



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

ČTYŘSTĚNY A JEJICH VLASTNOSTI

Vypracovala: Bc. Kateřina Červenková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2019

Poděkování

Dovoluji si tímto poděkovat panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho ochotu, trpělivost a čas, který mi věnoval, ale i za připomínky, nápady a cenné rady při zpracování mé diplomové práce. Děkuji také své rodině a příteli za podporu při studiu a trpělivost při psaní diplomové práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Čtyřstěny a jejich vlastnosti jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Bc. Kateřina Červenková

Anotace

Diplomová práce Čtyřstěny a jejich vlastnosti shrnuje základní vlastnosti čtyřstěňů. Cílem této práce je seznámení čtenáře s jednotlivými typy čtyřstěňů a jejich vlastnostmi. U vybraných pojmů z geometrie trojúhelníku se snažím hledat jejich prostorovou analogii. Jsou zde odvozeny podmínky pro existenci ortocentra čtyřstěňu. Dále je pro čtyřstěny bez ortocentra zaveden Mongeův bod, který má vlastnosti odpovídající ortocentru. U většiny vlastností jsou popsány jejich důkazy. V závěrečné části jsou navrženy pracovní listy pro žáky základních a středních škol. Součástí jsou také obrázky vytvořené v geometrickém programu GeoGebra 3D, které pomáhají čtenáři porozumět dané problematice.

Klíčová slova

stejnostěnný čtyřstěň, Mongeův bod, ortocentrický čtyřstěň, pravidelný čtyřstěň, pracovní listy, osm kulových ploch vepsaných čtyřstěňu, kulová plocha dvanácti bodů

Annotation

This diploma thesis Tetrahedra and their properties summarizes the basic properties of tetrahedron. The main goal is to introduce the topic to a reader of this thesis. Author would like to provide basic information about the particular types of tetrahedra and their properties. I try to examine there a spatial analogy of selected terms of a triangle. Conditions for the existence of the orthocenter of a tetrahedron are derived. Then for a non-orthocetric tetrahedron the Monge point as its generalization is introduced. By most properties their proofs are given. In the final part worksheets for pupils of primary and secondary schools are designed. Pictures in the thesis are created in a geometrical program called GeoGebra 3D. These pictures can help the reader to understand this problem.

Keywords

equifacial tetrahedra, Monge point, orthocentric tetrahedron, regular tetrahedron, worksheets, the eight spheres of tetrahedron tangent to the planes of its faces, twelve-point sphere

Obsah

Úvod.....	6
1 Definice čtyřstěnu	8
2 Základní vlastnosti obecného čtyřstěnu	10
2.1 Povrch čtyřstěnu	10
2.2 Objem čtyřstěnu	10
2.3 Středny hran a střední příčky.....	11
2.4 Těžiště	13
2.5 Ortocentrum.....	17
2.5.1 Podmínky pro existenci ortocentra – stereometrické odvození	17
2.6 Další analogie ortocentra trojúhelníku ve čtyřstěnu	19
2.6.1 Mongeův bod	19
2.6.2 Ortocentrum jako potenční střed.....	25
2.7 Kulové plochy	34
2.7.1 Kulová plocha opsaná	34
2.7.2 Kulové plochy vepsané	35
3 Speciální čtyřstěny	40
3.1 Pravidelný čtyřstěn	40
3.2 Ortocentrický čtyřstěn	45
3.3 Stejnostěnný čtyřstěn.....	56
3.4 Pravoúhlý čtyřstěn	65
3.4.1 De Guaova věta	68
4 Prostorové zobecnění kružnice devíti bodů	69
4.1 Definice kružnice devíti bodů	69
4.2 Kulová plocha dvanácti bodů prvního typu	71
4.3 Kulová plocha dvanácti bodů druhého typu.....	72
4.4 Kulová plocha osmi bodů.....	74
5 Zásobník návrhů pracovních listů	75
Závěr	87
Použitá literatura	88
Seznam obrázků	92
Seznam příloh.....	97

Úvod

Čtyřstěn je přirozenou prostorovou analogií trojúhelníku, avšak na rozdíl od něj nejsou jeho vlastnosti příliš známé.

S úlohami o trojúhelníku se setkáme již v nejstarších matematických a geometrických spisech. I přes to, že trojúhelník zkoumali učenci v průběhu celé známé historie matematiky, dochází i v dnešní době k objevování jeho nových vlastností. Příkladem otevřené databáze bodů trojúhelníku je Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centres, kterou jsem využívala při zpracování své bakalářské práce *Významné body v trojúhelníku* [4]. Po odevzdání mé bakalářské práce jsem si řekla, že by mě zajímalo, jaké vlastnosti mají čtyřstěny, které jsou nejjednodušším tělesem v prostoru.

I přes to, že se o vlastnosti čtyřstěnů v posledních letech zajímalo mnoho matematiků, setkáváme se pouze s velmi malým množstvím publikací, které se čtyřstěny zabývají komplexněji. V celé řadě článků a publikací chybí důkazy a většinou také postrádáme názorné obrázky, které by nám pomohly porozumět dané problematice. Ve starší literatuře je to pochopitelně dáno úrovní zobrazovací techniky. Mnoho autorů přistupuje k tématu vlastností čtyřstěnů jako zobecňování vlastností trojúhelníků pouze početně. Mnoho výpočtů a absence názorných obrázků může mnohé zájemce o tuto problematiku odradit.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. V první z nich uvádím definice čtyřstěnu, ve druhé kapitole se věnuji bodům a pojmům, které známe z geometrie trojúhelníku. Uvedeme si zde analogie střední příčky, těžiště, ortocentra a kružnic trojúhelníku opsaných a vepsaných. U ortocentra si nejprve odvodíme podmínky existence společného průsečíku výšek ve čtyřstěnu. Pro čtyřstěny, pro které ortocentrum neexistuje, odvodíme Mongeův bod, jakožto jeho zobecnění ortocentra. Jako další analogii ortocentra si zavedeme potenční střed kulových ploch. Třetí část je věnována speciálním typům čtyřstěnů. Nejprve se čtenář dočte o pravidelném čtyřstěnu, poté o čtyřstěnu ortocentrickém (neboli ortickém) a jeho vlastnostech. Dále se seznámí se stejnostěnným čtyřstěnem a možností jím vyplňovat prostor. Posledním typem čtyřstěnu, kterým se tato práce zabývá, je čtyřstěn pravoúhlý. Ve čtvrté kapitole je popsána prostorová analogie

kružnice devíti bodů. Závěrečná kapitola je věnována návrhům pracovních listů pro žáky základních a středních škol.

S pojmem čtyřstěn se většina žáků vůbec nesetká. Navrhla jsem proto pracovní listy, které nevyžadují žádné zvláštní znalosti o tomto tělese. Žáci si vystačí s vědomostmi z geometrie jehlanu. Podle mého názoru je důležité, aby se žáci setkali i s pojmem čtyřstěn, neboť se jedná o trojboký jehlan. Na středních školách by se žáci měli setkat i s pojmy pravidelný a polopravidelný mnohostěn. A jelikož jsou to pro žáky nicneříkající pojmy, volila bych seznámení s nimi pomocí sítí těles a sestavení modelů, aby si je žáci mohli osahat. Možnost držet model tělesa, o kterém se v hodině mluví, výrazně zvyšuje jeho názornost a usnadňuje porozumění tématu i u slabších žáků a žáků se specifickými poruchami učení (SPU).

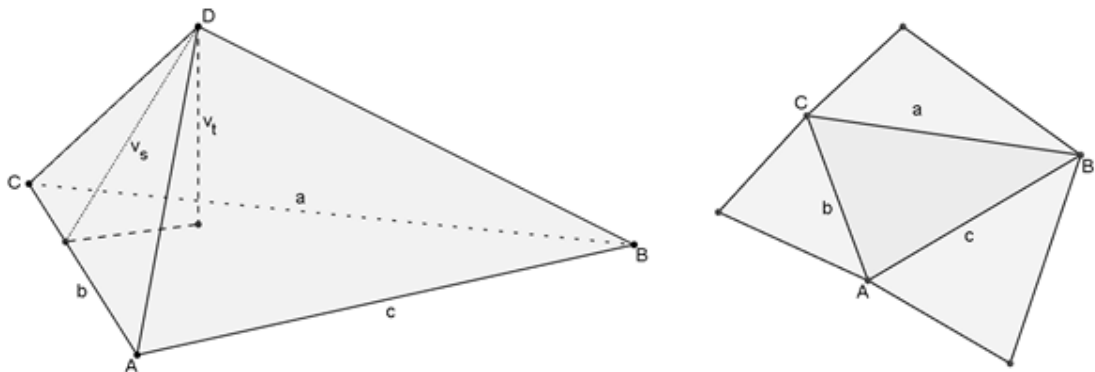
Především v úvodních kapitolách jsem čerpala z publikace *Mnohostěny* od Stanislava Horáka z edice Škola mladých matematiků [13]. Další publikací, která se zabývá vlastnostmi čtyřstěnu a je velmi zajímavá, ale náročná, je bulharsky psaná kniha *Pozoruhodné body ve čtyřstěnu* [18] od Georgiho Paskaleva a Ivana Chobanova.

Mým cílem bylo napsat práci tak, aby byla srozumitelná nejen pro odborníky v oboru matematiky. Všechny definice a tvrzení jsou psány kurzívou. Pokud se v práci nachází přímá citace, je odlišena uvozovkami. U popisu vlastností čtyřstěnu je nutné zapojit prostorovou představivost, čemuž napomáhají názorné obrázky, které jsou vytvořeny v geometrickém programu GeoGebra 3D. V přílohách jsou vlastní fotografie modelů.

Příložené CD obsahuje elektronickou verzi této práce ve formátu pdf, dále jsou zde k dispozici pracovní listy a fotografie modelů.

1 Definice čtyřstěnu

Čtyřstěn, též nazývaný tetraedr, je nejjednodušší trojrozměrné těleso. Je vymezen nejmenším možným počtem bodů, které mohou trojrozměrné těleso definovat, tedy čtyřmi různými body v prostoru. Čtyřstěn je simplex v prostoru. Povrch čtyřstěnu je tvořen čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. Nejjednodušším mnohoúhelníkem v rovině je trojúhelník a říká se mu simplex v rovině [13].



Obrázek 1 - Čtyřstěn a jeho síť

“Čtyřstěn je těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. Jsou-li jeho stěny shodné rovnostranné trojúhelníky, pak se nazývá pravidelný čtyřstěn. Je to mnohostěn s nejmenším počtem stěn. Ve čtyřstěnu existují tři dvojice protějších hran. Zvolíme-li u čtyřstěnu jednu ze stěn za podstavu, dostáváme trojboký jehlan” [21, s. 126].

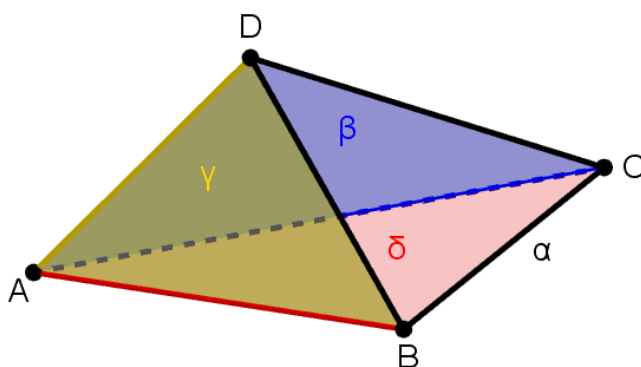
„Čtyřstěn $ABCD$, kde body A, B, C, D neleží v rovině, je průnik poloprostorů $ABCD, ACDB, ABDC, BCDA$ “ [13, s. 3]. (Totéž tvrzení nalezneme i v [18, s. 26].)

Z definice plyne, že čtyřstěn lze omezit čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. Čtyřstěn má šest hran, které jsou buď různoběžné nebo mimoběžné, a čtyři vrcholy. Mimoběžné, nebo též protilehlé, či protější hrany mají často zvláštní význam, proto si tyto trojice hran uvedeme: AB, CD ; AC, BD ; AD, BC .

Roviny omezující čtyřstěn rozdělují prostor na 15 částí. Jedinou konečnou částí je čtyřstěn sám. Další části rozdělíme do tří skupin, z nichž popíšeme vždy jednu část. První skupina obsahuje čtyři části, kterým se říká „nad stěnou“, jednou z nich je část vzniklá z průniku poloprostorů $ABDC, BCDA, CADB$ a poloprostoru

opačného k poloprostoru $ABCD$. Další skupina se skládá ze šesti částí, jimž říkáme „nad hranou“. Jednou z částí je průnik poloprostorů $BCDA$, $ACDB$ a poloprostorů opačných k poloprostorům $ABCD$, $ABDC$. Poslední skupina se skládá ze čtyř částí nacházejících se nad vrcholy čtyřstěnu. Jednou z nich (nad B) je průnik poloprostorů opačných k poloprostorům $BCDA$, $ABDC$, $ABCD$.

Čtyři body v prostoru, které neleží v jedné rovině, určují čtyřstěn. Vrcholy čtyřstěnu budeme značit velkými písmeny, obvykle A, B, C, D . Trojúhelníky vymezené vždy třemi body se nazývají stěny čtyřstěnu a značí se malými řeckými písmeny - $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Stěna α je protilehlá vrcholu A a je vymezena trojúhelníkem BCD . Taktéž stěny β, γ, δ jsou protilehlé vrcholům B, C, D a odpovídají postupně trojúhelníkům ACD, ABD a ABC . Stěnu δ obvykle označujeme jako podstavu čtyřstěnu.



Obrázek 2- Označení stěn čtyřstěnu

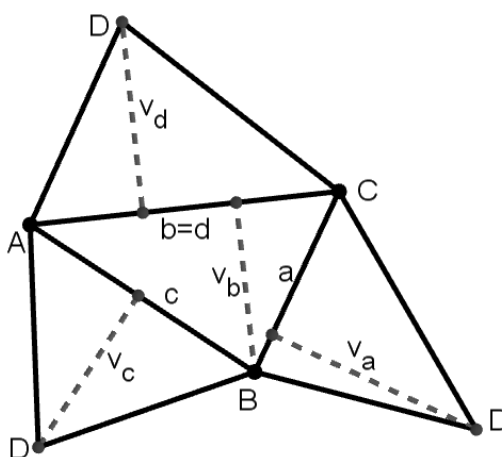
2 Základní vlastnosti obecného čtyřstěnu

V této kapitole se zaměříme na povrch a objem obecného čtyřstěnu, na jeho prvky jako jsou střední příčky, těžiště, ortocentrum a kulové plochy, které jsou prostorovou analogií vlastností trojúhelníku. Odvodíme si zde některé zajímavé vlastnosti těchto pojmů ve čtyřstěnu.

2.1 Povrch čtyřstěnu

Označme hrany podstavy písmeny a, b, c tak, že hrana a leží naproti bodu A , hrana b leží naproti bodu B a hrana c leží naproti bodu C . Povrch čtyřstěnu se vypočítá jako součet obsahů jednotlivých stěn, tedy

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c + \frac{1}{2} \cdot d \cdot v_d = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot v_a + b \cdot v_b + c \cdot v_c + d \cdot v_d).$$

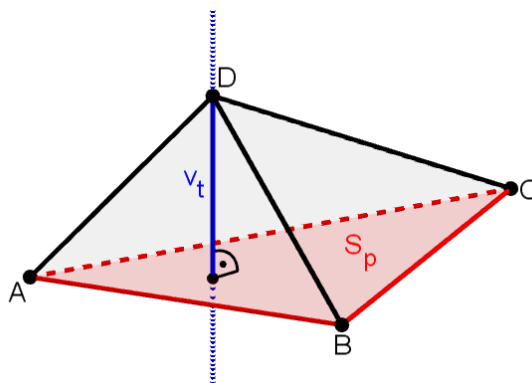


Obrázek 3 - Povrch čtyřstěnu

2.2 Objem čtyřstěnu

Vyjdeme z poznatku, že čtyřstěn $ABCD$ je trojboký jehlan a použijeme vzoreček pro výpočet objemu jehlanu $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v_t$, kde S_p je obsah podstavy a v_t je tělesová výška. Obsah podstavy vypočítáme pomocí vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku přes dvě strany a úhel mezi nimi např. $S_p = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Objem čtyřstěnu tedy vypočítáme pomocí vzorce $V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \cdot v_t$.



Obrázek 4- Objem čtyřstěnu

2.3 Středy hran a střední příčky

Úsečky spojující středy protějších hran čtyřstěnu se vzájemně půlí [13].

Středy všech tří úseček spojujících vždy středy dvou protějších hran splývají [21].

Důkaz: [13], [18]

Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, středy hran AB, BC, CD, AD, BD, AC označme po řadě P, R, S, T, U, V . Body P, R, S, T vymezují čtyřúhelník, protože žádné tři z nich neleží v přímce. Musíme rozhodnout, zda se jedná o čtyřúhelník zborcený či rovinný. Zaměříme se na stěny čtyřstěnu. Z definice středních příček víme, že každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s její protější stranou a její délka je rovna polovině délky této strany, tj. platí

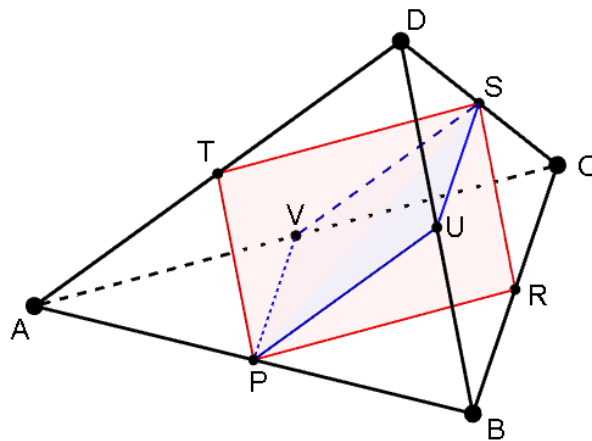
$$PR \parallel AC, ST \parallel AC, PT \parallel BD, SR \parallel BD,$$

$$|PR| = \frac{1}{2} \cdot |AC|, |ST| = \frac{1}{2} \cdot |AC|, |PT| = \frac{1}{2} \cdot |BD|, |SR| = \frac{1}{2} \cdot |BD| \quad [4].$$

Čtyřúhelník $PRST$ je tedy rovnoběžník a jeho úhlopříčky PS, RT , které jsou zároveň spojnicemi protějších hran čtyřstěnu, se vzájemně půlí.

Stejným způsobem bychom dokázali, že body P, U, S, V tvoří rovnoběžník a spojnice protilehlých hran PS, UV se vzájemně půlí.

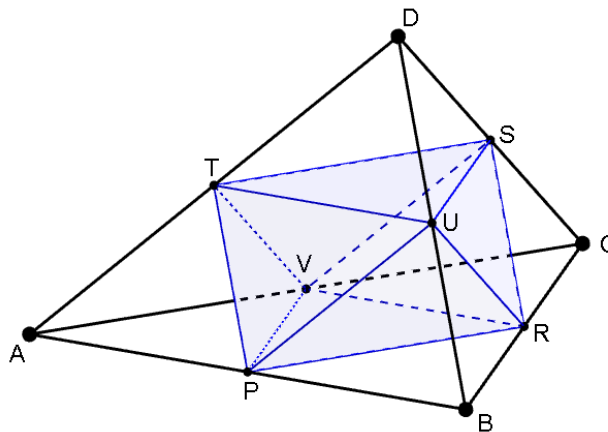
Rovnoběžníky $PRST$ a $PUSV$ mají společnou úhlopříčku PS , tudíž se půlí i úsečky RT a UV .



Obrázek 5- Střední příčky čtyřstěnu

Středy hran čtyřstěnu jsou vrcholy osmistěnu, který má tyto dvě vlastnosti:

- ke každé jeho hraně existuje právě jedna hrana s ní rovnoběžná a shodná
- objem tohoto osmistěnu je roven polovině objemu daného čtyřstěnu [13].



Obrázek 6- Osmistěn vepsaný čtyřstěnu

Důkaz: [13]

Z předchozího příkladu víme, že

$$PR \parallel AC, ST \parallel AC \text{ a zároveň } |PR| = |ST|.$$

S hranou AC již nemůže být rovnoběžná žádná další hrana osmistěnu, neboť ostatní hrany jsou s hranou AC mimoběžné nebo různoběžné. Vzhledem k tomu, že žádné tři z bodů P, R, S, T, U, V neleží v přímce a žádných pět z nich v rovině, můžeme mluvit o osmistěnu $PRSTUV$. Tím jsme dokázali první část věty.

Objem čtyřstěnu si označme V_4 a objem osmistěnu V_8 . Body P, R, S, T, U, V vymezují ve čtyřstěnu $ABCD$ osmistěn $PRSTUV$ a čtyřstěny $APVT, PBRU, RCVS$ a $TUSD$. Podstavy těchto čtyřstěňů mají obsah roven jedné čtvrtině obsahu stěn čtyřstěnu $ABCD$. A příslušné výšky jsou rovny polovině výšky čtyřstěnu $ABCD$.

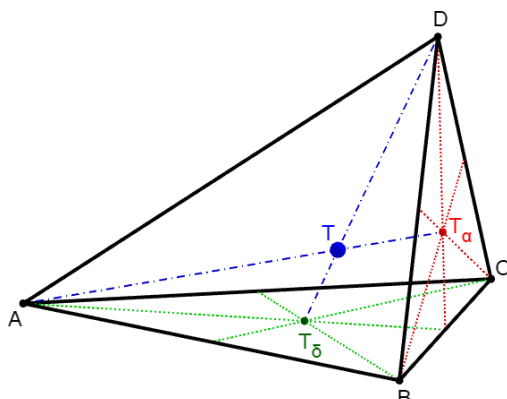
Objem osmistěnu tedy vyjádříme snadno jako rozdíl objemů čtyřstěňů od objemu čtyřstěnu $ABCD$

$$V_8 = V_4 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot V_4 = \frac{1}{2} \cdot V_4,$$

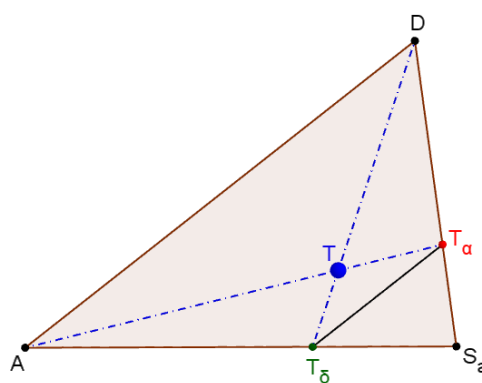
čímž jsme dokázali i druhou část věty.

2.4 Těžiště

Všechny těžnice čtyřstěnu procházejí jedním bodem – těžištěm čtyřstěnu, který každou těžnici dělí v poměru 3:1, přičemž větší díl je při vrcholu [13], [18].



Obrázek 7 - Těžiště čtyřstěnu



Obrázek 8 - Těžiště čtyřstěnu – důkaz

Důkaz:

V daném čtyřstěnu sestrojme nejprve těžiště stěn ABC a BCD , která označíme po řadě T_δ a T_α . Těžnice AT_δ stěny ABC a těžnice DT_α stěny BCD se protínají v bodě S_a , středu hrany BC . Proto těžnice AT_α a DT_δ leží v téže rovině (rovině AS_aD) a jsou různoběžné, jejich průsečík označme T . Všimněme si, že trojúhelník $S_aT_\delta T_\alpha$ je podobný s trojúhelníkem S_aAD a taktéž trojúhelník $TT_\delta T_\alpha$ je podobný s trojúhelníkem TDA . Přičemž platí

$$T_{\delta}T_{\alpha} \parallel AD.$$

Úsečka AS_{α} je těžnicí trojúhelníku ABC a bod T_{δ} je těžištěm tohoto trojúhelníku. Například v [4] se dočteme, že těžiště dělí těžnici v poměru 2 : 1. Z první podobnosti dostáváme vztah

$$\frac{|S_{\alpha}T_{\delta}|}{|S_{\alpha}A|} = \frac{|T_{\alpha}T_{\delta}|}{|DA|},$$

a tedy

$$\frac{|T_{\alpha}T_{\delta}|}{|DA|} = \frac{1}{3}.$$

Z podobnosti druhých dvou trojúhelníků plyne

$$\frac{|TT_{\delta}|}{|TD|} = \frac{|T_{\alpha}T_{\delta}|}{|AD|},$$

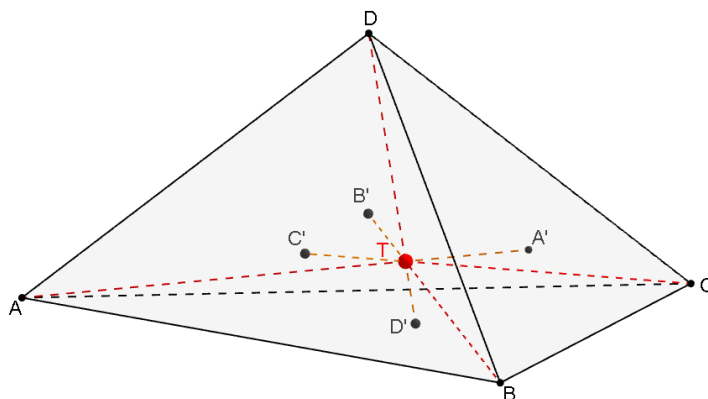
proto platí

$$\frac{|TT_{\delta}|}{|TD|} = \frac{1}{3}.$$

Dokázali jsme, že těžnice AT_{α} a DT_{δ} jsou různoběžné a že jejich průsečík T dělí každou z nich v poměru 1:3. Obdobně bychom důkaz provedli i se zbylými těžnicemi jdoucími vrcholy B a C . Dospěli bychom k závěru, že bod T je těžištěm čtyřstěnu a každou těžnici dělí v poměru 1:3, přičemž leží v $\frac{3}{4}$ délky těžnice od vrcholu.

„Je dán čtyřstěn $ABCD$. Necht' T je libovolný jeho vnitřní bod. Přímky AT, BT, CT, DT protínají protější stěny postupně v bodech A', B', C', D' . Dokažte, že platí

$$\frac{|TA'|}{|AA'|} + \frac{|TB'|}{|BB'|} + \frac{|TC'|}{|CC'|} + \frac{|TD'|}{|DD'|} = 1'' \quad [13, s. 30].$$



Obrázek 9 - Těžiště čtyřstěnu – vlastnosti

Důkaz: [13]

Bod T je vrcholem čtyř čtyřstěnu $ABCT, ABDT, ACDT, BCDT$ uvnitř čtyřstěnu $ABCD$. Poměry délek stran můžeme vyjádřit jako poměry objemů odpovídajících čtyřstěnu. Objemy těchto čtyřstěnu postupně označme V_1, V_2, V_3, V_4 a jejich výšky h_1, h_2, h_3, h_4 . Objem čtyřstěnu $ABCD$ označme V a jeho výšky na stěny BCD, ACD, ABD, ABC označme v_a, v_b, v_c, v_d . O objemech platí $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$.

Poměr $\frac{|TA'|}{|AA'|}$ můžeme vyjádřit jako poměr objemů čtyřstěnu $BCDT$ a $ABCD$, protože čtyřstěny mají shodnou stěnu BCD . Můžeme tedy psát

$$\frac{|TA'|}{|AA'|} = \frac{h_4}{v_a} = \frac{BCD \cdot h_4}{BCD \cdot v_a} = \frac{V_4}{V}.$$

Cyklickou záměnou získáme zbylé vztahy, a to

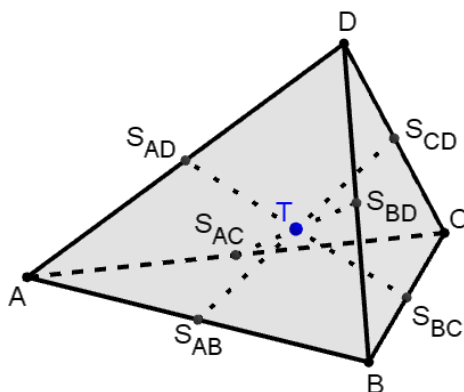
$$\frac{|TB'|}{|BB'|} = \frac{V_3}{V}, \frac{|TC'|}{|CC'|} = \frac{V_2}{V}, \frac{|TD'|}{|DD'|} = \frac{V_1}{V}.$$

Sečtením všech čtyř vztahů a s použitím rovnice o objemech, obdržíme vztah

$$\frac{|TA'|}{|AA'|} + \frac{|TB'|}{|BB'|} + \frac{|TC'|}{|CC'|} + \frac{|TD'|}{|DD'|} = \frac{V_4}{V} + \frac{V_3}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_1}{V} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V} = 1,$$

čímž je věta dokázána.

“Těžiště čtyřstěnu je bod, v němž se protínají spojnice středů protějších hran” [21, s. 126].



Obrázek 10 - Těžiště jako průsečík středních příček

Důkaz:

V předchozí kapitole jsme si dokázali, že úsečky spojující středy protějších hran čtyřstěnu se vzájemně půlí. Nyní chceme dokázat, že průsečík těchto úseček je právě těžiště čtyřstěnu. Necht' jsou dány souřadnice bodů čtyřstěnu

$$A = [x_A; y_A; z_A], B = [x_B; y_B; z_B], C = [x_C; y_C; z_C], D = [x_D; y_D; z_D].$$

Souřadnice středů hran vypočítáme jako průměr odpovídajících souřadnic krajních bodů.

Pro střed hrany AB tedy platí

$$S_{AB} = \frac{A + B}{2} = \left[\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right].$$

Pro zbylé středy hran platí následující rovnosti

$$S_{AC} = \frac{A + C}{2}, S_{BC} = \frac{B + C}{2}, S_{AD} = \frac{A + D}{2}, S_{BD} = \frac{B + D}{2}, S_{CD} = \frac{C + D}{2}.$$

Již víme, že úsečky spojující středy protějších hran čtyřstěnu se vzájemně půlí. Těžiště T je tedy středem těchto úseček. Je-li T střed úsečky $S_{AB}S_{CD}$, pak pro jeho souřadnice platí vztah

$$T_{S_{AB}S_{CD}} = \frac{S_{AB} + S_{CD}}{2} = \frac{\frac{A + B}{2} + \frac{C + D}{2}}{2} = \frac{A + B + C + D}{4}.$$

Pro zbylé dvě úsečky má těžiště následující souřadnice

$$T_{S_{AC}S_{BD}} = \frac{S_{AC} + S_{BD}}{2} = \frac{A + B + C + D}{4} = T_{S_{BC}S_{AD}} = \frac{S_{BC} + S_{AD}}{2}.$$

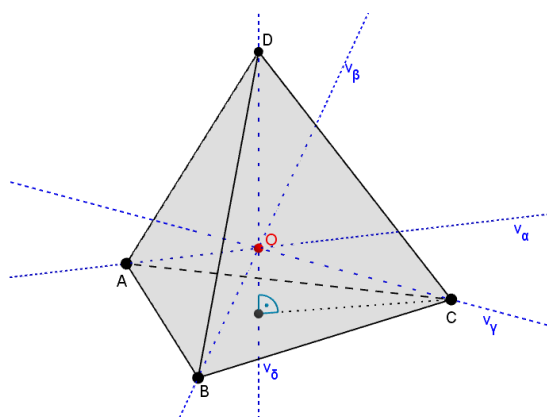
Z toho vyplývá, že úsečky spojující středy protějších hran čtyřstěnu se skutečně vzájemně půlí a procházejí týmž bodem. Jak se dočteme například v [8], [18] a v [30], pro souřadnice těžiště T platí rovnost $T = \frac{A+B+C+D}{4}$, což jsme chtěli dokázat.

2.5 Ortocentrum

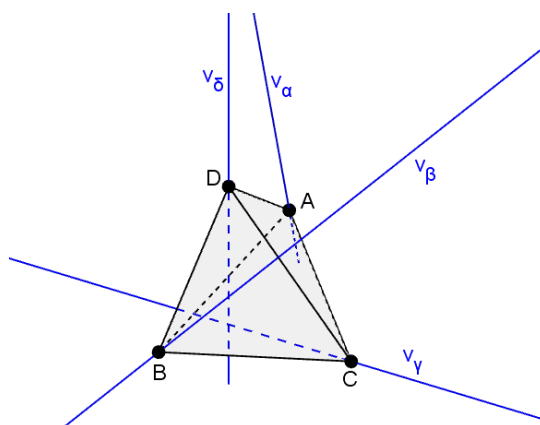
Obdobně jako u trojúhelníku je výškou čtyřstěnu úsečka spojující vrchol s patou kolmice vedené tímto bodem na protější stěnu. Výšky v trojúhelníku se protínají vždy právě v jednom bodě, ale u čtyřstěnu to tak být nemusí [30]. V prostoru totiž může nastat mimoběžnost přímek, se kterou se v rovině nesetkáme. Proto existují i čtyřstěny, které nemají společný průsečík výšek. Výjimkou je pravidelný čtyřstěn nebo tzv. pravoúhlý čtyřstěn – čtyřstěn, jehož tři stěny tvoří pravoúhlé trojúhelníky s pravým úhlem u společného vrcholu těchto stěn.

Nejprve si uvedeme podmínku pro existenci ortocentra ve čtyřstěnu.

Ortocentrum čtyřstěnu existuje právě tehdy, když každé dvě protější hrany čtyřstěnu leží na kolmých přímkách [18], [26].



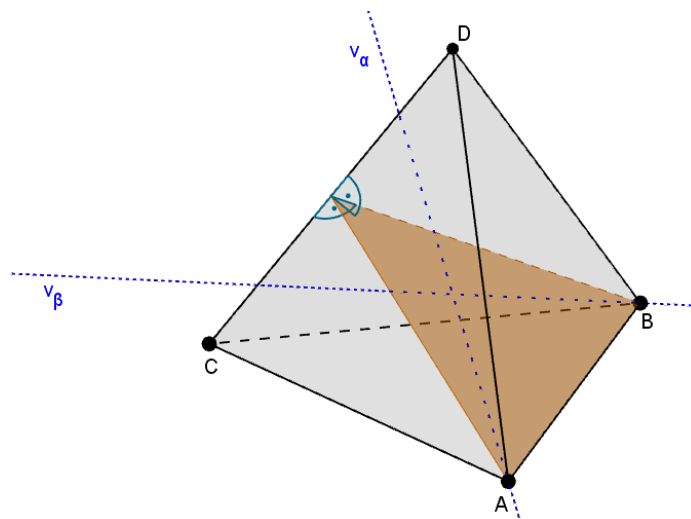
Obrázek 11 - Čtyřstěn s ortocentrem



Obrázek 12 - Čtyřstěn bez ortocentra

2.5.1 Podmínky pro existenci ortocentra – stereometrické odvození [18]

Předpokládejme nejdříve, že $ABCD$ je čtyřstěn s ortocentrem. Potom všechny přímky, na kterých leží výšky čtyřstěnu, mají společný bod O (ortocentrum). Bod O je tedy průsečíkem přímek v_α a v_β . Jelikož přímka CD leží v rovině stěny α a přímka v_α je kolmá na rovinu α , je přímka v_α kolmá na přímkou CD . Podobně také přímka v_β je kolmá na přímkou CD , a proto je přímka CD kolmá na rovinu (v_α, v_β) .



Obrázek 13 - Dvě různoběžné výšky čtyřstěnu

Protože přímka AB leží v rovině (v_α, v_β) a přímka CD je kolmá na všechny její přímky, je přímka CD kolmá na přímkou AB .

Obdobně lze dokázat, že z předpokladu existence ortocentra vyplývá kolmost každých dvou přímek nesoucích protější hrany čtyřstěnu.

Nyní předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřstěn, jehož každé dvě protější hrany leží na navzájem kolmých přímkách. Víme, že přímky v_α a v_β jsou kolmé na přímkou CD , a z předpokladu vyplývá, že i přímka AB je kolmá na přímkou CD . Tedy přímky v_α , v_β a AB jsou kolmé na jednu přímku, přímkou CD . Proto přímky v_α , v_β , AB musí ležet v navzájem rovnoběžných rovinách. Protože však jsou přímky v_α, AB a v_β, AB různoběžné, musí všechny tři přímky ležet v jedné rovině. Přímky, na kterých leží výšky čtyřstěnu, nemohou být rovnoběžné, a proto jsou přímky v_α a v_β různoběžné. Obdobně ukážeme, že z předpokladu vyplývá různoběžnost každých dvou přímek nesoucích výšky. A jak již víme, v takovém případě (za předpokladu, že přímky neleží v jedné rovině, což výšky ve čtyřstěnu nemohou) mají všechny čtyři přímky jeden společný bod, ortocentrum O .

Obdobným způsobem lze ukázat, že postačující podmínkou pro existenci ortocentra čtyřstěnu je kolmost pouze dvou párů protějších hran. Viz kapitola 3.2, která je věnována ortocentrickému čtyřstěnu.

2.6 Další analogie ortocentra trojúhelníku ve čtyřstěnu

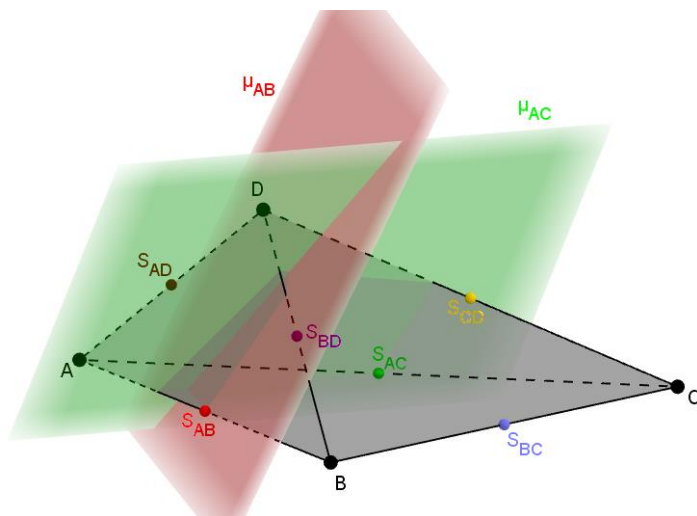
Na úvod si uvedeme dva základní způsoby zavedení ortocentra trojúhelníku. Prvním z nich je definice ortocentra jako společného bodu přímků procházejících vrcholy kolmo na protější stranu trojúhelníku. Druhá definice je méně obvyklá, ale za to je velmi zajímavá. Uvažujme trojúhelník ABC a kružnice k_a, k_b a k_c , jejichž průměry jsou strany trojúhelníku ABC . Ortocentrum trojúhelníku ABC je potenčním středem kružnic k_a, k_b, k_c [38]. Tuto vlastnost ortocentra trojúhelníku lze považovat za definici „bodu O “ a vhodně pak toto zavedení ortocentra využít při hledání prostorových analogií ve čtyřstěnu.

2.6.1 Mongeův bod

Jak již bylo řečeno, přirozenou analogií ortocentra je průsečík přímků nesoucích výšky čtyřstěnu. Tyto přímky však v obecném čtyřstěnu jeden společný bod nemají (viz Obrázek 12) [30]. Čtyřstěny, jejichž výšky se protínají v jednom bodě, nazýváme ortické, resp. ortocentrické (viz Obrázek 11) – pro tyto čtyřstěny je analogií ortocentra trojúhelníku právě průsečík přímků nesoucích výšky, tj. ortocentrum čtyřstěnu. Čtyřstěny, jejichž výšky se neprotínají v jednom bodě, nazýváme neortické.

U neortických čtyřstěněů můžeme zavést bod, který v mnohém může ortocentrum „nahradit“ a má některé podobné vlastnosti. Je to tzv. Mongeův bod [8].

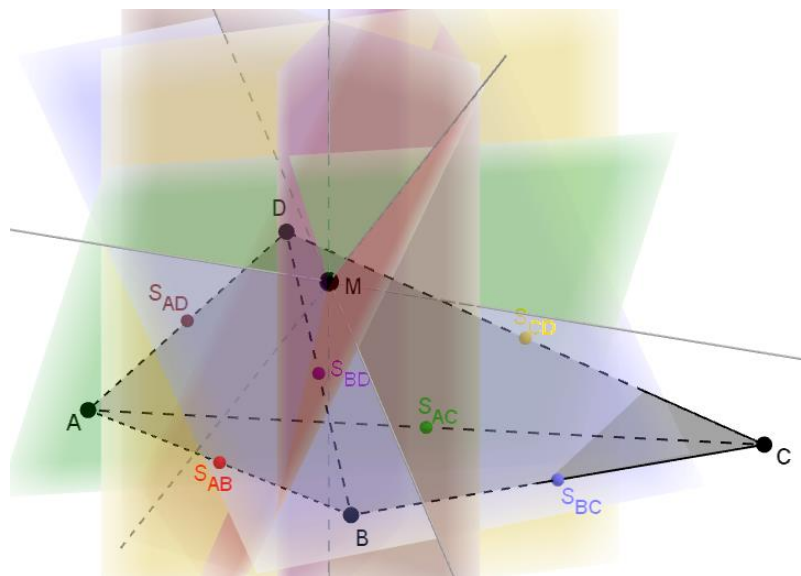
Nejprve si definujme Mongeovu rovinu – je to rovina procházející středem hrany čtyřstěnu kolmo na přímkou nesoucí protější hranu. V každém čtyřstěnu lze tedy definovat



Obrázek 14- Mongeovy roviny

šest Mongeových rovin $\mu_{AB}, \mu_{BC}, \mu_{AC}, \mu_{AD}, \mu_{BD}$ a μ_{CD} , kde např. rovina μ_{AB} prochází středem hrany AB čtyřstěnu $ABCD$ a je kolmá na přímkou protější hrany CD [3], [18].

Mongeův bod M čtyřstěnu $ABCD$ je společný bod všech šesti Mongeových rovin čtyřstěnu (viz Obrázek 15) [3], [18].



Obrázek 15 - Mongeovy roviny a Mongeův bod

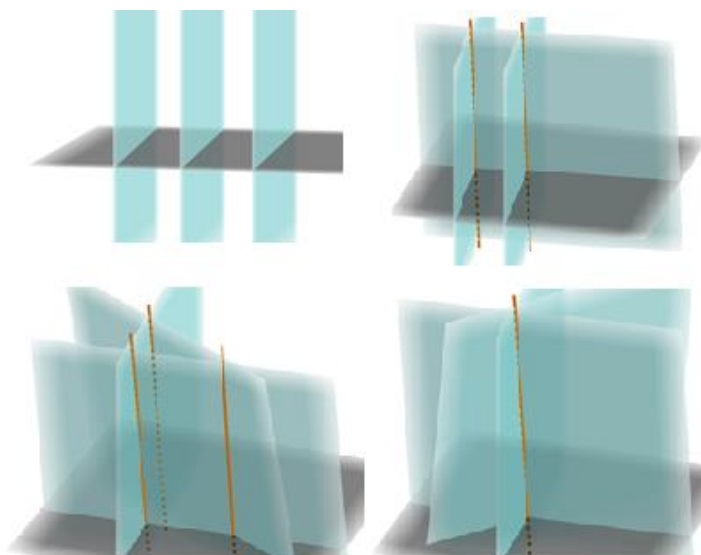
Abychom pochopili vztah mezi Mongeovým bodem čtyřstěnu a jeho ortocentrem, je potřeba provést jednoduchou prostorovou úvahu. Je-li čtyřstěn $ABCD$ ortický, tedy jeho protější hrany leží na kolmých přímkách, obsahují Mongeovy roviny μ celé hrany, jejichž středy tyto roviny procházejí. V tom případě obsahují roviny μ výšky čtyřstěnu (každá Mongeova rovina obsahuje dvě přímky nesoucí výšky čtyřstěnu). Společný bod výšek – ortocentrum O – musí být i společným bodem Mongeových rovin, tedy $M \equiv O$ [8], [9], [18].

Mongeův bod je obecnější pojem, který je definován pro obecný čtyřstěn. Mongeův bod ortického čtyřstěnu budeme i nadále nazývat ortocentrum čtyřstěnu, neboť tento název lépe vystihuje přímou analogii s ortocentrem trojúhelníku [8].

Důkaz existence Mongeova bodu

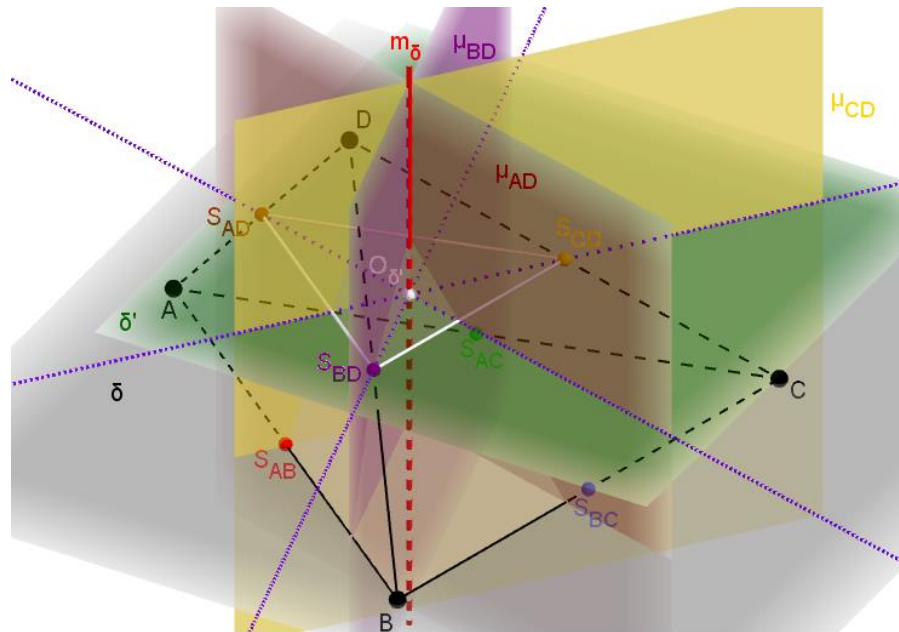
Původní důkaz existence Mongeova bodu, který uvádí Crabbs v [3], je založen na stereometrických úvahách. Přesto se v dostupné literatuře mnohem častěji setkáme s důkazy početními. Odvození existence Mongeova bodu, které zde uvedeme, se v základních myšlenkách shoduje s Mongeovým důkazem.

Připomeňme si nejprve, jaké jsou možné vzájemné polohy tří rovin kolmých na jednu rovinu. Mějme tři Mongeovy roviny procházející středy hran, které vycházejí z jednoho vrcholu čtyřstěnu $ABCD$ – např. roviny $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$. Každá z těchto rovin je kolmá na přímkou, která leží v rovině $\delta(A, B, C)$. Všechny tři uvažované roviny jsou tedy kolmé na rovinu δ . Vzájemná poloha rovin $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ musí tedy být jedna ze znázorněných na Obrázku 16.



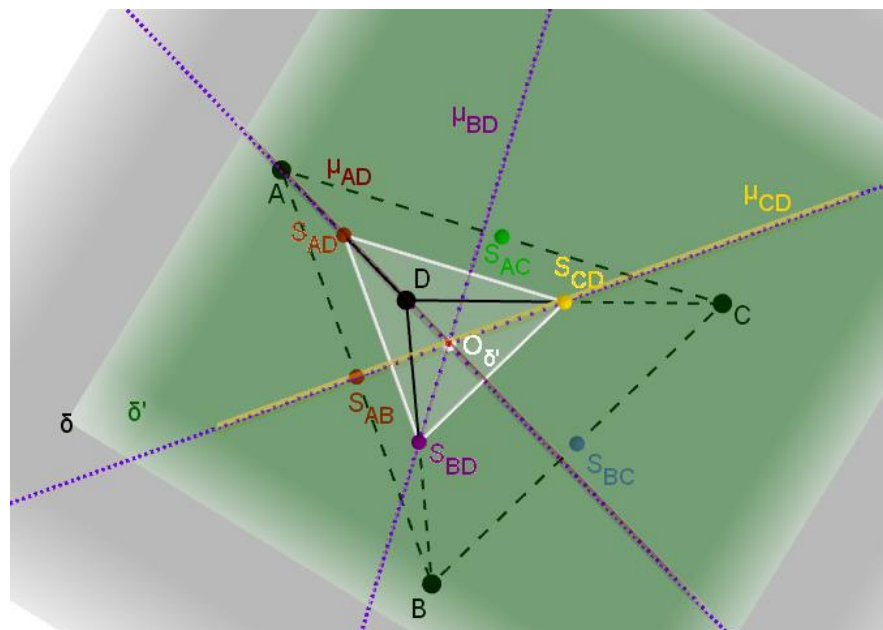
Obrázek 16 - Možné vzájemné polohy tří rovin kolmých na jednu rovinu

Základní myšlenka důkazu existence Mongeova bodu je založena na tom, že tyto tři Mongeovy roviny mají jednu společnou přímkou. Jak je zřejmé z Obrázku 16, pokud existuje nějaká průsečnice rovin μ , je kolmá na rovinu δ . Stačí tedy ukázat, že roviny $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ mají alespoň jeden společný bod. Potom mají společnou celou přímkou. Body S_{AD}, S_{BD} a S_{CD} , kterými procházejí námi uvažované Mongeovy roviny, určují rovinu δ' , která je rovnoběžná s rovinou δ . Strany trojúhelníku $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$ jsou rovnoběžné s přímkami AB, BC, AC (Obrázek 17).



Obrázek 17 - Mongeovy roviny $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ se protínají v jednom bodě

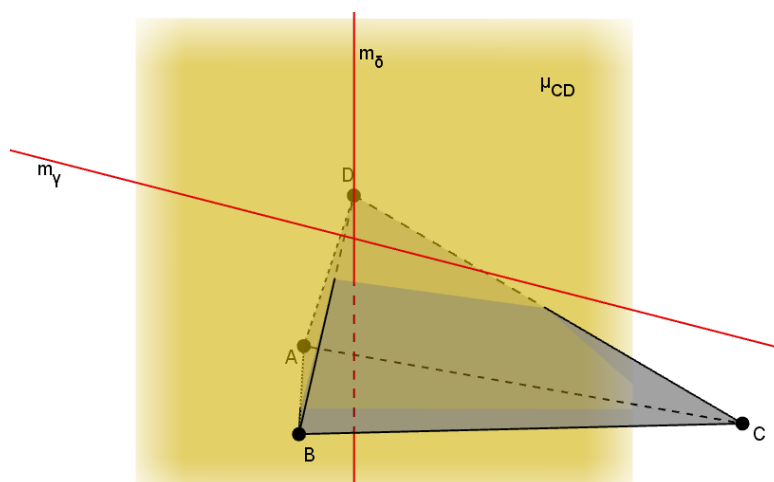
Mongeovy roviny $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ jsou tedy kolmé na přímky $S_{BD}S_{CD}, S_{AD}S_{CD}$ a $S_{AD}S_{BD}$. Průsečnice těchto Mongeových rovin s rovinou δ' jsou přímky, na kterých leží výšky v trojúhelníku $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$ (na Obrázku 17 jsou znázorněny fialovou barvou). Výšky v trojúhelníku $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$ se protínají v jeho ortocentru $O_{\delta'}$. Bod $O_{\delta'}$ je tedy společným bodem rovin $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$. Ty proto mají společnou přímku m_{δ} , kterou budeme nazývat Mongeova osa stěny ABC .



Obrázek 18 - Mongeovy roviny $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ pohled shora

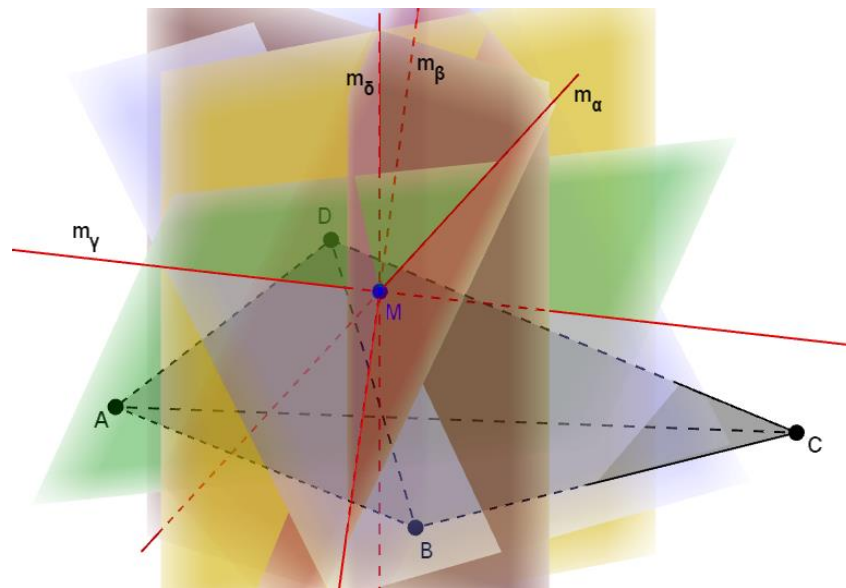
Analogicky lze ukázat, že každé tři Mongeovy roviny procházející středy hran, které vycházejí z jednoho vrcholu čtyřstěnu, mají společnou přímku – Mongeovu osu protější stěny.

Mongeovy osy $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma, m_\delta$ jsou tedy přímky kolmé na jednotlivé stěny čtyřstěnu $ABCD$. Je zřejmé, že tyto přímky nemohou ležet v jedné rovině a také, že žádné dvě osy nemohou být vzájemně rovnoběžné. Dále si uvědomme, že každé dvě Mongeovy osy leží v jedné společné Mongeově rovině. Např. přímka m_δ je průsečnicí Mongeových rovin $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ a přímka m_γ je průsečnicí rovin $\mu_{AC}, \mu_{BC}, \mu_{CD}$. Obě tyto Mongeovy osy leží v rovině μ_{CD} (viz Obrázek 19).



Obrázek 19 - Mongeovy osy roviny μ_{CD}

Přímky m_γ i m_δ tedy leží v jedné rovině a zároveň nejsou rovnoběžné, proto mají průsečík. Lze ukázat, že každé dvě Mongeovy roviny jsou různoběžné. Mongeovy osy $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma, m_\delta$ jsou takové čtyři přímky v prostoru, které neleží v jedné rovině a každé dvě jsou různoběžné. Z toho plyne, že tyto čtyři přímky mají jeden společný bod. Společný bod Mongeových os je zároveň společným bodem šesti Mongeových rovin čtyřstěnu – Mongeův bod M [19].



Obrázek 20 - Mongeův bod čtyřstěnu

Je-li čtyřstěn ortocentrický, pak se jeho ortocentrum shoduje s Mongeovým bodem [18].

V ortických čtyřstěnech leží protější hrany na kolmých přímkách, a proto Mongeovy roviny obsahují vždy celou hranu, jejímž středem procházejí. Každá Mongeova osa tedy prochází vrcholem, a je to proto přímka nesoucí výšku čtyřstěnu. Mongeův bod ortického čtyřstěnu proto splývá s jeho ortocentrem zavedeným výše.

Pro neortické čtyřstěny je Mongeův bod prostorovou analogií ortocentra trojúhelníku. Jak uvidíme v dalších kapitolách, lze v neortických čtyřstěnech Mongeův bod využít např. při hledání prostorové analogie kružnice devíti bodů.

2.6.2 Ortocentrum jako potenční střed

V úvodu této kapitoly jsme si řekli, že ortocentrum trojúhelníku lze zavést také jako potenční střed tří kružnic. Obdobným způsobem lze postupovat i u čtyřstěnu. Nejprve si připomeňme pojmy mocnost bodu ke kružnici, chordála, potenční střed a jejich prostorové analogie, se kterými budeme v následující části pracovat.

Mocnost bodu ke kružnici, mocnost bodu ke kulové ploše

„Pro daný bod M a danou kružnici $k \equiv (S; r)$ se číslo m , pro které platí $m = v^2 - r^2$, kde $v = |SM|$, nazývá mocnost bodu M ke kružnici k . V rovině je dána kružnice k a bod M . Necht' p je libovolná přímka procházející bodem M a protínající kružnici k v bodech A, B . Potom platí $|AM| \cdot |BM| = |m|$, kde m je mocnost bodu M ke kružnici k . Pro M vně kružnice k platí $m > 0$, pro bod $M \in k$ platí $m = 0$ a pro bod M uvnitř k platí $m < 0$. Pokud se přímka p dotýká kružnice k v bodě T , platí $|MT|^2 = m$ “ [6, s.1].

Důkaz: [6], [12]

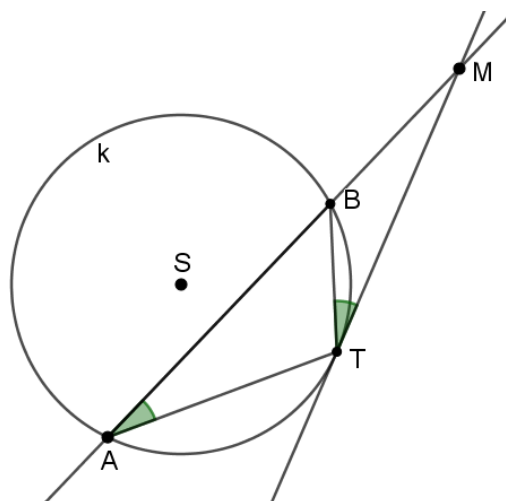
Je dána kružnice k a libovolný bod M ležící vně kružnice. Bodem M vedeme libovolnou sečnu a tečnu ke kružnici k . Konvexní úhel MTB je úsekový úhel a konvexní úhel MAT je obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku BT , tyto úhly jsou tedy shodné. Konvexní úhel BMT je společný úhel trojúhelníků MTB a MAT . Podle věty *uu* jsou tyto trojúhelníky podobné, a proto

$$|MB| : |MT| = |MT| : |MA|$$

neboli

$$|MB| \cdot |MA| = |MT|^2,$$

což jsme chtěli dokázat.



Obrázek 21 - Mocnost bodu ke kružnici, bod M vně

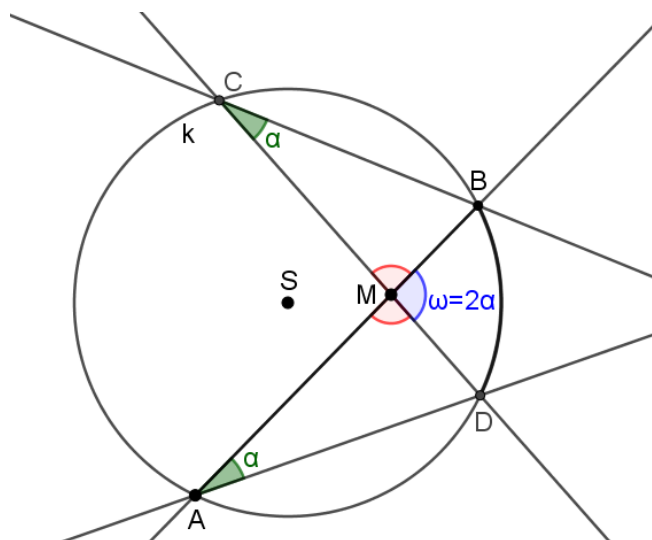
Pokud je bod M vnitřní bod kružnice k , vedeme tímto bodem dvě libovolné sečny. Konvexní úhly DAB a DCB jsou obvodové úhly příslušející k menšímu oblouku DB , a proto jsou shodné. Konvexní úhly AMD a BMC jsou vrcholové úhly při vrcholu M , tudíž jsou shodné. Podle věty uu jsou tyto trojúhelníky podobné, a proto

$$|MC| : |MA| = |MB| : |MD|$$

neboli

$$|MC| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MA|,$$

což jsme chtěli dokázat.

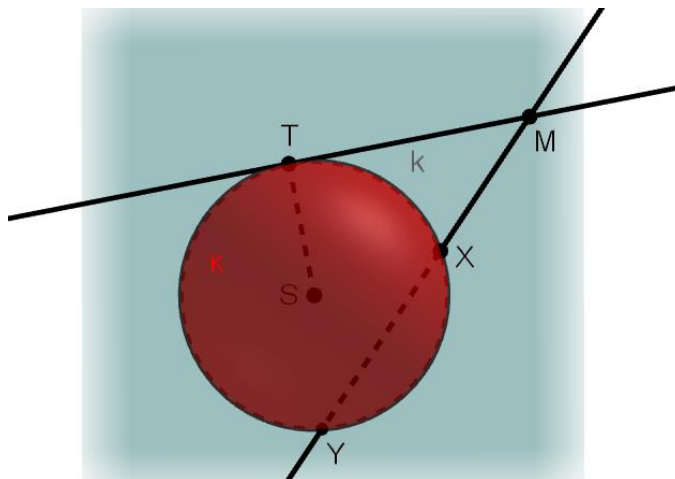


Obrázek 22 - Mocnost bodu ke kružnici, bod M uvnitř

Prostorová analogie mocnosti bodu [11, s. 13]

Bod M je libovolný bod, přímka p prochází bodem M a protíná kulovou plochu $\kappa(S; r)$ v bodech X a Y , nebo se jí dotýká v bodě T . Potom je mocnost bodu M ke kulové ploše κ

$$m(M, \kappa) = |MX| \cdot |MY| = |MT|^2.$$



Obrázek 23 - Mocnost bodu ke kulové ploše

Důkaz:

Kulovou plochu κ můžeme vytvořit otáčením kružnice $k(S, r)$ kolem osy MS . Vztah mocnosti platí i pro všechny kružnice kulové plochy κ vzniklé otáčením kružnice k kolem osy MS za předpokladu, že platí $M \neq S$. Číslo $|MS|^2 - r^2$ udává mocnost bodu M k ploše κ . Je-li $M \equiv S$, otáčíme kružnici k kolem libovolné přímky procházející bodem S .

Chordála kružnic

„Množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím, se nazývá chordála. Chordála nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů. Pro dvojici různých soustředných kružnic je chordála prázdná množina (někdy se též říká, že chordála takových kružnic neexistuje)“ [6, s.1].

Důkaz: [12]

Jestliže dané dvě kružnice mají společné dva různé body A, B , je chordála přímka AB . Mocnosti bodů A, B jsou k oběma kružnicím stejné, neboť platí

$$m(A, k_1) = m(A, k_2) = m(B, k_1) = m(B, k_2) = 0.$$

Body A, B jsou proto hledanou množinou bodů. Pokud na přímce AB zvolíme libovolný bod P tak, že nesplývá s žádným z bodů A, B , jeho mocnost ke kružnicím k_1, k_2 je rovna součinu $|PA| \cdot |PB|$. Z toho vyplývá, že všechny body přímky AB mají stejnou mocnost k oběma kružnicím.

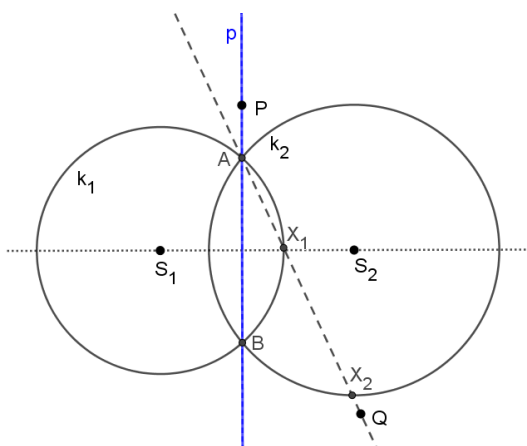
Nyní si zvolme libovolný bod Q různý od A , o němž předpokládáme, že má stejnou mocnost k oběma kružnicím. Spojíme-li bod Q s bodem A , pak průsečíky s kružnicemi k_1, k_2 označme X_1, X_2 . Mocnost bodu Q vzhledem ke kružnicím k_1, k_2 jsou

$$m(Q, k_1) = |QA| \cdot |QX_1|, \quad m(Q, k_2) = |QA| \cdot |QX_2|.$$

Předpokládali jsme, že mocnost bodu Q je k oběma kružnicím stejná, pak platí

$$|QA| \cdot |QX_1| = |QA| \cdot |QX_2|,$$

ale to nastane pouze tehdy když $X_1 \equiv X_2 \equiv B$. To ale znamená, že bod Q musí ležet na přímce AB .



Obrázek 24 - Chordála dvou kružnic se společnými body

Pokud se kružnice navzájem dotýkají v bodě A , pak je chordála tečnou v tomto společném bodě. Důkaz je stejný jako v předešlém případě.

Jestliže kružnice nemají žádný společný bod a každá leží vně druhé, půlí chordála délku společné tečny t obou kružnic. Body dotyku tečny t s oběma kružnicemi označme T_1, T_2 a střed úsečky T_1T_2 označme K . Jeho mocnost ke kružnicím k_1, k_2 je

$$(1) \quad m(K, k_1) = |KT_1|^2 = |KS_1|^2 - r_1^2 = |KX|^2 + |XS_1|^2 - r_1^2$$

$$(2) \quad m(K, k_2) = |KT_2|^2 = |KS_2|^2 - r_2^2 = |KX|^2 + |XS_2|^2 - r_2^2,$$

kde bod X je průsečík spojnice středů kružnic a chordály. A protože jsou obě mocnosti stejné, plyne z toho

$$(3) \quad |XS_1|^2 - r_1^2 = |XS_2|^2 - r_2^2.$$

Zvolme na přímce p libovolný bod $P \neq X$, který neleží na žádné společné tečně kružnic k_1, k_2 . Jeho mocnosti k daným kružnicím jsou

$$m(P, k_1) = |PS_1|^2 - r_1^2 = |PX|^2 + |XS_1|^2 - r_1^2,$$

$$m(P, k_2) = |PS_2|^2 - r_2^2 = |PX|^2 + |XS_2|^2 - r_2^2.$$

S ohledem na rovnici (3) dostaneme

$$m(P, k_2) = |PX|^2 + |XS_1|^2 - r_1^2 = m(P, k_1).$$

Zvolme bod Q , který má tutéž mocnost ke kružnicím k_1, k_2 . Platí tedy

$$(4) \quad m(Q, k_1) = m(Q, k_2).$$

Označme $\sphericalangle QXS_2 = \omega$. Potom s využitím kosinové věty dostáváme

$$m(Q, k_1) = |QS_1|^2 - r_1^2 = |QX|^2 + |XS_1|^2 + 2 \cdot |QX| \cdot |XS_1| \cdot \cos \omega - r_1^2,$$

$$m(Q, k_2) = |QS_2|^2 - r_2^2 = |QX|^2 + |XS_2|^2 - 2 \cdot |QX| \cdot |XS_2| \cdot \cos \omega - r_2^2.$$

A jelikož platí rovnice (4), proto

$$|XS_1|^2 + 2 \cdot |QX| \cdot |XS_1| \cdot \cos \omega - r_1^2 = |XS_2|^2 - 2 \cdot |QX| \cdot |XS_2| \cdot \cos \omega - r_2^2.$$

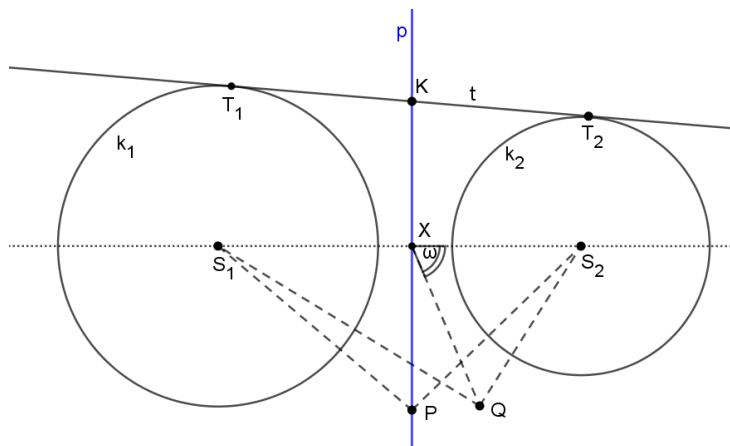
S využitím rovnice (3) se tato rovnice ještě zjednoduší

$$(|XS_1| + |XS_2|) \cdot \cos \omega = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $|XS_1| + |XS_2| \neq 0$, pak platí

$$\cos \omega = 0, \text{ tj. } \omega = 90^\circ$$

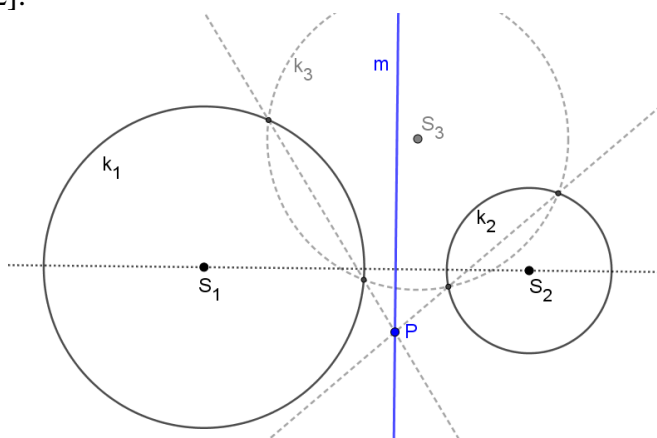
a bod Q leží na chordále p .



Obrázek 25 - Chordála dvou kružnic, které nemají společný bod

Potenční střed

„Bod, který má k daným třem kružnicím stejnou mocnost, se nazývá potenční střed daných tří kružnic“ [6, s.2].



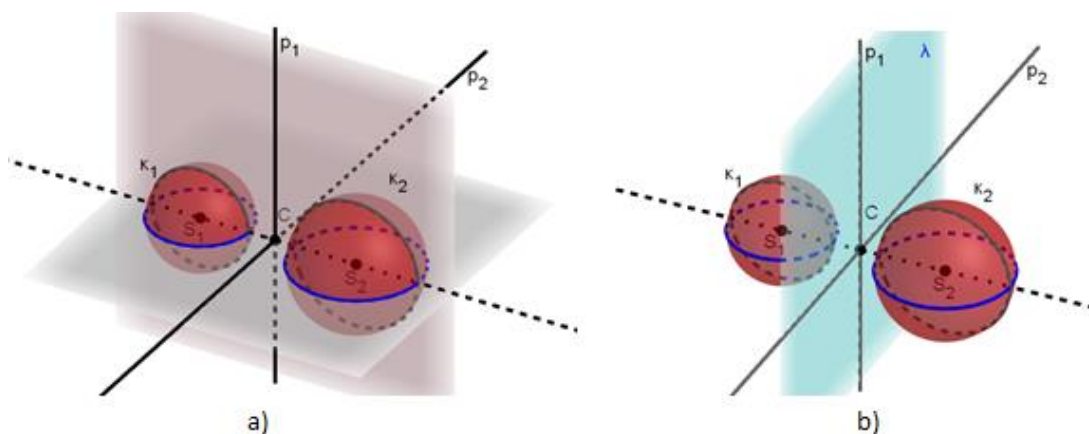
Obrázek 26 - Potenční střed kružnic

Prostorová analogie chordály kružnic a potenčního středu

Prostorovou analogií chordály dvou kružnic je chordální rovina kolmá na spojnici středů kulových ploch. Pokud mají kulové plochy společné body (jeden bod, pokud se dotýkají, nebo společnou kružnici, pokud se protínají), obsahuje chordální rovina všechny společné body (viz Obrázek 27 b)).

Pokud sestojíme rovinu procházející středy obou kulových ploch, pak tato rovina protne kulové plochy v kružnicích se středy a poloměry totožnými se středy a poloměry kulových ploch. Chordála p_1 těchto dvou kružnic leží v rovině řezu a protíná spojnici středů kulových ploch v bodě C a je na ni kolmá. Pokud nyní zvolíme jinou rovinu procházející středy kulových ploch, dostaneme jinou chordálu p_2 , která také prochází bodem C a také je kolmá ke spojnici středů kulových ploch. Všechny takovéto chordály leží v jedné rovině λ , která je kolmá ke spojnici středů kulových ploch [31].

O chordálních rovinách ke dvěma a třem kulovým plochám se dozvíme více v publikacích [20] a [31].

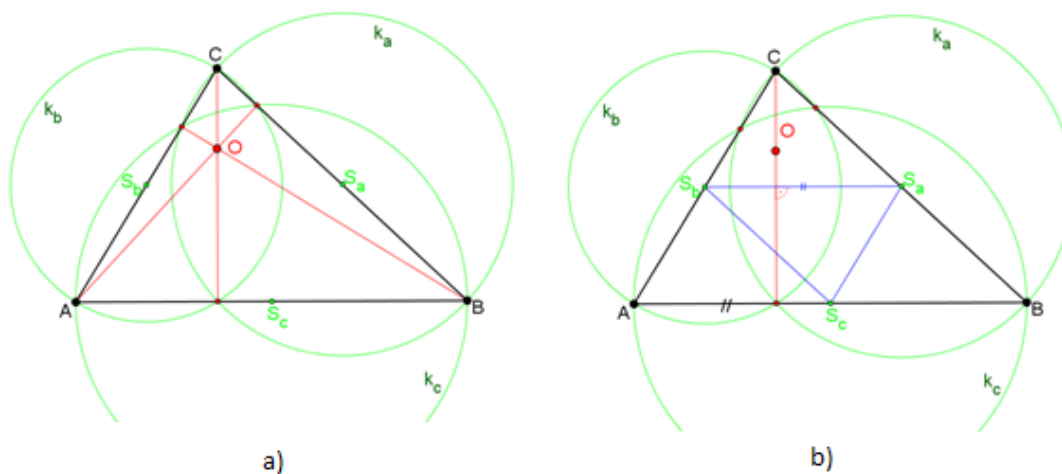


Obrázek 27 - Chordální rovina dvou kulových ploch

Potenční střed kružnic s průměry ve stranách trojúhelníku

Ortocentrum O trojúhelníku ABC je potenčním středem kružnic, které mají průměry AB , BC a AC . V předchozí části jsme si připomněli, že potenční střed tří kružnic je společným bodem tří chordál, a že chordála dvou kružnic, které mají společný bod, prochází tímto společným bodem a je kolmá na spojnici středů kružnic – viz Obrázek 24. Nyní stačí uvažovat kružnice k_a a k_b v trojúhelníku ABC – viz Obrázek 28 b). Tyto dvě kružnice mají středy S_a a S_b a společný bod C . Proto jejich chordála prochází bodem C a je kolmá na přímkou S_aS_b .

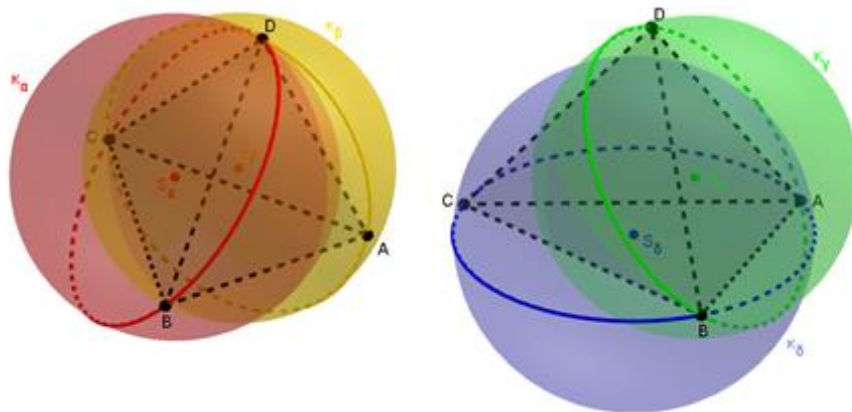
Přímka S_aS_b je rovnoběžná se stranou trojúhelníku AB , a proto na chordále kružnic k_a a k_b leží výška v_c trojúhelníku ABC . Obdobně můžeme ukázat, že chordála každých dvou z kružnic k_a, k_b, k_c nese výšku trojúhelníku ABC . Potenčním středem kružnic k_a, k_b, k_c je společný bod jejich chordál, tedy ortocentrum O trojúhelníku ABC – viz Obrázek 28 a) [38].



Obrázek 28 - Ortocentrum trojúhelníku jako potenční střed kružnic k_a, k_b, k_c

Prostorovou analogií kružnic, jejichž průměry jsou strany trojúhelníku, jsou kulové plochy, jejichž hlavní kružnice jsou kružnice opsané stěnám čtyřstěnu.

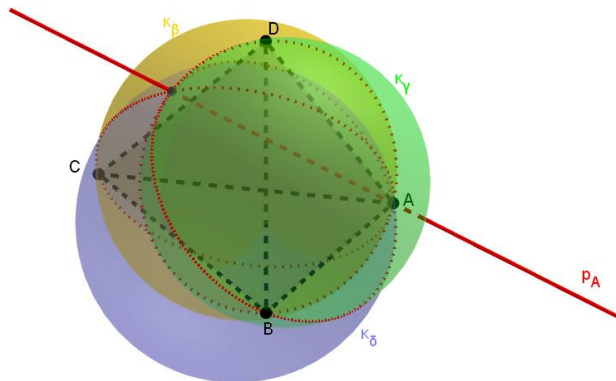
Pro každý čtyřstěn lze zavést kulové plochy $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_\gamma$ a κ_δ , jejichž hlavní kružnice jsou kružnice opsané trojúhelníkům jednotlivých stěn čtyřstěnu – viz Obrázek 29. Takto definované čtyři kulové plochy nemohou mít středy, které by ležely v téže rovině, a proto mají vždy potenční střed. Tento bod je společným bodem čtyř potenčních os procházejících vrcholy čtyřstěnu – viz bod P na Obrázku 31. „Bod P zavedený uvedeným způsobem lze považovat za další prostorovou analogii ortocentra trojúhelníku. V trojúhelníku byl oběma uvedenými způsoby definován jeden bod, ale ve čtyřstěnu Mongeův bod (ortocentrum) a potenční střed obecně nesplyvají. Potenční střed P je definován pro každý čtyřstěn nezávisle na tom, zda se jedná o čtyřstěn ortický, či neortický“ [25, s. 260].



Obrázek 29- Kulové plochy $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_\gamma$ a κ_δ čtyřstěnu

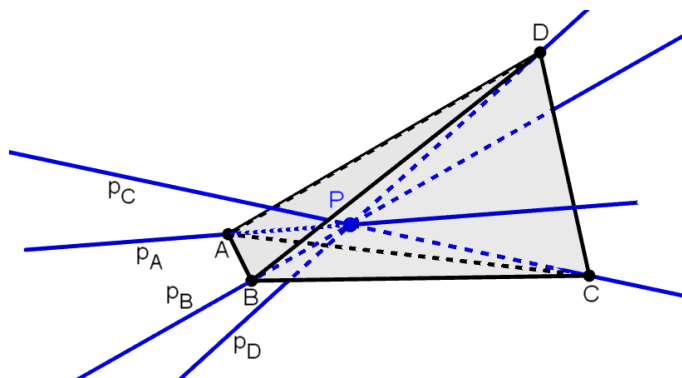
Každá z těchto kulových ploch prochází třemi vrcholy čtyřstěnu a má svůj střed ve středu kružnice opsané trojúhelníku příslušné stěny. Kulovou plochu určenou trojúhelníkem BCD budeme označovat κ_α , další kulové plochy pak $\kappa_\beta, \kappa_\gamma, \kappa_\delta$.

Na Obrázku 30 jsou znázorněny kulové plochy $\kappa_\beta, \kappa_\gamma$ a κ_δ . Jelikož každá z kulových ploch prochází třemi vrcholy čtyřstěnu $ABCD$, mají každé tři kulové plochy společný bod – tj. vrchol čtyřstěnu. V tom případě mají každé tři kulové plochy společnou potenční osu procházející vrcholem čtyřstěnu kolmo na rovinu, která je určena středy těchto kulových ploch [25].



Obrázek 30 - Potenční osa p_A kulových ploch $\kappa_\beta, \kappa_\gamma$ a κ_δ

Potenční střed P kulových ploch $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_\gamma, \kappa_\delta$ je potom společný bod těchto čtyř potenčních os p_A, p_B, p_C, p_D .



Obrázek 31 - Potenční střed P kulových ploch $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_\gamma, \kappa_\delta$

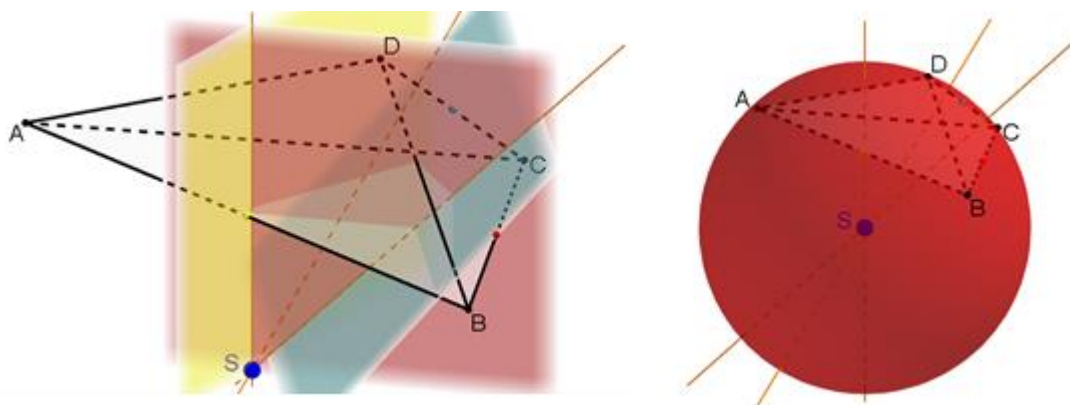
2.7 Kulové plochy

V této kapitole se dozvíme něco o existenci kulové plochy opsané a kulových ploch vepsaných danému čtyřřtěnu. Vzpomeňme si, že v trojúhelníku můžeme sestavit několik typů kružnic. Ve čtyřřtěnu můžeme obdobným způsobem sestavit kulové plochy.

2.7.1 Kulová plocha opsaná

Víme, že střed kružnice opsané trojúhelníku je průsečík os stran trojúhelníku. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří vrcholů jsou stejné.

„Existuje právě jedna kulová plocha, která prochází všemi vrcholy daného čtyřřtěnu $ABCD$ “ [13, s. 31].



Obrázek 32 - Roviny souměrnosti α, β, γ a kulová plocha opsaná čtyřřtěnu

Důkaz: [13]

Pokud existuje právě jedna kulová plocha procházející vrcholy čtyřřtěnu, pak její střed leží v průniku těchto rovin: rovina souměrnosti α hrany AB , rovina souměrnosti β hrany CB a rovina souměrnosti γ hrany CD . Žádné dvě z těchto rovin nejsou rovnoběžné, neboť ani zmíněné hrany nejsou rovnoběžné.

Roviny souměrnosti mají právě jeden společný bod S , námi hledaný střed kulové plochy.

Jelikož bod S leží v rovině souměrnosti α , pak platí

$$|SA| = |SB|.$$

Dále bod S leží v rovině souměrnosti β , proto platí

$$|SC| = |SB|.$$

A jelikož bod S leží i v rovině souměrnosti γ , pak platí

$$|SC| = |SD|.$$

Bod S má od všech vrcholů stejnou vzdálenost a platí tedy

$$|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = r,$$

kde r je poloměr kulové plochy opsané danému čtyřstěnu.

2.7.2 Kulové plochy vepsané

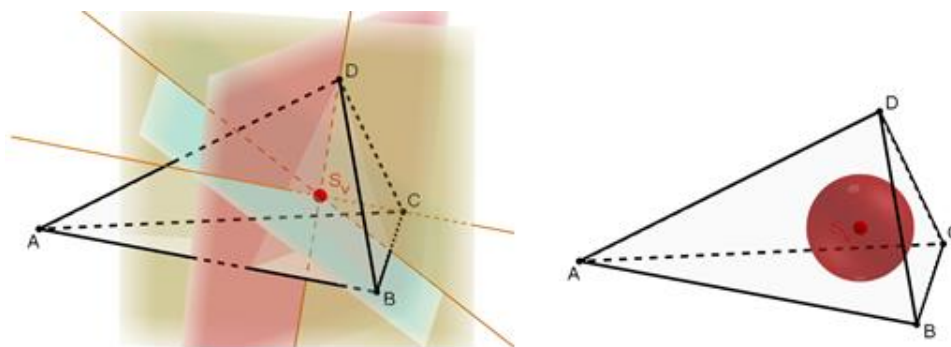
V následujících řádcích si povíme o existenci kulových ploch vepsaných. Víme, že v trojúhelníku existují čtyři kružnice vepsané, z nichž jedna je vepsaná uvnitř a zbývající tři jsou vepsány vně. Každá z vně vepsaných kružnic se dotýká jedné strany ve vnitřním bodě a zbylých dvou stran na jejich prodloužení. Středem kružnice vepsané uvnitř (vně) je průsečík os vnitřních (vnějších) úhlů v trojúhelníku. U čtyřstěnu je situace obdobná.

„Existuje osm kulových ploch, které jsou vepsány danému čtyřstěnu. Jedna z nich je vepsána uvnitř (dotýká se všech stěn v jejich vnitřních bodech) a ostatních sedm je vně vepsaných. Z nich zase čtyři se dotýkají vždy jedné stěny ve vnitřním bodě a zbývajících tří stěn na prodloužení. Zbývající tři kulové plochy se dotýkají všech stěn na prodloužení“
[13, s. 33].

Důkaz: [13], [37]

- I. Sestrojíme rovinu souměrnosti α rovin ABC a BCD , která protíná hranu AD . Dále sestrojíme rovinu souměrnosti β rovin BCD a ACD , která protíná hranu AB . A nakonec sestrojíme rovinu souměrnosti γ rovin ABD a ACD , která protíná hranu BC . Žádné dvě z těchto rovin nejsou rovnoběžné, neboť ani žádná z hran čtyřstěnu není rovnoběžná. Sestrojené roviny souměrnosti mají právě jeden společný bod – bod S_v , který je středem kulové plochy uvnitř vepsané danému čtyřstěnu. Jelikož bod S_v leží v rovině α , pak musí platit $v(S_v, ABC^1) = v(S_v, BCD)$, dále leží v rovině β , proto $v(S_v, BCD) = v(S_v, ACD)$. Bod S_v leží taktéž na rovině souměrnosti γ , a tak $v(S_v, ABD) = v(S_v, ACD)$. Z toho vyplývá i rovnost $v(S_v, ABC) = v(S_v, ABD)$. Bod S_v má tedy od všech stěn čtyřstěnu stejnou vzdálenost, a proto je středem vepsané kulové plochy.

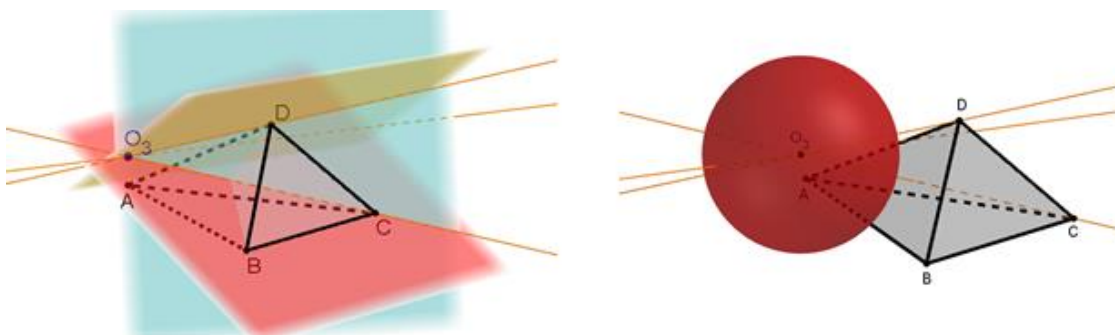
¹ Symbol $v(S_v, ABC)$ znamená vzdálenost bodu S_v od roviny ABC .



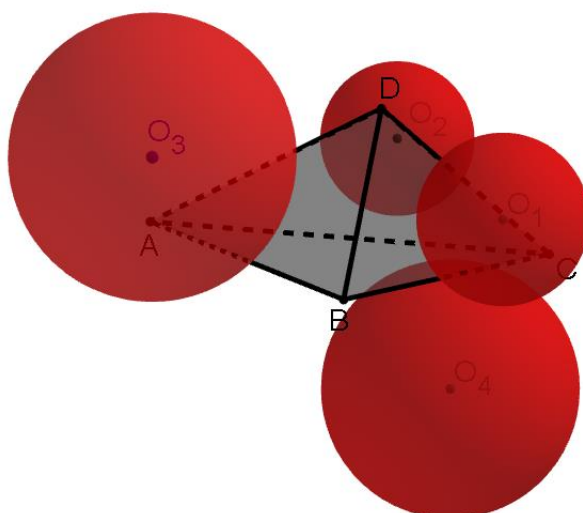
Obrázek 33 - Kulová plocha uvnitř vepsaná čtyřstěnu

- II. Nyní sestrojíme kulovou plochu nad stěnou ABD . Sestrojme rovinu souměrnosti χ rovin ABC a BCD , která protíná hranu AD . Dále sestrojme rovinu souměrnosti φ rovin BCD a ACD , která protíná hranu AB . A nakonec sestrojme rovinu souměrnosti ω rovin ABD a ACD , která je kolmá na rovinu γ v případě I, tedy rovina se směrem hrany AD (stýčná rovina čtyřstěnu). Každé dvě tyto roviny jsou různoběžné, a tedy mají právě jeden společný bod O_3 , který je středem kulové plochy nad stěnou ABD .

Jelikož bod O_3 leží v rovině χ , pak musí platit $v(O_3, ABC) = v(O_3, BCD)$, dále leží v rovině φ , proto $v(O_3, BCD) = v(O_3, ACD)$. Bod O_3 leží taktéž na rovině souměrnosti ω , a tak $v(O_3, ABD) = v(O_3, ACD)$. Z toho vyplývá i rovnost $v(O_3, ABC) = v(O_3, ABD)$. Bod O_3 má tedy od všech stěn čtyřstěnu, či jejich prodloužení, stejnou vzdálenost, a proto je středem vepsané kulové plochy. Stejným způsobem bychom dospěli ke zbylým kulovým plochám vepsaným nad stěnou čtyřstěnu.

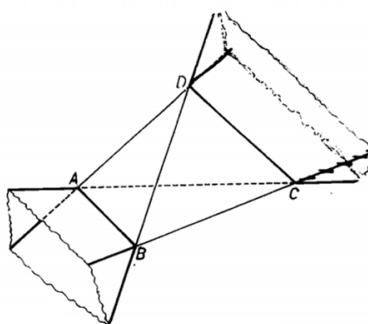


Obrázek 34 - Kulová plocha nad stěnou ABD



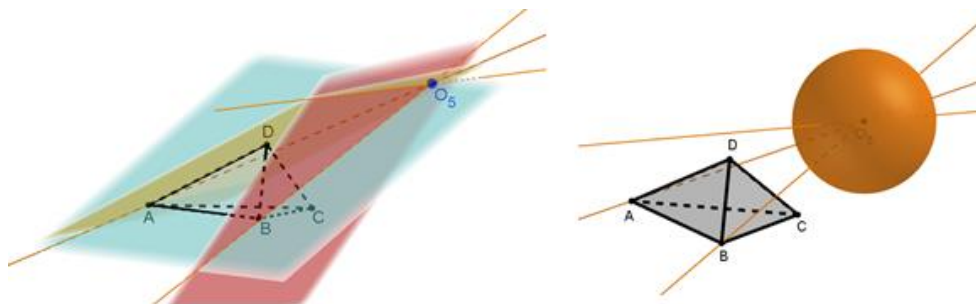
Obrázek 35 - Kulové plochy nad stěnami čtyřstěnu

- III. Poslední skupinou kulových ploch vepsaných čtyřstěnu jsou ty, které se dotýkají všech stěn na jejich prodloužení. Na Obrázku 36 jsou zvýrazněny části prostoru nad hranami AB, CD . Střed kulové plochy leží buď v části nad hranou AB , nebo v části nad hranou CD .



Obrázek 36 - Zvýrazněné části prostoru nad hranami AB, CD [13, s. 34]

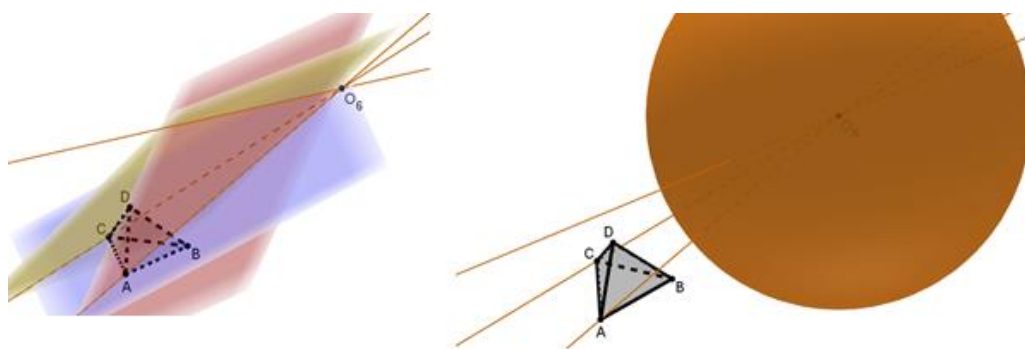
Sestrojme rovinu souměrnosti λ rovin ABC a ABD , která protíná hranu CD ; rovinu souměrnosti π rovin BCA a BCD , která je styčnou rovinou čtyřstěnu a rovinu souměrnosti ψ rovin ADB a ADC , jež je taktéž styčnou rovinou tomuto čtyřstěnu.



Obrázek 37 - Kulová plocha nad hranou CD

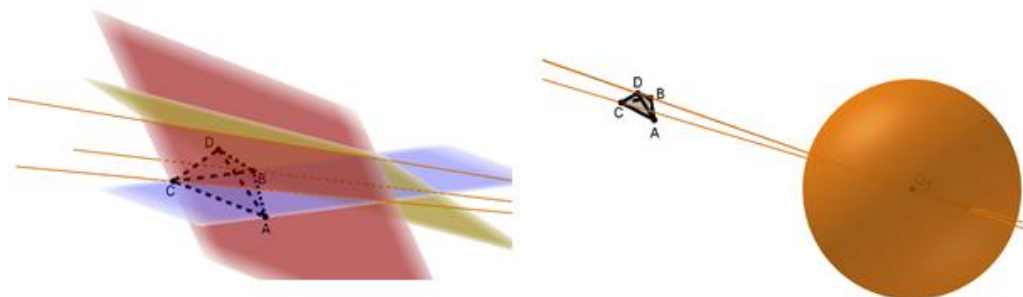
Jelikož bod O_5 leží v rovině λ , pak musí platit $v(O_5, ABC) = v(O_5, ABD)$, dále leží v rovině π , proto $v(O_5, BCA) = v(O_5, BCD)$. Bod O_5 leží taktéž na rovině souměrnosti ψ , a tak $v(O_5, ADB) = v(O_5, ADC)$. Z toho vyplývá i rovnost $v(O_5, BCD) = v(O_5, ACD)$. Bod O_5 má tedy od všech prodloužení stěn čtyřstěnu stejnou vzdálenost, a proto je středem vepsané kulové plochy.

Hledáme-li kulovou plochu nad hranou BD , či hranou AC . Sestrojíme rovinu souměrnosti δ rovin ACB a ACD , která protíná hranu BD ; rovinu souměrnosti ε rovin ABC a ABD , která je styčnou rovinou čtyřstěnu a rovinu souměrnosti μ rovin CDB a CDA , jež je taktéž styčnou rovinou tomuto čtyřstěnu.



Obrázek 38 - Kulová plocha nad hranou BD

Pokud hledáme kulovou plochu nad hranou BC , či hranou AD , sestrojíme rovinu souměrnosti ρ rovin BCA a BCD , která protíná hranu AD ; rovinu souměrnosti σ rovin BCA a DCA , která je styčnou rovinou čtyřstěnu a rovinu souměrnosti τ rovin BDA a BDC , jež je taktéž styčnou rovinou tomuto čtyřstěnu.



Obrázek 40 - Kulová plocha nad hranou AD



Obrázek 41 - Kulové plochy vepsané čtyřstěnu vně

3 Speciální čtyřstěny

V této kapitole se seznámíme s mnoha zajímavými typy čtyřstěňů. Nejprve si řekneme několik informací o pravidelném čtyřstěnu, který je všem jistě známý. Dále přejdeme na čtyřstěň ortocentrický, stejnostěnný a pravoúhlý [36]. Odvodíme si zde některé zajímavé vlastnosti těchto méně známých čtyřstěňů.

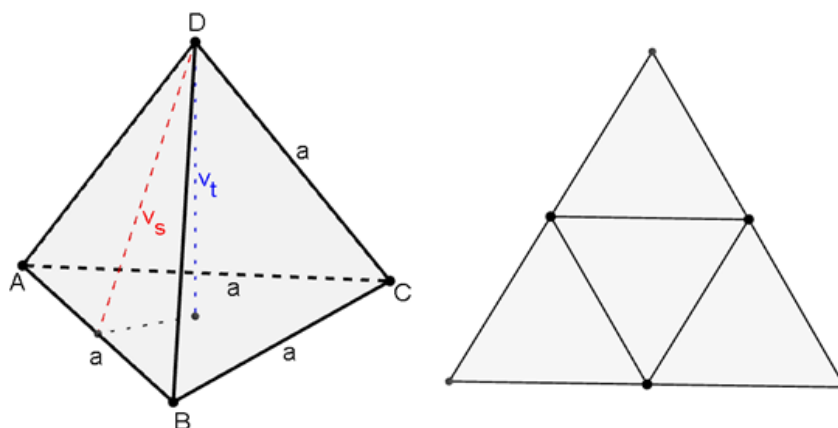
3.1 Pravidelný čtyřstěň

Pravidelný čtyřstěň řadíme mezi tzv. Platónská tělesa, protože jeho povrch je tvořen čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Pravidelný čtyřstěň je tedy jedním z pěti pravidelných mnohostěňů. Zajímavou vlastností pravidelného čtyřstěňu je, že vzdálenost každých dvou vrcholů je stejná, na rozdíl od ostatních platónských těles [36]. Další zajímavou vlastností je dualita. Spojením středů sousedních stěn platónského tělesa úsečkami vzniknou hrany jiného pravidelného mnohostěnu. Takto vzniklé těleso označujeme jako duální k tělesu původnímu. Duálním mnohostěnem k pravidelnému čtyřstěňu je opět pravidelný čtyřstěň.

Stěnová výška pravidelného čtyřstěňu

Stěnovou výšku v rovnostranném trojúhelníku o délce hrany a vypočítáme snadno pomocí Pythagorovy věty

$$v_s = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

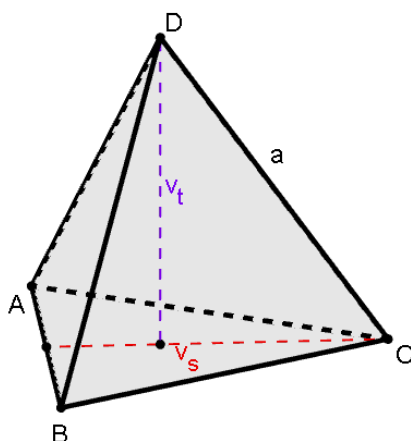


Obrázek 42 - Pravidelný čtyřstěň a jeho síť

Tělesová výška pravidelného čtyřřtěnu

Víme, že stěnová výška pravidelného čtyřřtěnu je $v_s = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Těžiště stěny dělí tuto výšku v poměru 2:1, z toho $\frac{2}{3} v_s = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ je délka odvěsny a podle Pythagorovy věty můžeme vypočítat tělesovou výšku

$$v_t = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Obrázek 43 - Výšky pravidelného čtyřřtěnu

Povrch pravidelného čtyřřtěnu

Povrch čtyřřtěnu o délce hran a a stěnové výšce $v_s = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vypočítáme podle známého vzorce pro obsah trojúhelníku. Povrch čtyřřtěnu je tedy

$$S = \frac{2a \cdot a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}.$$

Objem pravidelného čtyřřtěnu

Využijeme poznatku z předchozí kapitoly, že čtyřřtěn $ABCD$ je trojboký jehlan a použijeme vzoreček pro výpočet objemu jehlanu $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v_t$, kde S_p je obsah podstavy a v_t je tělesová výška. Obsah podstavy vypočítáme pomocí vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku přes základnu a jí odpovídající výšku $S_p = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Objem čtyřřtěnu tedy vypočítáme pomocí vzorce

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Těžiště čtyřstěnu

Jak již víme z předchozí kapitoly těžiště čtyřstěnu dělí těžnice v poměru 3:1. Těžiště pravidelného čtyřstěnu se nachází v $\frac{1}{4}$ jeho výšky.

Platí tedy

$$|T_{\alpha}T| = |T_{\beta}T| = |T_{\gamma}T| = |T_{\delta}T| = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

a dále

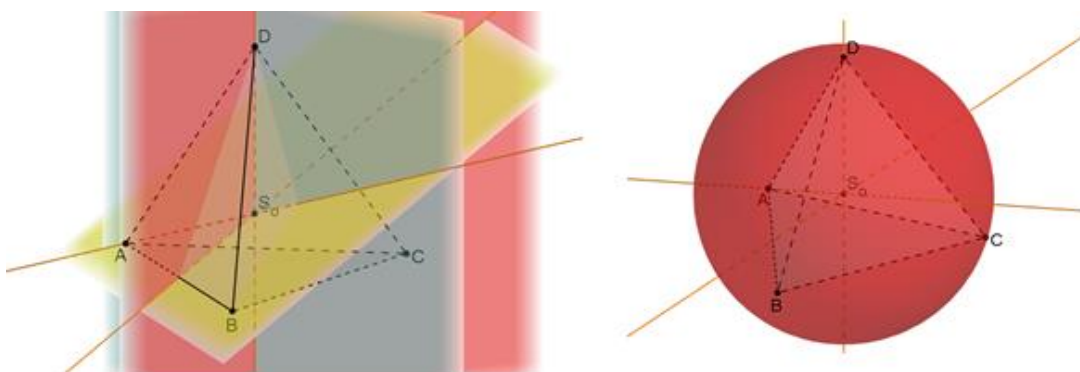
$$|TA| = |TB| = |TC| = |TD| = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Těžiště a středy kulových ploch splývají, neboť vzdálenost těžiště od všech vrcholů čtyřstěnu je rovna $\frac{3}{4}$ výšky a vzdálenost těžiště od všech stěn je rovna $\frac{1}{4}$ výšky.

Kulová plocha opsaná pravidelnému čtyřstěnu

Poloměr r kulové plochy opsané pravidelnému čtyřstěnu je roven vzdálenosti těžiště tělesa T od libovolného vrcholu tělesa. Těžiště pravidelného čtyřstěnu se nachází v $\frac{1}{4}$ jeho výšky. Poloměr je tedy

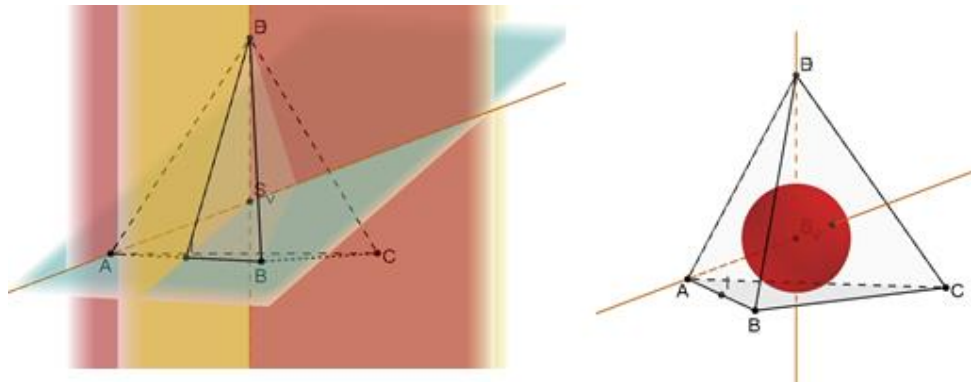
$$r = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$



Obrázek 44 - Kulová plocha opsaná pravidelnému čtyřstěnu

Kulová plocha vepsaná pravidelnému čtyřřtěnu

Poloměr ρ kulové plochy vepsané pravidelnému čtyřřtěnu je roven vzdálenosti těžiště tělesa T od libovolné stěny tělesa. Víme, že poloměr je roven $\frac{1}{4}$ výšky čtyřřtěnu. Nyní si ukážeme druhý způsob výpočtu. Dotykovými body sféry jsou středy stěn. Vezměme pravouhlý trojúhelník DS_vT_α , resp. DTT_α , kde D je vrchol čtyřřtěnu, T_α je těžiště stěny a S_v , resp. T je střed kulové plochy vepsané.



Obrázek 45 - Kulová plocha vepsaná pravidelnému čtyřřtěnu

Pro přeponu tohoto trojúhelníku platí

$$|DS_v| = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

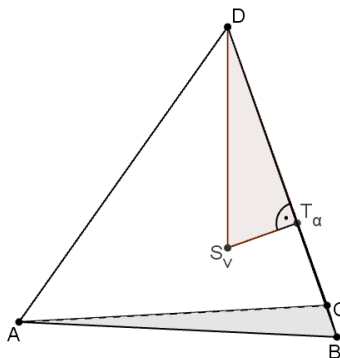
neboť bod S_v se nachází v $\frac{1}{4}$ tělesové výšky.

O odvěsně DT_α víme, že bod T_α leží ve $\frac{2}{3}$ délky stěnové výšky a tedy platí

$$|DT_\alpha| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Poloměr je tedy roven

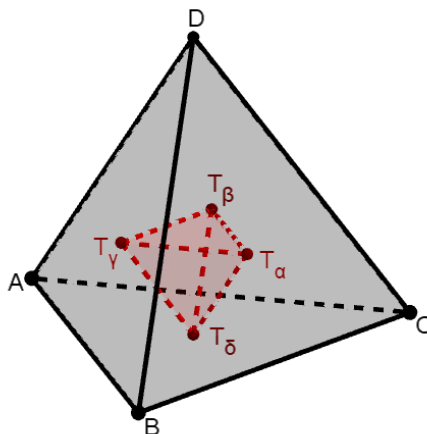
$$\rho = |DS_v| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{16} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{\sqrt{24}} = \frac{a}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$



Obrázek 46 - Poloměr kulové plochy vepsané pravidelnému čtyřřtěnu

“Pravidelnému čtyřstěnu $ABCD$ vepište těleso tak, že jeho vrcholy jsou v těžistiích stěn daného čtyřstěnu” [21, s. 130].

Spojnice těžišť vytvoří těleso, které má čtyři vrcholy, šest hran a čtyři trojúhelníkové stěny. Pravidelnému čtyřstěnu je vepsán opět pravidelný čtyřstěn.



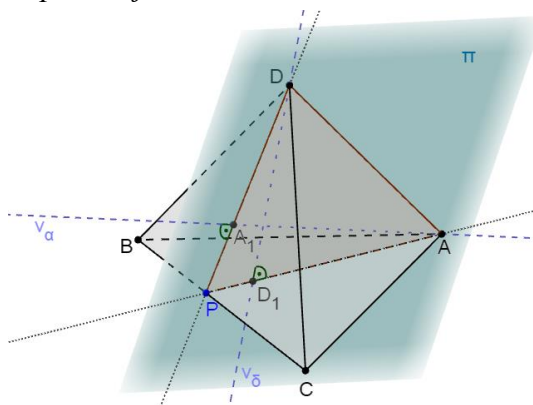
Obrázek 47 - Pravidelný čtyřstěn vepsaný do pravidelného čtyřstěnu

3.2 Ortocentrický čtyřstěn

Čtyřstěn se nazývá ortocentrický, pokud se všechny jeho výšky protínají v jednom bodě – ortocentru čtyřstěnu. Nejprve si odvodíme několik důležitých tvrzení týkajících se tohoto typu čtyřstěnu.

Tvrzení 1:

Jsou-li dvě protilehlé hrany čtyřstěnu navzájem kolmé, výšky čtyřstěnu, které vycházejí z vrcholů jedné z hran, se protínají [18].



Obrázek 48 - Výšky v_a a v_d ortocentrického čtyřstěnu

Důkaz: [18]

Nechť hrany AD a BC čtyřstěnu $ABCD$ jsou vzájemně kolmé a úsečky AA_1 a DD_1 jsou výšky čtyřstěnu $ABCD$. Pokud je $A = D_1$, pak je tvrzení pravdivé, protože výšky procházejí bodem A . Pokud je $D = A_1$, je tvrzení také pravdivé, protože výška prochází bodem D . Není však možné, aby rovnosti $A = D_1$ a $D = A_1$ platili současně, protože pak by hrana AD byla kolmá současně na rovinu BCD a BCA , což by znamenalo, že jsou tyto roviny rovnoběžné.

Nechť je nyní $A \neq D_1$ a $D \neq A_1$. Pak $BC \perp AD$ a $BC \perp AA_1$. Z toho vyplývá, že hrana BC je kolmá na rovinu ADA_1 . Podobně z $BC \perp AD$ a $BC \perp DD_1$ plyne, že hrana BC je kolmá na rovinu ADD_1 . Avšak skrze AD nemohou procházet dvě různé roviny kolmé na hranu BC . Proto se roviny ADA_1 a ADD_1 shodují. Nechť rovina protíná hranu BC v bodě P . Pak AA_1 a DD_1 jsou výšky v trojúhelníku ADP , a proto se protínají. Analogicky dokážeme, že se protínají i výšky vycházející z vrcholů hrany BC .

Tvrzení 2:

Pokud se dvě výšky čtyřstěnu protínají, je hrana, ze které výšky vycházejí, kolmá na její protější hranu [18].

Důkaz: [18]

Nechť se výšky AA_1 a DD_1 protínají a rovina π je jimi definována. (Víme, že AA_1 a DD_1 jsou různé.) Z poznatku, že platí $BC \perp AA_1$ a $BC \perp DD_1$ vyplývá, že $BC \perp \pi$. Hrana BC je kolmá na každou přímku roviny π , tedy i na hranu AD . V tom případě, podle tvrzení 1, se protínají výšky čtyřstěnu, které vycházejí z krajních bodů hrany BC .

Tvrzení 3:

Pokud jsou dva páry protilehlých hran čtyřstěnu vzájemně kolmé, je i třetí pár protilehlých hran vzájemně kolmý [18].

Důkaz tohoto tvrzení nalezneme v [18, s.105].

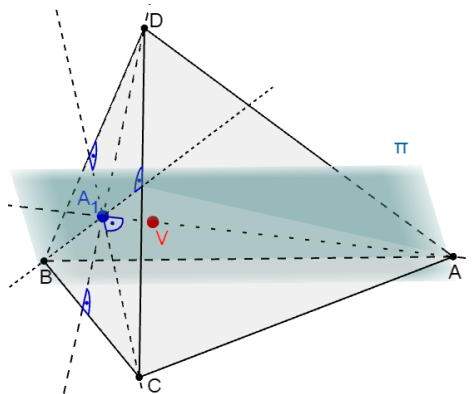
Tvrzení 4:

Nutnou a postačující podmínkou pro ortocentrický čtyřstěn je, že dva páry protilehlých hran jsou vzájemně kolmé [18].

Důkaz tohoto tvrzení nalezneme v [18, s.105].

Tvrzení 5:

Každá výška ortocentrického čtyřstěnu protíná svou příslušnou stěnu v jejím ortocentru [13], [18].



Obrázek 49 - Výška ortocentrického čtyřstěnu procházející ortocentrem stěny

Důkaz: [13]

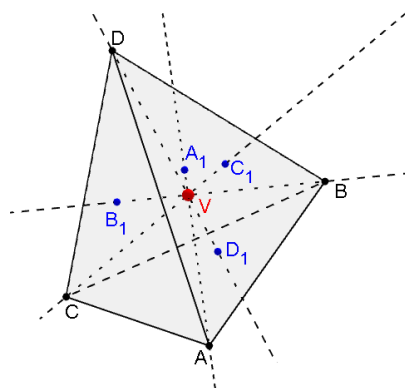
Hranou AB můžeme proložit rovinu π kolmou k CD , neboť hrany AB, CD jsou navzájem kolmé. Rovina π nutně obsahuje tělesovou výšku AA_1 , neboť v rovině π leží všechny kolmice k rovině BCD , které protínají hranu AB . A přitom platí $BA_1 \perp CD$. To znamená, že přímka BA_1 je výška stěny BCD . Stejně bychom ukázali, že CA_1 (DA_1) je výška trojúhelníka BCD jdoucí vrcholem C (D). Odtud vyplývá, že bod A_1 je ortocentrem stěny BCD . To, co jsme řekli o vrcholu A , platí i o vrcholech B, C, D , a tím je vyslovená věta dokázána.

Tvrzení 6:

Nutnou a postačující podmínkou ortocentrického čtyřstěnu je, že jeho bimediany (úsečky spojující středy protilehlých hran) mají stejnou délku [18].

Důkaz nalezneme v [18, s. 107].

„V ortocentrickém čtyřstěnu procházejí všechny jeho tělesové výšky týmž bodem“ [13, s.44].



Obrázek 50 - Výšky ortocentrického čtyřstěnu

Důkaz:

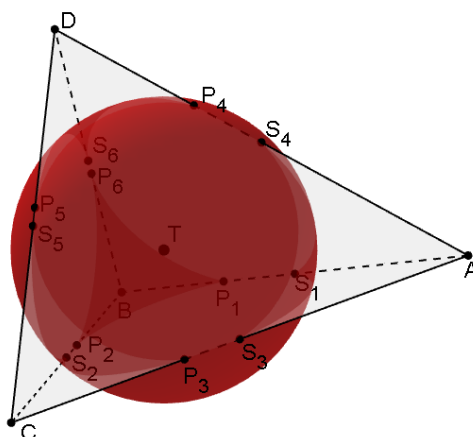
Označme daný čtyřstěn $ABCD$ a paty tělesových výšek A_1, B_1, C_1, D_1 (viz Obrázek 50). Vzhledem k tomu, že hrany AB, CD svírají pravý úhel, protínají se tělesové výšky spuštěné z vrcholů C, D . A jelikož jsou k sobě kolmé hrany AC, BD , protínají se tělesové výšky z vrcholů B, D . Poněvadž jsou k sobě kolmé i hrany AD, BC , protínají se i výšky z vrcholů B, C . Taktéž se protínají i výšky z vrcholů A, B a A, C a A, D . Tedy každé

dvě tělesové výšky daného čtyřstěnu se protínají, a to je možné pouze v těchto dvou případech:

- 1) leží-li všechny tělesové výšky v téže rovině
- 2) tělesové výšky neleží v téže rovině, ale procházejí tímž bodem – ortocentrem čtyřstěnu.

První případ nastat nemůže, protože vrcholy čtyřstěnu neleží v téže rovině. Nastat tedy může pouze druhý případ, čímž je tvrzení dokázáno.

„V ortocentrickém čtyřstěnu existuje kulová plocha, která obsahuje středy všech hran a paty stěnových výšek. (Tzv. první kulová plocha dvanácti bodů.) Její střed splývá s těžištěm daného čtyřstěnu a její poloměr je roven polovině poloměru kulové plochy, která je opsána danému čtyřstěnu“ [13, s. 47].



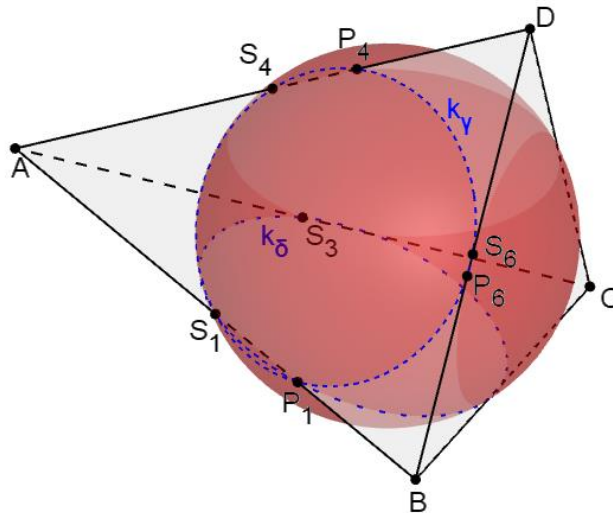
Obrázek 51- Ortocentrický čtyřstěn a jeho kulová plocha dvanácti bodů prvního typu

Důkaz tohoto tvrzení nalezneme například v publikacích [2], [13], [25], ze kterých byl tento důkaz zpracován.

Důkaz:

- I. Nechť je dán ortocentrický čtyřstěn $ABCD$. V jedné jeho stěně, např. v ABD , sestrojme kružnici k_γ devíti bodů. Víme, že prochází středy S_1, S_4, S_6 hran AB, AD, BD a patami P_1, P_4, P_6 výšek sestrojených z vrcholů D, B, A ve stěně ABD . Středem S_3 hrany AC a kružnicí k_γ je určena jediná kulová plocha χ , neboť bod S_3 neleží s kružnicí k_γ v jedné rovině. Tato kulová plocha je rovinou ABC prořata v kružnici k_δ . Tato kružnice obsahuje střed S_1 hrany

AB , střed S_3 hrany AC a patu P_1 stěnové výšky z vrcholu C na hranu AB . Těmito třemi body je určena jediná kružnice, jedná se o kružnici devíti bodů trojúhelníku ABC . Dále protíná kulová plocha χ stěnu ACD v kružnici devíti bodů k_β a stěnu BCD v kružnici devíti bodů k_α . Jelikož tyto kružnice procházejí středy hran AB, AC, BC, AD, BD, CD a patami stěnových výšek, prochází těmito body i kulová plocha χ . Tímto je vyslovená věta dokázána.



Obrázek 52 - Kulová plocha dvanácti bodů a kružnice devíti bodů stěn ABC, ABD

- II. Na Obrázku 53 je O_γ ortocentrum stěny ABD a splývá s pravoúhlým průmětem C_1 vrcholu C do roviny ABD . Body T_γ a S_γ jsou těžiště a střed kružnice opsané trojúhelníku ABD . Víme, že T_γ leží mezi S_γ a O_γ a že platí

$$|O_\gamma T_\gamma| = 2 \cdot |T_\gamma S_\gamma|.$$

Označme F_γ střed kružnice k_γ devíti bodů. Bod T_γ leží mezi body F_γ a S_γ a platí o něm

$$|T_\gamma S_\gamma| = 2 \cdot |F_\gamma T_\gamma|,$$

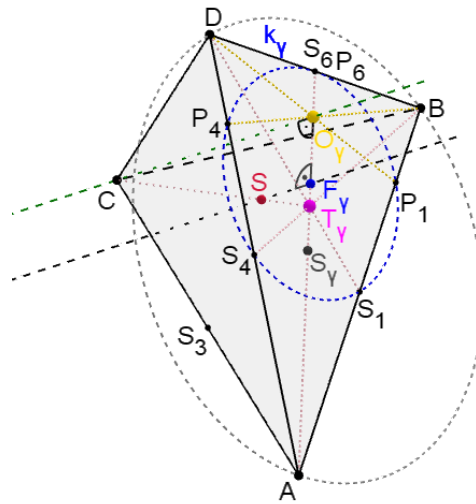
a proto F_γ je střed úsečky $O_\gamma S_\gamma$. Pokud budeme počítat dále, získáme

$$|F_\gamma T_\gamma| = \frac{1}{2} \cdot |T_\gamma S_\gamma| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |O_\gamma T_\gamma| = \frac{1}{4} \cdot |O_\gamma T_\gamma|.$$

Střed S kulové plochy dvanácti bodů prvního typu leží na kolmici sestrojené v bodě F_γ k rovině ABD . Podle poslední rovnice prochází tato kolmice těžištěm T tohoto čtyřstěnu. Pokud bychom provedli stejnou úvahu i pro další

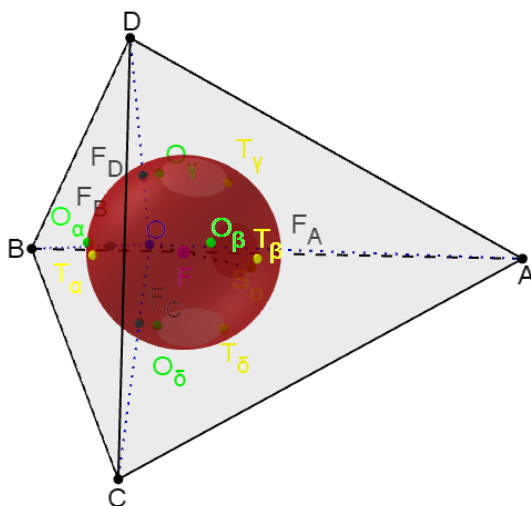
stěny čtyřstěnu, zjistili bychom, že střed kulové plochy χ splývá s těžištěm čtyřstěnu.

- III. Poloměr kulové plochy χ je roven polovině poloměru kulové plochy opsané danému čtyřstěnu.



Obrázek 53 - Kružnice devíti bodů a kružnice opsaná stěně ABD

„V ortocentrickém čtyřstěnu existuje kulová plocha, která obsahuje těchto dvanáct bodů: ortocentra všech čtyř stěn; těžiště všech čtyř stěn; body, které dělí v poměru 2: 1 úsečku, omezenou ortocentrem čtyřstěnu a vrcholem čtyřstěnu, při čemž větší díl je při vrcholu. Poloměr této kulové plochy je roven jedné třetině poloměru kulové plochy, opsané danému čtyřstěnu. (Tato plocha se nazývá druhá kulová plocha dvanácti bodů.)“ [13, s.49].



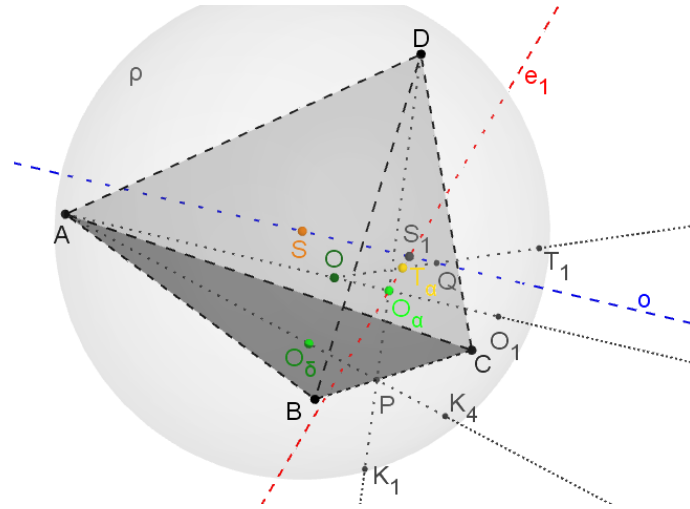
Obrázek 54 - Ortocentrický čtyřstěn a jeho kulová plocha dvanácti bodů druhého typu

Důkaz tohoto tvrzení nalezneme například v publikacích [2], [13], [25], ze kterých byl tento důkaz zpracován.

Důkaz:

Nejprve si ukážeme, že na kulové ploše ρ opsané danému čtyřstěnu $ABCD$ leží osm důležitých bodů a poté přejdeme k důkazu této věty.

Těžiště stěn ABC, ABD, ACD, BCD označme po řadě $T_\delta, T_\gamma, T_\beta, T_\alpha$. Paty výšek sestrojených z vrcholů A, B, C, D na protější stěny označme postupně $O_\alpha, O_\beta, O_\gamma, O_\delta$. Tyto čtyři body jsou zároveň ortocentra příslušných stěn. Ortocentrum daného čtyřstěnu označíme O .



Obrázek 55 - Eulerova přímka trojúhelníku BCD

- I. Průsečík polopřímky AO_α s kulovou plochou ρ označíme O_1 . Polopřímka DO_α protne hranu BC v bodě P a kulovou plochu ρ v bodě K_1 . Bod K_1 leží v rovině BCD , a proto je bodem kružnice k_1 , která je opsaná trojúhelníku BCD a je řezem plochy ρ rovinou BCD . Proto platí $|PO_\alpha| = |PK_1|$.

Polopřímka AO_δ protne hranu BC v bodě P a kulovou plochu ρ v bodě K_4 . Pro bod K_4 platí $|PO_\delta| = |PK_4|$. Rovina ADP protíná kulovou plochu ρ v kružnici (viz Obrázek 56), která prochází body A, D, O_1, K_1, K_4 . Pravoúhlé trojúhelníky $O_\alpha K_1 O_1$, $O_\alpha P O$ jsou podobné, protože platí

$$|\sphericalangle ADK_1| = |\sphericalangle AO_1 K_1|$$

$$|\sphericalangle O P O_\alpha| = 90^\circ - |\sphericalangle ADK_1|$$

$$|\sphericalangle O_\alpha K_1 O_1| = 90^\circ - |\sphericalangle AO_1 K_1|.$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá

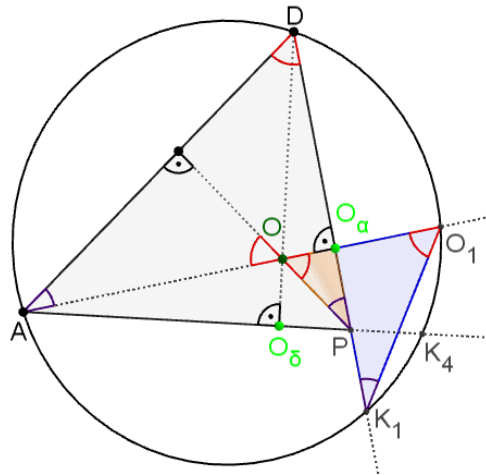
$$|\sphericalangle O P O_\alpha| = |\sphericalangle O_\alpha K_1 O_1|$$

a zmíněné dva trojúhelníky jsou tedy skutečně podobné. Jejich strany, které si v podobnosti odpovídají, jsou v poměru

$$|OO_\alpha| : |PO_\alpha| = |O_\alpha O_1| : |O_\alpha K_1|.$$

Můžeme tedy říct, že podobnost mezi těmito trojúhelníky má koeficient podobnosti rovný dvěma.

Stejným způsobem bychom provedli důkaz i pro body O, O_β, O_2 ; O, O_γ, O_3 ; O, O_δ, O_4 .



Obrázek 56 - Podobnost pravoúhlých trojúhelníků $O_\alpha K_1 O_1, O_\alpha P O$

II. Na polopřímce OT_α za bodem T_α sestrojme bod T_1 tak, aby platilo

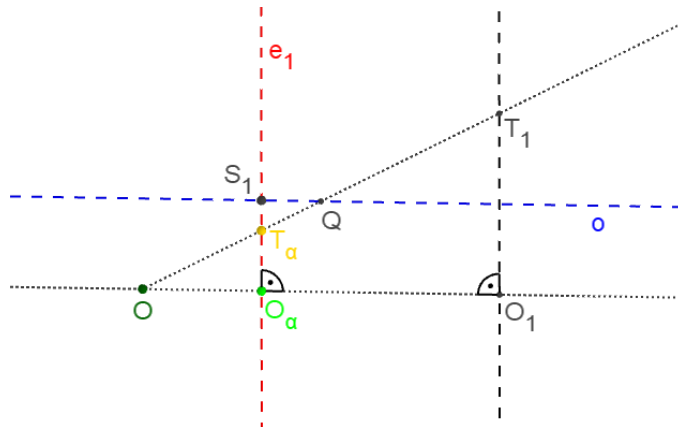
$$|T_\alpha T_1| = 2 \cdot |OT_\alpha|.$$

Dále označme S_1 střed kružnice k_1 opsané trojúhelníku BCD . Sestrojme kolmici o bodem S_1 k rovině BCD . Přímka o je rovnoběžná s přímkou OO_α a prochází středem S kulové plochy ρ . Body O_α, T_α, S_1 leží na Eulerově přímce e_1 trojúhelníku BCD . (Více o Eulerově přímce [4, s. 50, Obrázek 39])
Tudíž bod T_α leží mezi body S_1 a O_α a platí

$$|O_\alpha T_\alpha| = 2 \cdot |S_1 T_\alpha|.$$

Na Obrázku 57 je znázorněný detail v rovině oO_α . Tato rovina obsahuje ortocentrum O a body T_α, T_1 . Průsečík přímky o s přímkou OT_1 označme Q .
Potom je

$$|OT_1| = 3 \cdot |OT_\alpha|.$$



Obrázek 57 - Znáznorněný detail přímek v rovině oO_α

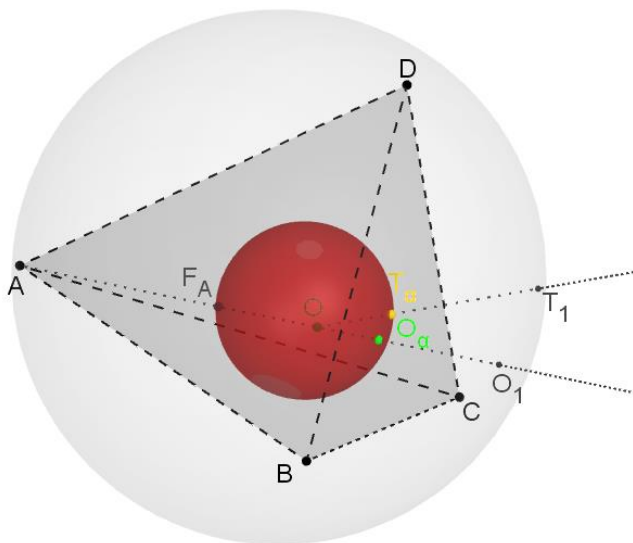
Z podobnosti trojúhelníků $QT_\alpha S_1, OT_\alpha O_\alpha$ a z výše uvedených vztahů plyne

$$\begin{aligned} |OQ| &= |OT_\alpha| + |T_\alpha Q| = |OT_\alpha| - \frac{1}{2} \cdot |OT_\alpha| = \frac{3}{2} \cdot |OT_\alpha| = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot |OT_1| = \frac{1}{2} \cdot |OT_1|. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že přímka o prochází středem úsečky OT_1 a jelikož přímky o, OO_1 jsou navzájem rovnoběžné, prochází i středem úsečky $T_1 O_1$. Body T_1, O_1 jsou tedy souměrně sdružené podle přímky o , což znamená, že bod T_1 leží na kulové ploše ρ , protože tato plocha je souměrná podle každého svého průměru. Obdobně můžeme dokázat, že na kulové ploše ρ leží i body T_2, T_3, T_4 . Zjistili jsme, že na kulové ploše ρ leží kromě vrcholů čtyřstěnu i body $O_1, O_2, O_3, O_4, T_1, T_2, T_3, T_4$. Ortocentrum O tohoto čtyřstěnu považujeme za střed stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{3}$. Tím zmíněných osm bodů přejde v body $O_\alpha, O_\beta, O_\gamma, O_\delta$ - ortocentra jednotlivých stěn, $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma, T_\delta$ - těžiště jednotlivých stěn. Vrcholy čtyřstěnu přejdou po řadě do bodů F_A, F_B, F_C, F_D , které leží na tělesových výškách čtyřstěnu, a to tak, že $|OF_A| = \frac{1}{3} \cdot |OA|$, $|OF_B| = \frac{1}{3} \cdot |OB|$, $|OF_C| = \frac{1}{3} \cdot |OC|$ a $|OF_D| = \frac{1}{3} \cdot |OD|$. Při tom bod F_A leží mezi body A, O , bod F_B mezi body B, O atd. V dané stejnolehlosti kulové ploše ρ odpovídá kulová plocha τ , jejíž střed S_1 je v naší stejnolehlosti obrazem středu S kulové plochy ρ . Platí

$$|OS_1| = \frac{1}{3} \cdot |OS|,$$

kde S_1 leží mezi body O, S . Poloměr plochy τ je roven třetině poloměru plochy ρ .



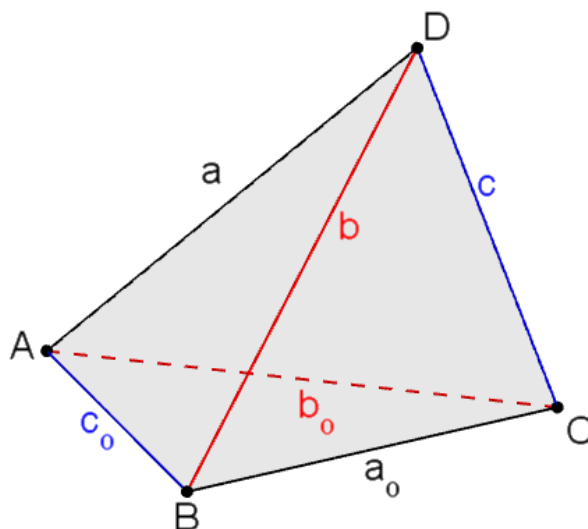
Obrázek 58 - Kulové plochy ρ a τ ve stejnolehlosti se středem v O

3.3 Stejnostěnný čtyřstěn

Název tohoto čtyřstěnu je nejednoznačný a můžeme se setkat s mnoha různými názvy. Například Horák v [13] používá označení čtyřstěn, jehož protější hrany jsou shodné, v publikaci [18] se setkáváme s názvem равностранен тетраедър (ravnostranen tetraedŕ) a v článku [7] s pojmenováním Equifacial Tetrahedra (rovnostěnný či stejnostěnný čtyřstěn). Dalšími názvy, které jsou uvedeny například v [5], jsou například sphenoid, bisphenoid, isosceles tetrahedron a disphenoid.

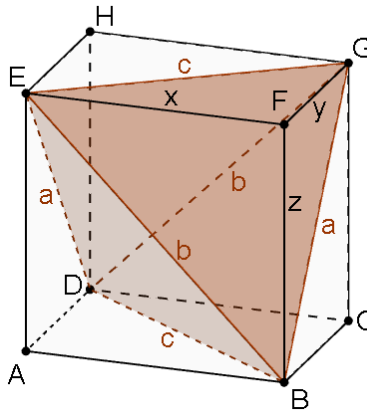
Čtyřstěn se nazývá pravidelný, pokud jsou jeho hrany stejné. Ekvivalentně, je to ten čtyřstěn, jehož stěny jsou shodné a rovnostranné. Kdežto čtyřstěn ABCD nazýváme stejnostěnný, jestliže jsou jeho stěny shodné, ale ne nutně rovnostranné. To nastane právě tehdy, když

$$|AB| = |CD|, \quad |AC| = |BD|, \quad |BC| = |AD|, \quad [7], [18].$$



Obrázek 59 - Stejnostěnný čtyřstěn – popis hran

„Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Trojúhelník, sestavený z jeho tří různých stěnových úhlopříček, je ostroúhlý. Dokažte“ [13, s.54].



Obrázek 60 - Stejnostěnný čtyřstěn vepsaný do kvádrů

Důkaz: [13]

Tvrzení dokážeme pro trojúhelník BDE , neboť všechny ostatní trojúhelníky, které sestojíme ze tří různých stěnových úhlopříček, jsou s ním shodné – délky stran trojúhelníků jsou a, b, c . Délky hran kvádrů označíme následovně

$$|AB| = x, |BC| = y, |BF| = z.$$

Potom délky stran trojúhelníku BDE jsou

$$|DE| = a = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$|EB| = b = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$|BD| = c = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nyní chceme ověřit, že trojúhelník je ostroúhlý, proto označme

$$\varphi = \sphericalangle BDE,$$

přičemž platí

$$\varphi \in (0^\circ; 180^\circ).$$

V trojúhelníku BDE platí kosinová věta

$$|BE|^2 = |BD|^2 + |DE|^2 - 2 \cdot |BD| \cdot |DE| \cdot \cos \varphi,$$

po dosazení délek stran dostáváme následující rovnici

$$x^2 + z^2 = x^2 + y^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \cos \varphi.$$

Po úpravě dostáváme vztah

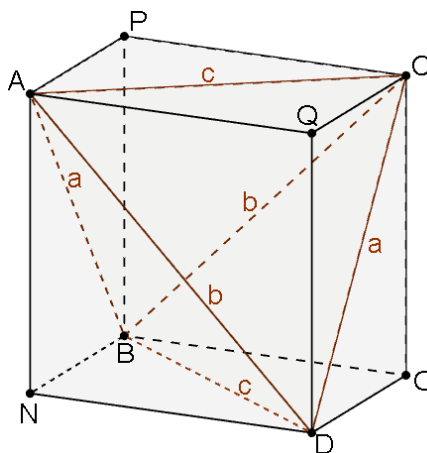
$$\cos \varphi = \frac{y^2}{\sqrt{(y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2)}}.$$

Jelikož pro výraz vždy platí

$$\frac{y^2}{\sqrt{(y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2)}} > 0,$$

úhel φ je ostrý, čímž je důkaz ukončen.

„Čtyřstěn, jehož protější hrany mají stejnou délku, je omezen ostroúhlými trojúhelníky navzájem shodnými“ [13, s. 56].



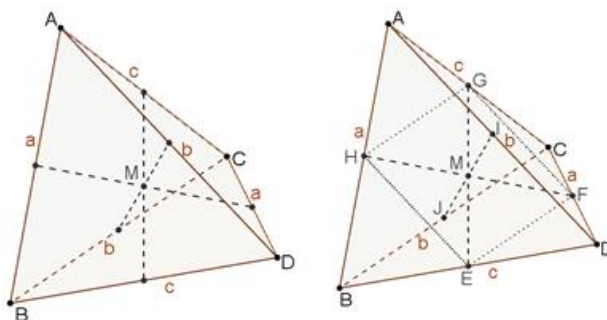
Obrázek 61 - Rovnoběžnostěn opsaný stejnostěnnému čtyřstěnu

Důkaz:

Danému čtyřstěnu opišme rovnoběžnostěn $NDOBAQCP$. Vzhledem k tomu, že protější hrany čtyřstěnu jsou shodné, pak se jedná o kvádr. A všimneme-li si jedné jeho stěny, např. $NDOB$, zjistíme, že její úhlopříčka BD je hrana čtyřstěnu $ABCD$ a druhá úhlopříčka NO je rovnoběžná s hranou AC , tj. s hranou, která je k hraně BD protilehlá. Obdobné tvrzení platí o úhlopříčkách všech stěn sestrojeného rovnoběžnostěnu.

Nyní si stačí všimnout, že všechny trojúhelníky, které vymezují čtyřstěn, jsou shodné, neboť délky jejich stran jsou a, b, c . A z předchozího tvrzení víme, že se jedná o trojúhelníky ostroúhlé. Tím je vyslovené tvrzení dokázáno.

Přímky, spojující středy protějších hran stejnostěnného čtyřstěnu, jsou kolmé k těm hranám, které půlí [13].



Obrázek 62 - Střední příčky ve stejnostěnném čtyřstěnu

Důkaz: [13], [18]

Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme středy hran AB, AC, CD, BD postupně H, G, F, E . Z věty sss o shodnosti trojúhelníku plyne, že

$$\triangle BCD \cong \triangle CDA$$

a potom i sobě odpovídající těžnice jsou shodné. Platí tedy

$$|BF| = |FA|,$$

a proto je trojúhelník BFA rovnoramenný. Přímka FH je osou souměrnosti trojúhelníku BFA neboli

$$FH \perp AB.$$

Obdobně v trojúhelníku DHC platí

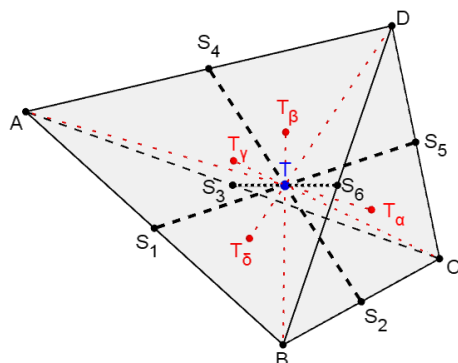
$$FH \perp DC.$$

Tím jsme dokázali, že přímka HF je kolmá na hrany AB, CD , které půlí. U zbylých dvou středních příček se důkaz provádí stejně a platí

$$EG \perp BD, EG \perp AC \text{ a } IJ \perp AD, IJ \perp BC.$$

A tedy přímka EG půlí hrany BD, AC a přímka IJ půlí hrany AD, BC .

Těžiště stejnostěnného čtyřstěnu splývá s průsečíkem středních příček. Všechny tělesové těžnice jsou navzájem shodné [13].



Obrázek 63 - Těžiště jako průsečík středních příček ve stejnostěnném čtyřstěnu

Důkaz: [13], [18]

Označme středy hran čtyřstěnu $ABCD$ postupně S_1 až S_6 a těžiště jednotlivých stěn čtyřstěnu postupně T_α až T_δ (viz Obrázek 63). Těžnice DS_1 trojúhelníka ABD a těžnice CS_1 trojúhelníka ABC určují rovinu, která obsahuje jednak těžiště T daného čtyřstěnu, jednak střední příčku S_1S_5 a tudíž i průsečík S všech středních příček. Avšak body T, S leží v každé rovině určené dvěma různoběžnými těžnicemi. Důsledkem toho je, že oba tyto body splývají. Popsané roviny mají společný jediný bod.

Ze shodnosti trojúhelníků ABC, ABD plyne i shodnost stěnových těžnic $|DS_1| = |CS_1|$. Označíme-li T_γ, T_δ těžiště stěn ABD, ABC , platí též $|S_1T_\gamma| = |S_1T_\delta|$. Dále je trojúhelník CS_1T_γ shodný s trojúhelníkem DS_1T_δ podle věty *sus*, neboť

$$|DS_1| = |CS_1|$$

$$|S_1T_\gamma| = |S_1T_\delta|$$

$$|\sphericalangle CS_1T_\gamma| = |\sphericalangle DS_1T_\delta|.$$

Odtud pak máme $|CT_\gamma| = |DT_\delta|$. Podobně se dá ukázat, že

$$|AT_\beta| = |BT_\beta| = |CT_\gamma| = |DT_\delta|,$$

kde T_α, T_β jsou těžiště stěn BCD, ACD . Tím je tvrzení dokázáno.

Všechny tělesové výšky čtyřstěnu, jehož protější hrany jsou vzájemně shodné, mají shodnou délku [13], [18].

Důkaz:

Tělesové výšky daného čtyřstěnu $ABCD$ sestrojené z vrcholů A, B, C, D označme postupně v_1, v_2, v_3, v_4 . Objem V čtyřstěnu $ABCD$ je pak

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot v_4 = \frac{1}{3}S_{ABD} \cdot v_3 = \frac{1}{3}S_{ACD} \cdot v_2 = \frac{1}{3}S_{BCD} \cdot v_1.$$

Ale jelikož obsahy stěn si jsou rovny, pak platí

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4,$$

jak jsme chtěli dokázat.

V každém stejnostěnném čtyřstěnu splývají následující 4 body: střed kulové plochy opsané a vepsané, těžiště a Mongeův bod [13], [18].

Důkaz: [18]

Jelikož pro obvody jednotlivých stěn čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$(1) \quad o_1 = o_2 = o_3 = o_4,$$

pro souřadnice středu kulové plochy čtyřstěnu vepsané platí

$$(2) \quad S_v = \frac{o_1A + o_2B + o_3C + o_4D}{o_1 + o_2 + o_3 + o_4} \quad [18, \text{s. 64}]$$

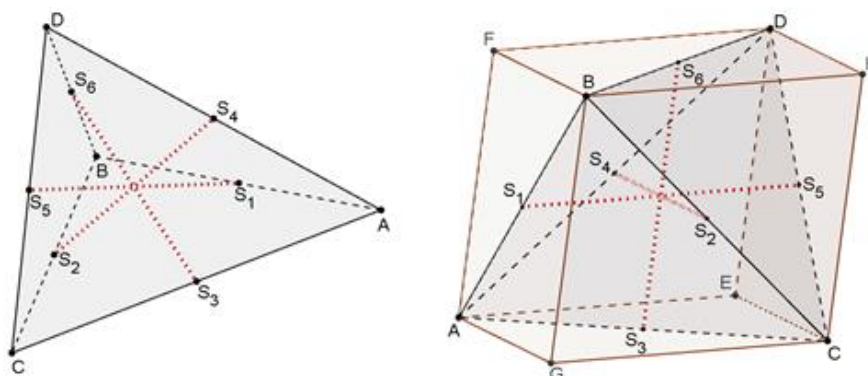
a pro souřadnice těžiště platí

$$(3) \quad T = \frac{A + B + C + D}{4} \quad [18, \text{s. 55 – 56}, [7, \text{s. 2}].$$

Když vezmeme v úvahu rovnici (1) pak nastane rovnost rovnic (2) a (3) jinými slovy se střed kulové plochy vepsané shoduje s těžištěm. Vezmeme-li v úvahu, že se střední příčky a výšky ve stejnostěnném čtyřstěnu shodují, pak z Mongeovy věty [18, s.88] vyplývá, že se Mongeův bod M shoduje s těžištěm T . Jelikož je bod M a střed kulové plochy opsané S_o symetrický podle T [18, s. 88], pak je $M = S_o$.

Platí tedy $S_v = S_o = M = T$.

Ve stejnostěnném čtyřstěnu mají střední příčky délky rovné nejvýše 1. Ukažte, že délky hran tohoto čtyřstěnu mají délky rovné nejvýše $\sqrt{2}$ [13].



Obrázek 64 - Střední příčky ve stejnostěnném čtyřstěnu

Důkaz:

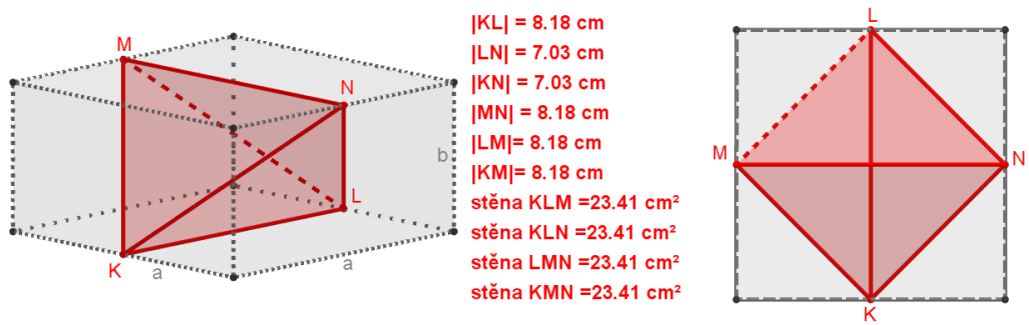
Danému čtyřstěnu opišme rovnoběžnostěn $GCEABHDF$. Vzhledem k tomu, že protější hrany čtyřstěnu mají shodnou délku, pak se jedná o kvádr. Pokud mají střední příčky délky rovné nejvýše 1, pak i rozměry kváдру jsou rovné nejvýše 1, neboť středy hran čtyřstěnu jsou zároveň středy stěn kváдру. Platí tedy

$$S_1S_5 \parallel GC, S_2S_4 \parallel CE, S_3S_6 \parallel CH.$$

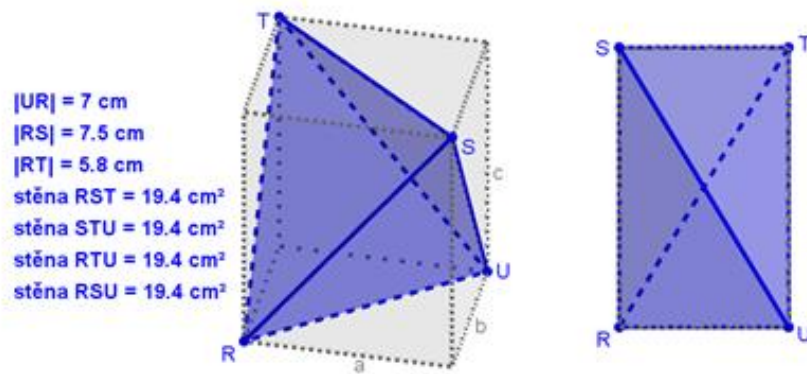
Hrany čtyřstěnu jsou stěnové úhlopříčky kváдру, proto můžeme snadno spočítat jejich délku pomocí Pythagorovy věty. Jsou-li rozměry kváдру rovny nejvýše 1, pak je délka hrany skutečně rovna nejvýše $\sqrt{2}$.

Podle [5] a [35] můžeme rozlišit různé typy disfenoidů (stejnostěnných čtyřstěnů). Pokud jsou stěny disfenoidu rovnostranné trojúhelníky, jedná se o pravidelný čtyřstěn. Jestliže jsou stěny rovnoramenné trojúhelníky, pak jej nazýváme tetragonal disphenoid. Jsou-li stěny čtyřstěnu tvořeny různostrannými trojúhelníky, nazýváme jej rhombic disphenoid. Stěny obou disfenoidů (tetragonal i rhombic) jsou čtyři shodné trojúhelníky.

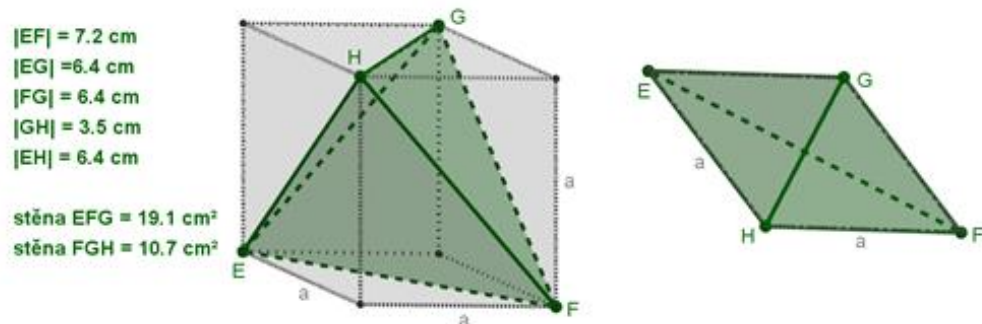
Existují další dva typy disfenoidů, které jsou zobecněním disfenoidu. Tyto zobecněné disfenoidy mají dva páry shodných stěn. Prvním typem zobecněného disfenoidu je diagonal disphenoid, jehož stěny jsou tvořeny dvěma páry různých rovnoramenných trojúhelníků. Druhým typem zobecněného disfenoidu je phyllitic disphenoid, jehož stěny jsou tvořeny dvěma páry různých různostranných či rovnoramenných trojúhelníků.



Obrázek 65 - Tetragonal disphenoid



Obrázek 66 - Rhombic disphenoid

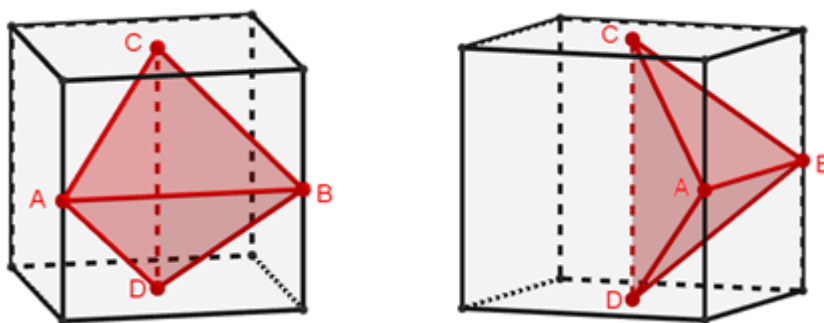


Obrázek 67 - Diagonal disphenoid

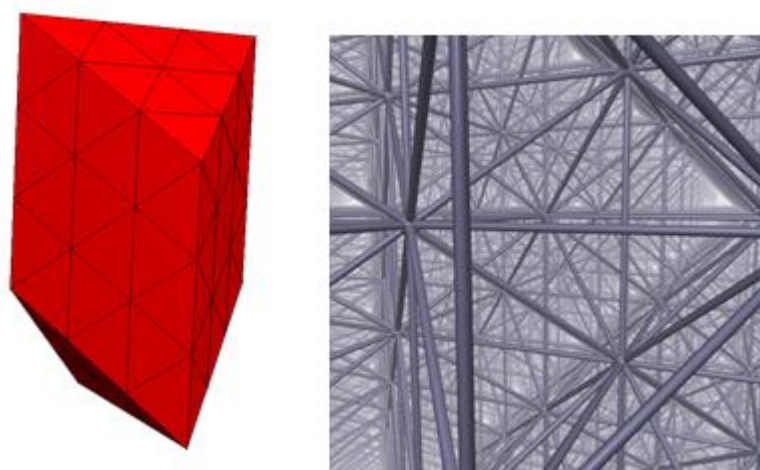


Obrázek 68 - Phyllic disphenoid

Některé tetragonální disfenoidy mohou vyplňovat prostor a tvořit tzv. voštiny. Příkladem je disfenoid, jehož vrcholy mají souřadnice $A = [-1; 0; 0]$, $B = [1; 0; 0]$, $C = [0; 1; 1]$, $D = [0; 1; -1]$. Každá jeho stěna je rovnoramenný trojúhelník s délkami hran $\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2$. Tento tetragonální disfenoid vyplňuje prostor [5].



Obrázek 69 - Tetragonální disfenoid vyplňující prostor

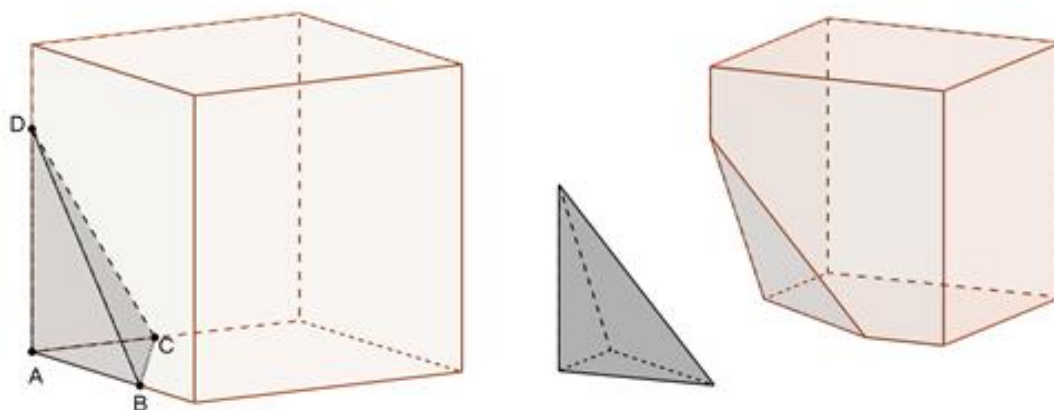


Obrázek 70 - Vyplňování prostoru [28]

S pojmem disfenoid se můžeme setkat i v mineralogii. Jedná se o uzavřený krystalový tvar, ve kterém se střídají dvě horní a dvě spodní plochy po 90° . Podle symetrie rozlišujeme rombický disfenoid a tetragonální disfenoid. Rombický disfenoid má dvě horní plochy a dvě dolní plochy, které jsou symetricky uspořádány podle tří vzájemně kolmých dvojčetných rotačních os symetrie. Oproti tomu tetragonální disfenoid má dvě horní plochy a dvě dolní plochy, které jsou symetricky uspořádány po 90° podle čtyřčetné inverzní osy symetrie [33].

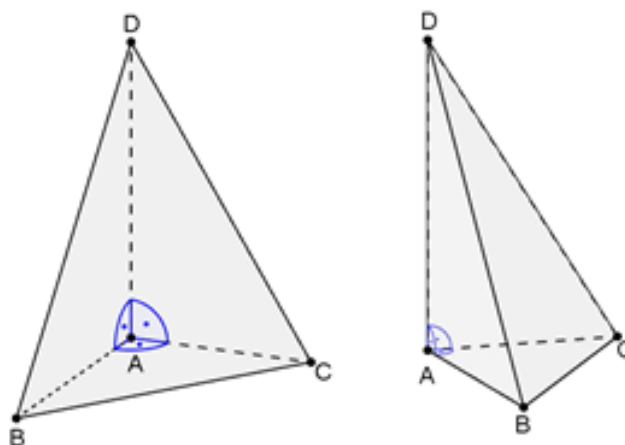
3.4 Pravoúhlý čtyřstěn

Čtyřstěn, jehož tři stěny tvoří pravoúhlé trojúhelníky s pravým úhlem u společného vrcholu těchto stěn, se nazývá pravoúhlý. Tento čtyřstěn dostaneme jednoduše tak, že uřízneme špičku čtyřbokého hranolu (viz Obrázek 71).



Obrázek 71 - Pravoúhlý čtyřstěn jako seřznutí vrcholu krychle

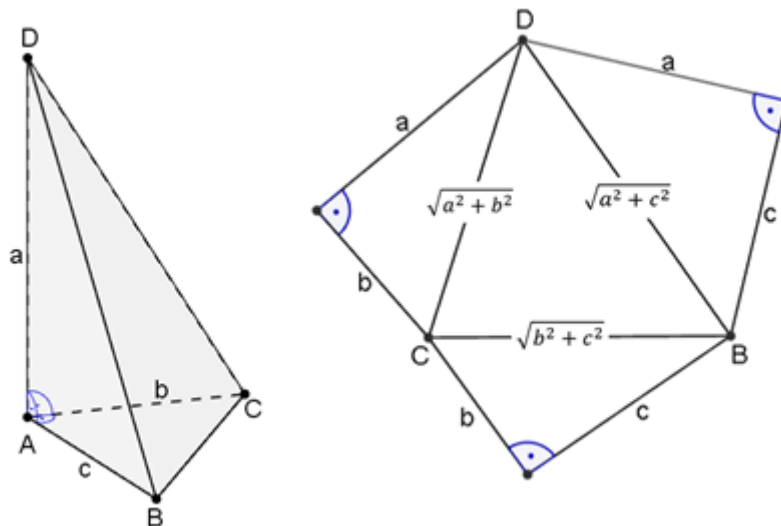
Stěna BCD , která leží naproti vrcholu A s pravými úhly, se nazývá základna čtyřstěnu. Hrany AB, AC, AD , které jsou k sobě kolmé, se nazývají ramena čtyřstěnu [18], [36].



Obrázek 72 - Pravoúhlý čtyřstěn

Povrch pravoúhlého čtyřřtěnu

Pokud mají ramena délky a, b, c , pak povrch tohoto čtyřřtěnu vyjádříme jako součet obsahů jednotlivých stěn. Pro výpočet obsahu základny využijeme Heronův vzorec.



Obrázek 73 - Povrch pravoúhlého čtyřřtěnu

Povrch pravoúhlého čtyřřtěnu vypočítáme následovně

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} + ac + ab + bc \right).$$

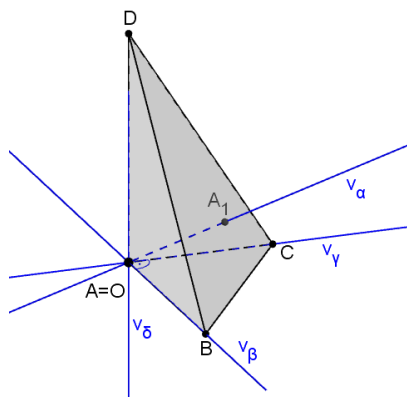
Objem pravoúhlého čtyřřtěnu

Vyjdeme z poznatku, že čtyřřtěn $ABCD$ je trojboký jehlan a použijeme vzoreček pro výpočet objemu jehlanu $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v_t$, kde S_p je obsah podstavy a v_t je tělesová výška. Jako podstavu si zvolíme např. stěnu ABC , její obsah je $S_p = \frac{1}{2} \cdot bc$.

Objem čtyřřtěnu tedy vypočítáme pomocí vzorce $V = \frac{abc}{6}$.

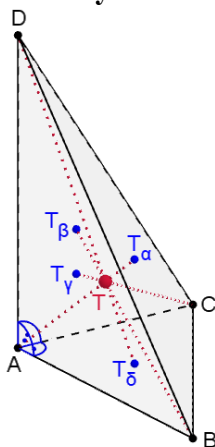
Ortocentrum pravoúhlého čtyřstěnu

V kapitole 3.2 jsme si řekli, že pokud existuje ortocentrum čtyřstěnu, pak výšky čtyřstěnu procházejí ortocentry stěn. Jak můžeme vidět na Obrázku 74, výšky $v_\beta, v_\gamma, v_\delta$ procházejí vrcholem A , neboť stěny β, γ, δ jsou pravoúhlé trojúhelníky. Výška v_α vychází z vrcholu A kolmo na stěnu α . Tudiž se všechny výšky čtyřstěnu protínají ve vrcholu A , který je ortocentrem pravoúhlého čtyřstěnu $ABCD$.

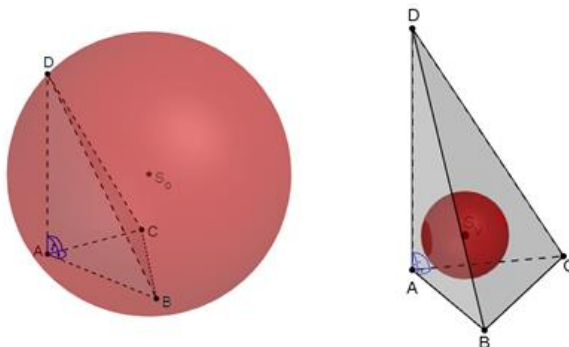


Obrázek 74 - Ortocentrum pravoúhlého čtyřstěnu

Těžiště a kulové plochy pravoúhlého čtyřstěnu



Obrázek 75 - Těžiště pravoúhlého čtyřstěnu



Obrázek 76 - Kulová plocha opsaná a vepsaná pravoúhlému čtyřstěnu

3.4.1 De Guaova věta

Tato věta je prostorovým zobecněním Pythagorovy věty, která platí v pravoúhlém trojúhelníku. Švrček v [27] tuto větu nazývá Faulhaberova věta.

Druhá mocnina obsahu základny pravoúhlého čtyřstěnu se rovná součtu druhých mocnin obsahů zbylých stěn [34].

Důkaz:

V libovolném pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly ve stěnách čtyřstěnu u vrcholu A podle de Guaovy věty platí následující rovnost

$$S_{BCD}^2 = S_{ABC}^2 + S_{ABD}^2 + S_{ACD}^2.$$

Dosadíme-li obsahy jednotlivých stěn, dostáváme

$$\left(\frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2$$

a po úpravě získáme

$$\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4} = \frac{a^2c^2}{4} + \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4},$$

čímž je důkaz hotov.

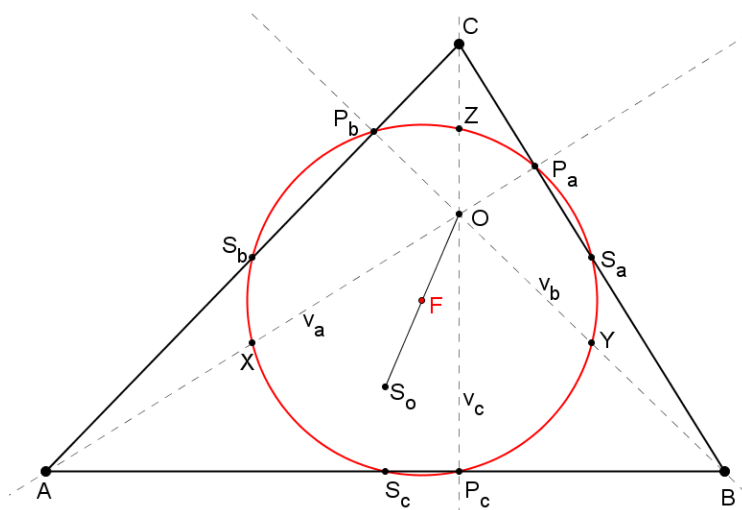
4 Prostorové zobecnění kružnice devíti bodů

V této kapitole se budeme zabývat méně známou vlastností trojúhelníku. Nejprve si uvedeme definici kružnice šesti a devíti bodů a poté se budeme zabývat její prostorovou analogií. Ukážeme si, zda lze nalézt prostorovou analogii pro čtyřstěn, případně si odvodíme podmínky, za kterých prostorové zobecnění existuje.

4.1 Definice kružnice devíti bodů

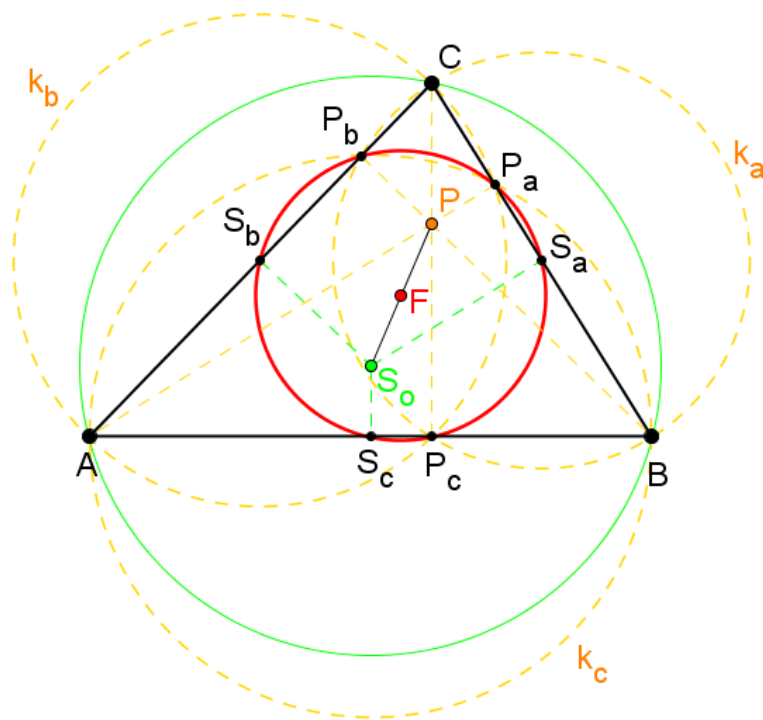
Připomeňme si nejprve pojem kružnice devíti bodů, se kterou jsme se setkali v rovině. Uvedeme si dva možné způsoby popisu kružnice devíti bodů. Tyto popisy odpovídají dvěma různým zavedením ortocentra trojúhelníku, které jsme uvedli v kapitole 2.6.

Klasický popis kružnice devíti bodů trojúhelníku ABC říká, že to je taková kružnice, která prochází středy stran, patami výšek a dále středy úseček spojujících ortocentrum s vrcholy [4].



Obrázek 77 - Kružnice devíti bodů

Klasickou definici kružnice devíti bodů můžeme přeformulovat a mluvit tak o kružnici šesti bodů trojúhelníku ABC . Ta prochází pravoúhlými průměty středu kružnice trojúhelníku opsané na jeho strany – body S_a, S_b, S_c , dále prochází pravoúhlými průměty potenčního středu kružnic k_a, k_b a k_c (definovanými v kapitole 2.6) na strany trojúhelníku – body P_a, P_b, P_c [1].



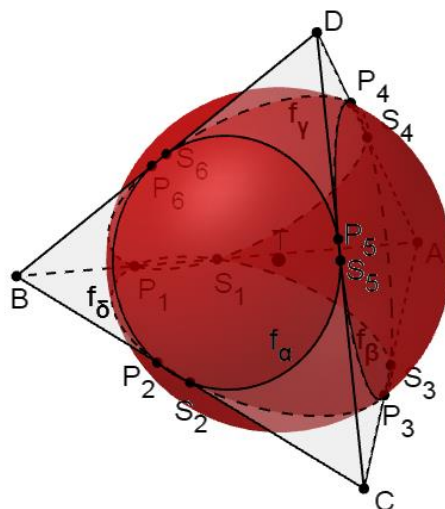
Obrázek 78 - Kružnice šesti bodů

Vidíme, že pro trojúhelník je kružnice šesti bodů totožná s kružnicí devíti bodů. Středem této kružnice je střed úsečky spojující ortocentrum (resp. potenční střed) se středem kružnice opsané trojúhelníku ABC . Poloměr kružnice devíti bodů je roven polovině velikosti poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

Prostorovou analogií kružnice devíti bodů jsou kulové plochy. Jednou z nich je kulová plocha dvanácti bodů prvního typu, další z možných analogií je kulová plocha dvanácti bodů druhého typu. Označení první a druhý typ není ve všech publikacích stejné, proto budeme vycházet ze značení, které je uvedeno v [13] a [23]. Kulovou plochou dvanácti bodů prvního typu se budeme zabývat nejdříve, neboť existuje pouze pro ortocentrický čtyřstěn. Kulová plocha druhého typu však nejlépe odpovídá rovinnému případu. Jelikož chceme co nejvíce zdůraznit analogii prostorových a rovinných útvarů, budeme se touto kulovou plochou zabývat i pro čtyřstěny neortické. Neboť z kapitoly 3.2 víme, že pro ortocentrické čtyřstěny existují obě tyto kulové plochy.

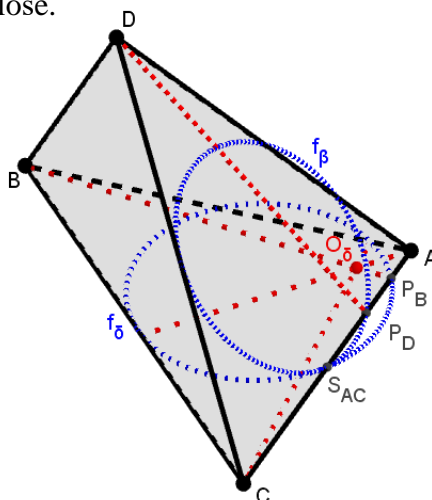
4.2 Kulová plocha dvanácti bodů prvního typu

Kulová plocha je určena středy hran $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ a patami stěnových výšek $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ – viz Obrázek 79. Středem této kulové plochy je těžiště čtyřstěnu T [10]. Na této kulové ploše leží kružnice devíti bodů jednotlivých stěn, jak se můžeme dočíst v [13] a [25]. V kapitole 3.2 jsme si odvodili existenci kulové plochy dvanácti bodů prvního typu pro ortocentrické čtyřstěny.



Obrázek 79 - Kulová plocha dvanácti bodů prvního typu

Kulová plocha dvanácti bodů prvního typu neexistuje pro neortické čtyřstěny. Jak je zřejmé z Obrázku 80, v neortickém čtyřstěnu nesplyvají paty výšek vedené z protějších vrcholů na jednu hranu. Pata kolmice z vrcholu B na hranu AC je označena P_B , pata kolmice z vrcholu D na tutéž hranu je označena P_D . Pak je zřejmé, že kružnice devíti bodů f_δ a f_β trojúhelníků ABC a ACD se protínají pouze ve středu hrany AC , a tedy nemohou ležet na jedné kulové ploše.

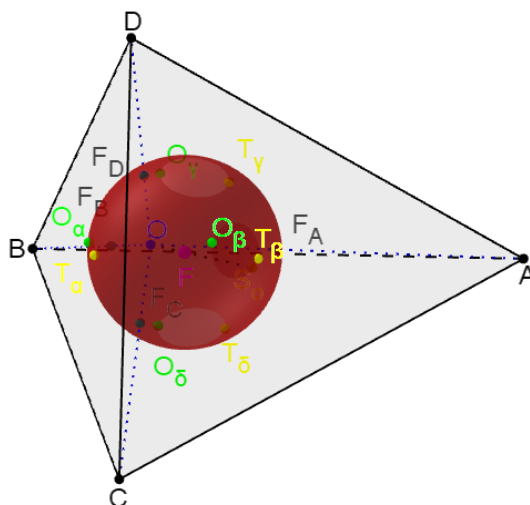


Obrázek 80 - Kulová plocha dvanácti bodů prvního typu pro neortický čtyřstěn

4.3 Kulová plocha dvanácti bodů druhého typu

Kulovou plochu dvanácti bodů pro čtyřstěn $ABCD$ s ortocentrem O jsme si definovali v kapitole 3.2. Víme, že prochází těžišti stěn $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma, T_\delta$, patami výšek $O_\alpha, O_\beta, O_\gamma, O_\delta$ a dále body F_A, F_B, F_C, F_D , které leží na úsečkách spojujících vrcholy s ortocentrem, a které vyhovují podmínce

$$\frac{|AF_A|}{|F_AO|} = \frac{|BF_B|}{|F_BO|} = \frac{|CF_C|}{|F_CO|} = \frac{|DF_D|}{|F_DO|} = \frac{2}{1} \quad [13].$$



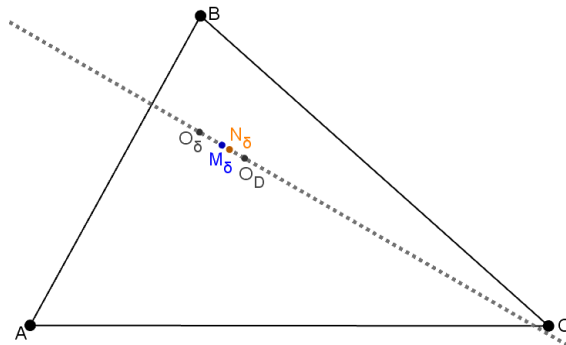
Obrázek 81 - Kulová plocha dvanácti bodů druhého typu

U čtyřstěnu bez ortocentra je jeho přirozenou náhradou Mongeův bod, kterým jsme se zabývali v kapitole 2.6.1. S využitím Mongeova bodu odvodíme existenci kulové plochy dvanácti bodů i pro neortické čtyřstěny.

V neortickém čtyřstěnu $ABCD$ je dán jeho Mongeův bod M . Označme body úseček, jejichž krajními body je Mongeův bod a vrchol čtyřstěnu, postupně F_A, F_B, F_C, F_D . Pro tyto body platí

$$\frac{|AF_A|}{|F_AM|} = \frac{|BF_B|}{|F_BM|} = \frac{|CF_C|}{|F_CM|} = \frac{|DF_D|}{|F_DM|} = \frac{2}{1}.$$

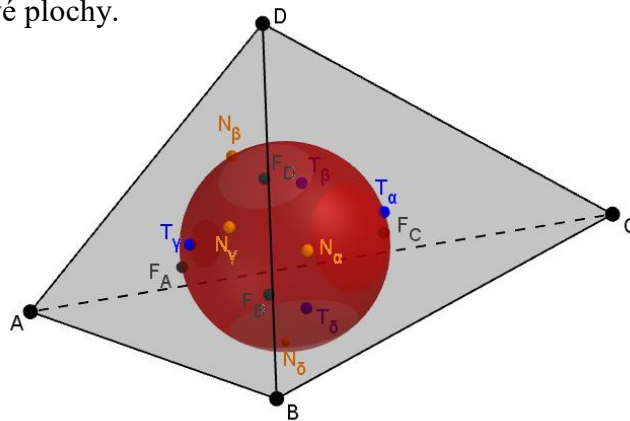
Dále uvažujme v každé stěně čtyřstěnu patu výšky, pravouhlý průmět Mongeova bodu do roviny této stěny a ortocentrum trojúhelníku stěny – na Obrázku 82 jsou to po řadě body O_D, M_δ a O_δ . Tyto body jsou kolineární, tedy lze definovat bod N_δ , který je harmonicky sdružený s bodem O_δ vzhledem k bodům M_δ a O_D . Obdobným způsobem zavedeme body N_α, N_β a N_γ .



Obrázek 82 - Bod N_δ je harmonicky sdružený s O_δ vzhledem k bodům M_δ a O_D

Kulová plocha dvanácti bodů druhého typu v obecném čtyřstěnu prochází těžišti stěn, body $N_\alpha, N_\beta, N_\gamma$ a N_δ a body F_A, F_B, F_C, F_D . Střed této kulové plochy je bod, který dělí úsečku spojující Mongeův bod a střed kulové plochy opsané v poměru 1: 2. Poloměr této kulové plochy je roven jedné třetině velikosti poloměru kulové plochy čtyřstěnu opsané [10], [25], [29].

U čtyřstěnu s ortocentrem splývá v každé stěně pata výšky na tuto stěnu s ortocentrem stěny a pravoúhlým průmětem Mongeova bodu (ortocentra). Splývají s nimi i body N , a proto je kulová plocha dvanácti bodů ortického čtyřstěnu speciálním typem takto definované kulové plochy.



Obrázek 83 - Kulová plocha dvanácti bodů druhého typu u neortických čtyřstěnu

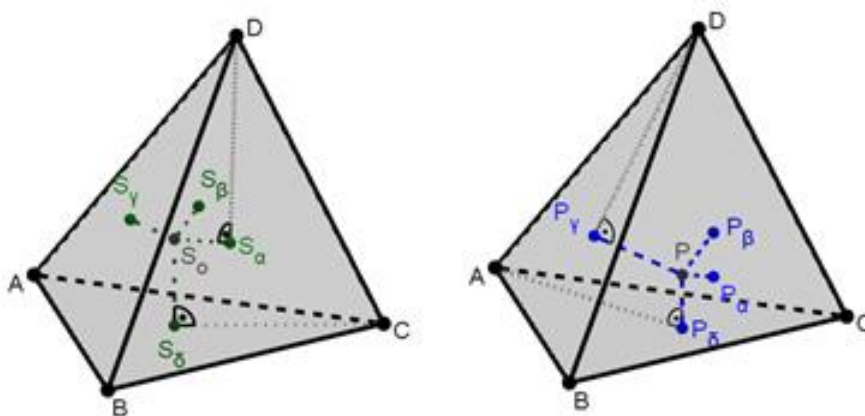
Harmonicky sdružené body jsou definovány následujícím vztahem: *Necht' jsou dány kolineární body K, L, M, N takové, že bod M je vnitřní bod úsečky KL a bod N vnějším bodem úsečky KL . Potom jsou body M a N harmonicky sdružené vzhledem k bodům K a L , pokud platí následující vztah $\frac{|KM|}{|LM|} = \frac{|KN|}{|NL|}$ [32].*



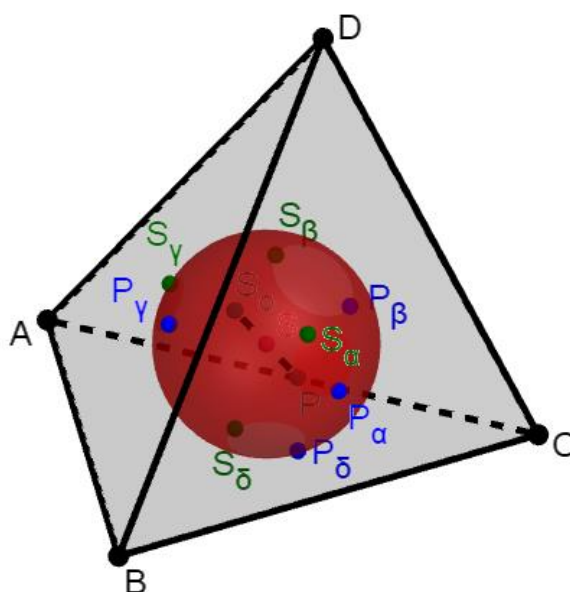
Obrázek 84 - Harmonicky sdružené body

4.4 Kulová plocha osmi bodů

Další prostorová analogie kružnice devíti bodů vychází z definice kružnice šesti bodů, kterou jsme si uvedli v kapitole 2.6. Prostorovou analogii kružnice šesti bodů trojúhelníku bychom mohli vyslovit následovně. *Nechť je S_o střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ a P potenčním středem čtyř kulových ploch opsaných stěnám čtyřstěnu. Potom paty kolmic vedených z bodů S_o a P na stěny čtyřstěnu leží na jedné kulové ploše.* Tuto kulovou plochu budeme nazývat kulovou plochou osmi bodů. Střed této kulové plochy je střed úsečky S_oP . Paty kolmic z bodu S_o do rovin jednotlivých stěn jsou středy kružnic opsaných trojúhelníkům stěn, které budeme označovat $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$. Paty kolmic potenčního středu P do rovin stěn budeme označovat $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, P_\delta$ [25].



Obrázek 85 - Paty kolmic z bodů S_o a P na stěny čtyřstěnu $ABCD$



Obrázek 86 - Kulová plocha osmi bodů

5 Zásobník návrhů pracovních listů

V této kapitole jsou popsány jednotlivé pracovní listy, které je možné využít na základní i střední škole v hodinách stereometrie. Nápady jsou zpracovány podle předem zvolené osnovy. Vždy je uvedeno téma, vzdělávací oblast a obor, tematická oblast v RVP ZV a RVP G, učivo v RVP ZV a RVP G, ročník, pro který je pracovní list určen. Dále je zde uvedena předpokládaná časová dotace, cíle aktivity, prostředky a pomůcky a metodický komentář. Žádný z pracovních listů nebyl prozatím ověřen v praxi. Všechny pracovní listy jsou autorské.

Jsou zde čtyři návrhy pracovních listů s názvy: Síť pravidelného čtyřstěnu, Pravidelný čtyřstěn, Pravidelný čtyřstěn – modely, Krychle a čtyřstěny.

PRACOVNÍ LIST č. 1 – Síť pravidelného čtyřstěnu

Autor: Kateřina Červenková

Téma: Síť pravidelného čtyřstěnu

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Vzdělávací obor: Matematika a její aplikace

Vzdělávací předmět: Matematika

Tematická oblast v RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Učivo v RVP ZV: základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec

Tematická oblast v RVP G: Geometrie

Učivo v RVP G: geometrie v prostoru – polohové a metrické vlastnosti; základní tělesa, povrchy a objemy, volné rovnoběžné promítání

Ročník: 9. ročník ZŠ – 3. ročník SŠ

Předpokládaná časová dotace: 20 minut

Cíle aktivit:

- žák by měl umět načrtnout síť pravidelného čtyřstěnu

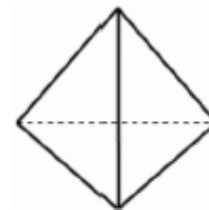
Prostředky a pomůcky: pracovní list, model pravidelného čtyřstěnu, tužka, pravítko

Metodický komentář:

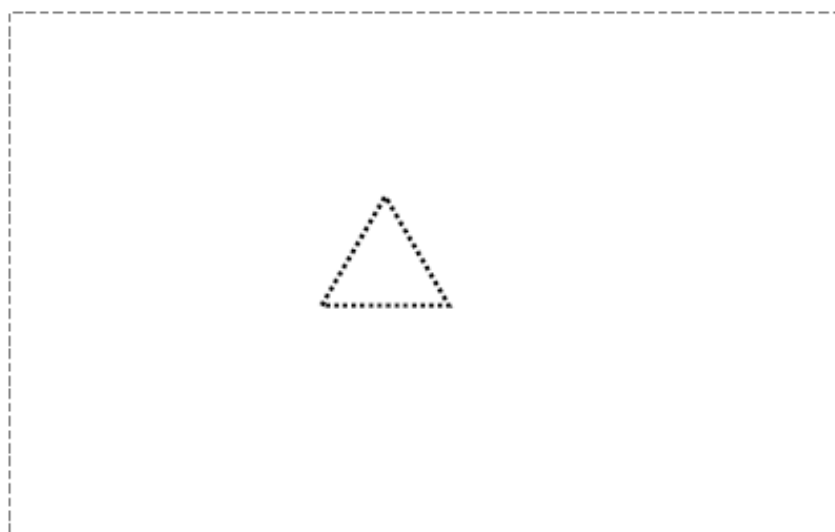
Pracovní list je primárně určen pro procvičování v hodině, jedná se o rozšiřující učivo Stereometrie, konkrétně o téma týkající se jehlanu. Žáci se naučí načrtnout síť čtyřstěnu podle modelu – uvědomí si, že povrch pravidelného čtyřstěnu je tvořen čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky.

Sít' pravidelného čtyřstěnu

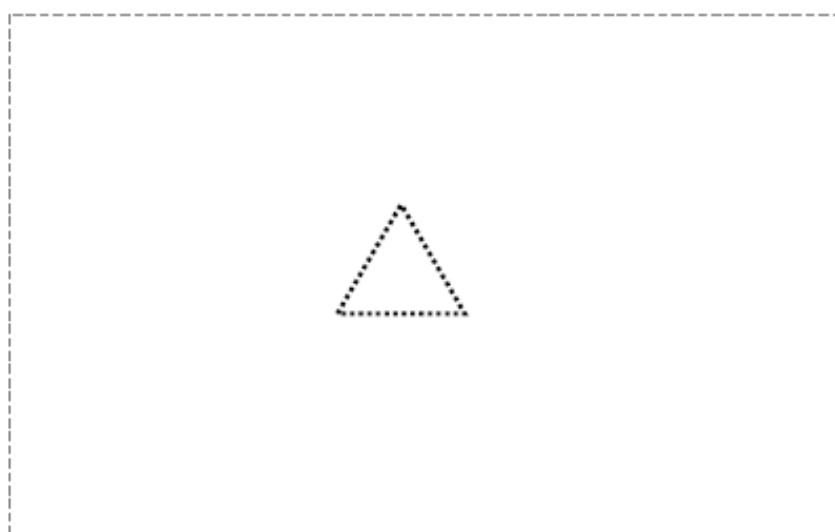
Prohlédni si model pravidelného čtyřstěnu a načrtni jeho sít'.



1. návrh sítě pravidelného čtyřstěnu



2. návrh sítě pravidelného čtyřstěnu



Obrázek 87 - Pracovní list č.1

PRACOVNÍ LIST č. 2 – Pravidelný čtyřstěn

Autor: Kateřina Červenková

Téma: Pravidelný čtyřstěn

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Vzdělávací obor: Matematika a její aplikace

Vzdělávací předmět: Matematika

Tematická oblast v RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Učivo v RVP ZV: základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec

Tematická oblast v RVP G: Geometrie

Učivo v RVP G: geometrie v prostoru – polohové a metrické vlastnosti; základní tělesa, povrchy a objemy, volné rovnoběžné promítání

Ročník: 9. ročník ZŠ – 3. ročník SŠ

Předpokládaná časová dotace: 30 - 40 minut

Cíle aktivit:

- žák by měl umět vysvětlit pojem pravidelný čtyřstěn a odvodit výpočet povrchu a objemu
- žák by měl umět popsat čtyřstěn jako trojboký jehlan a sestavit jeho model

Prostředky a pomůcky: pracovní listy, nůžky, lepidlo, tužka

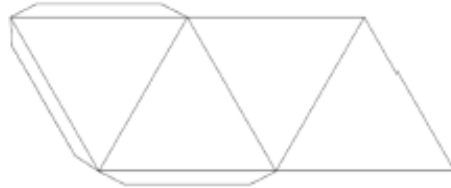
Mezipředmětové vztahy: člověk a společnost

Metodický komentář:

Pracovní list je primárně určen pro procvičování v hodině, jedná se o rozšiřující učivo Stereometrie, konkrétně o téma týkající se jehlanu. Řekla bych, že je důležité, aby se žáci setkali i s pojmem čtyřstěn, neboť se jedná o trojboký jehlan. Na středních školách by se žáci měli setkat s pojmy pravidelný a polopravidelný mnohostěn. A jelikož jsou to pro žáky prázdné pojmy, volila bych seznámení s nimi pomocí sítí těles a sestavení modelů, aby si je žáci mohli osahat a například si do tabulky zaznamenat počty vrcholů, hran a stěn. Možnost osahat si model tělesa, o kterém se v hodině mluví, výrazně zvyšuje jeho názornost a usnadňuje porozumění tématu i u slabších žáků a žáků se SPU. Obrázky byly použity z [15], [17], [24].

Pravidelný čtyřstěn (tetraedr) je trojrozměrné těleso, jehož povrch je tvořen shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Pravidelný čtyřstěn řadíme mezi pravidelné trojboké jehlany. Podle Platóna je tetraedr symbolem ohně.

1) Pomocí dané sítě sestroj model pravidelného čtyřstěnu.



2) Vyplň následující tabulku. Využij model z úlohy 1.

Počet stěn	Počet hran	Počet vrcholů	Typ stěny	Počet hran u vrcholu

3) Jak bys vypočítal objem čtyřstěnu?

.....

.....

.....

.....

4) Jak bys vypočítal povrch čtyřstěnu?

.....

.....

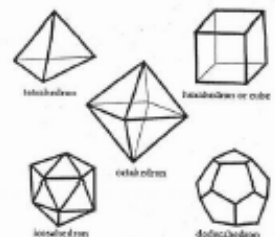
.....

.....

Platón



- Žil v letech 427-347 př.n.l.
- Řecký filosof, pedagog a matematik
- Založil svou školu Akademie
- Říká, že podstatou světa jsou dokonalá tělesa
 oheň - čtyřstěn
 země - krychle
 vzduch - osmistěn
 jsoucno - dvanáctistěn
 voda - dvacetistěn
- jsoucno = všeho, co existuje



Obrázek 88 - Pracovní list č.2

PRACOVNÍ LIST č. 3 – Pravidelný čtyřstěn – modely

Autor: Kateřina Červenková

Téma: Pravidelný čtyřstěn – modely

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Vzdělávací obor: Matematika a její aplikace

Vzdělávací předmět: Matematika

Tematická oblast v RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Učivo v RVP ZV: základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec

Tematická oblast v RVP G: Geometrie

Učivo v RVP G: geometrie v prostoru – polohové a metrické vlastnosti; základní tělesa, povrchy a objemy, volné rovnoběžné promítání

Ročník: 9. ročník ZŠ – 3. ročník SŠ

Předpokládaná časová dotace: 45 minut

Cíle aktivit:

- žák by měl umět vysvětlit pojem pravidelný čtyřstěn a sestavit jeho model

Prostředky a pomůcky: pracovní list, nůžky, lepidlo

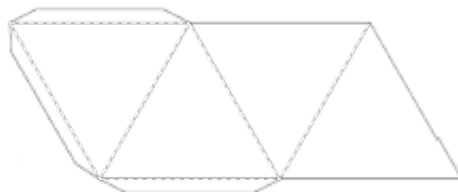
Metodický komentář:

Pracovní list je primárně určen pro procvičování v hodině, jedná se o rozšiřující učivo Stereometrie, konkrétně o téma týkající se jehlanu. Žáci se setkají s více možnými modely téhož tělesa. Možnost osahat si model tělesa, o kterém se v hodině mluví, výrazně zvyšuje jeho názornost a usnadňuje porozumění tématu i u slabších žáků a žáků se SPU.

Obrázky byly použity z [15], [22].

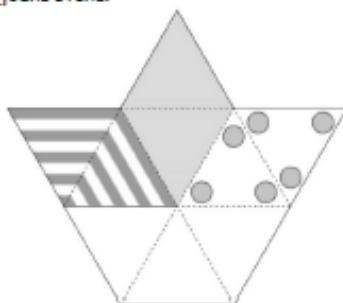
1) Pomocí dané sítě sestrojte model pravidelného čtyřstěnu.

Sít' vystřihněte podél plných čar. Podél čárkovaných čar pak přehněte, na volné přesahy naneste lepidlo a sestavte model tělesa.

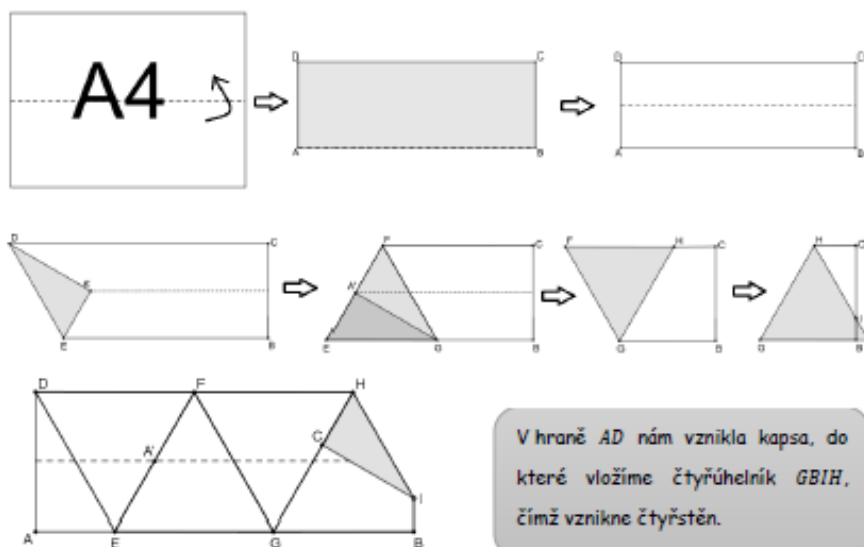


2) Pomocí dané sítě sestrojte model pravidelného čtyřstěnu.

Sít' vystřihněte podél plných čar. V tomto případě nenechávejte volné přesahy nutné pro nanesení lepidla - model tělesa bude držet pohromadě i bez lepení. Podél čárkovaných čar pak přehněte tak, aby potištěná strana papíru tvořila vnějšek přehybu, a sestavte model tělesa. Vytvoříme model pravidelného čtyřstěnu, který nebude mít jednu stěnu.



3) Pomocí návodu sestrojte model pravidelného čtyřstěnu z listu papíru A4.

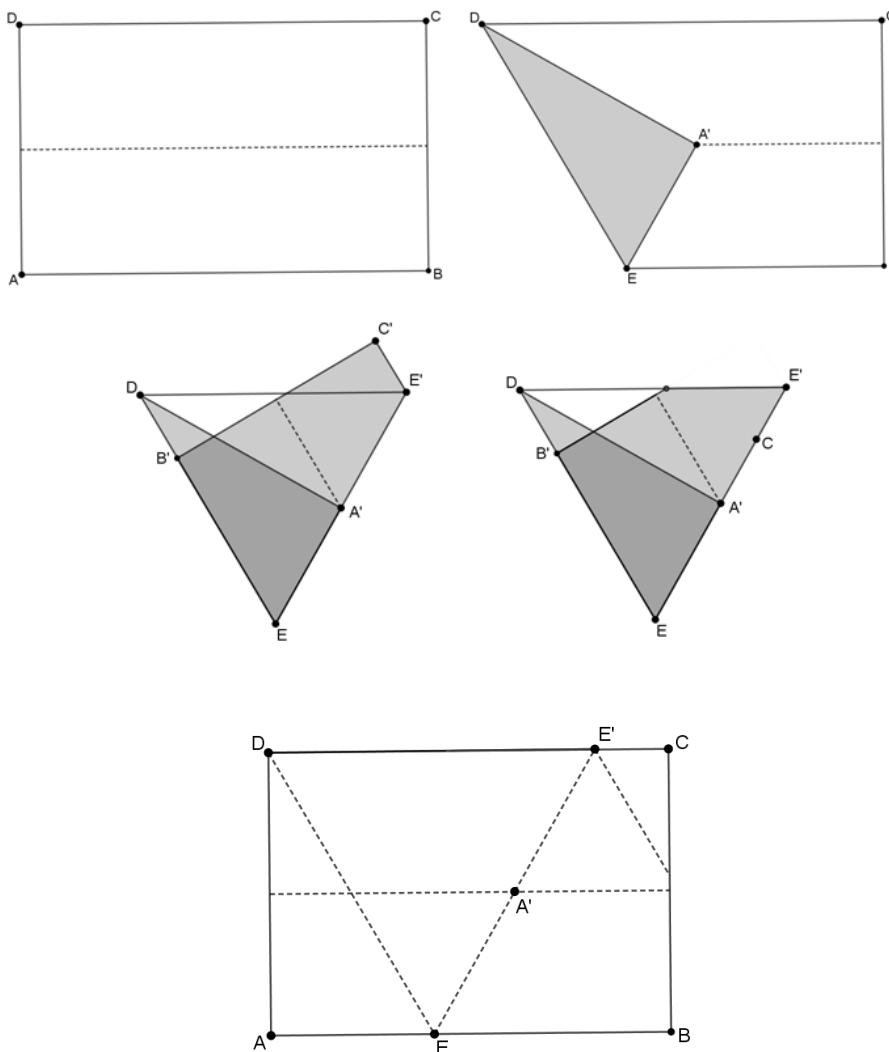


V hraně AD nám vznikla kapsa, do které vložíme čtyřúhelník $GBIH$, čímž vznikne čtyřstěn.

Obrázek 89 - Pracovní list č.3

Metodický komentář ke skládání papíru

Obdélníkový list papíru, jehož vrcholy nazveme $ABCD$, přeložíme na polovinu – vytvoříme osu obdélníku. Vrchol A přeložíme na osu obdélníku, vzniknou body A' a E . Dále přeložíme bod B na hranu ED a bod C na hranu EE' .



Obrázek 90 - Skládání rovnostranného trojúhelníka z papíru

Důkaz, že trojúhelník DEE' je rovnostranný

Vycházíme z Obrázku 90. Platí, že $|AE| = |EA'|$ z překlada bodu A na osu obdélníku, dále platí, že $\triangle DAE \cong \triangle DA'E$. Úsečka DA' je osou souměrnosti pro bod E , jehož obrazem je bod E' , platí tedy $|A'E| = |A'E'|$. Úsečka DA' je společná pro $\triangle EA'D$ a $\triangle E'A'D$ a jako osa souměrnosti je kolmá k úsečce EE' . Z toho plyne, že $\triangle EA'D \cong \triangle E'A'D$ dle věty *sus*, a proto platí $\triangle DAE \cong \triangle DA'E$ a rovněž jsou trojúhelníky DAE , $DA'E$, $DA'E'$ pravoúhlé. Úhel při vrcholu D je tedy dělen na třetiny,

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle EDA'| = |\sphericalangle A'DE'| = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ.$$

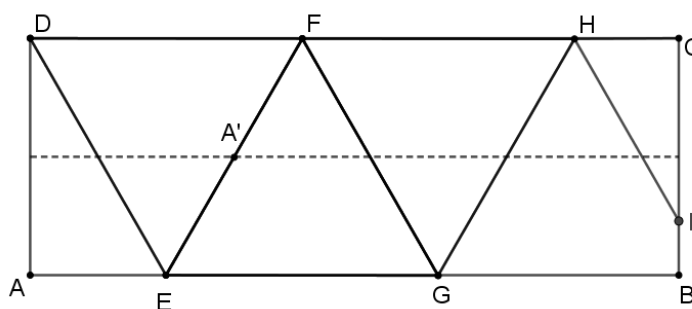
Ze znalosti součtu úhlů v trojúhelníku snadno odvodíme, že

$$|\sphericalangle EDE'| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ, |\sphericalangle DEA'| = |\sphericalangle DE'A'| = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ.$$

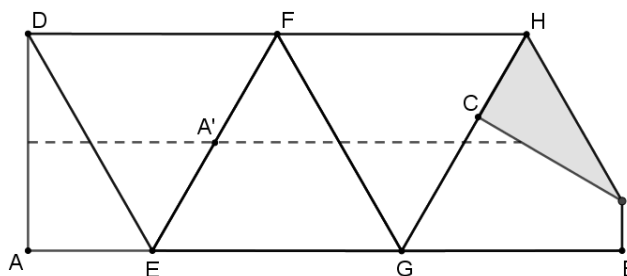
Úhly v trojúhelníku DEE' jsou shodné a měří 60° , strany v trojúhelníku jsou shodné. Trojúhelník DEE' je rovnostranný.

Nyní, když jsme si dokázali, že skládáním papíru nám vznikne rovnostranný trojúhelník, si ukážeme, jak složit pravidelný čtyřstěn. Přeložme list formátu A4 napůl tak, aby vznikl užší obdélník – obdélník $ABCD$. Hrana přehybu nám bude tvořit úsečku AB . Tento obdélník znovu přeložíme, abychom vytvořili osu obdélníku $ABCD$. Začneme taktéž jako u trojúhelníku, tedy přeložíme bod A na osu obdélníku $ABCD$, čímž nám vzniknou body A' a E . Nyní přehneme bod D na hranu EB , čímž vytyčíme body F, G . Dále přehneme bod E na hranu FC , bod F na hranu GB . Zbývající trojúhelník HIC přeložíme dovnitř.

V hraně AD nám vznikla kapsa, do které vložíme čtyřúhelník $GBIH$, čímž vznikne čtyřstěn.



Obrázek 91 - Skládání pravidelného čtyřstěnu z papíru



Obrázek 92 - Poslední krok před složením pravidelného čtyřstěnu

PRACOVNÍ LIST č. 4 – Krychle a čtyřstěny

Autor: Kateřina Červenková

Téma: Síť pravidelného čtyřstěnu

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Vzdělávací obor: Matematika a její aplikace

Vzdělávací předmět: Matematika

Tematická oblast v RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Učivo v RVP ZV: základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec

Tematická oblast v RVP G: Geometrie

Učivo v RVP G: geometrie v prostoru – polohové a metrické vlastnosti; základní tělesa, povrchy a objemy, volné rovnoběžné promítání

Ročník: 9. ročník ZŠ – 3. ročník SŠ

Předpokládaná časová dotace: 70 minut

Cíle aktivit:

- žák by měl umět vysvětlit pojem pravidelný čtyřstěn, pravoúhlý čtyřstěn a krychle
- žák by měl umět popsat vzájemnou polohu krychle a čtyřstěnu, dokáže vyplnit krychli čtyřstěny

Prostředky a pomůcky: pracovní list, nůžky, lepidlo, tužky

Metodický komentář:

Pracovní list je primárně určen pro procvičování v hodině, jedná se o rozšiřující učivo Stereometrie, konkrétně o téma týkající se jehlanu. Žáci se pokusí vyplnit krychli čtyřstěny a zjistí, jaká je vzájemná poloha krychle a pravidelného čtyřstěnu. Dozví se, že hrany čtyřstěnu jsou stěnové úhlopříčky krychle. Dokáží vypočítat délku hrany pravidelného čtyřstěnu, pokud znají délku hrany krychle. Obrázky byly použity z [14], [15], [16].

Kolik čtyřstěňů se vejde do krychle?

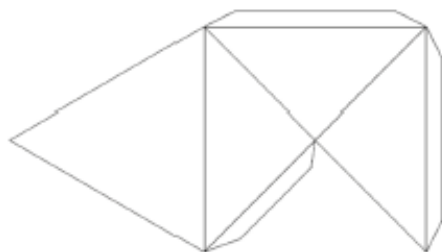
1) Nejprve sestroj modely následujících těles. Dej pozor, aby sis krychli nezalepil.

Podáří se ti všechny čtyřstěny naskládat do krychle?

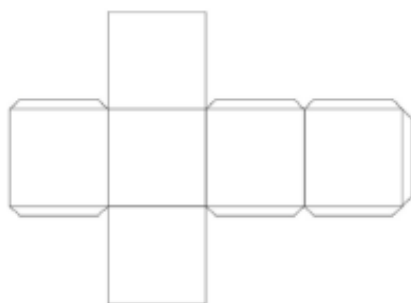
Pojmenuj jednotlivá tělesa, která ti vznikla z těchto sítí:



.....



.....



.....

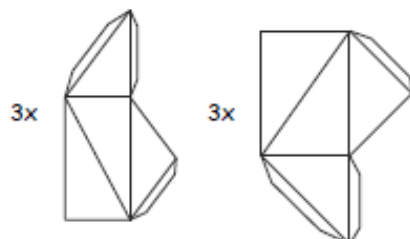
Obrázek 93 - Pracovní list č.4 přední strana

MATEMATIKA

Krychle a čtyřstěny

2) Nejprve sestroj modely následujících těles. Dej pozor, aby sis krychli nezalepil.

Podář se ti všechny čtyřstěny naskládat do krychle?



3) Do krychle se vejde pravidelný čtyřstěn a pravouhlých čtyřstěnů,
nebo pouze pravouhlých čtyřstěnů.

4) Hrana krychle má délku 5 cm. Vypočítej délku hrany pravidelného čtyřstěnu.
*Podívej se jak jsi naskládal čtyřstěny do krychle. Kde se nachází hrany pravidelného čtyřstěnu?
K výpočtu využij Pythagorovu větu.*

.....

.....

Délku hrany pravidelného čtyřstěnu: cm

Závěr

Cílem mé práce bylo poskytnout čtenáři základní informace o čtyřstěnech a jejich vlastnostech. V práci jsou popsány prostorové analogie známých vlastností trojúhelníku pro čtyřstěn. Při zpracovávání tohoto tématu jsem si obohatila vědomosti z oblasti geometrie čtyřstěnu, ale i z oblasti geometrie trojúhelníku, se kterými bych se jinak neseznámila. Součástí práce jsou obrázky vytvořené v geometrickém programu GeoGebra 3D, bez kterých by bylo velmi složité pochopit jednotlivé pojmy a vztahy mezi nimi.

Myslím si, že geometrie čtyřstěnu je velice zajímavým oborem matematiky, jemuž ve školách bohužel není věnován čas. Mezi žáky není geometrie příliš oblíbená, a to zejména proto, že při konstrukčních úlohách je nutná přesnost a pečlivost. Geometrie v prostoru je náročná zejména kvůli potřebné prostorové představivosti. Navrhovala bych proto využití programu GeoGebra 3D v hodinách matematiky, neboť není nutné mít model tělesa fyzicky v hodině. V programu GeoGebra 3D si učitel může sestrojít jakýkoli model tělesa během chvíle a pomocí projektoru jej tak ukázat celé třídě, a to z různých úhlů pohledu.

Práci mohou využívat učitelé základních i středních škol v geometrii rovinné i prostorové. Mohou zde najít mnoho ukázek zajímavých vlastností trojúhelníku či čtyřstěnu. Samozřejmě se mohou inspirovat i pracovními listy. Poznatky z této práce, zejména vlastnosti běžně vyučovaných bodů, bych ráda aplikovala ve své učitelské praxi.

Použitá literatura

- [1] BOGOMOLNY, Alexander. *Six Concylic Points on Sides of a Triangle*. In: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. ©1996-2018 [cit. 2019-06-15]. Dostupné z: <https://www.cut-the-knot.org/triangle/SixConcylicPoints.shtml>
- [2] COOLIDGE, Julian Lowell. *A treatise on the circle and the sphere*. Bronx, N.Y.: Chelsea Pub. Co, [1971]. ISBN 08-284-0236-1. Dostupné také z: <https://archive.org/details/treatiseontheCir033247mbp/page/n249>
- [3] CRABBS, Robert Alan. “Gaspard Monge and the Monge Point of the Tetrahedron.” *Mathematics Magazine*, vol. 76, no. 3, 2003, pp. 193–203. JSTOR, www.jstor.org/stable/3219320.
- [4] ČERVENKOVÁ, Kateřina. *Významné body v trojúhelníku* [online]. České Budějovice, 2017 [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: <https://1url.cz/dMhao>. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky. Vedoucí práce Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
- [5] *Disphenoid*. Howling Pixel [online]. ©2019 [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: <https://howlingpixel.com/i-en/Disphenoid>
- [6] GERGELITSOVÁ, Šárka RNDr. Ph.D. *Cesta z roviny do prostoru od vlastností kružnic ke kulové inverzi* [online]. [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: <http://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/gergelitsova.pdf>
- [7] HAJJA, Mowaffaq a Peter WALKER. *Equifacial tetrahedra*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology [online]. 2010, 32(4), 501-508 [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207390110038231>
- [8] HADJISAVVAS, Nicolas, Jean-Baptise HIRIART-URRUTY a Pierre-Jean LAURENT. *A characterization by optimization of the Monge point of a tetrahedron*. Journal of Optimization Theory and Applications [online]. 3. 2016, 25 November 2016, (171), 8 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: <https://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Monge-final.pdf>
- [9] HAVLICEK, Hans a Gunter WEISS. *Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms*. The American Mathematical Monthly [online]. 2003, 110(8) [cit. 2019-06-26]. DOI: 10.2307/3647851. ISSN 00029890. Dostupné z: <https://www.jstor.org/stable/3647851?origin=crossref>
- [10] HAZEWINKEL, Michiel. *Encyclopaedia of Mathematics: Supplement*. 1. Springer Science & Business Media, 2012, 588 s. Dostupné také z: <https://books.google.cz/books?id=RhD8CAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=cs>

- [11] HOLUBÁŘ, Josef. *Některé analogické množiny bodů v rovině a v prostoru*. In: Množiny bodů v prostoru. Praha: Mladá fronta, 1983, s. 7-15.
- [12] HORÁK, Stanislav. *Mocnost bodu ke kružnici*. In: Kružnice. Praha: Mladá fronta, 1966, s. 45-64. Dostupné také z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/403594/SkolaMladychMatematiku_016-1966-1_5.pdf
- [13] HORÁK, Stanislav. *Mnohostěny*. Praha: Mladá fronta, 1970, 83 s. Dostupné také z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403724>
- [14] KORTHALS ALTES, Gijs. *Cube*. In: Paper Models of Polyhedra [online]. [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: <https://www.polyhedra.net/pdf/cube.pdf>
- [15] KORTHALS ALTES, Gijs. *Five Pyramids in a Cube*. In: Paper Models of Polyhedra [online]. [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: <https://www.polyhedra.net/pdf/five-pyramids-cube.pdf>
- [16] KORTHALS ALTES, Gijs. *Six Triangular Pyramids in one Cube*. In: Paper Models of Polyhedra [online]. [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: https://www.polyhedra.net/pdf/six_triangular_pyramids_in_one_cube.pdf
- [17] *Le Philosophe Platon*. In: The British Museum [online]. [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: https://www.britishmuseum.org/collectionimages/AN16132/AN1613222976_1.jpg
- [18] PASKALEV, Georgi a Ivan CHOBANOV. *Pozoruhodné body ve čtyřstěnu (bulharsky)*. Sofie: Narodna prosveta, 1988, 153 s.
- [19] PERRIER, Frédéric. *The Monge point of a tetrahedron in descriptive geometry* [online]. Auguste 2017, 6 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: http://www.ipgp.fr/sites/default/files/monge_point_perrier_310817.pdf
- [20] PLESKOT, Antonín. *Průsek roviny s fokální plochou rotační stupně druhého*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky. 1915, (44), 87-88. Dostupné také z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/122386/CasPestMatFys_044-1915-1_13.pdf
- [21] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*. 4. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-178-9.
- [22] REICHL, Jaroslav. *Skládání modelu čtyřstěnu bez lepení*. In: *Papírová fyzika a matematika* [online]. ©2015 [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: http://www.jreichl.com/fyzika/show/2014_elixir/materialy_07_papirova_mf.pdf
- [23] SCHUMANN, Heinz. *Ein Musterbeispiel räumlichen Analogisierens von Sätzen der Dreiecksgeometrie*. IBDG - Fachverband der Geometrie. 2018, 2018(1), 32-36.
- [24] *Stereometrie a symetrie*. In: Některá témata a exponáty z výstavy Experimentem k poznání [online]. [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: http://interaktivnivystavy.euweb.cz/disertace/obrazky_disertacka/91.jpg

- [25] ŠRUBAŘ, Jiří. *Různé analogie ortocentra trojúhelníku ve čtyřstěnu*. In: LÁVIČKA, Miroslav a Martin NĚMEC. *31. konference o geometrii a grafice*. Ostrava: VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA 17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava-Poruba, 2011, s. 257-265. ISBN 978-80-248-2524-3.
- [26] ŠRUBAŘ, Jiří. *Vlastnosti trojúhelníka a jejich analogie pro čtyřstěn: 25. konference o geometrii a počítačové grafice* [online]. [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: <http://mat.fsv.cvut.cz/gcg/sbornik/srubar.pdf>.
- [27] ŠVRČEK, Jaroslav. *Prostorové analogie dvou planimetrických vět*. MFI [online]. 2014, 23(2), 81-85 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/23/2302/mfi_2302_081_085.pdf
- [28] *Tetragonal disphenoid honeycomb*. Howling Pixel [online]. 2019 [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: https://howlingpixel.com/i-en/Tetragonal_disphenoid_honeycomb
- [29] UNDINE, Leopold a Martini HORST. *Monge points, Euler lines, and Feuerbach spheres in Minkowski spaces* [online]. In: . 2016, February 22, s. 22 [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1602.06144.pdf>
- [30] VALLO, Dušan. *O niektorých vlastnostiach štvorstena vektorovo*. In: MATEMATIKA-FYZIKA-INFORMATIKA [online]. Praha: Prometheus, spol., 2014, s. 248-261 [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/23/2304/mfi_2304_all.pdf
- [31] VANČURA, Jiří. *Kulové plochy – zavedení pojmů*. Apolloniovy úlohy [online]. SPŠST Panská, 2009 [cit. 2019-06-11]. Dostupné z: <http://www.apolloniovyulohy.webz.cz/kulplochy.htm>
- [32] VANČURA, Jiří. *Pomocné konstrukce 3: Dělicí poměr, dvojpoměr, harmonická čtveřice*. Apolloniovy úlohy [online]. SPŠST Panská, 2009. Dostupné z: <http://www.apolloniovyulohy.webz.cz/pomoc3.htm>
- [33] VÁVRA, Václav a Zdeněk LOSOS. *Krystalové tvary: Disfenoid*. Multimediální studijní texty z mineralogie pro bakalářské studium [online]. Ústav geologických věd, Přírodovědecká fakulta Masarykova univerzita, Brno, 2006 [cit. 2019-06-19]. Dostupné z: http://mineralogie.sci.muni.cz/kap_2_3_kryst_tvary/kap_2_3_kryst_tvary.htm
- [34] WEISSTEIN, Eric W. "*de Gua's Theorem*." In: Wolfram MathWorld [online]. [cit. 2019-06-12]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/deGuasTheorem.html>
- [35] WEISSTEIN, Eric W. *Disfenoid*. In: Wolfram MathWorld [online]. [cit. 2019-06-26]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Disphenoid.html>
- [36] WELLS, Christopher J. *Tetrahedron*. TechnologyUK.net [online]. ©2001-2019, 30.6.2012 [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: <http://www.technologyuk.net/mathematics/geometry/tetrahedron.shtml>

- [37] YAGLOM, A. M. a I. M. YAGLOM. *Challenging mathematical problems with elementary solutions*. Dotisk. New York: Dover, 1987, 239 s. ISBN 978-048-6655-369. Dostupné také z:
<https://books.google.cz/books?id=VkJHDAgAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=cs#v=onepage&q&f=false> str.46-47
- [38] ZAJIC, Vladimir. *Existence of the Orthocenter: Altitudes As Radical Axes*. BOGOMOLNY, Alexander. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. ©1996-2018 [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: <https://www.cut-the-knot.org/triangle/altitudes.shtml>

Seznam obrázků

Obrázek 1 - Čtyřstěn a jeho síť	8
Obrázek 2- Označení stěn čtyřstěnu.....	9
Obrázek 3 - Povrch čtyřstěnu.....	10
Obrázek 4- Objem čtyřstěnu	11
Obrázek 5- Střední příčky čtyřstěnu	12
Obrázek 6- Osmistěn vepsaný čtyřstěnu.....	12
Obrázek 7 - Těžiště čtyřstěnu.....	13
Obrázek 8 - Těžiště čtyřstěnu – důkaz.....	13
Obrázek 9 - Těžiště čtyřstěnu – vlastnosti	14
Obrázek 10 - Těžiště jako průsečík středních příček	15
Obrázek 11 - Čtyřstěn s ortocentrem	17
Obrázek 12 - Čtyřstěn bez ortocentra.....	17
Obrázek 13 - Dvě různoběžné výšky čtyřstěnu.....	18
Obrázek 14- Mongeovy roviny	19
Obrázek 15 - Mongeovy roviny a Mongeův bod.....	20
Obrázek 16 - Možné vzájemné polohy tří rovin kolmých na jednu rovinu	21
Obrázek 17 - Mongeovy roviny $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ se protínají v jednom bodě.....	22
Obrázek 18 - Mongeovy roviny $\mu_{AD}, \mu_{BD}, \mu_{CD}$ pohled shora.....	23
Obrázek 19 - Mongeovy osy roviny μ_{CD}	23
Obrázek 20 - Mongeův bod čtyřstěnu.....	24
Obrázek 21 - Mocnost bodu ke kružnici, bod M vně.....	26
Obrázek 22 - Mocnost bodu ke kružnici, bod M uvnitř.....	26
Obrázek 23 - Mocnost bodu ke kulové ploše.....	27
Obrázek 24 - Chordála dvou kružnic se společnými body	28
Obrázek 25 - Chordála dvou kružnic, které nemají společný bod.....	29
Obrázek 26 - Potenční střed kružnic	30
Obrázek 27 - Chordální rovina dvou kulových ploch.....	31
Obrázek 28 - Ortocentrum trojúhelníku jako potenční střed kružnic k_a, k_b, k_c	31
Obrázek 29- Kulové plochy $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_\gamma$ a κ_δ čtyřstěnu.....	32
Obrázek 30 - Potenční osa p_A kulových ploch $\kappa_\beta, \kappa_\gamma$ a κ_δ	33

Obrázek 31 - Potenční střed P kulových ploch $\kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_\gamma, \kappa_\delta$	33
Obrázek 32 - Roviny souměrnosti α, β, γ a kulová plocha opsaná čtyřstěnu	34
Obrázek 33 - Kulová plocha uvnitř vepsaná čtyřstěnu	36
Obrázek 34 - Kulová plocha nad stěnou ABD	36
Obrázek 35 - Kulové plochy nad stěnami čtyřstěnu	37
Obrázek 36 - Zvýrazněné části prostoru nad hranami AB, CD [13, s. 34]	37
Obrázek 37 - Kulová plocha nad hranou CD	38
Obrázek 38 - Kulová plocha nad hranou BD	38
Obrázek 40 - Kulová plocha nad hranou AD	39
Obrázek 39 - Kulové plochy nad hranami CD, BD, AD	39
Obrázek 41 - Kulové plochy vepsané čtyřstěnu vně	39
Obrázek 42 - Pravidelný čtyřstěn a jeho síť	40
Obrázek 43 - Výšky pravidelného čtyřstěnu	41
Obrázek 44 - Kulová plocha opsaná pravidelnému čtyřstěnu	42
Obrázek 45 - Kulová plocha vepsaná pravidelnému čtyřstěnu	43
Obrázek 46 - Poloměr kulové plochy vepsané pravidelnému čtyřstěnu	43
Obrázek 47 - Pravidelný čtyřstěn vepsaný do pravidelného čtyřstěnu	44
Obrázek 48 - Výšky v_a a v_d ortocentrického čtyřstěnu	45
Obrázek 49 - Výška ortocentrického čtyřstěnu procházející ortocentrem stěny	46
Obrázek 50 - Výšky ortocentrického čtyřstěnu	47
Obrázek 51 - Ortocentrický čtyřstěn a jeho kulová plocha dvanácti bodů prvního typu	48
Obrázek 52 - Kulová plocha dvanácti bodů a kružnice devíti bodů stěn ABC, ABD	49
Obrázek 53 - Kružnice devíti bodů a kružnice opsaná stěně ABD	50
Obrázek 54 - Ortocentrický čtyřstěn a jeho kulová plocha dvanácti bodů druhého typu	51
Obrázek 55 - Eulerova přímka trojúhelníku BCD	52
Obrázek 56 - Podobnost pravoúhlých trojúhelníků $O_\alpha K_1 O_1, O_\alpha PO$	53
Obrázek 57 - Znárodný detail přímek v rovině oO_α	53
Obrázek 58 - Kulové plochy ρ a τ ve stejnolehlosti se středem v O	55
Obrázek 59 - Stejnostěnný čtyřstěn – popis hran	56
Obrázek 60 - Stejnostěnný čtyřstěn vepsaný do kvádru	57
Obrázek 61 - Rovnoběžnostěn opsaný stejnostěnnému čtyřstěnu	58
Obrázek 62 - Střední příčky ve stejnostěnném čtyřstěnu	59

Obrázek 63 - Těžiště jako průsečík středních příček ve stejnostěnném čtyřstěnu.....	60
Obrázek 64 - Střední příčky ve stejnostěnném čtyřstěnu.....	62
Obrázek 65 - Tetragonal disphenoid.....	63
Obrázek 66 - Rhombic disphenoid.....	63
Obrázek 67 - Diagonal disphenoid.....	63
Obrázek 68 - Phyllic disphenoid.....	63
Obrázek 69 - Tetragonální disfenoid vyplňující prostor.....	64
Obrázek 70 - Vyplňování prostoru [28].....	64
Obrázek 71 - Pravoúhlý čtyřstěn jako seříznutí vrcholu krychle.....	65
Obrázek 72 - Pravoúhlý čtyřstěn.....	65
Obrázek 73 - Povrch pravoúhlého čtyřstěnu.....	66
Obrázek 74 - Ortocentrum pravoúhlého čtyřstěnu.....	67
Obrázek 75 - Těžiště pravoúhlého čtyřstěnu.....	67
Obrázek 76 - Kulová plocha opsaná a vepsaná pravoúhlému čtyřstěnu.....	67
Obrázek 77 - Kružnice devíti bodů.....	69
Obrázek 78 - Kružnice šesti bodů.....	70
Obrázek 79 - Kulová plocha dvanácti bodů prvního typu.....	71
Obrázek 80 - Kulová plocha dvanácti bodů prvního typu pro neortický čtyřstěn.....	71
Obrázek 81 - Kulová plocha dvanácti bodů druhého typu.....	72
Obrázek 82 - Bod N_δ je harmonicky sdružený s O_δ vzhledem k bodům M_δ a O_D	73
Obrázek 83 - Kulová plocha dvanácti bodů druhého typu u neortických čtyřstěnů.....	73
Obrázek 84 - Harmonicky sdružené body.....	73
Obrázek 85 - Paty kolmic z bodů S_o a P na stěny čtyřstěnu $ABCD$	74
Obrázek 86 - Kulová plocha osmi bodů.....	74
Obrázek 87 - Pracovní list č.1.....	77
Obrázek 88 - Pracovní list č.2.....	79
Obrázek 89 - Pracovní list č.3.....	81
Obrázek 90 - Skládání rovnostranného trojúhelníka z papíru.....	82
Obrázek 91 - Poslední krok před složením pravidelného čtyřstěnu.....	83
Obrázek 92 - Skládání pravidelného čtyřstěnu z papíru.....	83
Obrázek 93 - Pracovní list č.4 přední strana.....	85
Obrázek 94 - Pracovní list č.4 zadní strana.....	86

Obrázek 95 - Model pravidelného čtyřstěnu k tisku	6
Obrázek 96 - Modely pravidelného čtyřstěnu k tisku	7
Obrázek 97 - Model pravidelného čtyřstěnu k tisku	8
Obrázek 98 - Model pravoúhlého čtyřstěnu k tisku	9
Obrázek 99 - Model pravoúhlého čtyřstěnu k tisku	10
Obrázek 100 - Model krychle k tisku	11
Obrázek 101 - Model pravoúhlého čtyřstěnu k tisku	12
Obrázek 102 - Model pravoúhlého čtyřstěnu k tisku	13
Obrázek 103 - Model krychle k tisku	14
Obrázek 104 - Model čtyřstěnu bez lepení – rozložený model	15
Obrázek 105 - Model čtyřstěnu bez lepení – složení bílých částí	15
Obrázek 106 - Model čtyřstěnu bez lepení – přeložení trojúhelníku s puntíky do čtyřstěnu	16
Obrázek 107 - Model čtyřstěnu bez lepení – vložení zbylých dvou trojúhelníků do čtyřstěnu	16
Obrázek 108 - Model čtyřstěnu bez lepení – hotový model	17
Obrázek 109 - Rozložený model pravidelného čtyřstěnu z A4	18
Obrázek 110 - Model pravidelného čtyřstěnu před vložením čtyřúhelníku do "kapsy" ..	18
Obrázek 111 - Model pravidelného čtyřstěnu z A4	19
Obrázek 112 - Model pravidelného čtyřstěnu z A4 pohled shora	19
Obrázek 113 - Modely pěti čtyřstěňů	20
Obrázek 114 - Modely pěti čtyřstěňů	20
Obrázek 115 - Přiložení dvou pravoúhlých čtyřstěňů delší hranou k sobě	21
Obrázek 116 - Přiložení pravidelného čtyřstěnu	21
Obrázek 117 - Přiložení pravoúhlého čtyřstěnu k pravidelnému čtyřstěnu	22
Obrázek 118 - Přiložení posledního pravoúhlého čtyřstěnu	22
Obrázek 119 - Čtyři čtyřstěny v krychli	23
Obrázek 120 - Pět čtyřstěňů v krychli	23
Obrázek 121 - Modely šesti čtyřstěňů	24
Obrázek 122 - Modely šesti čtyřstěňů	24
Obrázek 123 - Přiložení dvou zrcadlových pravoúhlých čtyřstěňů k sobě	25
Obrázek 124 - Přiložení dalších dvou pravoúhlých čtyřstěňů	25

Obrázek 125 - Přiložení posledních dvou pravoúhlých čtyřstěnů	26
Obrázek 126 - Šest pravoúhlých čtyřstěnů tvořících krychli	26
Obrázek 127 - Čtyři pravoúhlé čtyřstěny v krychli.....	27
Obrázek 128 - Šest pravoúhlých čtyřstěnů v krychli	27

Seznam příloh

Příloha A: Model pravidelného čtyřstěnu – pracovní list č. 2

Příloha B: Modely pravidelného čtyřstěnu – pracovní list č. 3

Příloha C: Modely čtyřstěnů a krychle – pracovní list č. 4

Příloha D: Model pravidelného čtyřstěnu bez lepení

Příloha E: Model pravidelného čtyřstěnu z listu formátu A4

Příloha F: Modely pěti čtyřstěnů v krychli

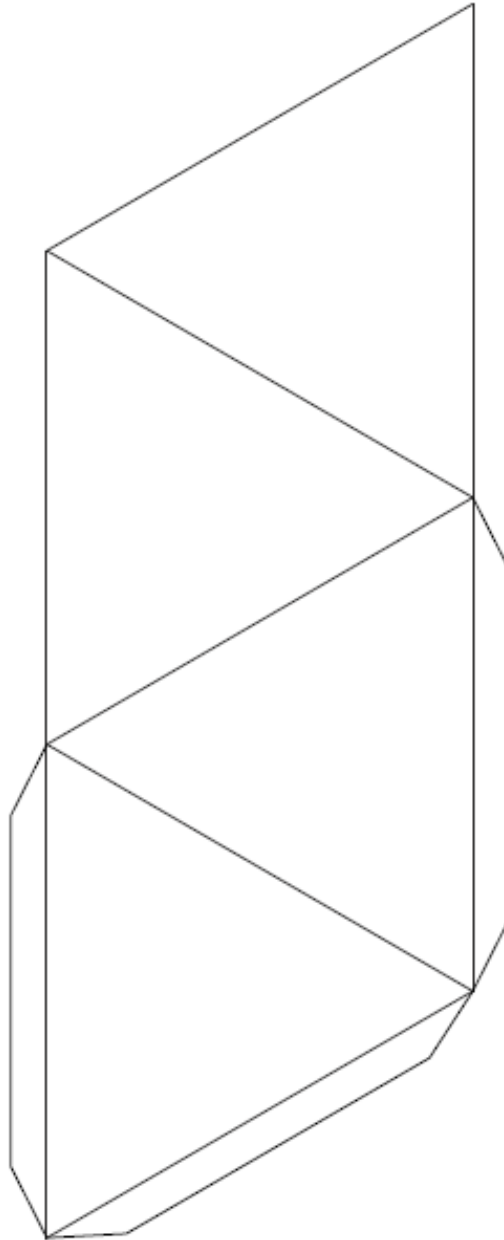
Příloha G: Modely šesti čtyřstěnů v krychli

Příloha A: Model pravidelného čtyřstěnu – pracovní list č. 2

MATEMATIKA

Pravidelný čtyřstěn

TISK - model pravidelného čtyřstěnu



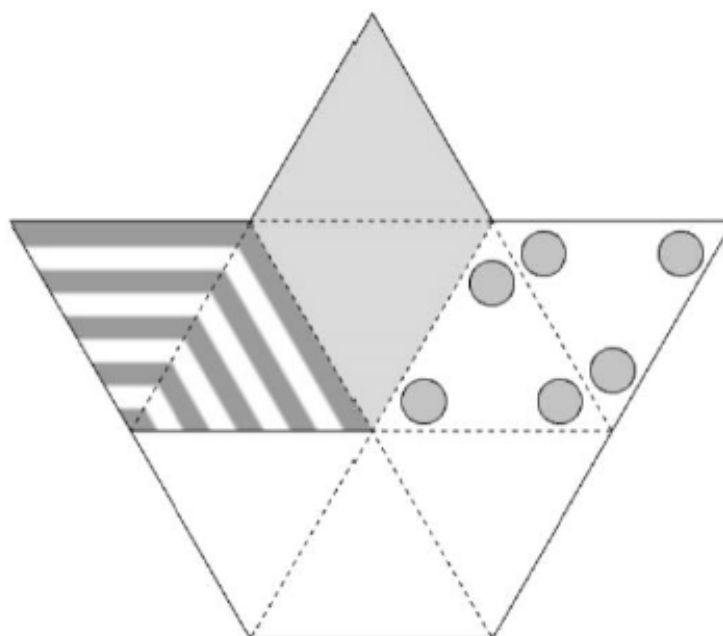
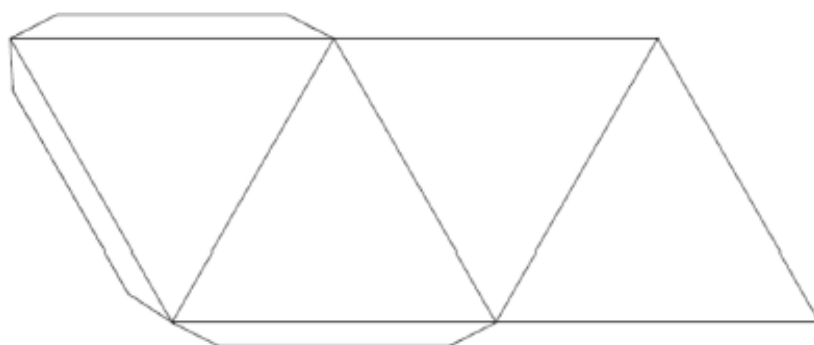
Obrázek 95 - Model pravidelného čtyřstěnu k tisku

Příloha B: Modely pravidelného čtyřstěnu – pracovní list č. 3

MATEMATIKA

Pravidelný čtyřstěn - modely

TISK - modely pravidelného čtyřstěnu



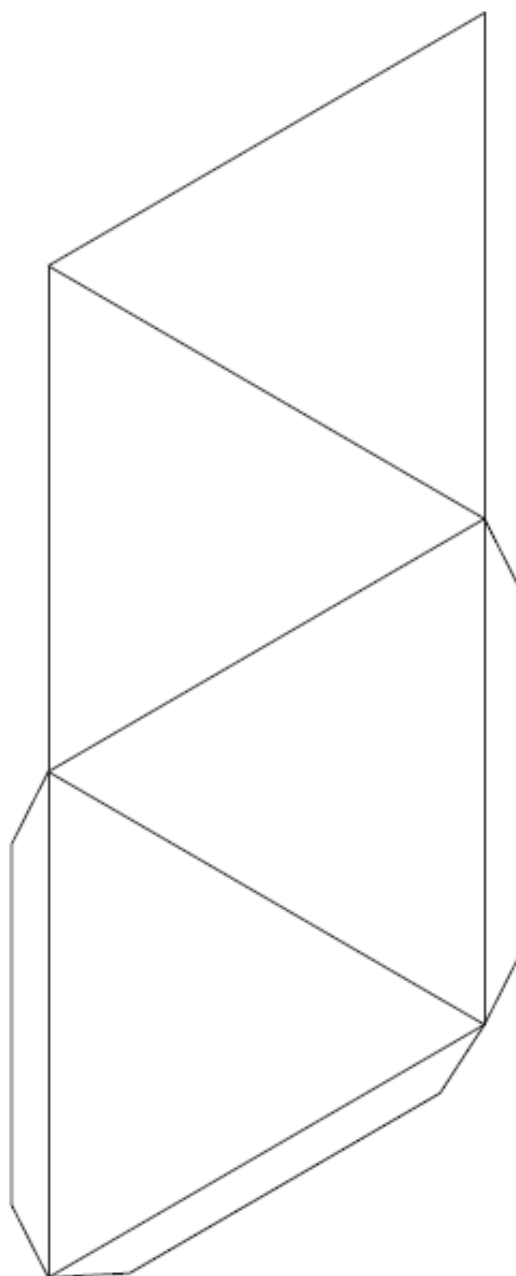
Obrázek 96 - Modely pravidelného čtyřstěnu k tisku

Příloha C: Modely čtyřstěnů a krychle – pracovní list č. 4

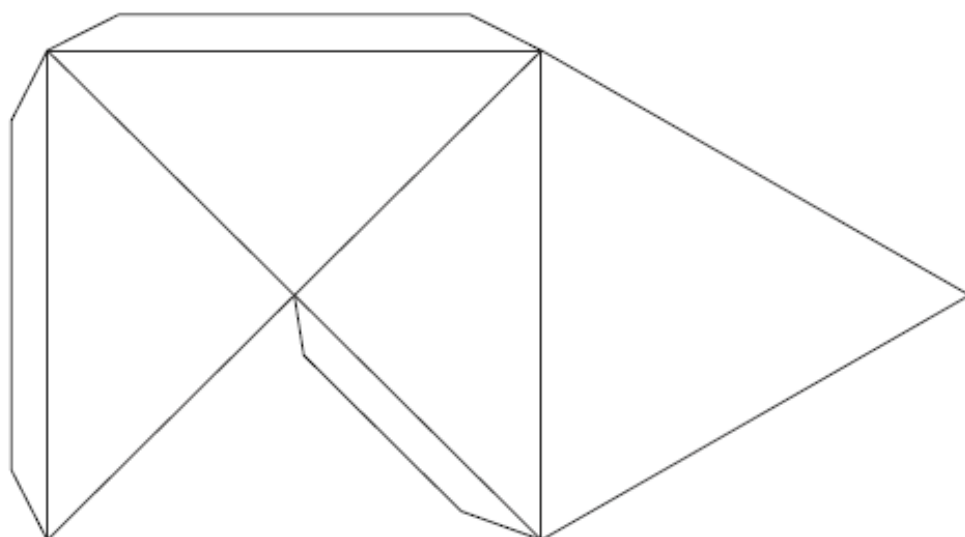
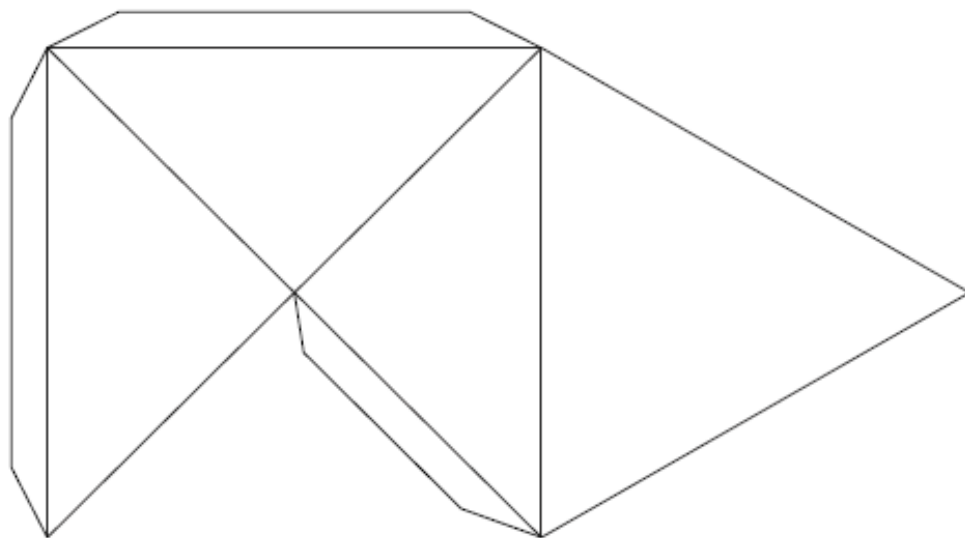
MATEMATIKA

Krychle a čtyřstěny

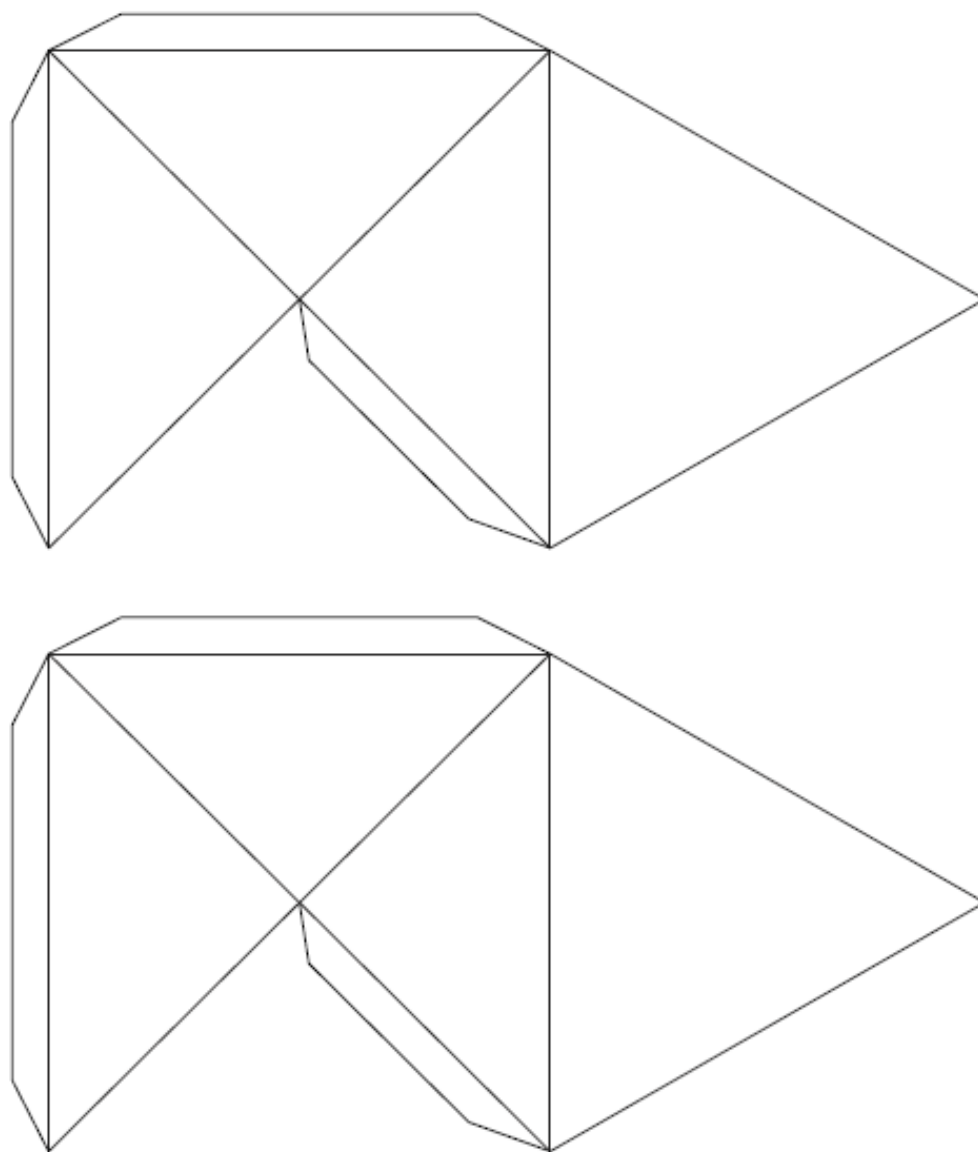
TISK - modely 1



Obrázek 97 - Model pravidelného čtyřstěnu k tisku

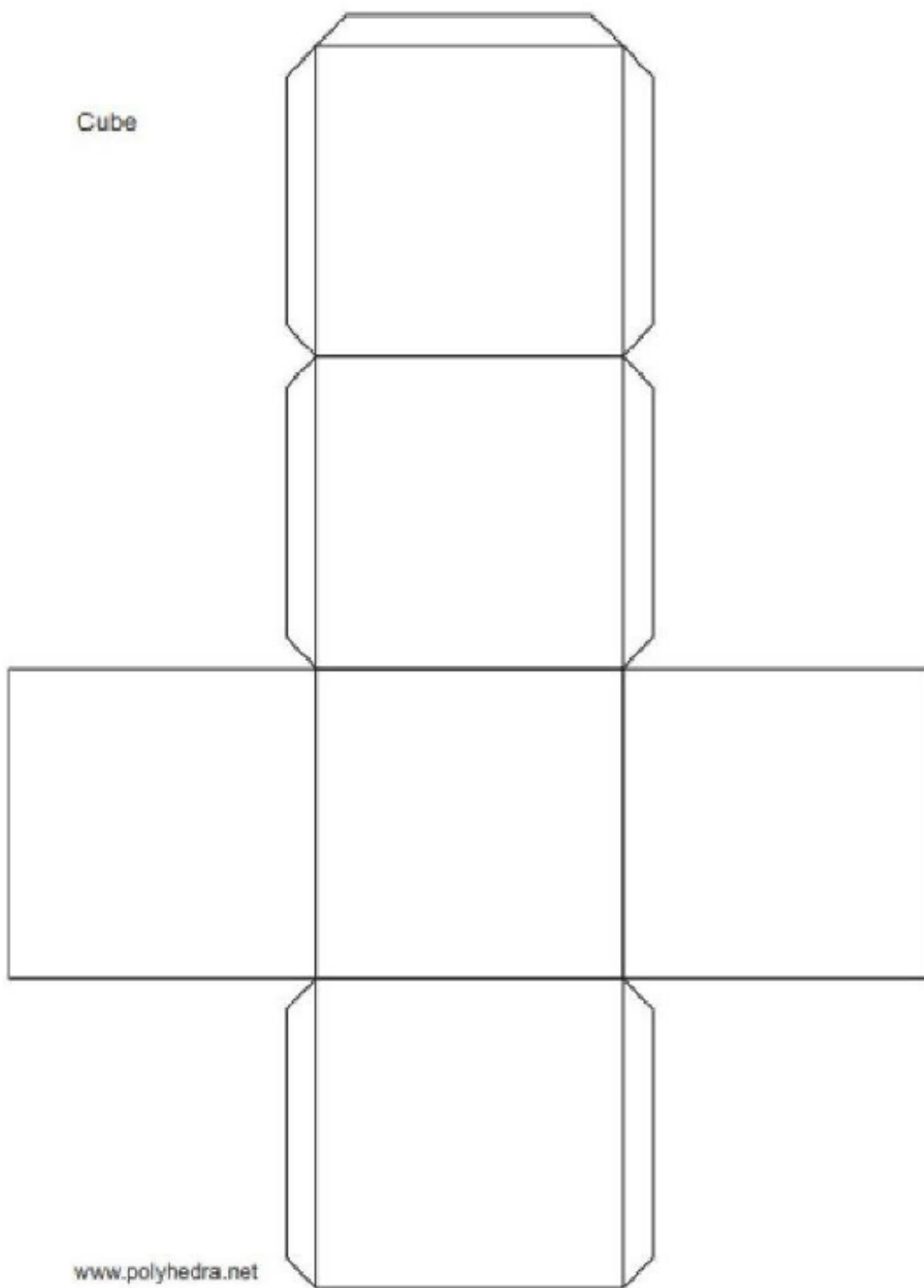


Obrázek 98 - Model pravoúhlého čtyřstěnu k tisku



Obrázek 99 - Model pravouhlého čtyřstěnu k tisku

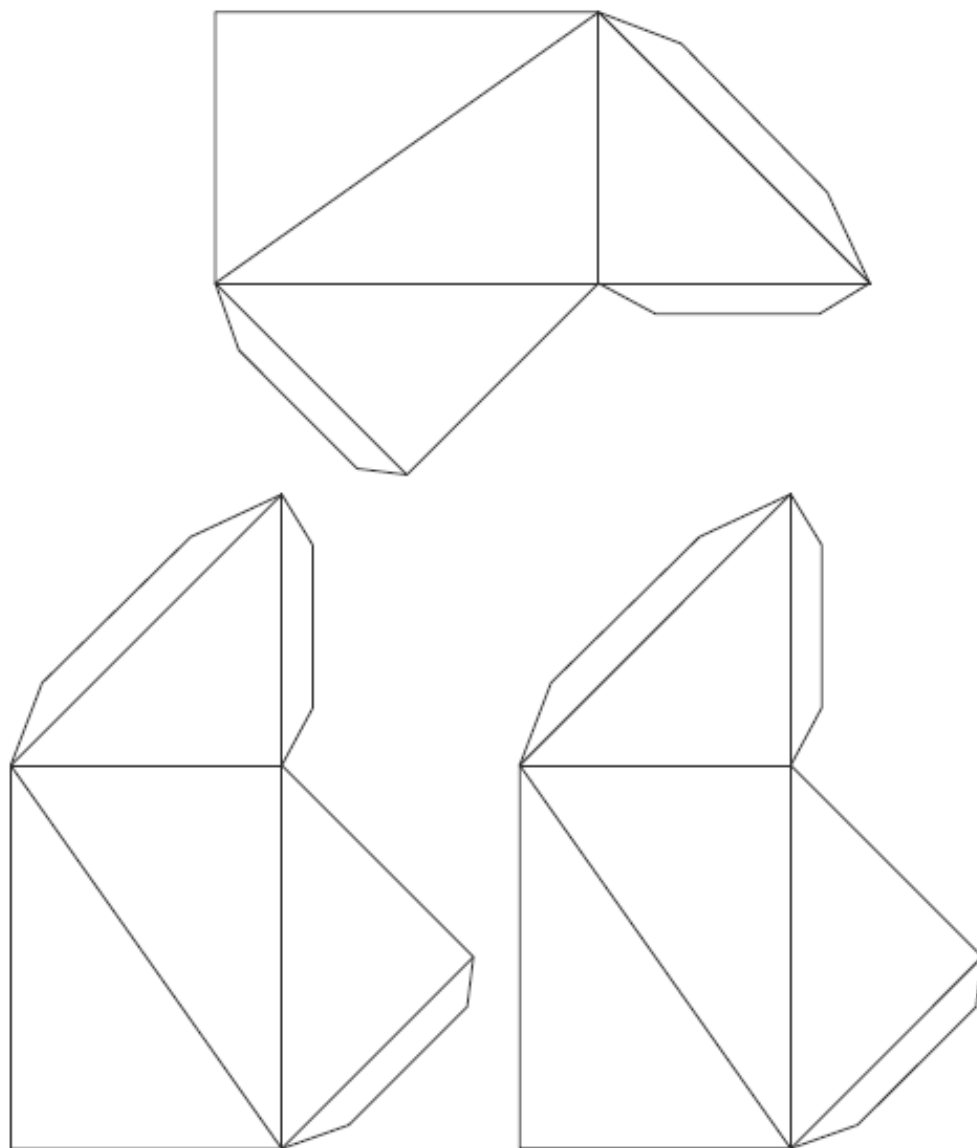
Cube



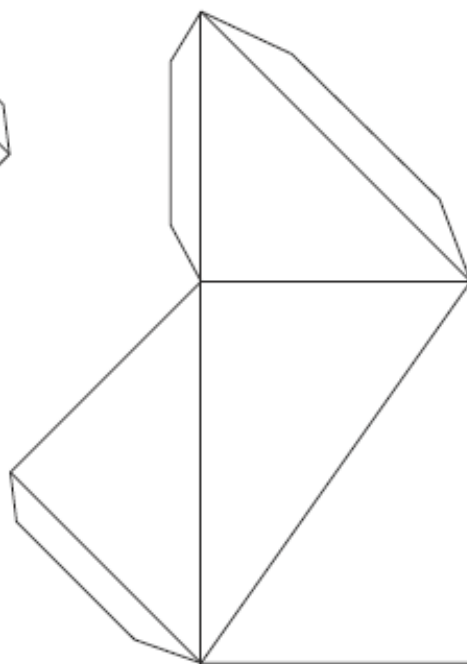
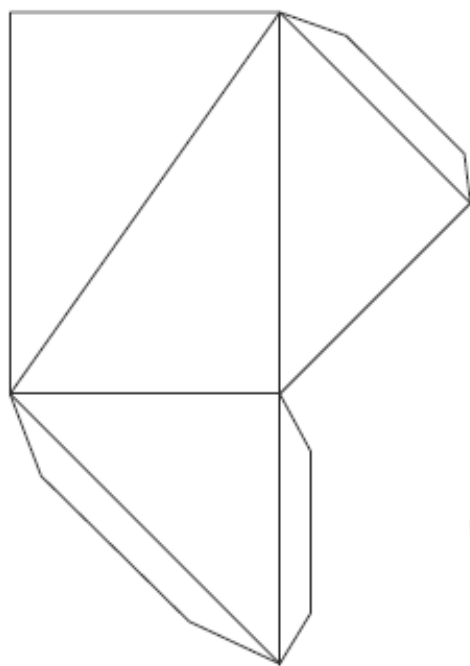
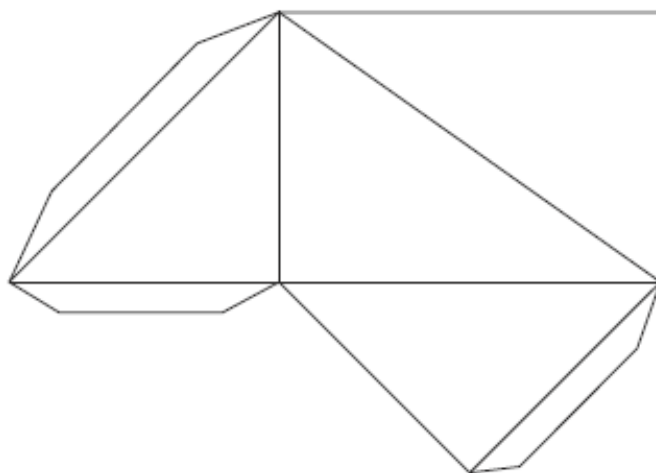
www.polyhedra.net

Obrázek 100 - Model krychle k tisku

TISK - modely 2

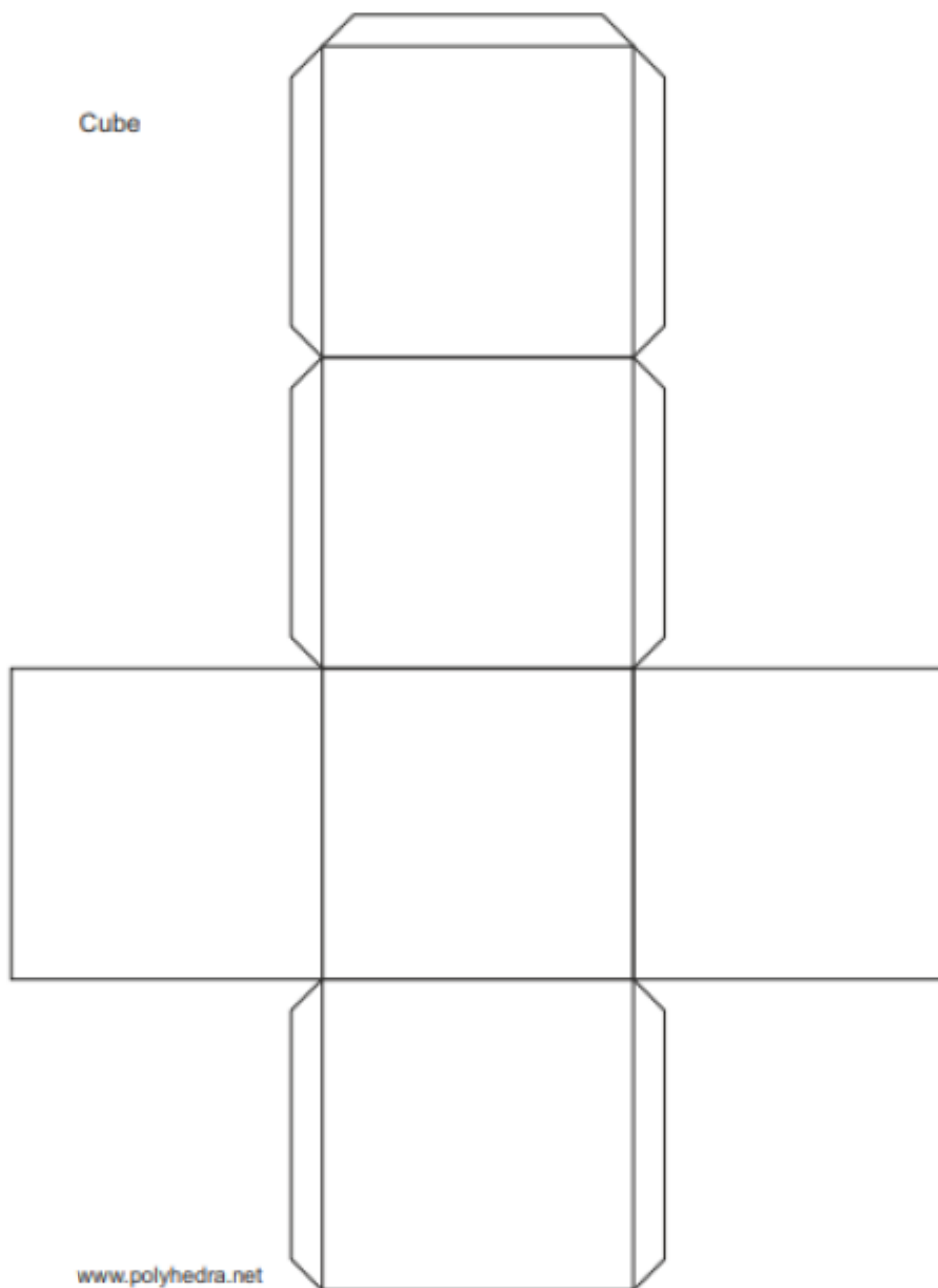


Obrázek 101 - Model pravoúhlého čtyřstěnu k tisku



Obrázek 102 - Model pravouhlého čtyřstěnu k tisku

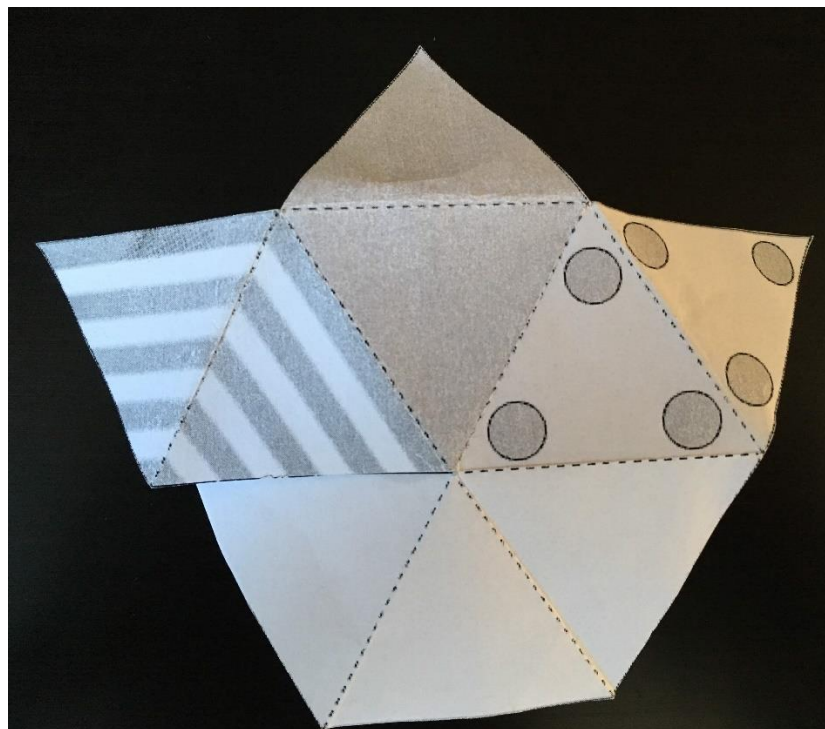
Cube



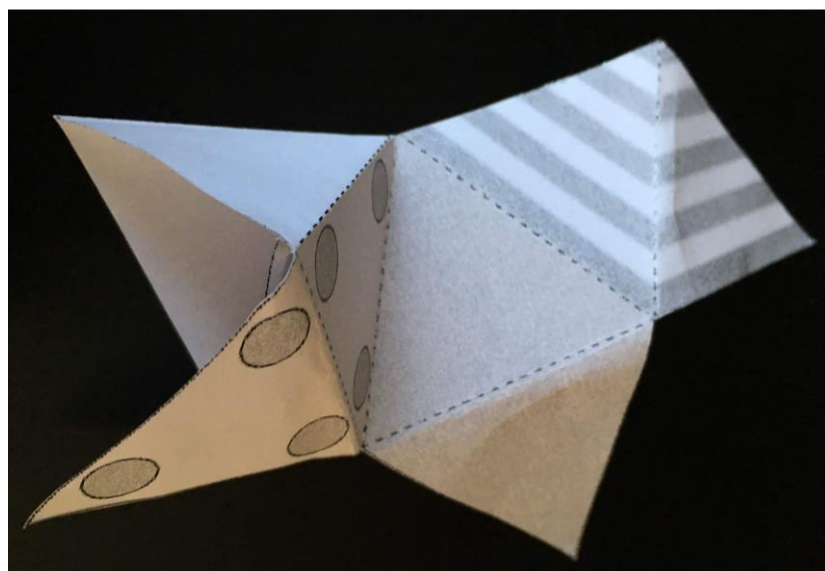
www.polyhedra.net

Obrázek 103 - Model krychle k tisku

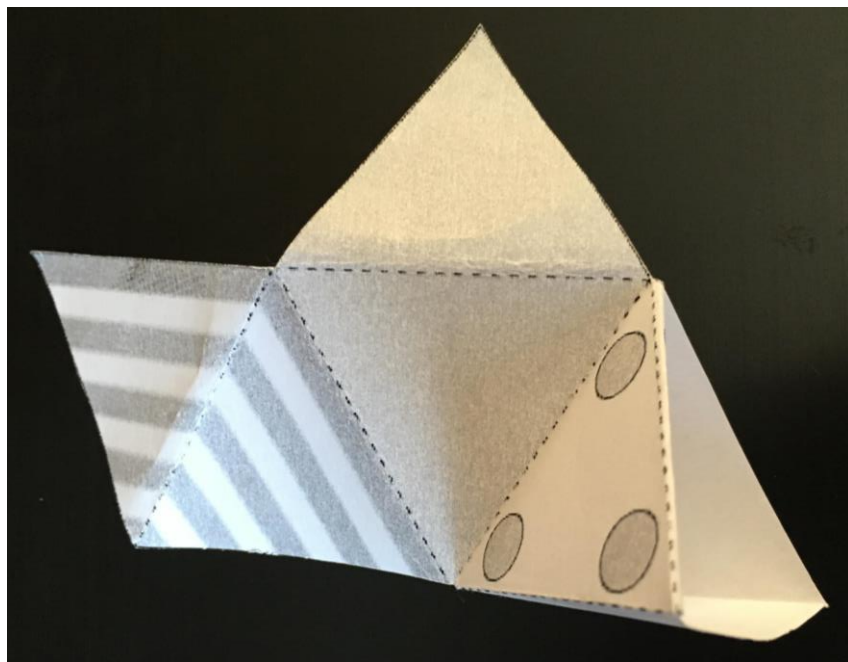
Příloha D: Model pravidelného čtyřstěnu bez lepení



Obrázek 104 - Model čtyřstěnu bez lepení – rozložený model



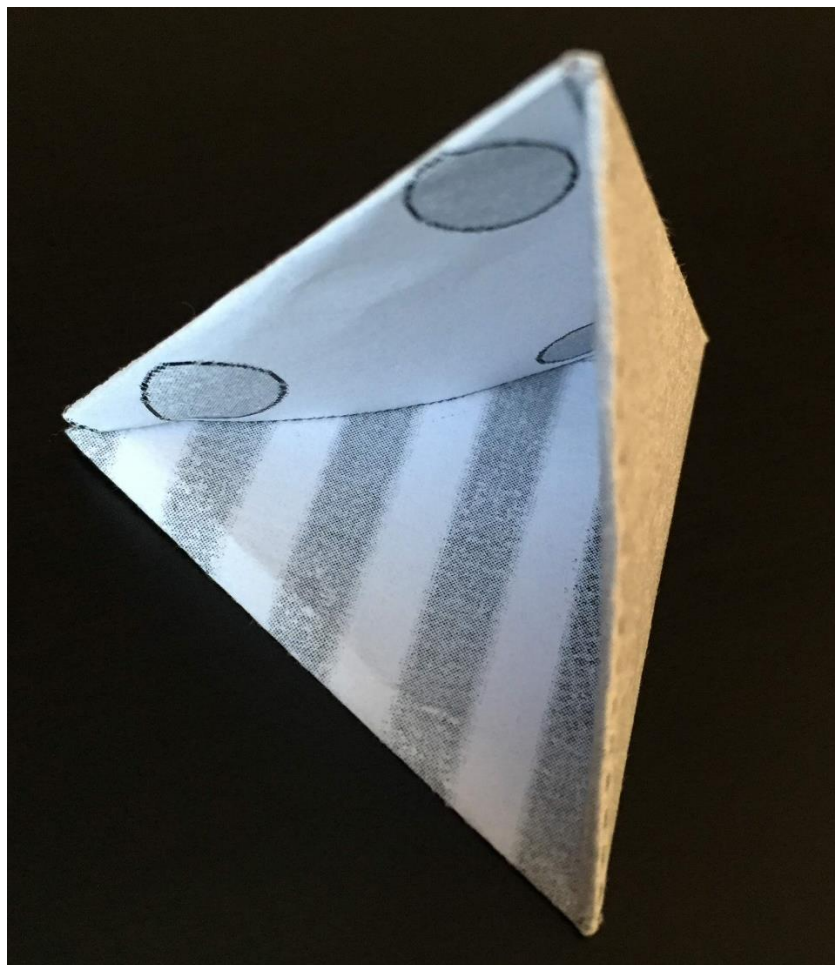
Obrázek 105 - Model čtyřstěnu bez lepení – složení bílých částí



Obrázek 106 - Model čtyřstěnu bez lepení – přeložení trojúhelníku s puntíky do čtyřstěnu

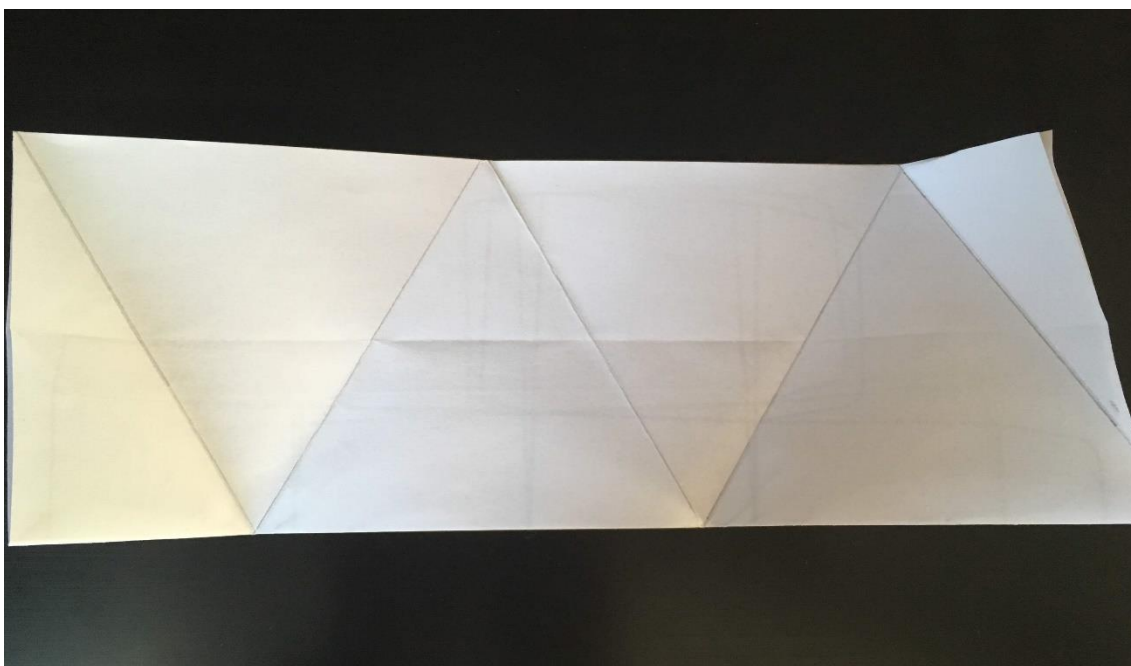


Obrázek 107 - Model čtyřstěnu bez lepení – vložení zbylých dvou trojúhelníků do čtyřstěnu

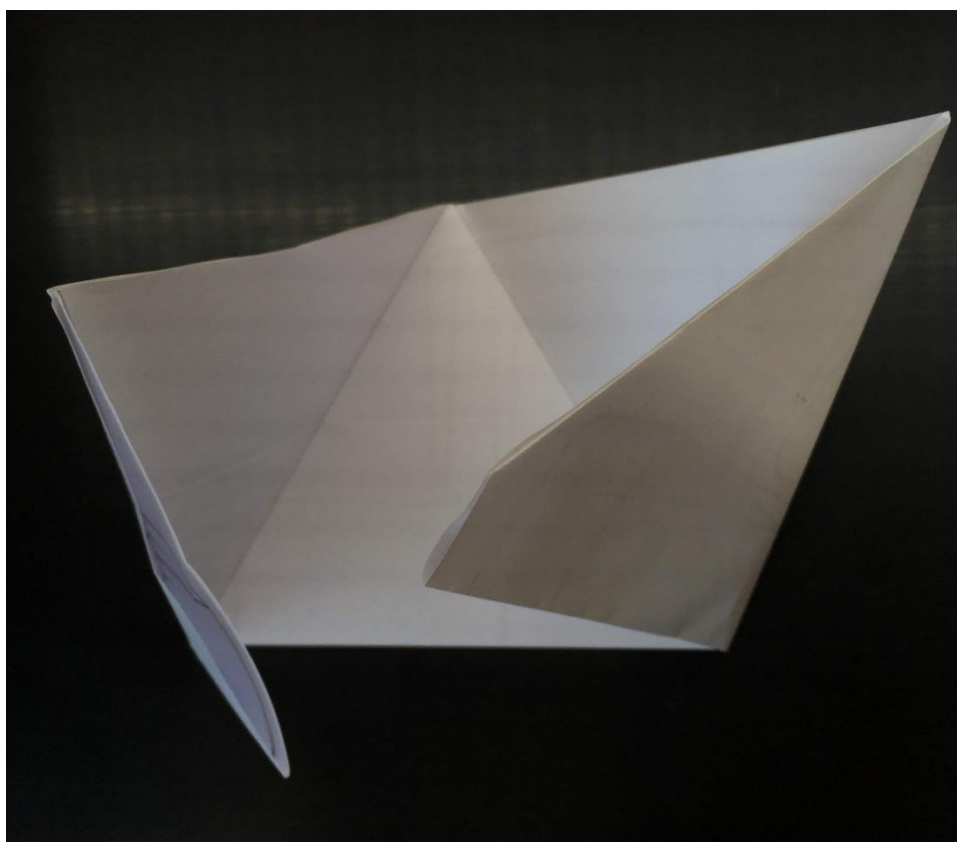


Obrázek 108 - Model čtyřstěnu bez lepení – hotový model

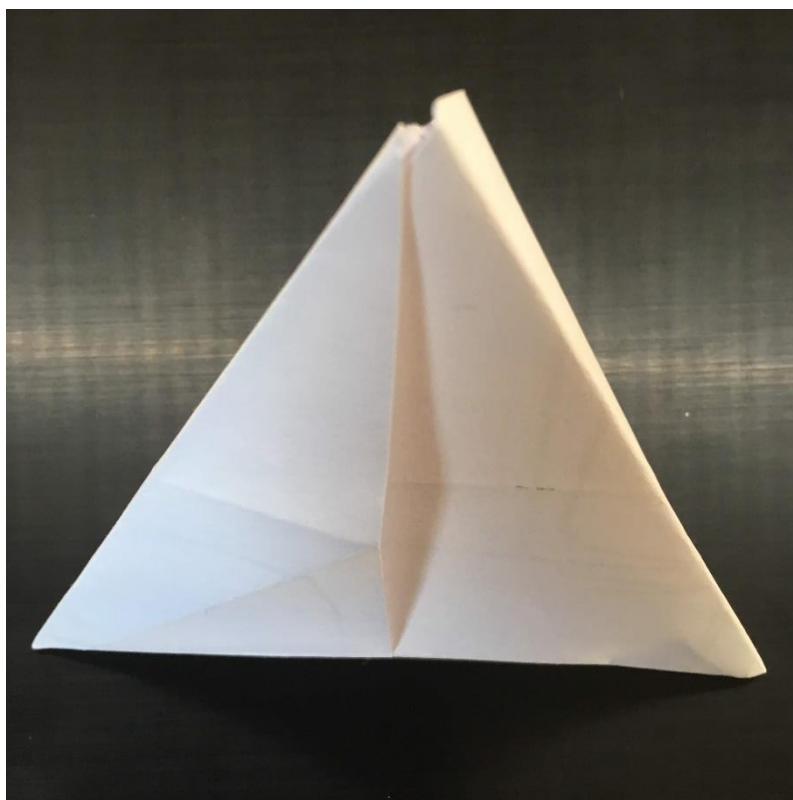
Příloha E: Model pravidelného čtyřstěnu z listu formátu A4



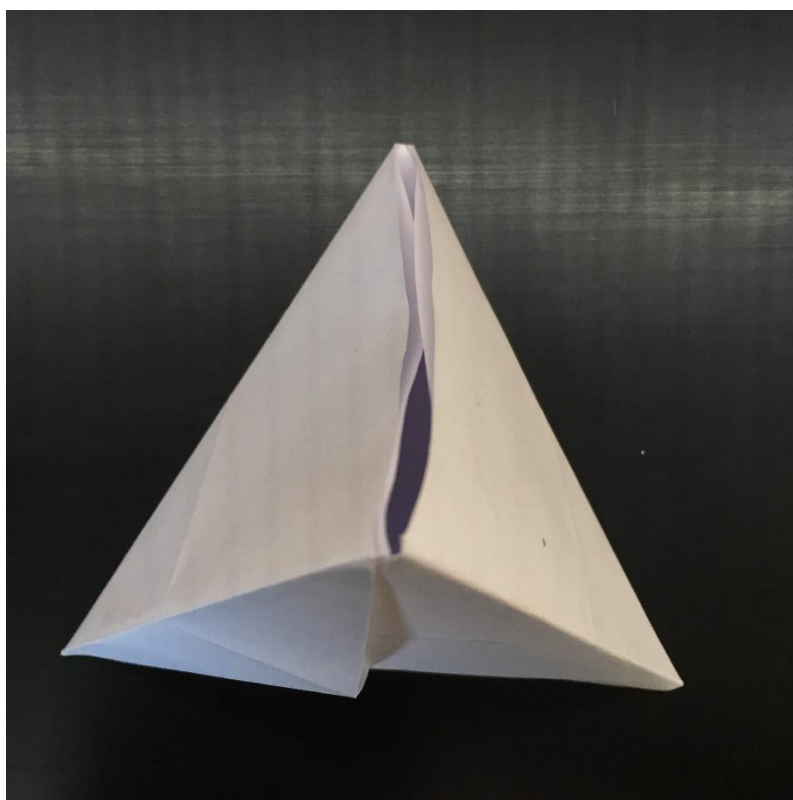
Obrázek 109 - Rozložený model pravidelného čtyřstěnu z A4



Obrázek 110 - Model pravidelného čtyřstěnu před vložením čtyřúhelníku do "kapsy"

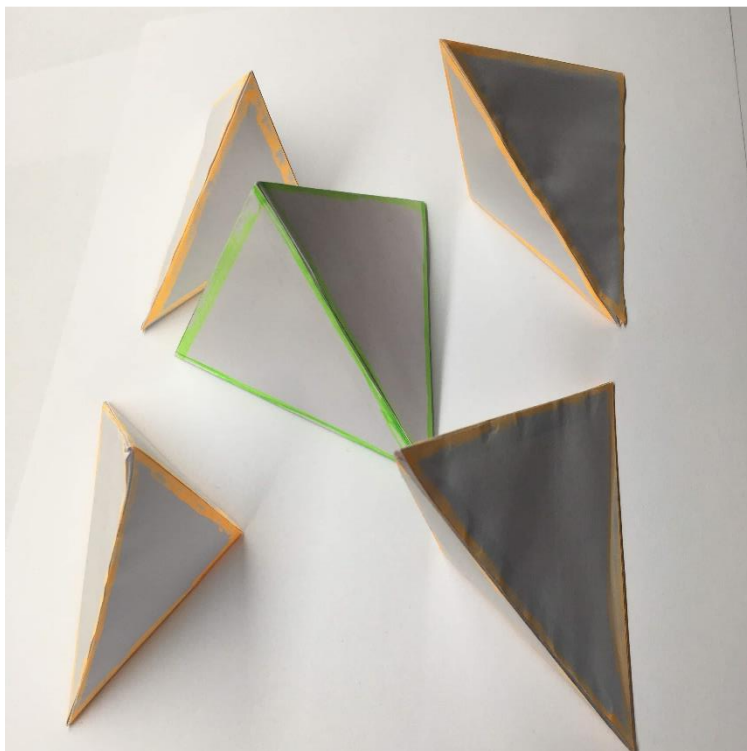


Obrázek 111 - Model pravidelného čtyřstěnu z A4

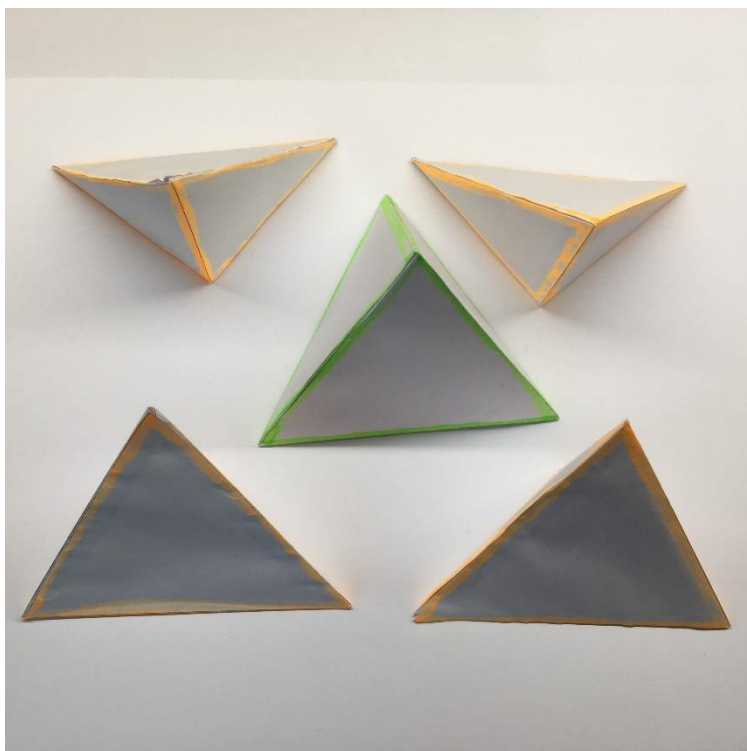


Obrázek 112 - Model pravidelného čtyřstěnu z A4 pohled shora

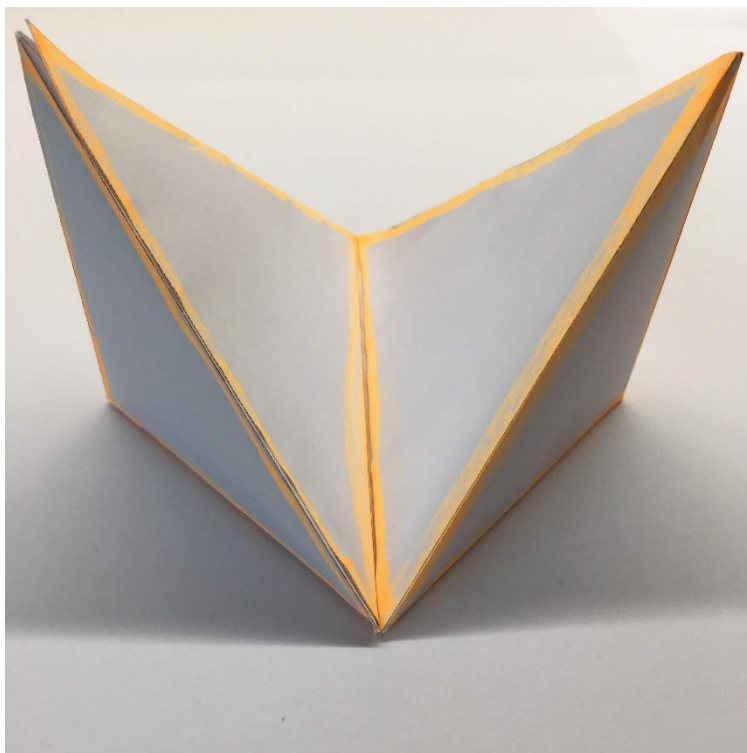
Příloha F: Modely pěti čtyřstěňů v krychli



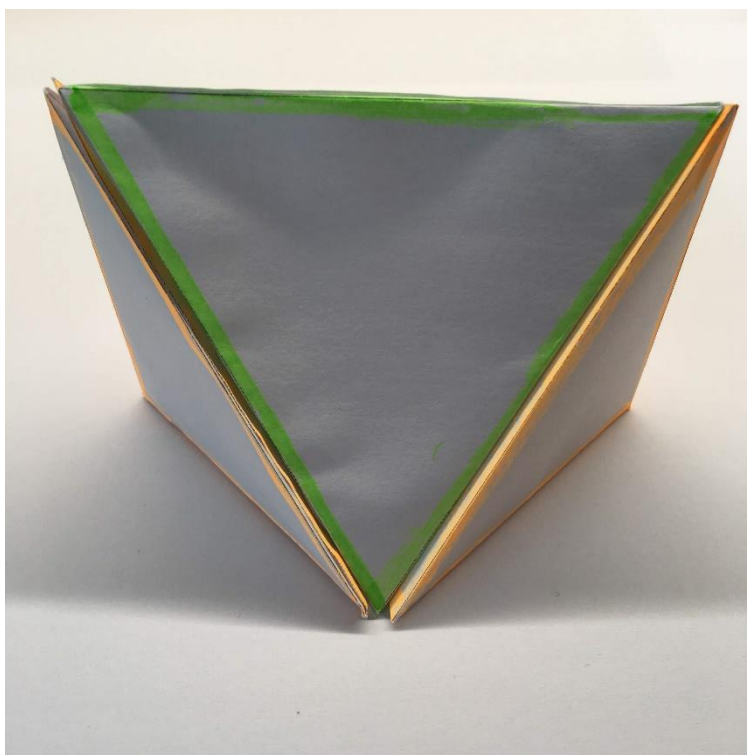
Obrázek 113 - Modely pěti čtyřstěňů



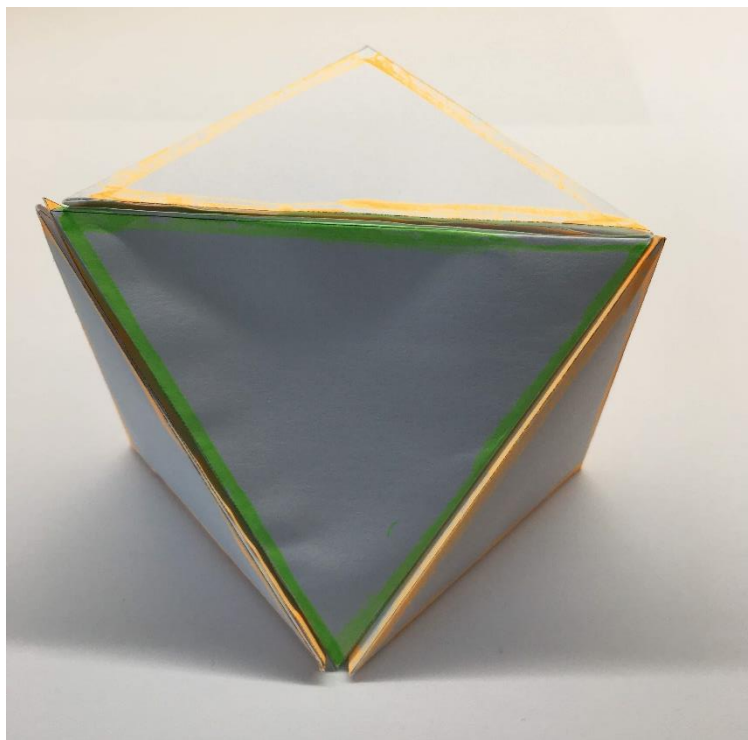
Obrázek 114 - Modely pěti čtyřstěňů



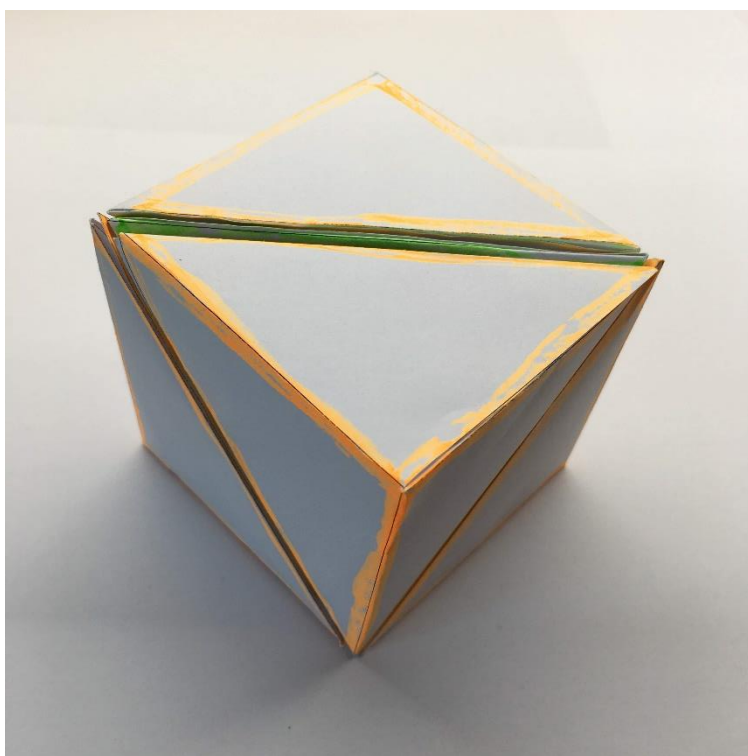
Obrázek 115 - Přiložení dvou pravouhlých čtyřstěnnů delší hranou k sobě



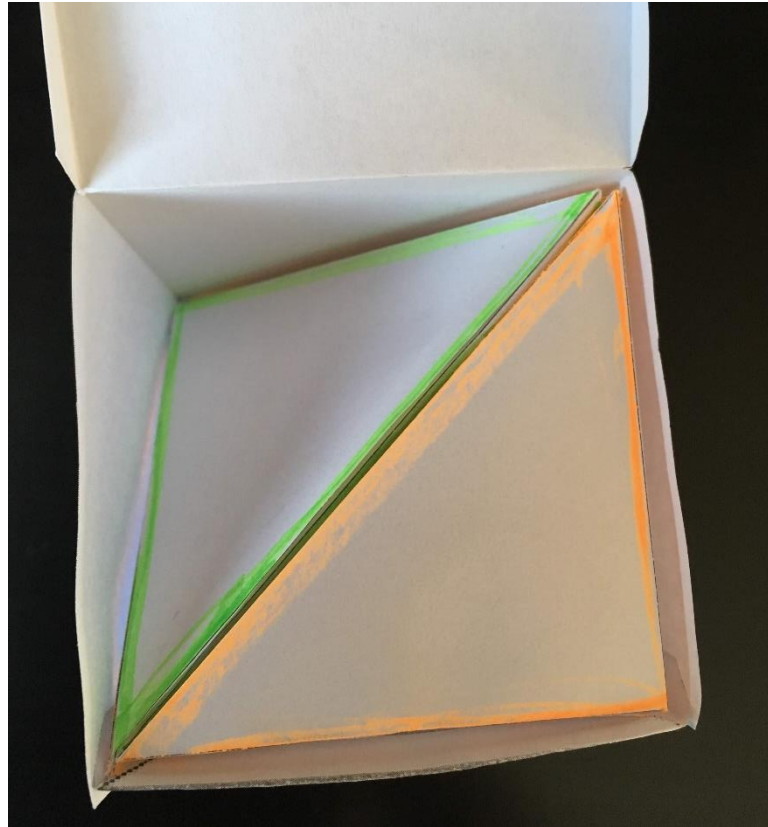
Obrázek 116 - Přiložení pravidelného čtyřstěnnu



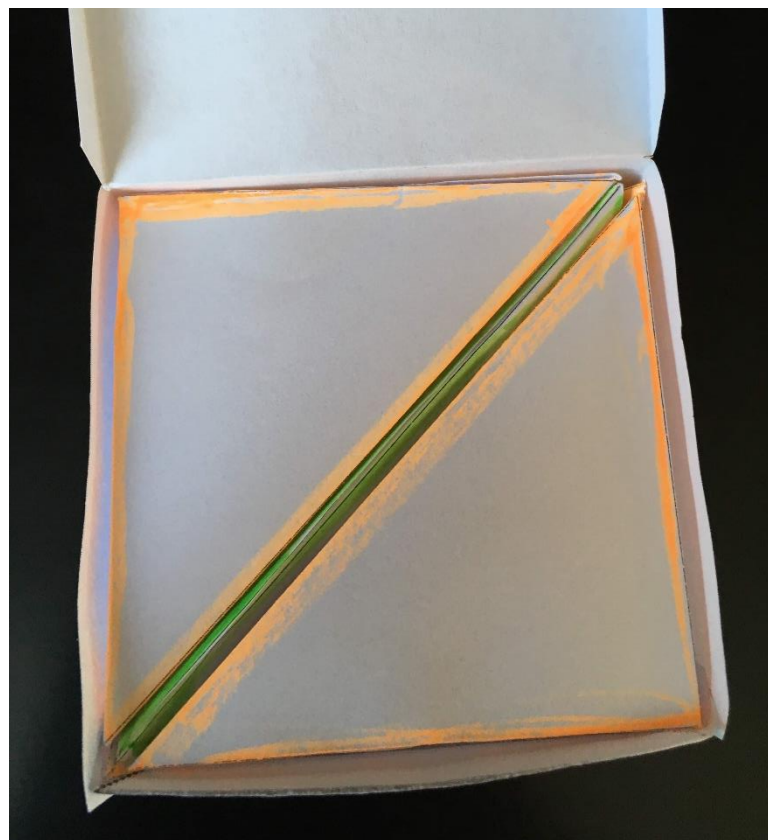
Obrázek 117 - Přiložení pravouhlého čtyřstěnu k pravidelnému čtyřstěnu



Obrázek 118 - Přiložení posledního pravouhlého čtyřstěnu



Obrázek 119 - Čtyři čtyřstěny v krychli

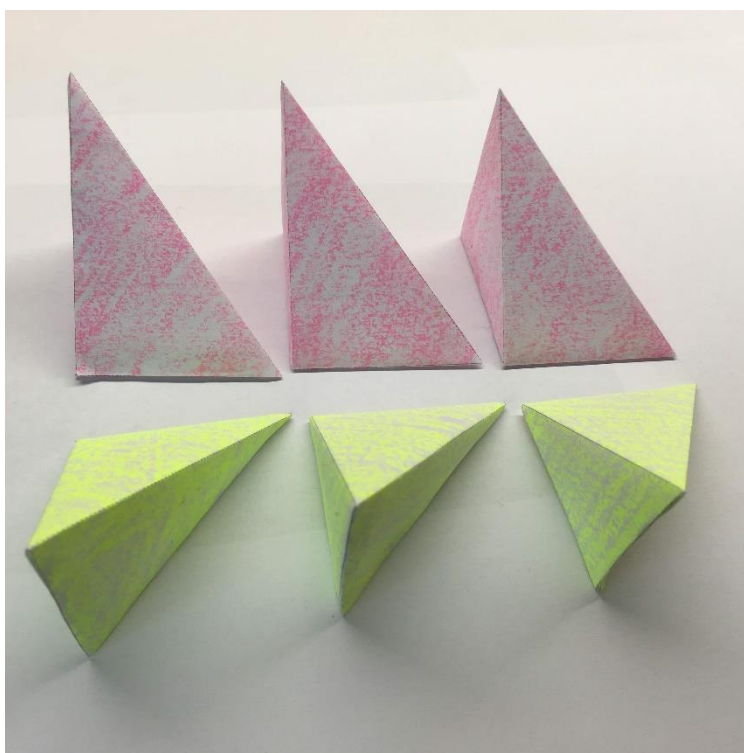


Obrázek 120 - Pět čtyřstěnu v krychli

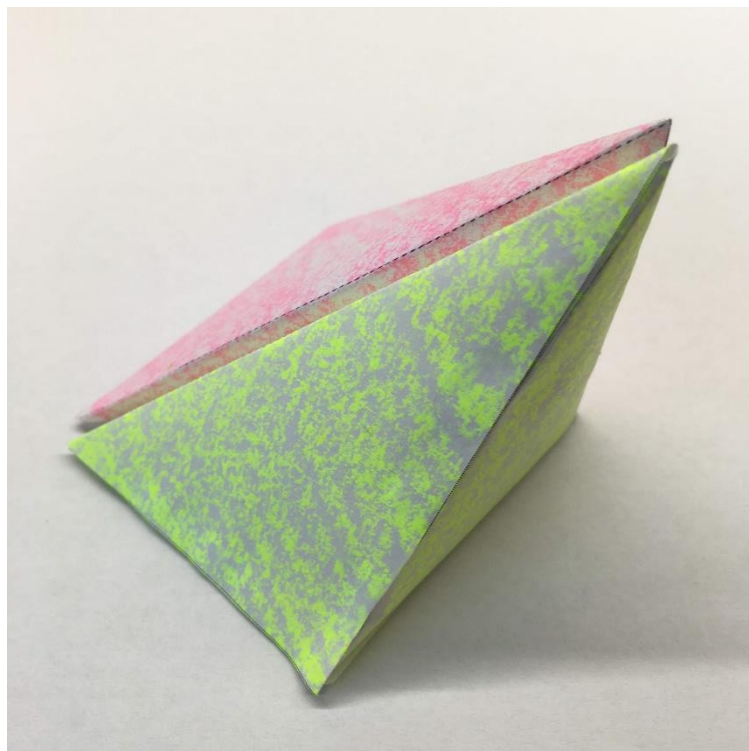
Příloha G: Modely šesti čtyřstěňů v krychli



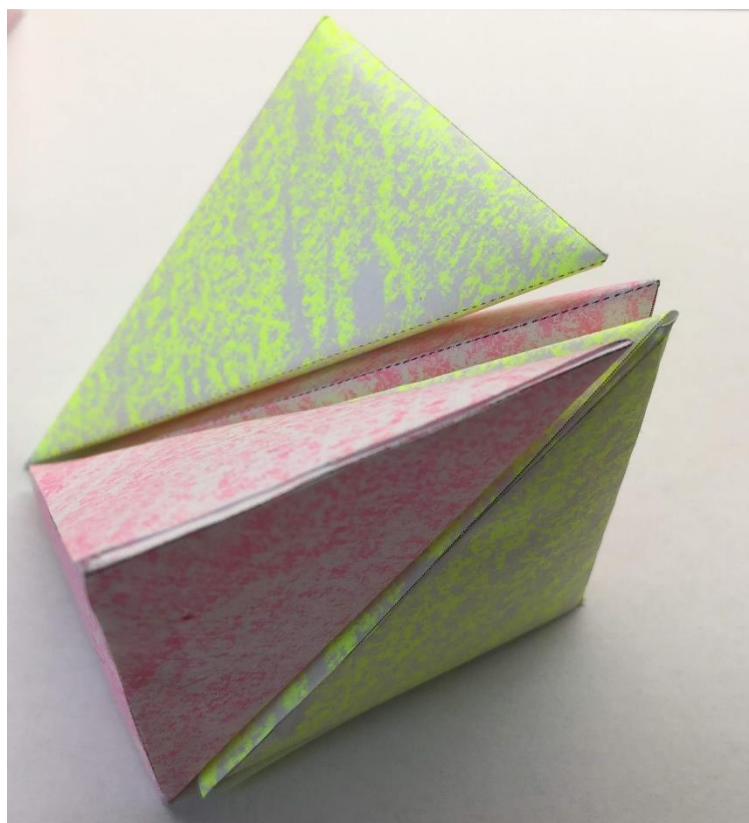
Obrázek 121 - Modely šesti čtyřstěňů



Obrázek 122 - Modely šesti čtyřstěňů



Obrázek 123 - Přiložení dvou zrcadlových pravouhlých čtyřstěnů k sobě



Obrázek 124 - Přiložení dalších dvou pravouhlých čtyřstěnů



Obrázek 125 - Přiložení posledních dvou pravouhlých čtyřstěnů



Obrázek 126 - Šest pravouhlých čtyřstěnů tvořících krychli



Obrázek 127 - Čtyři pravouhlé čtyřstěny v krychli



Obrázek 128 - Šest pravouhlých čtyřstěňů v krychli