

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Konstrukční úlohy v GeoGebře pro výuku na střední škole

Vypracovala:

Petra Luňáčková

Studijní obor:

Chemie pro víceoborové studium

Matematika

Forma studia:

Prezenční

Vedoucí práce:

RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Rok:

2021

Bibliografické identifikační údaje

Autor:	Petra Luňáčková
Název práce:	Konstrukční úlohy v GeoGebře pro výuku na střední škole
Typ práce:	bakalářská
Katedra:	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Rok:	2021
Jazyk:	čeština
Anotace:	Cílem práce je vytvoření pracovních listů k vybraným konstrukčním úlohám ze stereometrie. Pracovní listy jsou zpracovány ve formě dynamického listu v programu GeoGebra. Samotný text této práce obsahuje potřebnou teorii, popis pracovních listů a řešení konstrukčních úloh.
Klíčová slova:	stereometrie, řez, těleso, pracovní list, GeoGebra
Počet stran:	48
Počet příloh:	13

Bibliographical identifications

Author:	Petra Luňáčková
Title:	Constructional tasks in GeoGebra at secondary schools
Type of thesis:	bachelor
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Year:	2021
Language:	Czech
Annotation:	The aim of this thesis is to create worksheets for selected constructional stereometry tasks. Worksheets were made in form of dynamic sheet in GeoGebra software. The text of the thesis itself contains required theory, descriptions of the worksheets and solutions of the tasks.
Key words:	stereometry, cross sections, solid figure, worksheet, GeoGebra
Number of pages:	48
Number of attachments:	13

Prohlášení

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D., a v seznamu literatury jsem uvedla všechny použité zdroje.

V Olomouci:

Podpis:

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí mé bakalářské práce, paní RNDr. Lence Juklové, Ph.D., za její odborné vedení a věcné připomínky při vypracování této bakalářské práce. Poděkování patří rovněž mé rodině a nejbližším za podporu po celou dobu mého studia.

Obsah

Úvod.....	7
1 Stereometrie.....	8
1.1 Polohové vlastnosti	8
1.2 Volné rovnoběžné promítání.....	12
1.3 Řešení konstrukčních úloh	16
2 Konstrukční úlohy	19
2.1 Pracovní listy.....	19
Závěr.....	45
Literatura	46
Seznam použitých symbolů.....	47
Seznam příloh.....	48

Úvod

Jako budoucí učitelka matematiky a bývalá studentka gymnázia jsem si vědoma důležitosti výuky stereometrie. Nejen že rozvíjí prostorovou představivost, ale také napomáhá žákům ke zlepšení zručnosti a přesnosti rýsováním. Stereometrie patří mezi obtížnější témata a žáci často a mylně předpokládají, že učivo nezvládnou pochopit, protože nemají dostatečně rozvinutou prostorovou představivost. Právě studiem stereometrie se ji můžou naučit a dále zdokonalovat. Ze strany učitelů je toto téma někdy opomíjené nebo se omezuje pouze na výpočet povrchu a objemu těles.

Příprava na hodinu stereometrie může být pro učitele časově náročná, a proto bylo mým cílem vytvořit pracovní listy, které by jim nejenom pomohly usnadnit přípravu, ale i zkvalitnit výuku. Protože právě zde je nejdůležitější názornost.

K přípravě pracovních listů jsem využila program tzv. dynamické geometrie – GeoGebra. Jedná se volně dostupný software, který obsahuje mnoho užitečných funkcí, ale především se velmi snadno ovládá. Program lze spouštět přímo z webového prohlížeče (na stránkách <https://www.geogebra.org/>) nebo jej lze zdarma stáhnout. Pracovní listy lze najít na stránce <https://www.geogebra.org/u/petralunackova>. Veškeré obrázky zařazené do této práce byly rovněž vytvořeny v programu GeoGebra.

Bakalářská práce se skládá ze dvou kapitol. V první kapitole se zaměřuji na popis základních vztahů a polohových vlastností geometrických útvarů a definici rovnoběžného promítání. Druhá kapitola obsahuje popis pracovních listů, jednotlivé konstrukční úlohy a jejich řešení.

1 Stereometrie

V první kapitole této bakalářské práce jsou uvedeny základní vztahy geometrických útvarů v prostoru, věty o vzájemné poloze těchto útvarů, vlastnosti volného rovnoběžného promítání, a nakonec některé věty, které využijeme při řešení konstrukčních úloh v druhé kapitole této bakalářské práce. Text v následujících podkapitolách je převzatý ze zdrojů [1], [2] a [3].

1.1 Polohové vlastnosti

Základními geometrickými útvary jsou ve stereometrii bod, přímka a rovina. Uvažujeme-li dvojice bod a přímka/rovina, přímka a rovina, pak bod leží, resp. neleží na přímce/v rovině, přímka leží, resp. neleží v rovině. Pro vyjádření těchto základních vztahů používáme společný termín tzv. incidence. Pro body, přímky a roviny platí v prostoru následující věty.

Věta 1 Dvěma různými body A, B je určena právě jedna přímka p .

Věta 2 Přímkou p a bodem A , který na ní neleží, je určena právě jedna rovina ρ .

Věta 3 Třemi body, které neleží na téže přímce, je určena právě jedna rovina.

Věta 4 Leží-li dva různé body přímky p v rovině ρ , pak každý bod přímky p leží v rovině ρ .

Věta 5 Dvě přímky a, b buď splývají, nebo jsou různé. Jsou-li různé, pak mají společný právě jeden bod, nebo nemají společný žádný bod a leží v téže rovině, nebo nemají žádný společný bod a neleží v žádné rovině.

Přímky a, b nazveme:

- rovnoběžné (různé), jestliže nemají žádný společný bod a leží v téže rovině;
- totožné, jestliže mají všechny body společné;
- různoběžné, jestliže mají společný právě jeden bod R (bod R je průsečík přímek a, b) a leží v jedné rovině;
- mimoběžné, jestliže nemají společný bod a neleží v žádné rovině.

Věta 6 Bodem A lze vést právě jednu přímku q rovnoběžnou s přímkou p .

Věta 7 Dvěma různoběžkami a, b je určena právě jedna rovina.

Věta 8 Dvěma různými rovnoběžkami a, b je určena právě jedna rovina.

Věta 9 (Tranzitivnost rovnoběžnosti). Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s přímkou c , je přímka a rovnoběžná s přímkou c .

Věta 10 Přímka p a rovina ρ , která danou přímkou p neprochází, mají buď společný právě jeden bod, nebo nemají žádný společný bod.

Přímka p a rovina ρ jsou:

- různoběžné, jestliže mají společný právě jeden bod R (bod R se nazývá průsečík přímky p s rovinou ρ);
- rovnoběžné, jestliže nemají žádný společný bod.

Poznámka Také případ, kdy přímka leží v rovině, považujeme za zvláštní případ rovnoběžnosti.

Věta 11 Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou ρ , pak každá rovina, obsahující přímku p a různoběžná s rovinou ρ , protíná ρ v přímce rovnoběžné s přímkou p .

Věta 12 (Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny). Je-li přímka p rovnoběžná s některou přímkou q roviny ρ , je rovnoběžná s rovinou ρ .

Věta 13 Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s rovinou ρ , je přímka a rovnoběžná s rovinou ρ .

Věta 14 Dvě roviny ρ, σ jsou buď různé, nebo splývají. Jsou-li různé, pak buď nemají žádný společný bod, nebo mají společnou právě jednu přímku p .

Věta 15 Mají-li dvě různé roviny ρ, σ společný bod A , pak mají společnou přímku p , která prochází bodem A .

Roviny ρ, σ nazveme:

- různoběžné, jestliže mají společnou přímku p (přímka p je průsečnice rovin ρ, σ);
- rovnoběžné, jestliže nemají žádný společný bod.

Poznámka Také dvě splývající roviny považujeme za rovnoběžné.

Věta 16 Je-li přímka a rovnoběžná s rovinou ρ a rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ , je přímka a rovnoběžná s rovinou σ .

Věta 17 Je-li přímka a rovnoběžná s rovinou ρ i s rovinou σ a jsou-li ρ a σ různoběžné, je přímka a rovnoběžná s jejich průsečnicí.

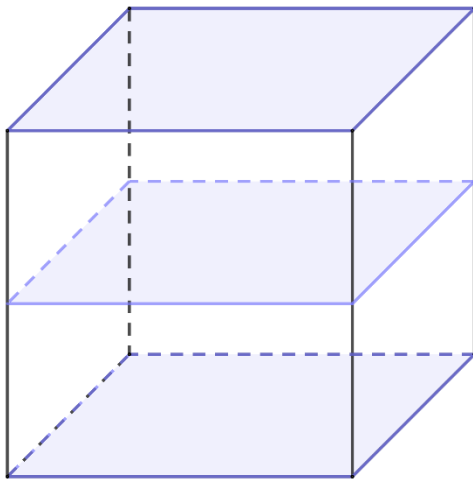
Věta 18 (Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin). Obsahuje-li rovina ρ dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou σ , pak rovina ρ je rovnoběžná s rovinou σ .

Věta 19 Všechny přímky, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou ρ , leží v rovině σ rovnoběžné s rovinou ρ .

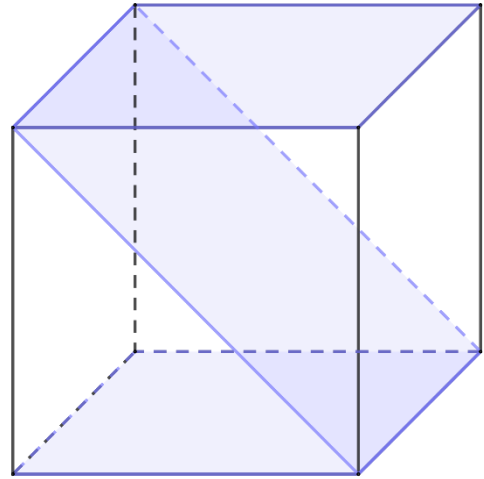
Věta 20 Daným bodem lze k dané rovině vést jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

Pro vzájemnou polohu tří rovin (z nichž žádné dvě nesplývají) nastává právě jedna z těchto možností:

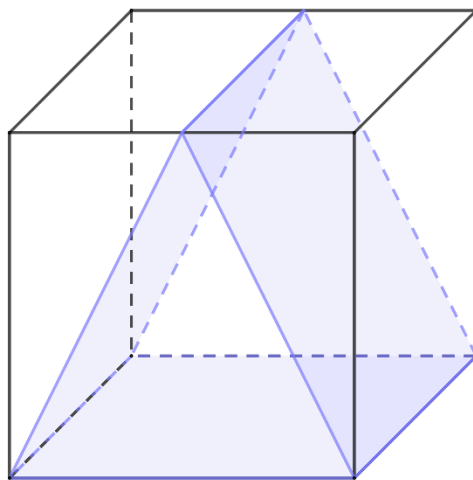
- každé dvě roviny jsou rovnoběžné (obrázek 1);
- dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je s oběma různoběžná; pak průsečnice těchto rovin jsou vzájemně rovnoběžné (obrázek 2);
- každé dvě roviny jsou různoběžné, ale všechny tři průsečnice jsou vzájemně rovnoběžné a různé (obrázek 3);
- každé dvě roviny jsou různoběžné tak, že všechny tři průsečnice splynou (všechny tři roviny mají společnou právě jednu přímku) (obrázek 4);
- všechny tři roviny mají společný právě jeden bod; pak každé dvě roviny jsou různoběžné a jejich průsečnice jsou tři různé přímky, procházející společným bodem všech tří rovin (obrázek 5).



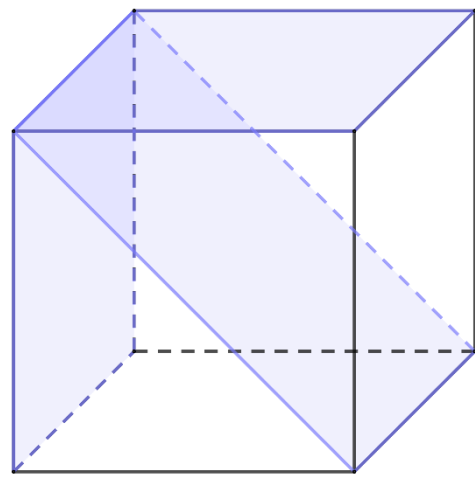
Obrázek 1



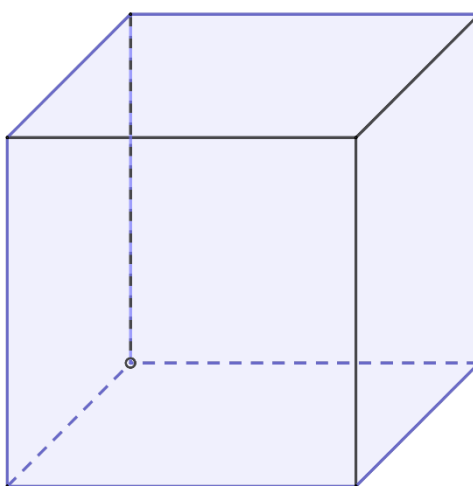
Obrázek 2



Obrázek 3



Obrázek 4



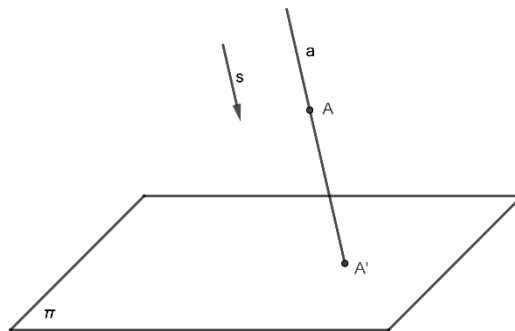
Obrázek 5

Věta 21 (Tranzitivnost rovnoběžnosti rovin). Je-li rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ a je-li rovina σ rovnoběžná s rovinou τ , pak je ρ rovnoběžná s τ .

Věta 22 Je-li rovina ρ rovnoběžná s rovinou σ a je-li rovina τ různoběžná s rovinou ρ , pak je různoběžná i s rovinou σ ; přitom průsečnice $\rho \cap \tau$, $\sigma \cap \tau$ jsou rovnoběžné.

1.2 Volné rovnoběžné promítání

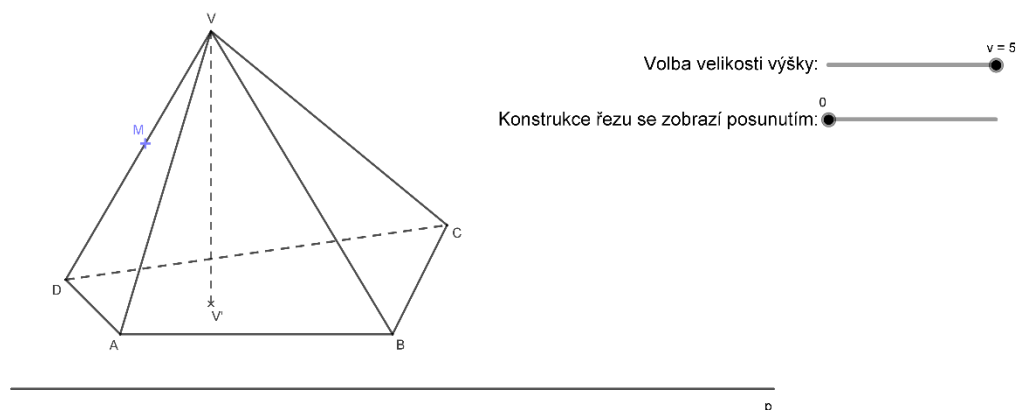
K zobrazení prostorových útvarů do roviny nejčastěji používáme volné rovnoběžné promítání. Rovnoběžné promítání je určeno rovinou π , kterou nazýváme průmětna, a směrem promítání s , jehož přímky nejsou rovnoběžné s rovinou π . Obrazem libovolného bodu A prostoru je průsečík A' přímky a , jdoucí bodem A a patřící směru s , s průmětnou π . Přímka $a \in s$ se nazývá promítací přímka bodu A , bod A' je (rovnoběžný) průmět bodu A . Přímky rovnoběžné s průmětnou budeme nazývat průčelné a přímky kolmé k průmětně hloubkové (podobně pro roviny).



Obrázek 6: Rovnoběžné promítání

Jsou-li přímky směru promítání s kolmé k průmětně π , pak příslušné rovnoběžné promítání nazýváme pravoúhlé. Tohoto promítání využijeme v pracovním listu č. 12, kde vrchol V jehlanu $ABCDV$ je dán pravoúhlým průmětem do roviny podstavy (obrázek 7).

12. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$, jehož vrchol V je dán pravoúhlým průmětem do roviny podstavy, rovinou určenou bodem M ($M \in DV$) a přímkou p , jestliže přímka p leží v rovině podstavy.

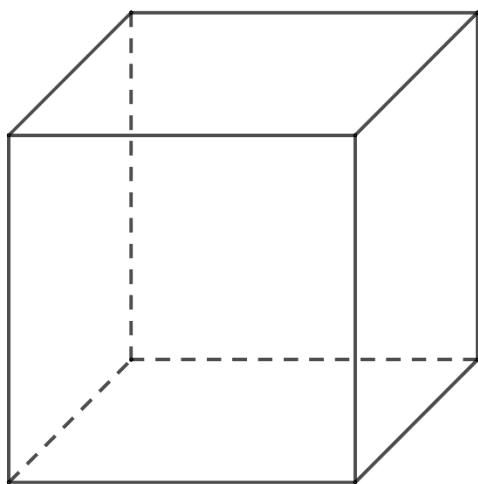


Obrázek 7: Náhled pracovního listu č. 12

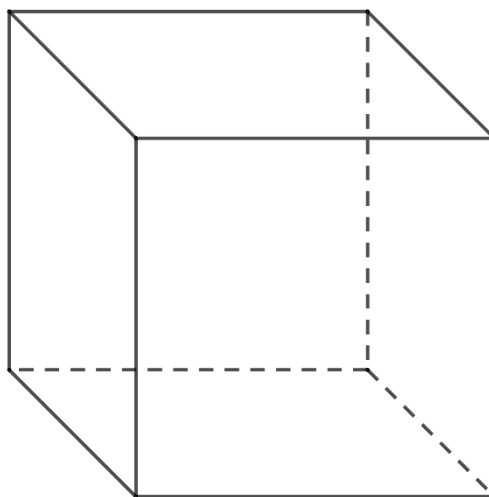
Při zobrazování geometrických útvarů ve volném rovnoběžném promítání dodržujeme následující pravidla.

1. Body zobrazujeme jako body.
2. Přímky zobrazujeme jako přímky nebo jako body.
3. Zachovává se incidence bodů a přímek.
4. Rovnoběžné přímky zobrazujeme jako rovnoběžky nebo jako body.
5. Zachovává se poměr velikostí rovnoběžných úseček.
6. Obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou (průčelních) se zobrazují ve skutečné velikosti.
7. Obrazy přímek kolmých k průmětně (hloubkových) kreslíme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou průmětny úhel o velikosti 45° .
8. Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

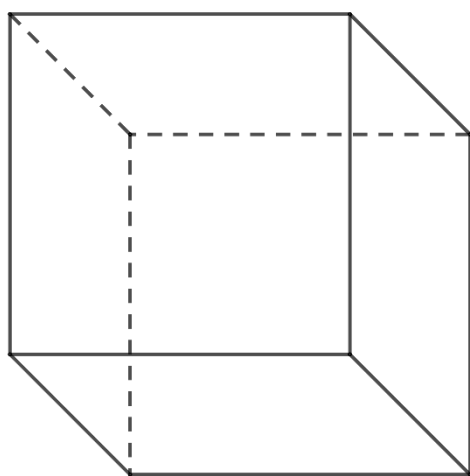
Tělesa můžeme ve volném rovnoběžném promítání zobrazovat v nadhledu (obrázky 8 a 9) nebo podhledu (obrázky 10 a 11).



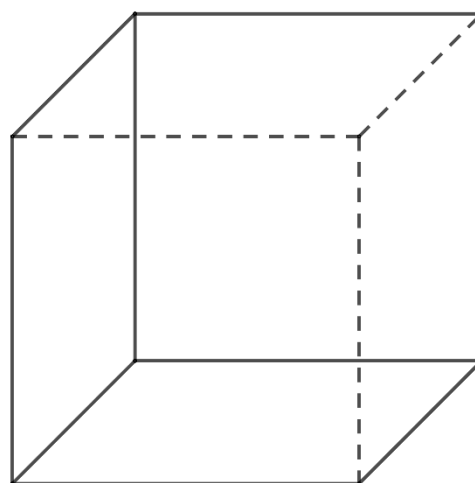
Obrázek 8: Krychle v nadhledu zprava



Obrázek 9: Krychle v nadhledu zleva

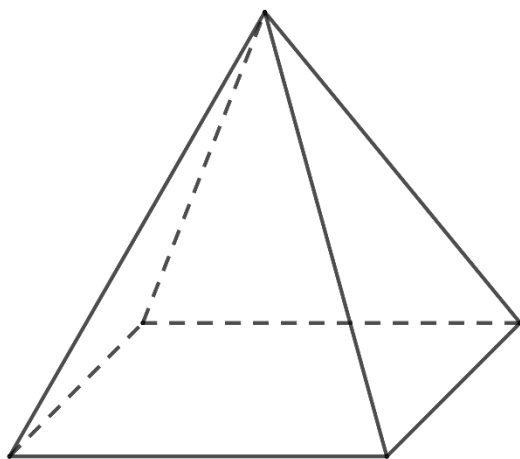


Obrázek 10: Krychle v podhledu zprava

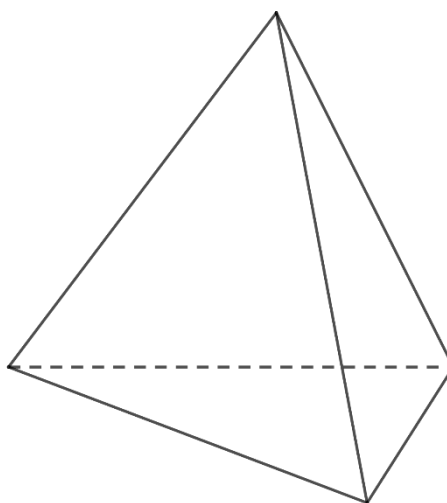


Obrázek 11: Krychle v podhledu zleva

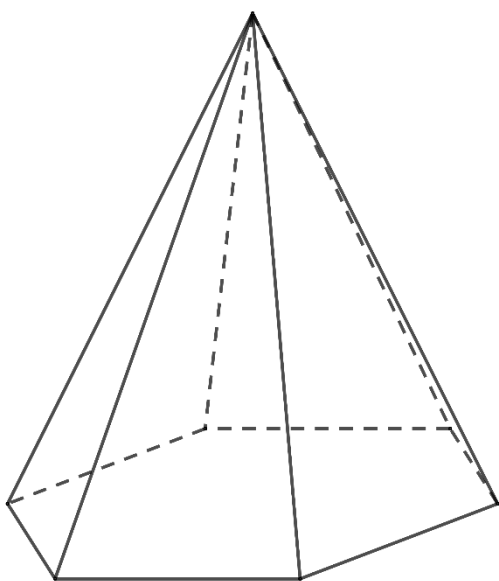
Obrázky dalších těles ve volném rovnoběžném promítání použitých v této bakalářské práci:



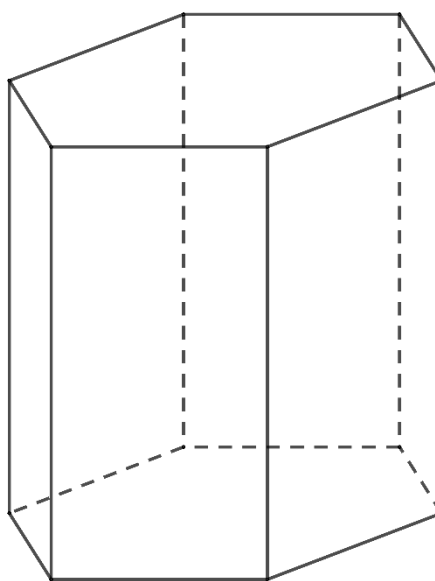
Obrázek 12: Pravidelný čtyřboký jehlan



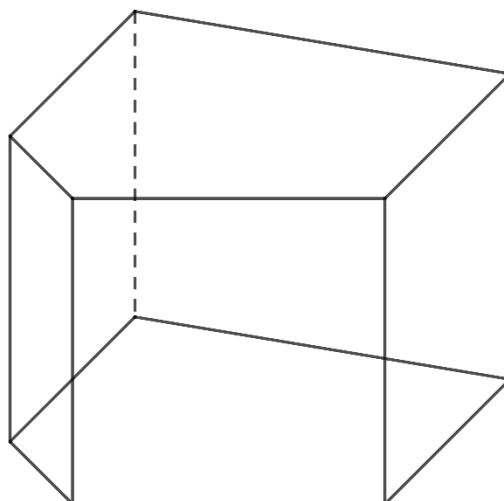
Obrázek 13: Pravidelný čtyřstěn



Obrázek 14: Pravidelný šestiboký jehlan



Obrázek 15: Pravidelný šestiboký hranol



Obrázek 16: Kolmý pětiboký hranol

1.3 Řešení konstrukčních úloh

Řez tělesa rovinou je průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Hranice řezu hranolu, popř. jehlanu se skládá z průniku roviny řezu se stěnami hranolu, popř. jehlanu. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestavit průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn.

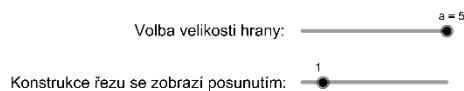
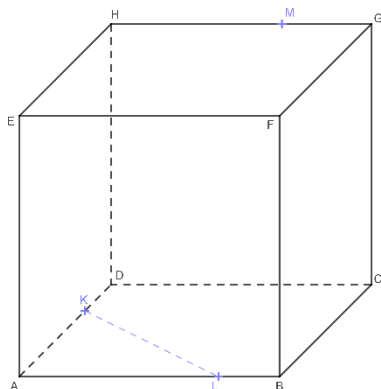
Pro konstrukci řezu jsou důležité zejména následující věty, které jsme již uváděli v podkapitole Polohové vlastnosti. K názorným ukázkám důsledků těchto vět použijeme pracovní list č. 1.

Věta 23 Leží-li dva různé body přímky v rovině, pak každý bod přímky leží v této rovině.

Důsledek věty 23 Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

V pracovním listu č. 1, jehož náhled vidíme na obrázku 17, body K, L leží v rovině stěny $ABCD$. V této stěně tedy bude ležet i jejich spojnice. Dle důsledku věty 23 je úsečka KL stranou řezu. Zobrazíme ji nastavením posuvníku „Konstrukce řezu se zobrazí posunutím“ na hodnotu 1.

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM , kde $K \in AD$, $L \in AB$, $M \in GH$.



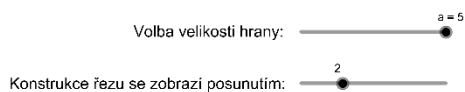
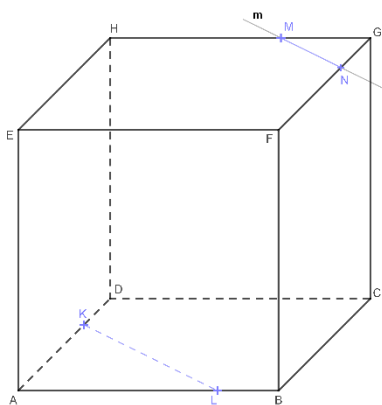
Obrázek 17: Náhled pracovního listu č. 1, krok 1

Věta 24 Dvě roviny jsou rovnoběžné (různé) a třetí je s oběma různoběžná; pak průsečnice těchto rovin jsou vzájemně rovnoběžné.

Důsledek věty 24 Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné, a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

Roviny ABC a EFG jsou rovnoběžné, rovina řezu je s oběma rovinami různoběžná. Úsečka KL je průsečnicí roviny řezu s rovinou stěny $ABCD$, a tedy dle důsledku věty 24 je rovnoběžná s průsečnicí roviny řezu s rovinou stěny $EFGH$. Jelikož bod M náleží rovině řezu, vedeme tímto bodem rovnoběžku m s KL . Zobrazíme ji nastavením posuvníku „Konstrukce řezu se zobrazí posunutím“ na hodnotu 2 (obrázek 18).

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM , kde $K \in AD$, $L \in AB$, $M \in GH$.



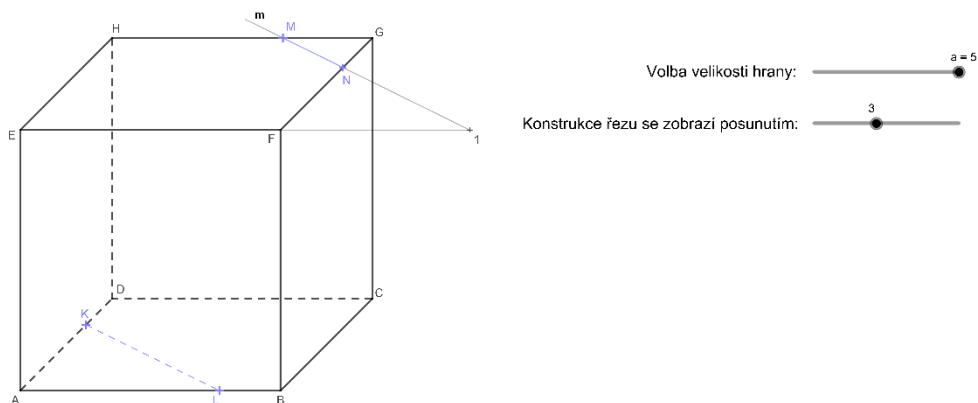
Obrázek 18: Náhled pracovního listu č. 1, krok 2

Věta 25 Všechny tři roviny mají společný právě jeden bod; pak každé dvě roviny jsou různoběžné a jejich průsečnice jsou tři různé přímky, procházející společným bodem všech tří rovin.

Důsledek věty 25 Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

Každé dvě roviny ABF , EFG a KLM jsou různoběžné. Průsečnicí rovin EFG a KLM je přímka m , průsečnicí rovin ABF a EFG je přímka procházející body E, F . Dle důsledku věty 25 se obě tyto průsečnice protínají s průsečnicí rovin ABF a KLM v jednom bodě označeném jako 1 . Tento bod zobrazíme nastavením posuvníku „Konstrukce řezu se zobrazí posunutím“ na hodnotu 3 (obrázek 19).

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM , kde $K \in AD$, $L \in AB$, $M \in GH$.



Obrázek 19: Náhled pracovního listu č. 1, krok 3

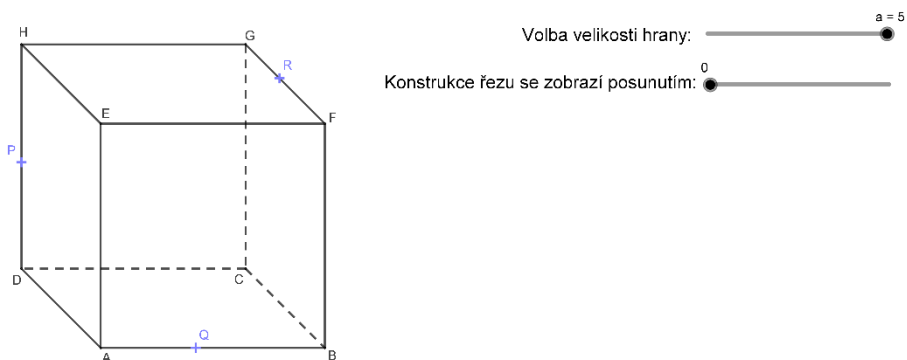
2 Konstrukční úlohy

Tato kapitola se zabývá řešením vybraných polohových konstrukčních úloh. V těchto úlohách jde pouze o vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin. K řešení budeme používat věty a důsledky těchto vět, které byly uvedeny v podkapitole Řešení konstrukčních úloh. Úlohy jsou řešeny ve volném rovnoběžném promítání. Text této bakalářské práce obsahuje zadání konstrukční úlohy a její řešení, pracovní listy jsou popsány v následující podkapitole.

2.1 Pracovní listy

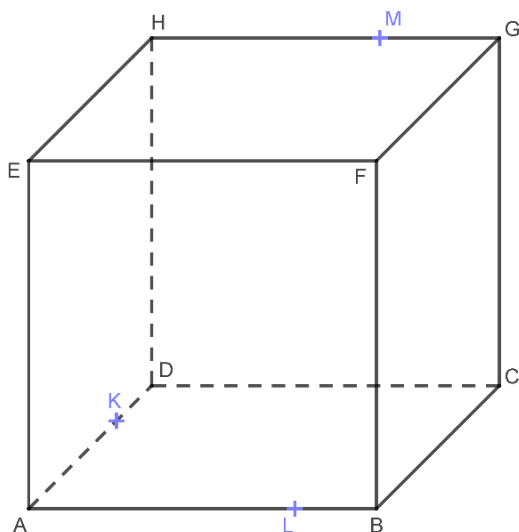
Pracovní listy se skládají ze zadání konstrukční úlohy, příslušného tělesa zobrazeného ve volném rovnoběžném promítání a několika posuvníků. Tyto posuvníky slouží buď k volbě velikosti hrany, nebo výšky tělesa, nebo k zobrazení postupu konstrukce daného řezu. Průnik hrany tělesa s rovinou řezu je vždy označen fialovým křížkem, stejně tak i úsečky, které tvoří strany řezu, jsou fialové. Jsou-li body zadány tak, že pouze leží na úsečce (jak je tomu např. v pracovním listu č. 2 – obrázek 20), lze měnit jejich polohu. Zároveň však zadané body nemohou splynout s krajními body úsečky, na které leží.

2. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou PQR, kde $P \in DH$, $Q \in AB$, $R \in FG$.



Obrázek 20: Náhled pracovního listu č. 2

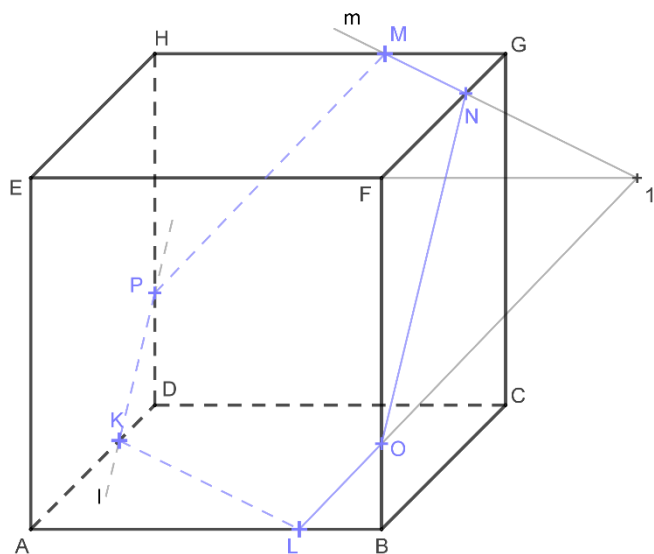
1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM , kde $K \in AD$, $L \in AB$, $M \in GH$.



Obrázek 21: Krychle $ABCDEFGH$ v nahladu zprava, body K, L, M umístěny dle zadání

Řešení:

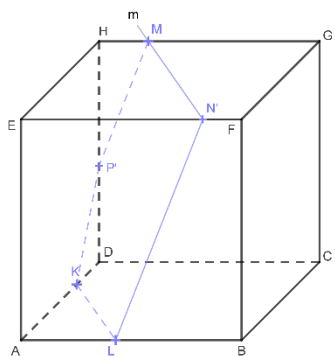
1. Body K, L leží v rovině stěny $ABCD$, jejich spojnice tvoří stranu řezu (důsledek 1).
2. Roviny ABC a EFG jsou rovnoběžné, bodem M tedy vedeme rovnoběžku m s KL (důsledek 2). Průnik přímky m a hrany FG je bod N .
3. Roviny KLM, ABF, EFG se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny KLM a EFG je přímka m , průsečnice rovin ABF a EFG je přímka EF . Jejich společným bodem 1 musí procházet i průsečnice roviny KLM a ABF , přímka určená body $1, L$ (důsledek 3).
4. Přímka $1L$ protne hranu BF v bodě O .
5. Spojíme body O, N .
6. Bodem K vedeme rovnoběžku l s NO . Průnik přímky l a hrany DH je bod P .
7. Úsečka PM je zbývající stranou řezu.
8. Řezem je šestiúhelník $LONMPK$.



Obrázek 22: Řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM

Poznámka Úloha je vyřešena pro pevné zadání, avšak v pracovním listu lze změnit polohu bodů K , L , M tak, že řezem je pětiúhelník (obrázek 23).

1. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM, kde $K \in AD$, $L \in AB$, $M \in GH$.

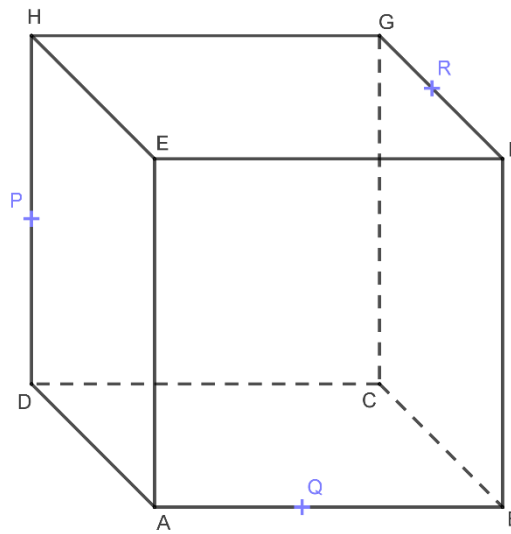


Volba velikosti hrany: ●

Konstrukce řezu se zobrazí posunutím: ●

Obrázek 23: Náhled pracovního listu č. 1

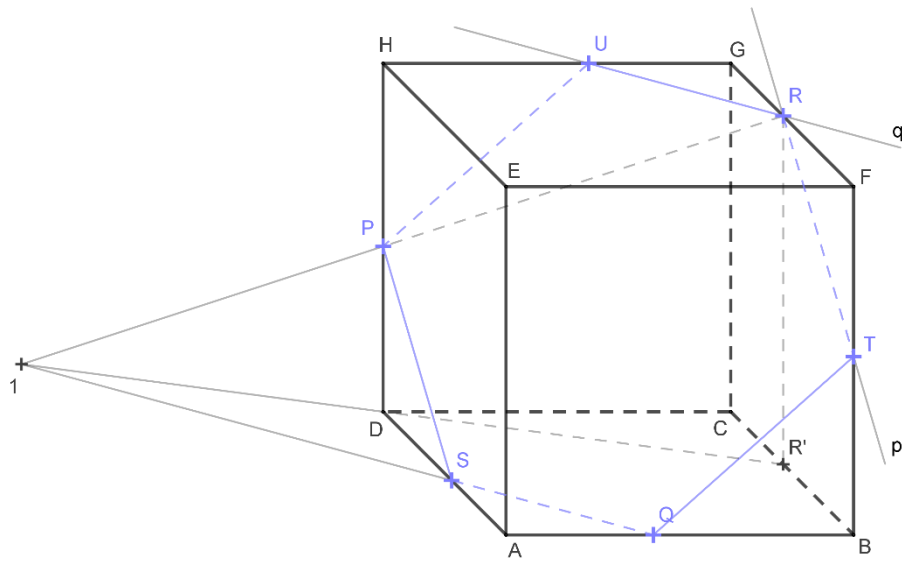
2. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou PQR , kde $P \in DH$, $Q \in AB$, $R \in FG$.



Obrázek 24: Krychle $ABCDEFGH$ v nadhledu zleva, body P , Q , R umístěny dle zadání

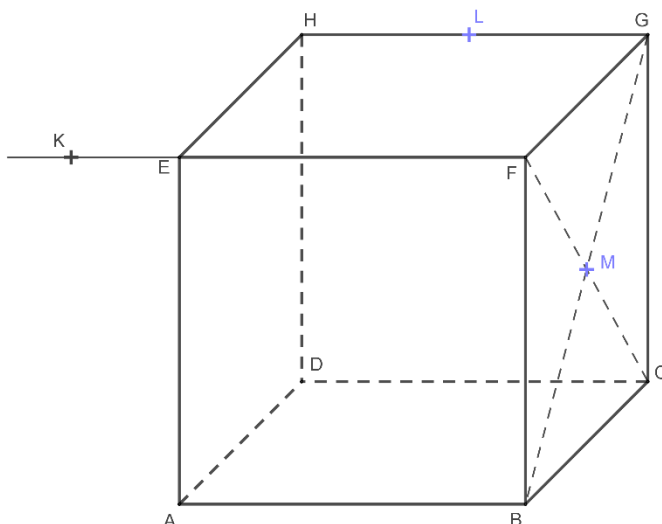
Řešení:

1. Roviny PQR , ABC , DHR se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny PQR a DHR je přímka PR , průsečnice rovin ABC a DHR je přímka DR' (R' je pravoúhlý průmět bodu R do roviny podstavy). Jejich společným bodem I musí procházet i průsečnice roviny PQR a ABC , přímka určená body I , Q (důsledek 3).
2. Přímka IQ protne hranu AD v bodě S .
3. Spojíme body S , P .
4. Bodem R vedeme rovnoběžku p s PS . Průnik přímky p a hrany BF je bod T .
5. Spojíme body Q , T .
6. Bodem R vedeme rovnoběžku q s QS . Průnik přímky q a hrany GH je bod U .
7. Spojíme body P , U .
8. Řezem je šestiúhelník $PSQTRU$.



Obrázek 25: Řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou PQR

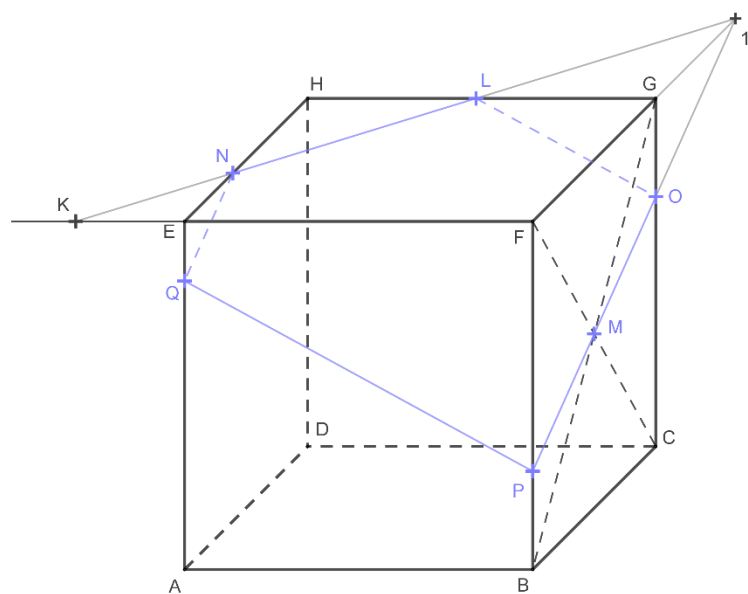
3. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM , kde K leží na prodloužení hrany EF za bodem E , $L \in GH$, M je střed stěny $BCGF$.



Obrázek 26: Krychle $ABCDEFGH$ v nadhledu zprava, body K, L, M umístěny dle zadání

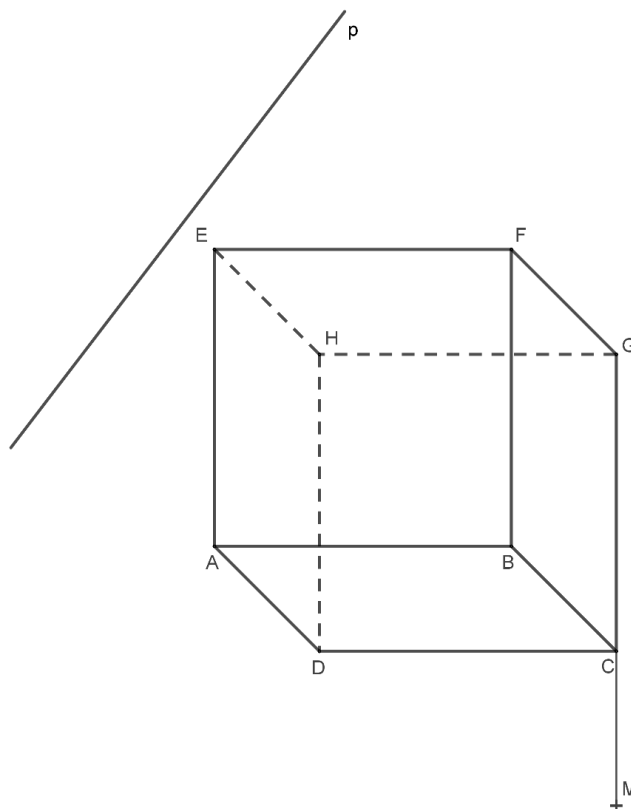
Řešení:

1. Přímka KL leží v rovině stěny $EFGH$. Průsečík přímky KL s hranou EH je bod N . Úsečka LN tvoří stranu řezu (důsledek 1).
2. Roviny KLM , EFG , BCG se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny KLM a EFG je přímka KL , průsečnice rovin EFG a BCG je přímka FG . Jejich společným bodem 1 musí procházet i průsečnice roviny KLM a BCG , přímka určená body $1, M$ (důsledek 3).
3. Přímka $1M$ protne hranu CG v bodě O a hranu BF v bodě P . Úsečka OP tvoří stranu řezu.
4. Spojíme body L, O .
5. Přímka KP leží v rovině stěny $ABFE$. Průsečík přímky KP s hranou AE je bod Q . Úsečka PQ tvoří stranu řezu.
6. Spojíme body Q, N .
7. Řezem je pětiúhelník $QPOLN$.



Obrázek 27: Řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM

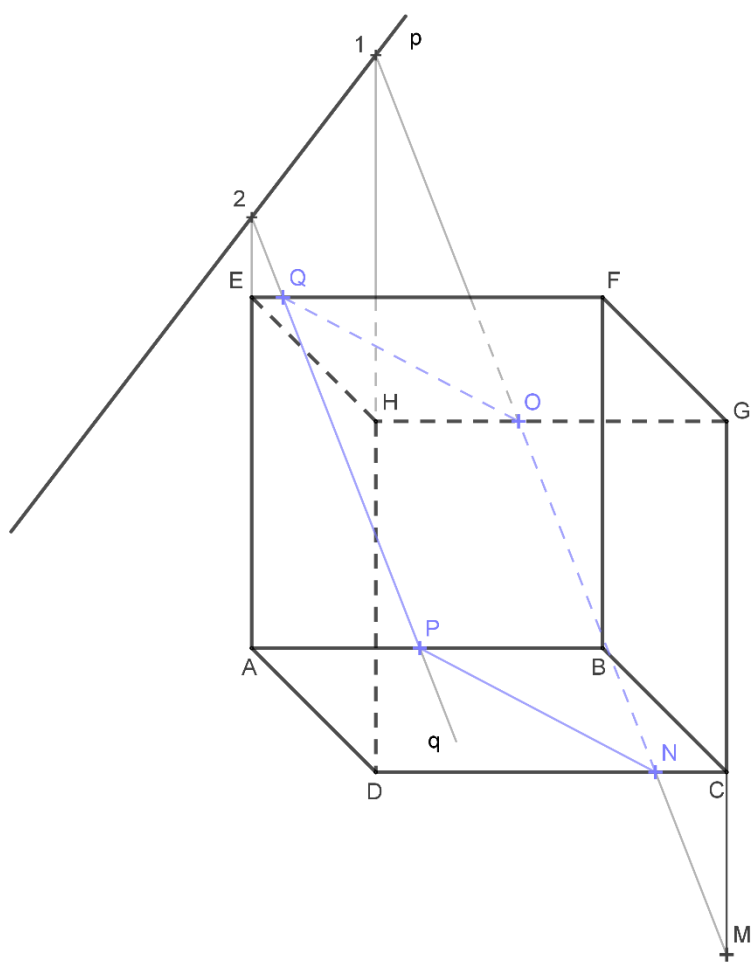
4. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou bodem M (M leží na prodloužení hrany CG za bodem C) a přímkou p , jestliže přímka p leží v rovině ADH .



Obrázek 28: Krychle $ABCDEFGH$ v pohledu zprava, přímka p a bod M umístěny dle zadání

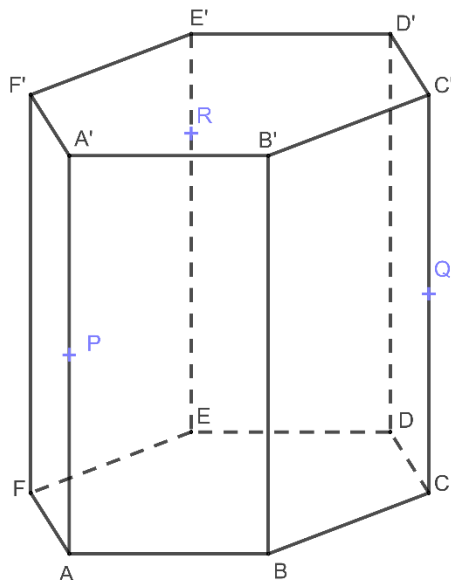
Řešení:

1. Přímka p je průsečnice roviny řezu a roviny ADH . Průnik roviny řezu s rovinou DCG i s rovinou ABF sestrojíme pomocí důsledku 3.
2. Bodem 1 , který je společným bodem přímek p a DH , musí procházet i průsečnice roviny řezu a roviny DCG , přímka určená body $1, M$.
3. Přímka $1M$ protne hranu CD v bodě N a hranu GH v bodě O . Úsečka NO tvoří stranu řezu.
4. Bodem 2 , který je společným bodem přímek p a AE , musí procházet i průsečnice q roviny řezu a roviny ABF . Současně jsou roviny ABF a DCG rovnoběžné, a proto je průsečnice q rovnoběžná s přímkou $1M$.
5. Přímka q protne hranu AB v bodě P a hranu EF v bodě Q .
6. Úsečky NP a OQ tvoří zbývající strany řezu.
7. Řezem je čtyřúhelník $QPNO$.



Obrázek 29: Řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou pM

5. Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ rovinou PQR , kde P je střed AA' , Q je střed CC' , $R \in EE'$, $|ER| = 3|E'R|$.

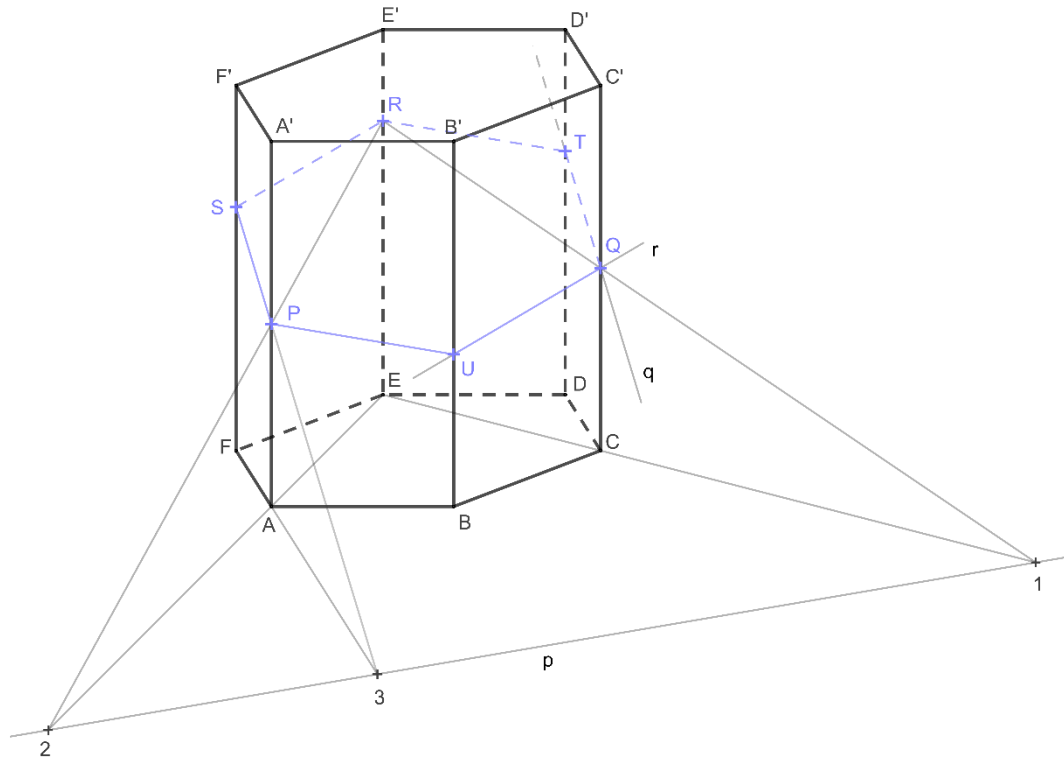


Obrázek 30: Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ v nadhledu zprava, body P, Q, R umístěny dle zadání

Řešení:

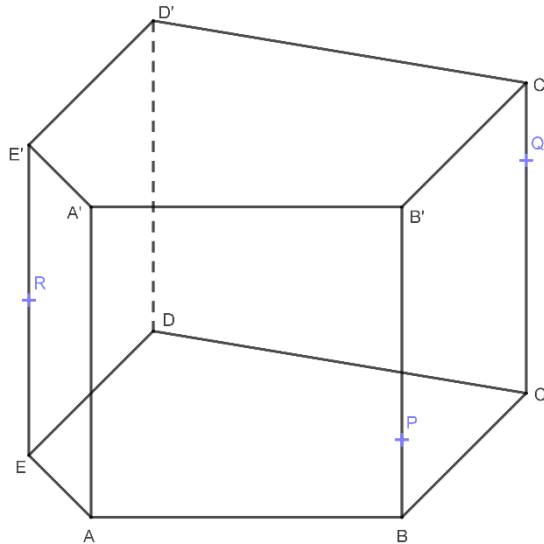
1. Sestrojíme průsečnici p roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
 - i. Roviny PQR, ABC, ECC' se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny PQR a ECC' je přímka QR , průsečnice rovin ABC a ECC' je přímka CE . Průnik přímky QR a přímky CE je bod 1.
 - ii. Roviny PQR, ABC, AEE' se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny PQR a AEE' je přímka PR , průsečnice rovin ABC a AEE' je přímka AE . Průnik přímky PR a přímky AE je bod 2.
 - iii. Body 1, 2 určují přímku p .
2. Bodem 3, který je společným bodem přímek p a AF , musí procházet průsečnice roviny PQR a roviny AFF' , přímka určená body 3, P .
3. Přímka $3P$ protne hranu FF' v bodě S .
4. Bodem Q vedeme rovnoběžku q s PS . Průnik přímky q a hrany DD' je bod T .
5. Spojíme body S, R .

6. Bodem Q vedeme rovnoběžku r s RS . Průnik přímky r a hrany BB' je bod U .
7. Úsečky PU a RT tvoří zbývající strany řezu.
8. Řezem je šestiúhelník $PUQTRS$.



Obrázek 31: Řez pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ rovinou PQR

6. Sestrojte řez kolmého pětibokého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou PQR , kde $P \in BB'$, $|BB'| = 4|BP|$, $Q \in CC'$, $|CC'| = 4|C'Q|$, R je střed EE' .

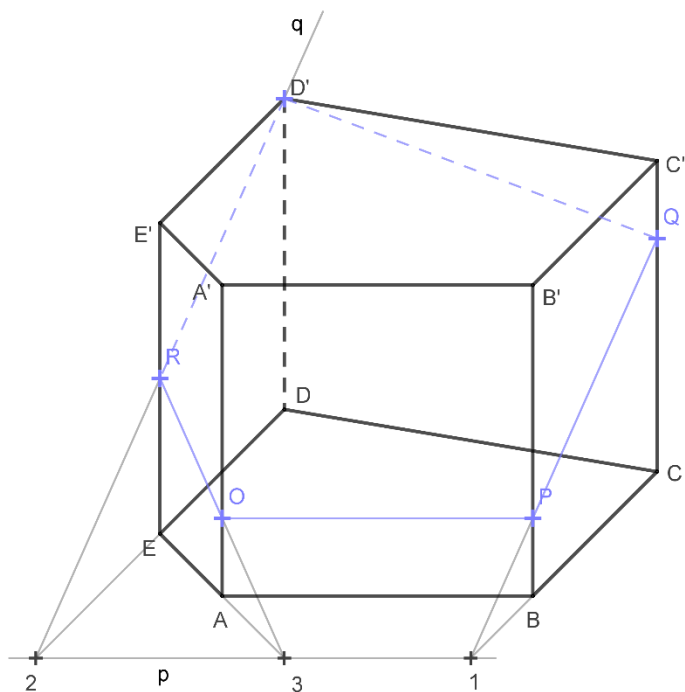


Obrázek 32: Kolmý pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ v nadhledu zprava, body P, Q, R umístěny dle zadání

Řešení:

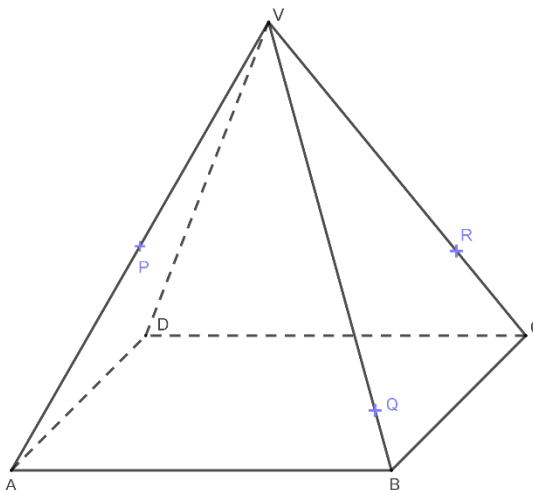
1. Body P, Q leží v rovině stěny $BCC'B'$, jejich spojnice tvoří stranu řezu.
2. Bodem R vedeme rovnoběžku q s PQ . Průnik přímky q a hrany DD' je bod D' . Úsečka RD' je stranou řezu.
3. Spojíme body D, Q .
4. Sestrojíme průsečnici p roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
 - i. Roviny PQR, ABC, BCC' se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny PQR a BCC' je přímka PQ , průsečnice rovin ABC a BCC' je přímka BC . Průnik přímky PQ a přímky BC je bod 1.
 - ii. Roviny PQR, ABC, EDD' se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny PQR a EDD' je přímka RD' , průsečnice rovin ABC a EDD' je přímka DE . Průnik přímky RD' a přímky DE je bod 2.
 - iii. Body 1, 2 určují přímku p .
5. Bodem 3, který je společným bodem přímek p a AE , musí procházet průsečnice roviny PQR a roviny EAA' , přímka určená body 3, R .

6. Přímka $3R$ protne hranu AA' v bodě O . Úsečka OR je stranou řezu.
7. Úsečka OP je zbývající stranou řezu.
8. Řezem je pětiúhelník $OPQD'R$.



Obrázek 33: Řez kolmého pětibokého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ rovinou PQR

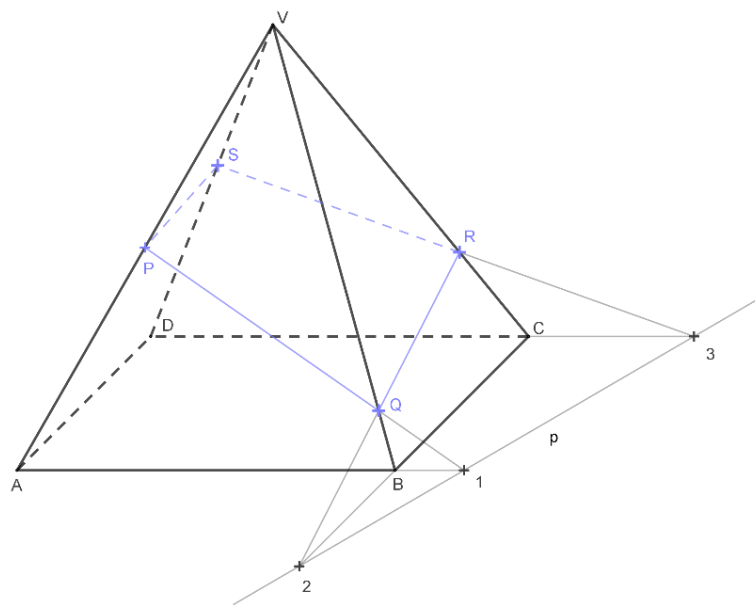
7. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou PQR , P je střed AV , $Q \in BV$, $5|BQ| = |QV|$, $R \in CV$, $3|CR| = |RV|$.



Obrázek 34: Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ v nadhledu zprava, body P , Q , R umístěny dle zadání

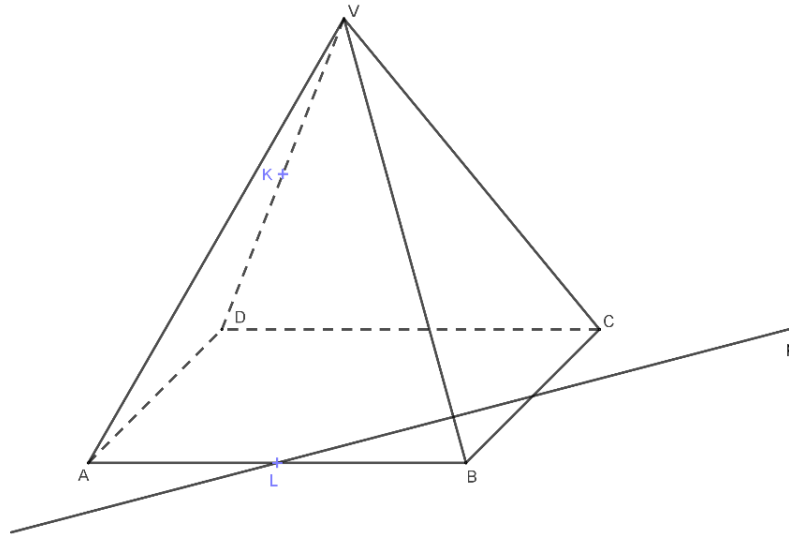
Řešení:

1. Body P , Q leží v rovině stěny ABV , jejich spojnice tvoří stranu řezu.
2. Body Q , R leží v rovině stěny BCV , jejich spojnice tvoří stranu řezu.
3. Sestrojíme průsečnici p roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
 - i. Roviny PQR , ABC , ABV se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny PQR a ABV je přímka PQ , průsečnice rovin ABC a ABV je přímka AB . Průnik přímky PQ a přímky AB je bod 1 .
 - ii. Roviny PQR , ABC , BCV se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny PQR a BCV je přímka QR , průsečnice rovin ABC a BCV je přímka BC . Průnik QR a přímky BC je bod 2 .
 - iii. Body 1 , 2 určují přímku p .
4. Bodem 3 , který je společným bodem přímek p a CD , musí procházet průsečnice roviny PQR a roviny CDV , přímka určená body 3 , R .
5. Přímka $3R$ protne hranu DV v bodě S . Úsečka RS je stranou řezu.
6. Úsečka PS je zbývající stranou řezu.
7. Řezem je čtyřúhelník $PQRS$.



Obrázek 35: Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou PQR

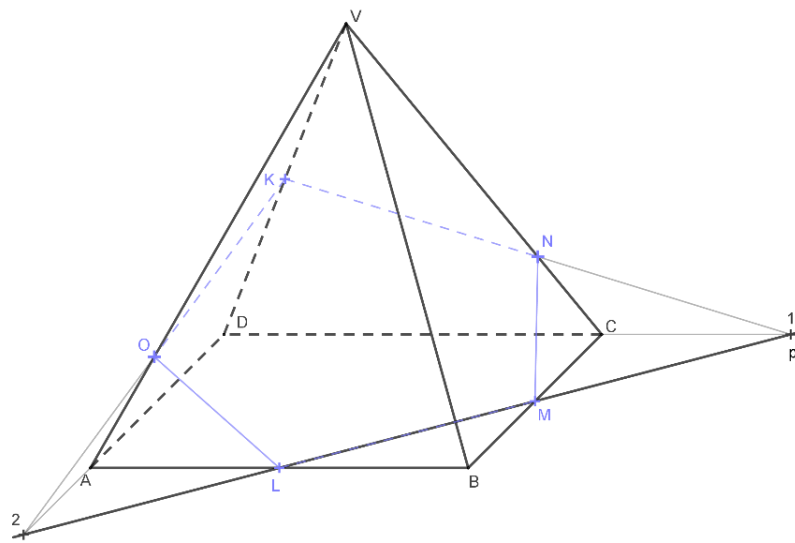
8. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou, která obsahuje přímku p a bod K , kde K je střed hrany DV a přímka p je rovnoběžná s hranou AC a prochází bodem L , který je střed hrany AB .



Obrázek 36: Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ v nadhledu zprava, body K , L a přímka p umístěny dle zadání

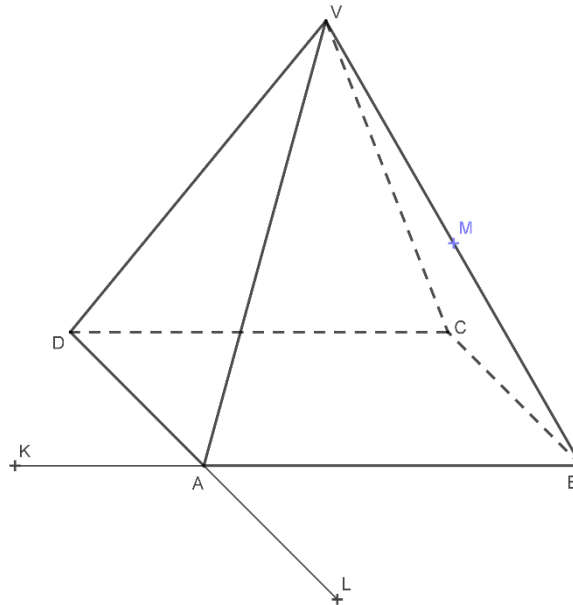
Řešení:

1. Přímka p protíná hranu BC v bodě M . Úsečka LM tvoří stranu řezu.
2. Přímka p je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy. Průnik roviny řezu s rovinou CDV i s rovinou ADV sestrojíme pomocí důsledku 3.
3. Bodem 1 , který je společným bodem přímek p a CD , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny CDV , přímka určená body 1 , K .
4. Přímka $1K$ protne hranu CV v bodě N . Úsečka KN tvoří stranu řezu.
5. Bodem 2 , který je společným bodem přímek p a AD , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny ADV , přímka určená body 2 , K .
6. Přímka $2K$ protne hranu AV v bodě O . Úsečka KO tvoří stranu řezu.
7. Úsečky MN a LO tvoří zbývající strany řezu.
8. Řezem je pětiúhelník $LMNKO$.



Obrázek 37: Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou pK

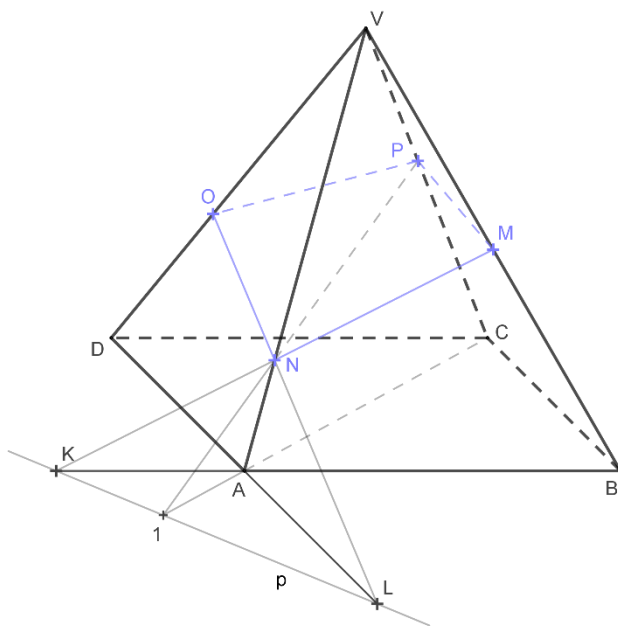
9. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM ; body K, L, M leží po řadě na polopřímkách BA, DA, VB , $|BK| = \frac{3}{2}|AB|$, $|DL| = 2|AD|$, $|VM| = \frac{1}{2}|VB|$.



Obrázek 38: Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ v nadhledu zleva, body K, L, M umístěny dle zadání

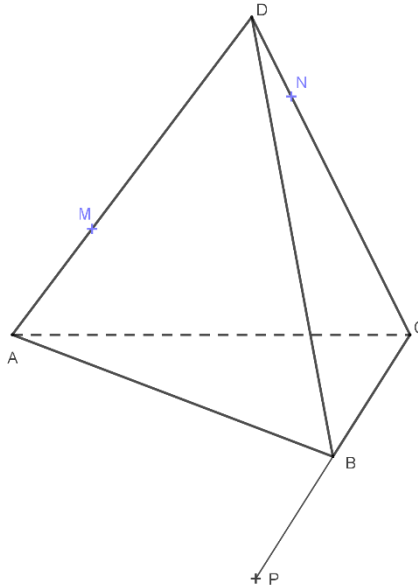
Řešení:

1. Přímka KM leží v rovině stěny ABV . Průsečík přímky KM s hranou AV je bod N . Úsečka MN tvoří stranu řezu.
2. Přímka LN leží v rovině stěny ADV . Průsečík přímky LN s hranou DV je bod O . Úsečka NO tvoří stranu řezu.
3. Bod K je společným bodem rovin KLM, ABV, ABC a bod L je společným bodem rovin KLM, ADV, ABC . Body K, L tedy určují průsečnici p rovin KLM, ABC .
4. Bodem I , který je společným bodem přímek p a AC , musí procházet i průsečnice roviny KLM a roviny ACV , přímka určená body I, N .
5. Přímka IN protne hranu CV v bodě P .
6. Úsečky OP a MP tvoří zbývající strany řezu.
7. Řezem je čtyřúhelník $ONMP$.



Obrázek 39: Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM

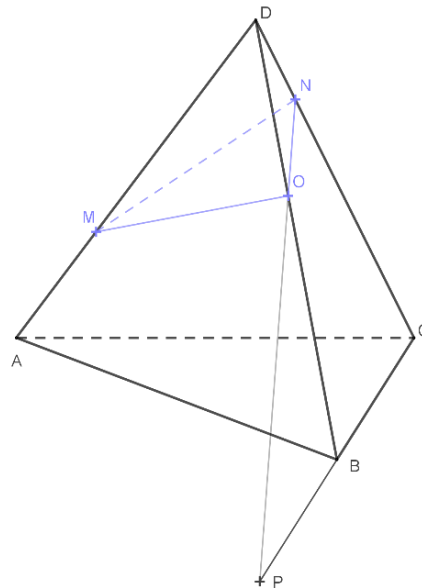
10. Sestrojte řez pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ rovinou MNP , kde $M \in AD$, $3|AM| = |AD|$, $N \in CD$, $4|DN| = |CD|$ a $P \in CB$, tak, že $|CP| = 2|BC|$.



Obrázek 40: Pravidelný čtyřstěn $ABCD$, body M, N, P umístěny dle zadání

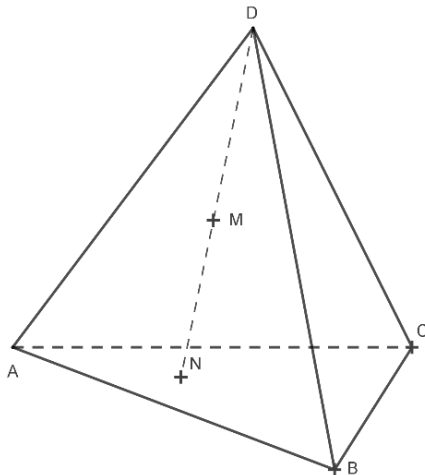
Řešení:

1. Přímka PN leží v rovině stěny BCD . Průsečík přímky PN s hranou BD je bod O . Úsečka NO tvoří stranu řezu.
2. Body M, O leží v rovině stěny ABD , jejich spojnice tvoří stranu řezu.
3. Úsečka MN je zbývající stranou řezu.
4. Řezem je trojúhelník MON .



Obrázek 41: Řez pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ rovinou MNP

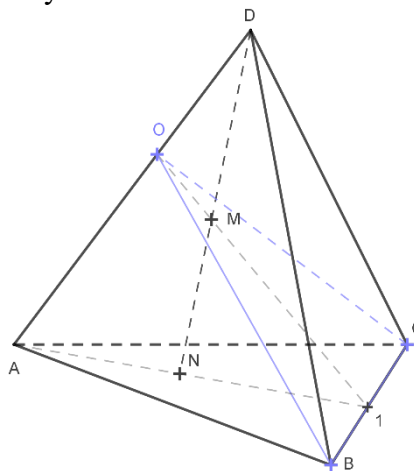
11. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod N je vnitřním bodem stěny ABC a bod M je vnitřním bodem úsečky DN . Sestrojte řez čtyřstěnu rovinami ρ a σ , $\rho = BCM$, σ prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou BCD .



Obrázek 42: Pravidelný čtyřstěn $ABCD$, body M, N umístěny dle zadání

Řešení pro řez rovinou ρ :

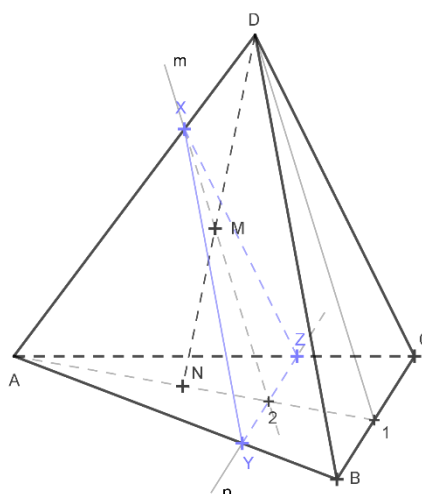
1. Úsečka BC je stranou řezu.
2. Roviny ρ , ABC , AND se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny ABC a AND je přímka AN , průsečnice rovin ρ a ABC je přímka BC . Jejich společným bodem I musí procházet i průsečnice roviny ρ a AND , přímka určená body I, M .
3. Přímka IM protne hranu AD v bodě O .
4. Úsečky BO a CO jsou zbývající strany řezu.
5. Řezem je trojúhelník BCO .



Obrázek 43: Řez pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ rovinou ρ

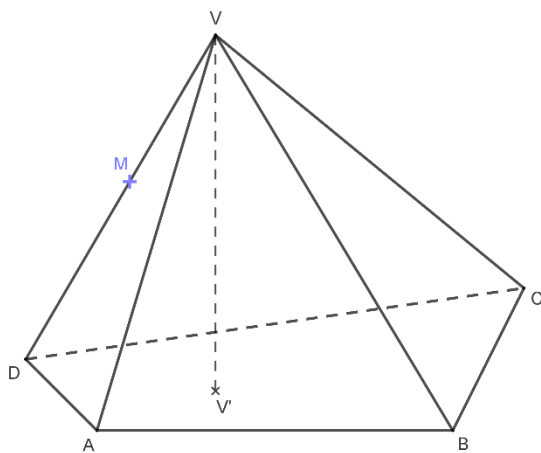
Řešení pro řez rovinou σ :

1. Roviny ABC , BCD , AND se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny ABC a AND je přímka AN , průsečnice rovin BCD a ABC je přímka BC . Jejich společným bodem 1 musí procházet i průsečnice roviny BCD a AND , přímka určená body $1, D$.
2. Roviny σ a BCD jsou rovnoběžné, bodem M tedy vedeme rovnoběžku m s ID . Průnik přímky m a přímky AN je bod 2 . Průnik přímky m a hrany AD je bod X .
3. Dále bodem 2 vedeme rovnoběžku n s BC . Přímka n protne hranu AB v bodě Y a hranu AC v bodě Z .
4. Úsečky XY a XZ tvoří zbývající strany řezu.
5. Řezem je trojúhelník XYZ .



Obrázek 44: Řez pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ rovinou σ

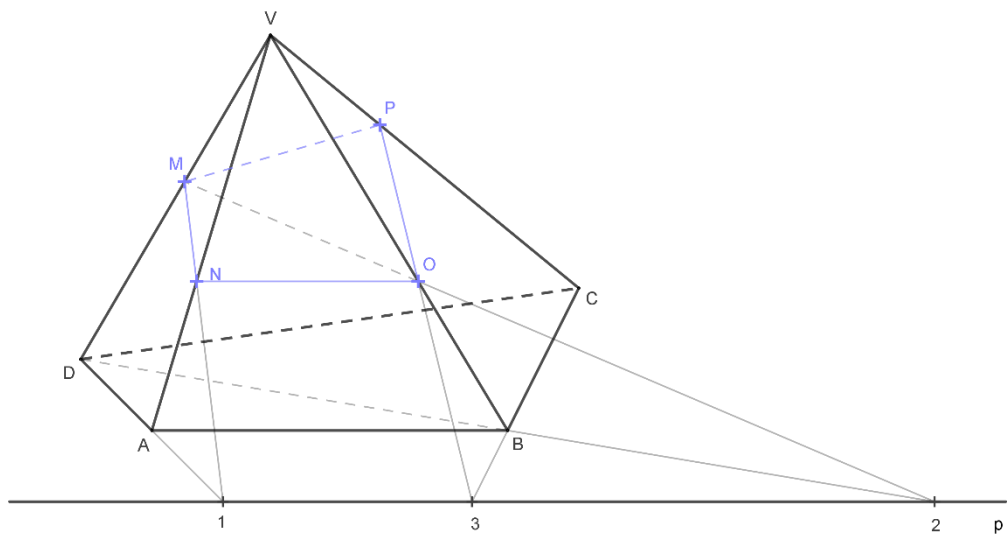
12. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$, jehož vrchol V je dán pravoúhlým průmětem do roviny podstavy, rovinou určenou bodem M ($M \in DV$) a přímkou p , jestliže přímkou p leží v rovině podstavy.



Obrázek 45: Jehlan $ABCDV$, pravoúhlý průmět V' vrcholu V do roviny podstavy, bod M a přímkou p umístěny dle zadání

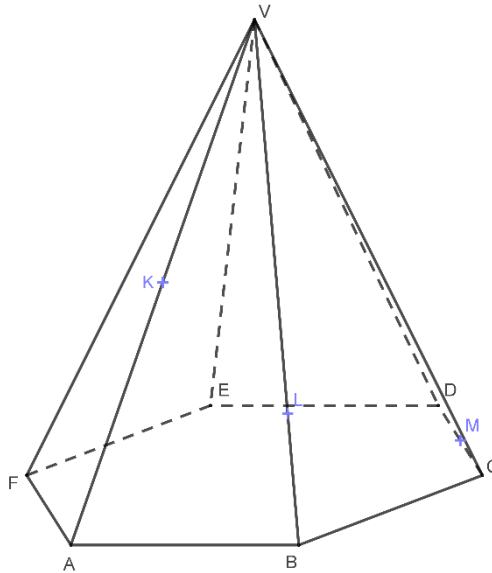
Řešení:

1. Přímkou p je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy. Průnik roviny řezu s rovinami ADV , ABV , BCV sestrojíme pomocí důsledku 3.
2. Bodem 1 , který je společným bodem přímek p a AD , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny ADV , přímkou určená body $1, M$.
3. Přímkou $1M$ protne hranu AV v bodě N . Úsečka MN tvoří stranu řezu.
4. Bodem 2 , který je společným bodem přímek p a BD , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny ABV , přímkou určená body $2, M$.
5. Přímkou $2M$ protne hranu BV v bodě O .
6. Spojíme body N, O .
7. Bodem 3 , který je společným bodem přímek p a BC , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny BCV , přímkou určená body $3, O$.
8. Přímkou $3O$ protne hranu CV v bodě P . Úsečka OP tvoří stranu řezu.
9. Úsečka MP je zbývající stranou řezu.
10. Řezem je čtyřúhelník $MNOP$.



Obrázek 46: Řez jehlanu $ABCDV$ rovinou pM

13. Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ rovinou KLM , kde K je střed hrany AV , $L \in BV$, $4|BL| = |BV|$, M je střed hrany CD .

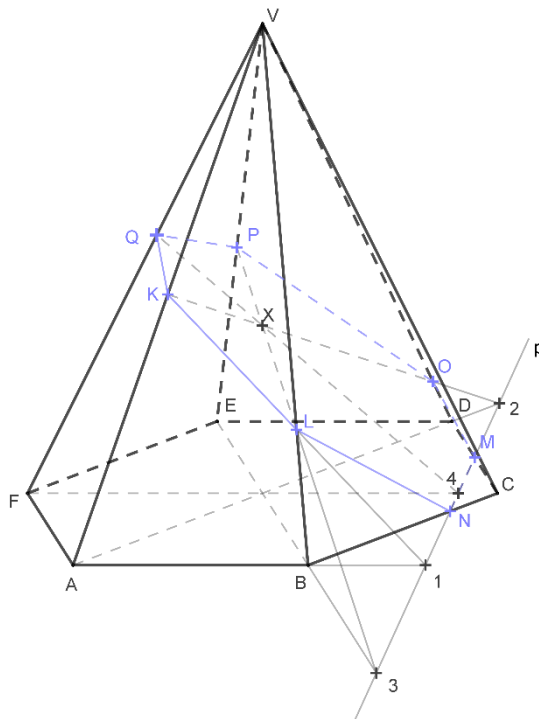


Obrázek 47: Pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, body K, L, M umístěny dle zadání

Řešení:

1. Body K, L leží v rovině stěny ABV , jejich spojnice tvoří stranu řezu.
2. Sestrojíme průsečnici p roviny řezu a roviny podstavy (pomocí důsledku 3):
 - i. Roviny KLM, ABC, ABV se protínají v jednom bodě, kterým procházejí všechny průsečnice těchto rovin. Průsečnice roviny KLM a ABV je přímka KL , průsečnice rovin ABC a ABV je přímka AB . Průnik přímky KL a přímky AB je bod 1 .
 - ii. Bod M je společným bodem rovin KLM a ABC , musí tedy ležet na průsečnici p .
 - iii. Body $1, M$ určují přímku p .
3. Přímka p protíná hranu BC v bodě N . Úsečky LN, MN tvoří strany řezu.
4. Bodem 2 , který je společným bodem přímek p a AD , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny ADV , přímka určená body $2, K$.
5. Přímka $2K$ protne hranu DV v bodě O . Úsečka MO tvoří stranu řezu.
6. Bodem 3 , který je společným bodem přímek p a BE , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny BEV , přímka určená body $3, L$.
7. Přímka $3L$ protne hranu EV v bodě P . Úsečka OP tvoří stranu řezu.

8. Bodem 4 , který je společným bodem přímek p a CF , musí procházet průsečnice roviny řezu a roviny CFV , přímka určená body 4 , X , kde bod X je průsečíkem přímek $2K$ a $3L$.
9. Přímka $4X$ protne hranu FV v bodě Q . Úsečky KQ a PQ jsou zbývající strany řezu.
10. Řezem je šestiúhelník $KLNMPQQ$.



Obrázek 48: Řez pravidelného šestiúhelníkového jehlanu $ABCDEFV$ rovinou KLM

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo zpracovat vybrané středoškolské konstrukční úlohy a vytvořit pracovní listy pro učitele ke každé z těchto úloh, čehož bylo dosaženo. Ke zpracování jsem zvolila polohové konstrukční úlohy ze stereometrie, a to konkrétně řezy těles. Jednalo se především o řezy hranolů a jehlanů. Výběr úloh byl přizpůsoben učivu střední školy tak, aby úlohy mohly být využity přímo ve výuce. Samotný text práce tedy kromě řešených úloh obsahuje také teorii potřebnou ke konstrukci řezů a popis pracovních listů.

Pracovní listy byly vytvořeny zejména pro učitele, avšak jednoduchost ovládní v dynamickém pracovním listu umožňuje práci s nimi i samotným žákům. Jedná se tedy o materiál, který může pomoci zkvalitnit a zatraktivnit výuku stereometrie. Jako další výhodu vypracování pracovních listů v programu GeoGebra vidím to, že se učitelé i žáci mohou snadno s tímto programem seznámit a využívat jej dál i v jiných oblastech matematiky, a dokonce i v jiných předmětech.

Literatura

- [1] MACHALA F.; SEDLÁŘOVÁ M.; SROVNAL J. *Konstrukční geometrie*, 1. vydání, Univerzita Palackého v Olomouci, 2002. ISBN 80-244-0399-4.
- [2] CHODOROVÁ, M. *Studijní materiály k předmětu Konstrukční geometrie*.
- [3] POMYKALOVÁ E. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie*, 4. vydání, Praha: Prometheus, 2010. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-389-9.
- [4] HRUBÝ D. *Matematická cvičení pro střední školy*, 1. vydání, Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-374-5.

Seznam použitých symbolů

A, B, \dots	bod A, B, \dots
$1, 2, \dots$	bod $1, 2, \dots$
p, q, \dots	přímka p, q, \dots
přímka AB	přímka určená body A, B
polopřímka AB	polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B
úsečka AB	úsečka s krajními body A, B
ρ, σ, \dots	rovina ρ, σ, \dots
rovina ABC	rovina určená body A, B, C
rovina Ap	rovina určená bodem A a přímkou p
$X \in AB$	bod X náleží úsečce AB
$ AB $	vzdálenost bodů A, B ; délka úsečky AB

Seznam příloh

Příloha 1	Pracovní list č. 1
Příloha 2	Pracovní list č. 2
Příloha 3	Pracovní list č. 3
Příloha 4	Pracovní list č. 4
Příloha 5	Pracovní list č. 5
Příloha 6	Pracovní list č. 6
Příloha 7	Pracovní list č. 7
Příloha 8	Pracovní list č. 8
Příloha 9	Pracovní list č. 9
Příloha 10	Pracovní list č. 10
Příloha 11	Pracovní list č. 11
Příloha 12	Pracovní list č. 12
Příloha 13	Pracovní list č. 13