Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2016 Bc. Marie Březinová

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Státní maturita z matematiky v různých evropských zemích

Diplomová práce

Autor:	Bc. Marie Březinová
Studijní program:	N1101 / Matematika
Studijní obor:	7504T / Učitelství pro střední školy – společný základ 7504T088 / Učitelství matematiky pro střední školy 7503T162 / Učitelství pro 2. stupeň ZŠ – francouzský jazyk a literatura
Vedoucí práce:	RNDr. Ladislava Francová, Ph.D.

Hradec Králové květen 2016

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor: **Bc. Marie Březinová**

Studijní program: N1101 / Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ – francouzský jazyk a literatura

Název práce: Státní maturita z matematiky v různých evropských zemích

Název práce v AJ: State secondary leaving exams in mathematics in the european countries

Cíl a metody práce: Cílem diplomové práce je stručně popsat historii státní maturity, navzájem porovnat současný model státní maturity z matematiky v některých evropských zemích a v České republice. Práce by měla obsahovat ukázky maturitních písemných prací z matematiky z několika evropských zemí a měla by porovnat jejich náročnost a rozdíly v jejich obsahu.

Garantující pracoviště: Katedra Matematiky, Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: RNDr. Ladislava Francová, Ph.D.

Oponent: Mgr. Lukáš Vízek

Datum odevzdání práce: 9.5.2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala (pod vedením vedoucího diplomové práce) samostatně a uvedla jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne 9. května 2016

Poděkování

Děkuji vedoucí diplomové práce RNDr. Ladislavě Francové, Ph.D. za poskytnutí cenných rad a pomoci při vypracovávání práce.

Anotace

Březinová, M. *Státní maturita z matematiky v různých evropských zemích.* Hradec Králové, 2016. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce RNDr. Ladislava Francová, PhD. 110 s.

Diplomová práce je zaměřena na popis a analýzu modelů maturit z matematiky ve vybraných evropských zemích a usiluje o srovnání se současným modelem v ČR. Komparace je založena na porovnání vybraných kritérií. Práce obsahuje přeložené ukázky jednotlivých maturitních zkoušek z matematiky z ČR, Slovenska, Francie, Švýcarska, Belgie, Velké Británie a je doplněná jejich řešeními.

Klíčová slova

zakončování středních škol v Evropě; vývoj maturitní zkoušky; maturitní zkouška z matematiky v ČR; maturitní zkouška z matematiky ve Francii, Belgii, Švýcarsku, Slovensku, Velké Británii, Irsku; evropské školství

Annotation

Březinová, M. *Secondary school-leaving examination of Mathematics in selected European countries*. Hradec Králové, 2016. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Supervisor of Diploma Thesis RNDr. Ladislava Francová Ph.D. 110 pg.

This Diploma Thesis is focused on a description and analysis of secondary school-leaving examinations of Mathematics used inselected European countries and it aspires to compare them with the current Czech template. The comparision is based on confrontation of chosen criteria. This Thesis contains translated examples of secondary school-leaving examinations of Mathematics in the Czech republic, France, Switzerland, Belgium, Slovakia and Great Britain. All examples are accompanied by the results.

Keywords:

termination of secondary school; development of secondary school-leaving examination; secondary school-leaving examination from Mathematics in the Czech republic; secondary school-leaving examination from Mathematics in France, Switzerland, Belgium, Slovakia, Great Britain, Ireland; European education system

Obsah

Úvod

Škola je základem každého státu již od nepaměti a bez školství si dnešní svět vyspělé státy ani nedovedou představit. Kvalita školství se odráží v ekonomické vyspělosti státu i v jeho kultuře. Zkvalitňování vzdělávacího procesu je tedy jeho důležitou součástí a měl by to být proces neustálý a přizpůsobující se změnám ve společnosti. Každý stát má svou vlastní historii i systém školství a je velmi zajímavé, v čem se vzájemně tyto systémy odlišují. Zároveň je velmi obtížné nalézt nejideálnější školský systém.

Tématem této diplomové práce je porovnání maturitní zkoušky z matematiky v České republice s maturitní zkouškou z matematiky na Slovensku, ve Francii, Švýcarsku, Belgii, Velké Británii a Irsku. Toto téma bylo vybráno na základě mé studijní aprobace, kterou je matematika a francouzský jazyk. Navazuji na téma mé bakalářské práce, ve které jsem srovnávala pouze českou maturitu z matematiky s francouzskou. Zkouška z matematiky je velmi dobře srovnatelná, neboť je v každém státě založena na stejných principech. Z důvodu znalosti pouze francouzského a anglického jazyka a omezeného rozsahu práce jsou vybrány jen francouzsky a anglicky mluvící země Evropy. Slovensko je vybráno na základě společné historie.

Cílem této práce je srovnání modelů maturity z matematiky v České republice s vybranými zeměmi. Práce popisuje jednotlivé vzdělávací systémy těchto zemí, jejich historii a především popisuje průběh maturitní zkoušky z matematiky. Ve srovnávací části se objevují ukázky maturitních zadání z matematiky pro studenty gymnázií z České republiky, Slovenska, Francie, Velké Británie, Švýcarska a Belgie. Řešení jednotlivých ukázek jsou součástí příloh. Cílem je poskytnout představu o formě maturitní zkoušky z matematiky v různých evropských zemích. Srovnání je založeno na těchto kritériích: typ maturity (školní, státní), povinná/nepovinná, počet obtížností, věk maturantů, pomůcky, čas na vypracování, termín zkoušky a typy úloh.

Předpokládá se, že ve vybraných zemích má maturitní zkouška z matematiky podobnou formu a je stejná pro všechny maturanty. Dále, že věk maturantů je stejný, testová zadání jsou svým charakterem podobná, mají stejnou obtížnost, obsahují stejné tematické celky a dají se srovnat.

Diplomová práce je založena na komparativní metodě a je rozdělena na analytickou a srovnávací část. V analytické části jsou popsány školské systémy jednotlivých zemí zaměřené na maturitní zkoušku a její vývoj. U každé země je důkladně popsána maturitní zkouška z matematiky. Srovnávací část porovnává maturitní zkoušku z matematiky na základě vybraných kritérií a předpokladů. Obsahuje ukázky testových zadání z vybraných zemí, řešení jsou doplněna v přílohách. Pro zpracování analytické části bylo potřeba nalézt veškeré informace týkající se školských systémů v České republice, na Slovensku, ve Francii, Belgii, Švýcarsku, Velké Británii a Irsku. Seznámit se s jejich historií, nalézt veškeré požadavky k maturitě a následně je přeložit do českého jazyka. Dále bylo nutné přeložit všechny ukázky maturitních zadání i jejich řešení. Předpokládá se, že čtenář se orientuje v matematické problematice.

K vypracování práce bylo použito více internetových zdrojů než monografických, neboť k tomuto tématu jsou literární zdroje obtížně dostupné. Citováno bylo podle webu *citace.com* a podle ČSN ISO 690 Bibliografické citace. Úprava práce byla provedena na základě Rozhodnutí děkana přírodovědecké fakulty č.4/2015.

1 Analytická část

V této části jsou popsány vzdělávací systémy vybraných zemí. Zároveň jsou čtenáři přiblížena schémata maturitních zkoušek v těchto zemích, především zkoušky z matematiky.

1.1 Historický kontext maturitní zkoušky

„Závěrečné zkoušky hrají důležitou roli ve vzdělávacích systémech mnoha zemí světa z řady důvodů. Ověřují a potvrzují úroveň kompetencí absolventů střední školy, významnou pro budoucí zaměstnavatele, a především podávají vysokým školám informaci relevantní pro výběr jejich budoucích studentů. Pro studenty jsou závěrečné zkoušky ověřením sil a studijních schopností v důležité etapě života a nepochybně i vyvrcholením úsilí, které vkládali do učení nejen v posledním období před zkouškami, ale po celou předchozí dobu školní docházky. Závěrečné zkoušky jsou významné pro školu a její učitele, neboť jim poskytují informaci o úspěšnosti studentů, které vyučovali a zpětnou vazbu o kvalitě práce školy.“ (Walterová, 1996, s. 9) Tyto zkoušky samozřejmě indikují všeobecnou vzdělanost populace před vstupem do dospělosti. Ve většině evropských zemí jsou tyto zkoušky nedílným vzdělávacím standardem.

V jakém období se začíná objevovat původ maturitní zkoušky jako takové? Tzn. standardizované, objektivní a veřejné zkoušky, jíž výsledek ovlivňuje životní dráhu jednotlivce. Nemáme na mysli průběžné ověřování vědomostí studentů učiteli. Nejstarší zkoušky v podobě maturity vznikly v Číně v 7. století př. n. l. Toto testování mělo za úkol především vybrat vhodného kandidáta pro vládu v dynastii. Až v 8. století n. l. se tyto zkoušky rozšířily do Japonska a až v 18. století do Evropy. V té době ovlivnila tato testování především praktiky jezuitů a jejich ověřování znalostí na školách. Zkoušky měly především písemnou formu a sloužily také jako nástroj pro výběr státních úředníků. Zastávaly tedy především selektivní funkci. Poté přibyla i funkce kvalifikační, kdy bylo potřeba absolvovat speciální vzdělávací kurzy. K požadavkům na maturitní zkoušku se poté vyjadřovali i vysokoškolští pedagogové a maturita tak začala mít váhu i pro přijetí na vysokou školu. Zkoušky měly standartní podmínky pro všechny, kontrolovaly kvalitu vzdělání absolventů a dala se srovnat i úroveň škol. Moderní systémy se začaly rodit v druhé polovině 18. století a na začátku 19. století. Jejich požadavky měly zároveň dopad na kvalitu a obsah školního vzdělávání, dochází tak ke standardizaci kurikul jednotlivých zemí. Maturita zaručovala kvalitu a zajišťovala požadovaný vzdělávací standard. Kurikulum i maturita se vzájemně ovlivňovaly. Regulační funkce plnily zkoušky zhruba do 60. let 20. století. Poté dochází k masovému vzdělávání na středních školách, rozvoji techniky i poznání ve vědě a mění se i požadavky maturit. Objevují se nové předměty a obsahy předmětů se orientují více na praktické aplikace. Využívání počítačů umožňuje zařazovat úlohy s výběrovými odpověďmi, avšak to s sebou nese vymizení náročnějších kognitivních operací. Maturitní zkouška se stává diverzifikovanou, objektivnější a variabilnější. Objevují se instituce, které se zabývají přípravou a vyhodnocováním maturitních zkoušek. Ty se neustále vyvíjejí a jsou nuceny reagovat na změny ve společnosti. (Walterová, 1996)

1.2 Česká republika

Školství má v České republice dlouholetou nezastupitelnou roli a neustále se vyvíjí na základě požadavků společnosti. Školský systém můžeme rozdělit do tří následujících sfér: základní, středoškolské a vysokoškolské. Základní školy jsou navštěvovány žáky ve věku od šesti do patnácti let, středoškolské vzdělání ukončují studenti v 19 letech. Většina středních škol zakončuje studium maturitní zkouškou. V dnešní době pokračuje velká část studentů ve studiu na vysokých školách.

1.2.1 Maturitní zkouška v České republice

Studenti středních odborných škol, gymnázií, některých odborných učilišť a konzervatoří zakončují své studium úspěšným složením maturitní zkoušky. Tato zkouška je pro většinu odrazovým můstkem pro další studium na vysoké škole. Podoba maturitní zkoušky se v průběhu historie měnila, tudíž nelze porovnávat maturitu dnešní s maturitou, kterou skládali studenti před půl stoletím.

„Maturity se v našem školství objevují jako součást významných reforem, k nimž dochází ve středním školství v letech 1848-1849. Jakkoliv tyto reformy vycházely ze zkušeností a moderních poznatků pruského školství, jejich vlastními tvůrci byli Franz Exner, působící po řadu let na pražské univerzitě a německý klasický filolog Hermann Bonitz.“ (Morkes, 2003, s. 9) V těchto dobách byly maturity zavedeny pouze na gymnáziích a byly státní. Zajišťovaly zcela srovnatelnou úroveň všech absolventů. V dalších letech se vývoj maturity měnil. Byla rozdělena na písemnou a ústní část a byla odlišná na různých středních školách (lišily se i zkušební předměty). Po roce 1945 prestiž maturity velmi poklesla, neboť vzdělání bylo silně podceňováno na úkor manuální práce. Tento stav trval až do r. 1968. Poté se maturita opět vyvíjí a nabývá různých podob. Důležitým mezníkem je rok 1989, kdy dochází ke zrovnoprávnění výuky cizích jazyků, ruština ztrácí své výsadní postavení a přestává být povinným maturitním předmětem. (Morkes, 2003). V posledním dvacetiletí až do roku 2010 si každá škola sestavovala maturitu podle sebe. Maturita byla písemná i ústní, maturovalo se ze 4 předmětů. Povinný byl český jazyk a cizí jazyk. Zbylé dva předměty si studenti zvolili dle svého uvážení (především na gymnáziích). Objektivnost této zkoušky však nešlo zaručit. Je zřejmé, že maturita na gymnáziu byla odlišná od maturity na odborném učilišti. Avšak náročnost byla přímo úměrná typu školy.

1.2.2 Nová státní maturita

Od roku 2011 je v České republice zavedena maturita státní. *„Na úvod je potřeba říct, že zavedení nové maturitní zkoušky není neuváženým krokem do neznáma, který probíhal cestou „pokus-omyl". Jedná se o promyšlený projekt, který vzešel z dlouholetých diskuzí školských odborníků. Trend státních maturit jde napříč Evropou a se vstupem do Evropské unie se mu nevyhnula ani ČR. Většina zemí se k tomuto kroku uchýlila již v minulosti. Díky tomu jsme mohli čerpat i z jejich zkušeností – a to jak z těch dobrých, tak i špatných."* (Informační balíček k nové maturitě: pro maturanty 2012, 2011, s. 3). Tento typ zkoušky zajišťuje jednotnost a stejné ohodnocení pro všechny. Současná podoba maturitní zkoušky se dělí na dvě části: společnou (státní) a profilovou (školní). Aby žák u maturity uspěl, je potřeba složit úspěšně obě části. V roce 2015 byly ve společné části povinné 2 zkoušky - z českého jazyka a studenti si k tomu mohli vybrat cizí jazyk nebo matematiku. Ve společné části si mohli navolit také 2 nepovinné zkoušky a to z nabídky cizích jazyků nebo matematiky. Každý test se skládá po celé republice v předem stanovený den a je pro všechny stejný. Testování společné části maturity probíhá obvykle začátkem května. Profilová část je v plné kompetenci každé střední školy. Je třeba složit 2-3 povinné zkoušky a dále je možné si vybrat až ze dvou nepovinných zkoušek. Podobu, témata a termíny, kdy se koná profilová část, stanovuje ředitel školy podle rámcového a školního vzdělávacího programu (RVP[1]). Tato část probíhá obvykle koncem května a v první polovině června. (Maturitní zkouška 2015, 2015)

[1] Rámcové vzdělávací programy označují hlavní kurikulární dokumenty, podle kterých se na školách vyučuje.

1.2.3 Maturita z matematiky

Tato práce se věnuje pouze státní části maturity z matematiky. Zkouška probíhá obvykle začátkem května v předem stanovený den a skládají ji studenti všech středních škol, kteří si vybrali matematiku místo cizího jazyka. Studenti jsou povinni vypracovat didaktický test stejný pro všechny, který připravuje i vyhodnocuje příspěvková organizace Cermat, řízená Ministerstvem školství mládeže a tělovýchovy. V prvních 15 minutách mají žáci prostor na prostudování otázek celého testu. Na vypracování testu mají dalších 90 minut. Z pomůcek jsou povoleny Matematické, fyzikální a chemické tabulky, rýsovací potřeby, kalkulačka bez grafického režimu, řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. V testu se objevují otevřené úlohy se stručnou odpovědí, u kterých je hodnocena odpověď a tou je buď numerický výsledek, odvozený vztah nebo geometrická konstrukce. Druhým typem zadání jsou uzavřené úlohy, ve kterých si student vybírá z nabízených odpovědí. V testu se objevují úlohy s problematikou běžného života, úlohy z nematematických oborů, k jejichž vyřešení postačí základní matematické znalosti a dovednosti ze základní školy. V matematickém testu je možno získat maximálně 50 bodů a hranice úspěšnosti je 33 %. Každá úloha je bodově ohodnocena podle obtížnosti. Studenti vpisují odpovědi do záznamového archu a vždy je pouze jedna odpověď správná. Celé zadání obsahuje 26 úloh.

Tematické okruhy

Didaktický test z matematiky prověřuje 5 kompetencí, které by si měl žák během středoškolského učiva osvojit. Je to především porozumění matematickým pojmům a zvládnutí jejich následné aplikace, schopnost matematizovat reálné situace, vymezení a řešení problému, porozumění matematickému textu a následné vyhodnocení jeho informací. Student by měl umět využívat matematické pomůcky.

Podle Katalogů požadavků (2015) se v testu může objevit matematická problematika z devíti tematických okruhů. Největší zastoupení mají *rovnice a nerovnice*, ve kterých se může objevit řešení lineární rovnice o jedné neznámé, soustava rovnic o dvou neznámých, určení definičního oboru rovnice, vyřešení rovnice s neznámou ve jmenovateli o jedné neznámé a užití rovnic ve slovních úlohách. V testu se může objevit i sestrojení grafu, kvadratická rovnice a nerovnice a určení jejích kořenů a koeficientů. K tomuto tématu se vážou také soustavy lineárních nerovnic s jednou neznámou. Velmi silné zastoupení mají *algebraické výrazy,* se kterými souvisí určení hodnoty výrazu a jeho definičního oboru, provádění početních operací s mnohočleny, vytýkání a užití součinových vzorců. Do tohoto okruhu patří i lomené výrazy a práce s mocninami a odmocninami.

Dalším důležitým tématem jsou *funkce*, u kterých maturant prokáže schopnost užívat základní poznatky a pojmy související s funkcemi, sestrojit graf podle předpisu a určit průsečíky grafu funkce s osami soustavy souřadnic. V zadání se mohou vyskytnout lineární funkce, lineární lomené funkce, kvadratické funkce, exponenciální a logaritmické funkce a jejich rovnice a s nimi související vlastnosti či goniometrické funkce.

V *planimetrii* se klade důraz na přesné pochopení základních geometrických pojmů a vztahů v rovině, rozlišení konvexních a nekonvexních útvarů a konstrukce rovinných útvarů. Uchazeč se orientuje v základních poznatcích o trojúhelnících a se kterými souvisejí také věty o shodnosti a podobnosti. Vyskytují se i příklady na trigonometrii, čtyřúhelníky, mnohoúhelníky, kružnici a kruh, shodná zobrazení a jejich vlastnosti. Téma stereometrie se zabývá jednotlivými tělesy a s nimi souvisejícími výpočty objemu, obsahu a povrchu. Nechybí ani převody jednotek a metrické a polohové vlastnosti v hranolu.

V *kombinatorice* a *pravděpodobnosti* se objevují variace, permutace, kombinace bez opakování, faktoriály a kombinační čísla. Zadání testuje i znalost pojmů jako je náhodný pokus, výsledek náhodného pokusu, náhodný jev, opačný jev, nemožný jev, jistý jev a dovednost vypočítat pravděpodobnost náhodného jevu. Ve *statistice* se objevují pojmy jako je statistický soubor, rozsah souboru, statistická jednotka, statistický znak kvalitativní a kvantitativní, určení charakteristiky polohy a variability a výpočet četností.

Jedním z procentuálně nejméně zastoupeným tématem jsou *číselné obory*, ve kterých student prokazuje základní znalosti z oboru přirozených, celých, racionálních a reálných čísel, práci se zlomky, absolutními hodnotami, intervaly, mocninami a odmocninami, procenty a zaokrouhlováním. V tématech státní maturity nechybí ani znalosti z oboru *finanční matematiky a posloupností,* kde student narazí na vzorce pro n-tý člen, grafická znázornění, geometrickou či aritmetickou posloupnost a jejich aplikace v reálných situacích.

Posledním tématem je *analytická geometrie*, která je zaměřená pouze na rovinu a přímku. Student by měl být schopen určit souřadnice bodu a vektoru na přímce i v rovině, velikost vektoru, užít parametrickou a obecnou rovnici přímky, porozumět kolmosti vektorů a grafické interpretaci vektorů.

1.3 Francie

Francouzský vzdělávací systém má stejně jako v České republice dlouholetou tradici a je mu velmi podobný. Povinná školní docházka je ve Francii stanovena na 10 let, a to od šesti do šestnácti let. Školství se dá rozdělit do třech cyklů – primárního (jehož součástí jsou i mateřské školy), sekundárního a terciálního. Tzv. „écoles élementaires" jsou obdobou českých základních škol 1. stupně. Žáci je ukončují v deseti letech. Sekundární cyklus je rozdělen do dvou úseků, čtyřletého a tříletého. Čtyřletý cyklus na tzv. „collège“ trvá do 15 let a dal by se přirovnat k 2. stupni ZŠ. Žáci dále pokračují na lyceích (pouze na 3 roky), která jsou zakončená maturitní zkouškou. Třídy jsou číslovány obráceně, než jak je zvykem v České republice. Závěrečnou zkoušku skládají studenti v osmnácti letech. Do terciárního cyklu se řadí univerzity a další možnosti vysokoškolského vzdělávání. (Francouzský vzdělávací systém, 2014)

1.3.1 Maturitní zkouška ve Francii

Francouzské školství si prošlo dlouhodobým vývojem a s ním se měnila i podoba maturitní zkoušky. Tato zkouška se nazývá „baccalauréat (BAC)“[2]. Tento diplom ukončuje středoškolské vzdělání a poskytuje možnost k přijetí na vysoké školy. Již od začátku se maturita vyznačuje jednotným systémem pro celý stát, avšak je rozdělena do několika řad a typů.

Jak uvádí Konopásková (2008), tradice francouzské maturity sahá až do r. 1808, kdy Napoleon I. Bonaparte uzákonil tento typ zkoušky císařským dekretem. V té době to byl ústní typ zkoušky testující znalosti řeckých autorů, rétoriky, historie, zeměpisu a filosofie. V následujících dvaceti letech byla zavedena i zkouška písemná. V roce 1821 byla vytvořena nová BAC věd, která prověřovala hlavně znalosti matematické, fyzikální a přírodní. Byla určena zejména pro studenty, kteří se rozhodli pro doktorské povolání. V další polovině století se objevuje i BAC z humanitních předmětů. Tato zkouška je již rozdělena do dvou částí, které studenti skládají během jednoho roku. V roce 1946 se první část rozděluje do sedmi řad a o 7 let později vzniká takzvaná technická a ekonomická řada. V celé první polovině 20. století se vlastně maturita postupně rozděluje na dvě části, kdy první část studenti skládají na

[2] Baccaluréat, neboli francouzská maturita. Označuje se zkráceně BAC.

konci předposledního ročníku a druhou část v závěru studia na lyceu. Koncem 60. let se objevují nové řady maturit a vzniká tzv. technologická maturita („*baccalauréat technologique*“[3]), ve které existuje osm řad a studenti po jejím úspěšném absolvování mohou pokračovat na univerzitních technologických institutech. Rok 1985 přinesl profesní maturitu („*baccalauréat professionel*“[4]), kde kvalifikovaní absolventi nepokračují na vysoké školy, ale hned po složení maturity se zapojují do aktivního pracovního života. V 90. letech se tzv. všeobecná maturita („*baccalauréat géneral*“[5]), která by se dala přirovnat k maturitě na gymnáziích, vyčleňuje do nových řad: ES – řada ekonomická a sociální, L – literární, S – přírodovědná. Úspěšné složení všeobecné maturity opravňuje studenty ke vstupu na univerzity, vysoké školy tzv. „*grandes écoles*“[6] a na univerzitní technologické instituty.

V současné době si francouzské školství zachovalo 3 typy státní maturity. Jedná se o maturitu všeobecnou, technologickou a profesní. Žáci se rozhodují na konci prvního ročníku střední školy (na gymnáziích si vybírají z typů pro gymnázia, na technické škole z technických typů), ke kterému typu maturity budou směřovat. Řádný termín zkoušek se koná v červnu. Organizace maturity zabere několik měsíců příprav a za úroveň zkoušek zodpovídá inspekce národního vzdělávání. Na přípravě se rovněž podílí rektoři akademií, administrativní pracovníci a dozorci.

- **Všeobecná maturita („*baccalauréat général*“)**

Jak bylo již uvedeno v historii maturitní zkoušky, tento typ zkoušky je rozdělen do tří sérií (typů), kde každá se drží základního všeobecně vzdělávacího programu a zároveň opravňuje studenty ke vstupu na vysokou školu. Podle informací z Le baccalauréat géneral (2015) skládají maturanti zkoušku ve dvou kategoriích. První

[3] Baccalauréat technologique = technologická maturita
[4] Baccalauréat professionel = profesní maturita
[5] Baccalauréat géneral = všeobecná maturita
[6] Grandes écoles - typ vysoké školy

kategorii skládají všichni studenti a obsahuje zkoušky, které se skládají na konci předposledního ročníku a potom na konci závěrečného ročníku („*l´année de terminalle*“[7]).

Ekonomicko-sociální maturita (ES) je víceoborová, s důrazem na sociální a ekonomické životní prostředí, avšak důležitou součástí je rovněž historie, zeměpis, matematika a politické vědy. Více jak 50 % studentů pokračuje na univerzity a zbytek studentů si dodělává technologické diplomy, pokračují na specializovaných školách nebo podstupují přípravné kurzy na vysoké školy.

Literární maturita (L) je zaměřena hlavně na analýzu a syntézu. Jejím cílem je analyticky prohloubit literární kulturu. Student by měl být schopen sám argumentovat a udělat kritickou reflexi na základě filosofických znalostí. Studenti jsou humanitně zaměřeni, především na literaturu, cizí jazyky, umění, hudbu a tanec. Většina studentů pokračuje ve studiu na univerzitách nebo vysokých školách.

Maturita přírodovědná (S) klade důraz na abstrakci, rozum, přesnost a schopnost experimentovat. Jejím cílem je rozvíjet vědecké poznání. Studenti se zaměřují na matematiku, fyziku, chemii, cizí jazyky, ale také na astronomii a nauku o planetě Zemi. Ve studiu opět většina pokračuje na univerzitách.

- **Technologická maturita („baccalauréat technologique“)**

Tato maturita propojuje všeobecné vzdělání s technologickým. Její výhodou je, že studenti mají možnost (neboť jsou dostatečně profesně způsobilí) přímého nástupu do zaměstnání. Studenti skládají zkoušky opět ve dvou rocích a podle informací na webu Le baccalauréat technologique (2015) se dělí do sedmi sérií (typů).

Maturita managementu a správy technologií (STMG) nabízí čtyři specializace.

[7] L´année de terminalle je poslední ročník střední školy.

Maturita průmyslových technologií a stálého rozvoje (STI2D) se specializuje do 7 variant a po studiu si většina dodělává univerzitní technologický diplom nebo technické osvědčení.

Maturita laboratorních technologií (STL) nabízí tři specializace.

Maturita zdravotních a sociálních technologií (ST2S) jejímiž hlavními tématy je biologie člověka a psychologie člověka.

Maturita technologií designu a aplikovaného umění (STD2A) pracující s uměním a technikou.

Maturita z hudby a tance (TMD), na níž probíhá příprava na lyceu a na konzervatořích. Skládá se z oborů humanitních i technických.

Maturita z hotelnictví, jejímž cílem je víceoborová příprava pro hotelnictví, restaurace a ubytování.

- **Profesní maturita („baccalauréat professionnel“)**

Touto maturitou se rozumí nabytí tzv. národního diplomu, který poté jejím absolventům zajišťuje profesní začlenění. Obsahuje 7 povinných zkoušek, kde každá může spojovat více témat a uchazeči si mohou vybrat i jednu zkoušku nepovinnou. Existuje necelých 80 specializací a uchazeči se na ni cíleně připravují 3 roky. (Le baccalauréat professionnel, 2016)

1.3.2 Maturita z matematiky

Všeobecnou maturitu z matematiky, která je rozdělená na variantu L, ES a S, skládají studenti na konci závěrečného ročníku obvykle začátkem června v předem určený den a zadání je pro všechny stejné. Zkouška probíhá formou testu s otevřenými otázkami. Studenti, kteří se rozhodli pro přírodovědný směr, skládají maturitu z matematiky typu S (ta je pro ně povinnou). Trvá 4 hodiny a je rozdělená do 3 až 5 úloh, kdy každá má ještě další podotázky. Maturity typu L a ES trvají pouze tři hodiny a mají nižší koeficient důležitosti. Stejně tak počet úloh je nižší. Studenti se pro ni mohou rozhodnout z nabízených předmětů, ale není povinnou. Z pomůcek může být povolená kalkulačka, ale není to podmínkou (bývá uvedeno v zadání). Užití tabulek při testu není povolené, avšak tvůrci maturit mohou uvést nějaké základní vztahy v úvodu úlohy. Náročnost maturit je úměrná zvolenému typu maturity. Student u maturity uspěl, získá-li minimálně 50 % bodů. Ti, kteří této hranice nedosáhnou, mají možnost ústní opravy. Hodnotící komise bere ohled na částečné výpočty a výsledky.

Technická maturita z matematiky je stejně jako všeobecná rozdělená dle typu zaměření. V oborech: hudba a tanec trvá maturita 4 hodiny, hotelnictví 1,5 hodiny, STD2A a STMG 3 hodiny, STI2D a STL 4 hodiny, ST2S 2 hodiny. Maturity mají opět svůj koeficient důležitosti, pomůcky a způsob hodnocení je stejný jako u všeobecné maturity. Úlohy jsou sestavovány na základě zaměření studentů. Snahou tvůrců je připravovat úlohy praktické.

Ani v *profesní maturitě* nechybí zkouška z matematiky. Pravidla jsou stejná jako u všeobecné maturity, opět se liší délky zkoušek a jejich důležitost. Téměř v každém z obrovského množství oborů je na výběr zkouška z matematiky (u některých i povinně).

Tematické okruhy

Každé zadání úlohy je zaměřeno na typ studia, ale téměř všechny maturity se drží stejné struktury. Většinou se objevují důkazové úlohy, dále úlohy početní, s výběrovou odpovědí nebo je třeba určit, zda je řešení pravdivé či nikoliv. Tematické okruhy maturit se odvíjí od kurzů v daných ročnících. Studenti mají možnost najít si zadání z minulých let a maturitu si takto vyzkoušet.

Obvykle se v maturitě vyskytují příklady zaměřené na komplexní čísla, dále funkce – převážně exponenciální a logaritmické. Velmi časté jsou posloupnosti i pravděpodobnost a nechybí ani úlohy zaměřené na geometrii v prostoru a v rovině, testující také znalosti podobnosti a rovinných řezů těles. V mnoha případech se objevuje i přirozený logaritmus, derivace a integrály. Studenti se musí připravit i na úlohy z aritmetiky, v určitých obtížnostech se vyskytne i diferenciální rovnice, primitivní funkce, analytická geometrie. Charakteristickým příkladem francouzské maturity jsou úlohy založené na daném algoritmu. Student musí postupovat dle zadaných kritérií a postupně dokazuje to, co se po něm požaduje. Každá varianta je odlišná v obtížnosti, zadání úloh, nárocích na studenta a je proto velmi obtížné sjednotit všeobecná témata. (Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011, 2011)

1.4 Švýcarsko

Švýcarský vzdělávací systém je charakteristický decentralizací. Primární zodpovědnost za vzdělání mají kantony.[8] Odpovídají za vzdělávací systém, avšak mohou být nahrazeny zodpovědností konfederace. V povinné školní docházce dohlíží na předpisy, nařízení a prosazují nové návrhy. Povinné vzdělání trvá ve Švýcarsku 11 let a začíná již dvěma roky v mateřské škole, na kterou navazuje první stupeň (dohromady 8 let). Tzv. nižší sekundární vzdělání trvá 3 roky. Žáci ukončují povinnou školní docházku v 15/16 letech. Vyšší sekundární vzdělání je rozděleno do hlavních vzdělávacích programů a programů připravujících na budoucí profesi. Hlavní vzdělávací programy zahrnují školy s maturitou a specializované školy. Na rozdíl od

[8] Švýcarsko je konfederací a je rozděleno na 26 kantonů. Každý z kantonů má vlastní parlament, zákony, vládu, rozpočet i ústavu.

profesních programů nepřipravují k budoucímu povolání, ale k dalšímu studiu na univerzitě. Většina adolescentů směřuje z nižšího sekundárního vzdělávání ke studiu profesnímu. Druhý stupeň končí studenti ve věku 18/19 let.

1.4.1 Maturitní zkouška ve Švýcarsku

Maturitou ve Švýcarsku se rozumí úspěšné zakončení vyššího sekundárního vzdělání a je ekvivalentem francouzské maturity. Tento diplom umožňuje studium na univerzitě. Podle informací na stránce Maturité (2010) nebyl diplom ze střední školy až do začátku 19. století ani přístup na univerzitu nějakým způsobem regulován. Od roku 1800 měly vyšší střední školy (gymnázia, odborné střední školy) oprávnění zajišťovat maturitní zkoušky, které umožňovaly vstup na univerzity. První maturitní zkouška se konala v kantonu Aargau v roce 1836. Zavedení národních zkoušek z medicíny přineslo v roce 1880 nové právní předpisy, které upravovaly přístup k tomuto typu studia. Následkem toho založila federace v roce 1891 maturitní federální komisi a vyhlásila první ucelený návrh maturitní zkoušky v roce 1906. Po dlouholetých diskuzích byla vyčleněna tzv. gymnaziální maturita (i pro vyšší střední školy, nejen pro gymnázia), která byla v počátcích rozdělena na typ A (latina-řečtina), typ B (latina-angličtina) a typ C (vědecká). V nové podobě se objevuje v roce 1968, kdy je uznána jako zkouška, která zakončuje studium na gymnáziu a opravňuje ke vstupu na vysokou školu. V roce 1972 přibývá typ D (moderní jazyky) a E (ekonomika). V dalších reformách přibyly studijní plány pro školy připravující k maturitě. V roce 1995 byly různé typy maturit zrušeny a tak mají studenti možnost vybírat ze základních oborů na jedné straně a dále mají možnost specifického nebo doplňujícího výběru na straně druhé. To znamená, že si vybírají z oborů, kterým by se chtěli v budoucnu věnovat. Od počátku existuje také maturita kantonální, která nemá platnost v celé federaci. Vedle gymnaziální maturity existovala od roku 1936 také maturita obchodní, umožňující přístup na vysoké obchodní školy. Od roku 1994 se objevuje maturita profesní (s orientací na techniku, obchod, umění nebo řemesla), která spojuje znalosti profesního života s kulturními a povoluje vstup na vyšší vzdělávací instituce. Vstup na univerzity je v tomto případě značně omezen.

V současné době se ve Švýcarsku objevují 3 typy maturity: profesní, gymnaziální a speciální. K profesní maturitě směřují studenti, kteří studují na středních školách připravujících k profesnímu životu. Tato maturita je organizována federací nebo kantonem. Gymnaziální maturitu chtějí úspěšně složit studenti vyšších středních škol zaměřených na všeobecné vzdělání. Zkouška je pro studenty denního studia na dané střední škole organizována kantonem a splňuje veškeré předpisy tak, aby byla uznána na území celého Švýcarska. Objevuje se zároveň i typ federální gymnaziální maturity, která je určena především těm, kteří se vzdělávají buď sami, na soukromých školách nebo dálkově a je platná i mimo území Švýcarska. Její obtížnost je vyšší, neboť její hodnocení se nevztahuje ke známkám z celého roku a je hodnocena nezávisle, protože studenti neznají hodnotící komisi. K hlavním předmětům jak profesní tak gymnaziální maturity se řadí zkouška z jazyka, z cizího jazyka a matematiky. Další předměty si žák vybírá na základě své specializace. Maturita je ještě doplněna písemnou prací. Vyšší speciální školy poskytují základní všeobecné vzdělání doplněné profesním studiem ve specifických disciplínách, jako je péče o zdraví, sociální práce a vzdělávání. Studenti, kteří pokračují na tzv. dodatečný ročník, zakončují své vzdělání speciální maturitou, kde musí rovněž zúročit praktické znalosti v jejich vybraném oboru. Mohou dále pokračovat na univerzity aplikovaných věd či na pedagogické univerzity. (Education in Switzerland, 2015)

1.4.2 Maturita z matematiky

Maturitní zkoušky gymnaziálního a speciálního typu probíhají ve Švýcarsku po celý červen v jednotlivých kantonech a skládají je studenti ve věku 18/19 let. Profesní zkoušky se konají obvykle v červenci a srpnu v hlavním městě, záleží však, jestli jsou pořádány kantonem nebo federací. Ve všech verzích se objevuje zkouška z matematiky, která je u některých oborů povinná. Zkouška je jak písemná, tak ústní. Čas na vypracování se může lišit podle kantonů. Profesní zkouška z matematiky trvá 2 hodiny, gymnaziální obvykle 3-4 hodiny (je rozdělená na základní a vyšší úroveň, kterou si vybírají studenti podle zaměření). Využívání kalkulačky a tabulek je povolené, u některých verzí i se systémem grafů a rovnic. Každé zadání obsahuje obvykle 3-5 otevřených úloh s dalšími podotázkami. Každá úloha je ohodnocena určitým počtem bodů. Odevzdané maturitní zadání je opravováno švýcarskou maturitní komisí, která dohlíží na průběh podle regulí ve všech kantonech. Každý maturitní předmět je hodnocen známkou, kdy nejlepší známka je 6 a nejhorší 1. Celková úspěšnost u maturity se spočítá ze získaných bodů (známek) podle stanovených pravidel.

Tematické okruhy

Každá verze maturity z matematiky je svým způsobem odlišná a s tím souvisí i požadavky k této zkoušce. Na základě informací z L´espace suisse de formation (2016) můžeme okruhy sjednotit následovně:

V profesní maturitě a v tematickém celku *algebra a aritmetika* se objevují úpravy výrazů; mocniny s celým a racionálním exponentem a operace s nimi; logaritmická funkce a její souvislost s exponenciální funkcí. Objevuje se řešení lineárních *rovnic.* Nechybí rovnice exponenciální, logaritmické a rovnice s absolutní hodnotou. Téma *funkce* zahrnuje lineární funkce – funkce mocninné a odmocninové, polynomické funkce, exponenciální a logaritmické funkce. *Geometrie* směřuje především k pochopení slovního zadání a studentově představivosti. Student prokazuje znalosti základních geometrických útvarů a jejich vlastností – hranol, jehlan, komolý jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý kužel a koule. Objevují se výpočty objemů, povrchů a délek hran těles. Úlohy pracují i s výpočty založenými na podobnosti. Důležité je pochopení kartézské soustavy souřadnic a jednotkové kružnice. *Analytická geometrie* obsahuje práci s vektory – sčítání, odčítání, skalární součin a lineární kombinace. Student by měl být schopen zaznačit vektory do soustavy souřadnic; vyjádřit parametricky rovnici přímky; spočítat vzdálenost dvou bodů a velikost úsečky; určit úhel, který svírají dvě přímky a jejich vzájemnou polohu.

Gymnaziální maturita v *algebře* obsahuje navíc řešení soustav lineárních rovnic o 1, 2 až 3 neznámých; řešení rovnic 2. stupně a nerovnice o jedné neznámé. V tématu *analýza* musí být studenti schopni stanovit definiční obory základních funkcí, jejich vlastnosti a měli by být schopni tyto funkce graficky znázornit. Objevují se funkce lineární, konstantní, mocninné s celými exponenty, odmocninové, absolutní hodnota, $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x, $\ln x$ a $\log_a x$. Zadání obsahuje i spojitost funkce a určuje se i její limita. Švýcarská gymnaziální maturita se zabývá i problematikou derivací – derivaci funkce v bodě a na intervalu; základní vzorce pro derivování; derivace součtu, součinu, podílu a derivace složené funkce. Objevují se úlohy zaměřené na stanovení průběhu funkce na základě první a druhé derivace (určení inflexních bodů). Student by měl funkce graficky znázornit a stanovit opět definiční obor, paritu, periodicitu, asymptoty, průsečíky s osami a extrémy. Nechybí ani pojem primitivní funkce, neurčitý a určitý integrál. V *geometrii* je jedním z hlavních témat problematika trigonometrie – trigonometrické vztahy v libovolném trojúhelníku a Pythagorova věta. Důležité je porozumění jednotkové kružnici a s ní zavedení funkcí sin x, cos x a tg x. Objevují se rovnice typu *sin (ax+b) = c* a *cos (ax+b) = c*. *Analytická geometrie* pracuje především se sčítáním vektorů a násobením vektoru konstantou, lineární kombinací a kolineárními vektory. Pomocí vektorů se určují i souřadnice těžiště trojúhelníku a zavádí se skalární součin. V rovině se objevují úlohy na nalezení parametrických rovnic a obecné rovnice přímky, určení normálových a směrových vektorů a směrnice přímky. Žák stanovuje také vzájemné polohy přímek a úhel, který tyto přímky svírají. Je důležité znát vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou bodů, vzdálenosti bodu od přímky nebo určit rovnici osy úhlu. V rovině se objevuje i vzájemná poloha přímky a kružnice. V prostoru narazíme na parametrickou rovnici roviny a na zaznačení bodů, přímek a rovin do soustavy souřadnic. *Statistika* prověřuje znalost základních pojmů jako je četnost, aritmetický průměr, modus, medián, rozptyl a směrodatná odchylka. Pravděpodobnost se zabývá náhodnými pokusy a jevy.

Těžší varianta gymnaziální maturity je doplněna o komplexní čísla (algebraický a goniometrický tvar, Moivreova věta, zaznačení do Gaussovy roviny – absolutní hodnota, binomická rovnice s komplexními koeficienty). Dále obsahuje navíc posloupnosti. Problematika derivací a integrací zasahuje více do hloubky. V této variantě se objevují i lineární zobrazení množin a matice, kombinatorika, Pascalův trojúhelník a binomická věta. Teorie pravděpodobnosti užívá i vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost.

Maturita speciální podle Gestion des cours et du TM (2015) nezasahuje do podrobností. Studenti by se měli ke zkoušce připravit na obor přirozených, reálných, celých a racionálních čísel a být schopni v nich provádět operace. U funkcí narazíme na funkce lineární, kvadratické, na jejich vlastnosti a na užití v rovnicích. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika prověřuje základní metody a jejich aplikace. V geometrii se setkáme s povrchy a objemy těles, s Pythagorovou větou, s Thaletovou větou, s geometrickými konstrukcemi, se zobrazením v rovině a s podobností. Analytická geometrie je velmi stručná, objevují se pouze vektory. Nejsou opomenuty ani trigonometrické funkce a jejich aplikace v pravoúhlém trojúhelníku, ani funkce exponenciální a logaritmické.

1.5 Belgie

Belgie je jednou z dalších zemí Evropy, v jejíž části Wallonie-Bruxelles se mluví francouzsky. Podle údajů z Enseignement (2016) dohlíží na oficiální veřejné školství především Valonsko-bruselská federace, jednotlivé regiony a velký podíl mají také obce. Žáci mají rovněž možnost docházky na soukromé školy nebo školy s náboženským zaměřením. Základní školství zahrnuje dvě úrovně: mateřské školství pro děti od 2,5 roku (nepovinné) a základní školství od 6 do 12 let (povinné) zaměřené především na četbu a matematiku. Tuto školu ukončují žáci obdržením tzv. certifikátu základního vzdělání. Sekundární vzdělání připravuje ke studiu na vysokých školách nebo k pracovní profesi. I toto studium je povinné a trvá do 18 let věku studentů. Tento stupeň je rozdělen do 4 forem – všeobecného, technického, uměleckého a profesního a zároveň do 3 dvouletých stupňů (stupeň pozorování, orientace a determinace). V 15 letech se studenti rozhodují, který směr si vyberou. Všeobecná forma studia připravuje především ke studiu na vysokých školách. Technické, umělecké a profesní studium připravuje jak k aktivnímu pracovnímu životu, tak i k univerzitnímu vzdělání. Tyto formy studia ukončují žáci úspěšným složením tzv. certifikátu vyššího sekundárního vzdělání („*Certificat d´enseignement secondaire supérieur*“) nebo certifikátu potvrzující určitou kvalifikovanost („*Certificat de qualification*“).

1.5.1 Maturita v Belgii

Maturita v Belgii má svůj speciální název (viz výše) a potvrzuje ukončení sekundárního cyklu studia. Historie belgického školství sahá do středověku, avšak největší změny probíhaly až od 18. století. V průběhu 18. a 19. století docházelo především ke stabilizaci primárního školství, k ustálení povinné školní docházky a k zrovnoprávnění studia pro všechny. Až ve 2. polovině 20. století se klade větší důraz na legislativu sekundárního vzdělání. Otvírá se spousta nových středních škol a oborů, které jsou dostupné všem sociálním vrstvám. V počátcích dochází k dělení na sekci latinskou, moderní a předprofesní, jejichž první ročník je pro všechny stejný. Předprofesní studium není umožněno žákům mladším 13 let. V roce 1964 dochází ke sjednocení znalostí pro jednotlivé obory, především pro obory zaměřené na všeobecnou formu studia (bez zaměření). Studenti ukončovali studium získáním celostátního diplomu, který byl předstupněm pozdější belgické maturity a který opravňoval žáky sekce latinské, moderní nebo technické ke vstupu na vysokou školu. S tímto zároveň souvisel velký rozvoj vysokých škol. V roce 1975 bylo vydáno královské nařízení, které uzákoňovalo stejné ukončování sekundárního vzdělání pro všechny, tzn., že studenti konali závěrečnou zkoušku na základě svého zaměření a typu školy. V roce 2006 je zaveden výdej certifikátů sekundárního vzdělání především na základě společné zkoušky stejné pro všechny zúčastněné studenty 6. ročníku. (Etude – Le métier d’enseignant: toute une histoire, 2014)

Certifikát vyššího sekundárního vzdělání je diplom udělovaný na konci 3. stupně středoškolského vzdělání Radou třídy (v případě denního studia) nebo Valonsko - bruselskou federací (obvykle pro distanční studium). Tento diplom mohou získat studenti, kteří už dosáhli 18 let, v různých zaměřeních – všeobecném, technickém uměleckém nebo profesním. Student musí úspěšně složit zkoušky z různých předmětů v průběhu 5. a 6. ročníku a na konci 7. ročníku pro profesní zaměření. Zkoušky jsou rozdělené do tří skupin. Pro studenty šestého ročníku je povinná externí (státní) zkouška z francouzského jazyka a dějepisu, kterou organizuje Valonsko – bruselská federace. První skupina hodnotí znalosti francouzštiny a matematiky. Druhá skupina je sestavena ze zkoušek z dějepisu, zeměpisu a cizího jazyka. Předměty pro poslední skupinu si studenti vybírají sami, přičemž každý vybraný předmět má určité bodové ohodnocení (2-6) a je potřeba nasbírat 10 bodů. Každá písemná zkouška je většinou doplněna i ústní zkouškou. Složení zkoušek pro jednotlivé skupiny a typy zaměření se však může každý rok odlišovat podle jednotlivých škol nebo regionů.

1.5.2 Maturita z matematiky

Maturita z matematiky je v Belgii téměř pro všechny typy zaměření povinná (profesní zaměření si ji mohou navolit), liší se však v její obtížnosti. Zkoušky organizované Valonsko-bruselskou federací probíhají v průběhu 3. stupně střední školy v 17-18 letech a zkouška z matematiky je pro všeobecné zaměření součástí první série zkoušek. Pro technická zaměření je to obvykle až v druhé sérii. Zkouška z matematiky je písemná a koná se obvykle v únoru. Je doplněna ústní zkouškou, která se koná v průběhu jara. Použití kalkulačky je obvykle povolené (bývá uvedeno v záhlaví testu) a čas na vypracování testu se pohybuje okolo 2 hodin (opět záleží na typu zaměření). Objevují se úlohy s výběrovými odpověďmi, ale i úlohy otevřené s uvedením celého postupu řešení. Test bývá rozdělen na několik tematických částí. Každá úloha je ohodnocena určitým počtem bodů na základě její obtížnosti.

Tematické okruhy

V úrovni všeobecného zaměření se podle údajů na webu Jurys – Cess général (3e degré) (2015) objevuje *popisná statistika*, která se věnuje především statistické proměnné (kvalitativní, kvantitativní, diskrétní), histogramům, modusu, mediánu, průměru, rozptylu a směrodatné odchylce. *Pravděpodobnost* zahrnuje kombinatoriku (variace a kombinace), základní pojmy teorie pravděpodobnosti, jevy (elementární, složený, náhodný), pravděpodobnost jevu (pravidla pro práci s jevy, vlastnosti), jevy závislé a nezávislé, sčítání a násobení pravděpodobností, jevy slučitelné a neslučitelné a stromy pravděpodobnosti. V *analýze* se objevují funkce, rovnice a nerovnice prvního a druhého stupně, přímky a paraboly, absolutní hodnoty, mocniny, odmocniny a binomická věta. U trigonometrických funkcí je potřeba znát jednotkovou kružnici, funkce sinus a kosinus a základní věty trigonometrie. Nechybí funkce exponenciální a logaritmické (i jejich rovnice), limity, funkce spojité v bodě a na intervalu, derivace, průběh funkce a integrace.

U profesního zaměření, kde je matematika jedním z výběrových předmětů, se objevuje téma *čísel,* do kterého patří desetinná čísla, celočíselné mocniny čísla 10, odmocniny, úprava zlomků, aritmetický a geometrický průměr, poměry a grafická statistika (diagramy). V *algebře* a u *funkcí* požadují znalost úpravy výrazů, úpravy rovnic, lineárních funkcí a jejich grafické interpretace a grafické řešení rovnice o dvou neznámých. *Trigonometrie* zahrnuje funkce sinus, kosinus a tangens a užití trigonometrických vět v trojúhelnících. U tohoto typu se objevují i *geometrické úlohy* zaměřené na využití středové a osové souměrnosti, Thaletovy věty, konstrukci rovinných útvarů, Pythagorovy věty a vzájemných pozic přímky a roviny. (Jurys – Cess professionnel, 2015)

U technicko-uměleckého zaměření jsou požadavky podobné jako u profesního, avšak lehce rozšířené.

1.6 Slovensko

Studium na Slovensku je obzvláště pro Čechy výhodné. Nejen že je to blízko, ale hlavní roli hraje podobný jazyk, školy jsou bezplatné a úroveň tamních škol je díky dřívější společné existenci podobná našim. Slovenský vzdělávací systém si prošel také dlouhodobým vývojem. Tvoří ho tři základní stupně škol: primární, sekundární a terciální. První školou, která poskytuje výchovu a vzdělání, je mateřská škola. V současné době není zařazená do školského systému, ale je i tak rovnocennou součástí výchovně vzdělávací soustavy. Je určena dětem od dvou do šesti let (do 7 v případě odložené školní docházky). Povinná školní docházka je na Slovensku desetiletá a trvá nejméně do konce školního roku, ve kterém žák dovrší 16 let. Je plněná na základní škole a v prvním ročníku střední školy. Základní škola je devítiletá a od pátého ročníku se může diferenciovat podle zájmů žáka. Existují také soukromé a církevní školy. Základní škola se dělí klasicky na dva stupně, avšak první je čtyřletý a druhý stupeň pětiletý. Typy středních škol a jejich systém je stejný jako v České republice. Úspěšným vykonáním maturitní zkoušky se ukončuje úplné střední vzdělání. Vysokoškolské studium trvá obvykle 4 až 6 let a je ukončeno státní závěrečnou zkouškou. Dne 28. března 2015 vstoupila v platnost vládní smlouva mezi Českou republikou a Slovenskou republikou o vzájemném uznávání a rovnocennosti dokladů o vzdělání vydávaných v České republice a na Slovensku. Dle této dohody jsou vysokoškolské diplomy vydané v České republice nebo na Slovensku uznávány za rovnocenné.

1.6.1 Slovenská maturita

Maturitní zkouška na Slovensku má obdobnou formu jako v České republice. K současné verzi maturitních zkoušek se Slováci dostali poměrně dříve než Češi.

Důležitým faktorem je skutečnost, že dlouhá desetiletí se školský systém České republiky a Slovenské republiky vyvíjel společně, tudíž existuje jistý předpoklad, že systémy budou velmi podobné. V návaznosti na společnou historii obou států můžeme vývoj školství rozdělit na dvě období, a to na období, ve kterém se školství vyvíjelo společně ve stejném státním útvaru a na období, kdy se školství utvářelo v samostatném státu. První období se datuje do 31. prosince 1992, druhé období od 1. ledna 1993 až dodnes. Historii vývoje maturitní zkoušky do roku 1992 tudíž můžeme považovat za stejnou jako u České republiky. Významné změny na Slovensku začaly už v roce 1989, kdy vznikají soukromé a církevní školy a větší důraz se klade na výuku cizích jazyků. V té době se inovovala i maturitní zkouška, která ukončovala studium na středních školách a zajišťovala dosažení všeobecných kompetencí pro další studium nebo pro uplatnění v praxi. Dávala jistou zpětnou vazbu na vzdělávací systém. Z tehdejších průzkumů vyplynulo, že zkouška plní tyto funkce pouze částečně, chyběla totiž objektivita a validita. Snahou bylo navrhnout takovou zkoušku, která by byla objektivní, s vysokou úrovní validity a porovnatelnosti s evropskými státy. Vznikla komise z ředitelů a učitelů škol, která vypracovala návrh na novou maturitní zkoušku. To vedlo v roce 1998 k rozhodnutí Ministerstva školství SR o nové koncepci maturitní zkoušky. Součástí příprav byl první ročník celostátního testování maturantů, tzv. MONITOR 1999, který formou externích testů ověřoval stav vědomostí budoucích maturantů z matematiky. Tento experiment zaznamenal velké rozdíly ve vědomostech žáků a také to, že známky nejsou úměrné znalostem. V dalších letech proběhla další testování a tím se sjednocovaly informace i testovací nástroje. Došlo ke schválení návrhů, které chtěly externí zkoušku z některých předmětů připravovanou centrálně a proběhla také generální zkouška těchto maturit. První státní maturita byla spuštěna v roce 2005 (z matematiky a cizích jazyků) a až do roku 2008 byla rozdělená do dvou úrovní – základní a vyšší. Cizí jazyky však nabízely 3 varianty obtížnosti (dnes už jsou pouze 2). V dalších letech přibývá i slovenský jazyk a maturita je od roku 2009 stejná pro všechny typy středních škol. (Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania Bratislava, 2009)

Státní maturitu na Slovensku zabezpečuje „Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania“. Zkouška je stejně jako v České republice rozdělena na státní a školní část. Kromě cizích jazyků se objevuje ve státní části pouze jedna úroveň obtížnosti. Studenti gymnázií maturují ze čtyř předmětů. Ve státní části se objevuje slovenský jazyk a cizí jazyk. Ústní školní část je ještě doplněna o předměty dle vlastního výběru. Studenti maturující z matematiky podstupují také ještě státní část. U cizích jazyků a rodného jazyka je třeba podstoupit ještě písemnou část státní zkoušky, která je hodnocena školní komisí dle přesně zadaných kritérií. Státní část a školní písemná část je hodnocena procenty úspěšnosti, ústní forma je ohodnocena školní maturitní komisí (známkou). U maturitní zkoušky, která má zároveň státní část (a písemnou školní), student prospěl ve chvíli, kdy z ústní části dostane nejhůře známku 3 a ve státní zkoušce nejméně 33% (nebo 25% z písemné části). Pokud je u ústní zkoušky ohodnocen známkou 4, poté musí mít současně nejméně 33 % z testu a 25 % z písemné části.

1.6.2 Maturita z matematiky

Studenti si mohou vybrat maturitní zkoušku z matematiky (není však povinná), kterou podstoupí jak formou státního testu, tak formou ústní zkoušky. Test je pro všechny maturanty stejný a koná se obvykle v půlce března. Tento test má mít především rozlišovací funkci v dosažených znalostech žáků a každému přiřazuje percentil (ten určuje, kolik procent studentů bylo horších). V testu se objevují lehké, středně těžké a obtížné úlohy tak, aby ohodnotily všechny výkonnostní skupiny. Čas určený na řešení testu byl v minulých letech 120 min (od r. 2016 je 150 min) a každá úloha je ohodnocena 1 bodem. V průběhu řešení testu může být použita kalkulačka, která umožňuje běžné operace a pouze výpočty hodnot vybraných funkcí. Test je doplněn matematickými vztahy, které mohou studenti využívat. Objevují se dva typy úloh – otevřené s krátkou odpovědí (20 úloh) a uzavřené s výběrem odpovědi (10 úloh). Test je zaměřený především na reprodukci a porozumění, aplikaci poznatků a tvorbu hypotéz.

Tematické okruhy

Podle údajů v dokumentu Cielové požadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky (2012) můžeme nalézt pár rozdílů oproti maturitě v České republice. V základech matematiky se objevuje téma *logika a množiny*. Student rozumí a dokáže aplikovat znalosti k pojmům jako výrok, axiom, definice, hypotéza, tvrzení, pravdivostní hodnota, logické spojky, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, obměna implikace, obrácená implikace, ekvivalence, kvantifikátory, přímý a nepřímý důkaz, důkaz sporem, množina, prvky množiny, podmnožina, nadmnožina, průnik, sjednocení a rozdíl množin a Vennovy diagramy. Téma *čísel, proměnných a výrazů* prověřuje znalost a aplikaci těchto pojmů: konstanta, proměnná, výraz, definiční obor, hodnota výrazu, mnohočlen, stupeň mnohočlenu, doplnění na čtverec, vytýkání před závorkou, úprava na součin, krácení výrazu, obory čísel (N, Z, Q, I, R), n-ciferné číslo, úprava zlomků, desetinný rozvoj, číslo π, nekonečno, číselná osa, zákony (komutativní, distributivní, asociativní), n-tá odmocnina, mocniny, exponent a základ mocniny, základ logaritmu, absolutní hodnota čísla, přímá a nepřímá úměra, poměr, procento, promile, faktoriál, kombinační číslo, desítková soustava, dekadický zápis a intervaly. V *teorii čísel* studenti narazí na dělitele, násobek, největšího společného dělitele, nejmenší společný násobek, prvočíslo, složené číslo, soudělná a nesoudělná čísla a prvočíselný rozklad. U r*ovnic, nerovnic a jejich soustav* se student neobejde bez schopností řešit rovnice, nerovnice, soustavy rovnic a nerovnic a rozumět pojmům jako je kořen, diskriminant, substituce, zkouška rovnice a ekvivalentní úprava rovnice i nerovnice. Student uplatňuje veškeré znalosti základů matematiky v početních nebo slovních úlohách.

V tematickém okruhu *funkce* je důležité se orientovat v pojmech jako je proměnná, funkce, argument, funkční hodnota, definiční obor a obor hodnot funkce, graf funkce, průběh funkce (i extrémy), sudá a lichá funkce, prostá funkce, inverzní funkce, složená funkce, rekurentní vztah. Objevují se funkce lineární a kvadratické a s nimi související vlastnosti. Nechybí ani aritmetická posloupnost, mnohočleny a mocninná funkce, lineární lomená funkce, logaritmická funkce, exponenciální funkce, geometrická posloupnost, vlastnosti goniometrických funkcí.

V planimetrii a jejích *základních rovinných útvarech* mohou studenti narazit na bod, přímku, polopřímku, úsečku, dělící poměr, polorovinu, rovnoběžné a různoběžné přímky, typy úhlů, osu úsečky, osu úhlu, kolmost přímek, kolmici, vzdálenosti bodů a přímek. Dále se objevují všechny typy trojúhelníků, výška, těžnice, těžiště, střední příčka, kružnice opsaná a vepsaná, obvod a obsah trojúhelníku, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta, Euklidovy věty, sinová a kosinová věta. U kružnice a kruhu je potřeba umět pracovat s pojmy jako je: střed, poloměr, průměr, tětiva, kružnicový oblouk, tečna, sečna, středový a obvodový úhel, obvod kruhu a délka kružnicového oblouku, kruhová výseč a úseč, mezikruží, obsah kruhu a kruhové výseče, společné dotyky dvou kružnic. Úlohy na čtyřúhelníky a mnohoúhelníky jsou zaměřené na práci s úhly, konvexními čtyřúhelníky, rovnoběžníky, kosočtverci, obdélníky, čtverci, lichoběžníky a jejich obsahy, konvexními a nekonvexními mnohoúhelníky a s obsahy mnohoúhelníků. *Analytická geometrie v rovině* je zaměřená na soustavu souřadnic, souřadnice bodu, obecnou rovnici přímky, směrnici přímky, směrnicový tvar rovnice přímky, rovnici kružnice, vektor, směrový a normálový vektor přímky. Objevují se i *množiny bodů dané vlastnosti a jejich analytické vyjádření* a *shodné a podobné zobrazení (*osová souměrnost, posunutí, středová souměrnost, otočení, osově a středově souměrný útvar, podobnost, stejnolehlost, samodružný bod*).* V tématu planimetrie nechybí ani *konstrukční úlohy*.

Velmi rozsáhlým tématem je stereometrie, kde se objevuje volné rovnoběžné promítání; průmět bodu nebo prostorového útvaru do roviny; soustava souřadnic v prostoru; vzdálenost bodů; bod, přímka a rovina v prostoru; rovnoběžné, různoběžné a mimoběžné přímky; rovnoběžnost a různoběžnost přímky a roviny nebo dvou rovin; průsečnice dvou rovin; řez tělesa rovinou; metrické úlohy na lineární útvary v prostoru; tělesa a s nimi související vlastnosti; mnohostěn; krychle; síť krychle; hranol; kvádr; čtyřstěn; koule; válec; kužel; objemy a povrchy těles.

Posledním tematickým okruhem je kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. V testu se může objevit užití kombinatorického pravidla součtu a součinu, permutace (i s opakováním), variace, kombinace, Pascalův trojúhelník, pravděpodobnost, náhodný jev, nezávislé jevy, diagramy (sloupcový, obrázkový, kruhový, spojitý, histogram), modus, medián, výběrový soubor, aritmetický průměr, střední hodnota, směrodatná odchylka a rozptyl.

1.7 Velká Británie

Velká Británie jinak nazývaná Spojené království Velké Británie a Severního Irska je parlamentní monarchií a je složena ze čtyř zemí: Anglie, Skotska, Walesu a Severního Irska. Severní Irsko a především Skotsko se vzdělávacím systémem trošku odlišují od Anglie a Walesu, které naopak ve vzdělávání působí jako jeden celek. Celý vzdělávací systém Velké Británie je řízen národními vzdělávacími zákony. Školy jsou veřejně financovány a organizovány místními vzdělávacími institucemi, tudíž většina škol je bezplatná (objevují se však také tzv. „nezávislé placené školy"). Jedním ze znaků britského školství je jeho rozmanitost ve výběru zaměření a následná velká specializace v oboru (především v sekundárním vzdělání). Celý systém je rozdělen do primárního, sekundárního, dodatečného a vyššího školství. Povinná školní docházka začíná v pěti letech a končí v 16 letech. Mladší děti mají možnost navštěvovat mateřské školky nebo dětská centra, která jsou částečně dotována státem. Primární školy ukončují děti ve věku 11 let. Sekundární školství trvá 4 roky a studenti jej dovršují složením tzv. Všeobecného certifikátu o sekundárním vzdělání („*General Certificate of Secondary Education - GCSE*"), který obsahuje hodnocení studenta v 5 až 10 předmětech. Skotský sekundární systém zasahuje více do hloubky a liší se zde i udělení závěrečného certifikátu. V 16 letech se žáci rozhodují, jestli školu opustí nebo jestli budou pokračovat na střední škole, případně kombinovat školu s prací. Další středoškolské vzdělání připravuje ve dvou letech na takzvané „*A levels*" (pokročilé) zkoušky, které jsou obvykle složeny ze tří až čtyř předmětů a jsou nutnou podmínkou k přijetí na vysokou školu. Vládní agentura *University and College Admissions Service (UCAS)* je odpovědná za koordinování přihlášek pro všechny univerzity. Studenti si mohou na své *UCAS* přihlášce vybrat pět různých univerzit. Studium na univerzitách je obvykle členěno na bakalářské a magisterské.

1.7.1 Maturita ve Velké Británii

Vzdělávací systém Velké Británie má dlouholetou historii a již od 11. století působila Británie politicky velmi stabilně, což se projevilo i na jejím vývoji. Můžeme spatřit odlišný vývoj od ostatních evropských zemí, neboť Británie už v 18. století zavedla moderní parlamentní demokracii a tudíž se lišil i vývoj školství. Tradiční byl již od středověku tzv. dualistický princip školství, kdy spolu spolupracovala státní moc a církevní autority. Až začátkem 19. století byl vytvořen státem podporovaný školský systém, v roce 1880 uzákoněna povinná školní docházka a od roku 1891 je britské školství bezplatné (skotský systém se opět odlišuje). Sekundární školství se vytváří převážně až ve 20. století, ve kterém byl kladen důraz především na humanitní předměty a přírodovědné předměty byly oproti Evropě opomíjené. Po druhé světové válce dochází k vytvoření všeobecně přístupného a bezplatného sekundárního vzdělání (navyšuje se počet roků povinné školní docházky), které bylo však velmi decentralizované a nebyly vytvořeny obsahy a metody vzdělávání. Existovaly pouze střední školy pro nadané žáky a školy praktické. V té době rovněž narůstal počet vysokých škol. Stát do 80. let 20. století zasahoval do autonomie škol minimálně. Roku 1988 byl vydán vzdělávací patent, který uzákoňuje Národní kurikulum pro vybrané předměty a každá škola je povinna se jím řídit. Co se týká závěrečných zkoušek na středních školách, tak ty rovněž procházely postupným vývojem. Od roku 1918 zakončovali střední školu studenti ve věku 16 let splněním tzv. středoškolského standardu („*School Certificate*“) a v 18 letech tzv. vyššího středoškolského standartu („*Higher School Certificate*“), ten byl v roce 1951 nahrazen tzv. *A-level* zkouškou („*advanced exam*“). School certificate byl nahrazen Všeobecným vysvědčením o sekundárním vzdělání („*GCSE*“). *A-level* zkouška se v průběhu dalších let členila na dvě fáze – první fázi skládají studenti po prvním roce příprav (AS) a druhou fázi na konci druhého ročníku (A2). Složením obou fází uspěje student u celého *A-levelu*. Existuje rovněž i systém všeobecných národních profesních kvalifikací („*General National Vocational Qualifications*“) pro praktičtěji zaměřená studia. Skotsko má svou vlastní historii závěrečných zkoušek, a proto zde můžeme spatřit jisté odlišnosti (především v názvech a systému hodnocení) (Bryant, 2016).

„Zkoušky GSCE A-level představují obdobu české maturitní zkoušky. Úroveň obtížnosti těchto „maturitních zkoušek“ je však mnohem vyšší, neboť jsou považovány za hlavní cestu k vyššímu vzdělání a profesnímu rozvoji. Žák sekundární školy se rozhodne na počátku studia ve svých 16 letech, z kolika předmětů bude chtít skládat zkoušku na vyšší úrovni (A), a to především na základě volby svého budoucího povolání nebo dalšího vysokoškolského studia. […] Většina žáků si obvykle volí tři předměty, z nichž plánují vykonat „maturitní“ zkoušku na vyšší úrovni A, někteří volí předměty dva, jiní předměty čtyři. Příprava na „maturitní“ zkoušky GCSE A-level odpovídá studiu na úrovni českého gymnázia a klade podstatně vyšší nároky, než je tomu u zkoušek GCSE.“ (Ježková, Dvořák, Chapman, 2010, s. 123) Je tedy zřejmé, že zkouška bude náročnější než například v České republice, neboť studenti se jednotlivým předmětům věnují více do hloubky. Zkoušky se konají obvykle během dvou týdnů v květnu nebo červnu. Tato zkouška je garantovaná státem a studenti si mohou volit z více jak 40 předmětů (kolem 80 i s profesními obory). Škola má určitý podíl na finálním hodnocení žáka a může se vyjádřit k tomu, když výsledky neodpovídají výkonům žáka v průběhu studia. Zkoušky jsou rovněž ovlivňovány názory univerzit. Vedle britského *A-levelu* existují i jiné zkoušky – např. Mezinárodní maturita („*International baccalaureate*“), mezinárodní *A-level* a nebo takzvaný *Cambridge Pre-U*, kterým některé školy nahradily britský *A-level*. Každá škola se může zaregistrovat k různým zkouškovým centrům, tzn., že existuje více organizací, které vytvářejí závěrečné zkoušky. Za tyto organizace zodpovídá Ofqual („*Office of Qualifications and Examinations Regulation*“).

1.7.2 Maturita z matematiky

Maturita z matematiky ve Velké Británii je tedy ekvivalentem tzv. *A-levelu* z matematiky. Student se rozhoduje, zda složí pouze zkoušku AS a nebo bude pokračovat i druhým rokem a doplní si zkoušku A2, aby získal celý *A-level* certifikát, který má vysokou váhu při přijetí na vysokou školu. Zkoušky probíhají v průběhu května a června. Každá škola si vybírá z organizací, které zaštiťují průběh *A-levelu* a splňují státem požadované směrnice. Zkoušky od organizací jsou stanoveny v určitý den a pro školy, které si vybraly tutéž organizaci jsou stejné (organizace: Edexcel, AQA, OCR, WJEC, Cambridge international). Zkoušky od jednotlivých organizací se odlišují v harmonogramu, požadavcích i času na vypracování. Můžeme zde však nalézt určitý model, který tyto organizace dodržují. Student má obvykle na výběr ze tří verzí matematiky: matematika, čistá matematika a hlubší matematika. V každé verzi je povinné splnit 3 nebo 6 tematických celků (3 pro AS level, 6 pro A level). Každé téma se píše zvlášť a čas na vypracování se pohybuje obvykle okolo 1,5 hodiny. Student kombinuje zkoušky z těchto témat: základní matematika, čistá matematika, mechanika a statistika (každé téma je zastoupeno ve více verzích, které se odlišují v náročnějších požadavcích). Jednotlivé zkoušky jsou koncipovány tak, že každý tematický celek obsahuje okolo 10 příkladů. Student musí zaznačit celý postup řešení, úlohy nemají výběrové odpovědi. Kalkulačky bývají obvykle povolené, ale opět mohou být u některých verzí a témat zakázané. V testu se mohou objevit pomocné vzorce pro výpočet. Jednotlivé zkoušky jsou různě bodově ohodnocené, rovněž i každý příklad má jiné bodové ohodnocení. Součet bodů z jednotlivých zkoušek přiřadí studentovi výslednou známku v rozmezí A*- E (A* je nejlepší ohodnocení, E je dostačující okolo 40%). (United Kingdom, 2016)

Tematické okruhy

Je velmi těžké nalézt společný rámec pro veškeré požadavky ke znalostem v matematice. Podle kritérií od Ofqual (organizace, která reguluje požadavky) na webu GCE AS and A level subject criteria for mathematics (2011) můžeme vyčlenit základní požadavky ke zkoušce A level v *základní matematice* („Core Mathematics") takto: *algebra a funkce* (úprava zlomků, práce s výrazy, dělení mnohočlenu mnohočlenem, kvadratické funkce a jejich grafy, určení diskriminantu kvadratické funkce, doplnění na čtverec, řešení kvadratických rovnic, rozklad kvadratického trojčlenu na součin, soustava rovnic, řešení lineárních a kvadratických nerovnic, grafy funkcí, geometrická interpretace řešení algebraických rovnic), *analytická geometrie v rovině (*rovnice přímky vyjádřená parametricky a obecně, podmínky pro přímky rovnoběžné, totožné či různoběžné, užití rovnice kružnice v analytické geometrii), *posloupnosti a řady* (aritmetická posloupnost a součet jejích n členů, součet konečné geometrické řady, faktoriál, kombinační číslo, binomická věta), *derivace a integrace* (derivace funkce jako směrnice tečny grafu funkce v bodě, směrnice tečny jako limita, derivace složených funkcí, užití derivací k nalezení rovnice tečen v bodě, neurčitý integrál a jeho výpočet – substituční metoda, metoda per partes, nalezení rovnice křivky pomocí integrování, průběh funkce pomocí derivace, určitý integrál a určení obsahu plochy pod křivkou). Objevují se zde úlohy na *trigonometrii* (především vlastnosti funkcí sinus a kosinus, řešení goniometrických rovnic) a na *exponenciální a logaritmické funkce, vlastnosti vektorů* (početní operace s vektory). V pokročilejších variantách, které si studenti mohou navolit tak, aby získali 6 tematických okruhů, je učivo rozšířené.

V hlubší matematice („Further pure mathematics") se dle specifikací Edexcelu objevují *komplexní čísla* (algebraický i goniometrický tvar, nalezení komplexních kořenů polynomických rovnic s reálnými koeficienty, geometrická interpretace). Zastoupené je i téma *numerická matematika* (půlení intervalů, lineární interpolace, Newton-Raphsonova metoda), *kartézská soustava souřadnic* (rovnice paraboly i hyperboly s geometrickou interpretací, výpočet tečny a normály k těmto křivkám), *matice a jejich úpravy*, *řady* (součet konečné řady), *důkazy* (důkaz matematickou indukcí). V těžších verzích se objevují složitější nerovnice, Moivreova věta pro komplexní čísla, Eulerův vztah pro komplexní čísla, obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu řešené pomocí separace proměnných, diferenciální rovnice 2. řádu, derivace a užití Maclaurinovy a Taylorovy řady, polární soustava souřadnic, hyperbolické funkce a jejich vlastnosti, derivace hyperbolických funkcí, integrace hyperbolických a trigonometrických funkcí.

Téma mechanika je z důvodu spíše fyzikálního zaměření vynecháno.

Ve statistice se pracuje se základními statistickými pojmy a grafy i s koeficientem šikmosti. Nechybí *pravděpodobnost*, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost dvou jevů a Vennovy diagramy. Neobvyklým tématem je *korelace a regrese* (korelační diagram, lineární regrese), dále *náhodné veličiny diskrétního typu, Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti, binomické a Poissonovo rozdělení, spojitá náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny, testování statistických hypotéz, pravděpodobnostní výběr, testy dobré shody a kontingenční tabulka.*

V diskrétní matematice se studenti setkají s algoritmy, s metodou kritické cesty, s párováním grafu, s dopravním problémem, s problémem obchodního cestujícího, s teorií her, s toky v síti či s dynamickým programováním.

Je zřejmé, že anglický *A level* zachází hodně do hloubky a specializace studia žáků je zde tedy na místě.

1.8 Irsko

Irsko patří k další anglicky mluvící zemi Evropy a mimo angličtiny je úředním jazykem rovněž irština. Podle informací od Čákiové a Žákové (2014) je školní docházka v Irsku povinná od 6 do 16 let. Centralizovaný vzdělávací systém je řízen Ministerstvem školství („*Department of Education and Skills*“). Předškolní vzdělávání je v Irsku zajišťováno základními školami, které otevírají nepovinné předškolní programy. S mateřskou školou jako takovou se tu nesetkáme. Tyto programy navštěvují čtyřleté a hlavně pětileté děti. Základní škola je bezplatná a navštěvují ji děti ve věku od 6 do 12 let. Střední školy se v Irsku dělí na tzv. *Junior Cycle*, který je tříletý (12-15 let), a na *Senior cycle*, který trvá dva roky. Oba cykly jsou zakončeny zkouškou, kdy první zmíněný končí žáci složením tzv. *Junior certificatu* a druhý složením *Leaving certificatu*. Mezi oběma cykly mohou studenti navštěvovat roční přechodný kurz, ve kterém si mohou prohloubit své znalosti, a který jim pomůže lépe zvládnout následující dva roky (u některých škol bývá povinný). Sekundární vzdělání probíhá na různých typech středních škol, středních odborných učilištích, komunitních školách a na gymnáziích. Studenti jsou přijímáni na vysoké školy na základě výsledků v *Leaving certificatu*. Vysokoškolský sektor je pro studenty z Evropské unie bez poplatků.

1.8.1 Maturitní zkouška v Irsku

Irský vzdělávací systém si prošel velkými změnami od jeho založení v roce 1831. Jak uvádí Carone, původně vznikl jako vize Lorda Stanleyho, která měla sjednotit studenty všech tříd do jedné národní školy. Vznikaly konflikty mezi křesťany a státní mocí, která směřovala ke školství pro všechny bez rozdílu víry. Snahy pokračovaly až do roku 1870, ve kterém však byly školy rozděleny podle náboženského vyznání. Povinná bezplatná školní docházka byla v Irsku zavedena až v roce 1892. Církev i stát ovlivňovaly vzdělávací politiku po celé následující století a učitelé mohli do vzdělávání zasahovat velmi málo. To se změnilo až v roce 1992 vydáním Vzdělávacího paktu, který uděluje větší rozhodující moc učitelům, kteří mohou od této chvíle více zasahovat do školních vzdělávacích osnov. Až v roce 1966 bylo uzákoněno bezplatné sekundární školství. Zkouška ukončující středoškolské vzdělání - *Leaving certificate* byla v Irsku zavedena v roce 1924 a její důležitost v průběhu let narůstala. V roce 1977 byl založen centrální úřad pro přihlášky na vysoké školy, který vychází z výsledků *Leaving certificatu* a univerzity podle něj přijímají své studenty. Velmi vysoce postavené a především ceněné jsou v Irsku technické obory.

Tradiční *Leaving certificate* je závěrečná zkouška, kterou skládají studenti na konci sekundárního vzdělání v 17-18 letech a to po dokončení dvouletého senior cyklu. Ke zkoušce si vybírají nejméně pět předmětů z více než 30 nabízených. Povinnou zkouškou je irština. Existuje také tzv. „*The Leaving Certificate Vocational Programme*“ pro odborné školy, který se soustřeďuje více na technické předměty a je přizpůsoben profesnímu zaměření a tzv. „*The Leaving Certificate Applied Programme*“, což je dvouletý odborný studijní program, ze kterého však studenti obvykle nemohou pokračovat na vysoké školy. Všechny zkoušky jsou dostupné ve dvou úrovních – běžné a vyšší. Matematika a irština jsou doplněny ještě úrovní základní. Písemné zkoušky se konají v průběhu června (irština a moderní jazyky jsou ještě doplněné ústní zkouškou) a dohlíží na ně státní zkušební komise.

1.8.2 Maturita z matematiky

V Irsku je maturita z matematiky organizována pod záštitou státní organizace. Tato zkouška má tři varianty obtížnosti a je jedním z výběrových předmětů (technicky zaměření studenti by si ji měli navolit povinně). Studenti, kteří se hlásí na technicky zaměřené vysoké školy, by měli k přijetí skládat nejnáročnější variantu. Zkouška probíhá v předem stanovený termín v průběhu června a je rozdělená do dvou částí. Každá část trvá 2,5 hodiny. Jednotlivé části jsou rozdělené do dvou sekcí – pojmy s dovednostmi a souvislosti s aplikacemi. Zkoušky jsou ohodnoceny podle procentuální úspěšnosti a na základě ní získá student známku. Každé známce podle úrovně obtížnosti je přiřazen určitý počet bodů, který je důležitý pro přijetí na VŠ.

K jednotlivé zkoušce studenti obdrží zapůjčené matematické vzorce a tabulky. Zadání obsahuje devět otázek, které jsou rozdělené do dalších podotázek. U úloh je potřeba předvést celý výpočet a postup, neobjevují se otázky s výběrovými odpověďmi.

Tematické okruhy

Příprava k závěrečné zkoušce *Leaving certificate* probíhá po celé dva roky posledního cyklu. Osnovy jsou připravené tak, aby se studenti naučili 5 matematických celků – pravděpodobnost a statistiku, geometrii s trigonometrií, číselné obory, algebru a funkce. Požadavky ke zkoušce v základní úrovni se odlišují od běžné a vyšší úrovně. V následujícím odstavci jsou popsány požadavky k běžné a vyšší úrovni tradičního *Leaving certificatu*, které vychází z rozšíření znalostí základní úrovně. Sylabus je dle Mathematics (2015) velmi podrobný, proto jsou zde požadavky velmi zestručněny.

Ve statistice a pravděpodobnosti se objevují permutace, variace, kombinace, binomická věta, Vennovy diagramy, vlastnosti pravděpodobnosti, podmíněná pravděpodobnost, nezávislé jevy, binomické rozdělení a diskrétní rozdělení pravděpodobnosti. Statistika má za cíl, aby se studenti seznámili se základními statistickými pojmy a aby této problematice rozuměli v běžném životě. Měli by umět pracovat s grafy a diagramy a zpracovat statistické údaje. V geometrii se objevují důkazové úlohy, úlohy na práci v soustavě souřadnic (především analytická geometrie), shodná zobrazení v rovině, stejnolehlost a konstrukce. Trigonometrie prověřuje znalosti základních trigonometrických vztahů a trigonometrických funkcí. Téma číselné obory se zabývá čísly z množin N, R, Q, Z a základními operacemi na těchto množinách. Nechybí ani komplexní čísla, geometrické řady, součet konečné geometrické řady, nerovnice, limity řad, řešení problémů pomocí konečných a nekonečných řad aplikovaných do finanční matematiky, úprava výrazů, exponenciální a logaritmické rovnice, samotná finanční matematika, sítě těles, výpočty objemů a povrchů těles. Algebra je zaměřená především na úpravy výrazů, řešení rovnic a nerovnic, řešení rovnic se dvěma neznámými, řešení kubické rovnice, objevuje se i grafické řešení rovnic a nerovnic. U funkcí se musí studenti orientovat ve všech typech grafů funkcí a být schopni určit jejich vlastnosti. Setkají se i s první a druhou derivací všech druhů funkcí a s vytvořením průběhu funkce pomocí derivace. U těžší varianty se objevuje i počítání s integrály.

2 Srovnávací část

V následující části jsou srovnány maturitní zkoušky na základě vybraných kritérií a předpokladů. Jsou porovnána i testová zadání z matematiky z vybraných zemí.

2.1 Cíle a předpoklady

Cílem této diplomové práce je srovnat modely maturitní zkoušky z matematiky v České republice s vybranými francouzsky a anglicky mluvícími zeměmi Evropské unie. K porovnání byly vybrány následující státy – Francie, Švýcarsko, Belgie, Slovensko, Velká Británie a Irsko. Slovensko bylo vybráno na základě společné historie s Českou republikou a na základě podobného vývoje. Práce srovnává maturity z matematiky na základě kritérií, kterými jsou typ maturity (státní/školní charakter), počet variant obtížnosti, povinná/nepovinná z matematiky, věk maturantů, pomůcky, čas na vypracování, termín konání a typy úloh. Dalším cílem práce je srovnat přeložené maturitní zadání z matematiky z jednotlivých zemí a nalézt společné rysy a odlišnosti.

Předpokladem pro toto srovnání je, že ve vybraných zemích má maturitní zkouška z matematiky podobnou formu tzn., že je státního charakteru a je pro všechny studenty stejná. Dále se předpokládá, že věk maturantů z vybraných zemí je stejný. Jedním z hlavních předpokladů je, že testová zadání jsou svým charakterem podobná, jsou stejné obtížnosti, obsahují stejné tematické celky a dají se srovnat.

Praktická část navazuje na teoretickou část, ve které byl popsán vývoj a současná podoba maturitní zkoušky ve vybraných zemích. Popsána je především maturitní zkouška z matematiky v těchto zemích. Praktická část vychází z údajů v teoretické části a navazuje na ni srovnáním vybraných kritérií. Dále je doplněna názornými ukázkami testových zadání v obtížnosti pro gymnázia z České republiky, Slovenska, Francie, Švýcarska, Belgie a Velké Británie. Ukázka irské maturitní zkoušky z matematiky se z důvodu přísných autorských práv neobjevuje. Řešení jednotlivých maturitních zadání jsou součástí příloh této práce. Jednotlivá testová zadání byla potřeba přeložit z anglických nebo francouzských originálů, tudíž došlo ke stylistickým úpravám. Jednotlivé obrázky jsou přiloženy z originálních verzí.

2.2 Srovnání maturitní zkoušky z matematiky ve vybraných evropských zemích

V České republice je středoškolské vzdělání zakončeno státní maturitní zkouškou a zkoušku z matematiky si studenti mohou navolit, není tedy povinná. Tato zkouška má jak písemnou (státní), tak ústní (školní) část. Státní část je pro všechny maturanty stejná pouze v jedné variantě obtížnosti. Na Slovensku je systém stejný, maturita z matematiky je také výběrová a je státního i školního charakteru. I zde narazíme ve státní písemné části na jednu variantu obtížnosti. Ve Francii zakončují středoškoláci studium maturitní zkouškou, která je však rozdělená do několika kategorií – všeobecné, technické a profesní. Každá kategorie je rozdělená do různých odvětví, které se odvíjejí podle studentova zaměření. Takže maturita z matematiky je státního charakteru, avšak její obtížnost je závislá na studentově zaměření. Objevuje se tedy několik verzí, kdy každá verze je pro jednotlivá zaměření stejná. Studenti středních škol ve Švýcarsku mají závěrečnou zkoušku rozdělenou do 3 řad – profesní, gymnaziální a speciální. Závěrečné zkoušky jsou organizovány kantonem nebo federací (takže jsou stejné pro jednotlivé kantony nebo v rámci federace). Zkouška z matematiky, stejně jako ve Francii, opět závisí na studentově zaměření a každá řada obsahuje základní a vyšší úroveň. V Belgii jsou maturitní zkoušky organizovány buď v rámci regionů nebo v rámci federace. Maturita je rozdělená podle typů zaměření – všeobecného, technicko-uměleckého nebo profesního. Existují tedy 3 varianty obtížnosti maturity z matematiky. Studium na střední škole ve Velké Británii je ukončováno složením tzv. A-levelů, které jsou organizovány různými vzdělávacími organizacemi a jsou pod záštitou státu. Školy si organizaci vybírají samy a zkouška je od určité organizace stejná pro všechny. Pro zkoušku z matematiky existuje obvykle více variant, které si studenti mohou navolit v závislosti na typu vysoké školy a zaměření. Mohou si rovněž vybrat i z různých tematických celků. V Irsku jsou organizovány maturitní zkoušky celostátně. Maturita z matematiky je rozdělená do 3 variant obtížnosti a každá úroveň přiřadí studentovi jiný počet bodů k závěrečnému hodnocení. Věk maturantů je stejný v České republice a na Slovensku (19 let), v ostatních zemích maturují v 18 letech (v Irsku je však možné maturovat už v 17 letech).

Následující tabulka (viz. tabulka č. 1) shrnuje vybraná srovnávací kritéria maturitních zkoušek z matematiky v České republice, Slovensku, Francii, Švýcarsku, Belgii, Velké Británii a Irsku.

Tabulka č. 1 – *Srovnání maturitních zkoušek z matematiky ve vybraných zemí na základě zvolených kritérií*

Kritéria	Česká republika	Slovensko	Francie	Švýcarsko	Belgie	Velká Británie	Irsko
Typ maturity	státní a školní	státní a školní	státní	v rámci kantonu nebo federace	v rámci regionu nebo federace	organizo - vaná různými vzdělávacími institucemi	státní
Povinná/ nepovi - nná	nepovi - nná	nepovi - nná	povinná u varianty S, u některých tech. a profesních oborů	povinná u gymna - ziální i profesní varianty	povinná téměř pro všechny obory	nepovinná	nepovinná

Kritéria	Česká republika	Slovensko	Francie	Švýcarsko	Belgie	Velká Británie	Irsko
Věk	19 let	19 let	18 let	18 let	18 let	18 let	17/18 let
Pomůcky	MFCHT, rýsovací potřeby, kalkulač - ka	kalkulač - ka	kalkulač - ka dle pokynů v zadání	kalkulačka	kalkulačka	kalkulačka dle pokynů v zadání	MFCHT
Čas na vypraco-vání	105 minut	120 minut	3-4 hodiny dle typu obtížnosti	3-4 hodiny dle typu obtížnosti	obvykle 120 minut	jednotlivá témata mezi 75-105 minutami	150 minut
Počet obtížno - stí	1	1	každé zaměření má svou obtížnost	gymnazi-ální – 2 , pak podle profese	3	min od 5 vzděláva - cích organizací	3
Termín	květen	březen	červen	červen	únor	květen/ červen	červen
Typy úloh	otevřené i uzavřené	otevřené i uzavřené	otevřené	otevřené	otevřené i uzavřené	otevřené	otevřené

Je zřejmé, že ve všech státech probíhá maturita z matematiky buď státní formou nebo alespoň na regionální úrovni. Ve Velké Británii je organizována různými institucemi a záleží na škole, kterou organizaci upřednostňuje. V České republice, na Slovensku, ve Velké Británii a v Irsku není maturita z matematiky povinná. Ve Velké Británii a Irsku je však pro studenty technických oborů nezbytná k přijetí na vysokou školu. Ve Francii, Belgii a Švýcarsku je povinná téměř u všech všeobecných zaměřeních a i u některých profesních škol. V České republice i na Slovensku je věk maturantů obvykle 19 let (závisí však na datu narození). V ostatních zemích maturují studenti obvykle už v 18 letech (opět závislé na datu narození). Maturant v Irsku, který vynechá přechodný ročník, může skládat maturitní zkoušku už v 17 letech. Téměř ve všech verzích maturitních testů je povoleno užití kalkulačky (obvykle bývá uvedeno v záhlaví daného testu). V České republice a v Irsku si mohou studenti donést Matematické, fyzikální a chemické tabulky. Francouzské a švýcarské testy mohou být doplněny pomocnými vzorci. Délky testů se v jednotlivých zemích poměrně odlišují, nejkratší test píší studenti České republiky (105 minut). Maturitní test z matematiky trvá v Belgii a na Slovensku 120 minut, v Irsku je to obvykle 150 minut. Čas na vypracování se ve Francii a Švýcarsku pohybuje mezi 3 až 4 hodinami, to závisí především na variantě obtížnosti. Ve Velké Británii je zkouška rozdělena do několika testů, které trvají 75 minut nebo 105 minut. Pouze na Slovensku a v České republice se objevuje jedna varianta obtížnosti zkoušky z matematiky, v Belgii a Irsku jsou to nejméně 3 varianty. Velká Británie má minimálně 5 verzí závislých na požadavcích organizací. Ve Francii se objevuje pro každé zaměření jiný typ testu, ve Švýcarsku jsou pro gymnaziální maturitu verze dvě a pro další obory je zkouška rozlišena. V Belgii maturují už v únoru, na Slovensku v březnu, v ostatních zemích obvykle v květnu až červnu. Otevřené úlohy s postupem řešení i úlohy s výběrovou odpovědí se objevují v českých, slovenských a belgických zadáních. Francouzská, švýcarská, britská a irská zadání obsahují pouze úlohy otevřené, ve kterých je potřeba uvést postup řešení nebo se objevují i úlohy důkazové.

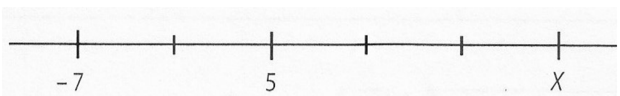
2.3 Ukázky maturitních zadání

Ukázka státní maturitní zkoušky z matematiky – Česká republika

Testové zadání z matematiky v České republice z jarní části v roce 2015 (test je stylisticky upraven, úvodní list se základními informacemi ke zkoušce je vynechán). Studenti měli 105 minut na vypracování. Pomůcky – kalkulačka, rýsovací pomůcky, MFCHT.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **1**

Na číselné ose je vyznačeno 5 shodných dílů.



1 Zapište číslo, jehož obrazem je bod X.

2 Uveďte všechna celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 3.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE **3**

Tiskárna vytiskne *k* listů za *n* sekund ($k, n \in N$)

3 Vyjádřete v závislosti na veličinách *k* a *n* počet listů, které tiskárna vytiskne za 5 minut.

4 Pro $a \in R \setminus \{-2; 2\}$ zjednodušte:

$$(2+a).\left(\frac{8}{4-a^2}-\frac{2}{2-a}\right) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

5 V oboru R řešte:

$$\frac{y-7}{4-y}-\frac{3-2y}{y-4}=0$$

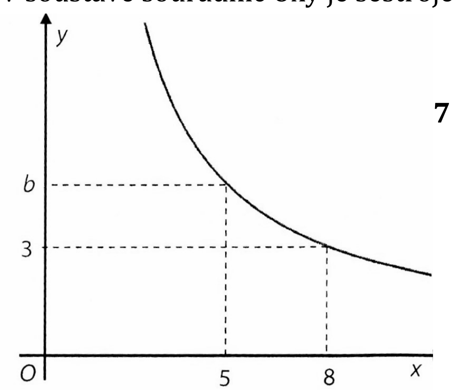
V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek nebo zkoušky.

6 Určete definiční obor a řešení rovnice s neznámou $x \in R$.

log (2 – x) = - 1

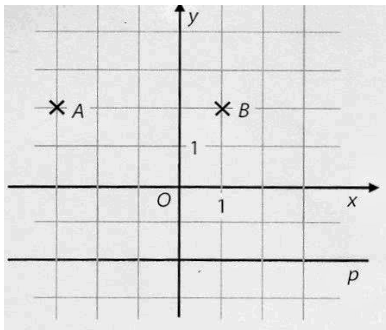
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **7**

V soustavě souřadnic Oxy je sestrojena část grafu nepřímé úměrnosti.



7 Vypočtěte hodnotu b.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **8**



Grafem kvadratické funkce f s proměnnou $x \in$ R je parabola, která prochází mřížovými body A a B. Vrchol V paraboly leží na přímce p.

8 **8.1** Sestrojte graf funkce *f*.

V záznamovém archu graf obtáhněte propisovací tužkou.

8.2 Zapište souřadnice vrcholu V grafu funkce *f*.

8.3 Zapište obor hodnot funkce *f*.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **9**

V obdélníku *ABCD* jsou dány vrcholy *A*[-2; 3] a *D*[-1; 5]. Vrchol *B* leží na souřadnicové ose *x*.

9 **9.1** Určete souřadnice směrového vektoru přímky *AB*.

9.2 Určete souřadnice vrcholu *B*.

10 Pro $n \in$ N je dán lomený výraz:

$$\frac{2\text{n}-\frac{1}{3}}{3.\left(1+\frac{n}{9}\right)}$$

Lomený výraz rozšiřte číslem 3 a odstraňte závorky.

11 Pro veličiny $a \in (0; 2)$, $b \in \mathrm{R}^+$ platí:

$$1+\frac{1}{b}=\frac{2}{ab}$$

Z uvedeného vztahu vyjádřete veličinu *a*.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE **12**

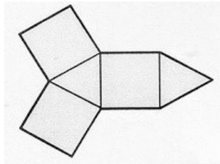
Zaváděcí ceny sportovní obuvi jsou o 12,5 % nižší, než jsou běžné ceny. Emil si koupil jedny boty za zaváděcí cenu a později stejné boty za běžnou cenu. Za oba páry bot zaplatil celkem 4875 Kč.

12 Vypočtěte, kolik korun Emil ušetřil při nákupu prvního páru obuvi.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **13**

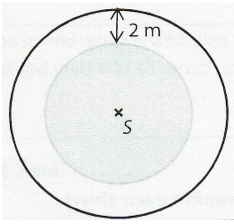
Síť tělesa tvoří tři čtverce a dva rovnostranné trojúhelníky.

13 Určete počet hran složeného tělesa.



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **14**

Kolem kruhové travnaté plochy je 2 m široký chodník. Vnější okraj chodníku tvoří obrubník, jehož délka je 157 m.



14 Vypočtěte obsah kruhové travnaté plochy a výsledek zaokrouhlete na desítky m^2. V archu uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE **15**

Čajové směsi jsou namíchané ze dvou druhů čaje. Ve standardní čajové směsi jsou hmotnosti obou druhů čaje v poměru 1 : 3 a 40gramové balení této směsi se prodává za 42 Kč. Ve výběrové čajové směsi jsou hmotnosti obou druhů čaje v poměru 1 : 1 a 50gramové balení této směsi se prodává za 60 Kč.

15 Vypočtěte cenu 10 gramů dražšího druhu čaje. Uveďte celý postup řešení.

16 Rozhodněte u každé z následujících rovnic(16.1-16.4), zda má pro $x \in <0; 2\pi>$ právě dvě řešení (A) či nikoli (N).

16.1 $\sin(x)=\frac{1}{2}$

16.2 $\sin(x)=\frac{3}{2}$

16.3 $\sin(x)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

16.4 $\sin(x)=-1$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE **17**

Pro $x \in R \setminus \{0\}$ platí:

$$A=\frac{4}{3}:(2:x) \qquad B=2.(x:6)$$

17 Který z následujících výrazů je pro $x \in R \setminus \{0\}$ ekvivalentní s výrazem 2A + B ?

a.) $\frac{5x}{3}$ b.) $\frac{5x}{4}$

c) $\frac{52}{3x}$ d.) $\frac{15}{x}$

e.) žádný z uvedených

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE **18**

V oboru R jsou dány rovnice?

I: $2x^2 - 4 = -4x$

II: $(2x - 1)^2 = 0$

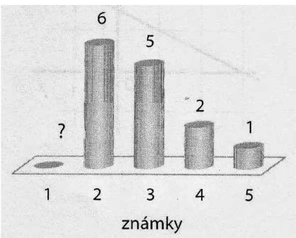
III: $x^2 - 1 = -(x^2 - 1)$

18 Která z uvedených rovnic <u>nemá</u> řešení?

A) I a II B) II a III C)pouze I D) pouze III E) Všechny tři rovnice mají řešení

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE **19**

Graf udává četnost známek z písemné práce, avšak počet jedniček není uveden. Medián je 2,5.



19 Kolik písemných prací bylo oznámkováno?

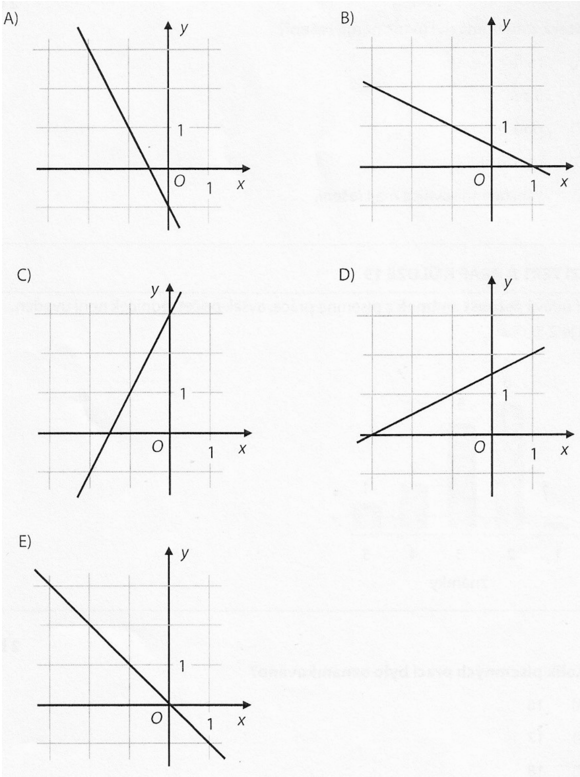
A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) jiný počet

20 Je dána přímka:

p: x = -1 + t,

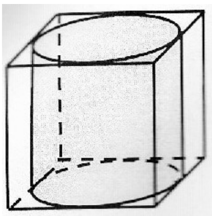
y = 1 + 2t; t ∈ R

Na kterém obrázku je přímka *p*?



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **21**

Do krabice tvaru krychle je vložen válec o objemu 570 cm^3. Válec se dotýká všech stěn krabice.



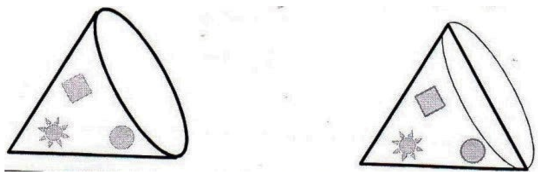
21 Jaká je výška válce (zaokrouhlená na desetiny cm)?

A) menší než 8,4 cm B) 8,5 cm C) 8,7 cm D) 9,0 cm E) větší než 9,1 cm

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **22**

Papírová čepice má tvar rotačního kužele. Po straně je slepena lepící páskou. (Okraje papíru jsou k sobě přiloženy a v místě lepení se nepřekrývají.) Osovým řezem kužele je rovnostranný trojúhelník s délkou strany 16 cm.

22 Kolik cm^2 papíru je použito na čepici?



A) 96π cm² B) 128π cm² C) 192π cm²

D) 256π cm² E) jiný počet

23 V geometrické posloupnosti s kladnými členy platí:

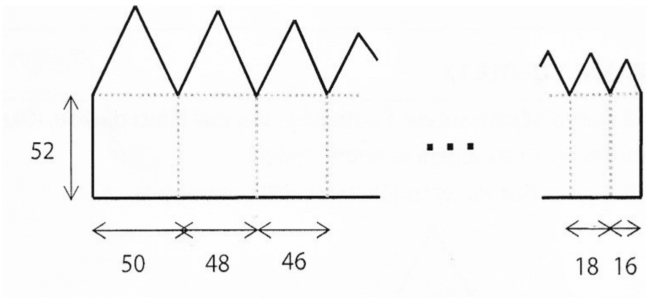
$a_2 = \frac{81}{2}$; $a_4 = \frac{1}{2}$

Do kterého z uvedených intervalů patří třetí člen a_3 posloupnosti?

A) <1; 4> B) <4; 8> C) <8; 16> D) <16; 32> E) <32; 40>

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE **24**

Souvislý rovinný obrazec se skládá z několika „domečků" tvořených vždy obdélníkem a rovnostranným trojúhelníkem. Šířka prvního obdélníku je 50 cm, každý následující obdélník je o 2 cm užší. Poslední obdélník má šířku 16 cm. Všechny obdélníky mají délku 52 cm.



Rozměry v obrázku jsou uvedeny v cm.

24 Jaký je obvod celého obrazce?

A) 1688 cm B) 1735 cm C) 1784 cm

D) 1886 cm E) jiný obvod

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE **25**

Ze skupiny 10 dětí se vybírá tříčlenná skupina. Mezi dětmi je jediný Adam a jediná Bohunka. Vybraná skupina musí splňovat ještě některou z dalších stanovených podmínek.

25 Pro každou z následujících podmínek (25.1-25.4) určete, kolika způsoby (A-F) je možné tříčlennou skupinu vybrat.

25.1 Ve skupině není Adam ani Bohunka. ____

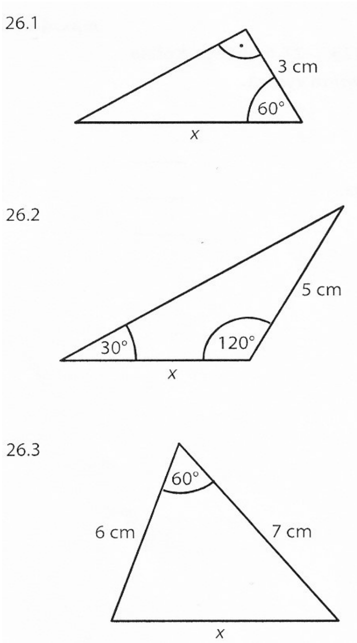
25.2 Ve skupině je Adam i Bohunka. ____

25.3 Ve skupině je Adam, ale není v ní Bohunka. ____

25.4 Ve skupině je Adam. ____

A) 28 B) 36 C) 56 D) 72 E) 336 F) jiným počtem

26 Přiřaďte ke každému trojúhelníku (26.1–26.3) určenému trojicí veličin délku strany x (A–E).



A) x < 4 cm

B) x = 4 cm

C) x = 5 cm

D) x = 6 cm

E) x > 6 cm

(Zadání písemných zkoušek: Matematika, 2015)

Ukázka státní maturitní zkoušky z matematiky – Slovensko

Přeložené testové zadání pro maturanty z roku 2015. Čas na vypracování byl stanoven na 120 minut. V otázkách 1 až 20 stačilo studentům zapsat pouze výsledek. Nebylo potřeba ho zdůvodňovat ani ukázat postup řešení. Text je stylisticky upraven a úvodní list je vynechán. Pomůcky: kalkulačka, součástí testu byl i přehled základních vztahů a vzorců. Zadání s řešením je zpracováno na základě Maturitných testů 2015: Matematika (2015).

Část I.

1 Průměrná výška všech žáků třídy je 162 cm. Výška třídní učitelky je 178 cm. Průměrná výška všech žáků třídy a třídní učitelky je 163 cm. Vypočítejte počet žáků ve třídě.

2 V dvojciferném čísle AB je $A>B$. Z čísla AB jsme přidáním další cifry A nebo B vytvořili několik trojciferných čísel. Trojciferné číslo ABB je dělitelné číslem 7, číslo BAB je dělitelné číslem 4 a číslo ABA je dělitelné číslem 3. Najděte původní dvojciferné číslo AB.

3 Tři chlapci a tři děvčata si chtějí udělat společnou fotku. Kolika různými způsoby se mohou posadit vedle sebe na jednu lavici, aby se navzájem střídali chlapci s děvčaty a vždy vznikla jiná fotka?

4 Třída má 30 žáků. Na konci školního roku mělo 5 žáků třídy jedničku z matematiky a nikdo z tohoto předmětu nepropadl. 18 žáků třídy mělo z matematiky horší známku než jedničku, ale lepší jak čtyřku. 16 žáků třídy mělo z matematiky horší známku než dvojku. Kolik žáků třídy mělo na konci školního roku z matematiky trojku?

5 Rovnoběžník $ABCD$ má délky stran 6 cm a 4 cm. Velikost jednoho z vnitřních úhlů rovnoběžníku je 45°. Vypočítejte v centimetrech délku delší úhlopříčky rovnoběžníku $ABCD$.

6 Výraz $$\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{3n} \cdot 2^{n-1}}\right)^2$$

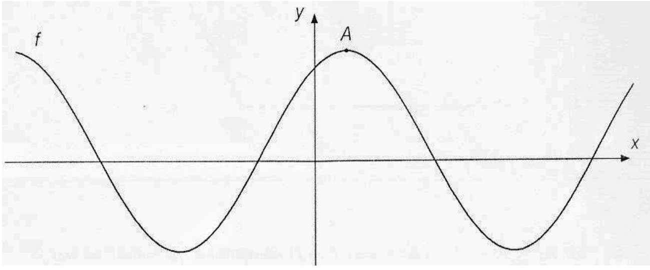
se pro všechna $n \in \mathrm{N}$ dá upravit a zjednodušit na tvar 2^{an+b}, kde a, b jsou celá čísla. Určete součet $a+b$.

7 Délky stran a délka úhlopříčky jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Délka delší strany obdélníka je 12 cm. Určete v cm^2 obsah tohoto obdélníka.

8 Cena jedné kedlubny vzrostla o 0,40 eura. Počet kedluben, které může zákazník koupit za 4 eura tak klesl o 5. Zjistěte novou cenu jedné kedlubny.

9 Zjistěte, kolikrát větší je číslo $x = 103!$ než číslo $y = 101! + 102!$.

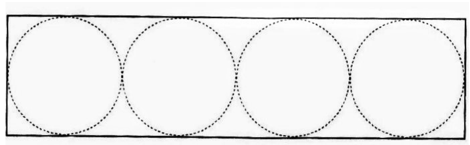
10 Na obrázku je zobrazená část grafu funkce f: $y = 3 \cdot \sin(x + 65°)$ a bod A, ve kterém graf funkce f poprvé nabývá maxima na množině kladných reálných čísel. Určete ve stupních x-ovou souřadnici bodu A.



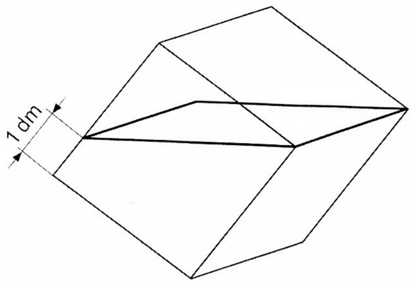
11 Krychle *ABCDEFGH* má hranu dlouhou 4 cm. Bod *M* je střed hrany *EH*. Vypočítejte v centimetrech obvod řezu krychle *ABCDEFGH* rovinou *ACM*.

12 Určete x-ovou souřadnici bodu, ve kterém graf funkce $f: y = -7 \cdot \log(x + 3)$ protíná osu *x*.

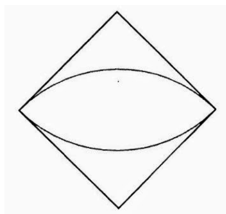
13 Čtyři tenisové míčky je možné koupit v jednom balení ve tvaru válce (viz. obrázek). Každý míček se dotýká sousedního míčku a pláště, případně podstavy válce. Kolik procent z celého vnitřního objemu válce tvoří prázdný prostor, který nevyplňují tenisové míčky?



14 Akvárium má tvar krychle s délkou hrany 6 dm. Když akvárium otáčíme okolo jeho podstavné hrany, tak voda z akvária začne vytékat právě tehdy, když voda na protilehlé stěně akvária dosáhne do výšky 1 dm (viz. obr.). Vypočítejte, kolik litrů vody bylo v akváriu.



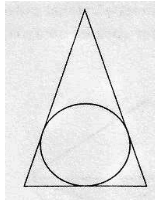
15 Do čtverce se stranou délky 1 cm jsou vepsané dvě čtvrtkružnice se středy v protilehlých vrcholech čtverce. Vypočítejte v cm^2 obsah vyznačené části čtverce, ohraničené dvěma čtvrtkružnicema.



16 Součet druhého a čtvrtého členu geometrické posloupnosti je dvojnásobkem součtu prvního a třetího členu posloupnosti. Součet prvních deseti členů posloupnosti je 3069. Určete první člen posloupnosti.

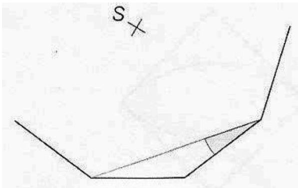
17 Vypočítejte ve stupních součet všech kořenů rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ z intervalu $(0°; 540°)$.

18 Do rovnoramenného trojúhelníka se základnou délky 2 cm a výškou na základnu délky 6 cm je vepsaná kružnice. Vypočítejte v centimetrech poloměr vepsané kružnice.



19 Jsou dané body A [-1; 1] a B [3; -2]. Určete reálné číslo c v souřadnicích bodu C [c; c] tak, aby bod C byl vrcholem pravoúhlého trojúhelníka ABC s pravým úhlem při vrcholu B.

20 V pravidelném mnohoúhelníku (na obr. je zobrazená jeho část a střed) má nejkratší úhlopříčka délku 10 cm. Velikost úhlu této úhlopříčky a strany mnohoúhelníku je 20°. Vypočítejte v cm obvod tohoto mnohoúhelníku.



Část II

V následujících úlohách je správná vždy jedna z nabízených odpovědí (A) až (E).

21 Definiční obor funkce f : $y=\frac{\sqrt{(x+4).(x-7)}}{(x+4).(x-3)}$ je :

(A) (-∞; -4) ∪ ⟨7; ∞) (B) (-∞; -4) ∪ (7; ∞) (C) (-∞; -4⟩ ∪ ⟨7; ∞)

(D) (-∞; 3) ∪ (7; ∞) (E) (-∞; -4) ∪ ⟨7; ∞)

22 Je dán výrok: Petr lže a krade. Vyberte možnost, ve které je uvedena negace výroku.

A) Petr lže, ale nekrade B) Petr nelže a nekrade

C) Když Petr nelže, tak ani nekrade. D) Petr nelže, ale krade. E) Petr nelže nebo nekrade.

23 Je dána funkce *f*: $y=\frac{3\mathrm{x}-2}{x+1}$

Vyberte správné tvrzení o monotónnosti a omezenosti funkce *f* na intervalu (0; ∞).

A) Funkce *f* je rostoucí a jen zdola omezená na (0; ∞).

B) Funkce *f* je klesající a jen shora omezená na (0; ∞).

C) Funkce *f* je rostoucí a omezená na (0; ∞).

D) Funkce *f* je rostoucí a není omezená na (0; ∞).

E) Funkce *f* je klesající a není omezená na (0; ∞).

24 Je dán trojúhelník *ABC*, *A* [3; 5], *B* [0; 1] a *C* [3; -2]. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ je osově souměrný s trojúhelníkem *ABC* podle osy *x*. Určete obsah společné části trojúhelníků *ABC* a $A_1B_1C_1$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

25 V osudí jsou bílé a černé kuličky. Jejich celkový počet je 9. Bílých kuliček je více. Kolik je bílých kuliček v osudí, když pravděpodobnost vytáhnutí jedné černé a jedné bílé kuličky při náhodném vytáhnutí dvou kuliček je 0,5?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

26 Je dána kvadratická funkce *f*: $y = 2x^2 + bx + 8$, kde *b* je přirozené číslo. Určete nejmenší číslo *b*, pro které bude vrchol paraboly (graf funkce *f*) ležet pod osou *x*.

27 Rozhodněte o vzájemné poloze přímky *p*: $x + 2 = 0$ a kružnice *k*: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$.

A) Přímka *p* není sečnou kružnice *k*.

B) Přímka *p* je tečnou kružnice *k*, rovnoběžná s osou *x*.

C) Přímka *p* je tečnou kružnice *k*, rovnoběžná s osou *y*.

D) Přímka *p* je sečnou kružnice *k*, rovnoběžná s osou *x*.

E) Přímka *p* je sečnou kružnice *k*, rovnoběžná s osou *y*.

28 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Který z následujících výroků je <u>nepravdivý</u>?

A) Velikost úhlu úsečky *AH* a úsečky *HC* je 60°.

B) Úsečky *BC* a *HC* jsou navzájem kolmé.

C) Přímky *AE* a *CG* jsou navzájem rovnoběžné.

D) Přímky *EF* a *DH* jsou navzájem rovnoběžné.

E) Velikost úhlu roviny *HAB* a roviny *ABC* je 45°.

29 V přijímací zkoušce na vysokou školu jsou 4 příklady. Za řešení každého příkladu je možno získat 0, 1, 2, 3 nebo 4 body. K úspěšnému složení přijímací zkoušky je třeba získat alespoň 14 bodů. Kolik je různých možností bodového hodnocení jednotlivých úloh, kterými žák může úspěšně zvládnout tuto přijímací zkoušku?

A) 9 B) 11 C) 12 D) 15 E) 17

30 V pravidelném čtyřbokém jehlanu *ABCDV* je velikost úhlu (odchylky) roviny boční stěny a roviny podstavy 45°. Poměr délky hrany podstavy a výšky jehlanu je:

A) 1 : 1 B) 2 : 1 C) $\sqrt{2}$: 2 D) 1 : 2 E) 2 : $\sqrt{2}$

Ukázka maturitní zkoušky z matematiky od Valonsko-bruselské federace - Belgie

Přeložené testové zadání pro maturanty všeobecného zaměření z roku 2015. Čas na vypracování bohužel nebyl specifikován. Text je stylisticky upraven a úvodní list je vynechán. Pomůcky: kalkulačka. Přeloženo i s řešením z Annales na webu Jurys – Cess gégéral (3e degré) (2015).

Popisná statistika

1. Modus je hodnota (vyberte správnou odpověď):

- nejmenší - největší - záporná - nejčastější - nejméně častá

2. Nechť máme dány tyto statistické údaje: 7, 4, 14, 5, 11, 14, 8

a) Aritmetický průměr těchto hodnot je (vyberte) : 14 7 5 11 9 8

b) Medián má hodnotu (vyberte): 14 7 5 11 9 8

c) Vypočítejte rozptyl s uvedením postupu řešení. Zaokrouhlete na celé číslo.

d) Doplňte tuto sérii čísel osmým číslem tak, aby se aritmetický průměr snížil o 1.

Kombinatorika, pravděpodobnost

1. Vyberte správnou odpověď:

Nechť A a B jsou dva jevy takové, že $P(A) = 0{,}2$ a $P(A \cup B) = 0{,}8$. Pak platí (uveďte celý postup řešení):

$P(B) = 0{,}6$ $P(B) \leq 0{,}6$ $P(B) \geq 0{,}6$ $P(B) > 0{,}6$ $P(B) < 0{,}6$

2. a) Napište předpis pro výpočet kombinačního čísla C_2^n $(n \in \mathrm{N}, n \geq 2)$.

b) Najděte n takové, aby C_2^n = 55.

3. V televizní hře jsou kandidátům položeny dvě otázky z literatury:

a) První otázka: Je dán první seznam s 12 romány, které byly napsány v různých obdobích. Uvaděč žádá kandidáty, aby seřadili chronologicky 5 nejstarších děl z tohoto seznamu. Kolik rozdílných odpovědí můžeme získat od jednoho kandidáta?

b) Druhá otázka: Je dán druhý seznam se 6 knihami. Každá kniha koresponduje s některým z následujících žánrů – poesie, historický román, sci-fi. Uvaděč požaduje přiřazení jednotlivých knih k nabídnutým žánrům. Kolik rozdílných odpovědí můžeme získat od jednoho kandidáta?

c) Pro diváky: I diváci jsou vyzváni, aby odpověděli na jednu otázku pomocí sms. Výherce této otázky získá 3 náhodně vybraná díla z prvního listu s 12 romány. Kolik možných kombinací knih může výherce získat?

4. V osudí A jsou 3 červené a 5 černých koulí. V osudí B jsou 2 koule červené a 1 černá, v osudí C jsou 3 červené a 1 černá koule. Házíme kostkou ve tvaru pravidelného osmistěnu, jejíž stěny jsou očíslovány od 1 do 8. Jestliže padne liché číslo, vytáhneme jednu kouli z osudí A; v případě, že padne číslo 8, táhneme jednu kouli z osudí B. Ve všech dalších případech taháme z osudí C.

a) Sestavte pravděpodobnostní strom dle zadané situace.

b) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme černou kouli?

Analýza

1. Vyberte správnou odpověď:

a) $\left(\sqrt{1-4\mathrm{x}-x^2}\right)'$ =

$\dfrac{1}{\sqrt{1-4\mathrm{x}-x^2}}$ $\qquad$ $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4\mathrm{x}-1}}$ $\qquad$ $\sqrt{-4-2\mathrm{x}}$

$\dfrac{-x-2}{\sqrt{1-4\mathrm{x}-x^2}}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2\sqrt{-4-2\mathrm{x}}}$ $\qquad$ $(-4-2\mathrm{x})\sqrt{1-4\mathrm{x}-x^2}$

b) $\lim_{-\infty} \frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1}$ =

-1 - ∞ + ∞ 1 0 $\frac{1}{e}$ $\frac{1}{2}$

c) *a* a *b* jsou libovolná reálná čísla. Které z následujících tvrzení je chybné?

$\frac{e^{a}}{e^{b}}=e^{a-b}$ $e^{a.b}=e^{a}+e^{b}$

$(e^{a}-e^{-a})^{2}=\frac{e^{4a}+1}{e^{2a}}-2$ $e^{4+2a}=(e^{a+2})^{2}$

d) Primitivní funkcí k funkci $2\sin(3x+\frac{\pi}{3})$ je:

$\frac{2}{3}\cos(3x+\frac{\pi}{3})$ $-\frac{2}{3}\cos(3x+\frac{\pi}{3})$ $\frac{3}{2}\cos(3x+\frac{\pi}{3})$

$-\frac{3}{2}\cos(3x+\frac{\pi}{3})$ $-\frac{1}{6}\cos(3x+\frac{\pi}{3})$ $6\cos(3x+\frac{\pi}{3})$

2. Víme, že *x* je kladné reálné číslo a že $\log_2 x = 14,34$. Určete hodnotu $\log_2(\sqrt{2}.x)$.

3. Vyřešte v R : $\log x - \log^2 x + 2 = 0$

4. Nechť f: $x \rightarrow \frac{2x+3}{x+1}$.

Napište explicitní vyjádření funkce $f^{-1}(x)$, tedy funkce inverzní k funkci *f*.

5. Nové auto ztrácí každý rok na své hodnotě. Ekonomové ukázali, že nové auto jisté značky se znehodnotí o *a %* každý rok.

a) Víme, že pan Bolide si koupil auto této značky za 12000€ a cena auta po pěti letech je odhadnuta na 4500€. Určete s přesností na setiny roční úrokovou míru znehodnocení.

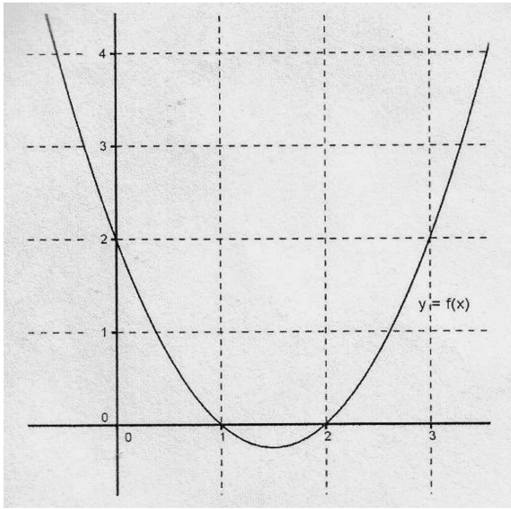
b) Pan Bolide prodává své auto po šesti letech za 3600€. O kolik podhodnotil nebo nadhodnotil cenu svého auta?

6. V soustavě souřadnic jsou vyobrazeny křivky 2 funkcí: $f(x) = (x - 4)^2$

a $g(x) = - x^2 + 10x - 20$.

Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen těmito křivkami. (V zadání byl uveřejněn pomocný obrázek – v jednotce u.a.)

7. Máme graf funkce *f* :



Jestliže F je primitivní funkcí k funkci *f* na množině R, tak jedno z následujících tvrzení je vždy pravdivé. Které?

F (1) = 0

F > 0 na [1, 2]

F < 0 na [1, 2]

F je klesající na [1, 2]

F je rostoucí na [1, 2]

8. Vyřešte: $6 \sin(2x) + 3 \geq 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$

Ukázka maturitní zkoušky z matematiky - Francie

Přeložené testové zadání pro maturanty všeobecného zaměření typu S z roku 2015. Studenti měli na vypracování testu 4 hodiny. Text je stylisticky upraven a úvodní list je vynechán. Pomůcky: kalkulačka. Zkouška je sestavena ze 4 nezávislých témat. Zadání i řešení je přeložené na základě Sujet et corrigé Mathématiques – Bac S (2015).

Cvičení 1

Výsledky pravděpodobnosti zaokrouhlujte na 10^{-3}.

část 1

1. Nechť X je náhodná proměnná s exponenciálním rozdělením s parametrem λ, kde λ je kladné reálné číslo. Připomeňme, že hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení je funkce *f* definovaná na intervalu $[0, +\infty]$ takto: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

a) Nechť *c* a *d* jsou dvě reálná čísla taková, že $0 \leq c < d$. Ukažte, že pravděpodobnost $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

b) Určete hodnotu λ na 10^{-3} tak, aby pravděpodobnost $P(X > 20)$ byla rovna 0,05.

c) Určete střední hodnotu náhodné proměnné *X*.

V následujících příkladech dosazujte : $\lambda = 0{,}15$

d) Vypočítejte $P(10 \leq X \leq 20)$.

e) Vypočtěte pravděpodobnost jevu ($X > 18$)

2. Nechť Y je náhodná proměnná s normálním rozdělením střední hodnoty 16 a se směrodatnou odchylkou 1,95.

   a) Vypočítejte pravděpodobnost jevu ($20 \leq Y \leq 21$).

   b) Vypočítejte pravděpodobnost jevu $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

část 2

Obchodní řetězec chce odměnit věrné zákazníky tím, že jim nabídne poukázky na výhodný nákup. Každý takový zákazník obdrží buď zelenou nebo červenou poukázku, na které je uvedena její hodnota. Poukázky jsou rozdávány v každém obchodě tak, že obchod má ¼ červených a ¾ zelených poukázek. Zelené poukázky mají hodnotu 30 € s pravděpodobností rovnou 0,067 nebo s hodnotami mezi 0 až 15 eury s neznámou pravděpodobností. Červená poukázka má hodnotu 30 euro nebo 100 euro s pravděpodobnostmi rovnými 0,015 nebo 0,010. Hodnoty poukázek od 10 do 20 eur nemají pravděpodobnost uvedenou.

1. Zákazník obdržel červenou poukázku hodnoty větší nebo rovné 30 eurům. Vypočítejte pravděpodobnost tohoto jevu.
2. Ukažte, že přibližná hodnota (na 10^{-3}) pravděpodobnosti při obdržení poukázky hodnoty větší nebo rovné 30 eurům se rovná 0,057.

   V následujícím příkladu pracujte s touto hodnotou.
3. V jednom obchodu tohoto řetězce (s 200 váženými zákazníky) jich 6 obdrželo poukázku v hodnotě větší nebo rovné 30 €. Ředitel se domnívá, že toto číslo je nedostačující a pochybuje o náhodném rozdělení poukázek v dalších obchodech tohoto řetězce. Jsou jeho pochyby oprávněné?

Cvičení 2

V soustavě souřadnic (0, I, J, K) s jednotkou 1 cm máme body A (0; -1; 5), B (2; -1; 5), C (11; 0; 1) a D (11; 4; 4) . Bod M se pohybuje na přímce *(AB)* ve směru od A k B rychlostí 1cm/s. Bod N se pohybuje po přímce *(CD)* ve směru od C k D rychlostí 1cm/s. V čase t = 0 je bod M v A a bod N v C. Označíme M_t a N_t pozice bodů M a N na konci t sekund, kdy t je kladné reálné číslo. Připusťme, že M_t a N_t mají tyto souřadnice: M_t (t; -1; 5) a N_t (11; 0,8t; 1 + 0,6t). Následující otázky jsou na sobě nezávislé.

1. **a)** Přímka *(AB)* je rovnoběžná s jednou z os *(0I)*, *(0J)* nebo *(0K)*. Se kterou?

   b) Přímka *(CD)* se nachází v rovině χ rovnoběžné s jednou z těchto rovin *(0IJ)*, *(0IK)*, nebo *(0JK)*. Se kterou? Napište rovnici roviny χ.

   c) Dokažte, že přímka *(AB)* kolmá k rovině χ protíná tuto rovinu v bodě E (11; -1; 5).

   d) Jsou přímky *(AB)* a *(CD)* různoběžné?

2. **a)** Ukažte, že $(M_tN_t)^2 = 2\,t^2 - 25{,}2\,t + 138$.

   b) Ve který okamžik t je délka M_tN_t minimální?

Cvičení 3

1. V množině komplexních čísel C řešte rovnici a určete neznámou z: $z^2 - 8z + 64 = 0$

   Komplexní rovina je tvořena ortogonální soustavou souřadnic $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2. Jsou dány obrazy komplexních čísel A, B a C, kde:

   $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}, b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}, c = 8\mathrm{i}$

   a) Určete absolutní hodnotu a argument čísla a.

   b) Napište čísla a a b v exponenciálním tvaru.

   c) Ukažte, že body A, B a C leží na stejné kružnici ρ se středem O a určete poloměr kružnice.

   d) Znázorněte body A, B a C do soustavy $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3. Máme čísla A', B' a C' , která jsou obrazy komplexních čísel tvaru:

   $a' = a e^{i\frac{\pi}{3}}, b' = b e^{i\frac{\pi}{3}}, c' = c e^{i\frac{\pi}{3}}$

   a) Ukažte, že $b' = 8$.

   b) Určete absolutní hodnotu a argument čísla a´.

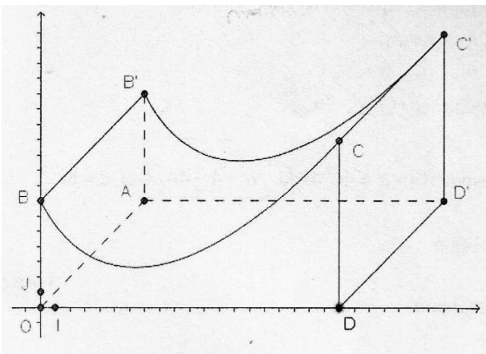
Následující úlohy řešme s užitím těchto tvarů: $a'=-4+4i\sqrt{3}, c'=-4\sqrt{3}+4i$

4. Připusťme, že M a N jsou dva body roviny komplexních čísel *m* a *n,* kde *I* je střed [MN] a má vyjádření $\frac{m+n}{2}$ a délka *MN* je rovna |*n* – *m*|.

a) Máme obrazy komplexních čísel *r, s* a *t*, která jsou obrazy bodů R, S a T, což jsou středy úseček [A´B], [B´C] a [C´A]. Určete *r* a *s*. Je dáno, $t=2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})$ že: .

b) Co můžeme říct o povaze trojúhelníku *RST*? Odůvodněte výsledek.

Cvičení 4

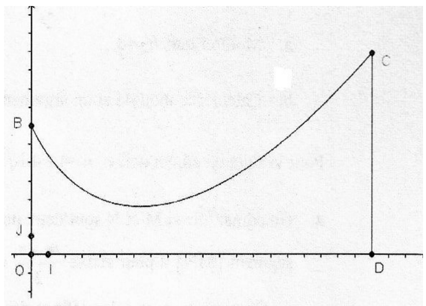


Obecní úřad se rozhodl umístit v obecním parku skateboardovou rampu. Označme (dle obrázku) obdélníky *OAD´D, DD´C´C* a *OAB´B*. Budeme pracovat s pravoúhlou soustavou souřadnic *(O, I, J)* . Jednotkou je 1 metr. Rozměry rampy jsou *DD´ = 10 m* a *OD = 20 m*.

Cílem úlohy je zjistit povrch různých částí rampy.

Profil rampy byl modelován na základě obrázku pomocí funkce *f* definované na intervalu [0; 20] takto:

f (x) = (x + 1)ln(x + 1) – 3x + 7. Funkce *f´* je derivací funkce *f* a křivka φ je grafem funkce *f* v soustavě souřadnic *(O, I, J).*



<u>*část 1*</u>

1. Ukažte, že pro všechna reálná *x* patřící do intervalu [0; 20] máme

   f´(x) = ln(x + 1) – 2.

2. Odvoďte průběh funkce *f* na intervalu [0; 20] a vypracujte její obrázek.

3. Vypočítejte směrnici tečny ke křivce φ v bodě 0.

   Absolutní hodnota této směrnice je naklonění rampy v bodě B.

4. Připusťme, že funkce g definovaná na intervalu [0; 20] :

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$$

má derivaci funkci g´ definovanou na intervalu [0; 20] : $g'(x) = (x + 1)\ln(x + 1)$.

Určete primitivní funkci k funkci f na intervalu [0; 20].

část 2 – Následující otázky jsou na sobě nezávislé

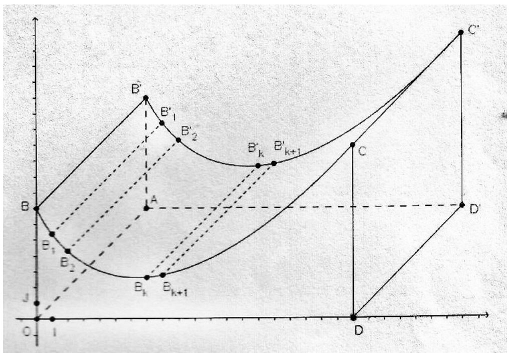
1. Jsou následující tvrzení pravdivá? Vaši odpověď zdůvodněte.

   T1: Rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším bodem dráhy je roven nejméně 8 m.

   T2: Sklon dráhy je téměř dvakrát větší v bodě B než v bodě C.

2. Obec chce nabarvit na červeno čtyři boční stěny rampy. Litr barvy pokryje 5m^2 povrchu. Zjistěte, kolik je minimálně potřeba litrů barvy.

3. Dále chce nabarvit na černo horní plochu dráhy.

   Aby jste určili přibližnou hodnotu tohoto povrchu - v prostoru daném body *(O, I, J)* přední stěny rampy, uvažujme bod $B_k(k; f(k))$, kdy k nabývá hodnot od 0 do 20. Takže $B_0 = B$. Nahradíme oblouk křivky φ mezi body B_k, B_{k+1} úsečkou $[B_k; B_{k+1}]$. Takže plochu k nabarvení nahradíme součtem ploch obdélníků typu $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$.

   a) Ukažte, že pro všechna celá čísla k nabývající hodnot od 0 do 19, platí:

   $B_kB_{k+1} = \sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$

Ukázka maturitní zkoušky z matematiky - Švýcarsko

Přeložené testové zadání maturity gymnaziálního typu II. úrovně (těžší) z roku 2015 v kantonu Fribourg. Přeloženo na základě Examens de maturité en mathématiques (2014) . Čas na vypracování byl stanoven na 180 minut. Text je stylisticky upraven a úvodní list je vynechán. Možnost použití tabulek a kalkulačky.

1. Příklad

Uvažujme reálnou funkci f definovanou takto: $f(x) = x + \ln|1 - e^x|$.

a) Určete D*f*.

b) Ukažte, že $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

a do tabulky zaznačte průběh této funkce.

c) Vypočítejte limitu $\lim_{x \to -\infty} \ln|1 - e^x|$ a určete rovnici asymptoty grafu funkce *f* pro $x \longrightarrow -\infty$.

d) Ukažte, že platí: $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$ (na množině kladných reálných čísel) a určete rovnici asymptoty grafu funkce *f* pro $x \longrightarrow +\infty$.

e) Určete rovnici 3. asymptoty v grafu funkce *f*.

f) Dokažte, že funkce *f* nemá inflexní bod a zobrazte její graf v soustavě souřadnic.

2. Příklad

Uvažujme bod *D (1; 0; 2)* a vektor $\vec{d}(2; -2, 3)$.

a) Určete parametrické rovnice přímky $d = (D, \vec{d})$ a rovnici kulové plochy Σ se středem v počátku a poloměrem 1.

b) Vypočtěte vzdálenost δ od počátku k přímce *d*.

c) Určete obecnou rovnici roviny α obsahující přímku *d* a počátek soustavy souřadnic.

d) Určete obecnou rovnici ve tvaru $3X + b(c)Y + cZ + d(c) = 0$ svazku rovin prostoru π, které obsahují přímku *d*.

e) Mezi všemi rovinami, které obsahují přímku *d*, určete obecné rovnice 2 rovin β a β' dotýkajících se kulové plochy Σ. Je třeba nalézt $3x + 6y + 2z - 7 = 0$ jako rovnici roviny β.

f) Vypočtěte úhel ε, který svírají roviny β a β' z jejich obecných rovnic.

g) Vypočtěte tento úhel ε rovin β a β' pomocí vzdálenosti δ získané v za b).

h) Při prodloužení vektoru $\vec{OD}$ určete bod dotyku *P* kulové plochy Σ a roviny β.

3. Příklad

Vstupní test na americkou univerzitu je složen z ústní a písemné zkoušky. Každá zkouška je ohodnocena maximálně 100 body a všechny přiřazené body jsou celá čísla. Opravené písemné zkoušky zobrazují výsledky podle normálního rozdělení

$N(55; 11)$ a výsledky ústní zkoušky jsou uspořádány podle normálního rozdělení $N(\mu; \sigma)$. Nechť X_E je absolutní hodnota známek obdržených v písemné zkoušce a X_0 je absolutní hodnota známek z ústní zkoušky. Procenta zaokrouhlujte na jedno desetinné místo.

a) Jaký je podíl kandidátů, jejichž známka z písemné zkoušky náleží intervalu [50; 60]?

b) Aby kandidát uspěl v první zkoušce, musí být mezi 27, 8% nejlepšími. Jaké nejnižší ohodnocení může získat, aby ještě uspěl u písemné zkoušky?

c) Víme, že u ústní zkoušky mělo 39% kandidátů ohodnocení nižší nebo rovné 42 a že 67% kandidátů mělo ohodnocení vyšší než 40. Určete směrodatnou odchylku μ a rozptyl σ proměnné X_0.

d) Aby kandidát uspěl v ústní zkoušce, musí získat ohodnocení vyšší než 58. Ukažte, že se nad tuto hranici vešlo 15, 9% kandidátů.

e) Připusťme, že absolutní hodnoty X_E a X_0 jsou nezávislé. Jaký je podíl kandidátů, kteří uspěli u těchto zkoušek?

f) Nechť kandidát, který uspěl u písemné zkoušky má třikrát větší šanci uspět u ústní zkoušky, než kandidát, který u písemné zkoušky neuspěl. Jaký je poměr kandidátů, kteří uspěli u ústní zkoušky, víme-li, že uspěli i u písemné?

4. Příklad

Skupina ptáků je složena z jedinců žijících v průměru 3 roky. Tato populace je rozdělená na 3 věkové třídy roků C_1, C_2 a C_3. Na konci jednoho roku:

- 1/5 ptáků třídy C_1 přežila
- Na každého ptáka ze třídy C_2 připadají v průměru 4,2 noví jedinci. Avšak 4/5 jedinců této třídy zemřelo.
- Na každého ptáka ze třídy C_3 připadli v průměru 4 noví jedinci před tím, než zemřel.

Tato populace může být charakterizována vektorem $(x; y; z)$, kde x, y, z určují počet ptáků v každé věkové třídě.

a) Určete matici F lineárního zobrazení f, které charakterizuje roční evoluci této ptačí populace.

b) Určete jádro *Ker(f)* a obraz *Im(f)* pomocí vlastního výpočtu.

c) Co se stane na konci 3 let s populací složené ze 125 ptáků v každé třídě?

d) Má matice F vlastní čísla (hodnoty)?

e) Určete vlastní podprostory přiřazené k nalezeným vlastním číslům.

f) Určete transformovanou matici F* lineárního zobrazení *f* ve vhodné bázi B* vlastních vektorů.

g) Co můžeme říct o této populaci a její dlouhodobé evoluci?

h) Co se stane z dlouhodobého hlediska s populací původně složenou ze 108 ptáků v každé třídě?

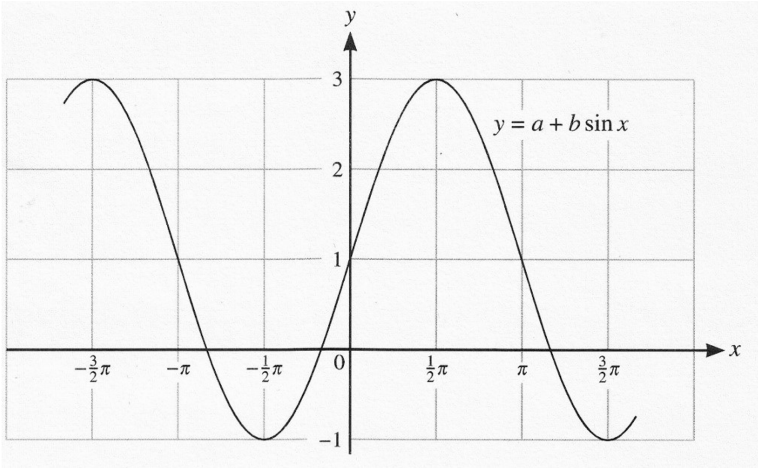
Řešení této ukázky není obsaženo v přílohách (nebylo dostupné).

Ukázka A-levelu z matematiky – Velká Británie

Zde jsou vybrány jednotlivé typy zkoušek od *Cambridge International A level,* ve kterých má student povinnost skládat 2 zkoušky z čisté matematiky („Pure Mathematics 1 a 3“) a pak si může další 2 zkoušky vybrat z nabízených dvojic (Mechanika 1 + Pravděpodobnost a statistika 1; Mechanika 1 + Mechanika 2; Pravděpodobnost a statistika 1 + Pravděpodobnost a statistika 2). Téma mechaniky je z důvodu spíše fyzikálního zaměření vynecháno. Text je stylisticky upraven a přeložen i s řešením z údajů na webu Cambridge International AS and A Level Mathematics (9709): Past papers. Úvodní list je vynechán. Ukázky jsou z roku 2014.

Zkouška Pure Mathematics 1 (1hod 45 min)

1.) Obrázek zobrazuje část grafu funkce $y = a + b \sin x$. Určete hodnoty konstant *a* a *b*.



2.) (i) Vyjádřete $4x^2 - 12x$ ve tvaru $(2x + a)^2 + b$.

(ii) Určete, pro která x platí následující nerovnice $4x^2 - 12x > 7$.

3.) Určete člen, který neobsahuje x v rozvoji výrazu $\left(4x^3 + \frac{1}{2x}\right)^8$.

4.) Křivka má rovnici $y = \frac{4}{(3x+1)^2}$.

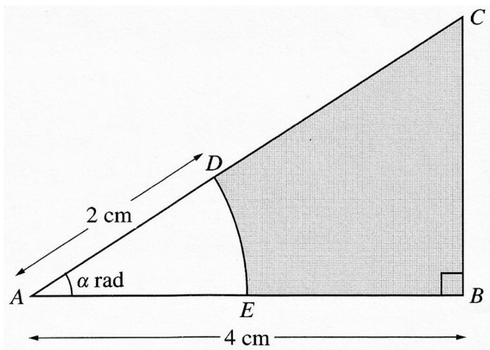
Určete rovnici tečny této křivky v bodě, ve kterém přímka $x = -1$ protíná tuto křivku.

5.) Aritmetická posloupnost má první člen a a diferenci d. Platí, že součet prvních 200 členů se rovná čtyřnásobku součtu prvních 100 členů.

i) Vyjádřete d pomocí a.

ii) Určete 100. člen v závislosti na a.

6.) Obrázek zobrazuje trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Délka strany AB je 4 cm a úhel CAB je α radiánů. Oblouk DE kružnice se středem v bodě A a poloměrem 2 cm protíná stranu AC v bodě D a stranu AB v bodě E. Určete pomocí α :



(i) plochu vystínované části,

(ii) obvod vystínované části.

7.) Souřadnice bodů *A* a *B* jsou (*a, 2*) a (*3, b*), kde *a* i *b* jsou konstanty. Vzdálenost *AB* je $\sqrt{125}$ jednotek a směrnice přímky *AB* je 2. Najděte možné hodnoty *a* a *b*.

8.) Jsou dány polohové vektory bodů *A* a *B* vzhledem k počátku soustavy souřadnic O.

$$\vec{OA}=\begin{pmatrix}3p\\4\\p^2\end{pmatrix} \qquad \vec{OB}=\begin{pmatrix}-p\\-1\\p^2\end{pmatrix}$$

(i) Zjistěte hodnoty *p*, pro které úhel *AOB je 90°*.

(ii) V případě, že *p = 3*, najděte jednotkový vektor směru $\vec{BA}$.

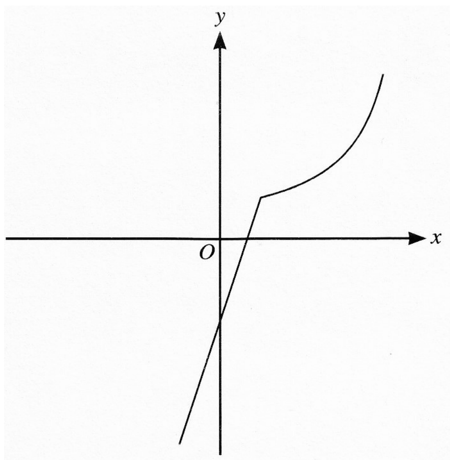
9.) (i) Dokažte, že $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\equiv\frac{1}{\tan\theta}$.

(ii) Vyřešte rovnici $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=4\tan\theta$ pro *0° < θ < 180°*

10.) Obrázek ukazuje průběh funkce *f* definované pro *-1 ≤ x ≤ 4,* kde:

f (x) = 3x – 2 pro -1 ≤ x ≤ 1 ,

$f(x)=\frac{4}{5-x}$ pro 1 < x ≤ 4.



(i) Určete obor hodnot funkce *f*.

(ii) Překreslete si obrázek a zaznačte do něj graf funkce $y = f^{-1}(x)$.

(iii) Stanovte funkci f^{-1} pomocí výrazů a určete definiční obory těchto výrazů.

11.) Přímka má rovnici *y = 2x + c* a křivka má rovnici $y = 8 - 2x - x^2$.

(i) Zjistěte hodnotu konstanty *c* v případě, že je přímka tečnou křivky.

(ii) V případě, že c = 11, najděte *x* – ové souřadnice průsečíků přímky a křivky. Pomocí integrace zjistěte obsah plochy vymezené křivkou a přímkou.

12) Je dána křivka, pro kterou platí: $\frac{dy}{dx}=x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{-1}{2}}$

Křivka prochází bodem $(4, \frac{2}{3})$.

(i) Určete rovnici křivky.

(ii) Určete $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

(iii) Najděte souřadnice stacionárního bodu a určete jeho druh.

Zkouška Pure Mathematics 3 (2014, 1hod 45 min)

1) **(i)** Zjednodušte: $sin2\alpha sec\alpha$.

(ii) Je dáno, že $3cos2\beta + 7cos\beta = 0$, zjistěte přesnou hodnotu $cos\beta$.

2) Užitím substituce $u = 1 + 3tan\, x$ zjistěte přesnou hodnotu integrálu

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sqrt{(1+3\tan x)}}{\cos^2 x} dx \quad .$$

3) Parametrické rovnice křivky jsou:

$x = ln(2t + 3)$, $\quad y=\frac{3t+2}{2t+3}$.

Zjistěte sklon křivky v bodě, ve kterém tato křivka protíná osu y.

4) Vztah mezi proměnnými x a y je dán diferenciální rovnicí

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6ye^{3x}}{2+e^{3x}} \quad .$$

Je dáno, že $y = 36$, když $x = 0$. Zjistěte výraz pro y na základě x.

5) Je dáno komplexní číslo $z=\frac{9\sqrt{3}+9i}{\sqrt{3}-i}$ Určete

(i) výraz pro z ve tvaru $re^{i\theta}$, kde $r > 0$ a $-\pi < \theta \leq \pi$,

(ii) druhou odmocninu ze z ve tvaru $re^{i\theta}$, kde $r > 0$ a $-\pi < \theta \leq \pi$.

6) Je dáno, že $2 \ln(4x - 5) + \ln(x + 1) = 3 \ln 3$.

(i) Ukažte, že $16x^3 - 24x^2 - 15x - 2 = 0$.

(ii) Rozložte $16x^3 - 24x^2 - 15x - 2$ na součin.

(iii) Poté řešte rovnici *2 ln(4x – 5) + ln(x+1) = 3 ln 3.*

7) Přímka *l* má rovnici *r = 4i – j + 2k + λ(2i – 3j + 6k)*. Rovina *p* prochází bodem *(4; -1; 2)* a je kolmá k přímce *l*.

(i) Najděte rovnici roviny *p* ve tvaru *ax + by + cz = d.*

(ii) Určete vzdálenost roviny *p* od počátku.

(iii) Druhá rovina *q* je rovnoběžná s *p* a vzdálenost *p* a *q* je 14 jednotek. Najděte rovnici této roviny *q*.

8) **(i)** Načrtněte grafy funkcí *y = cosec x* a *y = x (π-x)* pro *0 < x < π*. Ukažte, že rovnice *cosec x = x (π-x)* má právě dva reálné kořeny na intervalu *0 < x < π*.

(ii) Ukažte, že rovnice *cosec x = x (π-x)* může být napsána ve tvaru

$$x=\frac{1+x^2 sinx}{\pi sinx}$$

(iii) Dva reálné kořeny rovnice *cosec x = x (π-x)* na intervalu *0 < x < π* jsou označeny α a β, kde α< β.

(a) Použijte iterační formuli: $x_{n+1}=\frac{1+x_n^2 sinx_n}{\pi sinx_n}$

k nalezení *α* s přesností na dvě desetinná místa. Napište výsledek každé iterace s přesností na 4 desetinná místa.

(b) Určete hodnotu *β* s přesností na dvě desetinná místa.

9) **(i)** Vyjádřete výraz $\frac{4+12\mathrm{x}+x^2}{(3-x)(1+2\mathrm{x})^2}$ jako součet parciálních zlomků.

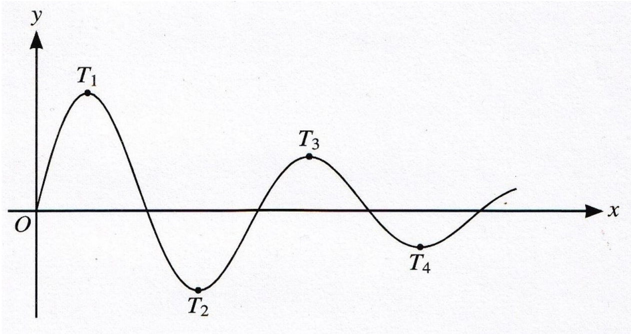
(ii) Určete rozvoj výrazu $\frac{4+12\mathrm{x}+x^2}{(3-x)(1+2\mathrm{x})^2}$ v rostoucích mocninách *x* až do členu s x^2.

10)

Obrázek ukazuje křivku $y=10e^{-\frac{1}{2}x}\sin 4\mathrm{x}$ pro *x ≥ 0*. Stacionární body jsou označeny *T1, T2, T3*, ...

(i) Určete souřadnice *x* bodů *T1* a *T2* (s přesností na 3 desetinná místa).

(ii) Určete nejmenší možnou hodnotu n tak, aby souřadnice x bodu T_n byla větší než 25.



Pravděpodobnost a statistika 1 (2014, 1hod 15min)

1) Spotřeba benzínu určitého auta má normální rozdělení se střední hodnotou 24 km/l a směrodatnou odchylku 4,7km/l. Určete pravděpodobnost, že spotřeba náhodně vybraného auta tohoto typu je mezi 21,6km/l a 28,7km/l.

2) Délky určitého typu bílé ředkvičky, které jsou obvykle distribuovány, mají střední hodnotu μ cm a směrodatnou odchylku σ cm. 4% z těchto ředkviček jsou delší než 12 cm a 32% je delší než 9 cm. Určete μ a σ.

3) **(i)** Uveďte 3 podmínky, které musí být splněny, aby byla následující situace binomickým rozdělením.

George chce investovat část jeho měsíční výplaty. Tuto část výplaty investuje po dobu 18 měsíců. V každém měsíci je pravděpodobnost toho, že si koupí akcie ve velké firmě 0,25. Pravděpodobnost koupi akcií v malé firmě je 0,15 a pravděpodobnost investice do spořícího účtu je 0,6.

(ii) Jaká bude pravděpodobnost jevu, že George koupí akcie malé firmy nejméně ve 3 z 18 měsíců?

4) Knižní klub odesílá paní Huntové 6 knih v měkké vazbě a 2 knihy v pevné vazbě. Z těchto knih si náhodně vybírá 4 knihy, které si s sebou vezme na dovolenou. Náhodná veličina X představuje počet knih v měkké vazbě, které si vybere.

(i) Dokažte, že pravděpodobnost toho, že si vybere právě 2 knihy v měkké vazbě je

$$\frac{3}{14}$$

(ii) Vypracujte tabulku rozdělení pravděpodobnosti pro X.

(iii) Je dáno, že $E(X) = 3$. Určete rozptyl náhodné veličiny X.

5) Dětské hřiště je vybaveno houpačkami (H), kolotoči (K), prolézačkami (P) a domy na hraní (D). Počet kusů dětských zařízení v každém ze tří hřišť jsou následující.

Hřiště X	Hřiště Y	Hřiště Z
2H, 2K, 4D	6H, 3K, 1P, 2D	8H, 3K, 4P, 1D

Každý den bere Nur své děti na jedno z těchto hřišť. Pravděpodobnost, že si vybere hřiště X je ¼. Pravděpodobnost výběru hřiště Y je ¼ a výběru hřiště Z je ½. Když dorazí na hřiště, vybere si náhodně jednu atrakci.

(i) Zjistěte, jaká bude pravděpodobnost, že si Nur vybere hrací dům.

(ii) Víme, že se Nur rozhodla pro prolézačku. Jaká bude pravděpodobnost, že to bude na hřišti Y?

6) Najděte počet různých způsobů když všech 8 písmen slova TANZANIA přeskupíme tak, že:

(i) všechna písmena A jsou vedle sebe.

(ii) první písmeno je souhláska (T, N, Z), druhé písmeno samohláska (A,I), třetí opět souhláska, čtvrté samohláska a tak se to opakuje.

Jsou vybrána 4 z 8 písmen slova TANZANIA . Kolik možných výběrů obsahuje

(iii) právě 1 N a 1 A

(iv) právě 1 N?

7) Test psaní všemi deseti skládá 111 osob. Počet překlepů, kterých se dopustí, je shrnut v následující tabulce.

Počet překlepů	1 až 5	6 až 20	21 až 35	36 až 60	61 až 80
Četnost	24	9	21	15	42

(i) Nakreslete histogram na základě údajů v tabulce.

(ii) Vypočítejte odhadem aritmetický průměr počtu překlepů.

(iii) Uveďte, která třída obsahuje dolní kvartil a která horní kvartil. Poté zjistěte mezikvartilové rozpětí.

Pravděpodobnost a statistika 2 (1 hod 15 min)

1) Hmotnosti určitého typu jablek (v gramech), která jsou obvykle distribuována, mají střední hodnotu 60,4 a směrodatnou odchylku 8,2. Jablka jsou balena do sáčků. Každý sáček obsahuje 8 náhodně vybraných jablek. Všechny sáčky jsou kontrolovány a váží-li nějaký sáček méně než 436 g, tak není přijat. Určete podíl sáčků, které nejsou přijaty.

2) Nechť je dána křivá hrací kostka. Střední hodnota ze 70 náhodně padlých výsledků na této kostce je 3,61 a rozptyl 2,70. Vypočítejte 95% interval spolehlivosti pro množinu středních hodnot výsledků.

3) Délky prutů (v cm), které továrna produkuje, mají střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku 0,2. Předpokládá se, že hodnota μ je 250, ale manažer tvrdí, že jeden stroj vyrábí pruty nadprůměrně dlouhé. Je tedy proveden náhodný výběr 40 prutů vyrobených tímto strojem a výběrový průměr délky prutu je roven 250,06 cm. Otestujte s 5% úrovní významnosti (rozměrem), jestli je manažerovo tvrzení oprávněné.

4) Podíl lidí, kteří mají mimořádný gen, je v průměru 1 na 1000 osob. Je proveden náhodný výběr 3500 lidí v určité zemi a z tohoto výběru má mimořádný gen X osob.

(i) Stanovte rozdělení X a určete také vhodnou aproximaci tohoto rozdělení. V každém případě určete hodnoty parametrů. Zdůvodněte výběr aproximačního rozdělení.

(ii) Použijte aproximační rozdělení k nalezení $P\,(X \leq 3\,)$.

5) Výsledek hodu čtyřstěnnou kostkou označuje náhodnou veličinu X s rozdělením pravděpodobnosti, které je zaznačeno v tabulce.

x	0	1	2	3
P (X=x)	0.25	0.25	0.25	0.25

(i) Ukažte, že je rozptyl $(X) = 1.25$.

Kostka je vržena 300 krát. Výsledek každého hodu je zaznamenán a je nalezena střední hodnota $\bar{X}$.

(ii) Použijte normální rozdělení k nalezení $P(\bar{X}<1.4)$

(iii) Odůvodněte použití normálního rozdělení v části (ii).

6) Atlet Stephan soutěží ve skoku do výšky. V minulosti byl na jisté laťce v 90% úspěšný. Teď se domnívá, že jeho standart v nedávné době klesl a rozhodl se, že provede statistický test a zjistí, jestli má pravdu. Jestliže na této výšce uspěje v méně jak 17 pokusech z 20, dojde k závěru, že jeho standart poklesl.

(i) Určete pravděpodobnost chyby prvního druhu.

(ii) Stephan uspěje v 18 z 20 pokusů. Jaký typ chyby je možný (chyba I. nebo II. druhu)? Svoji odpověď zdůvodněte.

7) Náhodná veličina *X* má danou hustotu pravděpodobnosti následovně:

$$f(x)=\frac{k}{x} \quad 1\leq x\leq a$$

$$f(x)=0 \qquad \text{jinak,}$$

kde *k* s *a* jsou kladné konstanty.

(i) Ukažte, že $k=\frac{1}{\ln(a)}$

(ii) Najděte *E (X)* pomocí *a*.

(iii) Najděte medián *X* na základě konstanty a.

8) **(i)** Následující tabulka ukazuje rozdělení pravděpodobnosti pro náhodné veličiny *V* a *W*.

w	0	0.5	1	>1
P (W=w)	0.368	0.368	0.184	0.080

v	-1	0	1	>1
P (V=v)	0.368	0.368	0.184	0.080

Pro každou veličinu *V* a *W* uveďte, jak můžete z jejich rozdělení pravděpodobnosti určit, že nemají Poissonovo rozdělení.

(ii) Náhodná veličina X má rozdělení $Po(\lambda)$. Je dáno, že $P(X = 0) = p$

a $P(X = 1) = 2.5p$, kde p je konstanta.

a) Ukažte, že $\lambda = 2.5$.

b) Najděte $P(X \geq 3)$.

(iii) Náhodná veličina Y má rozdělení $Po(\mu)$, kde $\mu > 30$. Užitím vhodného aproximačního rozdělení je nalezena pravděpodobnost $P(Y > 40) = 0.5793$ zaokrouhlená na 4 desetinná místa. Určete μ.

2.4 Srovnání testových zadání z matematiky

Ke srovnání byla vybrána testová zadání pro studenty gymnázií. V České republice i na Slovensku je toto zadání stejné jak pro studenta gymnázia, tak pro studenta odborného učiliště. V testovém zadání České republiky se objevila problematika algebraických výrazů, úprav rovnic, goniometrických a logaritmických rovnic, funkcí, analytické geometrie, geometrické posloupnosti, planimetrie, stereometrie, popisné statistiky a kombinatoriky. Bylo třeba spočítat celkem 26 příkladů, což je oproti ostatním zemím poměrně vysoké číslo. Je zřejmé, že úlohy nebyly časově náročné a všechny byly podobné obtížnosti. Možnost využití tabulek musela být pro studenty obrovskou výhodou. Témata nezacházela do podrobností a testovala především porozumění základní problematice.

Slovenská maturita z matematiky měla počet úloh ještě vyšší než Česká republika, ale čas na vypracování byl však delší. Oproti České republice se zde navíc objevila výroková logika, množiny a logaritmické funkce. Tematické celky se velmi podobaly těm českým. Úlohy byly koncipovány v různých obtížnostech a k jejich řešení nepostačilo pouze mechanické počítání. Bylo potřeba zapojit i více logiky.

V Belgii byl počet úloh nižší. Navíc se objevila pravděpodobnost, derivace, limity, pojem primitivní funkce či obsah plochy vypočítané pomocí určitého integrálu. V tomto zadání se vůbec neobjevily úlohy geometrické, z analytické geometrie nebo ze stereometrie. Obtížnost zde byla už o něco vyšší než v České republice.

Francouzské maturitní zadání obsahuje navíc pravděpodobnost, která zachází do podrobností a její obtížnost by se dala přirovnat k vysokoškolské matematice v České republice. Objevují se i komplexní čísla, derivace či průběh funkce. Opět zde nenalezneme úlohy z planimetrie. Každá úloha klade vysoké nároky na porozumění problému a studenti v ní uplatňují naráz více matematických dovedností. Počet úloh je nízký a časově je test velmi náročný (4 hodiny).

Švýcarský test je svou obtížností velmi náročný, dal by se přirovnat ke znalostem studentů českých vysokých škol. Navíc se zde objevují derivace, průběh funkce, limity, pravděpodobnost nebo matice lineárního zobrazení. I zde chybějí úlohy z planimetrie, stereometrie a popisné statistiky. Test je stejně jako ve Francii časově rozsáhlý (3hodiny) a prověřuje hluboké porozumění danému problému.

Velká Británie má předem určené tematické okruhy, které testují studentovy znalosti téměř všech matematických oborů. Jednotlivé testy studenti píší zvlášť, časová náročnost je tedy nižší než například u Francie či Švýcarska. Oproti České republice obsahují navíc integrály, průběh funkce, komplexní čísla, funkce cosec, rozklad na parciální zlomky, pravděpodobnost a statistiku. Ze zadání je zřejmé, že obtížnost úloh je vysoká.

2.5 Závěr srovnávací části

Ze srovnání je zřejmé, že českému systému školství se nejvíce podobá systém slovenský. Předpoklad podobné formy maturitní zkoušky z matematiky, která je stejná pro všechny se tedy naplnil pouze u Slovenska. V ostatních zemích je maturita obvykle rozdělená dle typu zaměření školy a má několik variant obtížnosti. Její forma je však také písemná, avšak úlohy většinou zasahují více do hloubky. Předpoklad stejného věku maturantů (19 let) se naplnil rovněž pouze u Slovenska, v ostatních zemích maturují studenti obvykle v 18 letech (v Irsku i v 17). Maturitní zadání jsou porovnatelná, tento předpoklad je tedy splněn. Avšak nesplnil se předpoklad stejné obtížnosti maturitních zadání z matematiky. Z testů vyplývá, že obtížnost české zkoušky pro studenty gymnázií je velmi nízká. Slovensko má úroveň podobnou jako Belgie. Ve Francii, Švýcarsku i Velké Británii je obtížnost vysoká, učivo zasahuje mnohem více do hloubky. Liší se i požadavky ke zkouškám a tematické celky. Pouze v České republice a na Slovensku se objevují úlohy geometrické. V ostatních zemích se klade důraz především na pravděpodobnost se statistikou, algebru, analýzu a analytickou geometrii.

Bylo srovnáno testové zadání z matematiky pro studenty gymnázií z České republiky se zadáními Slovenska, Francie, Belgie, Švýcarska a Velké Británie a byly nalezeny společné rysy a odlišnosti. Testová zadání byla srovnána na základě vybraných kritérií (typ maturity, počet variant, povinná/nepovinná, věk, pomůcky, čas na vypracování, termín zkoušky, typy úloh). Ve všech zemích má tato zkouška státní charakter (nebo je státem korigována) a ve Francii, Švýcarsku a Belgii je téměř pro všechny povinná. Pouze jedna varianta obtížnosti se objevila v České republice a na Slovensku. U většiny testů je povoleno používání kalkulačky. Časy na vypracování testu se odlišovaly v závislosti na obtížnosti úloh. Termíny konání zkoušek připadaly téměř ve všech vybraných zemích na jaro (jen na Slovensku byly už v únoru). Ve všech testech se objevují otevřené typy úloh, v České republice, na Slovensku a v Belgii se vyskytují i úlohy s výběrovými odpověďmi.

Závěr

Dnešní Evropa postupně směřuje směrem ke sjednocování vzdělávacích požadavků. To platí především pro maturitní zkoušky na středních školách. Práce odhaluje, jak se liší tyto maturitní zkoušky z matematiky ve Francii, Švýcarsku, Belgii, Velké Británii, Irsku a na Slovensku v porovnání s maturitní zkouškou v České republice. Poukazuje na odlišnosti v jednotlivých systémech a snaží se poodhalit hlavní problémy české maturity.

Celkový cíl práce se naplnil, neboť byly srovnány maturitní zkoušky z matematiky ve vybraných zemích dle zadaných kritérií. Předpoklady byly naplněny částečně. Maturitní zadání jsou stejná pro všechny maturanty pouze v České republice a na Slovensku. V ostatních zemích jsou obtížnosti rozdělené dle zaměření studentů. V těchto státech dochází především k dřívější specializaci studentů k jim vybraným předmětům a testová zadání tím pádem mohou zacházet více dopodrobna. Studenti studující přírodovědně zaměřené obory mívají obvykle více hodin matematiky týdně. I vysoké školy kladou důraz při přijímacím řízení na výsledky maturitní zkoušky. Předpoklad srovnatelných testových zadání se naplnil. Výsledkem srovnání je široké spektrum různých obtížností zkoušek z matematiky. Je vidět, že každá země má systém trochu odlišný a úlohy mají různou obtížnost. Odlišují se i požadavky k této zkoušce, u francouzsky mluvících zemí se téměř nesetkáme s úlohami zaměřenými na geometrii. U Francie a Švýcarska jsou zřejmé podobné rysy (mohli bychom hledat souvislost ve stejném jazyce či podobné kultuře).

U každého systému bychom jistě našli své klady a zápory. Česká republika si bude muset jistě projít ještě dlouhým vývojem, než dospěje k větší rozmanitosti státní maturitní zkoušky. Z výsledků práce vyplývá, že je třeba vytvořit více variant obtížností, nejlépe podle studentova zaměření. Zvýšila by se tak prestiž státní maturity pro studenta gymnázia a maturita by byla veřejností přijímána s větším respektem. Studenti by i po úspěšném složení mohli mít větší šanci k přijetí na vysokou školu.

Zdroje

Literární

GAZÁRKOVÁ, Dana. Maturita 2015 - M. Vyd. 1. Brno: Didaktis, 2015, 131 s. ISBN 978-80-7358-222-7.

Informační balíček k nové maturitě: pro maturanty 2012. Vyd. 3. Praha: Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2011. 22 s. ISBN 978-80-87337-10-3.

JEŽKOVÁ, Věra; DVOŘÁK, Dominik; CHAPMAN, Christopher. Školní vzdělávání ve Velké Británii. Vyd. 1. Praha: Karolinum, 2010, 230 s. ISBN 978-80-246-1784-8.

KONOPÁSKOVÁ, Anna. 200 let baccalauréatu ve Francii. Zpravodaj: Odborné vzdělávání v zahraničí. 2008, roč. 19, č. 6, s. 3.

MORKES, František. Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání - Divize nakladatelství Tauris, 2003. 71 s. ISBN 80-211-0438-4.

ŘÍDKÁ, Eva; BLAHUNKOVÁ, Dana; CHÁRA, Petr. Příprava na státní maturitu. 2. vyd. Praha: Fragment, 2013, 283 s. ISBN 978-80-253-1665-8.

VÁLKOVÁ, Veronika. Maturity kdysi a dnes. Rodina a škola. 2012, roč. 59, č. 6, s. 10-11. ISSN 0035-7766.

WALTEROVÁ, Eliška. Závěrečné zkoušky na střední škole v zahraničí. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 1996. 121 s. Přístup k dokumentům: projekt programu PHARE - RES. ISBN 80-211-0235-7.

Elektronické

Baccalauréats général, technologique et professionnel. Éduscol. Portail national professionnels de l´éducation [online]. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche [cit. 2016-02-14]. Dostupné z: http://eduscol.education.fr/pid23230/baccalaureats-general-technologique-et-professionnel.html

BRYANT, Lee. History of English Education. In: The history learning site [online]. © 2000-2016 historylearningsite.co.uk, 2016 [cit. 2016-03-22]. Dostupné z: http://www.historylearningsite.co.uk/sociology/education-and-sociology/history-of-english-education/

Bulletin officiel spécial n°7 du 6 octobre 2011. Education.gouv.fr [online]. © Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2011 [cit. 2016-02-12]. Dostupné z: http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=25864

Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011. Education.gouv.fr [online]. © Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2011 [cit. 2016-02-14]. Dostupné z: http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/2/mathematiques_ES_L_195982.pdf

Cambridge International AS and A Level Mathematics (9709): Past papers. Cambridge International Examinations [online]. © 2016 Cambridge International Examinations [cit. 2016-04-26]. Dostupné z: http://www.cie.org.uk/programmes-and-qualifications/cambridge-international-as-and-a-level-mathematics-9709/past-papers/

CARONE, Michael. Education in Ireland: Past Successes and Future Problems. In: Lehigh University: Martindale Center [online]. © 2016 Lehigh University [cit. 2016-02-04]. Dostupné z: https://martindale.cc.lehigh.edu/sites/martindale.cc.lehigh.edu/files/Carone.pdf

Cielové požadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Štátny pedagogický ústav [online]. Bratislava: © Štátny pedagogický ústav, 2012 [cit. 2016-03-27]. Dostupné z: http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/cielove-poziadavky-na-maturitne-skusky/cp_matematika_2013_2014.pdf

ČÁKIOVÁ, Julie; ŽÁKOVÁ, Markéta. Irský vzdělávací systém. In: Národní informační centrum pro mládež [online]. © NICM, 2014 [cit. 2016-04-08]. Dostupné z: http://www.nicm.cz/irsky-vzdelavaci-system

Education in Switzerland. Expatica [online]. © Copyright 2000-2016 Expatica Communications BV, 2015 [cit. 2016-02-17]. Dostupné z: http://www.expatica.com/ch/education/Education-in-Switzerland_100021.html

Enseignement. Belgium.be. Informations et services officiels [online]. © 2016 Service Public Fédéral Belge [cit. 2016-02-21]. Dostupné z: http://www.belgium.be/fr/formation/enseignement/secondaire

Etude – Le métier d'enseignant: toute une histoire. La ligue [online]. © 2016 La Ligue de l'Enseignement et de l'Education permanente asb, 2014 [cit. 2016-03-30]. Dostupné z: http://ligue-enseignement.be/etude-le-metier-denseignant-toute-une-histoire/#.Vvu_aOKLSUl

Examens de maturité en mathématiques. Collège sainte-croix: Etat de Fribourg [online]. © Collège Sainte-Croix, 2014 [cit. 2016-04-15]. Dostupné z: http://www.cscfr.ch/yoo/index.php/fr/etudes-gymnasiales-et-cours/le-coin-des-branches/mathematiques/examens-de-maturite.html

Francouzský vzdělávací systém. NICM: Národní informační centrum pro mládež [online]. 2014 [cit. 2016-02-11]. Dostupné z: http://www.nicm.cz/francouzsky-vzdelavaci-system

GCE AS and A level subject criteria for mathematics. Gov.uk [online]. © Crown copyright, 2011 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: https://www.gov.uk/government/publications/gce-as-and-a-level-subject-criteria-for-mathematics

Gestion des cours et du TM. CEJEF - Division Santé - Social - Arts [online]. WebExpert, 2015 [cit. 2016-03-30]. Dostupné z: http://www.ds2a.ch/msop

Jurys - Cess général (3e degré): Informations générales. Fédération Wallonie-Bruxelles: Enseignement.be[online]. Communauté française, 2015 [cit. 2016-03-16]. Dostupné z: http://www.enseignement.be/index.php?page=27250&navi=3740

Jurys - Cess professionnel (3e degré): Informations générales. Fédération Wallonie-Bruxelles: Enseignement.be [online]. Communauté française, 2015 [cit. 2016-03-19]. Dostupné z: http://www.enseignement.be/index.php?page=27714&navi=4247

Katalogy požadavků. NOVÁ MATURITA oficiálně! [online]. © Copyright 2010, 2010 [cit. 2016-01-30]. Dostupné z: http://www.novamaturita.cz/katalogy-pozadavku-1404033138.html

Le baccalauréat général. Education.gouv.fr [online]. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2015 [cit. 2016-02-11]. Dostupné z: http://www.education.gouv.fr/cid145/le-baccalaureat-general.html%20

Le baccalauréat professionnel. Education.gouv.fr [online]. © Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2016 [cit. 2016-02-11]. Dostupné z: http://www.education.gouv.fr/cid2552/le-baccalaureat-professionnel.html%20

Le baccalauréat technologique. Education.gouv.fr [online]. © Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2015 [cit. 2016-02-11]. Dostupné z: http://www.education.gouv.fr/cid147/le-baccalaureat-technologique.html%20

L'espace suisse de formation. Secrétariat d'Etat à la formation, à la recherche et à l'innovation SEFRI [online]. Secrétariat d'Etat à la formation, à la recherche et à l'innovation SEFRI, 2016 [cit. 2016-02-15]. Dostupné z: http://www.sbfi.admin.ch/themen/01366/index.html?lang=fr

Mathematics. Curriculum online [online]. Dublin: © NCCA, 2015 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://curriculumonline.ie/Senior-cycle/Senior-Cycle-Subjects/Mathematics

Maturité. Dictionnaire historique de la Suisse [online]. © 1998-2016 DHS, 2010 [cit. 2016-02-16]. Dostupné z: http://www.hls-dhs-dss.ch/textes/f/F10400.php

Maturitné testy 2015: Matematika. Matura.sk [online]. © Matura.sk 2008 - 2016, 2015 [cit. 2016-03-28]. Dostupné z: https://www.matura.sk/maturitne-testy/2015

Maturitní zkouška 2015. NOVÁ MATURITA oficiálně [online]. © Copyright, 2010 [cit. 2016-01-29]. Dostupné z: http://www.novamaturita.cz/maturitni-zkouska-2015-1404038069.html

Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania Bratislava. VÝVOJ A PERSPEKTÍVY MATURITNEJ SKÚŠKY V SLOVENSKEJ REPUBLIKE: Zborník z konferencií [online]. Bratislava, 2009 [cit. 2016-03-30]. ISBN 978-80-970261-1-0. Dostupné z: http://www.nucem.sk/documents/25/subory_mimo_dokumentacnej_casti/V%C3%BDvoj_a_perspekt%C3%ADvy_MS.pdf

Sujet et corrigé Mathématiques - Bac S. Studyrama.com [online]. 2015 [cit. 2016-04-22]. Dostupné z: http://www.studyrama.com/revision-examen/bac/les-sujets-et-corriges-du-bac/bac-s/sujet-et-corrige-mathematiques-bac-s-96743

Switzerland: Overwiev. EURYDICE [online]. © European Union, 1995-2016, 2016 [cit. 2016-03-30]. Dostupné z: https://webgate.ec.europa.eu/fpfis/mwikis/eurydice/index.php/Switzerland:Redirect

United Kingdom (England): National Qualifications Framework. Eurydice [online]. © European Union, 1995-2016, 2016 [cit. 2016-04-03]. Dostupné z: https://webgate.ec.europa.eu/fpfis/mwikis/eurydice/index.php/United-Kingdom-England:National_Qualifications_Framework

Zadání písemných zkoušek: Matematika. Nová maturita [online]. © Copyright 2010, 2015 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z: http://www.novamaturita.cz/zadani-pisemnych-zkousek-jaro-2015-1404037762.html

Přílohy

Příloha 1 – Řešení maturitního zadání: Česká republika

Příloha 2 - Řešení maturitního zadání: Slovensko

Příloha 3 - Řešení maturitního zadání: Belgie

Příloha 4 - Řešení maturitního zadání: Francie

Příloha 5 - Řešení maturitního zadání: Velká Británie

Řešení Česká republika

1) 23

2) −2; −1; 0; 1; 2

3) $\frac{300k}{n}$

4) 2 a postup řešení

5) K = {-4}; y≠4, L = P = 0 a postup řešení

6) D(x) = (-∞; 2), K = {1, 9}

7) $\frac{24}{5}$

8) 8.2 V = [-1; -2]

8.3 H(f) = ⟨-2; +∞)

8) 9.1 nenulové násobky vektoru $\vec{u}=(2;-1)$

9.2 B[4; 0]

9) $\frac{6n-1}{9+n}$

11) $a=\frac{2}{b+1}$

12) 325 Kč

13) 9 hran

14) S ≐ 1660 m^2 a postup řešení

15) 15 Kč a postup řešení

16) 16.1 A

16.2 N

16.3 A

16.4 N

17) A

18) E

19) A

20) C

21) D

22) B

23) B

24) D

25) 25.1 C

25.2 F

25.3 A

25.4 B

26) 26.1 D

26.2 C

26.3 E

Řešení – Slovensko

1) 15

2) 96

3) 72

4) 9

5) 9,27

6) –5

7) 108

8) 0,8 nebo 0,80

9) 102

10) 25

11) 17,43

12) –2

13) 33,33

14) 126

15) 0,57

16) 3

17) 780

18) 0,85

19) 18

20) 47,89

21) A

22) E

23) C

24) C

25) B

26) D

27) A

28) D **29)** D **30)** B

Řešení – Belgie

Popisná statistika

1) nejčastější

2) a) 9

b) 8

c) rozptyl = 14 a postup řešení

d) Osmým přiřazeným číslem, aby se průměr snížil o 1, je **1**.

Kombinatorika, pravděpodobnost

1) P(B) ≥ 0,6 , výpočet

2) a) $C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

b) n = 11

3) a) 95 040 různých odpovědí

b) 3^6 = 729 různých odpovědí

c) 220 výběrů

4)

b) P(Č) = $\frac{43}{96}$

Analýza

1) a) $\frac{-x-2}{\sqrt{1-4x-x^2}}$

b) -1

c) $e^{a.b} = e^a + e^b$

d) $-\frac{2}{3}\cos(3x+\frac{\pi}{3})$

2) $\log_2(\sqrt{2}.x)$ = 14, 84

3) $K = (\frac{1}{10}, 100)$

4) $f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}$

5) a) Roční úroková míra znehodnocení je 17, 81 %.

b) Pan Bolide podhodnotil cenu svého auta o 99,09 €

6) 9 ua

7) F je klesající na [1; 2]

8) $K = [0, \frac{7\pi}{12}] \cup [\frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}] \cup [\frac{23\pi}{12}, 2\pi]$

Řešení Francie

Cvičení 1

část 1

1. a) P (X ∈ [c; d]) = $\int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

b) λ ≈ 0,15

c) E(X) = $\frac{1}{0{,}15} \approx 6{,}667$

d) P (X ∈ [10; 20]) ≈ 0,173

e) P (X > 18) ≈ 0,067

2. a) P (Y ∈ [20; 21]) ≈ 0,015

b) P (Y < 11) ≈ 0,005

P (Y > 21) ≈ 0,005

P ((Y < 11) ∪ (Y > 21)) ≈ 0,01

část 2

1. $P_Č$ (X ≥ 30) = 0,025

2. P(X ≥ 30) = P (Č) x $P_Č$ (X ≥ 30) + P(V) x P_V (X ≥ 30) = ¼ x 0,025 + ¾ x 0,067 ≈ 0,057

3. p = 0,057

n = 200 > 30   np = 11,4 > 5   n(1-p) = 188,6 > 5

I = [0,025; 0,089]

f = $\frac{6}{200}$ ≈ 0,03   Jeho obavy nejsou oprávněné.

Cvičení 2

1. a)   Přímka (AB) je rovnoběžná s osou (OI)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1+1 \\ 5-5 \end{pmatrix} \qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Přímka (CD) se nachází v rovině χ rovnoběžné s (OJK).

$$\vec{CD}=\begin{pmatrix}11-11\\4-0\\4-1\end{pmatrix} \qquad \vec{CD}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$$

c) $\vec{AE}=\begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{AE}\ a\ \vec{AB}$ jsou kolineární. *E* náleží přímce (AB).

$\vec{AB}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ je normála na χ a rovnice roviny χ má tvar: *2x + d = 0*. Navíc bod *C* náleží χ, tudíž jeho souřadnice potvrzují rovnici: *2 X 11 + d = 0* ⟶

d = -22 a rovnice roviny χ je tedy: *x – 11 = 0* .

Bod $E=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$ potvrzuje tuto rovnici a náleží rovině χ. Bod E náleží přímce (AB) a

rovině χ, je tudíž jejich průsečíkem.

d) Přímky (AB) a (CD) nejsou různoběžné.

2. a) $(M_tN_t)^2 = (x_{Nt} - x_{Mt})^2 + (y_{Nt} - y_{Mt})^2 + (z_{Nt} - z_{Mt})^2$

$(M_tN_t)^2 = (11 - t)^2 + (08t + 1)^2 + (1 + 06,t - 5)^2$

$(M_tN_t)^2 = 2\,t^2 - 25{,}2\,t + 138$

b) $(M_tN_t)^2$ je minimální pro t = 6,3.

Cvičení 3

1. $z=4\pm4\sqrt{3}i$

2. a) |a| = 8, $arg\ a=\frac{\pi}{3}$

b) $a=8e^{i\frac{\pi}{3}}$ $b=8e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) |a| = |b| = |c| = 8 A, B a C leží na kružnici ρ se středem *O* a poloměrem 8.

3. a) $b'=be^{i\frac{\pi}{3}}=8e^{-i\frac{\pi}{3}}.e^{i\frac{\pi}{3}}=8$

b) |a´| = 8 $arg\ a'=\frac{2\pi}{3}$

4. a) *r = 0 , s = 4 + 4*

b) Připusťme, že trojúhelník RST je rovnostranný:

$$RS = |s-r| = |4+4\mathrm{i}| = \sqrt{32}$$
$$TS = |s-t| = |4+4\mathrm{i}-2+2\sqrt{3}-i(2+2\sqrt{3})|$$
$$ST = |2+2\sqrt{3}+i(2-2\sqrt{3})| = \sqrt{32}$$
$$RT = |t-r| = |2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})|$$
$$RT = \sqrt{32}$$
$$ST = RT = RS$$

Cvičení 4

část 1

1.
$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3\mathrm{x} + 7 \; na \; [0;20]$$
$$f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3$$
$$f'(x) = \ln(x+1) - 2 \; na \; [0;20]$$

2. *f* je rostoucí na intervalu [e^2 – 1; 20] a klesající na intervalu [0; e^2 – 1]

f (0) = 7

f (e^2 *– 1) = -* e^2 *+ 10*

f (20) = 21ln21 – 53

3. *f´(0) = ln (0 +1) - 2*

f´(0) = - 2

4.
$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x \quad \text{na intervalu } [0; 20]$$

část 2

1. T1 je pravda (*f (20) – f (*e^2 *– 1) = 21ln21 – 53 - (-* e^2 *+ 10) ≈ 8,3*)

T2 je pravda (*f´ (20) = ln (20 + 1) – 2 ≈ 1 , f ´ (0) = - 2 ⟶ |f ´ (0)| ≈ 2 |f ´(20)|*)

2. Je potřeba minimálně 77 litrů barvy.

3. a)

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{(x_{B_{k+1}} - x_{b_k})^2 + (y_{B_{k+1}} - y_{b_k})^2}$$

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

Řešení Velká Británie

Pure Mathematics 1

1. *a = 1, b = 2*

2. (i) $(2x-3)^2-9$

(ii)
$$2x-3>4 \quad 2x-3<-4$$
$$x>3\frac{1}{2} \;\; a \;\; x<-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}>x>3\frac{1}{2}$$

3. 7

4. $y = 3x + 4$

5. (i) $d = 2a$

(ii) $199a$

6. a) S = 8tanα – 2α

b) $O=\frac{4}{\cos\alpha}+4\tan\alpha+2\alpha$

7. $a = -2$ nebo 8, $b = 12$ nebo -8

8. (i) p = - 2, p = 2

(ii)
$$jednotkový\ vektor=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\\0\end{pmatrix}$$

9. (i)
$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\equiv\frac{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\equiv\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\equiv\frac{1}{\tan\theta}$$

(ii)
$$\tan\theta=\pm\frac{1}{2} \rightarrow 26{,}6°;153.4°$$

10) (i) $-5 \le f(x) \le 4$

(iii) přímka: $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+2) \;\; kdy \; -5\leqslant x\leqslant 1$

křivka: $f^{-1}(x)=5-\frac{4}{x}\quad kdy\,1<x\leqslant 4$

11. (i) *c = 12*

(ii) *x = -1* nebo *x = -3*

$$S=-3\mathrm{x}-2x^2-\frac{x^3}{3}$$

12. (i)

$$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\mathrm{x}^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}$$

(ii) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(iii) např. x *= 1, y = - 2*

Řešení Velká Británie

Pure Mathematics 3

1. (i) 2sinα

(ii)

$$cos\beta=\frac{1}{3}$$

2. $\frac{14}{9}$

3.

$$sklon=\frac{5}{2}$$

4. $y=4(2+e^{3\mathrm{x}})^2$

5. (i)

$$9e^{\frac{1}{3}\pi i}$$

(ii) $3e^{-\frac{5}{6}\pi i}$

6. (i) užitím logaritmického pravidla součtu/podílu/mocniny získáme

$(4x-5)^2 (x + 1) = 27$ odtud $16x^3 - 24x^2 - 15x - 2 = 0$.

(ii) $(x - 2) (4x + 1)^2$

(iii) $x = 2$

7. (i) $2x - 3y + 6z = 23$

(ii) $\frac{23}{7}$

(iii) $2x - 3y + 6z = 121$

$2x - 3y + 6z = - 75$

8. (ii) pracovat s $cosecx = \frac{1}{sinx}$

(iii) a) $\alpha = 0.66$

b) $\beta = 2.48$

9. (i) $A = 1 \quad B = \frac{3}{2} \quad C = -\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{3} - \frac{8}{9} x + \frac{1}{27} x^2$

10. (i) $x_{T1} = 0.362\ (20.7°)$ $x_{T2} = 1.147\ (65.7°)$

(ii) $n = 33$

Řešení Velká Británie

Pravděpodobnost a statistika 1

1. $P = 0.537$

2. $\sigma = 2.34$ $\mu = 7.91$

3. (i) dána p, nezávislé pokusy, počet pokusů

(ii) $P (x \geq 3) = 0.520$

4. (i) $P(2) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$

(ii)

x	*2*	*3*	*4*
Pravděpodobnost	*3/14*	*8/14*	*3/14*

(iii) *var (X) = 3/7 (0.429)*

5. (i) $P(D) = \frac{53}{288} = 0.184$

(ii) P (Y | P) = 1/7

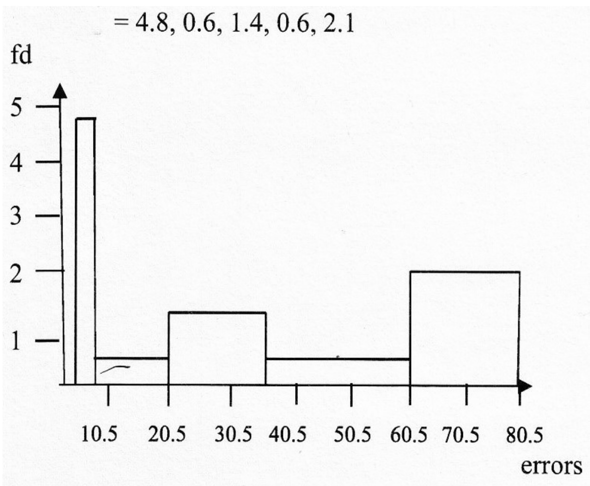
6. (i) $\frac{6!}{2!} = 360$

(ii) $\frac{4!}{2!} \times \frac{4!}{3!} = 48$

(iii) 3 způsoby

(iv) 8 způsobů

7. (i) četnost = 4.8, 0.6, 1.4, 0.6, 2.1



(ii) aritmetický průměr = 40.2 chyb

(iii) $Q_{0,25}$ v 6 – 20

$Q_{0,75}$ v 61 – 80

mezikvartilové rozpětí = 61 – 20 = 41

Řešení Velká Británie

Pravděpodobnost a statistika 2

1. *Φ(„-2.035“) = 1 – Φ(„2.035“) = 0.021* nebo *2.1 %*

2.
$$\frac{70}{69} \times 2.70 = 2.73913$$
$$3.61 \pm z\sqrt{\frac{2.73913}{70}}$$
$$z = 1.96$$
$$3.22 \; až \; 4.00$$

3.
$$H_0: \mu = 250$$
$$H_1: \mu > 250$$
$$\frac{250.06 - 250}{0.2 \div \sqrt{40}} = 1.90$$
$$z = 1.645$$

Tvrzení je tedy oprávněné.

4. (i) *B(3500, 0.001)*

   Poissonovo s průměrem = *3.5*

   n > 50 a *np < 5*

   (ii)
$$e^{-3.5}\left(1 + 3.5 + \frac{3.5^2}{2} + \frac{3.5^3}{3!}\right) = 0.537$$

5. (i) $0.25(1 + 4 + 9) - 1.5^2$ *(=1.25)*

   (ii) *Φ(“–1.549”) = 1 – Φ(“1.549”) = 0.0607*

   (iii) Velký výběr nebo velké n, centrální limitní věta

6. (i) *H0: Rate = 0.9*

H1: Rate < 0.9

1 – P(17, 18, 19, 20) = 0.133

(ii) Chyba 2. druhu

7. (i) $\int_0^1 \frac{k}{x} dx = 1$

$k \ln a = 1$

$k = \frac{1}{\ln a}$

(ii) $\frac{1}{\ln a}(a-1)$

(iii) $m = \sqrt{a}$

8. (i) V: nemůžeme mít zápornou hodnotu

W: musíme mít jen celé hodnoty

(ii) a) $e^{-\lambda} = p$ a $\lambda e^{-\lambda} = 2.5p$

b) $P(X \geq 3) = 0.456$

(iii) $\mu = 41.8$