kvadratických rovnic. V této době řešili Babyloňané rovnice metodou doplnění na čtverec. Daná metoda se přibližně ve stejnou dobu nebo o pár let později vyskytovala i v dokumentech z Číny. Samozřejmě v té době nešlo o nějaký matematický postup, ale pouze o nějaké poučené hádání (Willers, 2012). Všechny problémy, které lidstvo v té době řešilo, byly pro kladné veličiny, protože většinou představovaly délku. První pokusy o nalezení obecného vzorce pro řešení kvadratické rovnice přichází asi z roku 300 př. n. l., kdy Euklides našel obecný postup pro řešení rovnice. Daný postup byl geometrický. V 7. století přišel s obecným řešením kvadratické rovnice hinduistický matematik *Brahmagupta* (598-668), který mimo jiné využil i iracionální čísla, s nimiž se potýkal už i Euklides. S řešením, které známe dnes, přišel kolem roku 1100 n. l. hinduistický matematik *Baskhara*. Další, kdo se snažil odvodit řešení kvadratické rovnice, byl Al-Chorezmí, který ale odmítal záporné řešení. Moderní matematika se zrodila až roku 1637, kdy *René Descartes* publikoval *La Géométrie*, kde byl publikován vzorec pro řešení kvadratické rovnice, jak ho známe dnes (Bečvář, 1999).

3.1. Metoda podle Al-Chorezmího

Tato metoda pochází z díla *Hisáb al-džabr wa-l-muqábala* od autora Al-Chorezmího. Metoda vychází z pravidla, že se kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ upraví na jeden z šesti tvarů. Výhodou metody v té době bylo, že se mohli tímto způsobem vyhnout problémům, které pro ně představovala záporná čísla.

Princip tohoto řešení vychází z předpisu kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou čísla a ax^2 nám představuje čtverec, bx nám představuje kořen a c nám představuje číslo různé od nuly. Al-Chorezmí ve svém díle popisuje šest tvarů, na které můžeme rovnici převést, abychom se dostali k řešení kvadratické rovnice.

1) <u>Tvar $ax^2 = bx$ (čtverec rovný kořenu)</u>
   Např. $2x^2 = 3x$, zde bychom vydělili obě strany rovnice 2 a dostaneme $x^2 = \frac{3}{2}x$, kde řešením rovnice by vyšlo $\frac{3}{2}$. Al-Chorezmí vycházel z toho že by se $x^2 = x \cdot x$, z čeho je pak patrné řešení rovnice $x \cdot x = \frac{3}{2}x$. Druhé řešení by očividně mělo být 0, ale to Al-Chorezmí ve svém díle neuváděl.
2) <u>Tvar $ax^2 = c$ (čtverec rovný číslu)</u>
   Danou rovnici, bychom řešili izolací neznámé x, takovým způsobem, že bychom vydělili rovnici a a určili odmocninu.
3) <u>Tvar $bx = c$ (kořen rovný číslu)</u>
   Daná rovnice je rovnicí lineární, tedy bychom ji řešili metodami pro rovnice lineární.
4) <u>Tvar $ax^2 + bx = c$ (čtverec a kořen roven číslu)</u>
   Daná úloha vede na řešení rovnice pomocí metody doplnění na čtverec (viz. str. 26).
5) <u>Tvar $ax^2 + c = bx$ (čtverec a číslo rovno kořenu)</u>
   Daná úloha vede na řešení rovnice pomocí metody doplnění na čtverec (viz. str. 26).
6) <u>Tvar $bx + c = ax^2$ (kořen a číslo rovno čtverci)</u>
   Daná úloha vede na řešení rovnice pomocí metody doplnění na čtverec (viz. str. 26), (Willers, 2012).

3.2. Metoda doplnění na čtverec

Tato metoda využívá úpravy zadané kvadratické rovnice pomocí vztahů druhé mocniny $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Metodu využívali už Babyloňané. V této době nešlo ještě o matematický postup, ale pouze o nějaké poučné hádání. Teprve v díle *Hisáb al-džabr wa-l-muqábala* od autora Al-Chorezmího se nachází algoritmus, který popisuje tuto metodu. Tato metoda neslouží jen k nalezení kořenů kvadratické rovnice, ale můžeme ji také využít pro integrování nebo pro práci s kuželosečkami (WIllers, 2012).

<u>Řešené úlohy:</u>

V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:

a) $\boldsymbol{x^2 + 12x + 24 = 0}$

V rovnici využijeme vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, tedy musíme najít b.

$(x^2 + 12x + 6^2) - 6^2 + 24 = 0$

Pomocí vztahu jsme zjistili, že hodnota $b = 6$. Protože jsme přidali 6 do vztahu, musíme 6 i odečíst, abychom dodrželi rovnost.

$(x + 6)^2 - 12 = 0$

$(x + 6)^2 = 12$

Po doplnění na čtverec nyní můžeme zjistit kořeny tak, že za x dosadíme hodnoty, které vyhovují dané rovnosti.

$\boldsymbol{x_1 = -2\sqrt{3} - 6}$

$\boldsymbol{x_2 = 2\sqrt{3} - 6}$

$\boldsymbol{K = \{-2\sqrt{3} - 6; 2\sqrt{3} - 6\}}$

b) $\boldsymbol{x^2 + 2x + 5 = 0}$

$(x^2 + 2x + 1) - 1 + 5 = 0$

$(x + 1)^2 + 4 = 0$

$(x + 1)^2 = -4$

$\boldsymbol{x_1 = -3}$

$\boldsymbol{x_2 = 1}$

$\boldsymbol{K = \{-3; 1\}}$

c) $\boldsymbol{(2x^2 + 6x + 4) = 0}$

$\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = -2 + \frac{9}{4}$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\boldsymbol{x_1 = -2}$

$\boldsymbol{x_2 = -1}$
$\boldsymbol{K = \{-2; -1\}}$

3.3. Metoda využití diskriminantu

Tato metoda je nejčastější využívanou metodou v dnešní době. Učí se na střední škole a měl by ji znát každý, kdo střední školu vystudoval. Historie vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice sahá do 9. století n. l., kde *Šrídhára*, indický matematik, vytvořil vzorec pro výpočet kvadratické rovnice. Šrídhára předpokládal tento vzorec pouze pro jeden kořen. Vzorec, který je známý v dnešní podobě, byl dílem evropských matematiků v čele s Girolamem Cardanem. Vzorec vznikl úpravami předpisu kvadratické rovnice a využitím metody doplnění na čtverec. Výsledným vzorcem je tedy vzorec $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$.

<u>Odvození vzorce:</u>

Při odvozování vzorce pro výpočet kvadratické rovnice se vychází z tvaru kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

pro kterou platí podmínka $a \neq 0$.

1. krok – vydělíme rovnici koeficientem a … $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$

2. krok – využijeme metodu doplnění na čtverec pro $x^2 + \frac{bx}{a}$ … $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

3. krok – převedeme výrazy bez x na pravou stranu … $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

4. krok – pravou stranu upravíme na společného jmenovatele a odmocníme …

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

5. krok – zbavíme se absolutní hodnoty a převedeme výrazy bez x na pravou stranu …

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

6. krok – vyřešíme absolutní hodnotu a

$a < 0$ … výsledný vzorec bude $x_1 = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a > 0$ … výsledný vzorec bude $x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Výsledný vzorec pro obě možnosti je stejný. Dále pro zjednodušení, přehlednost a určení počtu řešení se výraz pod odmocninou počítá zvlášť a nazývá se *diskriminant* (Weisstein, 2023).

Počet řešení v $\mathbb{R}$ vůči diskriminantu: D>0 … máme dvě různá řešení v oboru reálných čísel

D=0 … máme jeden dvojnásobný kořen v oboru reálných čísel

D<0 … v oboru reálných čísel neexistují kořeny, ale existují dva komplexně sdružené imaginární kořeny.

<u>Řešené úlohy</u>

V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnici:

a) $\boldsymbol{\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0}$ (jedná se o iracionální, nealgebraickou rovnici, po úpravách vede na algebraickou rovnici)

$$x+8-2\sqrt{(x+8)(5x+20)}+5x+20=4$$
$$6x+24=2\sqrt{5x^2+60x+160}$$
$$9x^2+72x+144=5x^2+60x+160$$
$$x^2+3x-4=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}$$
$$x_1=-4;\ x_2=1$$

Zkouška pro $\boldsymbol{x_1}$ $=-4$ … $\mathbf{L}$: $\sqrt{-4+8}-\sqrt{5(-4)+20}+2=\sqrt{4}-\sqrt{0}+2=2-0+2=4$

$\mathbf{P}$: 0

$\mathbf{L}\neq\mathbf{P}$ … číslo x_1 nevyhovuje zadané rovnici

Zkouška pro $\boldsymbol{x_2}$ $=1$ … $\mathbf{L}$: $\sqrt{1+8}-\sqrt{5(1)+20}+2=\sqrt{9}-\sqrt{25}+2=3-5+2=0$

$\mathbf{P}$: 0

$\mathbf{L}=\mathbf{P}$ … číslo x_2 vyhovuje zadané rovnici

$\boldsymbol{K}=\{\mathbf{1}\}$

b) $\boldsymbol{\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-6}{x+6}=\frac{11}{5}}$

$$5(x^2+6x+3x+18)+5(x^2-3x-6x+18)=11(x^2+6x-3x-18)$$
$$-x^2-33x+378=0$$
$$x_{1,2}=\frac{33\pm\sqrt{1089+4(378)}}{-2}=\frac{33\pm51}{-2}$$

$\boldsymbol{K}=\{\mathbf{-42};\mathbf{9}\}$

V oboru $\mathbb{C}$ řešte následující rovnice:

a) $\boldsymbol{2x^2 + 6x + 9 = 0}$

$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 36 - 72 = -36 = 36i^2$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm i\sqrt{36}}{4} = \frac{-6 \pm 6i}{4}$

$\boldsymbol{K = \left\{\frac{-3-3i}{2}; \frac{-3+3i}{2}\right\}}$

b) $\boldsymbol{\frac{x-2}{x} - \frac{x-1}{3} = \frac{1}{3x}}$

$3(x-2) - x(x-1) = 1$

$x^2 - 4x + 7 = 0$

$x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 2 \pm i\sqrt{3}$

$\boldsymbol{K = \left\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}\right\}}$

c) $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1 - 2i = 0}$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 + 8i}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2i}}{2} = 1 \pm \sqrt{2i}$

Z důvodu imaginární jednotky pod odmocninou hledáme odmocniny z imaginárního diskriminantu.

$a + bi = \sqrt{2i}$ … $z = \sqrt{2i}$

$\underline{a^2 + 2abi - b^2 = 2i}$

$a^2 - b^2 = 0$

$\underline{2ab = 2}$

$ab = 1$ … $a = \frac{1}{b}$ … po vyjádření a ze vztahu dosadíme do vztahu $a^2 - b^2 = 0$

$\left(\frac{1}{b^2}\right) - b^2 = 0$

$1 - b^4 = 0$

$b_1^2 = -1$ … číslo není kořenem

$b_2^2 = 1$ … číslo je kořenem

$b = \pm 1$

Vyjádřili jsme b a dopočítáme a, poté můžeme hodnoty dosadit do předpisu pro komplexní číslo a dostaneme kořeny pro zadanou kvadratickou rovnici.

$b_1 = 1 \ldots a_1 = 1 \ldots z_1 = 1 + 1i$

$b_2 = -1 \ldots a_2 = -1 \ldots z_2 = -1 - 1i$

$x_{1,2} = 1 \pm (1 + 1i)$

$\boldsymbol{K = \{-i; 2 + i\}}$

3.4. Vzorec pro kořeny kvadratické rovnice

V minulé kapitole (3.4.) jsme si ukázali vzorec pro kořeny kvadratické rovnice, který je známý ze školské matematiky. Samozřejmě se nejedná o jediný vzorec, který existuje. V této kapitole si ukážeme další vzorec, který je velmi podobný vzorci současnému. Jedná se o vzorec

$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$ (Weisstein, 2023).

<u>Odvození vzorce</u>: $ax^2 + bx + c = 0$

1. vydělíme rovnici x^2… $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$

2. vytkneme c… $c\left(\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx}\right) + a = 0$

3. $c\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{2c}\right)^2 = c\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - a = \frac{b^2}{4c} - \frac{4ac}{4c} = \frac{b^2-4ac}{4c}$

4. Proto $\frac{1}{x} + \frac{b}{2c} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

5. osamostatníme x … $x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$

<u>Řešená úloha</u>

V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:

a) $\boldsymbol{x^2 - 3x + 4 = 0}$

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot (-4)}{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4}} = \frac{-8}{3 \pm 5}$$

$\boldsymbol{K} = \{-4; 1\}$

3.5. Metoda rozkladem

Metoda využívá rozkladu kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$ na $(dx + e)(fx + h)$. Abychom určili koeficienty d, e, f, h, musíme rozložit kvadratický polynom na součin (Willers, 2012).

<u>Řešené úlohy:</u>

V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:

a) $\mathbf{6x^2 + 5x - 21 = 0}$ (ukázková úloha řešení metodou rozkladu)

1) Vynásobíme první a poslední koeficient polynomu na levé straně … $6 \cdot (-21) = -149$

2) Najdeme dvojici čísel, jejichž součin je roven -149 a součet je roven 5 … čísla $-9; 14$

3) Dvojici čísel nahradíme lineární člen v předpisu … $6x^2 + 14x - 9x - 21 = 0$

4) Najdeme společné dělitele … $2x(3x + 7) - 3(3x + 7) = 0$

5) Rozložíme na součin pomocí vytýkání … $(3x + 7)(2x - 3) = 0$

6) Vyřešíme dvě lineární rovnice, ze kterých dostaneme kořeny původní kvadratické rovnice

$(3x + 7) = 0$ $\qquad$ $(2x - 3) = 0$

$\boldsymbol{x_1 = -\frac{7}{3}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{3}{2}}$

$\boldsymbol{K = \left\{-\frac{7}{3}; \frac{3}{2}\right\}}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} = \frac{5}{6}}$ (nejedná se o algebraickou rovnici, po úpravách vede na algebraickou rovnici)

$$\frac{x+2}{x-3} - 2\sqrt{\frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+2)}} + \frac{x-3}{x+2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$\frac{x+2}{x-3} - 2 + \frac{x-3}{x+2} = \frac{25}{36}$$
$$x^2 - x - 42 = 0$$

$1 \cdot (-42) = -42$, tedy jaká dvě čísla vyhovují součinu -42 a součtu -1?

Vyhovují čísla 6; -7.

$$x^2 + 6x - 7x - 42 = 0$$
$$x(x + 6) - 7(x + 6) = 0$$
$$(x + 6)(x - 7) = 0$$

$\boldsymbol{x_1 = -6; x_2 = 7}$ **–** provedeme zkoušku, protože jsme provedli neekvivalentní úpravu umocnění

Zkouška: pro $x_1 = -6$:

L: $\sqrt{\frac{-6+2}{-6-3}} - \sqrt{\frac{-6-3}{-6+2}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}$

P: $\frac{5}{6}$

$\mathbf{L \neq P}$ … x_1 nevyhovuje zadané rovnici

Zkouška: pro $x_2 = 7$

L: $\sqrt{\frac{7+2}{7-3}} - \sqrt{\frac{7-3}{7+2}} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

P: $\frac{5}{6}$

$\mathbf{L} = \mathbf{P}$ ... x_2 vyhovuje zadané rovnici

$\boldsymbol{K} = \{\mathbf{7}\}$

3.6. Vietovy vzorce pro kvadratické rovnice

Vietovy vzorce jsou vzorce, které vyjadřují vztah mezi kořeny a koeficienty algebraické rovnice. Díky tomuto faktu můžeme kvadratické rovnice řešit pomocí Vietových vztahů. Metoda spočívá v principu, že si kvadratickou rovnici upravíme na normovaný tvar, tedy na tvar, kdy koeficient kvadratického členu je roven 1. Podle Vietových vzorců platí pro kořeny x_1, x_2 následující vztahy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Daná metoda je pojmenována po francouzském matematikovi a astronomovi *Francois Viétovi* (1540-1603), který vystudoval práva na Univerzitě v Poitiers. Ačkoli vystudoval práva, tak se proslavil v odvětví matematiky a astronomie. Viete se proslavil především tím, že měl velký vliv na formování moderní algebry. Jedním z jeho významných děl byla kniha z roku 1591 *In artem analyticam isagoge*. Kniha pojednává o algebře, také je v ní popsán vznik symbolické algebry a definice pojmu rovnice. Dále je v ní uvedena metoda řešení rovnic pomocí Vietových vztahů (Bečvář, 1999).

Obr. 13 – Francois Viete
Zdroj: fineartamerica.com

<u>Řešené úlohy:</u>

V ℝ řešte následující rovnice:

a) $\boldsymbol{x^2 + 2x - 8 = 0}$

$x_1 + x_2 = -2$ ... $2 + (-4) = -2$

$x_1 \cdot x_2 = -8$ ... $2 \cdot (-4) = -8$

Tedy $\boldsymbol{x_1 = 2}$; $\boldsymbol{x_2 = -4}$

$\boldsymbol{K = \{-4; 2\}}$

b) $\boldsymbol{3x^2 - 17x + 10 = 0}$

$x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{10}{3} = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{17}{3}$-> $5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{10}{3}$-> $5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

Tedy $\boldsymbol{x_1 = 5}$; $\boldsymbol{x_2 = \frac{2}{3}}$

$\boldsymbol{K = \left\{\frac{2}{3}; 5\right\}}$

c) $\boldsymbol{2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 1}$ (nejedná se o algebraickou rovnici, po úpravách vede na kvadratickou rovnici)

$4(x-1) \cdot 4\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+4} + (x+4) = 1$

$4\sqrt{x-1}\sqrt{x+4} = 5x - 1$

$25x^2 - 10x + 1 = 16x^2 + 48x - 64$

$9x^2 - 58x + 65 = 0$

$x^2 - \frac{58}{9}x + \frac{65}{9} = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{58}{9} \dots 5 + \frac{13}{9} = \frac{58}{9}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{65}{9} \dots 5 \cdot \frac{13}{9} = \frac{65}{9}$

Tedy $\boldsymbol{x_1 = 5}$; $\boldsymbol{x_2 = \frac{13}{9}}$

Zkouška: pro $x_1 = 5$

$\mathbf{L}$: $2\sqrt{5-1} - \sqrt{5+4} = 4 - 3 = 1$

$\mathbf{P}$: 1

$\mathbf{L = P}$ … x_1 je řešením zadané rovnice

pro $x_2 = \frac{13}{9}$

$\mathbf{L}$: $2\sqrt{\frac{13}{9} - 1} - \sqrt{\frac{13}{9} + 4} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3} = -1$

$\mathbf{P}$: 1

$\mathbf{L \neq P}$ … x_2 není řešením zadané rovnice

$\boldsymbol{K = \{5\}}$

3.7. Metoda grafického řešení kvadratické rovnice

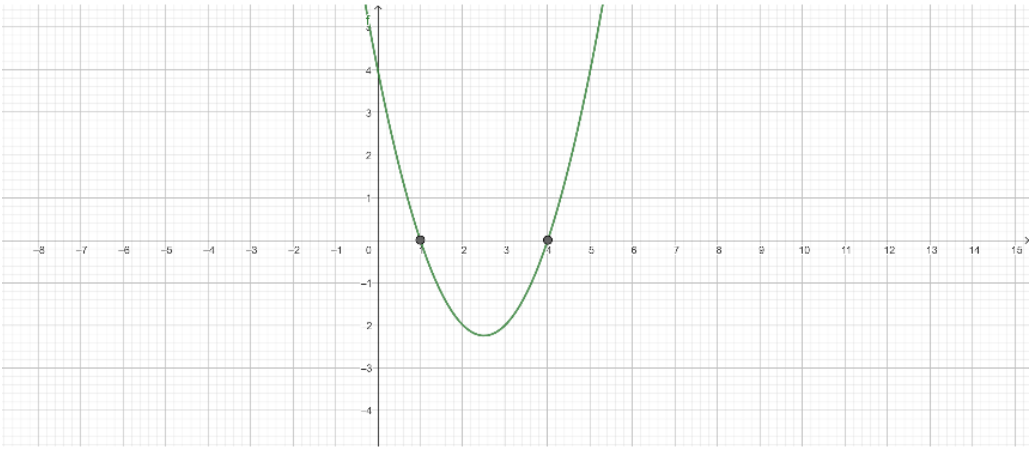
Tato metoda využívá grafu kvadratické funkce, tedy paraboly. Princip spočívá v tom, že hledáme proměnné kvadratické funkce s funkční hodnotou $f(x) = 0$. Hledanými kořeny tedy budou průsečíky paraboly s osou *x*. U metody je velkou výhodou, že je názorná. Samozřejmě má svou nevýhodu, kterou je časová náročnost oproti jiným metodám. Po narýsování paraboly nám můžou vzniknout tři případy řešení. Prvním z nich je pokud parabola protne osu *x* ve dvou bodech. Tím pádem nám vyjdou dvě různá reálná řešení kvadratické rovnice. Dalším případem je, kdy parabola protkne osu *x* v jednom bodě. V tomto případě je řešením jeden dvojnásobný reálný kořen. Poslední situace, která může nastat, je, pokud parabola nebude mít s osou *x* žádný společný bod. Tedy zjistíme, že rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Řešené úlohy: **V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:**

a) $\frac{x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x+5}=\frac{x(x-1)+12}{x(x+8)+15}$

$(x+1)(x+5)-(x-1)(x+3)=x^2-x+12$

$x^2-5x+4=0$



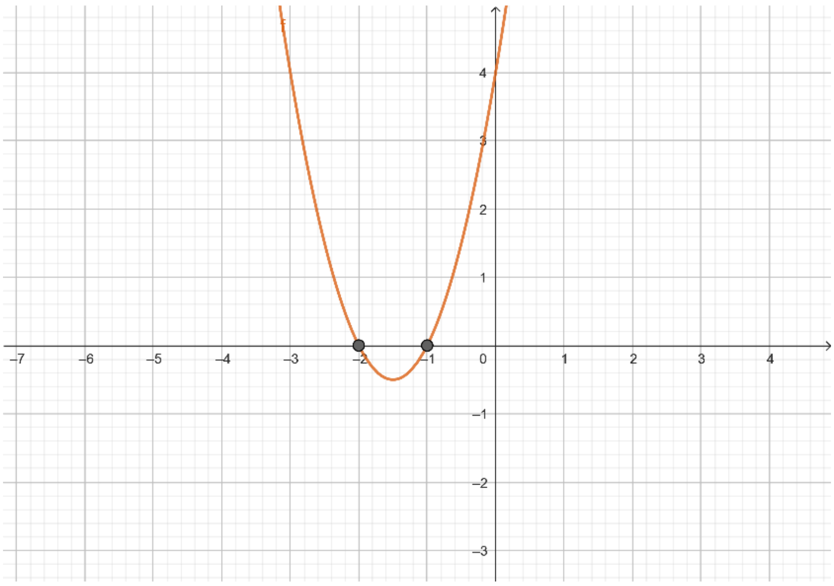
Obr.14 – graf funkce y= x^2-5x+4

Z obrázku č.14 vidíme, že existují dva průsečíky paraboly s osou *x*, a tedy budou existovat dvě řešení kvadratické rovnice.

$\boldsymbol{K=\{1;4\}}$

b) $\frac{x}{x+3}+\frac{x+3}{x}=\frac{5}{x(x+3)}$

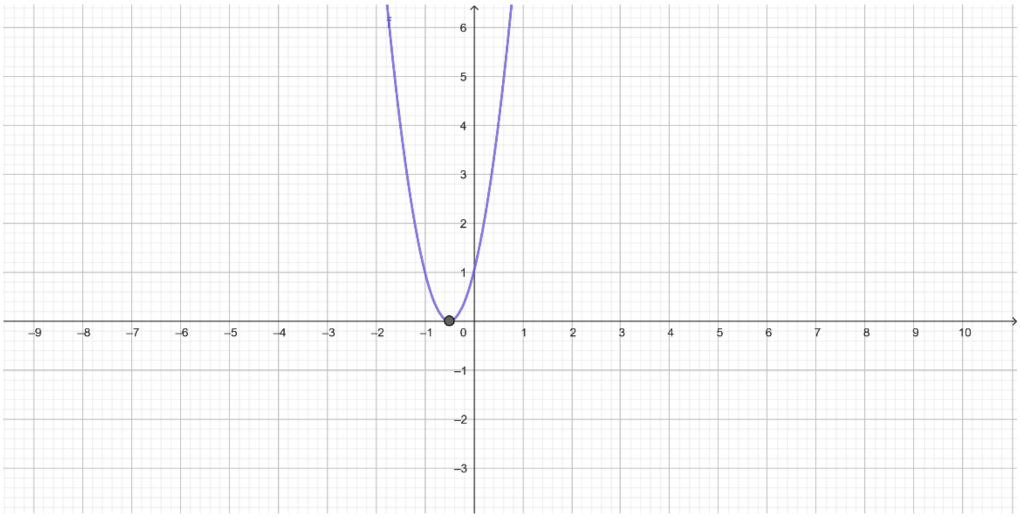
$2x^2+6x+4=0$



Obr. 15 – Graf funkce y=$2x^2+6x+4$

$\boldsymbol{K=\{-2;-1\}}$

c) $\mathbf{4x^2 + 4x + 1 = 0}$



Obr. 16 – graf funkce $y = 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$\boldsymbol{K = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$

Kapitola 4

V kapitole číslo čtyři se budeme zabývat rovnicemi kubickými, tedy rovnicemi, kde se nachází polynom stupně tři.

4. Kubické rovnice

Definice 4.1.1. *Kubické rovnice* (neboli algebraické rovnice třetího stupně) jsou rovnice ve tvaru

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

kde $a \neq 0$ a koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

V daném předpisu nám vyjadřuje člen ax^3 kubický člen, bx^2 kvadratický člen, cx lineární člen a d absolutní člen.

Úlohy vedoucí na výpočet kořenů kubických rovnic řešili už ve starověké Mezopotámii, kde dokázali však vyřešit pouze nějaké speciální případy. K řešení využívali pouze tabulky. Například se snažili vyřešit úlohu $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$, kterou dokázali vyřešit pomocí nahlédnutím do tabulek pro součet druhých a třetích mocnin, ze kterých byli schopni zjistit, že $12x = 6$, tedy $x = \frac{1}{2}$. První, kdo se podrobně zabýval kubickými rovnicemi, byli Řekové, kteří řešili kubické rovnice geometricky. Další, kdo se zabýval geometrickým řešením kubických rovnic, byl perský filozof a básník Omar Chajjám. Ten přišel na řešení průniku dvou kuželoseček, kde vznikly pouze jeden nebo dva kořeny. Kubickými rovnicemi se zabýval i františkánský mnich Luca Pacioli, který na konci svého díla *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* zveřejnil, že najít řešení rovnice stupně tři lidé zatím neumí.

Zajímavou událostí v historii kubických rovnic byl matematický souboj v první polovině 16. století. První, kdo přišel na metodu řešení kubické rovnice, byl Ital Scipione del Ferro, který uměl řešit rovnice typu $x^3 + ax = b$, kde $a, b > 0$. Del Ferro svou metodu dlouho tajil. Těsně před svou smrtí se ale rozhodl, že svou metodu prozradí svému žákovi Antonu Maria Fioreovi, který se s touto metodou nakonec utkal v souboji s výraznou osobností tehdejší doby Tartagliem. Souboj vyhrál Tartaglia, když vyřešil všechny úlohy, které mu zadal Del Ferro. Druhý den po vítězství, došel Tartaglia i k metodě pro řešení rovnice typu $x^3 = ax + b$, kde $a, b > 0$. Dané metody byly popsané až v díle *Ars magna* od autora Girolama Cardana (Mareš, 2011).

4.1. Metoda odmocňování

Metoda pochází z 16. století, kdy byl vzorec pro výpočet kubické rovnice zveřejněn v jednom z matematických textů. Bohužel se dodnes nepovedlo nikomu zjistit, kdo je autorem tohoto textu. Tato metoda řeší kubické rovnice ve tvaru

$$x^3 + px^2 + qx = r.$$

V této sbírce je popsán vzorec pro výpočet jednoho kořenu, protože platí jen pro $p^2 = 3q$. Vzorec zní: $x = \sqrt[3]{\left(\left(\frac{q}{p}\right)^3 + r\right)} - \frac{q}{p}$ (Juškevič, 1978).

<u>Řešená úloha</u>

Úloha z rukopisu z 16. století

$\boldsymbol{x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000}$

Danou rovnici vyřešíme dosazením do vzorce *x*= $\sqrt[3]{\left(\left(\frac{q}{p}\right)^3 + r\right)} - \frac{q}{p}$, tedy řešením rovnice bude množina $\boldsymbol{K = \left\{\sqrt[3]{1200} - 20\right\}}$**.**

4.2. Cardanovy vzorce

Tato metoda, kterou si pro zjištění kořenů kubických rovnic uvedeme, jsou Cardanovy vzorce. Vzorce jsou pojmenované po matematikovi *Girolamo Cardanovi*, který vzorce zveřejnil v dílu *Ars Magna*. Ale jestli daný vzorec vymyslel až Cardano nebo ho znal už *Tartaglia* či *Del Ferro,* už nevíme. Metodu, která zde byla popsaná, můžeme dnes vyjádřit tzv. Cardanovými vzorci. V té době počítali kubické rovnice bez kvadratického členu.

V té době uvažovali pouze jeden kořen pro řešení kubické rovnice, ale v současné době už umíme odmocňovat záporná čísla a známe čísla komplexní, proto zjistíme tři kořeny pro kubické rovnice (Bečvář, 1999).

<u>Odvození Cardanových vzorců:</u>

Vycházíme z kubické rovnice $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, kde $a \neq 0$. (1)

1. krok – Převedeme na normovaný tvar a zavedeme substituci $y = x + \frac{b}{3a}$, kdy nám vypadne kvadratický člen a dostaneme redukovaný tvar rovnice

$$y^3 + py + q = 0. \quad (2)$$

2. krok – Dostali jsem redukovaný tvar rovnice. Zavedeme si nově dvě neznáme u, v, pro které bude platit $u + v = y$ a dosadíme do rovnice (2)

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \quad (3)$$

3. krok – Předpokládáme, že $(3uv + p) = 0$, proto musí platit $uv = -\frac{p}{3}$.

Potom $u^3 + v^3 = -q$ a $u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$, kde $u^3;\ v^3$ můžeme chápat jako kořeny kvadratické rovnice (kořeny zjistíme pomoci Vietových vztahů)

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0. \ (4)$$

Rovnici (4) nazýváme *kvadratická rezolventa* kubické rovnice (1).

4. krok – Kořeny rovnice tedy budou ve tvaru $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$ a dále budeme řešit binomické rovnice

$$u^3 - \alpha = 0 \text{ a } v^3 - \beta = 0 \ (5),$$

kde α, β jsou řešením kvadratické rezolventy z kroku (4).

5. krok – Pokud dodržíme podmínku $uv = -\frac{p}{3}$, tak řešením binomické rovnice (5), jsou kořeny u, v pro které platí $uv = -\frac{p}{3}$.

6. krok – Kořeny rovnice bez kvadratického členu (2) jsou $u + v, \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \varepsilon^2 u + \varepsilon v$, kde ε je libovolná primitivní třetí odmocnina z 1.

7. krok – Pokud jsme našli kořeny kubické rovnice bez kvadratického členu (2), tak kořeny kubické rovnice (1) najdeme jednoduše, když se vrátíme k první substituci.

Abychom poznali, jaké tři kořeny nám vyjdou, můžeme využít vztahu $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, který platí pro komplexní koeficienty.

Pro reálné koeficienty zjistíme pokud: $D = 0$, má rovnice jeden jednoduchý reálný kořen a jeden dvojnásobný reálný kořen.

$D > 0$, má jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené imaginární kořeny.

$D < 0$, má rovnice tři různé reálné kořeny (Emanovský a Kühr, 2020).

Pokud nastane situace, že kvadratická rezolventa (4) kubické rovnice (1) vznikne druhá odmocnina záporného čísla, reálné kořeny budou vyjádřeny v komplexních číslech ($D < 0$). Tento případ se nazývá tzv. *casus irreducibilis*. Už Cardano řešil úlohy, kdy tento problém nastal. Jednalo se například o úlohu $x^3 + 26x = 12x^2 + 12$, kde kořeny této rovnice jsou $2; 5 + \sqrt{19}; 5 - \sqrt{19}$. Tento problém byl pro tehdejší matematiky nepochopitelný a nebyli schopni rovnici vyřešit. Až v 19. století dokázal matematik *Pierre Laurent Wantzel* (1814-1848), že pokud nastane situace casus irreducibilis, nebude možné reálné kořeny kubické rovnice vyřešit algebraicky pouze v reálném oboru. Abychom vyřešili tento problém zavedeme tzv. goniometrické řešení (Bečvář, 1999).

Postup:

Vycházíme z rovnice $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, která má reálné koeficienty

1.krok – zavedeme redukovaný tvar s podmínkou, že $D < 0$ a platí, že $p < 0$. Poté kořeny kvadratické rezolventy budou $-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-D}$.

2. krok – řešíme rovnice ve tvaru $u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}$ a $v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D}$.

3. krok – určíme kořeny ve tvaru $c_k = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \left(cos\,\frac{\varphi+2k\pi}{3} + i\,\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)$ pro $k = 0,1,2$,

$$\overline{c_k} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \left(cos\,\frac{\varphi+2k\pi}{3} - i\,\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right) \text{ pro } k = 0,1,2,$$

kde φ nám představuje hlavní hodnotu argumentu čísla $-\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}$, který zjistíme ze vzorce $cos\,\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$.

4. krok – určíme kořeny redukované rovnice, kterým jsou čísla $2 \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot cos\,\frac{\varphi+2k\pi}{3}$ pro $k = 0,1,2$.

Řešené úlohy:

V $\mathbb{C}$ řešte následující úlohy:

a) $\boldsymbol{x^3 - 9x^2 + 36x - 28 = 0}$

Musíme zjistit redukovaný tvar rovnice, proto zavedeme substituci

$$x = y - \frac{-9}{3} = y + 3.$$

Pro zjištění redukovaného tvaru použijeme Hornerovo schéma, které nám pomůže najít Taylorův rozvoj polynomu v bodě 3.

	1	**-9**	**36**	**-28**
3	1	-6	18	26
3	1	-3	9	
3	1	0		
3	1			

Ze schématu plyne, že redukovaný tvar rovnice je $y^3 + 9y + 26 = 0$.

Zjistíme $p; q$ … $p = 26; q = 9$.

Vypočítáme D … $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 = 169 + 27 = 196$.

Zjistíme u, v … $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{196} = -13 + 14 = 1 \Rightarrow u = 1$ (zvolíme jednu $\sqrt[3]{1}$)

$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{196} = -13 - 14 = -27 \Rightarrow v = -3$ (závislé na u podle vztahu $uv = -\frac{p}{3}$).

$y_1 = u + v = 1 - 3 = -2$

$$y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 (-3) = 1 + 2i\sqrt{3}$$

$$y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)(-3) = 1 - 2i\sqrt{3}$$

Vrátíme se k substituci:

$\boldsymbol{x_1 = 1}$

$\boldsymbol{x_2 = 4 + 2i\sqrt{3}}$

$\boldsymbol{x_3 = 4 - 2i\sqrt{3}}$

$\boldsymbol{K = \{1; 4 + 2i\sqrt{3}; 4 - 2i\sqrt{3}\}}$

b) $\boldsymbol{x^3 + 3x - 14 = 0}$ (Rovnice je v redukovaném tvaru, nemusíme zavádět substituci)

Určíme $p; q$ … $p = 3; q = -14$.

Vypočítáme D … $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2 = (-7)^2 + 1^3 = 50$ … jeden reálný a dva komplexně sdružené imaginární kořeny.

Zjistíme u, v … $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{50} = 7 + \sqrt{50} \Rightarrow u = 1 + \sqrt{2}$ (zvolíme jednu hodnotu)

$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{50} = 7 - \sqrt{50} \Rightarrow v = 1 - \sqrt{2}$ (závisí na u).

Zjistíme kořeny x_1, x_2, x_3

$\boldsymbol{x_1} = u + v = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = \boldsymbol{2}$

$$\boldsymbol{x_2} = \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \sqrt{2}) + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 (1 - \sqrt{2}) =$$

$= \boldsymbol{-1 + i\sqrt{6}}$

$$\boldsymbol{x_3} = \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 (1 + \sqrt{2}) + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \sqrt{2}) =$$

$= \boldsymbol{-1 - i\sqrt{6}}$

$\boldsymbol{K = \{2; -1 + i\sqrt{6}; -1 - i\sqrt{6}\}}$

4.3. Vietovy vzorce pro kubické rovnice

Další metodu, kterou si pro výpočet kubické rovnice uvedeme, jsou Vietovy vzorce. Tuto metodu jsme popsali už u kvadratických rovnic. V této kapitole si ukážeme, jak je využijeme u kubických rovnic.

Pro kubické rovnice ve tvaru

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

kdy pro kořeny x_1, x_2, x_3 platí následující Vietovy vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, x_1x_2x_3 = -r.$$

Vietovy vztahy byly popsané v jeho díle *De emendatione aequationum*, kde nebyly ještě popsány v dnešní symbolice. Původní znění Vietovych vztahů bylo *„Si A cubus* $\overline{-B - D - G}$ *in A quad.* $\overline{+B\ \iota n\ D + B\ \iota n\ G + D\ \iota n\ G}$ *in A, aequeter B in D in G: A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G“* (Bečvář, 1999).

<u>Řešená úloha</u>

V $\mathbb{C}$ řešte následující úlohu:

a) $\boldsymbol{x^3 - 7x - 6 = 0}$

Dosadíme do Vietových vztahů:

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7$

$x_1x_2x_3 = 6$

Z Vietových vztahů dostaneme:

$x_1 = -1$

$x_2 = -2$

$x_3 = 3$

$\boldsymbol{K = \{-1, -2, 3\}}$

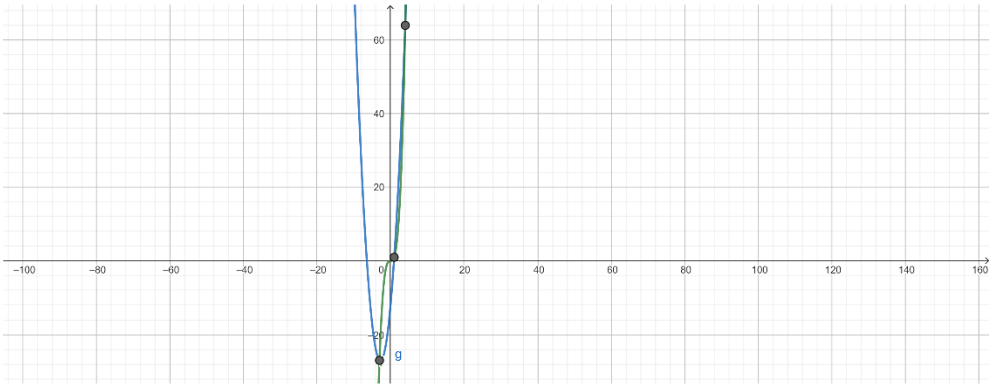
4.4. Metoda průsečíku kuželoseček

Metoda pochází z roku 1070, kdy na tuto metodu přišel perský matematik Omar Chajjám a popsal ji v jednom ze svých děl. Dokázal tedy, že kubické rovnice můžeme řešit pomocí průsečíků dvou kuželoseček. Chajjám v té době našel jedno nebo dvě řešení kubické rovnice. O třetím řešení v té době ještě neuvažoval.

Řešené úlohy: **Řešte metodou průsečíků kuželoseček následující rovnici:**

a) $\boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0}$, kterou si upravíme na tvar $x^3 = 2x^2 + 11x - 12$

$f(x): y = x^3$ a $g(x): y = 2x^2 + 11x - 12$



Obr. 17- graf funkcí $f(x)$ a $g(x)$

Z obrázku číslo 17 zjistíme souřadnice průsečíku a jejich x-ové souřadnice jsou kořeny zadané kubické rovnice.

$\boldsymbol{K = \{-3; 1; 4\}}$

Kapitola 5

V páté kapitole se budeme zabývat rovnicemi čtvrtého stupně, které nazýváme rovnicemi kvartickými.

5. Kvartické rovnice

Definice 5.1.1. *Kvartické rovnice* (neboli algebraické rovnice čtvrtého stupně) jsou rovnice ve tvaru

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

kde $a \neq 0$, a koeficienty $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$.

V dané rovnici člen ax^4 představuje kvartický člen, bx^3 kubický člen, cx^2 kvadratický člen, dx lineární člen a e absolutní člen.

Historie kvartických rovnic se nejvíce posunula v 16. století, a to především díky evropským matematikům. Řešením kvartických rovnic se zabýval především matematik Cardano se svým žákem Ferrarim. Bylo to právě Ferrari, který přišel na vzorec, díky kterému můžeme najít kořeny kvartické rovnice. A právě díky Ferrariho metodě přišel na řešení kvartické rovnice i Cardano (Bečvář, 1999).

5.1. Metoda Cardano

Italský matematik Girolamo Cardano v 16. století vymyslel tuto metodu řešení rovnice čtvrtého stupně. Cardano na tuto metodu mohl přijít díky svému žákovi Lodovici Ferrarimu, který už na metodu řešení kvartické rovnice přišel. Daná metoda využívá metody doplnění na čtverec.

<u>Postup:</u>

Cardano našel řešení dvou rovnic s kvartickým členem. První z nich byla rovnice ve tvaru

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + e = 0 \; (1),$$

kde $a \neq 0$.

Druhá rovnice byla ve tvaru

$$ax^4 + cx^2 + dx + e = 0 \; (2),$$

kde $a \neq 0$.

Rovnici (1) řešil Cardano tím, že zavedl vhodnou substituci, díky které rovnici upravil na rovnici (2). Rovnici (2) už Cardano řešil metodou doplnění na čtverec.

Postup: (ukázková úloha) $\boldsymbol{x^4 - 10x^2 + 4x + 8 = 0}$

1. Kvadratický člen dáme na pravou stranu a přičteme výrazy -7 a $-2x^2$, aby vznikl čtverec

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 - 4x - 7 \text{ (1)}$$

2. Potřebujeme na levé straně rovnice (1) dostat taky čtverec a zachovat čtverec vzniklý na pravé straně, a to přičtením výrazu $-2bx^2 + b^2 + 2b$.

$$[x^2 - (b+1)]^2 = (8 - 2b)x^2 - 4x + (b^2 + 2b - 7). \text{ (2)}$$

3. Na obou stranách rovnice (2) vznikl čtverec, kdy na pravé straně je diskriminant roven nule. Zde musíme upravit rovnici diskriminantu, aby nám vznikl vztah

$$b^3 + 30 = 2b^2 + 15b. \text{ (3)}$$

Z dané rovnice zjistíme, že řešení dané rovnice je 2.

4. Dosadíme hodnotu 2 za *b* znovu do rovnice a dostaneme rovnice

$$x^2 - 2x - 2 = 0. \text{ (4)}$$

5. Zjistíme kořeny rovnice (4), které jsou $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$

6. Dále pokud dosadíme za *b* číslo 2 můžeme taky dostat rovnici

$$x^2 + 2x - 4 = 0. \text{ (5)}$$

7. Zjistíme kořeny rovnice (5), které jsou $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{5}$

Cardano v té době předpokládal pouze kladná čísla, i když už o záporných číslech věděl, ale nepracoval s nimi, protože pro něj byla geometricky zbytečná.

$\boldsymbol{K = \{2; 1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{5}\}}$

5.2. Metoda Ferrari

Metodu vymyslel roku 1540 Lodovici Ferrari z Itálie. Metoda využívá principu redukce kvartické rovnice.

Postup: $\boldsymbol{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$

1. Využijeme substituci $x = y - \frac{a}{4}$, abychom dostali rovnici bez kubického členu

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \text{ (1)}$$

2. Zavedeme pomocný parametr α a dostaneme rovnici

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+\left(x^2+p\alpha+\frac{p^2}{4}-r\right)\right]=0. \ (2)$$

3. Zvolíme hodnotu pro α takovou, aby výraz v hranaté závorce v rovnici (2) tvořil čtverec a diskriminant kvadratického trinomu byl roven nule. Tím dostaneme kubickou rovnici pro α

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha+\frac{p^2}{4}-r\right)=0. \ (3)$$

4. Nechť α_0 je jedním z kořenů rovnice (3), pak pro $\alpha=\alpha_0$ polynom v hranaté závorce v rovnici (2) má jeden dvojnásobný kořen $x_0=\frac{q}{4\alpha_0}$, což vede na rovnici

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+x_0\right)^2-2\alpha_0(x-x_0)^2=0. \ (4)$$

Tato rovnice se nám rozdělila na dvě rovnice stupně dva, kde kořeny této rovnice jsou kořeny zadané kvartické rovnice (Proskuryakov, 2010).

Kapitola 6

V předposlední kapitole se budeme zabývat rovnicemi binomickými.

6. Binomické rovnice

Definice 6.1.1. *Binomická rovnice* je rovnice ve tvaru $x^n - a = 0$, kde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Binomické rovnice můžeme řešit pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Definice 6.1.2. Množina všech komplexních čísel, která vyhovují rovnici

$$x^n - a = 0,$$

se nazývá *množina řešení binomické rovnice*. Takovou množinu řešení můžeme najít algebraicky nebo goniometricky (Emanovský a Kühr, 2020)

Název binomické rovnice pochází z latinského slova binom, tedy dvojčlen, který máme na levé straně rovnice.

6.1. Algebraické řešení

Princip algebraického řešení binomické rovnice spočívá v tom, že polynom na levé straně rovnice rozložíme na součin polynomů nižších stupňů.

<u>Řešené úlohy</u>

V $\mathbb{C}$ řešte následující binomické rovnice:

a) $\boldsymbol{x^3 + 27 = 0}$

Polynom na levé straně rovnice rozložíme na součin polynomu pomocí vzorce $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ a vznikne nám rovnice

$$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9).$$

Vyřešíme lineární rovnici $x + 3 = 0$ a kvadratickou rovnici $x^2 - 3x + 9 = 0$, kdy kořeny těchto dvou rovnici budou kořeny zadané binomické rovnice.

1) $x + 3 = 0$

$\boldsymbol{x_1 = -3}$

2) $x^2 - 3x + 9 = 0$

$$\boldsymbol{x_{2,3}} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 9}}{2} = \boldsymbol{\frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}}$$

Řešením zadané binomické rovnice $x^3 + 27 = 0$ je množina

$\boldsymbol{K = \left\{-3; \frac{3-3i\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3i\sqrt{3}}{2}\right\}}$.

b) $\boldsymbol{x^4 - 1 = 0}$

$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

1) $x - 1 = 0$

$\boldsymbol{x_1 = 1}$

2) $x + 1 = 0$

$\boldsymbol{x_2 = -1}$

3) $x^2 + 1 = 0$

$$\boldsymbol{x_{3,4}} = \frac{+\sqrt{-4}}{-2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm \boldsymbol{i}$$

Řešením zadané binomické rovnice $x^4 - 1 = 0$ je množina

$\boldsymbol{K = \{-1; 1; -i; i\}}$.

6.2. Goniometrické řešení

Další způsob řešení binomické rovnice je způsob goniometrický. Goniometrické řešení binomické rovnice spočívá v tom, že využijeme vzorec

$$c_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\, sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

pro $k = 0,1, \dots, n - 1$, kde φ je hlavní hodnota argumentu čísla $a \in \mathbb{C}$ (Emanovský a Kühr, 2020).

<u>Řešené úlohy:</u>

V $\mathbb{C}$ řešte následující binomické rovnice:

a) $\boldsymbol{x^3 - 5 = 0}$

$a = 5$

$c_0 = \sqrt[3]{\boldsymbol{5}}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt[3]{\boldsymbol{5}}$

$$c_1 = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right)}$$

$$c_2 = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = \boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\left(-1 - \sqrt{3}i\right)}$$

$$\boldsymbol{K = \left\{\sqrt[3]{5}; \frac{\sqrt[3]{5}}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right); \frac{\sqrt[3]{5}}{2}\left(-1 - \sqrt{3}i\right)\right\}}$$

b) $\boldsymbol{x^5 + 4 + 4i = 0}$

$a = -4 - 4i \Rightarrow |a| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$

$$\boldsymbol{c_0} = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \cdot \left(cos\frac{\frac{5}{4}\pi}{5} + i\,sin\frac{\frac{5}{4}\pi}{5} \right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{1} + \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{c_1} = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \cdot \left(cos\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi}{5} + i\,sin\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi}{5} \right) = \sqrt{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{cos}\frac{\mathbf{13}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}} + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{sin}\frac{\mathbf{13}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}\right)$$

$$\boldsymbol{c_2} = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \cdot \left(cos\frac{\frac{5}{4}\pi + 4\pi}{5} + i\,sin\frac{\frac{5}{4}\pi + 4\pi}{5} \right) = \sqrt{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{cos}\frac{\mathbf{21}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}} + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{sin}\frac{\mathbf{21}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}\right)$$

$$\boldsymbol{c_3} = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \cdot \left(cos\frac{\frac{5}{4}\pi + 6\pi}{5} + i\,sin\frac{\frac{5}{4}\pi + 6\pi}{5} \right) = \sqrt{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{cos}\frac{\mathbf{29}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}} + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{sin}\frac{\mathbf{29}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}\right)$$

$$\boldsymbol{c_4} = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \cdot \left(cos\frac{\frac{5}{4}\pi + 8\pi}{5} + i\,sin\frac{\frac{5}{4}\pi + 8\pi}{5} \right) = \sqrt{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{cos}\frac{\mathbf{37}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}} + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{sin}\frac{\mathbf{37}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}\right)$$

Kapitola 7

V poslední kapitole se budeme zabývat rovnicemi reciprokými.

7. Reciproké rovnice

Definice 7.1.1. *Reciproká rovnice 1. druhu* je algebraická rovnice

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $a_n \neq 0$, když $a_{n-k} = a_k$ pro každé $k = 0, \dots, n$.

Definice 7.1.2. *Reciproká rovnice 2. druhu* je algebraická rovnice

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $a_n \neq 0$, když $a_{n-k} = -a_k$ pro každé $k = 0, \dots, n$.

Důležitou vlastností reciprokých rovnic je ta, že pokud číslo $z \in \mathbb{C}$ je řešením reciproké rovnice, tak řešením je i číslo $\frac{1}{z}$.

Další vlastností reciprokých rovnic je vlastnost, že číslo 1 je řešením reciproké rovnice 2. druhu a číslo -1 je řešením reciproké rovnice 1. druhu lichého stupně (Emanovský a Kühr, 2020).

Historie reciprokých rovnic není moc dlouhá. Prvním matematikem, který se zabýval reciprokými rovnicemi, byl francouzský matematik a fyzik *Abraham de Moivre* (1667-1754).

Obr. 18 – Isaac Newton
Zdroj: nationaltoday.com

Abraham de Moivre (1667-1754) byl francouzský matematik, který byl průkopníkem v oboru analytické geometrie a teorie pravděpodobnosti. Součástí jeho studia v mladí nebyla matematika, ale Moivre se rozhodl matematiku studovat ve svém volném čase. Dílo, které ovlivnilo nejvíce jeho budoucnost, bylo dílo anglického matematika *Issaca Newtona Principia.* Po příjezdu do Anglie se podařilo de Moivrovi potkat s Newtonem. Právě díky této schůzce se podařilo de Moivrovi vydat jeho první matematickou publikaci (O´Connor, 1999).

7.1. Metoda řešení reciproké rovnice

Metoda řešení využívá principu převedení reciproké rovnice na reciproké rovnice 1. druhu sudého stupně dělením polynomů pomocí kořenových činitelů $x \pm 1$. Kořenový činitel $x - 1$ se používá k převedení reciproké rovnice 2. druhu na reciproké rovnice 1. druhu lichého stupně a kořenový činitel $x + 1$ k převedení reciproké rovnice 1. druhu stupně lichého na reciprokou rovnici 1. druhu stupně sudého. Dále musíme vyřešit reciproké rovnice 1. druhu stupně sudého, kterou řešíme pomocí substituce $y = x + \frac{1}{x}$, kterou vymyslel italský matematik *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813).

<u>Řešené úlohy:</u> **V $\mathbb{C}$ řešte následující reciproké rovnice:**

a) $\boldsymbol{6x^6 + 13x^5 + 6x^4 - 6x^2 - 13x - 6 = 0}$ **(1)**

Jedná se o reciprokou rovnice 2. druhu … $x_1 = 1$

Potřebuje ji převést na reciprokou rovnici 1. druhu, pomocí kořenového činitele $x - 1$ (Využijeme Hornerova schématu)

	6	13	6	0	-6	-13	-6
1	6	19	25	25	19	6	0

Upravili jsme reciprokou rovnici na tvar

$$6x^5 + 19x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 19x + 6 = 0. \ (2)$$

Jedná se o reciprokou rovnici 1. druhu stupně lichého. Potřebujeme tedy upravit na reciprokou rovnici 1. druhu sudého stupě pomocí kořenového činitele $x + 1$ (Využijeme Hornerova schématu). Dalším kořenem rovnice (1) tedy bude $x_2 = -1$.

	6	19	25	25	19	6
-1	6	13	12	13	6	0

Upravená rovnice má tvar

$$6x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 13x + 6 = 0. \ (3)$$

Jedná se už o reciprokou rovnici 1. druhu stupně sudého. Danou rovnici vydělíme x^2. Po vydělení nám vyjde rovnice

$$6x^2 + 13x + 12 + \frac{13}{x} + \frac{6}{x^2} = 0. \ (4)$$

Upravíme rovnici na tvar

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0. \ (5)$$

Zde zavedeme substituci ve tvaru $y = \frac{1}{x}$. Po zavedení substituce dostaneme rovnici

$$6y^2 + 13y = 0. \ (6)$$

Z rovnice zjistíme, že řešením rovnice (6) jsou čísla$y_{1,2} = 0; -\frac{13}{6}$. Abychom zjistili řešení rovnice (1), vrátíme se k substituci. Poté zjistíme, že řešením rovnice jsou čísla $\pm i; -\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}$.

Množinou řešení zadané rovnice (1) je množina $\boldsymbol{K} = \left\{\pm \boldsymbol{i}; \pm \boldsymbol{1}; -\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}; -\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\right\}$.

b) $\boldsymbol{x^3 + x^2 + x + 1 = 0}$ (1)

Jedná se o reciprokou rovnici 1. druhu stupně lichého, a tedy řešením rovnice (1) je číslo $x_1 = -1$

Potřebujeme převést rovnici (1) na rovnici 1. druhu sudého stupně pomocí kořenového činitele $x + 1$ (Využijeme Hornerova schématu).

	1	1	1	1
-1	1	0	1	0

Dostaneme rovnici

$$x^2 + 1 = 0. \text{ (2)}$$

Zde nepotřebujeme využití substituce. Zjistíme řešení rovnice (2), které bude řešením i rovnice (1). Řešením rovnice (2) jsou čísla $\pm i$.

Množinou řešením rovnice (1) je množina $\boldsymbol{K} = \{-\boldsymbol{1}; \pm \boldsymbol{i}\}$.

Závěr:

Tato bakalářská práce se zabývala řešením algebraických rovnic a jeho historií. Cílem bakalářské práce bylo popsat problematiku řešení algebraických rovnic a jeho historický vývoj. Tento text by měl sloužit nejen studentům matematiky, ale i široké veřejnosti se zájmem o algebraické rovnice.

V první kapitole jsem se zaměřil na definici algebraické rovnice. Zmínil jsem zde, co je řešením algebraické rovnice. Uvedl jsem také, že algebraicky (též v radikálech) jsme schopni řešit pouze rovnice stupně nejvýše čtyři. Také bylo zmíněno, že pro každou algebraickou rovnici musí platit základní věta algebry. Dále jsem v této kapitole popsal historii algebraických rovnic a významné osobnosti, které se podílely na rozvoji algebraických rovnic.

V dalších kapitolách jsem podrobně rozebral jednotlivé algebraické rovnice (lineární, kvadratické, kubické, kvartické, reciproké a binomické). Uvedl jsem potřebné definice, historii daných rovnic a také různé metody pro zjištění řešení rovnic. Jsou zde uvedeny i vyřešené úlohy pro lepší pochopení metod řešení.

Literatura:

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. Algebra v 16. a 17. století. In: *Matematika v 16. a 17. století: seminář Historie matematiky III., Jevíčko, 18.8.-21.8.1997, Komise pro vzdělávání učitelů Jednoty českých matematiků a fyziků* [online]. Praha: Prometheus, 1999, s. 161-235 [cit. 2023-05-01]. ISBN 80-7196-150-7. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401579/DejinyMat_12-1999-1_10.pdf

[2] EMANOVSKÝ, Petr a Jan KÜHR. *Cvičení z algebry pro 1. ročník II*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2020. ISBN 978-80-244-5774-1.

[3] HESTERIC, Roman. *Priklady.eu* [online]. Ing. Roman Hesteric, c2008-2013 [cit. 2023-05-10]. Dostupné z: https://www.priklady.eu/cs/index.alej

[4] HOFFMAN, Brittany. *Famous Mathematicians: List and Biographies of Great Mathematicians* [online]. New York: Brittany Hoffman, c2019 [cit. 2023-05-09]. Dostupné z: https://www.famousmathematicians.net/

[5] JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve Středověku*. Praha: Academia, 1977. ISBN 509-21-857.

[6] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve Starověku*. Praha: Academia, 1968. ISBN 21-036-69.

[7] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

[8] *Mathnasium: The Math Learning Center* [online]. Westwood: Mathanasium, 2002 [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: https://www.mathnasium.com/

[9] MRÁZEK, Jiří. *Taje matematiky*. Praha: Kamarád, 1986. ISBN 24-025-86.

[10] O´CONNOR, John Joseph. *MacTutor History of Mathematics Archive* [online]. St. Andrews: University of St Andrew, 1999 [cit. 2023-05-09]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

[11] PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi : 250 milníků v dějinách matematiky*. Praha: Argo, 2012. Zip (Argo: Dokořán): Dokořán): Dokořán). ISBN 978-80-7363-368-4.

[12] POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7238-449-5.

[13] *Portál středoškolské matematiky* [online]. Praha: Univerzita Karlova v Praze, c2011 [cit. 2023-05-08]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/

[14] PROSKURYAKOV, I.V:. Ferrari method. *Encyklopedia of Mathematics* [online]. Berlín: The European Mathematical Society, 2010 [cit. 2023-05-09]. Dostupné z: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Ferrari_method

[15] ROBSON, Eleanor a Jacqueline STEDALL. *The Oxford Handbook of The History of Mathematics*. New York: Oxford University Press, 2009. ISBN 978-0-19-960319-0.

[16] ŠTEFAN, Schwarz. Některé zvláštní typy rovnic. In: *O rovnicích* [online]. Praha: Jednota českých a fysiků v Praze, 1940, s. 58-66 [cit. 2023-05-10]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/402954/CestaKVedeni_002-1940-1_8.pdf

[17] VYMAZALOVÁ, Hana. Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty [online]. Praha: Český egyptologický ústav FF UK, 2006 [cit. 2023-05-02]. ISBN 80-7308-156-3. Dostupné z: http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/401064

[18] WILLERS, Michael. *Algebra bez (m)učení: od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice*. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.

[19] WEISSTEIN, Eric Wolfgang. *WolframMathWorld* [online]. Illionois: Wolfram Research, c1999-2023 [cit. 2023-05-09]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/

[20] ZEMAN, Radek. Grafické řešení rovnic. *OnlineSchool.cz* [online]. Brno: Radek Zeman, c2023 [cit. 2023-05-31]. Dostupné z: https://onlineschool.cz/matematika/graficke-reseni-rovnic/