

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

STANOVENÍ POKLESU TLAKU NAPÁJECÍHO ČERPADLA V
ZÁVISLOSTI NA KMITÁNÍ HLADINY V
NAPÁJECÍCH NÁDRŽÍCH

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAROSLAV SŮKAL

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

STANOVENÍ POKLESU TLAKU NAPÁJECÍHO ČERPADLA V ZÁVISLOSTI NA KMITÁNÍ HLADINY V NAPÁJECÍCH NÁDRŽÍCH

PRESSURE DROP DETERMINATION OF THE CHARGING PUMP IN THE WATER LEVEL
OSCILLATION DEPENDENCE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JAROSLAV SŮKAL

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. SIMONA FIALOVÁ, Ph.D.

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jaroslav Sůkal

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Stanovení poklesu tlaku napájecího čerpadla v závislosti na kmitání hladiny v napájecích nádržích

v anglickém jazyce:

Pressure drop determination of the charging pump in the water level oscillation dependence

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Využití Bernoulliho rovnice pro nestacionární proudění ke stanovení tlaků ve větveném systému.

Cíle bakalářské práce:

Výsledků bude využito pro stanovení poklesu tlaku na sání napájecího čerpadla v tepelné elektrárně. Sestavení možností využití tohoto jevu v praxi.

Seznam odborné literatury:

Brdička, Samek, Sopko - Mechanika kontinua

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 27.10.2008

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Anotace

Bakalářská práce pojednává o základních rovnicích hydromechaniky. V práci je odvozená Eulerova rovnice hydrodynamiky a Bernoulliho rovnice. Zahrnuje rozbor proudění skutečných kapalin a nemalou část věnuje třecím ztrátám.

V práci je popsán kmitavý pohyb mezi dvěma spojenými nádobami. Tento jev je řešen pomocí Bernoulliho rovnice s nestacionárním členem. Součástí práce je odvození rovnice pro popis výchylky hladiny z rovnovážné polohy. Dále se věnuje zjednodušenému řešení této rovnice. Na závěr je uveden ukázkový modelový příklad tohoto jevu.

Klíčová slova: Bernoulliho rovnice, nestacionární proudění, kmitání hladin

Abstract

The bachelor thesis deals with basic equations of hydromechanics. The derivation process of Euler equation for hydrodynamics and Bernoulli equation is outlined. It also includes the analysis of the real liquids flow as well as the friction losses.

The oscillatory motion in between two joint tanks is described. The phenomenon is solved by Bernoulli equation with an unsteady term. A part of the thesis treats the derivation process of the equation of the equilibrium surface deflection description and its simplified resolving. A model problem of the phenomenon is put forward.

Key words: Bernoulli equation, unsteady flow, water level oscillation.

Bibliografická citace

SŮKAL, J. *Stanovení poklesu tlaku napájecího čerpadla v závislosti na kmitání hladiny v napájecích nádržích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 39 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Simona Fialová, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Stanovení poklesu tlaku napájecího čerpadla v závislosti na kmitání hladiny v napájecích nádržích“ vypracoval samostatně po konzultacích s vedoucím bakalářské práce. Vycházel jsem při tom ze svých znalostí a čerpal z internetových a literárních zdrojů.

V Brně dne 29.05.2009

Jaroslav Sůkal.....

Poděkování

Toto místo je věnováno všem, kteří mi byli jakýmkoliv způsobem nápomocni jak při studiu, tak při řešení této bakalářské práce. Největší podíl díky patří vedoucí mé práce paní Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za cenné rady, připomínky a čas.

Obsah

1	Úvod	10
2	Daniel Bernoulli	11
3	Definice pojmů	11
3.1	Einsteinova sumační konvence.....	11
3.2	Ideální kapalina	12
3.3	Proudnice.....	12
3.4	Rovnice kontinuity	12
3.5	1D, 2D a 3D proudění	13
4	Odvození rovnic	13
4.1	Eulerova rovnice hydrodynamiky (ERHD).....	13
4.2	Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu	15
5	Proudění skutečných kapalin.....	16
5.1	Druhy proudění skutečných kapalin.....	16
5.2	Ztráty při proudění skutečné kapaliny (Hydraulické ztráty).....	18
5.2.1	Třecí ztráty v potrubí.....	18
5.2.2	Ztráty místními odpory.....	25
6	Tvary Bernoulliho rovnice	26
7	Nestacionární proudění.....	26
7.1	Volný kmitavý pohyb ve spojených nádobách.....	27
7.2	Zjednodušené řešení	29
7.3	Konkrétní případ.....	32
8	Závěr.....	35
	Seznam použité literatury	36
	Seznam použitých zkratk a symbolů	37

1 Úvod

Při čerpání kapaliny z větveného systému (ze dvou a více napájecích nádrží) dochází k nerovnoměrnosti průtoku v jednotlivých větvích systému. Nerovnoměrnost způsobuje rozkmitání hladin v napájecích nádržích, což má za důsledek pokles tlaku napájecího čerpadla. Kmitání a následný pokles tlaku v napájecím čerpadle se objevuje například u chladících systémů elektráren, kde se čerpá chladící kapalina z více nádrží. Pro popis zmiňovaného jevu je důležitá Bernoulliho rovnice, kterou se tato práce z velké části zabývá.

2 Daniel Bernoulli

Daniel Bernoulli se narodil v holandském Groningenu 8. února 1700. Pocházel ze slavného klanu Bernoulliů, kteří se v 18. století zasadili o významné přínosy na poli matematiky a fyziky. Bernoulli sám byl velice všestranně nadaný. Vystudoval medicínu v Basileji, kde mimo jiné proslul jako vynikající lékař. Zde také poznal výjimečně nadaného matematika Leonarda Eulera, se kterým udržoval celý život důvěrné přátelství. Významnou část Bernoulliho kariéry představovalo působení v petrohradské Akademii věd právě spolu s Eulerem. Po nastolení krutovlády carevny Anny však z Ruska odchází a věnuje se přednášení matematiky, fyziky, botaniky a anatomie na různých evropských univerzitách.

Bernoulliho nejvýznamnější přínos spočívá v položení základů fyzikálního oboru hydrodynamika, jež shrnuje v latinsky psaném díle *Hydrodynamica* (1738). Bernoulli zde věnuje pozornost i plynům a první kinetické teorii plynů, nicméně kvůli skepticizmu doby si jeho teorie musela na své znovuobjevení počkat celé století. I přesto Daniel Bernoulli umírá ve znamení uznání a úspěchu ověněn mnoha oceněními nejvýznamnějších institucí své doby v roce 1782 v Basileji. [6]

3 Definice pojmů

3.1 Einsteinova sumační konvence

Jedná se o konvenci, která značně zjednodušuje zápis určitých matematických operací. V této práci budeme uvažovat trojrozměrný Euklidovský prostor. Jednotlivé osy tohoto prostoru budeme značit jako x_1, x_2, x_3 . To znamená, že všechny sumační indexy budou nabývat hodnot 1, 2, 3.

Například rozepíšeme-li vektor \bar{v} :

$$\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}, \quad (1)$$

kde $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ jsou jednotkové vektory v jednotlivých osách, potom za použití Einsteinovy sumační symboliky můžeme stejný vektor zapsat

$$\bar{v} = v_1 \cdot \bar{e}_1 + v_2 \cdot \bar{e}_2 + v_3 \cdot \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \bar{e}_i = v_i \cdot \bar{e}_i \quad (2)$$

Skalární násobení dvou vektorů je možné vyjádřit jako

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_i \cdot e_i \cdot v_j \cdot e_j = u_i \cdot v_j \cdot (e_i \cdot e_j) \quad (3)$$

Při zápisu se jednotkové vektory většinou vypouští, můžeme vztah (3) přepsat do tvaru

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_i \cdot v_j \quad [3] \quad (4)$$

3.2 Ideální kapalina

Ideální kapalinou rozumíme kapalinu, která:

- je dokonale nestlačitelná ($\rho = konst.$),
- je bez vnitřního tření; tečné napětí je rovno nule (neviskozní kapalina),
- nevypařuje se, napětí nasycených par je také nulové. [1]

3.3 Proudnice

Proudnice je množina bodů (čára), pro které platí, že v libovolném bodě této množiny je vektor rychlosti tečnou proudnice. Při stacionárním (ustáleném) pohybu proudnice splývá s trajektorií. Obecná rovnice proudnice je

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} \quad [3] \quad (5)$$

3.4 Rovnice kontinuity

Při proudění kapaliny musí být splněn zákon zachování hmotnosti. Stanovíme libovolný kontrolní objem. Podle rovnice kontinuity hmotnost kapaliny vtékající do kontrolního objemu musí být rovna hmotnosti kapaliny z něj vytékající.

Rovnice kontinuity pro 1D proudění v obecném tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot S \cdot v) + \frac{\partial}{\partial l} (\rho \cdot S) = 0 \quad (6)$$

Tato rovnice lze za určitých předpokladů zjednodušit. Pokud budeme uvažovat, že kapalina je nestlačitelná a proudí ustáleně, dostaneme mnohem známější tvar rovnice kontinuity

$$S \cdot v = konst. \quad [1] \quad (7)$$

3.5 1D, 2D a 3D proudění

Z kinematického hlediska se proudění rozděluje do tří skupin

A. Proudění třírozměrné (3D) – veličiny, např. rychlost je určena polohou v prostoru

$$v = v(x_1, x_2, x_3).$$

B. Dvourozměrné proudění (2D) – nebo také rovinné, např. $v = v(x_1, x_2)$.

C. Jednorozměrné proudění (1D) – je to proudění po křivce, např. $v = v(x_1)$. [2]

4 Odvození rovnic

Elementárním cílem této práce je odvození Bernoulliho rovnice, kterou budeme nezbytně potřebovat k popsání kmitavého pohybu ve spojených nádobách. Bernoulliho rovnice vychází z Eulerovy rovnice hydrodynamiky, proto bude vhodné nejprve odvodit ERHD.

4.1 Eulerova rovnice hydrodynamiky (ERHD)

ERHD je rovnice, která popisuje silovou rovnováhu při proudění. Na kapalinu působí tři síly. Vektor síly tíhové F_{mi} , vektor síly tlakové F_{pi} a také vektor síly, vyjadřující setrvačné účinky F_{si} .

$$F_{mi} + F_{pi} = F_{si} \quad (8)$$

Vytkneme-li si trojnásobně elementární prvek kapaliny, budou na něj působit elementární síly dF_{mi} , dF_{pi} , dF_{si} . Tyto síly musejí být v rovnováze:

$$dF_{mi} + dF_{pi} = dF_{si} \quad (9)$$

Nyní jednotlivé elementární síly rozepíšeme. Diference síly hmotnostní:

$$dF_{mi} = a_i \cdot dm = a_i \cdot \rho \cdot dx_j. \quad (10)$$

Elementární tlaková síla:

$$dF_{pi} = dF_{pi1} - dF_{pi2} = p \cdot dS_i - (p + dp_i) \cdot dS_i = dp_i \cdot dS_i. \quad (11)$$

Jelikož víme, že po rozepsání elementu plochy dS_i pro jednotlivé osy

$$\begin{aligned}
 dS_{x_1} &= dx_2 \cdot dx_3 \\
 dS_{x_2} &= dx_1 \cdot dx_3 \\
 dS_{x_3} &= dx_1 \cdot dx_2
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

a rozepsání totální derivace tlaku

$$dp_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot dx_i \tag{13}$$

můžeme po dosazení do rovnice (11) psát:

$$dF_{pi} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot dx_j \tag{14}$$

Elementární setrvačnou síly vypočítáme z Newtonova zákona.

$$dF_{si} = dm \cdot \frac{dv_i}{dt} = \rho \cdot dx_j \cdot \frac{dv_i}{dt} \tag{15}$$

Nyní můžeme napsat silovou rovnováhu pomyslného elementu:

$$a_i \cdot \rho \cdot x_j - \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot dx_j = \rho \cdot dx_j \cdot \frac{dv_i}{dt} \tag{16}$$

Pro zjednodušení je vhodné rovnici vydělit ρ a x_j . Tímto postupem dostaneme rovnováhu v podobě zrychlení

$$a_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{dv_i}{dt} \tag{17}$$

Totální derivaci $\frac{dv_i}{dt}$ je možné rozepsat na parciální derivace:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot dx_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot dt}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j \tag{18}$$

Po dosazení rovnice (20) do rovnice (19) dostaneme Eulerovi rovnici hydrodynamiky (ERHD) (21).

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot v_j = a_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{19}$$

Tahle rovnice platí obecně pro 3D proudění. Naším cílem je popsat chování kapaliny při kmitání hladin ve spojených nádobách. Ve spojovacím potrubí bude proudění kapaliny 1D, proto je vhodné si ERHD zapsat i ve tvaru pro 1D proudění.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial l} \cdot v = a - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} \quad [1] [2] \quad (20)$$

4.2 Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu

Nyní, když jsme odvodili zákon pro silovou rovnováhu, Eulerovu rovnici hydrodynamiky, můžeme přejít přímo k odvození zákona zachování energie. Bernoulliho rovnice, jak se tento zákon nazývá, vychází z předpokladu, že energie nevzniká ani nezaniká, pouze se mění její druhy.

Pokud se částice tekutiny pohybuje po elementární dráze (proudnici) koná elementární práci. Sečtením těchto elementárních prací po proudnici dostaneme práci (energii) celkovou.

Ještě před integrací rozepíšeme objemové zrychlení. Připustíme, že má potenciál. Rozepsáním objemového zrychlení pomocí potenciálu pro 3D

$$a_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (21)$$

pro 1D proudění

$$a = \frac{\partial U}{\partial l} \quad (22)$$

kde dl je element délky proudnice a dU je element potenciálu. Potenciál můžeme zapsat $U = g \cdot h$, kde g je gravitační zrychlení a h je poloha hladiny.

Nejprve ERHD upravíme pro následné integrování. Do rovnice (20) dosadíme vztah pro objemové zrychlení.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial l} \cdot v = \frac{\partial U}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} \quad (23)$$

Následně vynásobíme ERHD skalárně elementem délky proudnice dl .

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + \frac{\partial v}{\partial l} \cdot v \cdot dl = \frac{\partial U}{\partial l} \cdot dl - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} \cdot dl \quad (24)$$

Vykrácením jednotlivých elementů délky proudnice získáme vztah, který můžeme integrovat.

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + v \cdot dv = dU - \frac{dp}{\rho} \quad (25)$$

V našem případě budeme řešit chování proudění kapaliny mezi dvěma místy. Budeme tedy integrovat z bodu 1 do bodu 2.

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + \int_1^2 v \cdot dv = \int_1^2 dU - \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \quad (26)$$

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = U_2 - U_1 - \frac{p_2}{\rho} + \frac{p_1}{\rho} \quad (27)$$

Bernoulliho rovnice ovšem platí po celé délce proudnice

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + \frac{v^2}{2} - U + p = konst, \quad (28)$$

kde první člen je tzv. nestacionární. Jeho podrobnější popis bude v kapitole 7. Druhý člen vyjadřuje měrnou kinetickou energii, třetí je měrná potenciální energie a čtvrtý je měrná tlaková energie. [1] [2] [4]

5 Proudění skutečných kapalin

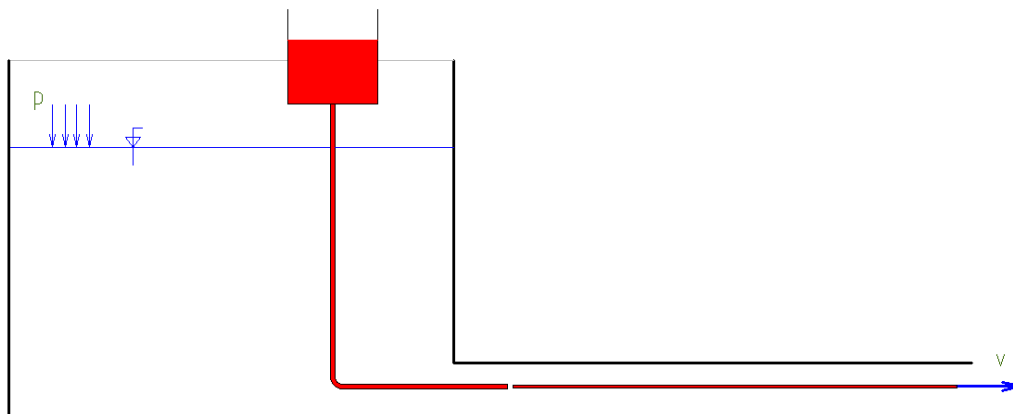
U proudění skutečných kapalin se projevuje vnitřní tření kapaliny a stlačitelnost. Protože v této práci uvažujeme proudění vody, u které se stlačitelnost projevuje nepatrně, můžeme ji zcela zanedbat.

5.1 Druhy proudění skutečných kapalin

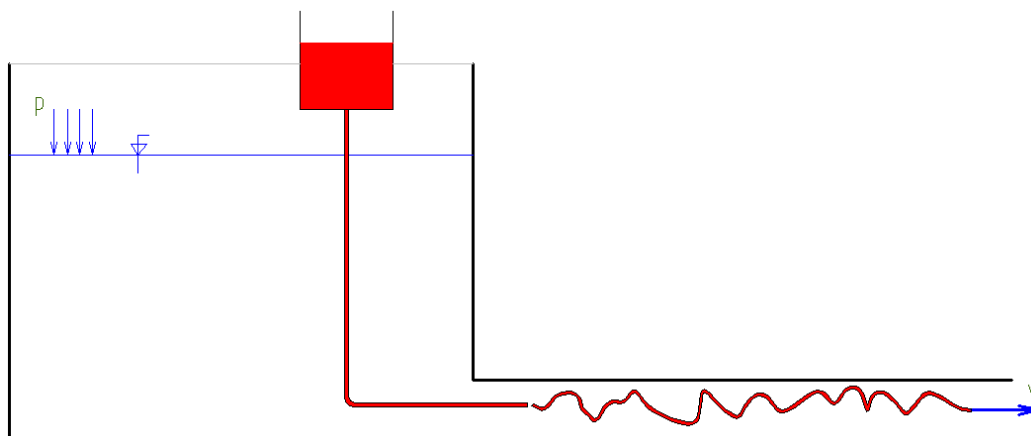
Proudění skutečných kapalin se dělí na dvě základní skupiny, laminární a turbulentní. Změnám uvnitř potrubí a přechodům mezi laminárním a turbulentním prouděním se věnoval Osborne Reynolds. Dokázal existenci obou proudění pomocí jednoduchého pokusu.

Do proudící tekutiny v kruhovém potrubí přiváděl velmi malou trubičkou barevnou tekutinu. Při malých rychlostech barevná tekutina zůstala neporušená a rovná – viz obr. 1. Pokud se rychlost zvýšila nad kritickou mez, dráha barevné tekutiny přestala být přímá a

začala se vlnit viz - obr. 2. Oba druhy proudění se od sebe liší rychlostním profilem, a také velikostí hydraulických ztrát.



Obr. 1 – laminární proudění [4]



Obr. 2 – turbulentní proudění [4]

Pomocí tohoto pokusu určil vztah, podle kterého lze vyjadřuje druh proudění kapalin. Tento vztah nese jméno po svém autorovi (Reynoldsovo číslo):

$$\text{Re} = \frac{v_s \cdot D}{\nu}, \quad (29)$$

kde v_s je střední průřezová rychlost, D je charakteristický rozměr potrubí, kterým kapalina proudí a ν je kinematická viskozita. Tu lze spočítat podle následujícího vztahu.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (30)$$

kde μ je dynamická viskozita a ρ je hustota.

Přechod z laminárního na turbulentní proudění je určen kritickou hodnotou Reynoldsova čísla Re_k . Jeho hodnota pro kruhové potrubí, které se vyskytuje v této práci, je rovno hodnotě 2 320. Toto číslo platí pouze tehdy, jestliže je proudění ustálené. Pokud by před místem, kde zjišťujeme druh proudění, byl například místní odpor (zúžení, kolena, atd.), hodnota Re_k by byla menší.

Pro $Re < Re_k$ se jedná o laminární proudění, jestliže $Re > 14\,000$ jde o proudění turbulentní. Přechodové oblasti náležejí interval $Re = (Re_k, 14\,000)$. [1] [2] [4]

5.2 Ztráty při proudění skutečné kapaliny (Hydraulické ztráty)

Při proudění skutečné kapaliny potrubím dochází ke ztrátám. Ztráty jsou způsobeny vzájemným třením molekul, změnou tvaru potrubí atd. Bernoulliho rovnice bude obsahovat další člen a to člen vyjadřující ztrátovou energii. Nejde o ztrátovou energii v pravém slova smyslu, to by odporovalo zákonu zachování energie. Je to energie, která se přemění v teplo.

Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu:

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + \frac{v}{2} - U + \frac{p}{\rho} + Y_z = konst, \quad (31)$$

kde Y_z je měrná ztrátová energie, která se počítá pomocí Weissbachova vztahu:

$$Y_z = \zeta_c \cdot \frac{v_s^2}{2}, \quad (32)$$

kde ζ_c je celkový součinitel všech ztrát v potrubí a v_s je střední průřezová rychlost.

Hydraulické ztráty se dělí na dvě základní skupiny. Na ztráty třením a ztráty místní.

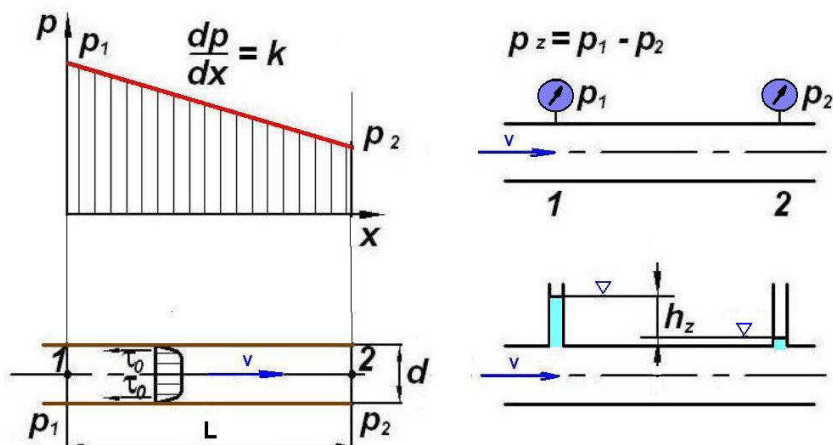
Weissbachův vztah můžeme rozepsat následujícím způsobem:

$$Y_z = \left(\sum \zeta_m + \sum \zeta_t \right) \cdot \frac{v_s^2}{2}, \quad (33)$$

kde ζ_m je součinitel místních ztrát a ζ_t je součinitel třecích ztrát. [1] [2] [4]

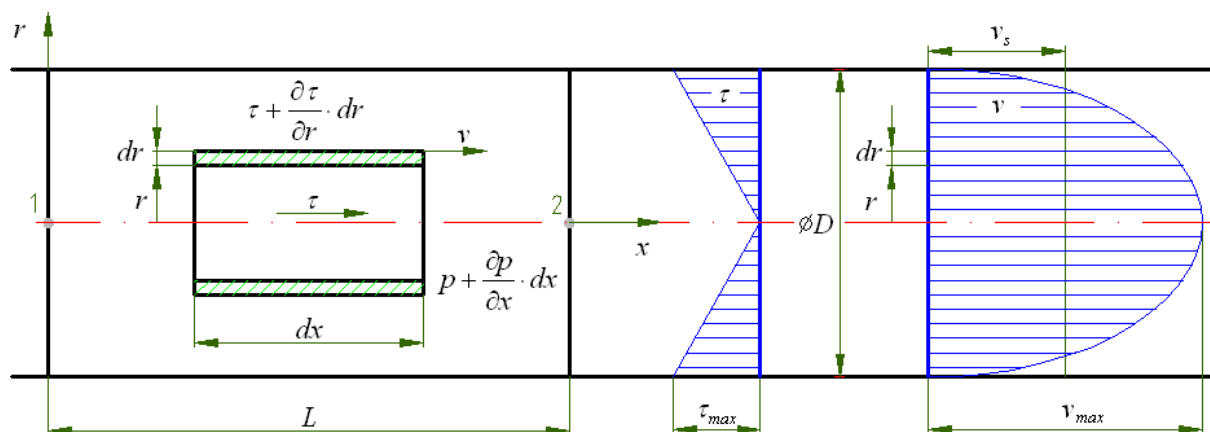
5.2.1 Třecí ztráty v potrubí

Tyto ztráty vznikají vzájemnou interakcí mezi jednotlivými molekulami. Jsou přímo úměrné délce a různě velké pro jednotlivé typy proudění.



Obr. 3 – ztrátový tlak [4]

Při výpočtu součinitele třecích ztrát u laminárního proudění vycházíme ze střední rychlosti. Tuto rychlost získáme následujícím postupem. V potrubí s kruhovým průřezem se kapalina pohybuje v jednotlivých vrstvách válcového tvaru s osou symetrie totožnou s osou symetrie potrubí. Zvolíme nekonečně malý element tohoto válce. Na ten působí tlak p , který se za dráhu dl změní na $p + dp$. Tyto tlaky vyvolají tlakové síly:



Obr. 4 – laminární proudění v potrubí kruhového průřezu [2]

$$F_{p1} = p \cdot \pi \cdot r^2, \quad (34)$$

$$F_{p2} = (p + dp) \cdot \pi \cdot r^2. \quad (35)$$

Na plášť elementu působí třecí síla.

$$F_{t1} = \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl \quad (36)$$

Součet všech sil působících na element musí být roven nule.

$$F_{p1} - F_{p2} - F_{t1} = 0 \quad (37)$$

$$p \cdot \pi \cdot r^2 - (p + dp) \cdot \pi \cdot r^2 - \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl = 0 \quad (38)$$

Z rovnice (38) vyjádříme smykové napětí:

$$\tau = -\frac{dp}{2 \cdot dl} \cdot r \quad (39)$$

Protože ztrátový tlak roste lineárně v závislosti na délce, platí $\frac{dp}{dl} = \frac{p_z}{l}$ a můžeme rovnici

(39) zapsat ve tvaru

$$\tau = -\frac{p_z}{2 \cdot l} \cdot r, \quad (40)$$

kterou dosadíme do Newtonova vztahu pro smykové napětí $\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dr}$

$$\mu \cdot \frac{dv}{dr} = -\frac{p_z}{2 \cdot l} \cdot r \quad (41)$$

Z rovnice vyjádříme změnu rychlosti a následně integrací získáme rychlost:

$$dv = -\frac{p_z \cdot r \cdot dr}{2 \cdot \mu \cdot l}, \quad (42)$$

$$v = -\frac{p_z \cdot r^2}{4 \cdot \mu \cdot l} + C. \quad (43)$$

Integrační konstantu C určíme z okrajové podmínky pro $r = \frac{D}{2}$ je $v = 0$, protože na stěnách potrubí je rychlost kapaliny nulová.

$$C = \frac{p_z \cdot d^2}{16 \cdot \mu \cdot l} \quad (44)$$

Po dosazení integrační konstanty (44) do rovnice (43) a po úpravě získáme vztah pro rychlost v následujícím tvaru:

$$v = \frac{p_z}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - r^2 \right]. \quad (45)$$

Z rovnice pro rychlost v jakémkoliv místě průřezu vidíme, že je kvadraticky závislá na vzdálenosti od osy potrubí. V prostoru bude mít rychlostní profil tvar rotačního paraboloidu, s maximální rychlostí v jeho vrcholu.

Pro zjištění střední rychlosti je potřeba vypočítat průtok v potrubí, který se určí integrací rychlosti přes plochu průřezu potrubí. Tento vztah je znám jako Hagen-Poiseuillův zákon.

$$Q = \int_s v \cdot dS = \int_0^{\frac{d}{2}} v \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\pi \cdot r \cdot p_z}{2 \cdot \mu \cdot l} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - r^2 \right] \cdot dr \quad (46)$$

$$Q = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot p_z}{128 \cdot \mu \cdot l} \quad (47)$$

Dosazením do rovnice kontinuity získáme vztah (48), ze kterého následně vyjádříme hledanou střední rychlost průřezu (49).

$$Q = S \cdot v_s = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot v_s = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot p_z}{128 \cdot \mu \cdot l} \quad (48)$$

$$v_s = \frac{p_z \cdot D^2}{32 \cdot \mu \cdot l}, \quad (49)$$

kde l je délka na které vznikne ztrátový tlak p_z , D je průměr potrubí a μ je dynamická viskozita. Z rovnice (49) vyjádříme ztrátový tlak

$$p_z = \frac{32 \cdot \mu \cdot l \cdot v_s}{D^2} = \frac{64}{\frac{v \cdot D}{\nu}} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v_s}{2} \cdot \rho = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v_s}{2} \cdot \rho, \quad (50)$$

kde třecí součinitel pro vyvinutý rovnoměrný rychlostní profil laminárního proudění je

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \text{ Potom je ztrátový tlak určen vztahem (51).}$$

$$p_z = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v_s}{2} \cdot \rho \quad (51)$$

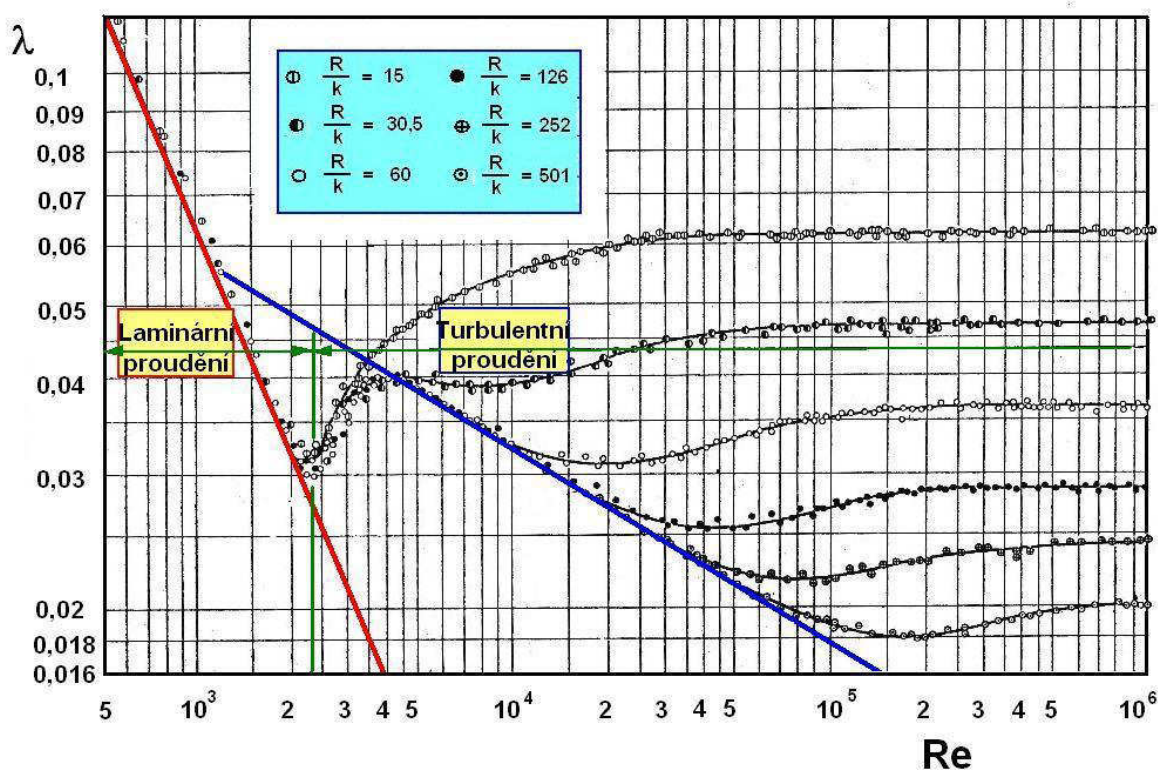
Ztráty se také často vyjadřují jako ztrátová výška.

$$h_z = \frac{p_z}{\rho \cdot g} = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v_s}{2 \cdot g} \quad [4] \quad (52)$$

Součinitel třecích ztrát u turbulentního proudění je vlivem vyšších třecích sil větší. Počítají se podobně jako u laminárního proudění. Rozdílem je, že u turbulentního proudění není třecí součinitel závislý pouze na velikosti Reynoldsova čísla. Na velikosti třecího

součinitele mají také vliv relativní drsnosti stěn potrubí $\Delta = \frac{k}{D}$, kde k je absolutní drsnost stěny potrubí a D je průměr potrubí. Součinitel tření u turbulentního proudění $\lambda = f(\text{Re}, \Delta)$ nelze stanovit obecně, proto se pro jeho určení používají experimentálně odvozené vztahy a grafy. Ztrátami třením se zabýval například Johann Nikuradse. V letech 1930-1933 pomocí experimentů sestavil graf závislosti součinitele tření na poměrné drsnosti povrchu a Reynoldsově čísle. Nikuradse při svém experimentu používal bronzové potrubí kruhového průřezu. Nejprve začal měřit ztrátový součinitel na hladkém potrubí a poté povrch potrubí postupně zdršňoval nalepováním tříděného písku. Měřením získával závislost třecího součinitele na Reynoldsově čísle při konstantní poměrné drsnosti.

Z grafu na obr. 5 je zřejmé, že při vyšších hodnotách Reynoldsova čísla je závislost téměř konstantní, tedy že součinitel tření nezávisí na poměrné deformaci. Tuto oblast nazýváme oblastí *vyvinutého turbulentního proudění*. Laminární proudění je v grafu zobrazeno červenou přímkou. Oblasti mezi laminárním prouděním a vyvinutým turbulentním prouděním nazýváme přechodovou oblastí.



Obr. 5 – Nikuradseho diagram závislosti $\lambda = f(\text{Re}, \Delta)$ [5]

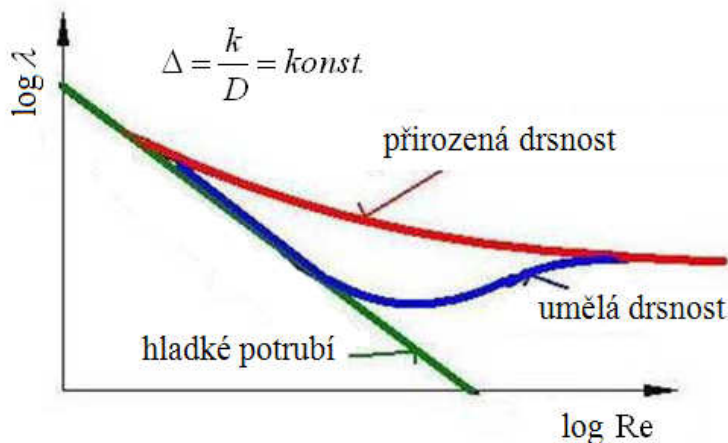
Modrou barvou v grafu je znázorněn Blasiusův vztah, který byl odvozen pro hladké potrubí

$$k = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \quad \text{pro} \quad \text{Re}_k \leq \text{Re} \leq 8 \cdot 10^4 \quad (53)$$

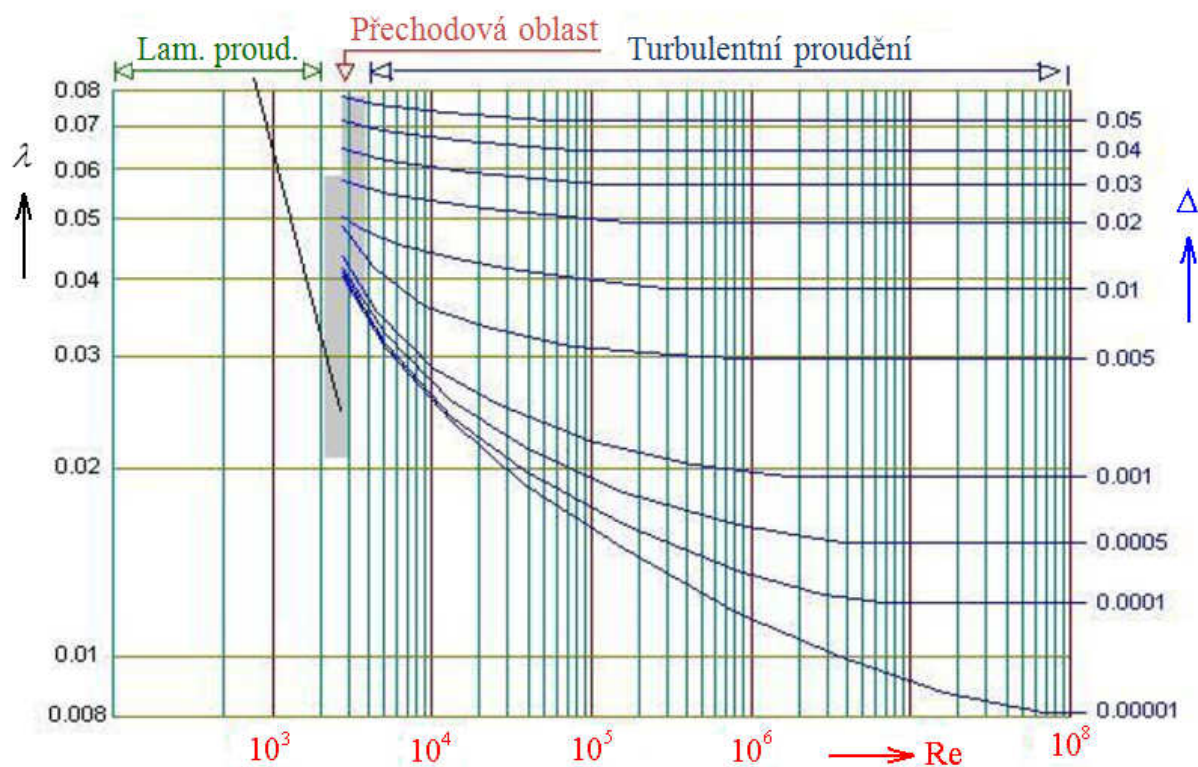
Jelikož Nikuradse při svém experimentu zdršňoval povrch potrubí uměle, drsnost stěn potrubí byla rovnoměrná. V reálných podmínkách však drsnost není rovnoměrná. Vliv skutečné drsnosti na třecí součinitel řešilo více autorů. Jedním z nich byl i Colebrook, který odvodil rovnici (54), která upravuje přechodovou oblast v Nikuradseho diagramu.

$$\lambda = \frac{1}{\left[2 \cdot \log \left(\frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + 0,27 \cdot \frac{k}{d} \right) \right]^2} \quad (54)$$



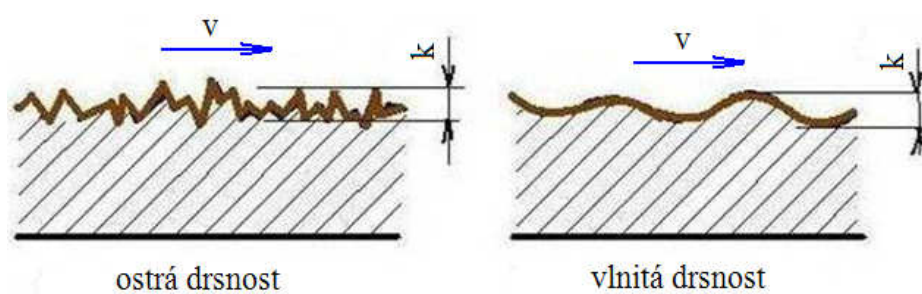
Obr. 6 – vliv druhu drsnosti na ztráty třením [5]

U skutečné drsnosti nevzniká žádné sedlo, jaké je vidět v Nikuradseho diagramu, ale součinitel tření asymptoticky přechází z Blasiusovy přímky k přímce vyjadřující oblast vyvinutého turbulentního proudění.



Obr. 7 – Moody-Colebrookův diagram závislosti $\lambda = f(\text{Re}, \Delta)$ [5]

Při turbulentním proudění skutečné kapaliny vzniká na stěnách potrubí vrstva tekutiny, která přikrývá nerovnosti povrchu. Tato vrstva se nazývá laminární podvrstva. Fromm a Hopf zjistili, že na tloušťku laminární podvrstvy a tedy i na ztrátový součinitel má vliv nejen velikost absolutní drsnosti, ale také její tvar. Rozeznáváme dva druhy drsnosti, tedy ostrou a vlnitou.



Obr. 8 – druhy drsnosti [5]

Vzhledem k velikosti a tvaru nerovnosti povrchu potrubí rozeznáváme u turbulentního proudění tři oblasti.

A. Hydraulicky hladká stěna

V této oblasti laminární podvrstva zakryje nerovnosti povrchu, třecí součinitel má stejnou velikost jako při proudění kapaliny hladkým potrubím.

B. Oblast přechodová

Jednotlivé výčnělky drsnosti jsou větší, než laminární podvrstva, z čehož vyplývá, že třecí součinitel je závislý jak na Reynoldsově čísle, tak i na poměrné deformaci povrchu potrubí.

C. Oblast vyvinutého turbulentního proudění

V této oblasti je laminární podvrstva velmi malá a nezakrývá nerovnosti povrchu potrubí. To znamená, že třecí součinitel je závislý pouze na poměrné deformaci potrubí a ne na Reynoldsově čísle. V grafu tuto oblast charakterizují vodorovné polopřímky. [1] [2] [4]

5.2.2 Ztráty místními odpory

Do této kategorie ztrát patří například ztráty při náhlé změně průměru potrubí, změně velikosti nebo směru proudění, ztráty v různých armaturách atd. Velikost místních ztrát se stanoví podobně jako u ztrát vyvolaných třením. Ztrátovou výškou (55), měrnou ztrátovou energií (56), nebo ztrátovým tlakem (57)

$$h_z = \zeta_m \cdot \frac{v_s^2}{2 \cdot g}, \quad (55)$$

$$Y_z = g \cdot h_z = \zeta_m \cdot \frac{v_s^2}{2}, \quad (56)$$

$$p_z = g \cdot \rho \cdot h_z = \zeta_m \cdot \rho \cdot \frac{v_s^2}{2}, \quad (57)$$

kde ζ_m je součinitel místních ztrát a ostatní veličiny mají stejný význam jako v předchozích rovnicích. Je zřejmé, že ζ_m bude u jednotlivých prvků různé. Děje v místech, kde vznikají místní ztráty, jsou příliš složité, a proto se součinitelé místních ztrát určují experimentálně. Experimentálně naměřené hodnoty můžeme použít pouze v případě, že byly naměřeny za podobných podmínek. Pro stanovení místních ztrát se používají různé tabulky, grafy atd. [2]

6 Tvary Bernoulliho rovnice

Bernoulliho rovnice se používá při výpočtech nejrůznějších hydraulických a hydrodynamických strojů. Proto je občas výhodné ji zapsat v jiných tvarech. Například se uvádí ve tvaru výšek (61), nebo tlaků (60).

Bernoulliho rovnice ve formě energii [J]:

$$m \cdot g \cdot h + m \cdot \frac{p}{\rho} + m \cdot \frac{v^2}{2} + m \cdot \int \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + m \cdot Y_z = konst \quad (58)$$

Bernoulliho rovnice ve formě měrných energií [$J \cdot kg^{-1}$]:

$$g \cdot h + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + Y_z = konst \quad (59)$$

Bernoulliho rovnice v tlakové formě [Pa]:

$$\rho \cdot g \cdot h + p + \rho \cdot \frac{v^2}{2} + \rho \cdot \int \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + p_z = konst \quad (60)$$

Bernoulliho rovnice ve výškovém tvaru [m]:

$$h + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{1}{g} \cdot \int \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + h_z = konst \quad (61)$$

7 Nestacionární proudění

Je to proudění, které je závislé na čase. Nestacionární chování se projevuje například při rozběhu proudění v potrubí, nebo při kmitání v U-trubicí atd. Především jde o změny rychlosti kapaliny, které vyvolávají změny tlaku.

Nestacionární proudění lze řešit dvěma způsoby.

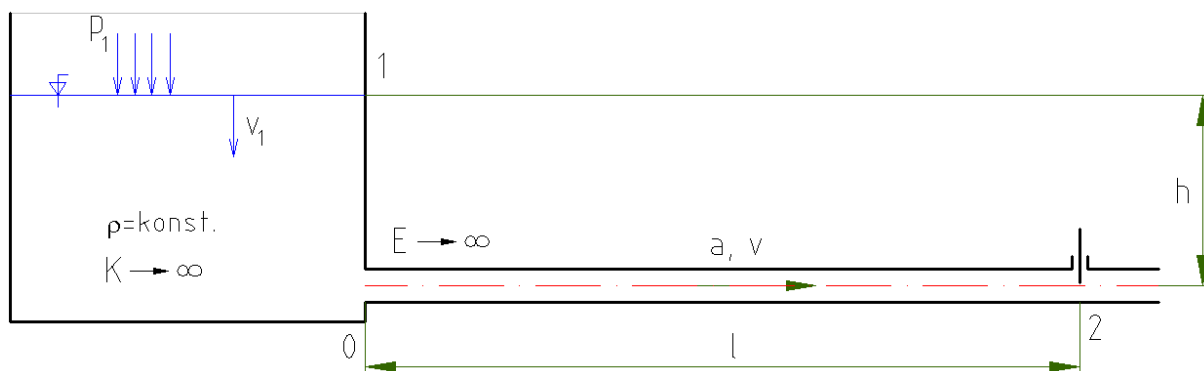
- A. Pokud jsou změny rychlosti, tedy i tlaku, malé, neprojeví se stlačitelnost kapaliny. Takové proudění lze řešit pomocí Bernoulliho rovnice s nestacionárním členem.
- B. V případech, kdy jsou změny rychlosti, respektive tlaku příliš velké, soustava se řeší jako hydraulický (vodní) ráz.

V následující části budeme uvažovat pouze první případ (A). Pro zjednodušení budeme uvažovat nestlačitelnou kapalinu a dokonale tuhé potrubí. Za těchto podmínek bude

rychlost závislá pouze na jedné proměnné a to na čase $v = v(t)$. Nyní lze nestacionární člen jednoduše integrovat.

$$\int_l \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl = \int_l \frac{dv}{dt} \cdot dl = a_n \cdot l, \quad (62)$$

kde a_n je zrychlení sloupce kapaliny v potrubí o délce l .



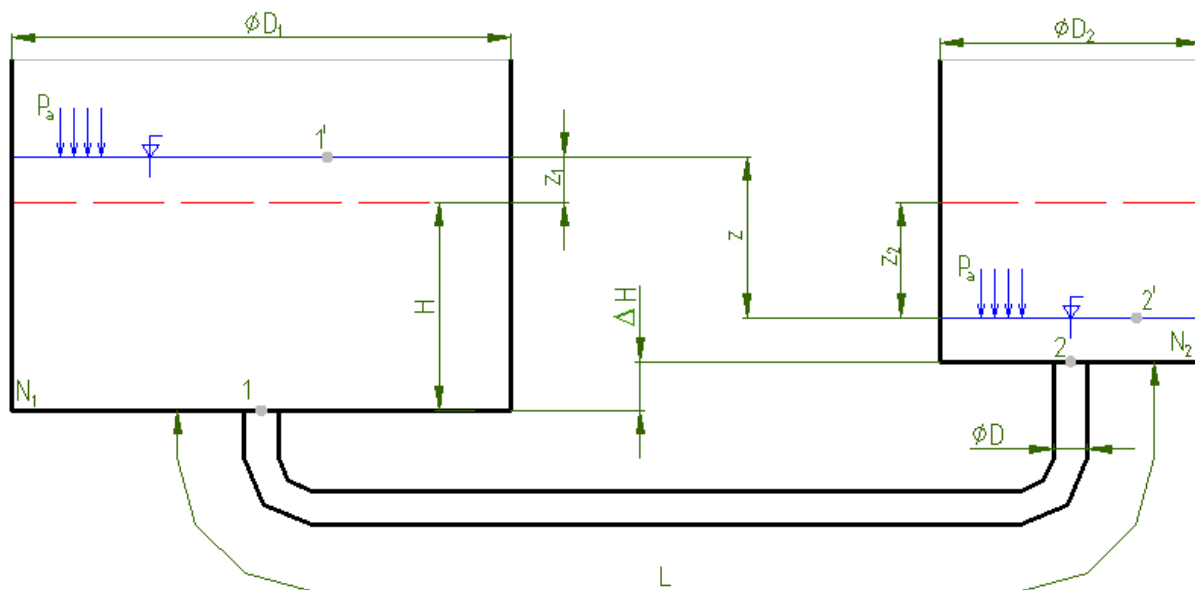
Obr. 9 – neustálené proudění nestlačitelné kapaliny v tuhém potrubí [2]

Bernoulliho rovnice pro nestacionární proudění nestlačitelné vazké kapaliny v tuhém potrubí mezi body 1 a 2 bude

$$\frac{p_1}{\rho} + g \cdot h + \frac{v_1^2}{2} = a_n \cdot l + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + Y_z \quad [2] \quad (63)$$

7.1 Volný kmitavý pohyb ve spojených nádobách

Cílem této práce je popsat chování kapaliny při kmitavém pohybu, mezi dvěma nádržemi. Při kmitání volných hladin dochází k periodickým přeměnám potenciální energie na polohovou a naopak. Dokonalá kapalina v tuhém potrubí by kmitala netlumeně. Ovšem pohyb skutečné kapaliny je tlumen viskozitou.



Obr. 10 – kmitavý pohyb ve spojených nádržích [1]

Při popisu kmitavého pohybu ve spojených nádobách bude nejvhodnější vyjádřit si závislost výchylky jedné z hladin od rovnovážné polohy na čase. Protože průřez jednotlivých hladin je mnohem větší, než průřez potrubí, zjednodušíme úlohu tak, že nebudeme uvažovat rychlost hladin $v_1 = v_2 = 0$.

Beronoulliho rovnici budeme psát mezi body 1 a 2.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g \cdot \Delta H + a_n \cdot L + Y_z \quad (64)$$

V případě, že je průřez potrubí konstantní, platí $v_1 = v_2$, a tak můžeme kinetické členy odečíst.

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + g \cdot \Delta H + a_n \cdot L + Y_z \quad (65)$$

Po rozepsání jednotlivých tlaků v bodě 1 a 2 dostaneme rovnici.

$$\frac{p_a + \rho \cdot g \cdot (H + z_1)}{\rho} = \frac{p_a + \rho \cdot g \cdot (H - \Delta H - z_2)}{\rho} + g \cdot \Delta H + a_n \cdot L + Y_z \quad (66)$$

Úpravou rovnici značně zjednodušíme.

$$g \cdot (z_1 + z_2) = a_n \cdot L + Y_z \quad (67)$$

V rovnici (67) se vyskytuje několik neznámých hodnot, které jsou závislé na čase nebo na výchylce první hladiny. Měrnou ztrátovou energii rozepíšeme pomocí Weisbachova vztahu

(32). V něm se objevu střední rychlost v potrubí, kterou za použití rovnice kontinuity (7) a definice pro zrychlení $v_1 = \frac{dz_1}{dt}$ můžeme zapsat ve tvaru (68).

$$v_s = v_1 \cdot \frac{S_1}{S} = -\frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{S_1}{S} \quad (68)$$

Výsledný vztah pro měrnou ztrátovou energii.

$$Y_z = \zeta_c \cdot \frac{v_s^2}{2} = \frac{\zeta_c}{2} \cdot \left(\frac{S_1}{S}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \quad (69)$$

Podle definice zrychlení můžeme rozepsat člen a_n .

$$a_n = \frac{dv}{dt} = -\frac{d^2 z_1}{dt^2} \cdot \frac{S_1}{S} \quad (70)$$

Zbývá uvést závislost mezi z_1 a z_2 . Tuto závislost dostaneme ze zákona zachování hmoty (71).

$$z_1 \cdot S_1 = z_2 \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad z_2 = z_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} \quad (71)$$

Vztahy (68), (69) a (70) dosadíme do rovnice (67).

$$g \cdot \left(z_1 + z_1 \cdot \frac{S_1}{S_2}\right) = -\frac{d^2 z_1}{dt^2} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot L \pm \frac{\zeta_c}{2} \cdot \left(\frac{S_1}{S}\right)^2 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \quad (72)$$

Po převedení všech členů na jednu stranu a nepatrných úpravách získáme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} \pm \frac{\zeta_c \cdot S_1}{2 \cdot S \cdot L} \cdot \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + \frac{g \cdot z_1 \cdot S}{S_1 \cdot L} \cdot \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) = 0 \quad [1] \quad (73)$$

7.2 Zjednodušené řešení

Rovnici (73) nelze řešit obecně. Pro další výpočet zanedbáme místní ztráty a budeme uvažovat pouze ztráty třením $\zeta_c \equiv \zeta_t$. Ve většině případů kapaliny v potrubí, spojující obě nádrže proudí turbulentně. Pro zjednodušené řešení budeme předpokládat, že kapalina proudí laminárně. Součinitel ztrát třením pro laminární proudění

$$\zeta_c \equiv \zeta_t = \lambda \cdot \frac{L}{D} = \frac{64 \cdot L}{\text{Re} \cdot D} = \frac{64 \cdot \nu \cdot L}{v_s \cdot D^2} \quad (74)$$

Protože střední průřezová rychlost ve spojovacím potrubí je závislá na čase, potřebujeme tuto závislost určit. Toho docílíme pomocí vztahu (68), ze kterého vyjádříme převrácenou hodnotu střední rychlosti v_s .

$$\frac{1}{v_s} = - \frac{S}{S_1 \cdot \frac{dz_1}{dt}} \quad (75)$$

Rovnice popisující výchylku nádrže 1 při kmitavém pohybu bude mít výsledný tvar (76)

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} \pm \frac{32 \cdot v}{D^2} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{g \cdot S \cdot (S_1 + S_2)}{L \cdot S_1 \cdot S_2} \cdot z_1 = 0 \quad (76)$$

Pokud uvažujeme kladný smysl pohybu kapaliny z bodu 1 do bodu 2, ztrátový součinitel bude kladný.

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{32 \cdot v}{D^2} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{g \cdot S \cdot (S_1 + S_2)}{L \cdot S_1 \cdot S_2} \cdot z_1 = 0 \quad (77)$$

Protože $\frac{32 \cdot v}{D^2}$ a $\frac{g \cdot S \cdot (S_1 + S_2)}{L \cdot S_1 \cdot S_2}$ jsou konstantní, zavedeme pro přehlednost značení

$$2 \cdot \alpha = \frac{32 \cdot v}{D^2} \quad (78)$$

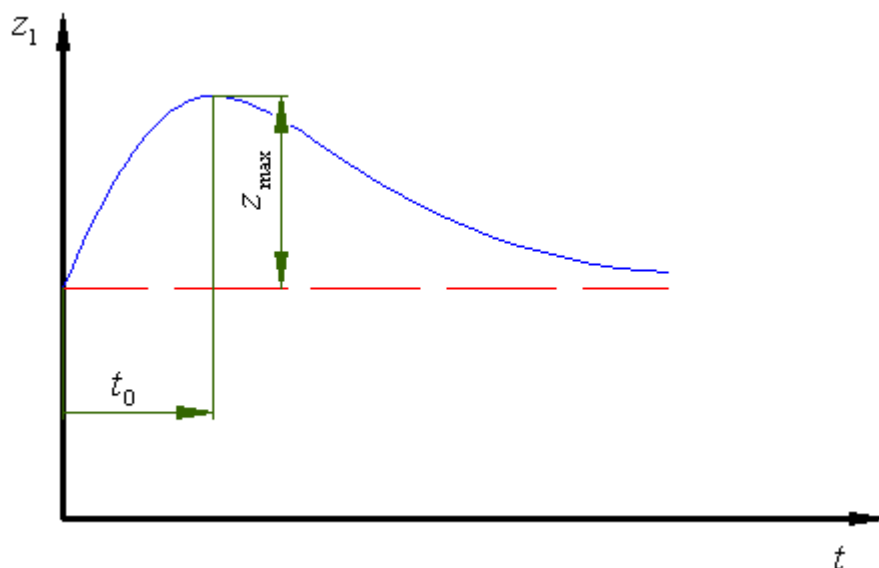
$$\omega^2 = \frac{g \cdot S \cdot (S_1 + S_2)}{L \cdot S_1 \cdot S_2} \quad (79)$$

Potom rovnici (77) můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{dz_1}{dt} + \omega^2 \cdot z_1 = 0 \quad [1] \quad (80)$$

Podle rovnice (80) mohou nastat dvě situace:

- A. Pokud $\omega^2 < \alpha^2$ hladina po vychýlení bude plynule klesat, až se dostane do rovnovážné polohy. Tomuto jevu se říká aperiodický pohyb hladiny.



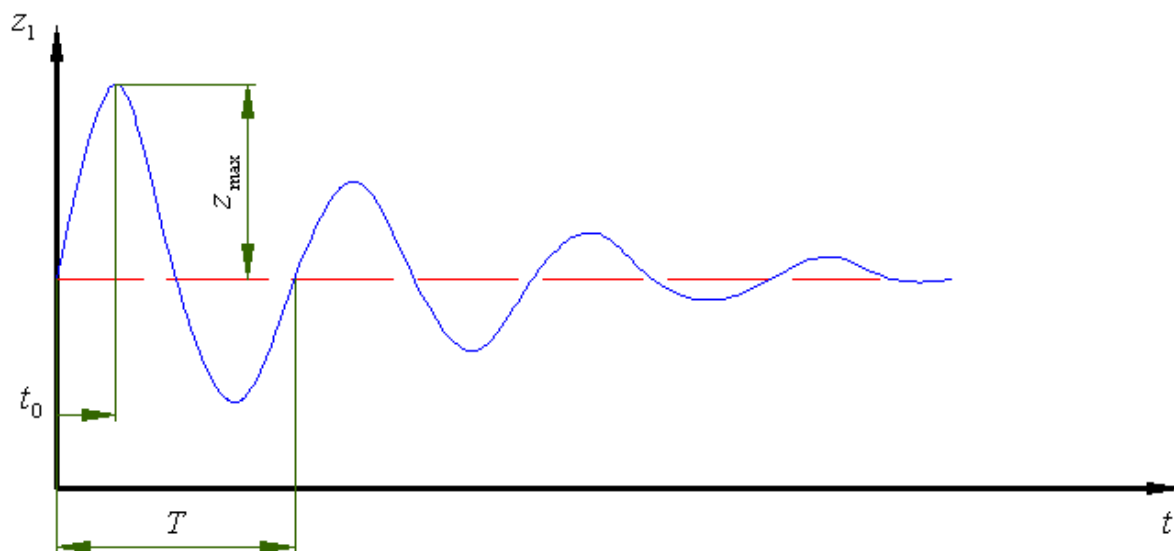
Obr. 11 – Aperiodický pohyb hladiny [1]

V tomto případě že by řešení rovnice (80) bylo ve tvaru

$$z_1 = C_1 \cdot e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})t} + C_2 \cdot e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})t} \quad (81)$$

Kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty. Jejich tvar závisí na počátečních podmínkách rovnice (80).

- B. Pokud $\omega^2 > \alpha^2$ hladina po vychýlení bude tlumeně kmitat, až se ustálí na rovnovážné poloze. Jde o tzv. periodický tlumený pohyb hladiny.



Obr. 12 – Periodický tlumený pohyb hladiny [1]

V tomto případě že by řešení rovnice (80) bylo ve tvaru

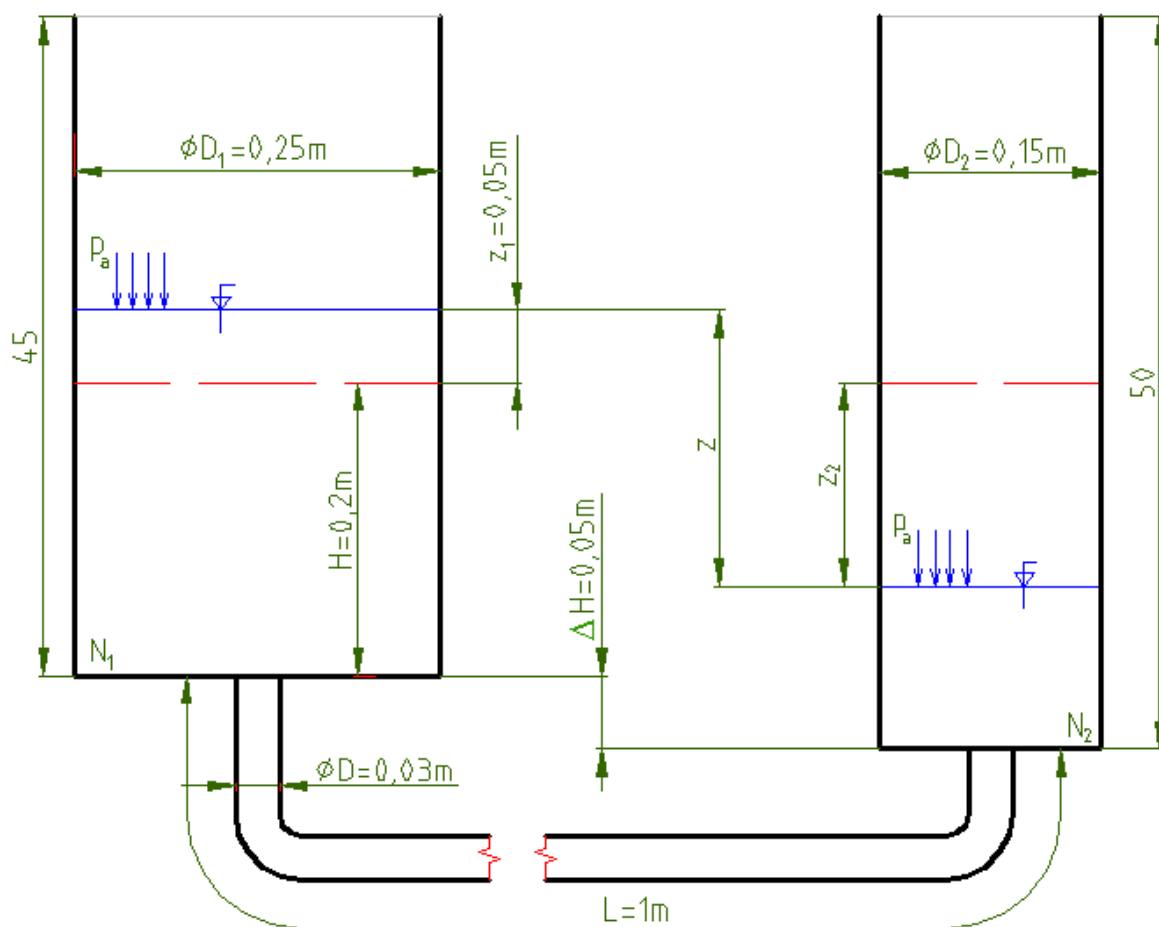
$$z_1 = e^{-\alpha t} \cdot \left(C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) \right) \quad (84)$$

Kde C_1 a C_2 jsou opět integrační konstanty. Jejich tvar závisí na počátečních podmínkách rovnice (80). Periodu kmitu spočítáme ze vztahu (85).

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (85)$$

7.3 Konkrétní případ

Odvozené rovnice z předchozí kapitoly aplikujeme na konkrétní modelový případ. Zvolíme konkrétní veličiny. Průměr první nádrže $D_1 = 0,25 \text{ m}$, průměr druhé nádrže $D_2 = 0,15 \text{ m}$, průměr spojovacího potrubí $D = 0,03 \text{ m}$, délka potrubí $L = 1 \text{ m}$, kinematická viskozita pro teplotu 20°C $\nu = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Gravitační zrychlení pro střední Evropu $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Zbývající rozměry viz obr. 13.



Obr. 13 – Modelový příklad pohybu ve spojených nádržích [1]

K vyřešení rovnice (80) je třeba znát počáteční podmínky. Hladinu vychýlíme z rovnovážné polohy o $z_{10} = 0,05 \text{ m}$ a následně ji uvolníme. V moment odlehčení má hladina stále stejnou polohu a její rychlost je nulová. Z toho vyplývají následující počáteční podmínky (86) a (87):

$$z_1(t=0) = z_{10} = 0,1 \text{ m} \quad (86)$$

$$\frac{dz_1}{dt}(t=0) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (87)$$

Nyní můžeme rovnici vyřešit. Konstanty α respektive ω spočítáme z rovnic (78) respektive (79).

$$\alpha = \frac{16 \cdot \nu}{D^2} = \frac{16 \cdot 1,01 \cdot 10^{-6}}{0,03^2} = 0,017956 \text{ s}^{-1} \quad (88)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot S \cdot (S_1 + S_2)}{L \cdot S_1 \cdot S_2}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot \frac{\pi \cdot 0,03^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} + \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}\right)}{1 \cdot \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}}} = 0,7305 \text{ s}^{-1} \quad (89)$$

Protože platí $\omega^2 > \alpha^2$ bude docházet k periodickému tlumenému kmitání. Proto při řešení zvoleného problému použijeme rovnici (84). Hodnoty konstant C_1 a C_2 získáme z okrajových podmínek. Při aplikaci první počáteční podmínky (86) získáme konstantu C_2 .

$$z_{10}(t=0) = e^{-\alpha t} \cdot \left(C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) \right) \quad (90)$$

$$0,05 = e^{-\alpha \cdot 0} \cdot \left(C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot 0\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot 0\right) \right) \quad (91)$$

$$0,05 = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) \quad (92)$$

$$C_2 = 0,05 \quad (93)$$

Dále derivujeme rovnici (84) podle času. Po dosazení počáteční podmínky (87) získáme hodnotu konstanty C_1 (98).

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt}(t=0) = & -\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) \right) + \\ & + e^{-\alpha t} \cdot \left(C_1 \cdot \sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) - C_2 \cdot \sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) \right) \end{aligned} \quad (94)$$

$$0 = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot 0} \cdot \left(C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot 0\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot 0\right) \right) + \\ + e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot 0\right) - C_2 \cdot \sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot 0\right) \right) \quad (95)$$

Vyjádříme konstantu C_1 .

$$C_1 = C_2 \cdot \frac{0,017956}{\sqrt{|0,017956^2 - 0,7305^2|}} \quad (96)$$

$$C_1 = 0,05 \cdot \frac{0,017956}{\sqrt{|3,224 \cdot 10^{-4} - 0,533664|}} \quad (97)$$

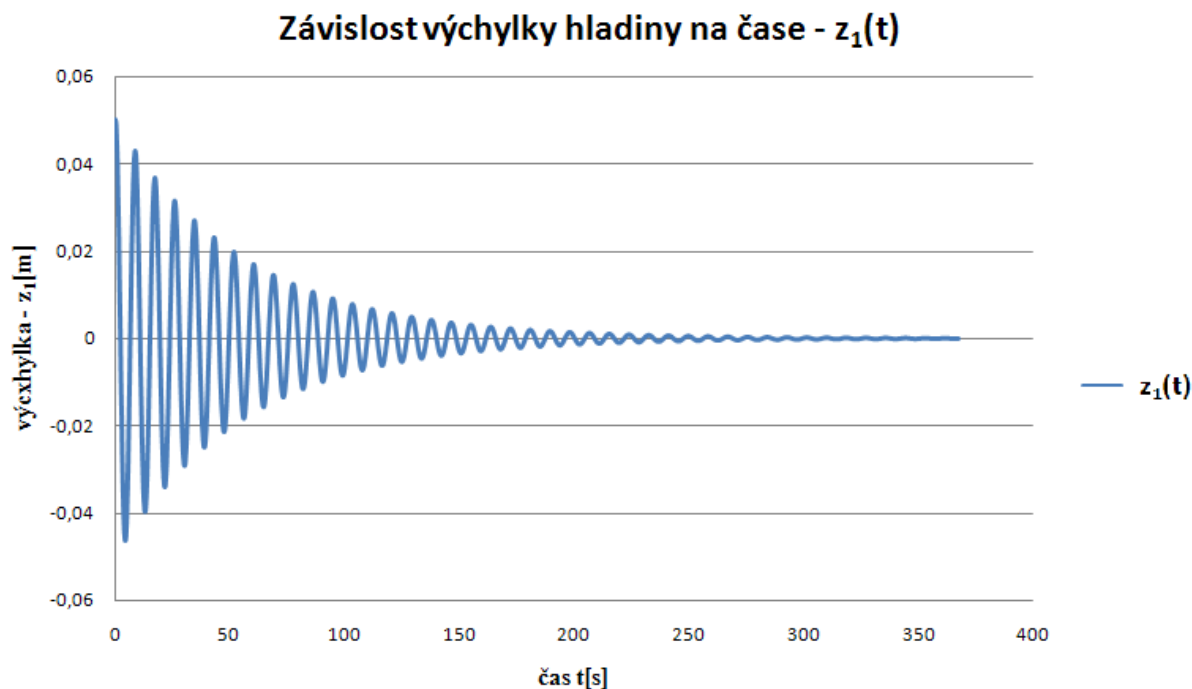
$$C_1 = 0,012293 \quad (98)$$

Obecný tvar výsledné rovnice (99), vyjadřuje závislost výchylky hladiny na čase. Po dosazení konkrétních hodnot získáme rovnici (100)

$$z_1 = e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(z_1(t=0) \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|}} \cdot \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) + z_1(t=0) \cdot \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 - \omega^2|} \cdot t\right) \right) \quad (99)$$

$$z_1 = e^{-0,0177956 \cdot t} \cdot (0,012293 \cdot \sin(0,7303 \cdot t) + 0,05 \cdot \cos(0,7303 \cdot t)) \quad (100)$$

Závislosti výchylky hladiny pro modelový příklad je zakreslena v grafu (14).



Obr. 14 – závislost výchylky hladiny na čase $z_1(t)$

8 Závěr

Bernoulliho rovnice je jednou ze základních rovnic hydrodynamiky. Její použití je nezbytné pro řešení většiny problému v hydrodynamice a významnou roli hraje i v této práci. Zde se využívá k popisu závislosti výchylky hladiny na čase u soustavy spojených nádob.

Pomocí Bernoulliho rovnice s nestacionárním členem byla odvozena poměrně složitá diferenciální rovnice druhého řádu, kterou nelze řešit obecně. Proto bylo uvedeno zjednodušené řešení kmitavého pohybu ve spojených nádržích, způsobeno prostým zanedbáním místních ztrát a předpokladem laminárních proudění ve spojovacím potrubí. Ve skutečných systémech se vyskytují místní odpory a je velmi pravděpodobné, že kapalina bude proudit turbulentně. Zajímavou diplomovou prací by mohlo být srovnání výpočtových modelů a naměřených hodnot.

Seznam použité literatury

- [1] ŠOB, František. *Hydromechanika*. 1. vyd. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2002. 238 s. ISBN 80-214-2037-5.
- [2] NOSKIEVIČ, J., et al. *Mechanika tekutin*. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987. 356 s. ISBN 04-233-87.
- [3] BRDIČKA, Miroslav, SAMEK, Ladislav, SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. 3. vyd. Praha : Academia, 2005. 799 s. ISBN 80-200-1344-X.
- [4] JANALÍK, J., ŠTÁVA, P. *Mechanika tekutin*. [s.l.] : [s.n.], 2002. 123 s. Dostupný z WWW: <<http://www.338.vsb.cz/studium9.htm>>.
- [5] JANALÍK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z mechaniky tekutin*. 1. vyd. Ostrava-Poruba : [s.n.], 2008. 178 s. Dostupný z WWW: <<http://www.338.vsb.cz/studium9.htm>>. ISBN 978-80-248-1910-5.
- [6] http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Bernoulli_Daniel.html

Seznam použitých zkratk a symbolů

a_i	-hmotnostní zrychlení	$[m \cdot s^{-2}]$
a_n	-lokální zrychlení sloupce kapaliny v potrubí	$[m \cdot s^{-2}]$
C, C_1, C_2	-integrační konstanta	[-]
D	-průměr potrubí	$[m]$
D_1, D_2	-průměry nádrží	$[m]$
E	-modul pružnosti v tahu	$[Pa]$
F_{mi}	-vektor hmotnostní síly	$[N]$
F_{pi}	-vektor tlakové síly	$[N]$
F_{si}	-vektor setrvačné síly	$[N]$
g	-gravitační zrychlení	$[m \cdot s^{-2}]$
h	-výška hladiny	$[m]$
ΔH	-rozdíl mezi dny nádrží	$[m]$
H	-větší výška klidové hladiny od dna nádrže	$[m]$
i, j	-sčítací indexy	[-]
k	-absolutní drsnost stěn potrubí	$[m]$
K	-modul objemové pružnosti kapaliny	$[Pa]$

l	- délka proudnice	$[m]$
L	- délka spojovacího potrubí	$[m]$
m	- hmotnost	$[kg]$
N_1, N_2	- označení nádrží	$[-]$
p	- tlak	$[Pa]$
p_a	- atmosferický tlak	$[Pa]$
p_z	- ztrátový tlak	$[Pa]$
Q	- průtok	$[m^3 \cdot s^{-1}]$
r	- poloměr potrubí	$[m]$
Re	- Reynoldsovo číslo	$[-]$
Re_k	- Reynoldsovo kritické číslo	$[-]$
S	- obsah průřezu potrubí	$[m^2]$
S_1, S_2	- průřez nádrží	$[m^2]$
t	- čas	$[s]$
T	- perioda kmitu	$[s]$
U	- potenciál	$[m^2 \cdot s^{-2}]$
v	- rychlost v daném bodě	$[m \cdot s^{-1}]$
v_s	- střední průřezová rychlost	$[m \cdot s^{-1}]$

V	-objem	$[m^3]$
Y_z	-ztrátová měrná energie	$[J \cdot kg^{-1}]$
z	-rozdíl výšky hladin	$[m]$
z_1, z_2	-výchylka hladin od ustáleného stavu v nádrži	$[m]$
α	-konstanta	$[s^{-1}]$
Δ	-relativní drsnost stěn potrubí	$[-]$
ζ_c	-celkový ztrátový součinitel	$[-]$
ζ_m	-součinitel místních ztrát	$[-]$
ζ_t	-součinitel třecích ztrát	$[-]$
λ	-třecí součinitel	$[-]$
μ	-dynamická viskozita	$[Pa \cdot s]$
ν	-kinematická viskozita	$[m^2 \cdot s^{-1}]$
π	-Ludolfovo číslo	$[-]$
τ	-tečné napětí	$[Pa]$
ρ	-hustota	$[kg \cdot m^{-3}]$
ω	-úhlová frekvence kmitu	$[Hz]$