UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Modely portfolia

Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Jaroslav Marek, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracoval:
Martin Juráš
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně za vedení Mgr. Jaroslava Marka, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 13. dubna 2010

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval Mgr. Jaroslavu Markovi, Ph.D. za odbornou pomoc a vedení při tvorbě mé bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod

Existuje důkaz, že vysoké IQ a vyšší vzdělání nejsou postačující pro to, aby z „obyčejného“ investora udělaly investora inteligentního. Například v roce 1720 vlastnil Sir Isaac Newton akcie Jihomořské společnosti (South Sea Company), nejžhavější cenný papír v tehdejší Anglii. Když cítil, že se trh vymyká kontrole, tento skvělý fyzik zamručel něco ve smyslu: „Dokážu spočítat pohyby nebeských těles, ale nikoli šílenství lidí.“ Newton prodal akcie Jihomořské a zinkasoval 7000 liber, což znamenalo 100 % výnos. Avšak o několik měsíců později se nechal unést nadšením na trhu, nakoupil akcie zpátky, avšak za mnohem vyšší cenu — a prodělal 20000 liber (což by dnes představovalo více než 3 miliony dolarů). Po zbytek svého života pak všem zakázal v jeho přítomnosti byť jen vyslovit slovo „Jihomořská“, viz [1].

Na burze může investor dnes, stejně jako v minulosti mnoho získat a stejně tak i mnoho ztratit. Můžeme se setkat s informacemi o existenci více či méně kvalitních a prověřených strategií, jak při obchodování na burze patřit k těm úspěšným. V práci se pokusím analyzovat úspěšnost přístupů pro tvorbu akciového portfolia pomocí různých matematických modelů. Cílem této práce je některé matematické přístupy prostudovat a demonstrovat jejich možné použití na burze. Získané výsledky budou porovnány se skutečným vývojem cen a v práci bude posouzena úspěšnost jednotlivých modelů.

V první kapitole jsou uvedeny základní číselné charakteristiky náhodné veličiny, které jsou pro další práci a výpočty velice důležité.

Ve druhé kapitole této práce si teoreticky představíme první model, který bude později prověřen v praxi na burze cenných papírů. Jde o tzv. faktorový model, ve kterém můžeme za onen faktor považovat jak makroekonomický, tak i mimoekonomický ukazatel. Budeme zkoumat závislost výnosnosti cenných papírů na jednom, dvou i více faktorech současně.

Další, v pořadí třetí kapitola, bude věnována způsobu volby portfolia, které v 50. letech 20. století vytvořil a posléze publikoval Harry Markowitz, viz [14] nebo [2]. Ten byl dokonce za svou práci a přínos ekonomii v roce 1990 oceněn cenou Švédské národní banky za rozvoj ekonomické vědy na památku Alfreda Nobela běžně označovanou jako Nobelova cena za ekonomii, i když vlastně nejde o Nobelovu cenu, jelikož ekonomie nebyla zmíněna v jeho závěti. Jeho práci nazvanou Teorie portfolia se zde pokusíme vysvětlit a poté ji i aplikovat do praxe.

Další část práce bude již ryze praktická. V úvodu této části se pokusíme na základě historických dat sestavit s pomocí Markowitzovy teorie optimální portfolio, které by bylo pro investora svým výnosem lákavé a zároveň by bylo riziko ztráty přijatelné. Druhá polovina této teoretické části bude věnována úspěšnosti faktorových modelů při předpovědi budoucího vývoje cen akcií. Oba modely porovnáme se skutečnými cenami akcií a v závěru budou vyhodnoceny jejich úspěšnosti.

Seznam použitého značení

Označení	*Pojem*
b_i	citlivost cenného papíru i na faktor
F	hodnota faktoru
$\overline{F}_i$	očekávaná hodnota faktoru i
$\overline{r}_i$	očekávaná výnosnost cenného papíru i
a_i	očekávaná výnosnost CP, pokud by byl faktor roven nule
σ_i	rozptyl i-tého cenného papíru
σ_F	směrodatná odchylka faktoru F
e_i	náhodná chyba
σ_{e_i}	směrodatná odchylka náhodné chyby e_i
X_i	cena akcie i
w_i	váha i-té akcie v portfoliu
$\overline{r}_p$	očekávaná výnosnost portfolia
L	Langrangeova funkce
C	kovariační matice
R	korelační matice

Tabulka 1: Použité značení

2 Základní pojmy matematické statistiky

Teorie portfolia se na výnosnost dívá jako na náhodnou veličinu a k jejímu bližšímu určení potřebujeme znát především charakteristiky náhodné veličiny. V této kapitole bych chtěl proto tyto charakteristiky vysvětlit a uvést alespoň základní definice matematické statistiky k této problematice. Podrobněji viz [4].

2.1 Náhodná veličina

Náhodná veličina je definována jako veličina, jejíž hodnota je dána výsledkem náhodného pokusu. Náhodné pokusy mají proměnlivé hodnoty v průběhu času, tudíž nemůžeme předem říci jak náhodný pokus dopadne a díky tomu není ani možné předem určit hodnotu náhodné veličiny. Většinou můžeme výsledek náhodného pokusu vyjádřit číslem (např. při hodu kostkou bude našim výsledkem jedno z čísel jedna až šest). Výsledek náhodného pokusu může mít ale i kvantitativní charakter, jako například narození dítěte, kde nastane právě jedna z možností (chlapeček nebo holčička) nebo výrobky v továrně (dobrý nebo zmetek). I kvantitativnímu výsledku můžeme přiřadit reálné číslo (např. 0-dobrý a 1-zmetek).

Jak již bylo řečeno,tak pro nás je náhodnou veličinou X výnosnost z investice. My se sice můžeme s větší či menší přesností domnívat, zda pro nás výnosnost z investice bude opravdu výnosná, ale jistotu mít nebudeme (výjimku tvoří pouze tzv. bezrizikové investice). Výnosnost ovlivňuje spousta faktorů, jak ekonomických, tak i jiných. Dále mohou na sebe působit i investice samotné. Když jedna bude růst, tak v závislosti na ní může jiná klesat.

Náhodná veličina X může být buď spojitá nebo diskrétní. Při diskrétním rozdělení pravděpodobností nabývá náhodná veličina pouze izolovaných hodnot, kdežto při spojitém rozdělení nabývá všech hodnot z určitého intervalu. Na naši náhodnou veličinu X (tedy na výnosnost) budeme pohlížet jako na náhodnou veličinu diskrétního typu (bude nabývat pouze celočíselných hodnot). Jedním z hlavních důvodů volby diskrétního rozdělení je pozdější jednoduchost používaných vzorců.

Abychom mohli popsat pravděpodobnostní chování náhodné veličiny, je třeba určit hodnoty, kterých naše náhodná veličina může nabývat. K určení tohoto pravděpodobnostního chování nám slouží distribuční funkce, která nám poskytne veškeré informace o náhodné veličině. Z těchto informací potřebujeme především tyto základní charakteristiky náhodné veličiny: střední hodnota, rozptyl a kovariance. Existuje jich samozřejmě více, ale pro potřeby naší práce je naprosto dostačující vysvětlit blíže pouze tyto tři.

2.1.1 Střední hodnota

Mezi jednu z nejzákladnějších a nejpoužívanějších charakteristik bezpochyby patří střední hodnota $E(X)$.

Střední hodnota patří mezi charakteristiky, které určují polohu náhodné veličiny X. Hodnota $E(X)$ nám říká, kde můžeme realizaci náhodné veličiny X s největší pravděpodobností očekávat, tzn. kolem které hodnoty budou náhodné veličiny při opakování pokusu náhodně kolísat. V případě spojité distribuční funkce by se hodnota $E(X)$ realizovala v bodě, kde nabývá funkce svého maxima. V našem případě bude hodnota $E(X)$ představovat očekávanou výnosnost z investice. Při diskrétním rozdělení náhodné veličiny je střední hodnota rovna:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{1}$$

Kdyby bylo rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny spojité, pak by se střední hodnota $E(X)$ vypočítala pomocí vztahu:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \tag{2}$$

Místo označení $E(X)$ jako střední hodnoty se ještě také často používá μ nebo $\overline{x}$.

Vlastnosti střední hodnoty jsou následující:

1. $E(c) = c$, kde c je konstanta,
2. $E(cX) = cE(X)$,

3. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,

4. $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Poznámka 1. *Poslední vlastnost platí jen za podmínky, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.*

2.1.2 Rozptyl

Rozptyl je druhou nejdůležitější charakteristikou náhodné veličiny. Značí se $\mathrm{var}(X)$ a udává kolísání (variabilitu) hodnot náhodné veličiny kolem střední hodnoty. Rozptyl je vlastně druhý centrální moment, proto je definován vztahem:

$$\mathrm{var}(X) = E[X - E(X)]^2. \tag{3}$$

Pro diskrétní náhodnou veličinu by byl potom rozptyl roven:

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} E[x_i - E(X)]^2 p(x_i). \tag{4}$$

Pro spojitou náhodnou veličinu by se rovnal:

$$\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E[X - E(X)]^2 f(x). \tag{5}$$

Při výpočtech se velice často rozptyl vyjadřuje ve tvaru:

$$\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2. \tag{6}$$

Logicky přijdeme na to, že rozptyl z konstanty je roven nule, neboli $\mathrm{var}(k) = 0$. U rozptylu se můžeme také setkat s označením σ^2 nebo $D(X)$.

Poznámka 2. *Druhá odmocnina z rozptylu $\sqrt{var(X)}$ se nazývá směrodatná odchylka náhodné veličiny X.*

2.1.3 Kovariance

Obě předešlé charakteristiky popisovaly rozdělení náhodných veličiny, ale ani jedna z nich neřešila vzájemnou závislost mezi dvěma veličinami. Charakteristika, která se touto problematikou zabývá se nazývá kovariance. Budeme ji označovat $\text{cov}(X, Y)$ a je definována jako střední hodnota součinu odchylek obou veličin od jejich středních hodnot.

$$\text{cov}(X, Y) = E[X - E(X)] \cdot E[Y - E(Y)]. \tag{7}$$

Pro kovarianci dále platí:

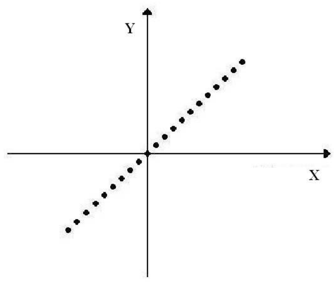
1. $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,
2. $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$.

Pokud vyjde $\text{cov}(X, Y) = 0$ znamená to, že náhodné veličiny jsou vzájemně nekorelované. Jsou-li náhodné veličiny nezávislé, pak jsou i nekorelované. Naopak toto tvrzení ale neplatí.

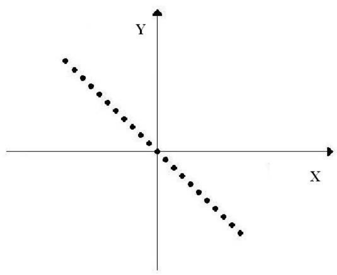
Na kovarianci je založen koeficient korelace, pomocí něhož můžeme změřit intenzitu vztahu mezi dvěma veličinami.
Koeficient korelace má tvar:

$$\varrho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \tag{8}$$

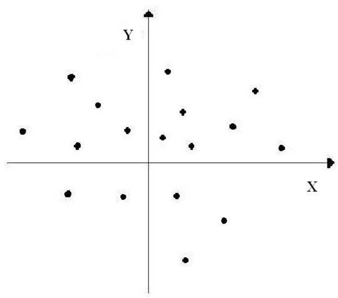
Koeficient korelace je veličina, která nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.
Jestliže platí $\varrho(X, Y) = 1$ (viz obr. 1), pak se jedná o přímou úměrnost a tedy platí, že náhodná veličina Y je lineární funkcí náhodné veličiny X, neboli když roste jedna náhodná veličina, tak potom bude růst i druhá.
V případě $\varrho(X, Y) = -1$ jde o úměrnost nepřímou.
Koeficient korelace se rovná nule pouze tehdy, když se $\text{cov}(X, Y) = 0$ a potom jsou dané náhodné veličiny nekorelované.



Obrázek 1: $\varrho(X, Y) = 1$



Obrázek 2: $\varrho(X, Y) = -1$



Obrázek 3: $\varrho(X, Y) = 0$

2.2 Lineární regresní model

Regrese nám slouží k hledání závislostí mezi proměnnými. Nejjednodušší případ regrese nastane, když závisle proměnná (tzn. vysvětlovaná) je určena jedinou nezávislou proměnnou (tzn. vysvětlující), viz [4], str. 156. Často proměnnou bývá náhodná veličina Y, která má při dané hodnotě vysvětlující veličiny x určité rozdělení pravděpodobností.

Předpokládejme, že střední hodnota veličiny Y je při daném x rovna:

$$E(Y|x) = g(x; \beta_1, \ldots, \beta_k), \tag{9}$$

kde:

$\beta_1, \ldots, \beta_k$ pro $k \geq 1$ jsou neznámé parametry.

Funkce g se nazývá regresní funkce a parametry $\beta_1, \ldots, \beta_k$ se nazývají regresní parametry. Regrese je tedy závislost mezi střední hodnotou náhodné veličiny Y a proměnnou x.

Naším úkolem je na základě opakovaného pozorování $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \ldots,$ (x_n, Y_n) odhadnout neznámé parametry.

Nejprve uvažujme přímkovou regresi, kde platí:

$$E(Y_i|x_i) = g(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

tento vztah můžeme také vyjádřit jako:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \ n \geq 2, \tag{11}$$

kde:

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ – jsou náhodné veličiny (náhodné odchylky, chyby měření).

Definice 1. *Náhodné veličiny $\widehat{\beta_0}, \widehat{\beta_1}$, které pro dané $Y_1, \ldots, Y_n$ minimalizují výraz:*

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2, \tag{12}$$

nazýváme odhad parametrů určené metodou nejmenších čtverců.

Regresní model můžeme zapsat pomocí vektorů následovně:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \tag{13}$$

potom můžeme vztah (11) vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{14}$$

Pomocí metody nejmenších čtverců získáme řešení soustavy normálních rovnic v tomto tvaru, viz [4]:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}. \tag{15}$$

Více o regresi a metodě nejmenších čtverců naleznete v [4] str. 157.

2.2.1 Index determinace

Při výpočtech v kapitole 5.4 Aplikace faktorových modelů využijeme index determinace.

Index determinace udává kvalitu regresního modelu, jinak řečeno udává, kolik procent rozptylu vysvětlované proměnné je vysvětleno modelem a kolik zůstalo nevysvětleno. Vzorec pro výpočet indexu determinace je následující:

$$I^2 = \frac{S^2_{\widehat{Y}}}{S^2_Y}, \tag{16}$$

kde:

$S^2_{\widehat{Y}}$ – je součet čtverců modelu a je roven $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2$,

S^2_Y – je celkový součet čtverců a rovná se $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$.

Index determinace nabývá hodnot od nuly do jedné, přičemž čím více se hodnota indexu blíží k jedné, tím kvalitnější je regresní model.

3 Faktorové modely

Existuje mnoho procesů, které ovlivňují očekávanou výnosnost cenných papírů. Předpokládáme, že výnosnost cenného papíru je citlivá na chování určitých faktorů. Pro zjištění této závislosti konstruujeme tzv. faktorové modely. Při odhadování očekávané výnosnosti, rozptylu a kovariance mezi jednotlivými cennými papíry jsou tyto modely velmi užitečné. Ukázalo se, že výnosnosti portfolia nejsou citlivé pouze na pohyb tržního portfolia, ale i na dalších faktorech. Analýza portfolia má tedy za cíl tyto faktory identifikovat a zjistit citlivost cenných papírů na jejich pohyb.

V literatuře je uvedeno mnoho faktorů, které ovlivňují výnosnosti cenných papírů. Každý z těchto faktorů má ovšem jinou váhu na samotné výnosnosti. Faktory můžeme rozdělit do dvou skupin:

Makroekonomické (ekonomické) faktory:

1. inflace (očekávaná, neočekávaná),
2. neočekávané změny v časové struktuře úrokových sazeb,
3. neočekávané a očekávané změny míry růstu průmyslové výroby,
4. výnos tržního portfolia,
5. růst hrubého národního produktu (HNP).

Mimoekonomické faktory

1. přírodní podmínky (např. vliv zpráv o záplavách, zemětřesení, neúrodě, vyčerpání surovinových zdrojů atd.),
2. psychologické — např. vliv počasí na psychiku a tedy i na chování investora nebo burzovní panika se může projevit tak, že se průměrný investor připojí ke skupině investorů, aby zabránil skutečným nebo pomyslným ztrátám i za cenu, že jeho rozhodnutí nemusí být správné,
3. válečné konflikty — vliv zpráv o vzniklých válečných konfliktech a možného vývoje cen surovin, viz [2].

3.1 Jednofaktorové modely

Začneme u nejjednoduššího jednofaktorového modelu, kde je výnosnost cenných papírů ovlivněna pouze jedním faktorem. Jako příklad může posloužit růst hrubého domácího produktu. Obecně můžeme jednofaktorový model zapsat ve tvaru:

$$\overline{r}_i = a_i + b_i \cdot \overline{F} + e_i, \tag{17}$$

kde:

F – je hodnota faktoru,

b_i – je citlivost cenného papíru i na tento faktor,

e_i – je náhodná chyba.

Kdyby hodnota faktoru byla nulová, potom by výnosnost byla rovna:

$$\overline{r}_i = a_i + e_i, \tag{18}$$

kde $E(e_i) = 0$.

Na tomto jednofaktorovém modelu můžeme ukázat rozptyl libovolného cenného papíru, který bude roven:

$$\sigma_i^2 = b_i^2 \cdot \sigma_F^2 + \sigma_{e_i}^2. \tag{19}$$

Kovariance mezi libovolnými cennými papíry i a j bude:

$$\sigma_{i,j} = b_i \cdot b_j \cdot \sigma_F^2. \tag{20}$$

Předchozí rovnice vycházejí z následujících dvou kritických předpokladů:

1. *Náhodná chyba a faktor jsou nekorelované (hodnota faktoru nemá žádný vliv na hodnotu náhodné chyby).*
2. *Náhodné chyby jakékoli dvojice cenných papírů nejsou také korelované (náhodná chyba jednoho cenného papíru nemá vliv na náhodnou chybu druhého cenného papíru).*

Nebude-li některý z těchto dvou předpokladů splněn, pak bude tento model považován pouze za přibližný.

V jednofaktorovém modelu je riziko portfolia rovno:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot b_i\right)^2 \cdot \sigma_F^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot \sigma_{e_i}^2\right]^{1/2} \\ &= \left(b_p^2 \cdot \sigma_F^2 + \sigma_{e_p}^2\right)^{1/2}, \qquad (21)\end{aligned}$$

kde

$$b_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot b_i \qquad \text{a} \qquad \sigma_{e_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sigma_{e_i}^2.$$

U faktorových modelů mluvíme o faktorovém riziku a nefaktorovém riziku portfolia. Toto riziko můžeme diverzifikovat (zmenšit nefaktorové riziko a zprůměrňovat faktorové riziko). Potom by rizika, která můžeme diverzifikací snížit, vypadala následovně:

$b_p^2 \cdot \sigma_F^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot b_i\right)^2 \cdot \sigma_F^2$ – faktorové riziko – systematické fakt. riziko,

$\sigma_{e_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot \sigma_{e_i}^2$ — nefaktorové riziko – jedinečné faktorové riziko.

3.2 Dvoufaktorový model

Jedná se o specifický příklad vícefaktorového modelu, který můžeme zapsat takto:

$$\overline{r}_i = a_i + b_{i_1} \cdot \overline{F}_1 + b_{i_2} \cdot \overline{F}_2 + e_i, \qquad (22)$$

kde $\overline{F}_1$ a $\overline{F}_2$ jsou dva faktory a rozhodujícím vlivem na výnosnost cenného papíru b_{i_1} a b_{i_2} jsou citlivostí cenného papíru i na tyto faktory. Stejně tak, jako u jednofaktorového modelu je e_i náhodná chyba a a_i je očekávaná výnosnost cenného papíru i, pokud jsou oba faktory rovny nule.

U dvoufaktorového modelu musí být odhadnuty pro každý cenný papír čtyři parametry: a_i, b_{i_1}, b_{i_2} a směrodatná odchylka náhodné chyby σ_{e_i}. Pro každý faktor musí být odhadnuty dva parametry: očekávaná hodnota každého faktoru $\overline{F}_1$ a $\overline{F}_2$ a jejich směrodatná odchylka σ_{F_1} a σ_{F_2}.

Díky těmto odhadům můžeme z rovnice (22) určit očekávanou výnosnost libovolného cenného papíru i.

Jsou-li faktory nekorelované, potom pro libovolný cenný papír bude rozptyl:

$$\sigma_i^2 = b_{i_1}^2 \cdot \sigma_{F_1}^2 + b_{i_2}^2 \cdot \sigma_{F_2}^2 + \sigma_{e_i}^2. \tag{23}$$

Kovariance mezi libovolnými dvěma cennými papíry i a j:

$$\sigma_{ij} = b_{i_1} \cdot b_{j_1} \cdot \sigma_{F_1}^2 + b_{i_2} \cdot b_{j_2} \cdot \sigma_{F_2}^2. \tag{24}$$

Kdyby byly dané faktory korelované, potom by rovnice (23) pro σ_i^2 obsahovala ještě navíc člen: $2 \cdot b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot \mathrm{cov}\big(\overline{F}_1, \overline{F}_2\big)$, tudíž by se rozptyl pro daný cenný papír rovnal:

$$\sigma_i^2 = b_{i_1}^2 \cdot \sigma_{F_1}^2 + b_{i_2}^2 \cdot \sigma_{F_2}^2 + 2 \cdot b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot \mathrm{cov}\big(\overline{F}_1, \overline{F}_2\big) + \sigma_{e_i}^2 \tag{25}$$

a rovnice pro σ_{ij} by měla navíc člen $\big(b_{i_1} \cdot b_{j_2} + b_{i_2} \cdot b_{j_1}\big) \cdot \mathrm{cov}\big(\overline{F}_1, \overline{F}_2\big)$, takže potom by rovnice (24) měla tvar:

$$\sigma_{ij} = b_{i_1} \cdot b_{j_1} \cdot \sigma_{F_1^2} + b_{i_2} \cdot b_{j_2} \cdot \sigma_{F_2^2} + \big(b_{i_1} \cdot b_{j_2} + b_{i_2} \cdot b_{j_1}\big) \cdot \mathrm{cov}\big(\overline{F}_1, \overline{F}_2\big). \tag{26}$$

3.3 Vícefaktorový model

Vícefaktorový model nám ukazuje, jaký bude výnos $\overline{r}_i$ i-tého aktiva po dobu trvání portfolia. Je to dáno rovnicí:

$$\overline{r}_i = a_i + b_{i_1} \cdot \overline{F}_1 + b_{i_2} \cdot \overline{F}_2 + \cdots + b_{i_k} \cdot \overline{F}_k + e_i = a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{i_k} \cdot \overline{F}_k + e_i \tag{27}$$

Potom výnosnost celého portfolia bude mít tvar:

$$\begin{aligned}
\overline{r}_p &= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \overline{r}_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \left(a_i + b_{i_1} \cdot \overline{F}_1 + b_{i_2} \cdot \overline{F}_2 + \cdots + b_{i_k} \cdot \overline{F}_k + e_i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot a_i + \overline{F}_1 \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_{i_1} + \overline{F}_2 \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_{i_2} + \cdots + \overline{F}_k \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot b_{i_k} + \\
&= + \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot e_i.
\end{aligned} \tag{28}$$

Riziko portfolia je dáno vztahem:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i \cdot X_j \cdot \operatorname{cov}\big(\overline{r}_i, \overline{r}_j\big). \tag{29}$$

Kovariance $\operatorname{cov}\big(\overline{r}_i, \overline{r}_j\big)$ je potom ve tvaru:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\big(\overline{r}_i, \overline{r}_j\big) &= \Bigg(\underbrace{a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{i_k} \cdot \overline{F}_k + e_i}_{\overline{r}_i} ; \underbrace{a_j + \sum_{m=1}^{K} b_{i_m} \cdot \overline{F}_m + e_j}_{\overline{r}_j} \Bigg) = \\ &= \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{K} b_{i_k} \cdot b_{j_m} \cdot \operatorname{cov}\big(\overline{F}_k, \overline{F}_m\big) + \sum_{m=1}^{K} b_{i_k} \cdot \operatorname{cov}\big(e_i, \overline{F}_k\big) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{K} b_{j_m} \cdot \operatorname{cov}\big(e_j, \overline{F}_m\big) + \operatorname{cov}\big(e_i, e_j\big). \end{aligned} \tag{30}$$

4 Markowitzův model

Markowitzův model optimálního portfolia je založen na diverzifikaci portfolia do nekorelovaných, resp. negativně korelovaných akcií.

Když v roce 1952 publikoval Harry Markowitz svůj článek „Portfolio Selection” v časopise The journal of finance, který bychom mohli přeložit jako „výběr portfolia“, znamenalo to průlom ve způsobu volby vhodného portfolia cenných papírů. Každý investor chce, aby akcie, do kterých hodlá investovat svůj kapitál, byly co možná nejvíce ziskové, ale zároveň nechce podstupovat příliš velké riziko ztráty finančních prostředků. Tyto dva cíle jsou ale již na první pohled protichůdné. Jak správně utvořit dané portfolio, neboli kolik a do čeho investovat se nám snaží poradit právě Markowitzův model.

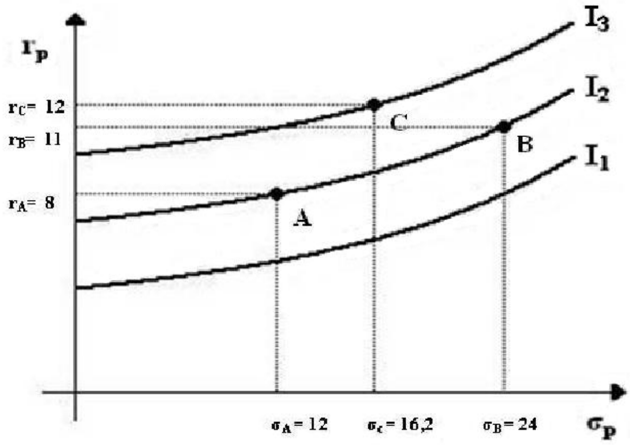
Předpokládejme, že investor má určité množství peněz, které hodlá investovat. Tyto peníze chce investovat pouze na určité období, kterému se také říká investorova *doba držení portfolia*. Na konci doby držení portfolia investor své cenné papíry prodá a výnos z nich si buď ponechá nebo je reinvestuje obdobně do dalších cenných papírů (může udělat klidně i oboje). Při rozhodování na začátku období (tzn. v čase $t = 0$) ještě nemůže investor znát výnosnosti cenných papírů ze svého portfolia na konci období (označme $t = 1$). Přesto ale může alespoň odhadnout očekávané výnosnosti různých cenných papírů a investovat do těch, kde je očekávaná nejvyšší výnosnost. Jak už bylo řečeno, tak zároveň s maximální ziskovostí se snaží také minimalizovat riziko. Oba dva tyto cíle řeší investor v čase $t = 0$.

Z Markowitzova přístupu plyne, že oběma cílům vyjde investor vstříc tehdy, když rozloží svůj nákup na více cenných papírů z více oblastí.

Na samotnou výnosnost by měl investor podle Markowitze nahlížet jako na náhodnou veličinu, pro jejiž odhad a také pro odhad směrodatné odchylky každého portfolia potřebuje znát relativní velikosti těchto dvou parametrů.

4.1 Křivky indiference

Křivky indiference jsou velice důležitým nástrojem při výběru nejžádanějšího portfolia. Tyto křivky ukazují na investorovy preference rizika a výnosnosti. Na vodorovné ose se zakresluje riziko, které je dáno směrodatnou odchylkou σ_p, kterou budeme ještě blíže vysvětlovat v dalším textu, a na svislé ose je výnosnost r_p, jakožto odměna za podstoupení riziko.



Obrázek 4: Křivky indiference

Obrázek 1 nám ukazuje křivky indiference, jež jsou vlastní hypotetickému investorovi. Každá z čar I_1, I_2, I_3 je samostatnou indiferenční křivkou představující všechny kombinace portfolia, které jsou pro daného investora vyhovující a se kterýma by souhlasil. Jako příklad nám mohou posloužit portfolia A a B ležící obě na jedné křivce indiference. Bod A je sice investice s menším rizikem, ale bod B své zvýšené riziko přesně vykompenzoval svou vyšší výnosností, takže pro investora by nakonec byly obě portfolia stejně žádoucí. Tento příklad reprezentuje první vlastnost křivek indiference:

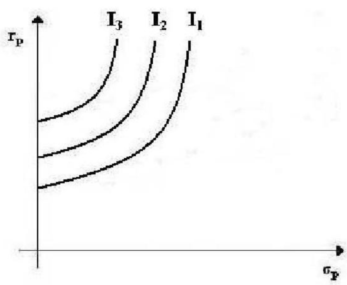
1. *Všechna portfolia ležící na stejné křivce indiference, jsou pro investora stejně žádoucí.*

Důsledek: Křivky indiference se nemohou protnout.

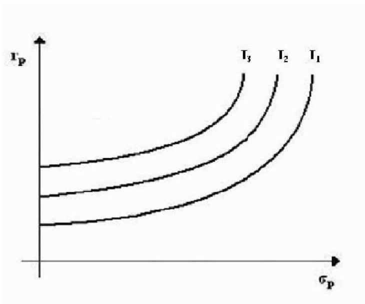
2. *Pro investora bude více žádoucí to portfolio, které leží na křivce indiference, jež se nachází výše než ostatní křivky indiference.*

   V našem případě by portfolio C bylo nejžádanější, protože má logicky vyšší výnos při podstoupení menšího rizika.

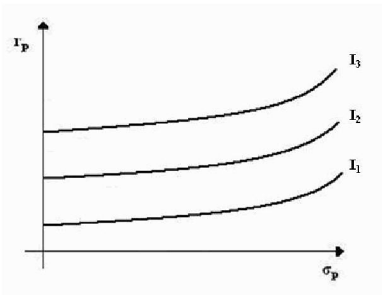
Zaměřme se teď na samotný tvar křivek indiference. Jak investor stanoví tvar svých křivek? Odpověď se skrývá pod dvěma předpoklady, kterými jsou **nenasycenost a odpor**. Předpoklad nenasycenosti vychází z toho, že investor dá vždy přednost vyšší úrovni koncového bohatství. Jinak řečeno: Při volbě dvou portfolií se stejnou směrodatnou odchylkou si investor vybere vždy to portfolio, které bude mít vyšší výnos. Druhý předpoklad řeší opačný případ, kdy má investor volit mezi portfolii se stejnou výnosností, ale různými riziky. Díky těmto dvěma předpokladům jsou křivky indiference konvexní. Teď záleží jen na vlastnostech investora, jak moc konvexní budou. Následující obrázky ukazují tři typy investorů.



Obrázek 5: Vysoký odpor k riziku



Obrázek 6: Mírný odpor k riziku



Obrázek 7: Velmi nízký odpor k riziku

4.1.1 Očekávaná výnosnost portfolia

V těchto dvou podkapitolách si vysvětlíme jak vlastně investor vypočte očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku portfolia. Nejprve tedy výnosnost.

Jak již víme, tak každý investor chce svůj počáteční kapitál K_0 co nejlépe zhodnotit. Každé portfolio se skládá z různé škály cenných papírů, ve kterém má každý cenný papír určitou váhu. Proto nyní zavedeme pojem vektor vah, který se značí $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n)'$, pro složky tohoto vektoru platí $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Díky těmto různým váhám, přinese každý cenný papír do portfolia spolu se svou očekávanou výnosností také riziko změny očekávané výnosnosti. Pro investora je důležité mít v držení různě rizikové cenné papíry, které ale dohromady dávají co možná nejnižší riziko možné změny očekávané výnosnosti. Pokud známe podíly w_i

cenných papírů v portfoliu, pak bude naše očekávaná výnosnost rovna váženému průměru očekávaných výnosností cenných papírů:

$$\overline{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \overline{r}_i, \tag{31}$$

kde:

$\overline{r}_p$ – očekávaná výnosnost portfolia.

w_i – podíl i-tého cenného papíru investovaného do portfolia.

$\overline{r}_i$ – očekávaná výnosnost cenného papíru i.

n – počet cenných papírů v portfoliu.

4.1.2 Směrodatná odchylka

Tato podkapitola nás naučí, jak vypočítat ono riziko změny očekávané výnosnosti. Směrodatná odchylka udává pravděpodobnost, se kterou se bude skutečná výnosnost odchylovat od té očekávané. Směrodatná odchylka pro portfolio, které tvoří n cenných papírů, má tvar:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}, \tag{32}$$

kde:

σ_{ij} – vyjadřuje kovarianci výnosnosti mezi cennými papíry i a j.

w_i *a* w_j – jsou podíly jednotlivých cenných papírů v portfoliu.

Rozepsaný vzoreček pro riziko změny výnosnosti portfolia vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \right]^{1/2} &= \\
= \left[\sum_{j=1}^{n} w_1 w_j \sigma_{1j} + \sum_{j=1}^{n} w_2 w_j \sigma_{2j} + \cdots + \right. \\
\left. + \sum_{j=1}^{n} w_{n-1} w_j \sigma_{n-1j} + \sum_{j=1}^{n} w_n w_j \sigma_{nj} \right]^{1/2} &=
\end{aligned}$$

$$= \Big[w_1 w_1 \sigma_{11} + w_2 w_2 \sigma_{22} + \cdots + w_n w_n \sigma_{nn} + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} +$$
$$+ 2 w_1 w_3 \sigma_{13} + \cdots + 2 w_1 w_n \sigma_{1n} + \cdots + 2 w_2 w_3 \sigma_{23} + \cdots +$$
$$+ 2 w_2 w_n \sigma_{2n} + 2 w_3 w_4 \sigma_{34} + \cdots + 2 w_3 w_n \sigma_{3n} + \cdots +$$
$$+ 2 w_{n-1} w_n \sigma_{n-1,n} \Big]^{1/2} =$$
$$= \left[w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + \cdots + w_n^2 \sigma_n^2 + \cdots + 2 w_{n-1} w_n \sigma_{n-1,n} \right]^{1/2}. \quad (33)$$

Markowitzův přístup je založen na statistický metodách. Navrhl tedy, aby se investor zaměřil na dva statistické momenty - očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku. Tyto výpočty by měly být učiněny před každým kvalifikovaným rozhodnutím o volbě portfolia.

4.2 Postup hledání optimálního portfolia

4.2.1 Účelová funkce

Abychom našli optimální portfolio, potřebujeme nejdříve zvolit účelovou funkci, jejíž extrém budeme hledat. Jak již bylo dříve naznačeno, tak máme dva způsoby jak optimální portfolio nalézt.

Prvním způsobem je maximalizovat očekávaný výnos portfolia. Tento způsob vychází z maximalizace výrazu (31). Pro tento typ úloh ovšem neexistuje obecně vhodná metoda jejich řešení. Druhá možnost se nám naskýtá v minimalizaci rizika změny výnosu portfolia (32). Tímto se nám podaří minimalizovat rozptyl náhodné veličiny, která popisuje výnos portfolia. Tento způsob je již řešitelný, ale je nutné stanovit omezující podmínky. Ty vyplývají z požadavků, které klade na portfolio investor.

Základní podmínkou při sestavení portfolia je požadavek, aby se součet relativních podílů jednotlivých cenných papírů v portfoliu rovnal jedné (100 %), díky čemuž využije investor právě takové množství finančních prostředků, které si již dříve stanovil. Požadujeme tedy, aby pro váhy akcií v portfoliu platila první podmínka

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \tag{34}$$

druhá podmínka je nutná v případě, že investor zakáže provádění operace *sell short*[1]:

$$w_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{35}$$

V naši práci budeme s metodou sell short počítat, tudíž se touto podmínkou nebudeme déle zabývat. V případě požadavku splnění druhé omezující podmínky je třeba zvolit metodu popsanou v literatuře [2] str. 68.

Další podmínkou může být maximální riziko **a**, jaké je investor ochoten podstoupit. V tomto případě optimální portfolio vytváří maximální očekávaný výnos při velikosti rizika, které jsme si stanovili v podmínce. Tato podmínka má smysl pouze v případě, že si za účelovou funkci zvolíme $\overline{r}_p(\mathbf{w})$. Tuto podmínku můžeme vyjádřit již jednou zmíněným vztahem

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}. \tag{36}$$

Poslední často se vyskytující podmínkou bývá stanovení požadovaného výnosu **b**.

$$b = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \overline{r}_i. \tag{37}$$

Optimalizace portfolia spočívá tedy v nalezení takového portfolia, které dosáhne požadovaný výnos s minimálním rizikem. Zde je zřejmé, že účelová funkce je $\sigma_p^2(\mathbf{w})$.

4.2.2 Postup řešení optimalizační úlohy

Jak jsme si uvedli již dříve, tak pro výpočet optimálního portfolia si za účelovou funkci volíme $\sigma_p^2(\mathbf{w})$. Našim cílem bude tedy řešení minimalizační úlohy

[1] Metodu sell short neboli nákup na krátkou dobu představím na příkladu. Půjčíme si od brokera akcii, kterou posléze prodáme přičemž spekulujeme na pokles jejího kurzu. Následně ji koupíme, vrátíte brokerovi a rozdíl mezi původní prodejní a nákupní cenou představuje náš zisk. Samozřejmě tu je riziko, že cena akcie poroste.

s kvadratickou účelovou funkcí a lineárními omezeními tvořené jednotlivými podmínkami, jež jsou na portfolio kladeny. K nalezení vázaného extrému budeme potřebovat Langrangeovu metodu neurčitých koeficientů. Postup bude následující. Minimalizační úlohu přepíšeme do tvaru:

$$f_0(\mathbf{w}) \to \min \tag{38}$$

$$f_i(\mathbf{w}) \; = \; 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{39}$$

K takovéto minimalizační úloze vytvoříme Langrangeovu funkci:

$$L(\mathbf{w}) = L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(\mathbf{w}), \qquad kde\ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m). \tag{40}$$

Čísla $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ se nazývají Langrangeovy multiplikátory.

Abychom mohli najít extrém, tak použijeme pravidla Langrangeových multiplikátorů, které říká, že pokud v bodě existuje lokální extrém, pak existují i Langrangeovy multiplikátory, ne všechny současně rovny nule, pro něž platí:

$$\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_i} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{41}$$

Tímto výrazem jsou stanoveny nutné podmínky pro existenci extrému.

U praktických úloh stačí předpokládat, že $\lambda_0 \neq 0$, neboť k tomu stačí, aby byly vektory prvních derivací omezujících podmínek $f_1(\mathbf{w}), \dots, f_m(\mathbf{w})$ lineárně nezávislé. K tomu, abychom zjistili, že bod extrému je bodem minima, musí platit postačující podmínky pro existenci minima. Tyto podmínky jsou platné, pokud je matice $A = [a_{ij}]$, pro jejíž prvky platí $a_{ij} = \frac{\partial^2 L(\mathbf{w})}{\partial w_i w_j}$, pozitivně definitní. Pozitivně definitní matice je čtvercová matice, kterou poznáme pomocí Sylvestrova kritéria říkající toto:

Definice 2. *Uvažme matice $A_n, \dots, A$, kde matice A_i vznikla z matice A umazáním posledních $n - i$ řádku a sloupců. Pokud pro $\forall i \in 1, \dots, n : det\ A_i > 0$, pak je matice pozitivně definitní.*

4.2.3 Tvorba soustavy rovnic

Po rozepsání nutných podmínek získaných díky pravidlům Langrangeových multiplikátorů a zapsáním vedlejších podmínek, získáme soustavu $m + n$ rovnic o $n + m$ neznámých, kde n je počet cenných papíru, které tvoří naše portfolio a m je počet omezujících podmínek, které vyplývají z požadavků kladených na portfolio.

5 Aplikace

5.1 Zisk a zpracování dat

Než budeme vůbec moci ukázat, jak oba modely vlastně fungují, je nezbytně nutné udělat několik věcí. V prvé řadě musíme vybrat z velké škály akcií na světovém akciovém trhu ty, které vyhovují našim požadavkům. Z těchto potom poskládáme naše portfolio. Dále je nutné, abychom jsme pro námi zvolené akcie byli schopni vyhledat potřebná data, z nichž nás zajímá zejména historický vývoj cen.

Při výběru společností, jejichž akcie byly použity pro vytvoření akciového portfolia, jsme se zaměřili hlavně na skutečnost, aby jejich akcie byly obchodované na Burze cenných papírů Praha, díky čemuž nám odpadly problémy s přepočítáváním cen akcií. Chceme, aby ceny těchto akcií byly dohledatelné od 1. 7. 2005 do současnosti. Byly vybrány akcie ze systému SPAD (systém pro podporu akcií a dluhopisů). Do tohoto systému patří akcie, se kterými se na pražské burze nejvíce obchoduje. Takový výběr ocení především malý soukromý investor, který se může každý den na své portfolio a jeho vývoj podívat jak na veřejnoprávní televizi, tak téměř ve všech novinách. Odpadnou mu starosti se zdlouhavým vyhledáváním všech akcií třeba na internetu. Do této skupiny patří aktuálně (12. 3. 2010) akcie čtrnácti společností. Našemu požadavku dohledatelnosti údajů do již zmíněného data, vyhovují akcie osmi společností, které nyní ve zkratce představíme.

ČEZ, a.s

Akciová společnost ČEZ byla založena v roce 1992 Fondem národního majetku

ČR. Hlavním akcionářem je Česká republika, pro kterou vykonává správu jejího akciového podílu Ministerstvo financí České republiky. Hlavním předmětem činnosti ČEZ, a.s. je výroba a prodej elektřiny a s tím související podpora elektrizační soustavy. zároveň se zabývá výrobou, rozvodem a prodejem tepla.[4] Jako jedna z mála společností u nás i přes finanční krizi dosáhla v roce 2009 zisku. Navíc byl zisk 51,9 miliardy korun největší, jaký kdy tuzemská firma dosáhla.

Telefónica O2 Czech Republic, a.s.

Telefónica O2 Czech Republic je předním integrovaným telekomunikačním operátorem na českém trhu. V současné době provozuje více jak sedm miliónů mobilních a pevných linek, což z ní činí jednoho z vedoucích poskytovatelů plně konvergentních služeb na světě.[5]

Unipetrol

Unipetrol je největší společnost zabývající se zpracováním ropy a petrochemie v České republice a jednou z největších ve střední a východní Evropě. V roce 2005 došlo k připojení k největší rafinérské a petrochemické skupině ve střední Evropě - PKN Orlen.

Philip Morris International

Philip Morris je jednou z největších mezinárodních tabákových společností na světě. Její výrobky se prodávají ve 160 zemích světa a za rok 2008 získala 15,6 % podílu na celkovém světovém trhu s cigaretami (mimo USA). Společnost vlastní sedm z patnácti hlavních značek cigaret a v roce 2008 dosáhli 10,2 miliard dolarů provozního výnosu.

Orco Property Group

Společnost Orco funguje již 16 let a zaujímá vedoucí postavení na trzích s nemovitostmi střední a východní Evropy. Cenné papíry této společnosti jsou obchodované na burze Euronext v Paříži, na Burze cenných papírů v Praze, Budapešti a ve Varšavě. V této chvíli spravuje majetek ve výši asi 1,3 miliardy EUR.

Komerční banka

Komerční banka patří od roku 2001 do finanční skupiny Société Générale, která je jednou z největších v celé eurozóně. Kreditní rating Komerční banky byl dokonce v některých případech vyšší než rating České republiky, což ukazuje na kapitálovou sílu, skvělou likviditu a zdravé hospodaření této instituce. Služby Komerční banky využívá téměř 1,63 milionů zákazníků prostřednictvím 394 poboček a 673 bankomatů po celé České republice.

CETV

CETV neboli Central European Media Enterprises je bermudská společnost řízená Ronaldem Lauderem. Společnost vlastní a ovládá televizní stanice ve střední a východní Evropě, jako například u nás TV Nova nebo na Slovensku stanici Markíza.

Erste Group Bank

Erste Group je jedním z největších evropských poskytovatelů finančních služeb a vedoucí retailová banka ve střední Evropě. Počtem klientů je na prvním místě v oblasti poskytování finančních služeb ve střední Evropě a na druhém místě podle objemu aktiv, viz [9]. V České republice patří této společnosti Česká spořitelna.

5.2 Data

U námi zadaného portfolia nás bude zajímat především vliv námi zvolených faktorů inflace, HDP a nezaměstnanosti.

Hodnoty faktorů jsou vypočítány jako průměrná hodnota předchozích tří měsíců.

Datum	Inflace (%)	HDP (%)	nezam. (%)
1. 7. 05	1,6	6,2	8,8
1. 10. 05	1,9	6,3	8,5
1. 1. 06	2,4	6,9	9,2
1. 4. 06	2,8	7,0	8,3
1. 7. 06	2,8	7,0	7,9
1. 10. 06	2,9	7,1	7,4
1. 1. 07	1,5	6,7	7,9
1. 4. 07	1,6	6,8	6,8
1. 7. 07	2,5	5,6	6,4
1. 10. 07	2,5	6,0	5,8
1. 1. 08	4,8	6,1	6,1
1. 4. 08	7,4	3,1	5,2

1. 7. 08	6,8	3,5	5,3
1. 10. 08	6,7	2,3	5,2
1. 1. 09	4,7	0,4	6,8
1. 4. 09	2,2	-4,3	7,9
1. 7. 09	1,4	-4,7	8,4
1. 10. 09	0,2	-4,1	8,5
1. 1. 10	0,4	-4,3	8,8

Tabulka 2: Hodnoty faktorů od 1. 7. 2005 do 1 .1. 2010

Všechny hodnoty akcií jsou v dalších tabulkách uvedeny v korunách. Portfolio budeme konstruovat pro akcie uvedené v tabulce:

Datum	ČEZ	TELEFÓNICA O2	UNIPETROL	PHILIP MORRIS
1. 7. 05	474,8	460,2	140,74	17456
1. 10. 05	739,3	491,6	238,6	18951
1. 1. 06	736,3	257	234,3	18166
1. 4. 06	819,2	501,3	274,8	16072
1. 7. 06	751,7	478,7	198,8	12285
1. 10. 06	790,8	442	194,02	9725
1. 1. 07	991	479,7	238,7	11036
1. 4. 07	935,6	548,3	235,5	9735
1. 7. 07	1096	594,3	286,2	11026
1. 10. 07	1224	535,2	315,2	9725
1. 1. 08	1373	549	329,1	7855
1. 4. 08	1234	513,3	259,1	7125
1. 7. 08	1365	482,7	244,5	4418
1. 10. 08	1107	413,6	192,25	5426
1. 1. 09	804	425,5	146	6426
1. 4. 09	734,8	397,5	116,05	5673
1. 7. 09	835	424	113	6348
1. 10. 09	938	434	138,2	8800
1. 1. 10	864	418	139,5	8796

Datum	ORCO	KOMERČNÍ BANKA	CETV	ERSTE GROUP BANK
1. 7. 05	1403	3164	1213	1252
1. 10. 05	1714	3586	1287	1305
1. 1. 06	1818	3456	1413	1399
1. 4. 06	2500	3285	1614	1389
1. 7. 06	2389	3262	1394	1268
1. 10. 06	2791	3311	1504	1382
1. 1. 07	2755	3119	1474	1638
1. 4. 07	3525	3586	1859	1636
1. 7. 07	3393	3977	2060	1660

1. 10. 07	2931	4478	1812	1492
1. 1. 08	2163	4354	2070	1283
1. 4. 08	1452	3935	1412	1045
1. 7. 08	881,8	3383	1320	907
1. 10. 08	407,1	4036	1148	850
1. 1. 09	175,75	3054	408,5	421
1. 4. 09	103,24	2144	242,6	341,5
1. 7. 09	150,5	2595	364	497
1. 10. 09	194	3486	586	735,5
1. 1. 10	170,34	3929	446,9	698,5

Tabulka 3: Ceny akcií od 1. 7. 2005 do 1. 1. 2010

Do všech cenných papírů jsme investovali stejnou částku. Abychom viděli rozdíly výnosnosti při použití různých metod není zvolený poměr akcií důležitý. Samozřejmě v reálném světě, kde nám jde o maximální výnos je tento poměr velice důležitý. Pro nás to ale znamená zjednodušení pozdějších výpočtů. Pro takto zvolené portfolio můžeme sledovat vývoj jeho hodnoty od 1. 7. 2005 do 1. 1. 2010. Uvažujme, že 1. 7. 2005 bylo do portfolia investováno přibližně 1 000 000,- Kč (1 000 006,- Kč). Tomu odpovídá 263 ks akcií ČEZ, 271 akcií Telefónica O2, 890 ks akcií Unipetrolu, 7 ks akcií Philip Morris, 90 ks akcií společnosti Orco, 40 ks akcií CETV, 103 ks akcií Komerční banky a 100 ks akcií Erste Bank.

V další tabulce uvedeme cenu portfolia v jednotlivých dnech.

Datum	Hodnota portfolia v čase (Kč)
1. 7. 05	1000006
1. 10. 05	1233432
1. 1. 06	1186282
1. 4. 06	1369920
1. 7. 06	1206224
1. 10. 06	1245257
1. 1. 07	1368659
1. 4. 07	1488089
1. 7. 07	1623833
1. 10. 07	1594370
1. 1. 08	1568102
1. 4. 08	1282136
1. 7. 08	1179680
1. 10. 08	1013634
1. 1. 09	723838

1. 4. 09	598160
1. 7. 09	684052
1. 10. 09	839714
1. 1. 10	814608
1. 4. 10	889970

Tabulka 4: Hodnota portfolia

5.3 Aplikace Markowitzova modelu

V následující podkapitole použijeme k predikcím Markowitzův model. Budeme porovnávat hodnotu portfolia v dalším období (tj. 1. 4. 2010) ve třech situacích. V první situaci budeme mít hodnotu portfolia 1. 4. 2010, aniž bychom nakupovali či prodávali akcie. V tabulce 4 vidíme, že k 1. 4. 2010 by hodnota portfolia byla oproti 1. 1. 2010 o dalších 75 361 Kč více, nyní tedy již máme 889 970 Kč.

K dalším výpočtům budeme potřebovat znát korelační koeficient. K tomu, abychom mohli korelační koeficient vypočítat, potřebujeme variační matici, kterou dostaneme z tabulky cen akcií.

Z cen uvažovaných akcií jsme pomocí programu Matlab vypočítali kovarianční matici

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}0058 & 0{,}0008 & 0{,}0010 & -0{,}0609 & 0{,}0042 & 0{,}0084 & 0{,}0059 & 0{,}0012 \\ 0{,}0008 & 0{,}0005 & 0{,}0003 & -0{,}0036 & 0{,}0050 & 0{,}0018 & 0{,}0025 & 0{,}0014 \\ 0{,}0010 & 0{,}0003 & 0{,}0004 & 0{,}0057 & 0{,}0058 & 0{,}0026 & 0{,}0034 & 0{,}0021 \\ -0{,}0609 & -0{,}0036 & 0{,}0057 & 1{,}9898 & 0{,}2180 & 0{,}0078 & 0{,}0825 & 0{,}1061 \\ 0{,}0042 & 0{,}0050 & 0{,}0058 & 0{,}2180 & 0{,}1424 & 0{,}0255 & 0{,}0611 & 0{,}0476 \\ 0{,}0084 & 0{,}0018 & 0{,}0026 & 0{,}0078 & 0{,}0255 & 0{,}0325 & 0{,}0204 & 0{,}0113 \\ 0{,}0059 & 0{,}0025 & 0{,}0034 & 0{,}0825 & 0{,}0611 & 0{,}0204 & 0{,}0330 & 0{,}0220 \\ 0{,}0012 & 0{,}0014 & 0{,}0021 & 0{,}1061 & 0{,}476 & 0{,}0113 & 0{,}0220 & 0{,}0179 \end{pmatrix}$$

a korelační matici

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4792 & 0{,}6360 & -0{,}5684 & 0{,}1472 & 0{,}6157 & 0{,}4242 & 0{,}1231 \\ 0{,}4792 & 1 & 0{,}5731 & -0{,}1081 & 0{,}5632 & 0{,}4330 & 0{,}5942 & 0{,}4561 \\ 0{,}6360 & 0{,}5731 & 1 & 0{,}1918 & 0{,}7286 & 0{,}6913 & 0{,}5942 & 0{,}4561 \\ -0{,}5684 & -0{,}1081 & 0{,}1918 & 1 & 0{,}4096 & 0{,}306 & 0{,}3218 & 0{,}5625 \\ 0{,}1472 & 0{,}5632 & 0{,}7286 & 0{,}4096 & 1 & 0{,}3753 & 0{,}8915 & 0{,}9439 \\ 0{,}6157 & 0{,}4330 & 0{,}6913 & 0{,}0306 & 0{,}3753 & 1 & 0{,}6212 & 0{,}4671 \\ 0{,}4242 & 0{,}5942 & 0{,}8971 & 0{,}3218 & 0{,}8915 & 0{,}6212 & 1 & 0{,}9060 \\ 0{,}1231 & 0{,}4561 & 0{,}7350 & 0{,}5625 & 0{,}9439 & 0{,}4671 & 0{,}9060 & 1 \end{pmatrix}.$$

V korelační matici vidíme velice silnou korelaci mezi akciemi ORCO a ERSTE GROUP BANK (0,9439), ERSTE GROUP BANK a CETV (0,9060), UNIPETROL a CETV (0,8971) a mezi akciemi ORCO a CETV (0,8915).

Dále zde máme v několika případech korelaci zápornou a to u akcií ČEZ A UNIPETROL (-0,5684), TELEFÓNICA 02 A UNIPETROL (-0,1081).

5.3.1 Hledání optimálního portfolia s minimálním rizikem a čtvrtletím ziskem 2 %

Nyní se na základě těchto výsledků pokusíme sestavit optimální portfolio pro opatrného investora, který chce minimalizovat riziko a mít čtvrtletní výnos ze svého portfolia 2 %.
Tudíž hledáme minimum rovnice

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} w_i w_j \sigma_{ij} \to \ \min . \tag{42}$$

Předpokládáme, že náš investor používá již zmíněnou metodu sell short. Díky tomu musí platit jen dvě omezující podmínky:

$$\sum_{i=1}^{8} w_i = 1, \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{8} \overline{r}_i w_i = 2. \tag{44}$$

Nyní bude Langrangeova funkce vypadat následovně:

$$L(\mathbf{w}) = {\sigma_p}^2 + \lambda_1\Big(\sum_{i=1}^{8} w_i - 1\Big) + \lambda_2\Big(\sum_{i=1}^{8} \overline{r}_i w_i - 2\Big). \tag{45}$$

Teď vytvoříme pomocí derivování Lagrangeovy funkce podle parametrů soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_1} &= 2w_1{\sigma_1}^2 + 2w_2\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{1,3} + 2w_4\sigma_{1,4} + 2w_5\sigma_{1,5} + 2w_6\sigma_{1,6} + \\
&\quad + 2w_7\sigma_{1,7} + 2w_8\sigma_{1,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_1 = 0, \\
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_2} &= 2w_2{\sigma_2}^2 + 2w_1\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{2,3} + 2w_4\sigma_{2,4} + 2w_5\sigma_{2,5} + 2w_6\sigma_{2,6} + \\
&\quad + 2w_7\sigma_{2,7} + 2w_8\sigma_{2,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_2 = 0, \\
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_3} &= 2w_3{\sigma_3}^2 + 2w_1\sigma_{1,3} + 2w_2\sigma_{2,3} + 2w_4\sigma_{3,4} + 2w_5\sigma_{3,5} + 2w_6\sigma_{3,6} + \\
&\quad + 2w_7\sigma_{3,7} + 2w_8\sigma_{3,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_3 = 0, \\
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_4} &= 2w_4{\sigma_4}^2 + 2w_1\sigma_{1,4} + 2w_2\sigma_{2,4} + 2w_3\sigma_{3,4} + 2w_5\sigma_{4,5} + 2w_6\sigma_{4,6} + \\
&\quad + 2w_7\sigma_{4,7} + 2w_8\sigma_{4,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_4 = 0, \\
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_5} &= 2w_5{\sigma_5}^2 + 2w_1\sigma_{1,5} + 2w_2\sigma_{2,5} + 2w_3\sigma_{3,5} + 2w_4\sigma_{4,5} + 2w_6\sigma_{5,6} + \\
&\quad + 2w_7\sigma_{5,7} + 2w_8\sigma_{5,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_5 = 0, \\
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_6} &= 2w_6{\sigma_6}^2 + 2w_1\sigma_{1,6} + 2w_2\sigma_{2,6} + 2w_3\sigma_{3,6} + 2w_4\sigma_{4,6} + 2w_5\sigma_{5,6} + \\
&\quad + 2w_7\sigma_{6,7} + 2w_8\sigma_{6,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_6 = 0, \\
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_7} &= 2w_7{\sigma_7}^2 + 2w_1\sigma_{1,7} + 2w_2\sigma_{2,7} + 2w_3\sigma_{3,7} + 2w_4\sigma_{4,7} + 2w_5\sigma_{5,7} + \\
&\quad + 2w_6\sigma_{6,7} + 2w_8\sigma_{7,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_7 = 0, \\
\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial w_8} &= 2w_8{\sigma_8}^2 + 2w_1\sigma_{1,8} + 2w_2\sigma_{2,8} + 2w_3\sigma_{3,8} + 2w_4\sigma_{4,8} + 2w_5\sigma_{5,8} + \\
&\quad + 2w_6\sigma_{6,8} + 2w_7\sigma_{7,8} + \lambda_1 + \lambda_2\overline{r}_8 = 0.
\end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic jsme řešili v programu Matlab a výsledkem jsou tyto doporučené váhy k jednotlivým akciím:

Název akcie	Doporučení (%)
ČEZ	-28,84
TELEFÓNICA O2	12,55
UNIPETROL	110,71
PHILIP MORRIS	-1,27
ORCO	-6,06
KOMERČNÍ BANKA	-0,37
CETV	-4,57
ERSTE GROUP BANK	17,85

Tabulka 5: Doporučené váhy akcií v portfoliu

Budeme se řídit těmito doporučeními. Když jsou váhy záporné, tak budeme tedy dané procento akcií prodávat a spekulovat tak, že cena těchto akcií půjde doopravdy dolů (sell short). Díky tomuto doporučení má struktura našeho portfolia následující podobu:

Název akcie	Pův. počet držených ks	Nový počet držených ks
ČEZ	263	187
TELEFÓNICA O2	271	305
UNIPETROL	890	1875
PHILIP MORRIS	7	7
ORCO	90	85
KOMERČNÍ BANKA	103	40
CETV	40	98
ERSTE GROUP BANK	100	118
Hodnota portfolia		
1. 1. 2010	814608	814608
1. 4. 2010	889970	1013292

Tabulka 6: Původní a nové počty držených kusů akcií

Jak je z předchozí tabulky patrné, tak se hodnota portfolia 1. 4. 2010 rovnala 1 013 292,- Kč, což je o 13,86 % více než v případě původního poměru akcií.

5.3.2 Predikce

Ve třetí situaci jsem počítal s predikcí „odborníků“, kterými byli spolužáci. Deseti spolužákům byla v lednu roku 2010 ukázána tabulka vývoje cen akcií od 1. 7. 2005 do 1. 1. 2010. Jejich úkolem bylo odhadnout cenu akcií v dalším období (tedy k 1. 4. 2010).

Jejich odhady byly následující:

ČEZ	TELEFÓNICA O2	UNIPETROL	PHILIP MORRIS
840	410	150	8800
910	440	148	9100
915	440	135	9500
920	415	140	9250
907	421	143	8801
823	452	253	9438
850	400	148	9000
890	420	157	8800
897	456	129	9026
853	405	130	9300
880,5	425,9	153,3	9101,5

ORCO	KOMERČNÍ BANKA	CETV	ERSTE GROUP BANK
165	4000	440	700
160	3800	380	550
290	4200	410	740
240	4000	420	725
165	3832	474	701
157	4867	614	467
168	4031	434	678
192	4050	420	800
198,6	3859	478	706
192	3920	495	712
192,76	4055,9	456,5	677,9

Tabulka 7: Predikce vývoje na 1. 4. 2010

V posledním řádku předchozí tabulky jsou aritmetické průměry odhadů jednotlivých akcií.

Díky aritmetický průměrům si můžeme vypočítat i relativní přírůstky a s pomocí těchto přírůstků zjistit i doporučené váhy jednotlivých cenných papírů v portfoliu, jak ukazuje následující tabulka:

Název akcie	Relativní přírůstek	Váha (%)
ČEZ	1,0191	-245,03
TELEFÓNICA O2	1,0189	-540,59
UNIPETROL	1,0989	1007,57
PHILIP MORRIS	1,0347	-6,84
ORCO	1,1316	60,5
KOMERČNÍ BANKA	1,0323	36,81
CETV	1,0215	0,84
ERSTE GROUP BANK	0,9705	-213,27

Tabulka 8: Relativní přírůstky a váhy akcií v portfoliu

Pro úplnost jsou v další tabulce uvedeny skutečné ceny akcií k 1. 4. 2010.

Název akcie	Skutečná cena akcie k 1. 4. 2010
ČEZ	900
TELEFÓNICA O2	443
UNIPETROL	170
PHILIP MORRIS	9890
ORCO	189
KOMERČNÍ BANKA	3940
CETV	568,9
ERSTE GROUP BANK	794,8

Tabulka 9: Ceny akcií 1. 4. 2010

Tabulka 8 nám tedy naznačuje, že máme prodat všechny akcie ČEZ, TELEFÓNICA O2 A ERSTE GROUP BANK a veškerý zisk investovat do akcií UNIPETROLU, dále pokračujeme stejně jako při předchozí situaci.

Jak ukazuje následující tabulka, tak po tomto propočtu se nám zásadně změnilo držené portfolio.

Název akcie	Počet držených kusů
ČEZ	0
TELEFÓNICA O2	0
UNIPETROL	3909
PHILIP MORRIS	7
ORCO	144
KOMERČNÍ BANKA	55
CETV	104
ERSTE GROUP BANK	0

Tabulka 10: Počet kusů akcií v držení

Hodnota portfolia je po těchto úpravách rovna 1 031 010,- Kč, což je o 1,75 % více než v předchozím případě a o 15,85 % více než kdybychom s poměry akcií nehýbali vůbec.

5.4 Aplikace faktorových modelů

V této podkapitole se podíváme na řešení faktorových modelů v praxi. Opět budeme pracovat se stejnými osmi cennými papíry, které jsou obchodované na pražské burze. Chceme zde ukázat, jak přesně dokážeme pomocí faktorových modelů odhadnout další vývoj výše hodnoty cenných papírů.

Indexy determinace pro jednotlivé faktory vypadají následovně:

Název akcie	Inflace	HDP	Nezaměstnanost
ČEZ	0,32	0,15	0,53
TELEFÓNICA O2	0,11	0,37	0,09
UNIPETROL	0,09	0,76	0,05
PHILIP MORRIS	0,57	0,45	0,79
ORCO	0,38	0,81	0,39
KOMERČNÍ BANKA	0,18	0,30	0,02
CETV	0,19	0,83	0,18
ERSTE GROUP BANK	0,42	0,79	0,48

Název akcie	Inflace, nezam.	Nezam., HDP	Inflace, HDP
ČEZ	0,55	0,57	0,35
TELEFÓNICA O2	0,31	0,39	0,39
UNIPETROL	0,10	0,76	0,77
PHILIP MORRIS	0,80	0,87	0,75

ORCO	0,41	0,86	0,92
KOMERČNÍ BANKA	0,32	0,31	0,36
CETV	0,20	0,83	0,86
ERSTE GROUP BANK	0,48	0,88	0,93

Název akcie	Inflace, HDP, nezam.
ČEZ	0,61
TELEFÓNICA O2	0,57
UNIPETROL	0,82
PHILIP MORRIS	0,87
ORCO	0,93
KOMERČNÍ BANKA	0,52
CETV	0,89
ERSTE GROUP BANK	0,93

Tabulka 11: Index determinace

Predikce vývoje podle jednotlivých faktorů, nebo jejich kombinací:

Název akcie	Inflace	HDP	Nezaměstnanost
ČEZ	869	899,6	1157
TELEFÓNICA O2	477	412,2	457,9
UNIPETROL	224,3	120,1	219,9
PHILIP MORRIS	13071	6197,4	13821
ORCO	2255,8	0	2202,2
KOMERČNÍ BANKA	3636,3	3163,6	3483,5
CETV	1392	302,5	1373,3
ERSTE GROUP BANK	1348,4	444,6	1352,5

Název akcie	Inflace, nezam.	Nezam., HDP	Inflace, HDP
ČEZ	848,5	727,3	817,7
TELEFÓNICA O2	472,4	397,5	424,6
UNIPETROL	223,7	115,7	131,6
PHILIP MORRIS	13566	10682	9245,8
ORCO	2293,6	225,4	357,5
KOMERČNÍ BANKA	3603,9	3114,4	3302,6
CETV	1399,3	372	477,1
ERSTE GROUP BANK	1370,4	681,4	690,7

Název akcie	Inflace, HDP, nezam.

ČEZ	730,6
TELEFÓNICA O2	399,7
UNIPETROL	117
PHILIP MORRIS	10684
ORCO	253,8
KOMERČNÍ BANKA	3130,8
CETV	384,2
ERSTE GROUP BANK	689,6

Tabulka 12: Predikce vývoje cen akcií podle faktorových modelů

Predikce označené červeně neodhadly správně, zda akcie v dalším období bude růst nebo klesat. Naproti tomu akcie označené zeleně byly pomocí faktorových modelů odhadnuty s přesností ±5 %. Proto můžeme považovat za relativně úspěšné předpovědi pomocí faktoru inflace, nezaměstnanosti nebo jejich kombinace.

Odhady parametru $\boldsymbol{\beta}$ v jednotlivých faktorových modelech a pro jednotlivé akcie najdeme v regresním modelu pomocí vzorce (15), viz str. 13.
Například pro faktor inflace a akcie ČEZu máme model $Y = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, kde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{18,1} \end{pmatrix} \qquad a \qquad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)'$$

kde:
v matici $\mathbf{X}$ tvoří $(x_{11}, \ldots, x_{18,1})'$ první sloupec tabulky číslo 1 (inflace).
Výpočtem dostáváme $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (855{,}263; 34{,}2851)'$.
Predikovanou cenu ČEZ k 1. 4. 2010 určíme takto:

$$Y_{1.\ 4.\ 2010} = \widehat{\beta}_0 + (\text{inflace}_{1.\ 1.\ 2010})\widehat{\beta}_1 = 869.$$

5.5 Předpověď dalšího vývoje

Pro zajímavost uvedeme v následující tabulce předpověď akcií na 1. 7. 2010 podle nejúspěšnějšího faktorového modelu tj. inflace a nezaměstnanost. Inflace měla v předchozím období hodnotu 0,7 % a nezaměstnanost byla 9,8 %.

Název akcie	Cena 1. 4. 2010	Predikce 1. 7. 2010
ČEZ	900	727,6
TELEFÓNICA O2	443	436
UNIPETROL	170	211,1
PHILIP MORRIS	9890	16044
ORCO	189	2177,8
KOMERČNÍ BANKA	3940	3417,8
CETV	568,9	1312,4
ERSTE GROUP BANK	794,8	1409,9

Tabulka 13: Predikce vývoje k 1. 7. 2010

6 Závěr

Teorii portfolia můžeme považovat za disciplínu, která zkoumá, jaké kombinace cenných papírů je nejvýhodnější držet, aby mělo portfolio předem (námi zadané) vlastnosti.

Prvním cílem předložené práce bylo seznámit čtenáře s teorií portfolia a ukázat používané matematické modely a demonstrovat jejich aplikaci. K testování úspěšnosti modelů jsem použil osm cenných papírů z Burzy cenných papírů Praha.

Pro teorii portfolia bohužel platí, že aplikuje parametry získané v minulosti na budoucnost. Obecně ovšem na finančním trhu platí pravidlo, že budoucnost nemá tak příznivé parametry jako minulost. Díky tomu mohou být získané hodnoty oproti skutečnosti lepší. Toto tvrzení nebylo úplně naším příkladem potvrzeno, ale mohlo to být způsobeno silným poklesem akcií v nedávné minulosti ve spojitosti s finanční krizí. V této chvíli je většina akcií na vzestupu právě i kvůli hlubokým propadům v době krize.

Část práce je věnována faktorovým modelům, kde byly jako faktory použity HDP, inflace a nezaměstnanost. Nalezená závislost výnosnosti portfolia na těchto faktorech se jevila jako poměrně nepřesný nástroj k předpovědi budoucího vývoje na trhu s cennými papíry. Za zmínku stojí možná jen výsledky faktorů inflace a nezaměstnanosti, u kterých se jevilo, že orientačně celkem dobře odhadly růst či pokles cen zvolené akcie.

Literatura

[1] BENJAMIN, Graham: Inteligentní investor, Vydavatelství Grada, Praha, 2007

[2] ČÁMSKÝ, František: Teorie portfolia. Vydavatelství MU, Brno, 2001

[3] JÍLEK, Josef: Akciové trhy a investování. Vydavatelství Grada, Praha, 2009

[4] KUNDEROVÁ, Pavla: Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky. Vydavatelství UP Olomouc, 2004

[5] Webová stránka akciové společnosti ČEZ. http://cez.cz/ [online 10. 3. 2010]

[6] Webová stránka firmy Telefonica O2. http://cz.o2.com/ [online 10. 3. 2010]

[7] Internetová encyklopedie. http://cs.wikipedia.org/ [online 1. 2. 2010]

[8] Finanční portál. http://kurzy.cz/ [online 6. 1. 2010]

[9] Webová stránka České spořitelny. http://csas.cz/ [online 10. 3. 2010]

[10] Webová stránka Komerční banky. http://kb.cz/ [online 10. 3. 2010]

[11] Webová stránka společnosti Orco. http://orco.cz/ [online 10. 3. 2010]

[12] Webová stránka firmy Philip Morris. http://pmi.com/ [online 10. 3. 2010]

[13] Webová stránka společnosti Unipetrol. http://unipetrol.cz/ [online 10. 3. 2010]

[14] HANZÁK, Tomáš, MIKOŠKA, Marek: Optimalizace II s aplikací ve financích. http://quantitative.cz/file/24/markowitzuv-model.pdf/ [online 5. 3. 2010]