UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Důkazy ve středoškolské matematice

Katedra algebry a geometrie

Vedoucí bakalářské práce:	**Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.**
Vypracovala:	**Klára Spilková**
Studijní program:	**B1101– Matematika**
Studijní obor:	**Matematika (učitelství) – Anglická filologie**
Forma studia:	**prezenční**
Rok odevzdání:	**2020**

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor:	Klára Spilková
Název práce:	Důkazy ve středoškolské matematice
Typ práce:	Bakalářská práce
Pracoviště:	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.
Rok obhajoby práce:	2020
Abstrakt:	Tato práce je zaměřena na důkazy ve středoškolské matematice. Jejím cílem je posoudit míru zaměření na důkazy a dokazování ve vzdělávacích programech, v učebnicích středoškolské matematiky a dále obohatit vybrané části učebnic o další způsoby prezentování důkazů a o cvičení rozvíjející schopnosti dokazování a matematického myšlení.
Klíčová slova:	Matematické důkazy, středoškolská matematika, středoškolské učebnice matematiky, důkazy beze slov
Počet stran:	66
Počet příloh:	25
Jazyk:	český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author:	Klára Spilková
Title:	Proofs in High School Mathematics
Type of thesis:	Bachelor’s
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.
The year of presentation:	2020
Abstract:	This thesis is focused on proofs in high school mathematics. Its aim is to review the extent of orientation on proofs and proving in education frameworks, high school mathematics textbooks, and moreover to enrich selected parts of textbooks with other types of proof presentation and exercises enhancing proving and reasoning skills.
Key words:	Mathematical proofs, high school mathematics, high school mathematics textbooks, proofs without words
Number of pages:	66
Number of appendices:	25
Language:	Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana Mgr. Vladimíra Vaňka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne Podpis autora:

Obsah

Seznam použitých matematických symbolů

$\in$	prvek množiny
$\cup$	sjednocení množin
$\sphericalangle$	úhel
$\{\,,\}$	množinové závorky
$\emptyset$	prázdná množina
x, y, z	proměnné
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	označení úhlů

Poděkování

Chtěla bych zde poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Vladimíru Vaňkovi, PhD. za jeho čas, ochotu pomoci a věcné připomínky. Dále děkuji mé rodině a přátelům za podporu a povzbuzení při studiu.

Úvod

Důkazy a dokazování jsou nedílnou součástí matematiky. Každá matematická věta musí být odvozena z axiomů, tj. tvrzení nebo principů, které jsou pokládány za pravdivé bez nutnosti zdůvodnění, a již ověřených vět, a její pravdivost musí být navíc dokázána posloupností logických tvrzení. Podle Hershe (2009) „možnost důkazu je to, co činí matematiku tím, čím je, a co jí odlišuje od ostatních druhů lidského myšlení“ (str. 17). Není tedy překvapením, že již více než století se ozývají hlasy, které žádají, aby se důkazům dávalo více prostoru také ve školské matematice, a to nejen při hodinách geometrie, kde jejich použití pro rozvoj myšlení žáků bylo považováno za nejpříhodnější (Bass 2011, str. 98). Navíc od 90. let je mnohými výzkumníky a učebními plány doporučováno, aby důkazy a dokazování měly ústřední pozici ve všech oblastech a ročnících školské matematiky (Stylianides 2007, str. 289). Dokazování se nicméně často netěší velkým sympatiím a je mnohdy považováno za příliš náročné. Tento názor je dokonce sdílen i některými učiteli či studenty připravující se na profesi učitele matematiky, jak píše například Kořistková (2006). Toto je však pouze jeden z faktorů, který zabraňuje většímu soustředění na důkazy v matematickém vzdělávání, blíže se této problematice budu věnovat později. Nicméně je zřejmé, že dokazování může nést nějaký užitek pouze ve chvíli, kdy budou důkazy srozumitelně vysvětleny, žáci jimi budou zaujati a aktivně se jimi zaobírat.

Jak můžeme vidět, problematika důkazů ve školské a tedy i středoškolské matematice je komplexní. Za prvé musí být rozhodnuto, do jaké míry, kdy a jak by měly důkazy být vyučovány, a to musí být artikulováno ve vzdělávacím programu. Za druhé musí být zajištěny kvalitní podklady (například učebnice, cvičebnice) a náležitá příprava učitelů s cílem začlenit požadavky ze vzdělávacího programu do praxe. Za třetí by mělo být zkoumáno, do jaké míry je určený cíl splněn, a popřípadě navrhnout, jaké kroky by měly být podniknuty, aby byl daný záměr lépe naplňován. V této práci se zaměřím především na první dva body, z kterých jsem se rozhodla vybrat pouze některé aspekty, jelikož zaobírat se celou problematikou by celou práci neúměrně prodloužilo. Jako první se tedy podívám na evropský vzdělávací rámec a poté na český vzdělávací program. Dále se budu zaobírat tím, jakou pozici zaujímají učitelé v plnění cílů ze vzdělávacích programů. Zde se mé poznatky budou odvíjet z „výukového trojúhelníku“ (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003). Následně se podívám do vybraných učebnic matematiky a budu zkoumat, v jakém množství a jaké formě se v nich důkazy nachází. Za tímto účelem jsem vybrala středoškolské učebnice pro gymnázia od nakladatelství Prometheus a Didaktis. Poté navrhnu další způsoby, jak se dají prezentovat důkazy, které se v učebnicích nacházejí, a popřípadě přidám ty, které jsou v nich opomenuty. Avšak ještě předtím se podívám na to, co matematický důkaz znamená, jaké formy důkazů existují a jaký je jejich význam v matematice a ve výuce matematiky.

Kapitola 1

Důkazy v matematice

1.1. Význam důkazu

Přestože matematické důkazy jsou nezbytnou součástí matematiky, neexistuje úplná shoda o tom, jaký mají plnit účel. Existují nejméně dva rozšířené pohledy na to, co je důkaz. Prvním je „formální“ pojetí důkazu a druhé je „praktické“ pojetí (CadwalladerOlsker 2011, str. 34-39). Tyto rozdílné náhledy vznikly, jelikož matematiku studují jednotlivci či skupiny v rozlišných matematických komunitách. Formální pojetí důkazu je pohled, že „důkazy mohou být v úplnosti čteny, porozuměny a ověřeny v rámci axiomatického systému a formálních pravidel logiky“ (CadwalladerOlsker 2011, str. 35). Formální důkazy obsahují všechny kroky deduktivního uvažování, a jsou tedy často velmi dlouhé a ne vždy napomáhají k hlubšímu porozumění dokazovaného výroku. Praktické důkazy jsou naproti tomu méně formální a ne tak přesné. Jejich cílem je přesvědčit matematickou komunitu o pravdivosti tvrzení. Toto však znamená, že existuje subjektivní strana důkazu, jelikož každému matematikovi, či matematické komunitě se může zdát jako přesvědčivé něco jiného. Z toho také plyne, že přijetí důkazu závisí na tom, do jaké míry vyhovuje standardu, který je daný jistou matematickou komunitou. Tento způsob dokazování využívá různé diagramy, či grafy, které dobře ilustrují hlavní myšlenku výroku. Tyto dva pohledy se také liší v cíli, kterého se snaží dosáhnout. Formální pojetí se především zaobírá tím, jak tvrzení ověřit, kdežto praktické pojetí tím, jak poukázat na jeho význam. Z toho vidíme, že chápání důkazu a jeho formy jsou ovlivněny jeho hlavním záměrem. Tomuto se tedy budu věnovat v další části.

Tyto rozdílné pohledy na formu důkazu se také objevují u učitelů matematiky, což ukazuje například studie Dickersona (2014). Učitelé z této studie by se rovněž dali rozdělit na dvě skupiny podle toho, jaký typ důkazu od žáků očekávali a přijímali. Někteří vyžadovali důkaz korektní po formální stránce, kdežto jiní se spokojili, když žák zmínil hlavní myšlenku důkazu, jelikož se tím přesvědčili, že důkaz chápe. V této studii byl cíl obou skupin velmi podobný, tj.

prohloubení matematického chápání žáků. Vidíme tedy, že souvislost mezi jednotlivými formami důkazů a jejich hlavními cíli není úplně jasně daná.

1.2. Cíle důkazů

Dva cíle důkazů jsem již zmínila, tj. *ověření* a *vysvětlení*, existuje nicméně více záměrů, které bych chtěla doplnit. Mezi nimi jsou „*systematizace*, *objev*, *intelektuální výzva* a *komunikace*" (CadwalladerOlsker 2011, str. 39). Nejprve se vrátím k *ověření*, tento cíl mnohé napadne nejdříve, každý výrok musí být ověřen dříve, než je přijat. Nicméně, pokud by toto byl jediný důvod, proč se dělají důkazy, žáci by při hodinách matematiky nejspíš neměli příliš motivace dokazovat tvrzení, o kterých ví, že už byly dokázány. Za druhé je vnímání důkazů jako *vysvětlení*, které je hodnotné jak pro žáky, tak pro matematiky. Napomáhají lepšímu porozumění dokazovaného tvrzení nebo pojmu tím, že poskytují odpověď na to, *proč* je to či ono pravda. Za třetí mohou být důkazy také použity pro *systematizaci*. Díky systematizaci jsme schopni najít nejmenší množinu axiomů a definicí pro určitou teorii, která postačí pro její definování. Důkazy jakýchkoli tvrzení pak musí obsahovat pouze axiomy a definice z té množiny nebo již dokázaná tvrzení. Za čtvrté mohou důkazy plnit i roli *objevu*, jelikož argumenty, které se používají k vytváření domněnek, jsou v „kognitivní jednotě" (CadwalladerOlsker 2011, str. 39) s argumenty, které se používají k jejich dokázání. Navíc jako například historie neeuklidovské geometrie ukazuje, některá tvrzení nové teorie mohou být odvozena dedukcí z již existujících, v tomto případě z euklidovské geometrie, z které neeuklidovská geometrie vznikla nesplněním 5. Euklidova postulátu. Za páté mohou být důkazy také *intelektuální výzvou* a tím přinášet uspokojení a zábavu. A jako poslední mohou důkazy sloužit ke *komunikaci* závěrů dalším matematikům nebo ke *komunikaci* metody dokazování, která tak může inspirovat další matematiky při konstruování jiných důkazů.

Do určité míry se dá většina cílů převést i na školskou matematiku, navíc se tyto cíle často překrývají, nicméně, některé z nich mohou být vhodnější než jiné. K tomuto se však vrátím později. Nyní představíme typy důkazů, které jsou ve středoškolské matematice používány.

1.3. Typy matematických důkazů

Existuje mnoho přístupů, které se používají k dokázání nějakého tvrzení, v této části se budeme zabývat pěti běžnými typy důkazů: *přímý důkaz*, *nepřímý důkaz*, *důkaz sporem*, *matematická indukce*, *úplná indukce*. Všechny tyto typy nejsou geometrické, a tedy nakonec zmíním také *geometrické důkazy* a s tím spojený *dvousloupcový důkaz*. Předtím však představím některé důležité pojmy a symboly matematické logiky, které budu v textu používat.

1.3.1. Matematická logika

Matematická logika se zabývá logickým usuzováním, je to jazyk matematiky, a tedy, tak jako každý jiný jazyk, má svou slovní zásobu a strukturu. Základním pojmem matematické logiky je *výrok*.

Definice 1

Výrok je každé tvrzení, u něhož má smysl se ptát, zda je pravdivé či nikoli, přičemž může nastat pouze jedna z těchto možností. Výrok pak nazveme pravdivým nebo nepravdivým (uvažujeme dvouhodnotovou výrokovou logiku).

Příklad 1

Následující tvrzení jsou výroky, jelikož jsme schopni určit, zda jsou či nejsou pravdivé.

a) $2 + 3 = 5$

b) *Napoleon Bonaparte se dožil 105 let.*

Následující tvrzení však nikoli:

c) *Kolik je hodin?*

d) *Zavři okno!*

e) *Ať se ti daří!*

f) *Gumička leží na stole.*

g) $x + 1 < 7$.

V posledních dvou případech se může zdát, že se to výroky jsou, avšak není tomu tak. V případě f) není přesně určeno, o jakou gumičku se jedná, a v případě g) nám obdobně chybí informace o proměnné x, nejsme tedy schopni rozhodnout o pravdivosti těchto tvrzení.

Výroku se pak podle jeho pravdivosti přiřazuje pravdivostí hodnota číslicemi 1 nebo 0, kde 1 označuje pravdivé výroky a 0 výroky nepravdivé. Pomocí *logických spojek* navíc můžeme tyto výroky spojovat do *složených výroků*. Výrok, který žádnou logickou spojku neobsahuje, a tedy se nedá rozložit na více výroků, pak nazýváme *jednoduchý* či *atomární*. *Výroková logika* se pak zabývá zkoumáním závislosti pravdivosti složených výroků na pravdivostních hodnotách jeho jednotlivých jednoduchých výroků. Mezi základní výrokové spojky patří *negace*, *konjunkce*, *disjunkce*, *implikace* a *ekvivalence*. Pokud A, B jsou výroky, pak následující tabulka určuje pravdivost výroků spojených těmito logickými spojkami.

název spojky	symbolický zápis	slovní vyjádření	logický význam
negace	$\neg A$	není pravda, že A	není pravda, že A
konjunkce	$A \wedge B$	A a současně B	současně platí A i B
disjunkce	$A \vee B$	A nebo B	platí alespoň jeden z A B
implikace	$A \Rightarrow B$	jestliže A, pak B	z A plyne B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy, když B	A a B jsou ekvivalentní

Tabulka 1. Logické spojky

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 2. Logické spojky – pravdivostní hodnoty

Výroky obsahují matematické objekty, které lze rozdělit na *konstanty* a *proměnné* podle jejich významu. *Konstanty* mají jednoznačně daný význam (např. 1, π), kdežto *proměnné* nikoli (např. x, y, z).

Definice 2

Tvrzení obsahující proměnné, z něhož po dosazení za tyto proměnné získáme výrok, se nazývá *výroková forma*.

Součástí výrokové formy tedy také musí být *obor proměnnosti*, tj. množina všech prvků, které za proměnnou mohou dosazovat.

Příklad 2

A: „$x + 1 < 7$, $x \in R$“ je výroková forma, když dosadíme za proměnnou x, dostaneme výrok a můžeme určit jeho pravdivostní hodnotu. Například pro $x = 3$ je výrok „$3 + 1 < 7$“ pravdivý.

Definice 3

Tautologie je výroková formule (výroková forma s výroky jako proměnnými), z níž dosazením výroků s jakoukoli kombinací pravdivostních hodnot dostaneme vždy pravdivý výrok.

Kontradikce je opakem tautologie, je to výroková formule, která po dosazení libovolných pravdivostních hodnot výroků dává vždy výrok nepravdivý.

Příklad 3

Zjistěte, zda se jedná o tautologii či kontradikci.

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
b) $A \wedge \neg A$
c) $(B \Rightarrow A) \wedge \neg A$

Vyřešíme pomocí pravdivostní tabulky.

a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

b)

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
1	0	0
0	1	0
0	1	0

c)

A	B	$\neg A$	$B \Rightarrow A$	$(B \Rightarrow A) \wedge \neg A$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Zjistili jsme, že v prvních dvou případech se skutečně jedná o tautologii (a) nebo kontradikci (b), v posledním případě však nikoli.

Další částí matematické logiky je *predikátová logika*, která se na rozdíl od *výrokové* zabývá vnitřní strukturou výroků. Zkoumá vlastnosti všech či části prvků (*proměnných*) určité množiny (*obor proměnnosti*). Základním pojmem je již zmíněná *výroková forma* (neboli *predikátová formule*).

Mezi základní symboly patří *kvantifikátor*. Nechť S je neprázdná množina prvků, pak následující tabulka popisuje dva běžné kvantifikátory.

název kvantifikátoru	symbolický zápis	slovní vyjádření
obecný (univerzální)	$\forall\ x \in$ S	pro všechna *x* z S
existenční	$\exists\ x \in$ S	existuje (alespoň jedno) *x* z S
	$\exists!\ x \in$ S	existuje právě jedno *x* z S

Tabulka 3. Kvantifikátory

Příklad 4

Následující tvrzení jsou příklady predikátových formulí:

a) *Každý den má nějaký člověk narozeniny.*
b) *Někteří lidé mají rádi matematiku.*
c) $\exists a \in$ N $\forall b \in$ N: $a \leq$ b
d) $\exists x \in$ R: $6 < x < 7$
e) $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in$ R $\exists y \in$ R: $x < y < x + \varepsilon$,

Nutná a postačující podmínka

Nutná a postačující podmínka souvisí s definicí implikace „$A \Rightarrow B$“, kde A, B jsou libovolné výroky.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabulka 4. Implikace

Říkáme, že výrok B je *nutná podmínka* pro A. Tedy aby výrok A mohl byl pravdivý, musí být B nutně pravda. Jinak řečeno, splnění B je nezbytné pro splnění A. Výrok A nazýváme *postačující podmínka* pro B. Pokud je výrok A splněn, bude splněn i výrok B.

Příklad 5

Výrok: $\forall n \in N: 10 \mid n \Rightarrow 5 \mid n.$

V tomto výroku je dělitelnost pěti *nutná podmínka* pro to, aby přirozené číslo *n* mohlo být dělitelné deseti. Není možné, aby se číslo *n* nedalo dělit pěti, ale deseti ano. *Postačující podmínka* pro dělitelnost pěti je dělitelnost deseti. Pokud se číslo *n* dá dělit deseti, určitě se bude dát dělit i pěti.

Někdy chceme nalézt zároveň postačující a nutné podmínky, v tomto případě se jedná o hledání dvou ekvivalentních výroků, tj. ve tvaru „$A \Leftrightarrow B$“.

Příklad 6

Najděte nutné a postačující podmínky pro dělitelnost deseti.

Řešení: $\forall n \in N: (10 \mid n) \Leftrightarrow (5 \mid n \ \wedge \ 2 \mid n)$. Přirozené číslo *n* je tedy dělitelné deseti právě tehdy, když je dělitelné pěti a zároveň deseti.

Ekvivalentní a důsledkové úpravy

V této části ještě krátce zmíním rozdíl mezi *ekvivalentními* a *důsledkovými* (*neekvivalentními*) úpravami rovnic či nerovnic. Ekvivalentní úpravy jsou takové, které převedou danou rovnici na rovnici, která má stejnou množinu řešení. Naproti tomu při použití úprav důsledkových se množina řešení rovnice může zvětšit. Musí se tedy provádět zkouška (dosazením do původní rovnice), jelikož ne všechna řešení upravené rovnice musí být řešeními rovnice původní.

Mezi ekvivalentní úpravy patří například záměna stran rovnice, přičtení či odečtení stejného výrazu k oběma stranám rovnice, násobení či dělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem. Důsledková úprava je například umocnění či odmocnění obou stran rovnice přirozeným číslem.

1.3.2. Přímý důkaz

Přímé důkazy dokazují tvrzení pomocí posloupnosti pravdivých implikací. Tento typ důkazů může být použit k dokázání jednoduchých nebo složených výroků či výrokových forem. Důkaz musí začínat pravdivým tvrzením nebo platnou implikací a pak následuje řada pravdivých implikací, než dosáhneme žádaného závěru.

Jednoduchý výrok (výroková forma) „B“

A… pravdivé tvrzení, B… výrok (výroková forma), který chceme dokázat

---

$A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n, A_n \Rightarrow B$ … pravdivé implikace

B … pravdivý výrok

Příklad 7

Výrok: Pro všechna reálná čísla x platí, že

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$$

Řešení: Nejdříve ověříme, že výroková forma dává smysl pro všechna reálná x. Poté se snažíme z dokazovaného tvrzení ekvivalentními úpravami získat tvrzení obecně známé.

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2} \qquad (\mathrm{V}(x))$$

$$2x^2 \leq 1 + x^4 \qquad (\mathrm{A}_1(x))$$

$$0 \leq x^4 - 2x^2 + 1 \qquad (\mathrm{A}_2(x))$$

$$0 \leq (x^2 - 1)^2 \qquad (\mathrm{A}_3(x))$$

V posledním kroku jsme získali obecně známou nerovnost, jelikož víme, že jakékoli reálné číslo umocněné na druhou je větší nebo rovno nule.

Prováděli jsme pouze ekvivalentní úpravy, a tedy ve vlastním důkazu můžeme postup obrátit a začít od platné nerovnosti z posledního kroku ($\mathrm{A}_3(x)$). Dále se implikacemi v obráceném směru, tj. $\mathrm{A}_3(x) \Rightarrow \mathrm{A}_2(x) \Rightarrow \mathrm{A}_1(x) \Rightarrow \mathrm{V}(x)$, dostaneme k dokazovanému tvrzení.

Důkaz: Víme, že pro všechna reálná čísla x platí následující tvrzení

$$0 \leq (x^2 - 1)^2.$$

Tato nerovnost lze však pomocí ekvivalentních úprav upravit následujícím způsobem

$$0 \leq x^4 - 2x^2 + 1$$

$$2x^2 \leq 1 + x^4$$

$$\frac{x^2}{1 + x^4} \leq \frac{1}{2}.$$

Tímto jsme se dostali k dokazované nerovnosti a tvrzení je tedy dokázáno. □

Složený výrok (výroková forma) „$A \Rightarrow B$"

$A \Rightarrow B$ … výrok (výroková forma), který chceme dokázat

---

$A \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$, …, $A_{n-1} \Rightarrow A_n$, $A_n \Rightarrow B$ … pravdivé implikace

$A \Rightarrow B$ … také pravdivá implikace

Příklad 8

Výrok: Pro všechna reálná čísla x, y platí

$$x < y \Rightarrow x < \frac{x + y}{2} < y.$$

Důkaz: Začneme levou stranou implikace tím, že k oběma stranám nerovnosti přičteme stejné číslo. Tuto úpravu můžeme provést bez znalosti hodnoty x a y, neboť to na platnosti nerovnosti nic nezmění. Tuto úpravu provedeme dvakrát, avšak odděleně, nejdříve s reálným číslem čísly x a poté s y. Dále využijeme úpravy dělení nerovnosti kladným číslem, která platnost nerovnosti též zachovává.

1. $\forall x, y \in$ R: $x < y \Rightarrow x + x < y + x \Rightarrow 2x < x + y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2}$,
2. $\forall x, y \in$ R: $x < y \Rightarrow x + y < y + y \Rightarrow x + y < 2y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < y$.

Spojením těchto dvou bodů získáváme dokazovanou nerovnost.

$$\forall x, y \in \mathrm{R}: x < y \Rightarrow x < \frac{x + y}{2} < y$$

(inspirováno Moravcem 2012, příklad 4 u přímého důkazu) □

1.3.3. Nepřímý důkaz

Nepřímý důkaz se může použít k dokázání složeného výroku nebo složené výrokové formy. Od přímého důkazu se liší v tom, že nedokazujeme původní výrok, ale větu k ní obměněnou (kontraponovanou), která má stejnou pravdivostní hodnotu. Tedy místo „z A plyne B"

dokazujeme „z neplatnosti B plyne neplatnost A," tuto větu pak dokazujeme posloupností pravdivých implikací.

Složený výrok (výroková forma) „$A \Rightarrow B$"

$A \Rightarrow B$ … výrok (výroková forma), který chceme dokázat

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$\neg B \Rightarrow A_1,\ A_1 \Rightarrow A_2,\ \ldots,\ A_{n-1} \Rightarrow A_n,\ A_n \Rightarrow \neg A$ … pravdivé implikace

$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

$A \Rightarrow B$ … také pravdivé

Příklad 9

Výrok: Nechť a $\in Z$. Pokud a^2 je liché, pak je i a liché.

Důkaz: Výrok budeme dokazovat tím, že dokážeme větu obměněnou: pokud a je sudé, pak je i a^2 sudé.

Nechť a je sudé, tj. $a = 2n$, kde $n \in Z$. Potom $a^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$. Z toho plyne, že a^2 je také sudé. Dokázali jsme, že ze sudosti a plyne sudost a^2. Platí tedy i věta obměněná, tj. pokud a^2 je liché, pak je i a liché, a tvrzení je tak dokázáno.

(převzato z Dickerson 2014, str. 728)

□

1.3.4. Důkaz sporem

Důkaz sporem je metoda dokazování, která se může použít pro jednoduché i složené výroky a jejich výrokové formy. Princip důkazu spočívá v tom, že nejdříve předpokládáme, že daná věta není pravdivá, tj. platí její negace. Poté na základě tohoto předpokladu vyvozujeme další tvrzení, než se dostaneme k výroku, který je ve sporu s předpokladem, předešlými tvrzeními nebo obecně známou pravdou. Z tohoto sporu plyne, že výrok v předpokladu není pravdivý a jelikož každý výrok má jednoznačně přiřazenou pravdivostní hodnotu, musí platit negace předpokladu, tj. původní tvrzení.

Jednoduchý výrok (výroková forma) B

B… výrok (výroková forma), který chceme dokázat, P… obecně známá pravda

$B \Leftrightarrow \neg(\neg B)$

$\neg B \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n, A_n \Rightarrow (B \vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_{n-1} \vee \neg P)$ … pravdivé implikace, v posledním kroku však dochází ke sporu s předpokladem, předešlými tvrzeními či obecně známou pravdou

$$\neg(\neg B) \Rightarrow B$$

B … pravda

Příklad 10

Výrok: log 7 je iracionální číslo.

Důkaz: Předpokládáme, že výrok neplatí, tj. log 7 je číslo racionální. To však znamená, že ho lze zapsat ve tvaru zlomku. Existují tedy taková celá čísla p, q, že platí

$$\log 7 = \frac{p}{q}.$$

Podle definice logaritmu získáváme

$$10^{\frac{p}{q}} = 7\,.$$

Dále upravíme

$$10^p = 7^q,$$

$$2^p 5^p = 7^q.$$

V poslední rovnosti však dochází ke sporu se základní větou aritmetiky, která říká, že „každé přirozené číslo větší než 1 lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel“ (Základní věta aritmetiky 2019). Jelikož jsme pravdivými implikacemi došli k neplatnému tvrzení, předpoklad je nepravdivý a platí jeho negace. Tedy log 7 je iracionální číslo.

$\square$

Složený výrok (výroková forma) „$A \Rightarrow B$“

$A \Rightarrow B$ … výrok (výroková forma), který chceme dokázat, P… obecně známá pravda

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

$(A \wedge \neg B) \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \ldots, A_{n-1} \Rightarrow A_n, A_n \Rightarrow (\neg A \vee B \vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_{n-1} \vee \neg P)$ … pravdivé implikace, v posledním kroku však dochází ke *sporu* s předpokladem, předešlými tvrzeními či obecně známou pravdou

$$\neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$A \Rightarrow B$ … pravdivé

Příklad 11

Výrok: Nechť a $\in Z$. Pokud a^2 je liché, pak je i a liché.

Důkaz: V tomto případě chceme výrok dokázat sporem, začneme tedy dokazovat negaci výroku, tj. a^2 je liché a zároveň a je sudé. Nechť $a = 2n$, kde $n \in Z$, potom $a^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$. Tedy a^2 je sudé a tím docházíme ke sporu s počáteční podmínkou, platí tedy negace výroku a tedy: a^2 je liché, pak je i a liché.

$\square$

1.3.5. Matematická indukce

Matematická indukce je metoda, která se používá k dokázání jednoduché nebo složené výrokové formy na *induktivní množině*[1]. Princip matematické indukce pak může definovat následovně.

Nechť $P(x)$ je výroková forma a I je induktivní množina. Nechť dále

(i) $P(\emptyset)$ je pravdivý výrok,

(ii) $P(x) \Rightarrow P(x \cup \{x\})$; $\forall x \in I$ (tzv. *indukční krok*),

(iii) pokud současně platí bod i) a ii), pak $P(x)$ je pravdivé pro všechna $x \in I$.

Analogicky můžeme rozepsat princip matematické indukce pro přirozená čísla[2], s čímž se setkáme nejběžněji.

Nechť $P(n)$ je výroková forma s proměnnou $n \geq n_0, n \in$ N, kde n_0 je nejmenší prvek dané podmnožiny přirozených čísel. Nechť

---

[1] Množinu I nazveme *induktivní*, jestliže pro ni platí

$$\emptyset \in I \wedge (\forall x \in I: x \cup \{x\} \in I).$$

Prvky induktivní množiny tedy vypadají následovně

1. $\emptyset \in I$,
2. $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \in I$,
3. $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in I$,
4. …

[2] Přirozená čísla jsou induktivní množinou. V teorii množin se přirozené číslo zavádí jako množina všech přirozených čísel k němu menších, tedy

- $0 = \emptyset$,
- $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$,
- $2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

  …
- $n = \{0, \dots, n-1\}$.

(i) $P(n_0)$ je pravda,

(ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1);\ \forall k \in \mathrm{N}: k \geq n_0$,

(iii) pokud současně platí bod i) a ii), pak $P(n)$ je pravdivé pro všechna $n \geq n_0, n \in \mathrm{N}$.

Jinými slovy, v prvním kroku ověříme výrokovou formu pro nejmenší prvek n_0 (někdy je to třeba ukázat pro více prvních členů) a v druhém kroku prověříme pravdivost implikace $P(k) \Rightarrow P(k+1);\ \forall k \in \mathrm{N}: k \geq n_0$. Po splnění těchto kroků obě části spojíme a tím dojdeme k závěru, že výroková forma je pravdivá pro všechny prvky množiny.

Příklad 13

Výrok: $\forall n, n \in N: 6 \mid (n^3 + 5n)$

Důkaz: Platí, že množina přirozených čísel má nejmenší prvek 1. Přejdeme tedy na první krok a za *n* dosadíme 1

$$6 \mid (1^3 + 5.1) \Rightarrow 6 \mid 6,$$

toto platí a tím je první krok ověřen. Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo *k*, tedy

$$6 \mid (k^3 + 5k),$$

a chceme dokázat, že pak tvrzení platí i pro k + 1, tedy že

$$6 \mid [(k+1)^3 + 5(k+1)].$$

Upravíme výraz $(k+1)^3 + 5(k+1)$

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6,$$

dále použijeme předpoklad, že $6 \mid (k^3 + 5k)$, zbývá tedy dokázat, že $6 \mid (3k^2 + 3k + 6)$. Víme, že $6 = 3.2$ a $(3k^2 + 3k + 6) = 3(k^2 + k + 2)$. Stačí tedy ověřit, že 2 dělí $k^2 + k + 2$. Pokud je *k* sudé, pak podle věty dokázané v příkladu 2 je sudé i k^2, součet sudých čísel je číslo sudé a tedy tvrzení platí. Pokud je *k* liché, pak existuje přirozené číslo *m* tak, že $k = 2m + 1$, a tedy $k^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$, k^2 je tedy také liché. Jelikož $k^2 + k + 2 = 2(2m^2 + 2m) + 1 + 2m + 1 + 2 = 2(2m^2 + 3m + 2)$, tvrzení $2 \mid k^2 + k + 2$ platí i pro *k* liché. Druhý krok je tudíž také ověřen. Z prvního kroku tedy víme, že výrok platí pro číslo jedna, použitím druhého kroku pak vyvozujeme, že platí i pro dvojku a všechna další následující přirozená čísla. Tvrzení je tak dokázáno.

(inspirováno Moravcem 2012, příklad 14 u důkazu matematickou indukcí) $\square$

1.3.6. Úplná indukce

Úplná indukce je metoda, při které se výrok rozdělí na menší části, které dohromady zahrnují všechny možné případy. Každá část se pak řeší samostatně.

Příklad 14

Výrok: Pro každý trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c, platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Důkaz: Důkaz provedeme pouze pro první rovnici, zbývající dva pak z ní dostaneme *cyklickou záměnou*. Větu dokážeme rozdělením na tři případy podle velikosti úhlu α. Úhel α je buď ostrý, pravý nebo tupý.

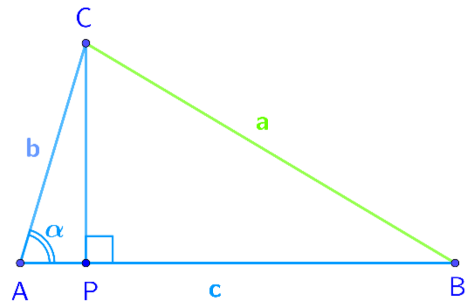
1. **Úhel α je ostrý, tedy 0° < α < 90° (obr. 1).**

Trojúhelník CPB je pravoúhlý. Pro jeho strany podle Pythagorovy věty platí

$$a^2 = |\mathrm{CP}|^2 + |\mathrm{BP}|^2.$$

Platí však

$$|\mathrm{BP}| = |\mathrm{AB}| - |\mathrm{AP}|.$$



Obrázek 1. Kosinová věta – ostrý úhel

Z trojúhelníku APC dostáváme

$$|\mathrm{AP}| = b\ \cos\alpha,$$
$$|\mathrm{CP}| = b\ \sin\alpha.$$

A tedy

$$|\mathrm{BP}| = c - b\ \cos\alpha.$$

Nyní v první rovnici dosadíme za |CP| a |BP|, čímž získáme dokazovanou rovnost

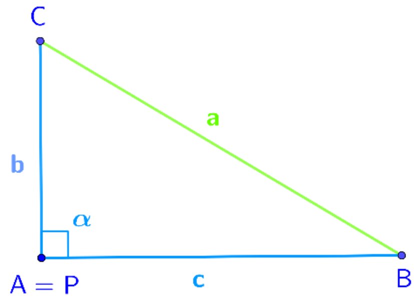
$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 =$$
$$= b^2\sin\alpha^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos\alpha^2 =$$
$$= b^2(\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2) + c^2 - 2bc\cos\alpha =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

2. **Pokud α je pravý úhel, pak pro trojúhelník ABC platí Pythagorova věta (obr. 2)**

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Pro úhel α platí, že α = 90°, tudíž $\cos\alpha = 0$. Platí tedy, že

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

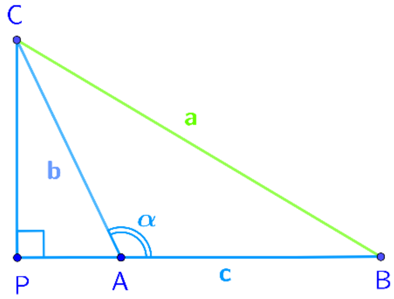


Obrázek 2. Kosinová věta – pravý úhel

3. **Úhel α je tupý, tedy 90° < α < 180° (obr. 3).**

Trojúhelník CPB je pravoúhlý. Pro jeho strany podle Pythagorovy věty platí

$$a^2 = |\mathrm{CP}|^2 + |\mathrm{BP}|^2.$$



Obrázek 3. Kosinová věta – tupý úhel

Platí však

$$|\mathrm{BP}| = |\mathrm{AB}| + |\mathrm{AP}|.$$

Z trojúhelníku CPA dostáváme

$$|\mathrm{AP}| = b\cos(\pi - \alpha),$$
$$|\mathrm{CP}| = b\sin(\pi - \alpha).$$

Tyto rovnosti upravíme pomocí součtových vzorců

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin\alpha = -\cos\alpha,$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha.$$

A tedy

$$|\mathrm{AP}| = -b\cos\alpha,$$
$$|\mathrm{CP}| = b\sin\alpha.$$

Dosazením do druhé rovnosti dostáváme

$$|\mathrm{BP}| = c - b\cos\alpha.$$

Nyní v první rovnici dosadíme za |CP| a |BP|, čímž získáme stejný výraz jako v prvním případě

$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 =$$
$$= \cdots = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Každý trojúhelník spadá právě do jednoho ze tří případů, pokryli jsme tedy všechny možnosti a věta je tak dokázána.

(viz Prometheus goniometrie str. 99-101) □

1.3.7. Geometrický důkaz

Geometrické důkazy dokazují pomocí grafického znázornění daného výroku. Existuje více přístupů, jak dokazovat pomocí obrázku. Například *dvousloupcový důkaz*[3] využívá jak grafického znázornění, tak i psaného zápisu v podobě dvou sloupců. V prvním sloupci se uvádí určité tvrzení, v druhém pak zdůvodnění, proč je tvrzení pravdivé. Tímto způsobem se odvodí platnost dokazovaného výroku (příklad 15). Existují však také tzv. *důkazy beze slov*[4], jež dokazují obrázkem, který však může být doprovázen krátkým matematickým zápisem (příklad 16). Tyto důkazy jsou elegantnější, často názornější a mohou být snadnější na porozumění.

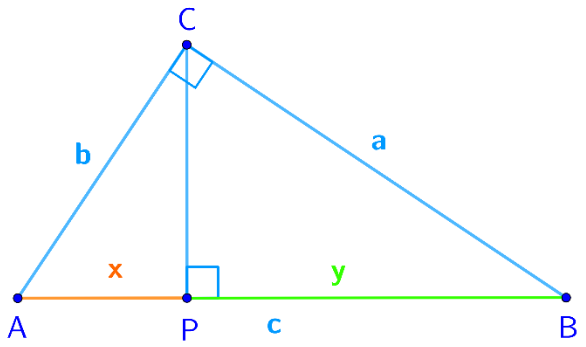
Příklad 15

Výrok: (Pythagorova věta) V libovolném pravoúhlém trojúhelníku platí, že

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

kde a, b jsou délky odvěsen tohoto trojúhelníku a c délka přepony.

Důkaz:



Tvrzení	Zdůvodnění
1. ΔABC je pravoúhlý trojúhelník ∢ACB je pravý	1. předpoklad
2. CP je kolmá na AB	2. ∢APC je pravý
3. $\frac{c}{a} = \frac{a}{y}, \frac{c}{b} = \frac{b}{x}$	3. podobnost trojúhelníků ABC a CBP
4. $a^2 = cy, b^2 = cx$	4. násobení kladným číslem
5. $a^2 + b^2 = cy + cx$	5. sečtení dvou rovností
6. $a^2 + b^2 = c(x + y)$	6. distributivní zákon
7. $a^2 + b^2 = c^2$	7. $x + y = c$

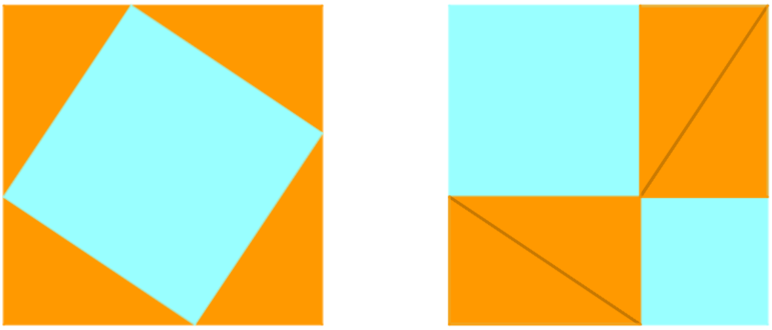
[3] Tento způsob geometrického důkazu se v některých zemích používá ve školské geometrii

[4] Anglicky „proofs without words“, příklad těchto důkazů můžeme nalézt například v publikacích od amerického matematika Rogera B. Nelsena (1993, 2000)

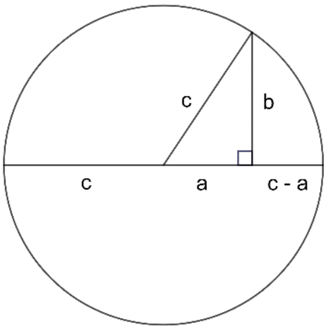
Příklad 16

Výrok: (Pythagorova věta) Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou libovolného pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma jeho odvěsnami.

Důkaz 1:



Důkaz 2:



$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Kapitola 2

Důkazy ve školské matematice

2.1. Význam důkazů ve vzdělávání

Pokud jde o důkazy ve školské matematice, jedním z hlavních cílů by mělo být *vysvětlení* daného výroku (CadwalladerOlsker 2011, str. 41). Tyto typy důkazu mohou sice být obsáhlejší, jelikož se v nich mohou nacházet vysvětlující odstavce, různé grafy a obrázky, které pomohou s objasněním klíčové myšlenky. Často nám však zprostředkují užitečný vhled do dokazovaného tvrzení a navíc nám nejen ukáží, *že je to pravdivé*, ale také odpoví na otázku *proč tomu tak je*. Těmto druhům důkazů se také říká „*důkazy, které vysvětlují*“ nebo „*důkazy, které přesvědčují*“ (CadwalladerOlsker 2011, str. 41). Důkazy, které mají za hlavní cíl ověřit tvrzení a důkazy s cílem vysvětlit se však vzájemně nevylučují, jsou samozřejmě důkazy, které dobře slouží k obojímu.

Nyní se věnujme tomu, jaký smysl důkazů v hodinách matematiky vnímají učitelé. Touto problematikou se již zaobíraly různé studie, mezi nimi i studie provedená Dickersonem a spol. (2014), která se soustředila na otázku, jaký význam důkazů a dokazovaní přisuzují středoškolští učitelé matematiky v jejich hodinách. Tito učitelé zmínili dva hlavní důvody, proč si myslí, že se důkazy objevují ve školské matematice. Za prvé, že prohlubují pochopení matematických konceptů a struktur, což se dá brát jako „důkaz, který vysvětluje,“ a zároveň se žáci učí, jak je prezentovat ostatním. Za druhé jim to pomáhá rozvíjet další způsoby uvažování, které mohou použít i mimo matematiku. Tyto zahrnují logické, kritické a metakognitivní myšlení. Někteří učitelé zmínili, že logické myšlení, které žáci používají při hodinách matematiky, rozvíjí způsob, jakým pak přemýšlejí v každodenním životě (str. 720). Někteří, že dokazování žákům napomáhá uvědomit si, že ne všechno, co slyší, musí být pravda, a tedy je podněcuje k samostatnému zkoumání důkazů. Jsou tedy vedeni k posuzování, zda jsou dané důkazy důvěryhodné a dostatečné (str. 721). Jeden učitel navíc zmínil, že tím žáci také rozvíjí metakognitivní uvažování, tj. schopnost přemýšlet o svém vlastním myšlení, analyzovat, čemu věří, jak dospěli k určitým závěrům a na jakých předpokladech stavěli. Mohou navíc získat lepší porozumění podstaty samotného vědění (str. 721-722).

Druhý zmíněný bod, tj. získání obecných schopností uvažování, může také sloužit jako „ospravedlnění“ nebo „objasnění,“ proč i náročnější matematické koncepty a principy jsou užitečné pro všechny žáky, nejen pro ty, kteří je budou potřebovat v dalším vzdělání. Navíc přináší motivaci, jak pro žáky, tak pro učitele. V následujícím textu se budu více soustředit na žáky a jejich chápání důkazů.

2.2. Schémata důkazů

Žáci se během svého matematického vzdělávání setkají s různými přístupy k důkazům. Důvodem je především měnící se náročnost učiva podle jednotlivých stupňů vzdělávání. „Důkaz“, který byl vyhovující na základní škole nebude nejspíše stačit na střední škole. Dalším důvodem může být to, co bylo zmíněno v minulém odstavci, tedy že i učitelé mají různé pohledy na podstatu a účel důkazů v jejich hodinách. Z toho vyplývá, že si žáci utváří různé představy o podstatě důkazu, přičemž některé jim později mohou znesnadnit správné provedení důkazu. Harelova a Sowderova „schémata důkazů“ nám však mohou pomoci s lepším pochopením této problematiky, definují je následovně: „schéma důkazu jedince (nebo komunity) se skládá z toho, co jedinec (nebo komunita) považuje za přesvědčivé“ (vzato z CadwalladerOlsker 2011, str. 43). Tato schémata důkazů spadají do třech kategorií: *vnější přesvědčení*, *empirické*, *deduktivní*.

Za prvé jsou žáci, kteří mají schémata důkazů založená na *vnějším přesvědčení*. Ti věří, že důkaz je pravdivý z důvodu, který není matematický. Do této kategorie patří důkazy, které jsou pokládány za platné jen kvůli tomu, že mají určitou formu, která je pro důkazy běžná (*rituální* schémata důkazů), dále důkazy, ve kterých se provádí různé operace se symboly, které však nemají žádný vhodný systém referentů[5] (*nereferenční*). Tento případ může být vidět v následujícím příkladu (str. 43):

$$\frac{a\,+\,b}{c\,+\,b}=\frac{a\,+\,\cancel{b}}{c\,+\,\cancel{b}}=\frac{a}{c}\,.$$

[5] V tomto případě prvky určité množiny S, kde by se na (S, +, *) daly jednotlivé sčítance „krátit“

Jednak tento zápis neudává obor proměnnosti *a*, *b*, *c* a navíc provedená úprava „krácení“ *b* není korektní, vezmeme-li v potaz běžné zavedení operací násobení a sčítání. Nakonec do této kategorie patří důkazy, kterým žáci věří jen na základě nějaké autority, například učitele, učebnice nebo rodiče, která jim to tvrdila (*autoritativní*). Toto poslední schéma se však nedá zavrhnout úplně, někteří matematici mohou věřit v platnost důkazu na základě tvrzení jisté autority, například pokud porozumění daného důkazu vyžaduje odborné znalosti z určité oblasti. Nicméně, tato autorita musí být relevantní a navíc ve školské matematice to nepřináší požadované výsledky, neboť to nijak nezlepšuje schopnost žáků provádět důkazy.

Za druhé jsou to *empirická* schémata důkazů. V tomto případě jsou žáci přesvědčeni o pravdivosti důkazu tím, že vidí několik příkladů, ve kterých výrok platí (*induktivní*), nebo na základě nějaké hrubé představy v jejich myslích či nepromyšleného dojmu (*perceptuální*). Posledně jsou to *deduktivní* schémata důkazů, ve kterých je za přesvědčivý důkaz považován ten, ve kterém se k závěru dojde logickým uvažováním. Tato schémata jsou trojího druhu, prvním je případ, kdy je mentální představa konceptu plně rozvinutá a všechny spojitosti jsou dobře pochopeny, a tedy díky tomu je jedinec schopen vyvodit pravdivé závěry (*transformační*). Důkaz ale navíc může být chápán i v rámci axiomatického systému (*axiomatický*). Dalším podtypem této kategorie je schéma důkazu, ve kterém se důkazy zakládají na operacích se symboly, které mají vhodný systém referentů (*referenční symbolický*).

Tato schémata důkazů se mohou měnit či rozvíjet v průběhu ročníků. Mnoho žáků má tendenci používat empirické důkazy, které se dají aplikovat v jiných předmětech, nicméně v hodinách matematiky je třeba poukázat na jejich neúplnost, povzbudit žáky, aby přemýšleli obecně a nastavit ve třídě deduktivní schémata důkazů, která jsou používaná v matematické komunitě. Dále se budu soustředit celistvěji na možné problémy a překážky, které mohou ovlivnit výuku matematiky, mé poznatky budou založeny na analyzování vztahů ve třídě mezi učitelem, žáky a učivem předmětu.

2.3. Výukový trojúhelník

Na základě „výukového trojúhelníku“ (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003) můžeme odvodit, že vztahy mezi učitelem, žáky a učivem viděného v jeho širším prostředí ovlivňují výuku, a tedy když nějaký ze vztahů není řádně realizován, odrazí se to také na učení žáků a jejich prožitcích ze studia. Budu se tedy zabývat různými problémy, které v těchto vztazích mohou nastat.

Jako první se podíváme na vztah mezi učitelem a učivem. Tato oblast obsahuje učitelovy znalosti předmětu, který vyučuje. Mohou existovat nesrovnalosti mezi tím, co by měl učitel znát a čemu rozumět (tyto znalosti by měl získat během jeho vyššího vzdělání), a jaké znalosti opravdu má. Někteří výzkumní pracovníci v minulosti upozornili, že mnoho studentů, včetně těch s matematikou jako hlavním oborem, a dokonce i někteří učitelé matematiky mají problémy s chápáním a formulováním důkazů (Thompson 2012, str. 254). Nenašla jsem podobné výzkumy v českém prostředí, ale předpokládám, že obdobná situace je i u nás. Navíc i ti učitelé, kteří důkazům rozumí a umí je formulovat, nemusí být přesvědčeni o jejich důležitosti ve vzdělání, a tedy nemusí jim dávat tolik prostoru. Z toho plyne, že diskuze o různých cílech a možných přínosech důkazů a dokazování ve školské matematice se mi jeví jako užitečná jak pro současné, tak budoucí učitele matematiky. Tyto možné přínosy a cíle důkazů jsem již zmínila v přechozím textu.

Za druhé je to interakce mezi učitelem a žáky. Tato oblast obsahuje, jak dobře zná učitel své žáky, jak bere na vědomí jejich jedinečnost využíváním různorodých metod vyučování a jak se dokáže podívat na učivo z různých pohledů. V matematice se dá tohoto cíle dosáhnout pomocí obrázků či příkladů ze života. Pokud se jedná o dokazování, existuje více způsobů, jak formulovat důkaz nebo jak odpovědět na cvičení na dokazování. Učitelé mohou upřednostňovat různé přístupy, jak ukazuje výzkum provedený Dickersonem a spol. (2014). Největší rozdíly v jejich očekávání byly, když se jednalo o „hodnotu a nezbytnost (1) explicitní argumentace (2) přesného jazyku a pečlivě předvedené logiky (3) dostatečných a důkladných detailů a užití (4) vizuálních a konkrétních znaků“ (str. 723). Nicméně přestože se způsoby provedení důkazů mohou lišit podle učitele, tyto různé přístupy se mohou doplňovat, což je pak přínosné pro žáky, kteří tím mohou získat komplexnější a hlubší chápání důkazů a dokazovaných výroků.

Za třetí je to vztah mezi žáky a učivem, který zahrnuje výběr obsahu učiva. Tento výběr najdeme ve vzdělávacích programech jednotlivých škol (vytvořeny na základě rámcového vzdělávacího programu) a učebnicích. Tato volba velmi ovlivňuje výuku, neboť se učitelé řídí školními vzdělávacími programy, a je pravděpodobné, že používají cvičení z učebnic. Nicméně předpokládám, že ne všichni učitelé jsou přímo zapojeni do procesu vytváření těchto materiálů.

Může se tedy stát, že se učitelé neztotožňují s důrazy kladenými na určité oblasti či aspekty matematiky a nedá se tudíž předpokládat, že všechno dané ve vzdělávacích programech a učebnicích bude stejně reflektováno v samotném učení. Této nesrovnalosti se však v této práci věnovat nebudu, není to jejím cílem, budu se spíše soustředit na to, co je dané ve vzdělávacích programech a zda je to v souladu s tím, co najdeme v učebnicích.

Kapitola 3

Důkazy ve vzdělávacích programech

3.1. Klíčové kompetence v matematickém vzdělávání v Evropě

Evropský referenční rámec (Anon 2007) definuje klíčové kompetence pro celoživotní vzdělávání[6], které by měly přispět k rozvoji potenciálu žáků, zprostředkovat jim znalosti, schopnosti a postoje, které by jim pomohly v jejich budoucím zaměstnání i osobním životě, připravit je čelit výzvám, které přináší stále měnící se moderní svět, a povzbudit je, aby se aktivně podíleli na řešení současných politických, sociálních, ekonomických a ekologických problémů. V tomto rámci bylo určeno osm klíčových kompetencí, mezi nimiž je také „matematická kompetence a základní kompetence ve vědě a technologiích" (Anon 2001, str. 3). Budu se tedy hlavně soustředit na tuto kompetenci a zaměřením se na to, jak velký důraz je kladen na důkazy, dokazování a typ uvažování, který je s tím spojen, především tedy logické a kritické myšlení. Matematická kompetence je definována následovně:

„Matematická kompetence je ***schopnost rozvinout a aplikovat matematické uvažování*** *s cílem vyřešit problémy v každodenních situacích. Je postavena na dobrém zvládnutí základních počtů, důraz je kladen na proces a aktivitu, stejně jako na vědomosti. Matematická kompetence obsahuje do určité míry* ***schopnost a ochotu používat matematické styly myšlení*** *(****logické*** *a prostorové* ***myšlení****) a prezentace (vzorce, modely, koncepty, grafy, schémata).*

…

Jedinec by měl mít ***schopnosti aplikovat základní matematické principy a procesy*** *v každodenním kontextu doma a v práci a* ***sledovat a posoudit řetězce argumentů****. Jedinec by měl* ***být schopen matematicky argumentovat, chápat matematický důkaz, komunikovat v matematickém jazyce*** *a užívat vhodné pomůcky.*

[6] Z anglického „*lifelong learning*"

Pozitivní přístup v matematice *je založen na* ***respektování pravdy*** *a* ***ochota hledat důvody a posoudit jejich platnost***." (Anon 2007, str. 6)

Části, které se mi zdály, že jsou spojené s důkazy a matematickým přemýšlením jsem zvýraznila tučně. Tedy přestože slovo „důkaz" se v textu objevuje pouze jednou, zdá se, že schopnost dobře logicky a kriticky přemýšlet a schopnost jasně komunikovat domněnky a přesvědčit ostatní o jejich platnosti, všechny spojené s hlubokým pochopením důvodů, které leží za matematickými koncepty nacházející se v důkazech, byly autory vybrány jako jedny ze stěžejních částí matematické kompetence. Tento rámec byl přezkoumán evropskou komisí v roce 2018 (European Commission 2018). Jedním z hlavních cílů bylo posoudit vliv tohoto rámce, vhodnost pro naši dobu a navrhnout, jaké změny by mohly být provedeny. V matematické kompetenci ještě více zdůrazňovala důležitost „zaměření na kritické dotazování a řešení problémů, neboť to jsou prerekvizity pro fungování technologicky vyspělých a vědomostně zaměřených společností a ekonomik" (str. 47-48). Navíc ještě více kladla důraz na význam schopnosti argumentace nad například schopností numerického počítání (ne však, že by popírala důležitost této části matematiky). Poukázala na to, že matematické uvažování spolu s čtenářskou gramotností je nezbytné i pro rozvoj dalších klíčových kompetencí (str. 48).

Tento rámec slouží jako základ pro národní vzdělávací programy v Evropské unii, jako další se tedy zaměřím na český vzdělávací rámec znovu se zaměřením na důkazy, dokazování a matematické uvažování.

3.2. Český rámcový vzdělávací program (RVP)

Český rámcový vzdělávací program (RVP) zmiňuje následující klíčové matematické kompetence:

*„**Cílové zaměření vzdělávací oblasti***

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení ***klíčových kompetencí*** *tím, že vede žáka k:*

1. ***osvojování*** *základních* ***matematických*** *pojmů a* ***vztahů*** *postupnou* ***abstrakcí*** *a* ***zobecňováním*** *na základě* ***poznávání*** *jejich* ***charakteristických vlastností;***

2. *určování, zařazování a využívání pojmů, k analýze a* ***zobecňování*** *jejich vlastností;*
3. *vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů, algoritmů a metod řešení úloh a k využívání osvojeného matematického aparátu;*
4. ***analyzování problému*** *a vytváření plánu řešení, k volbě správného postupu při řešení úloh a problémů****, k vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k zadaným podmínkám****;*
5. *práci s matematickými modely, k vědomí, že k výsledku lze dospět různými způsoby;*
6. ***rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů;***
7. ***pochopení vzájemných vztahů a vazeb mezi okruhy učiva*** *a k aplikaci matematických poznatků v dalších vzdělávacích oblastech;*
8. ***přesnému vyjadřování*** *a zdokonalování grafického projevu, k* ***porozumění matematickým termínům, symbolice a matematickému textu****;*
9. ***zdůvodňování matematických postupů,*** *k obhajobě vlastního postupu;*
10. *rozvíjení dovednosti pracovat s různými reprezentacemi;*
11. *užívání kalkulátoru a moderních technologií k efektivnímu řešení úloh a k prezentaci výsledků;*
12. *rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním (k činnostem, kterými se učí poznávat a nalézat situace, v nichž se může orientovat prostřednictvím matematického popisu), k vyhodnocování matematických modelů, k poznávání mezí jejich použití, k vědomí, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro více situací a jedna situace může být vyjádřena různými modely);*
13. *rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti;*
14. ***pochopení matematiky jako*** *součásti kulturního dědictví a* ***nezaměnitelného způsobu uchopování světa****"* (Balada et al. 2007).

Autoři zmiňují 14 klíčových matematických kompetencí, důkazy ani dokazování se v nich neobjevují, zobecníme-li to však na důraz na matematické myšlení, které se v dokazování učí, najdeme tuto kompetenci v odrážce 6. Jedna odrážka týkající se osvojení matematického způsobu přemýšlení se může zdát málo, když víme, jakou váhu této oblasti dávají výzkumy v oblasti školské matematiky i evropský vzdělávací rámec, avšak i v dalších bodech můžeme najít činnosti s matematickým přemýšlením související: „*abstrakcí a zobecňováním*“ (1),

„*analyzování problému*,“ „*vyhodnocování správnosti*“ (4), „*pochopení vzájemných vztahů*“ (7), „*zdůvodňování*“ (9). V poslední odrážce dále zmiňují „*pochopení matematiky jako … nezaměnitelného způsobu uchopování světa,*“ čímž také zdůrazňují důležitost uvědomění si, že matematika je také způsob přemýšlení o světě. Další odrážky se týkají spíš matematických dovedností. Zdá se tedy, že autoři považují rozvoj matematického myšlení jako důležitou částí školské matematiky, otázka však je, jestli mu dávají ústřední místo. Navíc jelikož mnoho z těchto kompetencí sice vyžaduje matematické myšlení, ale není to v nich jasně artikulováno, může to vést spíše k zaměřování se na matematické dovednosti a naučené postupy řešení problémů. Dále se tedy podívám na české učebnice středoškolské matematiky, v nichž budu zkoumat, jak velký důraz se v nich klade na důkazy, dokazování a jakou formou to činí.

Kapitola 4

Středoškolské učebnice matematiky – srovnání učebnic

Budu se věnovat středoškolským učebnicím matematiky od dvou nakladatelství: Prometheus a Didaktis. Zaměřila jsem se na oblast goniometrie (Odvárko 1997, Zemek 2014) a posloupností a řad (Odvárko 1995, Zemek a Zemková 2017). Nejdříve budu zkoumat, zda jsou v těchto částech učebnic příslušné matematické věty vždy dokázány, jakou formou důkazu, a do jaké míry se ve cvičeních objevují úlohy na dokazování či rozvíjející schopnost matematického uvažování. V druhé části se budu zabývat větami ve zvolených oblastech matematiky a navrhnu další způsob prezentace důkazů daných vět a doplňující důkazová cvičení na příslušná témata.

Pro následující porovnání učebnic jsem se inspirovala výzkumem Thompsona a spol. (2012). Tito američtí matematici ve své práci analyzovali středoškolské učebnice matematiky, přičemž se zaměřili na příležitosti, které v nich žáci mají pro rozvoj schopnosti argumentace a dokazování. Podle jejich vzoru okóduji matematické věty a cvičení kódy z následujících tabulek a poté spočítám počet u jednotlivých typů. Tímto způsobem zjistím, kolik a jaký druh důkazů a cvičeních lze ve vybraných učebnicích nalézt.

Kód	***Vysvětlení***
O	*Obecné*: Vlastnost (věta) je dokázána důkazem.
K	*Konkrétní*: Vlastnost (věta) je odůvodněna užitím deduktivního argumentu: na základě konkrétního příkladu či příkladů.
P	*Ponecháno žákovi*: Odůvodnění vlastnosti (věty) je ponecháno žákovi, obvykle v úloze, kde je potřebný nějaký druh vysvětlení.
B	*Bez odůvodnění*: Žádné odůvodnění se v textu nevyskytuje a ani není výslovně řečeno, že je to ponecháno žákovi.

Tabulka 5. Rámec pro kódování dokazování vlastnosti (věty) v textu učebnice (převzato z *Fig. 4* v Thompson 2012, str. 261).

Kód	Vysvětlení
Vytvoř či prověř domněnku	
VO/VK	*Vytvoř domněnku*: Žáci mají na základě nějakého vzoru utvořit domněnku buď o obecném (např. o n-tém prvku posloupnosti) nebo o konkrétním případu (např. o stém prvku posloupnosti).
PO/PK	*Prověř domněnku*: Domněnka či tvrzení je vysloveno. Žák má určit, zda je pravdivé či ne, a zdůvodnit jeho volbu. Otázka nutně nemusí obsahovat slovo „domněnka“.
Vytvoř či ohodnoť argument	
VAO/VAK	*Vytvoř argument*: Žák má napsat důkaz tvrzení, buď o obecném nebo konkrétním případu.
OO/OK	*Ohodnoť argument*: Žák má určit, zda je tvrzení platné či nikoli.
Další druhy příkladů rozvíjejících schopnost usuzování	
PR	*Protipříklad*: Žák má nalézt protipříklad k danému tvrzení, či dokázat, že je tvrzení neplatné.
ONO/ONK	*Oprav či najdi chybu*: Je zadáno špatné řešení příkladu nebo neplatný argument. Žák má v zdůvodnění najít chybu a popřípadě ji opravit.
PP	*Princip důkazu*: Žák má vysvětlit, na čem je postaven hlavní argument, nemá však psát celý důkaz.

Tabulka 6. Rámec pro kódování příkladů, která rozvíjí typ uvažování potřebný k dokazování (převzato z *Fig. 5* v Thompson 2012, str. 262).

Některá cvičení mohou mít více variant, v závorce tedy budu udávat číslo, které započítává i každou variantu příkladu.

4.1. Goniometrie

4.1.1. Učebnice nakladatelství Prometheus

První zkoumanou učebnicí byla Matematika pro gymnázia – Goniometrie (Odvárko 1997), zaměřila jsem se na goniometrické funkce a jejich použití, které se nacházejí mezi stranami 33 a 121. Tabulka 7 udává počty vět, vlastností a řešených příkladů podle toho, zda obsahují důkaz nebo nějakou formu vysvětlení.

	O	K	P	B	Σ
n	25	37	7	3	72
(*n*)	38	39	7	5	89

%	34,7	51,4	9,7	4,2	100
(%)	42,7	43,8	7,9	5,6	100

Tabulka 7. Věty, vlastnosti nebo vyřešené vzorové příklady ve vybrané části učebnice Matematika pro gymnázia – Goniometrie (Odvárko 1997).

Jak můžeme vidět, žádná forma důkazu ani vysvětlení nebyla podána jen u 4,2 % (5,6 %) vět, v 9,7 % (7,9 %) případů byl důkaz či vysvětlení ponechán pouze žákovi. V textu převažují konkrétní případy nad obecnými, toto je ovšem logické, jelikož obecná tvrzení jsou často aplikována na několik konkrétních případů.

Pokud jde o formu důkazů a vysvětlujícího textu, převažuje forma formální, která je doplněna pomocnými obrázky. Tyto důkazy jsou přesné a učí žáky, jak správně formulovat matematické argumenty. Nevýhodou však je, že některé důkazy jsou velmi dlouhé, například důkaz součtových vzorců zabírá přes tři stránky textu (Odvárko 1997, str.76-82). Žáci i učitelé tedy mohou ztratit motivaci se důkazem vůbec začít zabývat, navíc tato forma je přístupná především matematicky nadanějším žákům. Další tabulka ukazuje, na co jsou zaměřeny dané řešené vzorové příklady.

	VO	**VK**	**PO**	**PK**	**VAO**	**VAK**	**OO**	**OK**	**PR**	**ONO**	**ONK**	**PD**
n	4	1	2	1	7	0	0	0	0	0	0	0
(*n*)	4	1	6	1	7	0	0	0	0	0	0	0
%	7,5	1,9	3,8	1,9	13,2	0	0	0	0	0	0	0
(%)	6,7	1,7	10	1,7	11,7	0	0	0	0	0	0	0

	Σ D	**Jiné**	**Σ**
n	15	38	53
(*n*)	19	41	60
%	28,3	71,7	100
(%)	31,7	68,3	100

Tabulka 8. Řešené vzorové příklady ve vybrané části učebnice Matematika pro gymnázia – Goniometrie (Odvárko 1997).

Tabulka ukazuje, že v řešených vzorových příkladech převažují cvičení jiná než ta zaměřená na dokazování. Zastoupení důkazových příkladů je přibližně 28,3 % (31,7 %), kdežto ostatních 71,7 % (68,3 %). Příklady na vytváření či prověřování domněnky nebo argumentu jsou však různého druhu a žák má tedy možnost rozvíjet různé způsoby uvažování. Typy cvičení by však mohly být ještě pestřejší, vůbec se v nich neobjevují úlohy například na hledání protipříkladu, chyby či načrtnutí principu důkazu. Nicméně příležitosti k řešení důkazových příkladů v této části učebnice jsou a je tedy na učiteli, jak velký prostor jim dá.

	VO	VK	PO	PK	VAO	VAK	OO	OK	PR	ONO	ONK	PD
n	2	1	5	2	10	2	0	0	0	0	0	0
(*n*)	2	1	10	7	17	8	0	0	0	0	0	0
%	1,7	0,8	4,2	1,7	8,5	1,7	0	0	0	0	0	0
(%)	0,8	0,4	3,8	2,7	6,5	3	0	0	0	0	0	0

	Σ D	Jiné	Σ
n	22	96	118
(*n*)	45	218	263
%	18,7	81,3	100
(%)	17,1	82,9	100

Tabulka 9. Příklady ve vybrané části učebnice Matematika pro gymnázia – Goniometrie (Odvárko 1997).

Příklady nacházející se v dané části učebnice jsou většinou početní, avšak podobně jako u řešených vzorových příkladů najdeme mezi nimi i příklady související s dokazováním. I přesto, že je jejich zastoupení podstatně nižší: důkazové tvoří přibližně 18,7 % (17,1 %), ostatní 81,3 % (82,9 %), stále platí to, že záleží na tom, čemu dá učitel při hodinách větší prostor. Navíc některé podkapitoly byly zaměřené především na schopnost počítání, např. goniometrické rovnice, kde logicky byla cvičení orientována především na procvičování výpočtů.

V analyzované části této učebnice je tedy většina vět a vlastností dokázána. Nicméně úloh souvisejících s dokazováním je značně méně. Stále se však v této části dané učebnice nachází a záleží tedy na rozhodnutí učitele, jak hodně se na tyto úlohy zaměří.

4.1.2. Učebnice nakladatelství Didaktis

Druhou zkoumanou učebnicí byla Matematika pro střední školy 5. díl – Funkce II (Zemek 2014), kde jsem se znovu zabývala kapitolami týkající se goniometrických funkcí a trigonometrie (str. 43 – 93). Tato série učebnic je už na první pohled barevnější, obsahuje více obrázků (to jistě souvisí i s rokem vydáním, který je podstatně novější) a text vypadá méně formálněji než u učebnice předchozí.

	O	K	P	B	Σ
n	19	41	18	8	86
(*n*)	21	71	18	11	121
%	22,1	47,7	20,9	9,3	100
(%)	17,4	58,7	14,9	9	100

Tabulka 10. Věty, vlastnosti nebo vyřešené vzorové příklady ve vybrané části učebnice Matematika pro střední školy 5. díl – Funkce II (Zemek 2014).

V kapitolách o goniometrii v této učebnici znovu převažuje vysvětlování konkrétních úloh nad důkazy obecných tvrzení. Jako už však bylo poznamenáno u předešlé učebnice, toto je pochopitelné. V tomto případě ale vidíme nárůst tvrzení a úloh, kde je důkaz či vysvětlení přenecháno žákovi, většina těchto úloh spadá pod část textu nazvanou „Zamyslete se!“. Dále vidíme, že nedokázaných vět je o trochu více než v předchozí učebnici, a navíc jsou mezi nimi i zásadní věty goniometrie, jako například kosinová věta (Zemek 2014, str. 87) nebo součtové vzorce (Zemek 2014, str. 81).

Co se týká samotných důkazů, tak ty se na první pohled nedají rozeznat od zbylého textu. Spíše vysvětlují danou problematiku a není explicitně řečeno, že se jedná o důkaz. Podle jejich formy usuzuji, že jejich cílem je především objasnit význam daného tvrzení, formální stránka není tak důležitá. Často jsou tedy neúplné nebo jen nastiňují způsob dokazovaní či je ponechávají žákovi.

	VO	VK	PO	PK	VAO	VAK	OO	OK	PR	ONO	ONK	PD
n	7	8	2	5	1	4	0	0	0	0	1	1
(*n*)	7	8	2	16	1	4	0	0	0	0	1	1
%	10,4	11,9	3	7,5	1,5	6	0	0	0	0	1,5	1,5
(%)	6,3	7,2	1,8	14,4	0,9	3,6	0	0	0	0	0,9	0,9

	Σ D	Jiné	Σ
n	29	38	67
(n)	40	71	111
%	43,3	56,7	100
(%)	36	64	100

Tabulka 11. Řešené vzorové příklady a úlohy „Zamyslete se“ ve vybrané části učebnice Matematika pro střední školy 5. díl – Funkce II (Zemek 2014).

Zastoupení příkladů zaměřených na dokazování je v dané části učebnice vyšší než v první zkoumané učebnici. Důkazová cvičení je tvoří přibližně 43,3 % (36 %), přičemž ostatní 56,7 % (64 %). Tyto úlohy jsou nepatrně různorodější, obsahují i cvičení na naleznutí chyby a načrtnutí principu důkazu, avšak pouze po jednom příkladu. Příležitost pro zaměření na tyto úlohy jsou však v učebnici v rozumném množství. Nicméně překážkou může být, že často nejsou označena jako cvičení, ale mnoho jich najdeme v částech textu pod názvem „Zamysleme se“, učitel si jich tedy při hledání úloh nemusí povšimnout.

4.1.3. Důkazy vět z oblasti goniometrie a trigonometrie

Důkazy beze slov

V této části se budu věnovat důkazům vybraných vět goniometrie a trigonometrie: součtové vzorce, sinová věta, kosinová věta, vzorec pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku a vzorec pro obsah libovolného trojúhelníka. Všechny tyto věty jsou obsaženy v obou učebnicích. V učebnici od nakladatelství Prometheus je důkaz či alespoň princip důkazu proveden u čtyř z pěti zkoumaných vět, chybí pouze u vzorce pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku, ta se mi však nejeví jako stěžejní. Naproti tomu v učebnici od nakladatelství Didaktis je z těchto vět dokázána pouze jediná, a to sinová věta. U ostatních tvrzení je jen konstatována jejich platnost.

Důkazy, které se v učebnicích nacházejí, jsou často velmi formální (především v učebnici Prometheus). Tato forma důkazu učí žáky správnému matematickému vyjadřování a chápání těchto formulací, avšak může být pro mnoho žáků nepřístupná a jeho délka může způsobit ztrátu motivace se tímto důkazem vůbec zabývat. Chtěla bych tedy navrhnou i jiný způsob prezentování těchto důkazů. Inspirovaly mě již zmiňované Důkazy beze slov (Nelsen 1993, 2000). Použila jsem tedy těchto znázornění daných tvrzení a vytvořila jsem z nich cvičení, v kterých se věty (vzorce) postupně odvodí. Mým cílem nebylo důkazy v učebnicích nahradit, ale pouze je obohatit jiným přístupem. Navíc jelikož jsou tato odvození formou úloh, žák je může „objevit“ sám, tedy si je také lépe pamatovat či znovu odvodit, pokud by na přesné znění tvrzení zapomněl. Další výhodou je, že v některých důkazech je žák nucen využít již známých poznatků (například z geometrie), a tím si učivo více propojí.

Věta 4.1.3.1. Součtové vzorce

Pro goniometrické funkce sinus a kosinus platí tyto věty:

Pro každá dvě reálná čísla x, y platí:

$$\sin(x+y) = \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y) \ (1)$$
$$\sin(x-y) = \sin(x) * \cos(y) - \cos(x) * \sin(y) \ (2)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x) * \cos(y) - \sin(x) * \sin(y) \ (3)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x) * \cos(y) + \sin(x) * \sin(y) \ (4)$$

Vzorce (1)-(4) se nazývají **součtové vzorce** pro sinus a kosinus.

(Odvárko 1997, str. 76, Zemek 2014, str. 81)

Důkaz tohoto tvrzení se nachází pouze v učebnici Prometheus. Tento důkaz je rozepsán na tři strany, obsahuje pár názorných obrázků, ale především jde o formální zápis. Tyto vzorce se však dají odvodit také následujícím způsobem zvlášť pro součtové a rozdílové vzorce (cvičení a řešení 1.1.-4., 2.1.-4.).

Věta 4.1.3.2. Sinová věta

Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a strany délky a, b, c, platí:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

(Odvárko 1997, str. 94, Zemek 2014, str.84).

Důkaz této věty se jako jediný nachází v obou učebnicích. V učebnici Prometheus je důkaz proveden celý (až na cyklickou záměnu), naproti tomu v učebnici Didaktis je věta dokázána pouze pro případ, kdy je úhel α ostrý, ostatní případy jsou ponechány žákovi. Důkazové cvičení k této větě má označení Cvičení (Řešení) 3.1.-3.

Věta 4.1.3.3. Kosinová věta

Pro každý trojúhelník *ABC*, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a strany délky a, b, c, platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(\alpha),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 * a * c * \cos(\beta),$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * cos(\gamma).$$

(Odvárko 1997, str. 99, Zemek 2014, str. 87)

Důkazové cvičení se nachází pod označením Cvičení (Řešení) 4.1. a 4.2.

Věta 4.1.3.4. Vzorec pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku

Pro poloměr *r* kružnice opsané trojúhelníku *ABC* platí:

$$r = \frac{a}{2 * \sin(\alpha)} = \frac{b}{2 * \sin(\beta)} = \frac{c}{2 * \sin(\gamma)}.$$

(Odvárko 1997, str. 99, Zemek 2014, str. 86)

Důkazové cvičení má označení Cvičení (řešení) 5.1.-2.

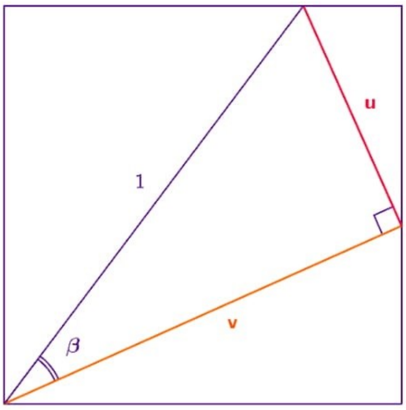
Věta 4.1.3.5. Vzorec pro obsah libovolného trojúhelníku

Pro obsah *S* každého trojúhelníku *ABC*, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky *a*, *b*, *c*, platí:

$$S = \frac{1}{2} * a * b * \sin(\gamma) = \frac{1}{2} * b * c * \sin(\alpha) = \frac{1}{2} * a * c * \sin(\beta).$$

(Odvárko 1997, str. 106, Zemek 2014, str. 93)

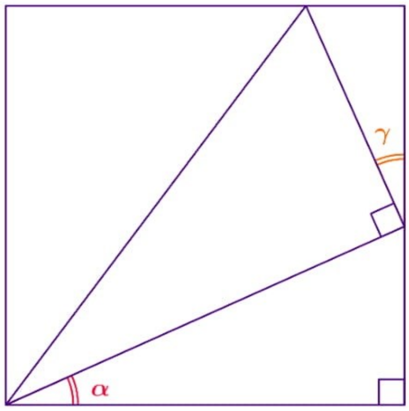
Důkazové cvičení se nachází pod označením Cvičení (Řešení) 6.1.-2.



$\mathbf{u = ?}$

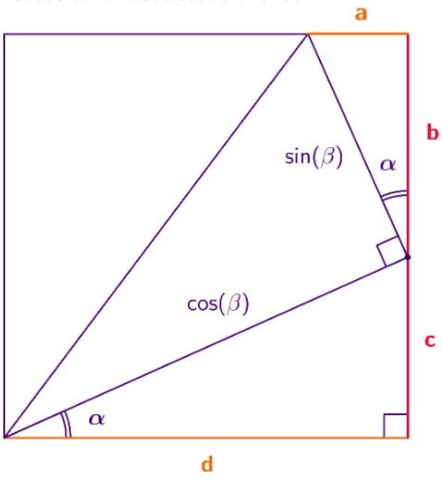
$\mathbf{v = ?}$

Cvičení 1.1. Součtové vzorce



Dokaž, že $\alpha = \gamma$.

Cvičení 1.2. Součtové vzorce



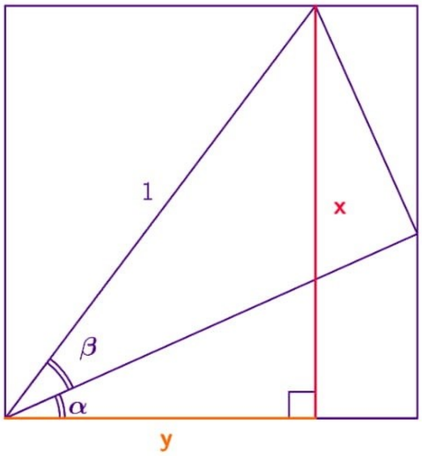
$\mathbf{a = ?}$

$\mathbf{b = ?}$

$\mathbf{c = ?}$

$\mathbf{d = ?}$

Cvičení 1.3. Součtové vzorce

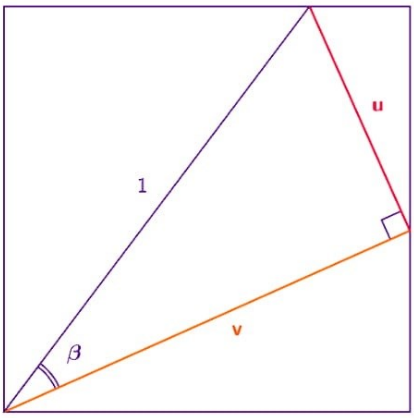


Vyjádřete x a y dvěma způsoby pomocí funkcí sinus a kosinus (první, kde je argument součet úhlů, druhý odvozením z minulé části), tyto zápisy pak porovnejte.

$\mathbf{x = ?}$

$\mathbf{y = ?}$

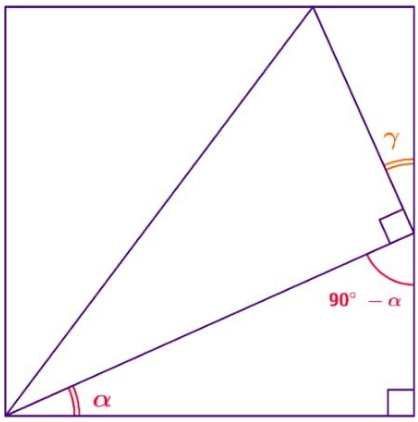
Cvičení 1.4. Součtové vzorce



$\mathbf{u = \sin(\beta)}$

$\mathbf{v = \cos(\beta)}$

Řešení 1.1. Součtové vzorce



Dokaž, že $\alpha = \gamma$.

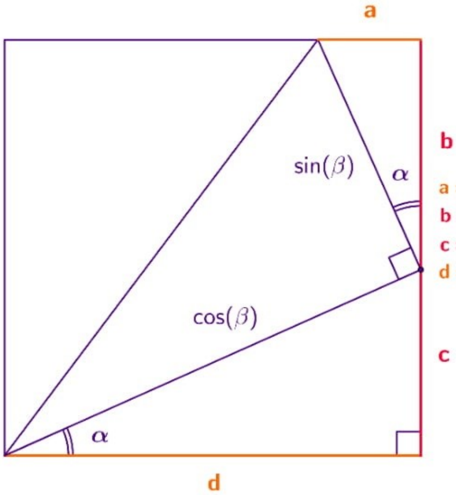
Z obrázku:

$\gamma = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha.$

Tedy:

$\boldsymbol{\gamma = \alpha.}$

Řešení 1.2. Součtové vzorce



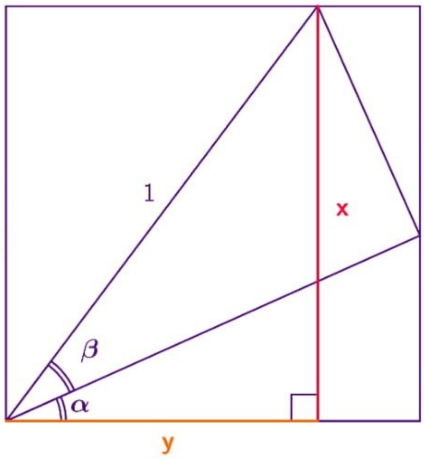
$a = \sin(\alpha) * \sin(\beta)$

$b = \cos(\alpha) * \sin(\beta)$

$c = \sin(\alpha) * \cos(\beta)$

$d = \cos(\alpha) * \cos(\beta)$

Řešení 1.3. Součtové vzorce



Vyjádřete x a y dvěma způsoby pomocí funkcí sinus a kosinus (první, kde je argument součet úhlů, druhý odvozením z minulé části), tyto zápisy pak porovnejte.

$x = \sin(\alpha + \beta)$

$x = c + b = \sin(\alpha) * \cos(\beta) + \cos(\alpha) * \sin(\beta)$

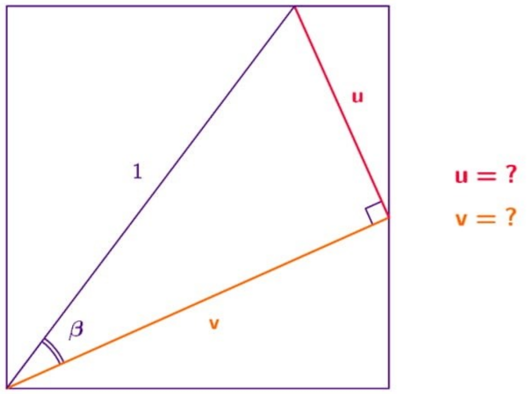
$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) * \cos(\beta) + \cos(\alpha) * \sin(\beta)}$

$y = \cos(\alpha + \beta)$

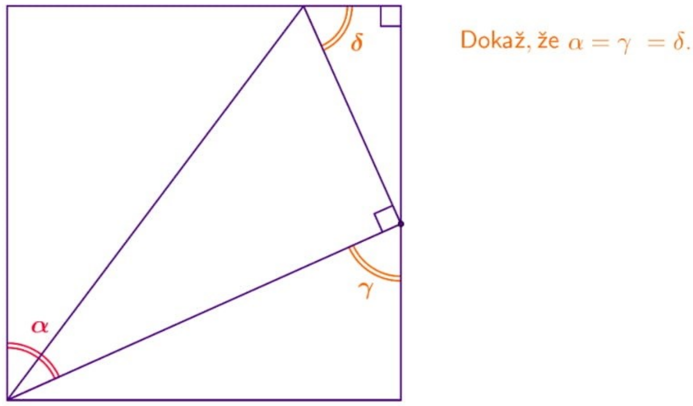
$y = d - a = \cos(\alpha) * \cos(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta)$

$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) * \cos(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta)}$

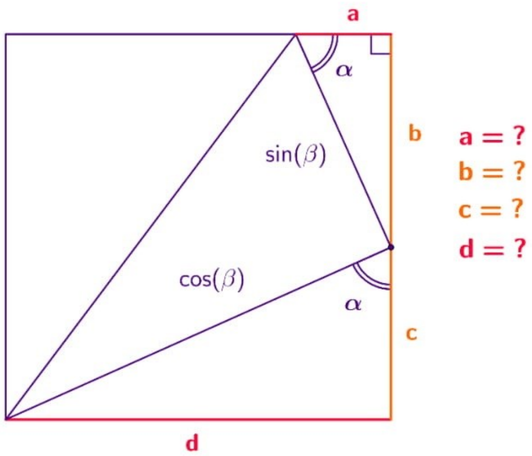
Řešení 1.4. Součtové vzorce



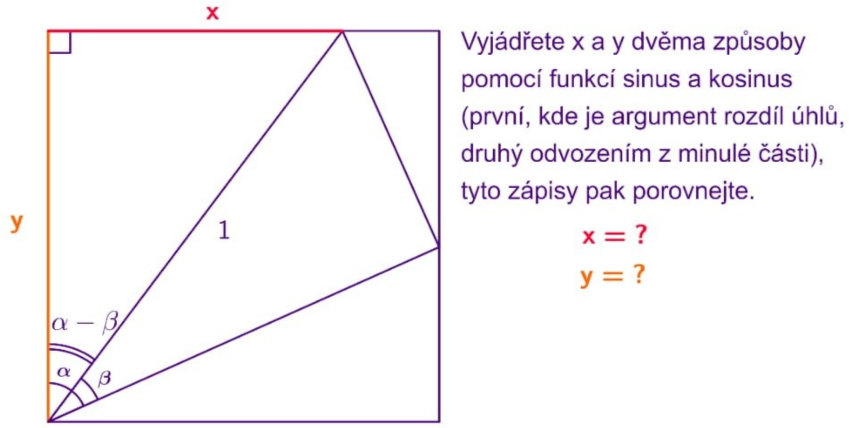
Cvičení 2.1. Rozdílové vzorce



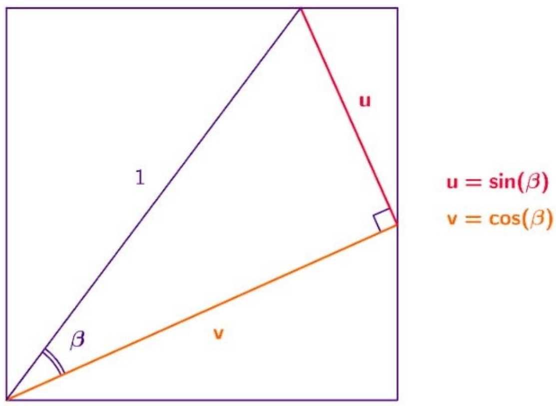
Cvičení 2.2. Rozdílové vzorce



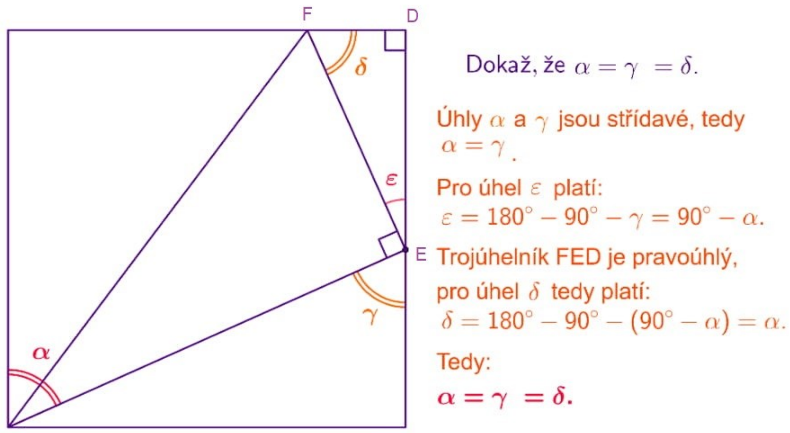
Cvičení 2.3. Rozdílové vzorce



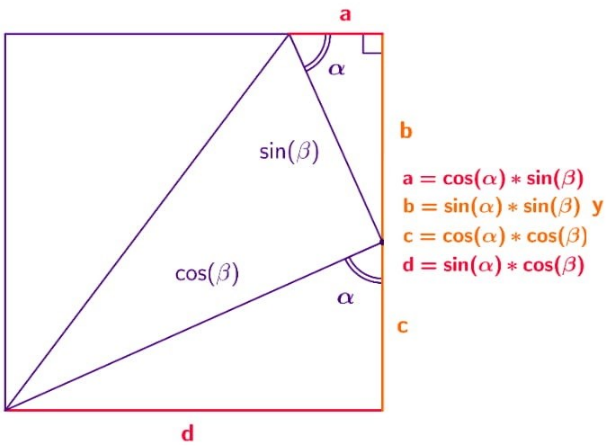
Cvičení 2.4. Rozdílové vzorce



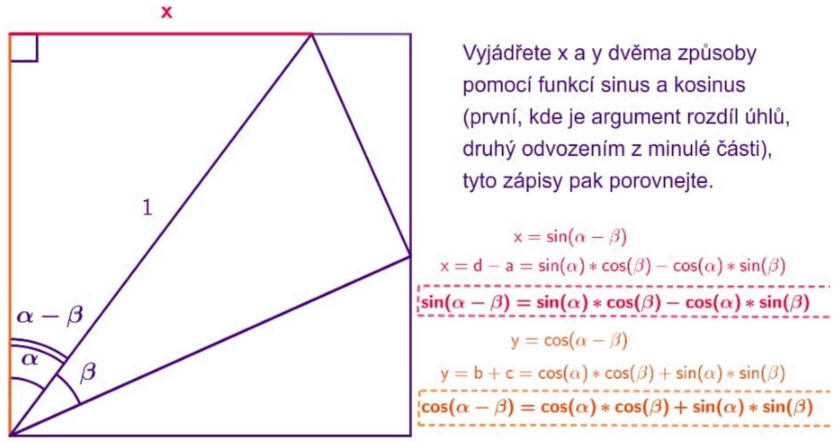
Řešení 2.1. Rozdílové vzorce



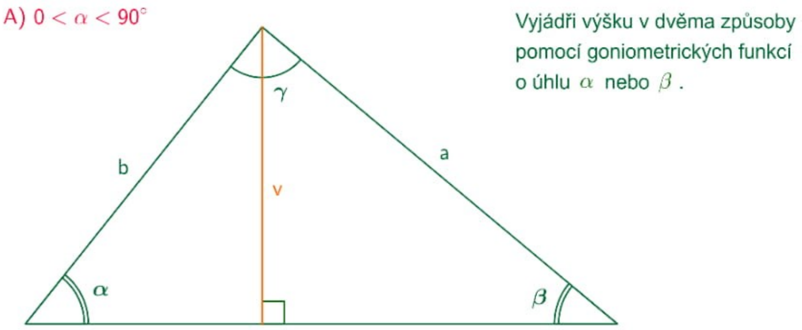
Řešení 2.2. Rozdílové vzorce



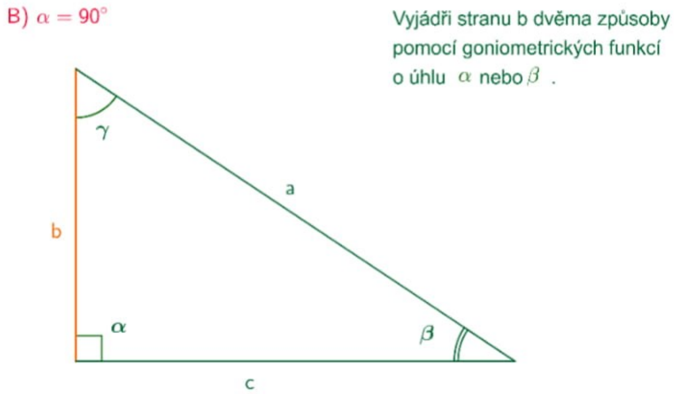
Řešení 2.3. Rozdílové vzorce



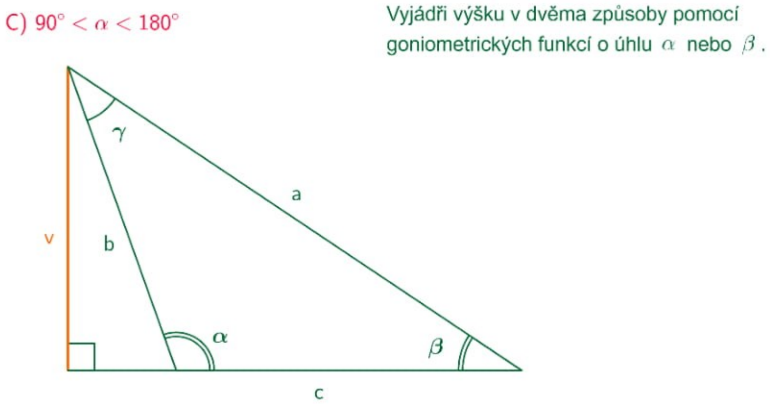
Řešení 2.4. Rozdílové vzorce



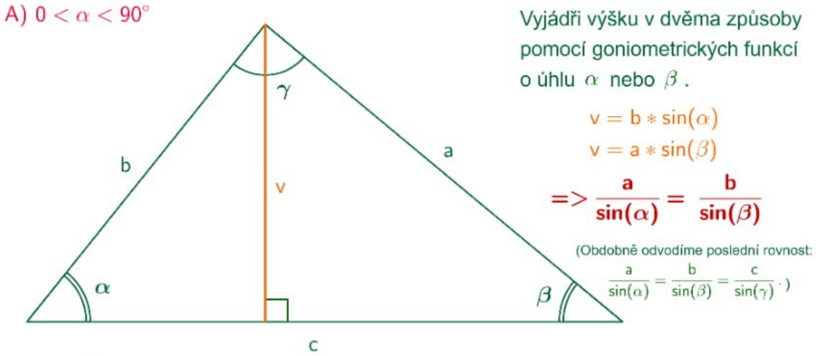
Cvičení 3.1. Sinová věta



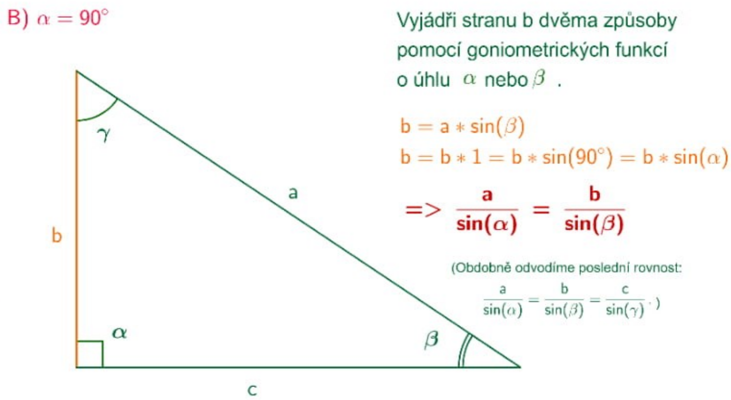
Cvičení 3.2. Sinová věta



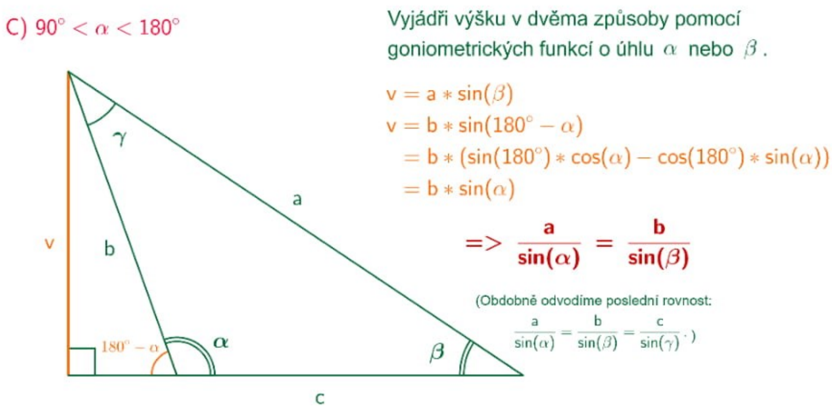
Cvičení 3.3. Sinová věta



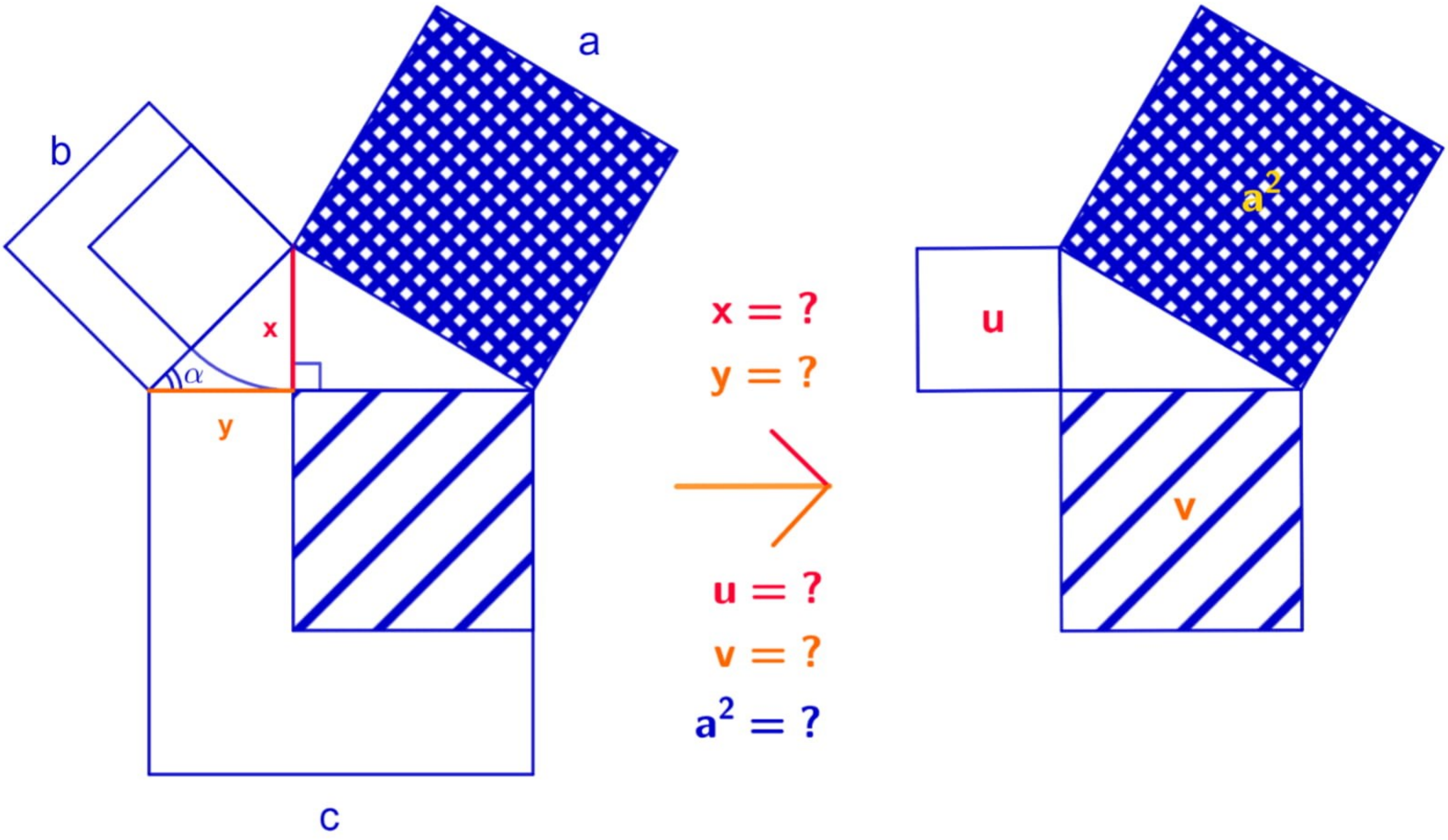
Řešení 3.1. Sinová věta



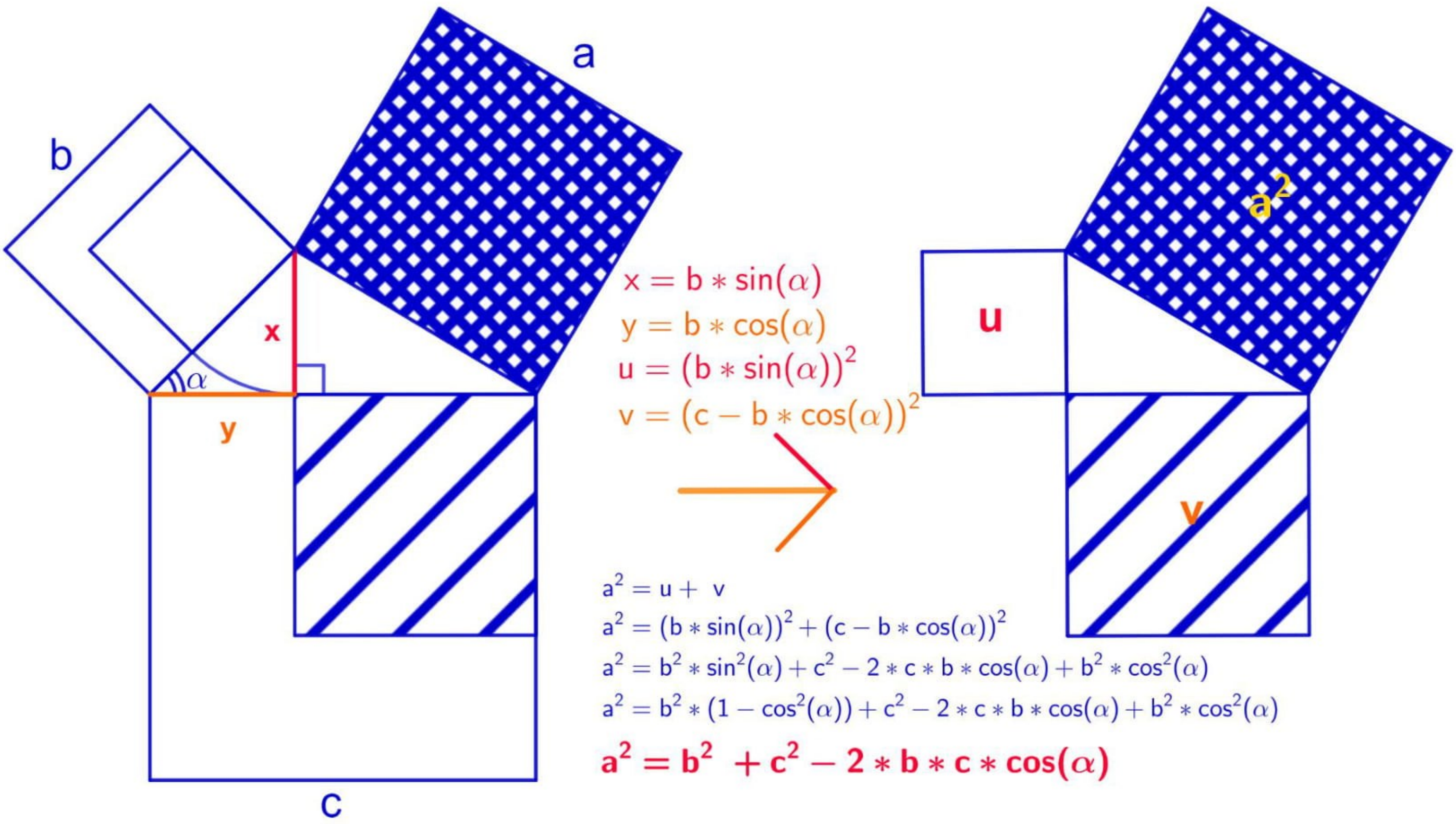
Řešení 3.2. Sinová věta



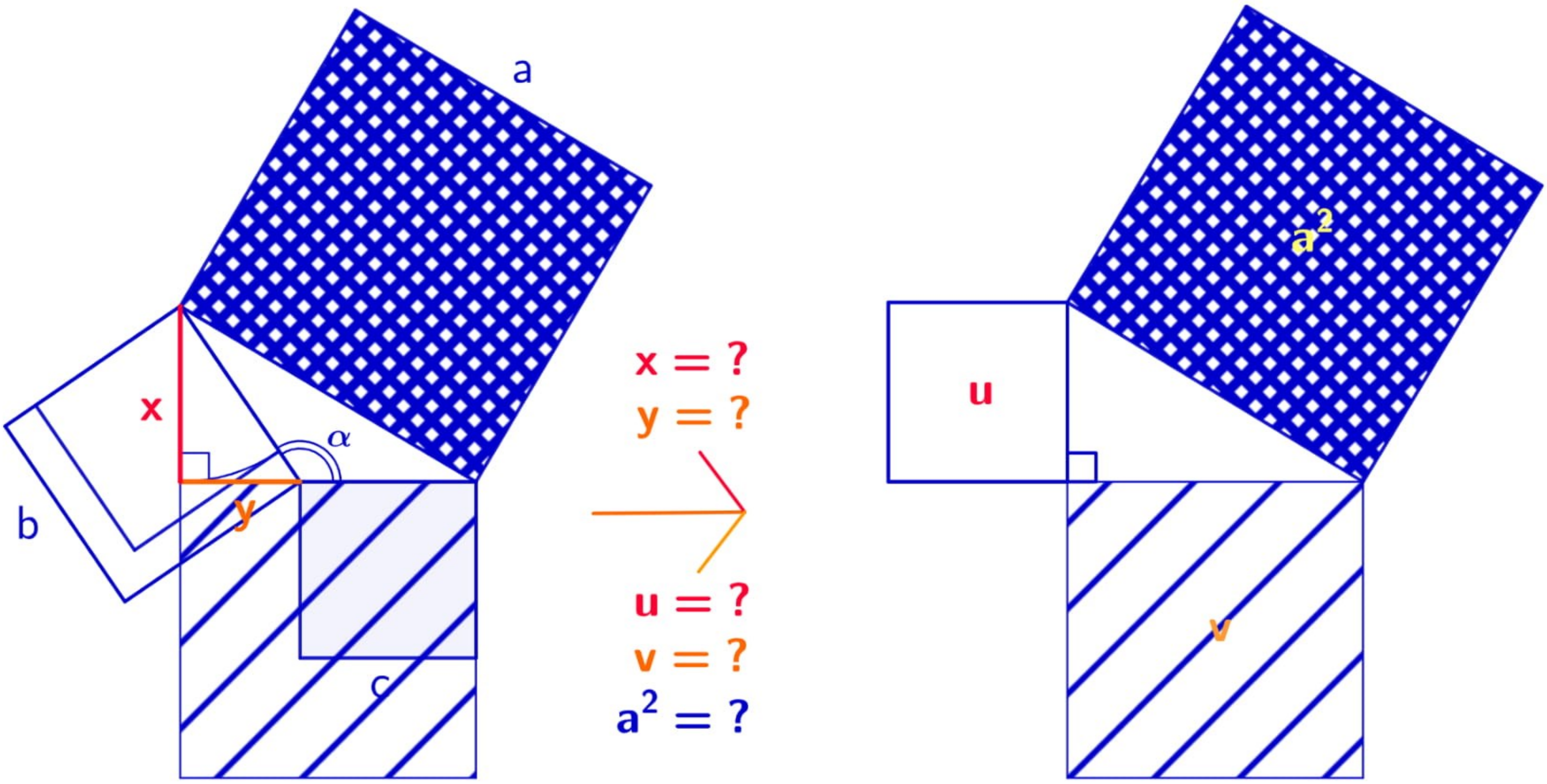
Řešení 3.3. Sinová věta



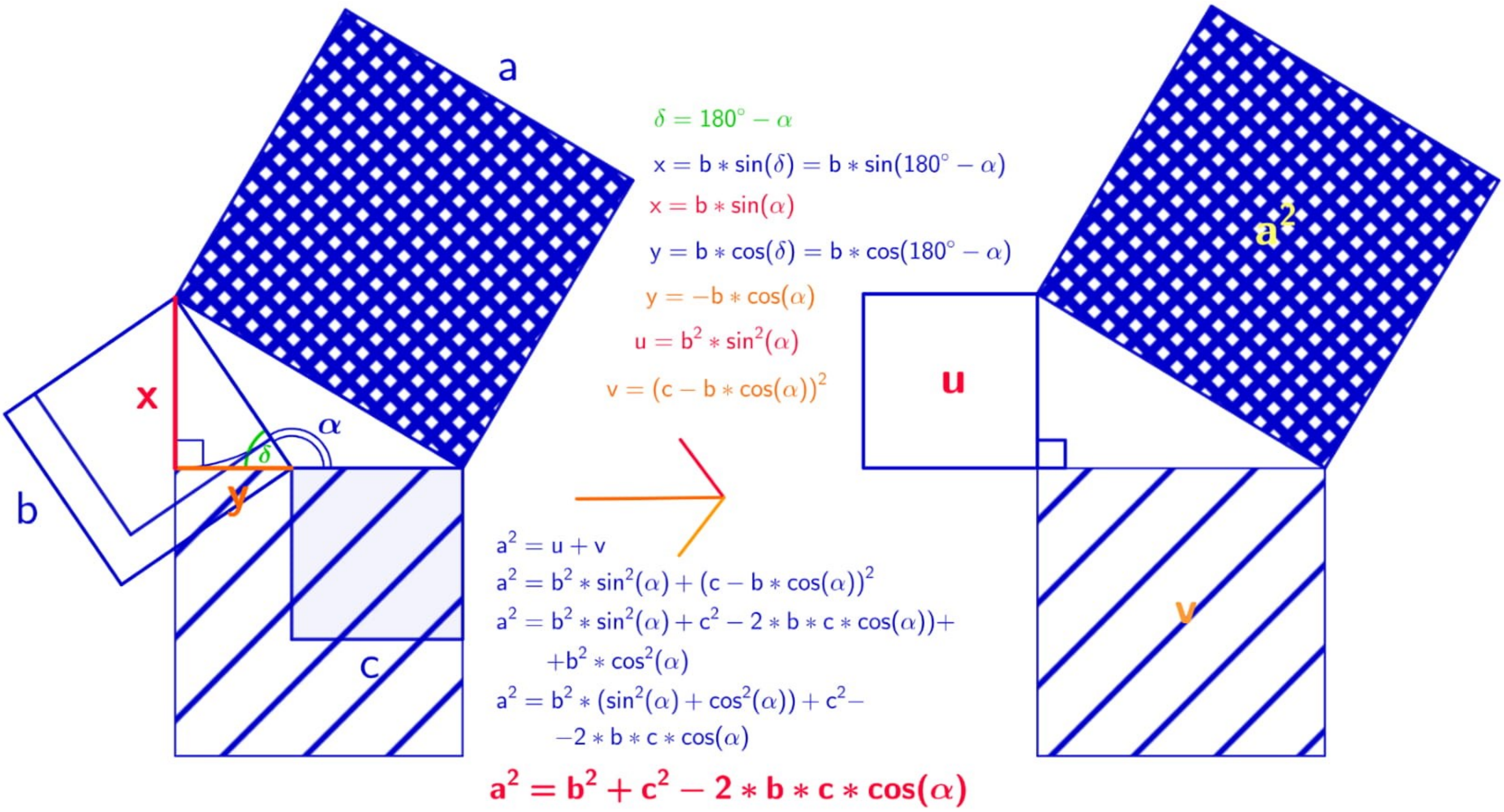
Cvičení 4.1. Kosinová věta



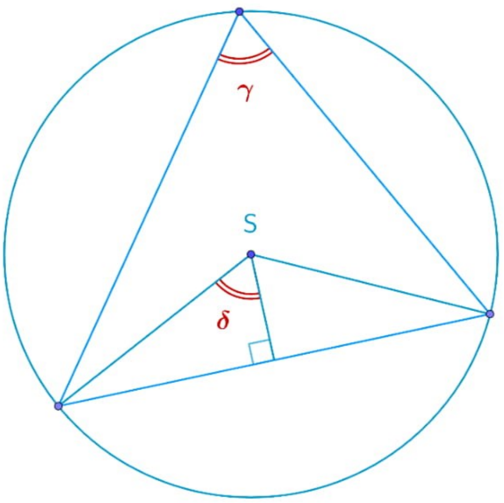
Řešení 4.1. Kosinová věta



Cvičení 4.2. Kosinová věta (tupý úhel)

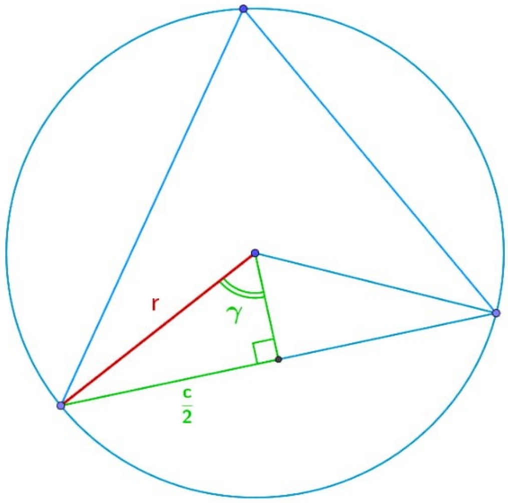


Řešení 4.2. Kosinová věta (tupý úhel)



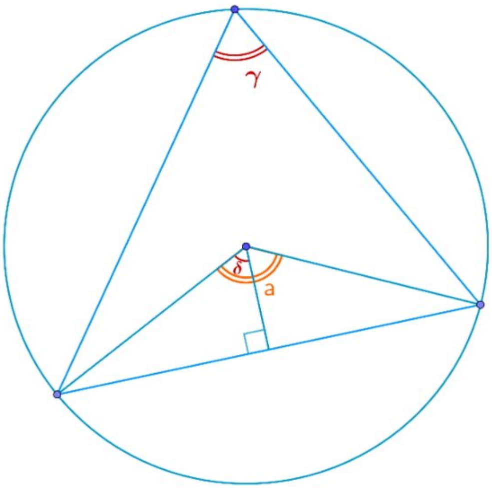
Dokaž, že $\gamma = \delta$.

Cvičení 5.1. Vzorec pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku



$r = ?$

Cvičení 5.2. Vzorec pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku

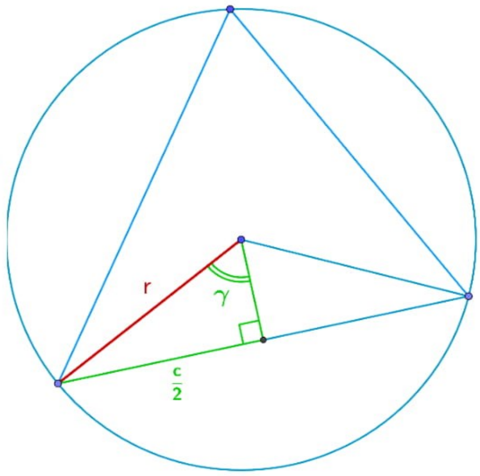


Dokaž, že $\gamma = \delta$.

Víme, že středový úhel je dvojnásobkem obvodového úhlu:
$a = 2 * \gamma$.

Tedy
$\delta = \frac{a}{2} = \gamma$.

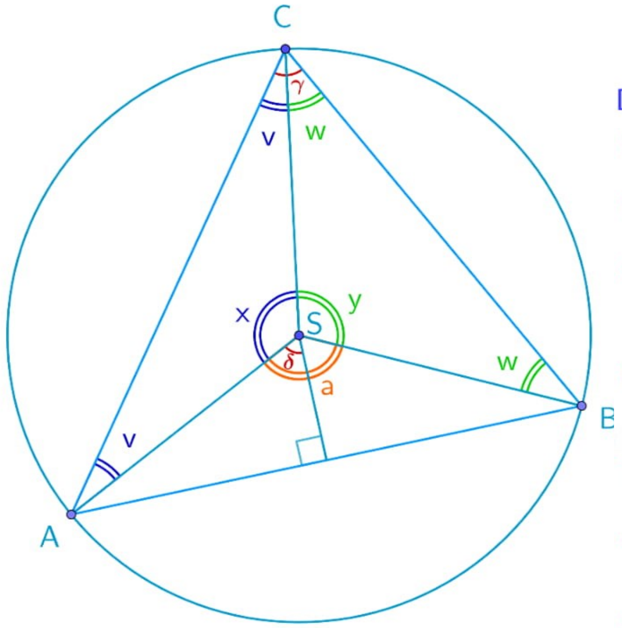
Řešení 5.1.1. Vzorec pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku



$\sin(\gamma) = \frac{\frac{c}{2}}{r}$

$r = \frac{c}{2 * \sin(\gamma)}$

Řešení 5.2. Vzorec pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku



Dokaž, že $\gamma = \delta$.

V trojúhelníku ASC
$180^\circ = 2 * v + x$ (1)

V troúhelníku SBC
$180^\circ = 2 * w + y$ (2)

Sečteme rovnice (1) a (2)
$360^\circ = 2 * v + x + 2 * w + y$
$360^\circ - x - y = 2 * (v + w) = 2 * \gamma$.

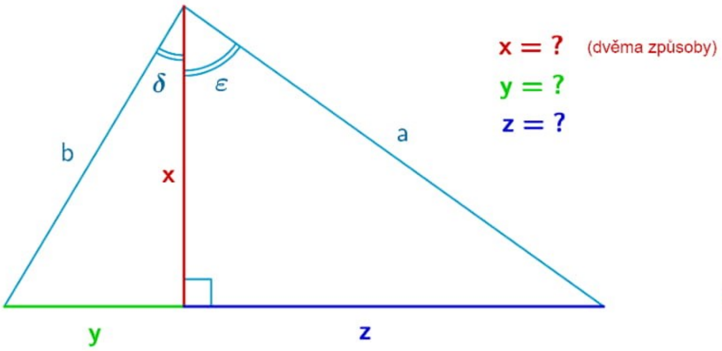
Platí
$360^\circ = x + y + a$
$a = 360^\circ - x - y$.

Tedy
$2 * \gamma = a$.

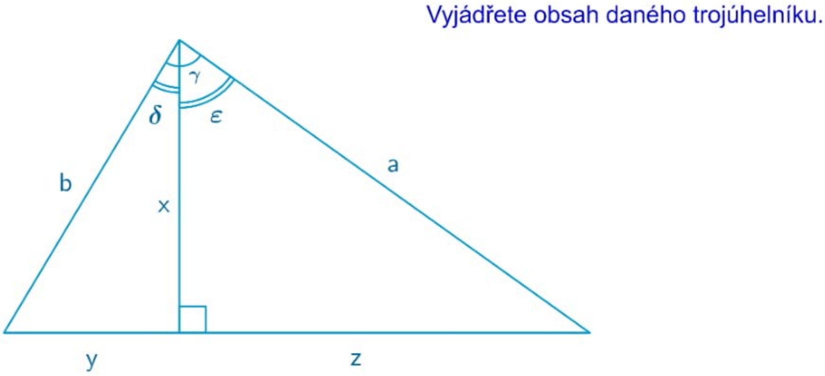
Jelikož
$\frac{a}{2} = \delta$,

tak platí
$\gamma = \frac{a}{2} = \delta$.

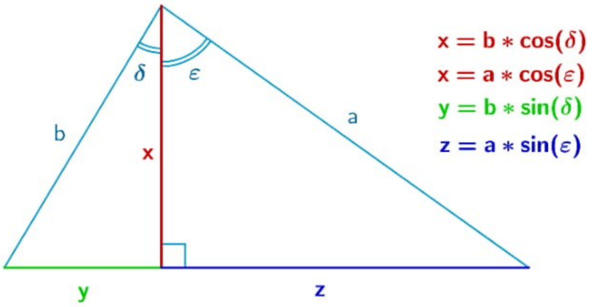
Řešení 5.1.2. Vzorec pro poloměr kružnice opsané libovolnému trojúhelníku (rozepsané)



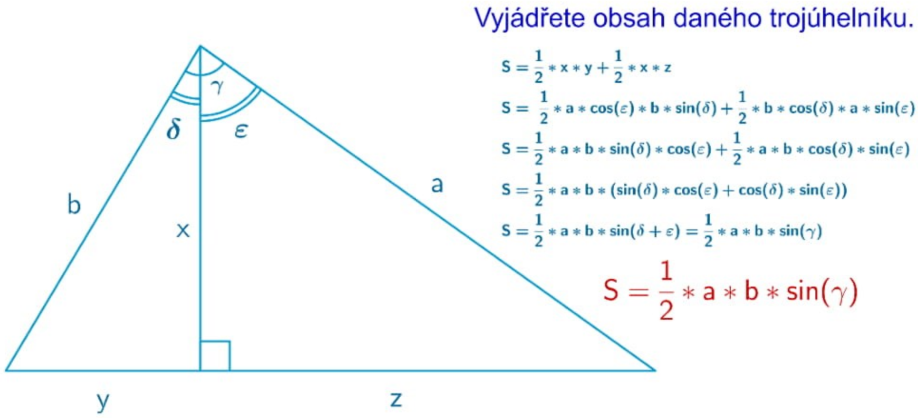
Cvičení 6.1. Vzorec pro obsah libovolného trojúhelníku



Cvičení 6.2. Vzorec pro obsah libovolného trojúhelníku



Řešení 6.1. Vzorec pro obsah libovolného trojúhelníku



Řešení 6.2. Vzorec pro obsah libovolného trojúhelníku

4.1.4. Důkazové úlohy z oblasti goniometrie a trigonometrie

Dále bych chtěla doplnit učebnice o další úlohy, které rozvíjí žákovu schopnost správně matematicky usuzovat a vyjadřovat se. Cílem těchto úloh je především rozhodnout o platnosti výroků a v případě nepravdivosti také opravit chybu či nalézt protipříklad. Zvolila jsem tyto typy úloh, neboť právě ony v daných učebnicích chyběly. Příklady na nalezení chyb jsou především zaměřeny na důležitost přesného matematického jazyka, tj. definovaní všech používaných proměnných, symbolů a správné použití výrokové logiky. V úlohách na hledání protipříkladu si žáci mohou procvičit i grafické znázornění funkcí. Navíc v obou cvičeních žáci rozvíjí své kritické přemýšlení, jelikož nejprve musí rozhodnout, zda je výrok platný či nikoli.

Úlohy:

1. Rozhodni, zda jsou následující formulace správné. Pokud ne, uprav je do správné podoby.

   a) Mějme trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je α. Funkce sinus je pak definována následujícím způsobem:
   $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.

b) Počet řešení rovnic ve tvaru

$$g(x) = a,$$

kde g je jednou z goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens, $a, x \in$ R, je 0 nebo 2.

c) Všechny grafy přímek, které neprotnou graf funkce tangens, jsou rovnoběžné s osou y.

d) Pro *x* platí:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

e) Pro každý pravoúhlý trojúhelník *ABC*, jehož odvěsny mají délky *a*, *b*, přepona délku *c* a úhly velikost α, β, γ, kde γ je úhel pravý, platí:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Tato věta se nazývá sinová věta.

f) V trojúhelníku *ABC* platí:

$$r = \frac{a}{2 * \sin(\alpha)} = \frac{b}{2 * \sin(\beta)} = \frac{c}{2 * \sin(\gamma)}.$$

Řešení:

1. Rozhodni, zda jsou následující formulace správné. Pokud ne, uprav je do správné podoby.

a) *Špatně.* Mějme **pravoúhlý** trojúhelník *ABC*, jehož **odvěsny** mají délky *a*, *b*, **přepona délku** *c* a velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je α. Funkce sinus je pak definována následujícím způsobem: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.

b) *Špatně.* Počet **základních** řešení rovnic ve tvaru

$$g(x) = a,$$

kde g je jednou z goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens, $a, x \in$ R, je 0, **1** nebo 2.

(Goniometrické úlohy jsou periodické, takže by jinak existovalo buď žádné nebo nekonečně mnoho řešení.)

c) *Správně.*

d) *Špatně.* Pro **každé** $x \in$ **R** platí:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

e) *Špatně.* (Původní formulace sice platí, ale nenazývá se sinovou větou.)

Pro každý ~~**pravoúhlý**~~ trojúhelník *ABC*, jehož strany mají délky a, b, c a úhly velikost α, β, γ, platí:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}\,.$$

Tato věta se nazývá sinová věta.

f) *Špatně.* **Pro poloměr *r* kružnice opsané** trojúhelníku *ABC* platí:

$$r = \frac{a}{2 * \sin(\alpha)} = \frac{b}{2 * \sin(\beta)} = \frac{c}{2 * \sin(\gamma)}\,.$$

Úlohy:

2. Rozhodni, zda platí následující tvrzení. Pokud výrok není platný, najdi protipříklad.

a) Všechny funkce, které neprotnou funkci $\sin(x)$, mají graf rovnoběžný s osou x.

b) Neexistuje přímka, která by protnula tangens pouze v jednom bodě.

c) Graf funkce tangens je vždy středově souměrný podle počátku kartézské soustavy souřadné.

d) Každá rovnice tvaru

$$\mathrm{cotg}(x) = a * x + b,$$

kde $x \in R$ je neznámá, a a b jsou reálná čísla a a je navíc nenulové, má vždy právě 2 základní řešení.

e) Rovnice tvaru

$$\sin(x) = a * x + b,$$

kde $x \in R$ je neznámá, $a, b \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, má vždy alespoň jedno řešení.

f) Máme-li trojúhelník *ABC*, ve kterém známe délky stran a, b a velikost úhlu γ, jsme schopni spočítat jeho obsah pouze jediným způsobem, tj. použitím následujícího vzorce:

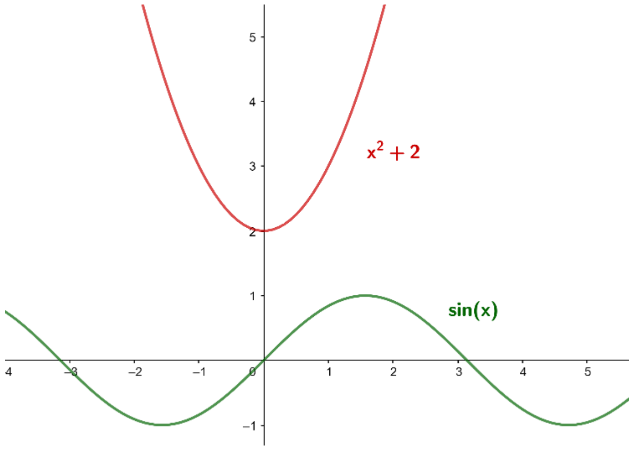
$$S = \frac{1}{2} * a * b * \sin(\gamma)\,.$$

g) K spočítání poloměru *r* kružnice opsané trojúhelníku *ABC* nám stačí znát délku jedné strany a velikost jednoho úhlu.

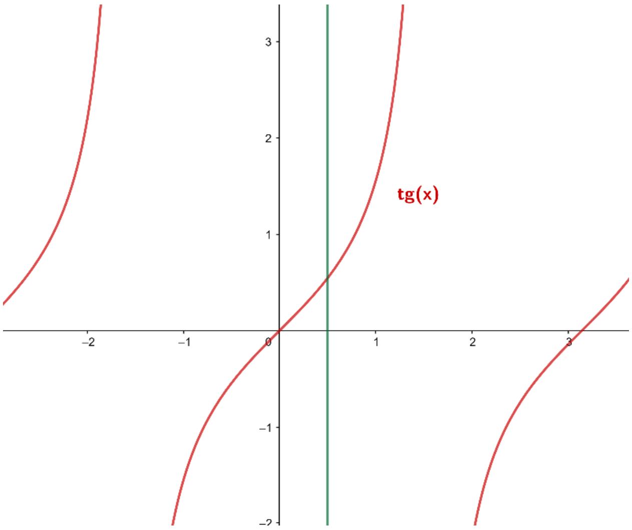
Řešení:

2. Rozhodni, zda platí následující tvrzení. Pokud výrok není platný, najdi protipříklad.

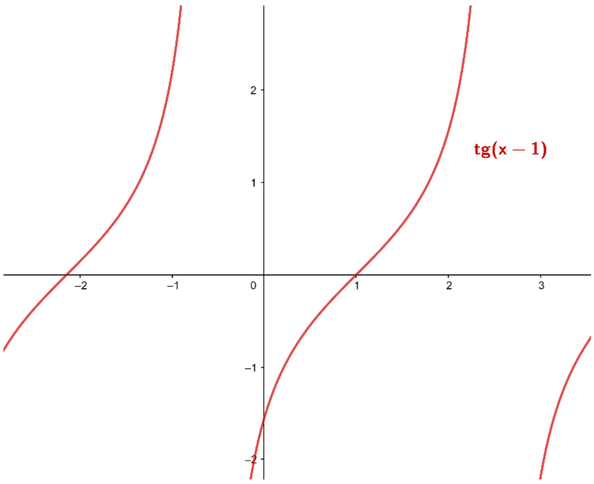
a) *Neplatí*. Např.



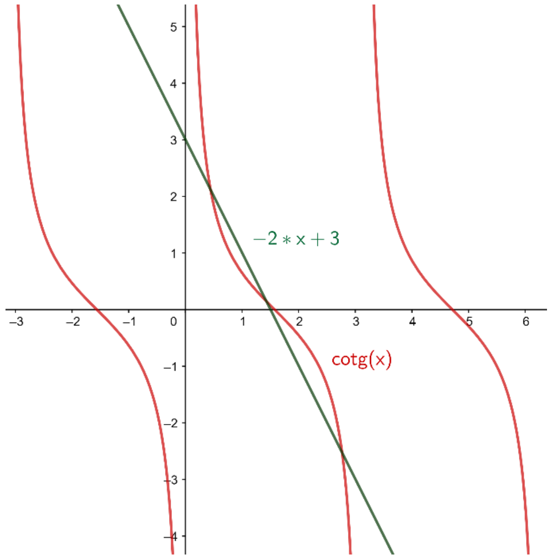
b) *Neplatí*. Např.



c) *Neplatí*. Např.



d) *Neplatí.* Např.



e) *Platí.*

f) *Neplatí.* Je to sice nejjednodušší možnost, ale existují i jiné způsoby. Můžeme například podle kosinové věty dopočítat délku strany c a poté použít Heronův vzorec:

$$S = \sqrt{s * (s - a) * (s - b) * (s - c)},$$

kde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

g) *Neplatí.* Úhel musí být protilehlý k dané straně. Tvrzení neplatí například v případě, kdy známe délku strany a a velikost úhlu β.

4.2. Posloupnosti a řady

4.2.1. Učebnice nakladatelství Prometheus

Druhou oblastí matematiky, na kterou jsem se v učebnicích zaměřila, byly posloupnosti a řady. Nejprve jsem zkoumala učebnici od nakladatelství Prometheus (Odvárko 1995).

	O	K	P	B	Σ
n	12	1	3	11	27
(*n*)	14	1	5	18	38
%	44,4	3,7	11,1	40,7	100
(%)	36,8	2,6	13,2	47,4	100

Tabulka 13. Věty (vlastnosti) v učebnici Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady (Odvárko 1995).

V této oblasti matematiky bylo v učebnici podobné zastoupení vět, které byly dokázány a těch, u kterých žádná forma vysvětlení nebyla, tj. 44,4 % (36,8 %) vět s důkazem, 40,7 % (47,4 %) bez něho. Započítáme-li všechny variace různých tvrzení, věty bez důkazu dokonce převažovaly. Nicméně, z počtu 11 (18) nedokázaných tvrzení byla 2 (6) udána pouze informativně, u dalších 5 (6) z těchto vět se mi důkazy jeví, že odpovídají spíše vysokoškolské úrovni, jejich vynechání mi tedy připadá vhodné. U zbylých tvrzení bez žádné formy vysvětlení se buď jedná o obdobu dokázaných vět nebo přímý důsledek předešlých tvrzení. Tyto případy mi připadají jako dobrá příležitost pro procvičení psaní důkazů, v další části tedy navrhnu jejich začlenění do úloh. Forma dokázaných vět je stejně jako v první zkoumané učebnici od tohoto nakladatelství velmi formální.

	VO	**VK**	**PO**	**PK**	**VAO**	**VAK**	**OO**	**OK**	**PR**	**ONO**	**ONK**	**PD**
n	12	7	1	10	0	9	0	0	1	0	1	0
(*n*)	12	8	1	11	0	9	0	0	1	0	1	0
%	14,8	8,6	1,2	12,3	0	11,1	0	0	1,2	0	1,2	0
(%)	14,3	9,5	1,2	13,1	0	10,7	0	0	1,2	0	1,2	0

	Σ D	**Jiné**	**Σ**
n	41	40	81
(*n*)	43	41	84
%	50,6	49,4	100
(%)	51,2	48,8	100

Tabulka 14. Řešené vzorové příklady v učebnici Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady (Odvárko 1995).

U řešených příkladů, naproti těch z oblasti goniometrie, kde převažovaly jiné úlohy tvořící 71,7 % (68,3 %) všech cvičení, je v této učebnici zastoupení důkazových a jiných úloh téměř identické, tj. 50,6 % (51,2 %) vůči 49,4 % (48,8 %). Jedním z důvodů vyššího podílu důkazových úloh v této oblasti matematiky považuji časté úlohy na matematickou indukci, která se v této učebnici zavádí.

Dané důkazové úlohy jsou pestré, avšak znovu chybí příklady na ohodnocení argumentu či načrtnutí principu důkazu a úlohy na vymyšlení protipříkladu a opravení chyby jsou zastoupeny pouze jednou. Analogicky je tomu i s neřešenými cvičeními, kde důkazové úlohy mírně převažují, jejich podíl na celkovém počtu je přibližně 53,6 % (56,7 %). Zastoupení různých typů důkazových cvičení je kromě podstatnějšího rozdílu u úloh typu „VO“ a „VAO“ též obdobné, jak je zřejmé ze srovnání tabulek 14 a 15.

	VO	VK	PO	PK	VAO	VAK	OO	OK	PR	ONO	ONK	PD
n	2	9	4	17	13	25	0	0	3	1	1	0
(*n*)	2	15	4	62	14	50	0	0	3	1	1	0
%	1,4	6,4	2,9	12,1	9,3	17,9	0	0	2,1	0,7	0,7	0
(%)	0,7	5,6	1,5	23,1	5,2	18,7	0	0	1,1	0,4	0,4	0

	Σ D	Jiné	Σ
n	75	65	140
(*n*)	152	116	268
%	53,6	46,4	100
(%)	56,7	43,3	100

Tabulka 15. Příklady v učebnici Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady (Odvárko 1995).

4.2.2. Učebnice nakladatelství Didaktis

Nyní se podívám na téma posloupnosti a řady v učebnici od nakladatelství Didaktis (Zemek a Zemková 2017, str. 6-33, 44-59).

	O	K	P	B	Σ
n	7	0	4	2	13
(*n*)	7	0	14	5	26
%	53,8	0	30,8	15,4	100
(%)	26,9	0	53,8	19,2	100

Tabulka 16. Věty (vlastnosti) ve vybrané části učebnice Matematika pro střední školy – 9. díl: Posloupnosti, řady, finanční matematika – Učebnice (Zemek a Zemková 2017, str. 6-33, 44-59).

V kapitolách o posloupnostech a řadách je 53,8 % (26,9 %) vět dokázáno, všechna tvrzení jsou obecná. Tyto důkazy jsou napsány spíše formálně podobně jako v minulé učebnici. Zastoupení vět, kde je důkaz ponechán žákovi je 30,8 % (53,8 %), je tedy dostatek možností k procvičování dokazování. Asi v třetině případů se jedná o vytvoření důkazu analogickým způsobem k předchozí dokázané větě, čímž žák rozvíjí především korektní tvoření matematických textů. Mezi tvrzeními bez žádné formy vysvětlení jsou hlavně věty, jejichž důkazy jsou podle mě vhodnější pro vysokoškolskou úroveň matematiky.

	VO	VK	PO	PK	VAO	VAK	OO	OK	PR	ONO	ONK	PD
n	10	6	3	24	3	4	0	0	0	1	0	0
(*n*)	10	6	3	36	3	4	0	0	0	1	0	0
%	9,4	5,7	2,8	22,6	2,8	3,8	0	0	0	0,9	0	0

(%)	6,9	4,1	2,1	24,8	2,1	2,8	0	0	0	0,7	0	0

	Σ D	**Jiné**	**Σ**
n	51	55	106
(*n*)	63	82	145
%	48,1	51,9	100
(%)	43,4	56,6	100

Tabulka 17. Řešené vzorové příklady a úlohy „Zamyslete se“ ve vybrané části učebnice Matematika pro střední školy – 9. díl: Posloupnosti, řady, finanční matematika – Učebnice (Zemek a Zemková 2017, str. 6-33, 44-59).

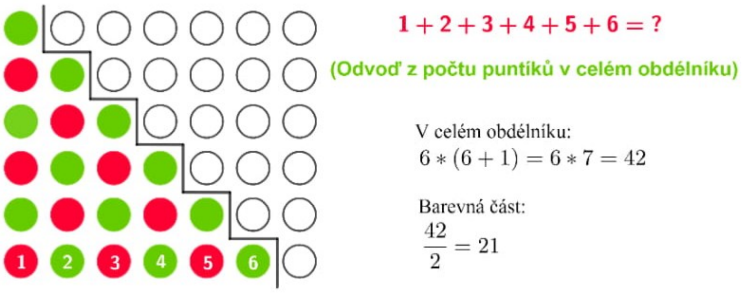
Podobně jako u učebnice od nakladatelství Prometheus je zastoupení řešených důkazových a jiných příkladů velmi vyrovnané, tj. 48,1 % (43,4 %) ku 51,9 % (56,6 %). Tyto úlohy jsou různého druhu, ale znovu některé typy úloh chybí úplně. V následující části tedy doplním druhy úloh, které v učebnicích nebyly časté. Přidám také grafické znázornění vybraných vzorců z této oblasti matematiky.

4.2.3. Grafické odvození vybraných vzorců z oblasti posloupností a řad

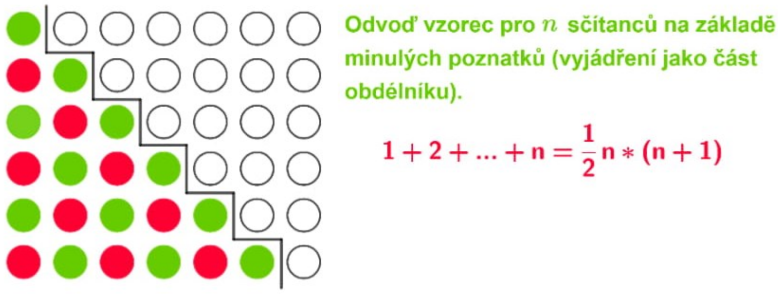
Při vytváření následujících cvičení pro odvození vybraných vzorců jsem postupovala analogicky jako u příkladů v goniometrii. V knize Důkazy beze slov (Nelsen 1993, 2000) jsem k vzorci našla příslušný „důkaz bez slov“ a ten jsem rozpracovala do formy cvičení. Žák si tedy vzorce pomocí obrázků a pomocného textu může odvodit sám.

Cvičení 7.1. Součet prvních *n* přirozených čísel

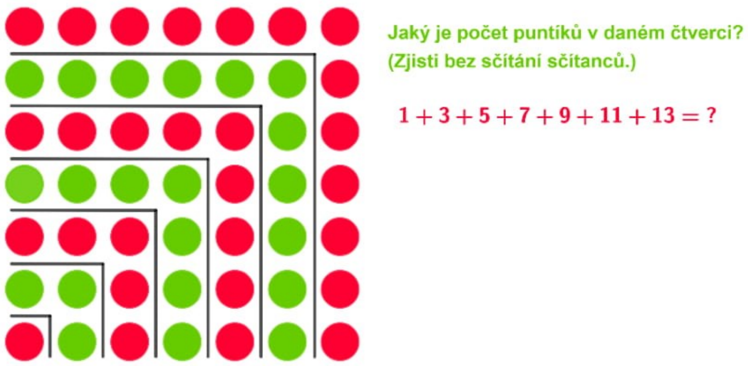
Cvičení 7.2. Součet prvních *n* přirozených čísel



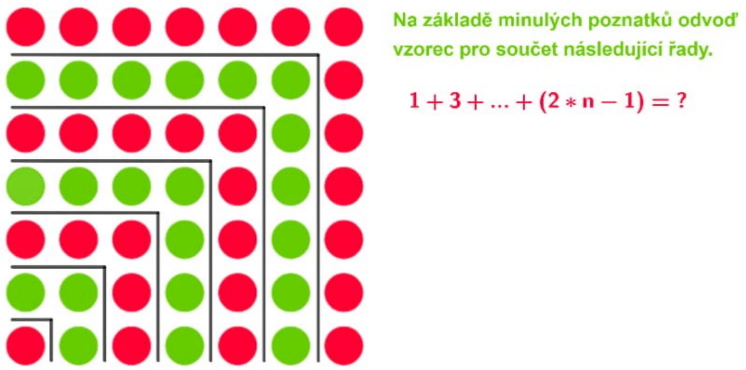
Řešení 7.1. Součet prvních *n* přirozených čísel



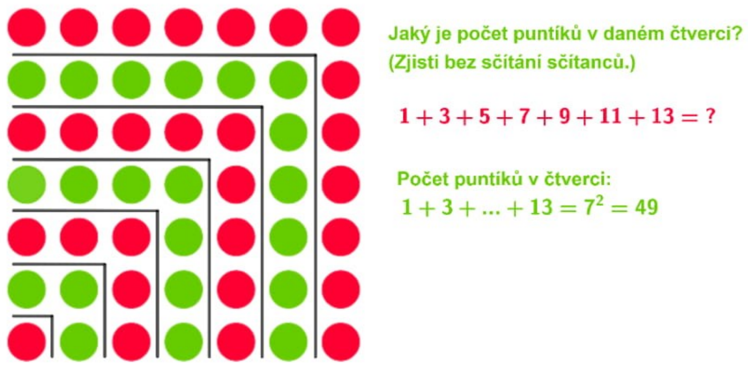
Řešení 7.2. Součet prvních *n* přirozených čísel



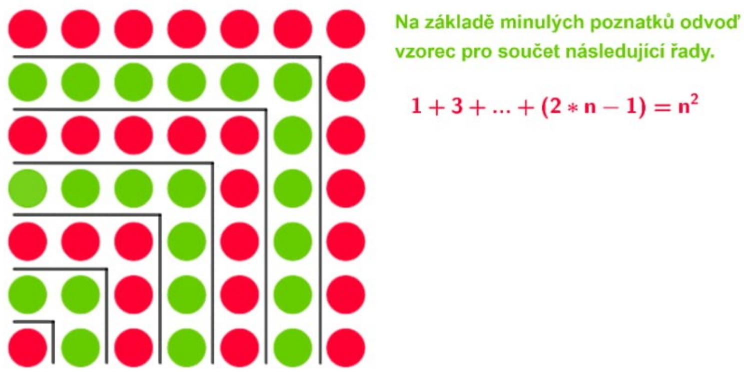
Cvičení 8.1. Součet prvních *n* lichých čísel



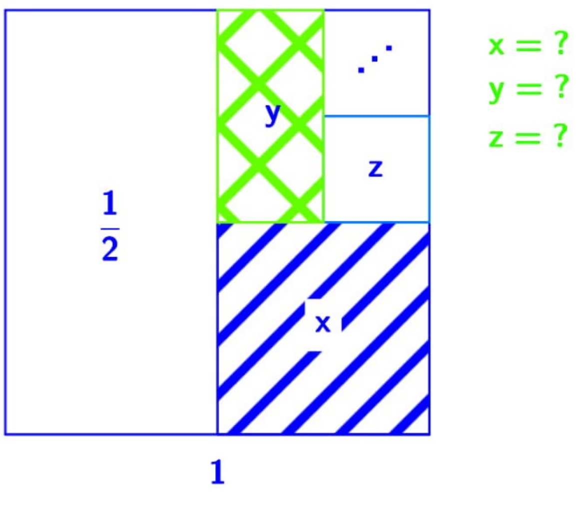
Cvičení 8.2. Součet prvních *n* lichých čísel



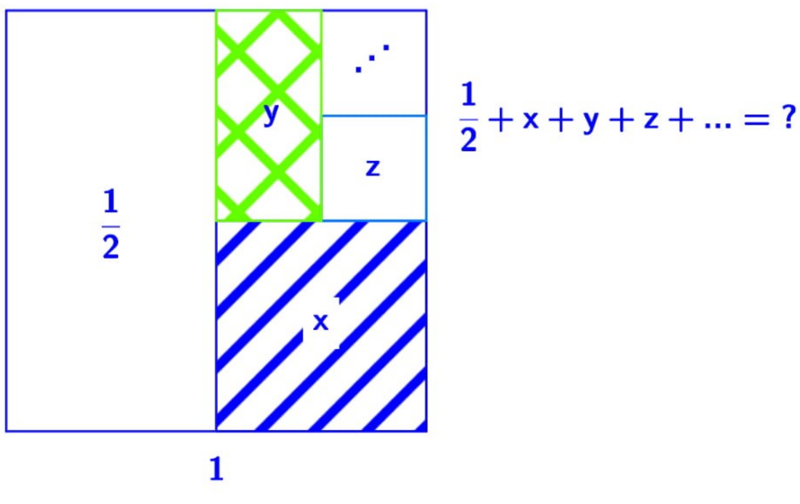
Řešení 8.1. Součet prvních *n* lichých čísel



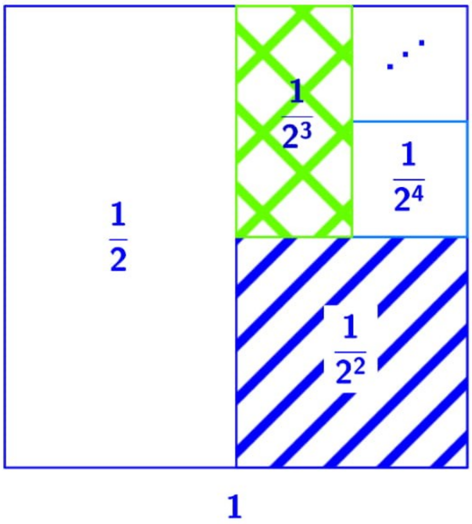
Řešení 8.2. Součet prvních *n* lichých čísel



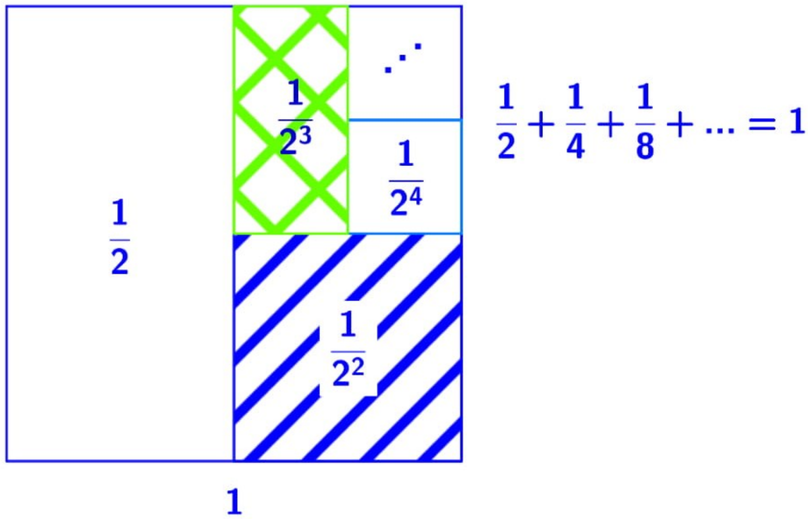
Cvičení 9.1. Součet geometrické řady s kvocientem 1/2



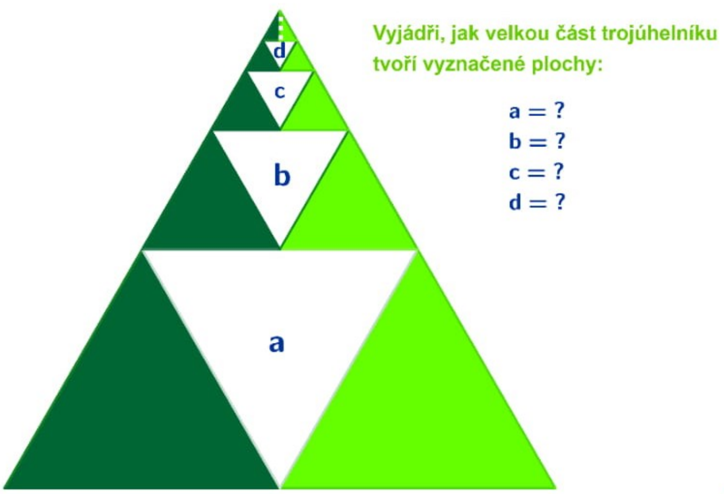
Cvičení 9.2. Součet geometrické řady s kvocientem 1/2



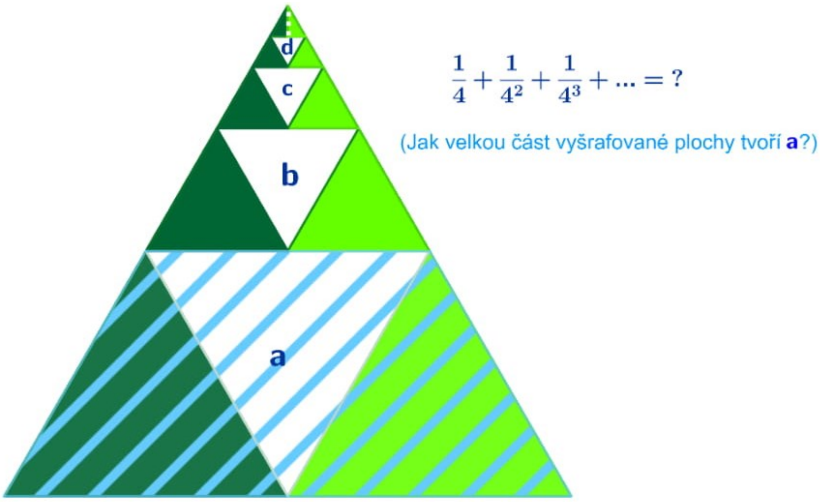
Řešení 9.1. Součet geometrické řady s kvocientem 1/2



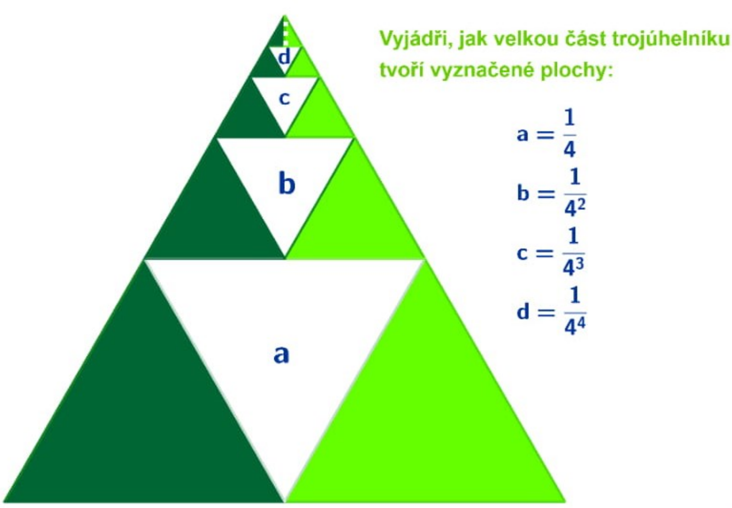
Řešení 9.2. Součet geometrické řady s kvocientem 1/2



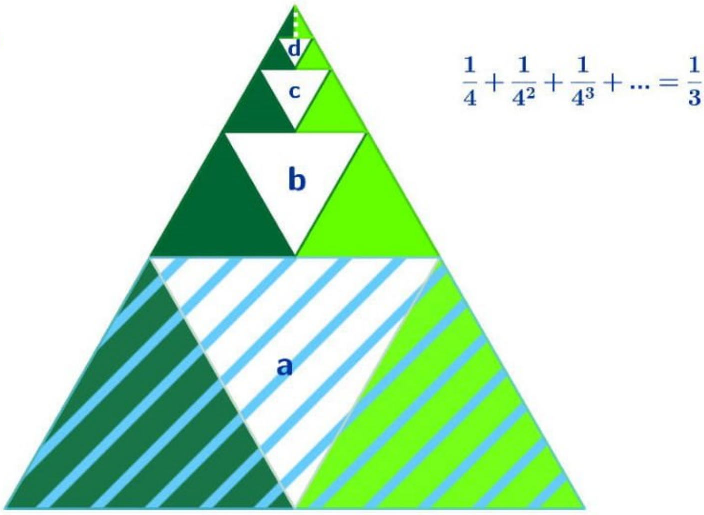
Cvičení 10.1. Součet geometrické řady s kvocientem 1/4



Cvičení 10.2. Součet geometrické řady s kvocientem 1/4



Řešení 10.1. Součet geometrické řady s kvocientem 1/4



Řešení 10.2. Součet geometrické řady s kvocientem 1/4

4.2.4. Důkazové úlohy z oblasti posloupností a řad

Úlohy:

1. Rozhodni, zda jsou následující formulace správné. Pokud ne, uprav je do správné podoby.

a) Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel.

b) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, právě když pro $n \in$ N je $a_n > a_{n+1}$.

c) Abychom dokázali, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená, stačí najít nějaké reálné číslo, které je větší než každý člen této posloupnosti.

d) V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí pro každé $n \in$ N:

$$a_n = a_1 + (n-1) * d.$$

e) Matematická indukce se skládá z následujících kroků.

i. Dokážeme, že $V(n)$ je platné pro $n = 1$. ($V(n)$ je nějaké tvrzení o přirozených čísel vyjádřené rovnicí, nerovnicí apod.)

ii. Dokážeme, že platí $V(k)$ a že pro všechna $k \in$ N platí implikace: $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

Spojením kroků i. a ii. je $V(n)$ dokázáno pro všechna n.

f) Máme-li geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q, pak pro součet s_n prvních *n* členů této posloupnosti platí následující vzorec:

$$s_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Řešení:

1. Rozhodni, zda jsou následující formulace správné. Pokud ne, uprav je do správné podoby.

a) *Správně.*

b) *Špatně.* Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, právě když pro **všechna** $n \in$ N je $a_n > a_{n+1}$.

c) *Správně.*

d) *Špatně.* V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **s diferencí *d*** pro každé přirozené číslo n:

$$a_n = a_1 + (n-1) * d.$$

(Jinak nevíme, jaký je definiční obor d, z definice diference víme, že je to množina reálných čísel.)

e) *Špatně.* Matematická indukce se skládá z následujících kroků. ($V(n)$ je tvrzení o přirozených čísel vyjádřené obvykle rovnicí nebo nerovnicí.)

i. Dokážeme, že $V(n)$ je platné pro $n = 1$.

ii. Dokážeme, ~~**že platí $V(k)$ a**~~ že pro všechna $k \in$ N platí implikace: $V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

Spojením kroků i. a ii. je $V(n)$ dokázáno pro všechna n.

(U kroku ii. dokazujeme pouze platnost implikace.)

f) *Špatně.* Máme-li geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q, $\boldsymbol{q \neq 1}$, pak pro součet s_n prvních *n* členů této posloupnosti platí následující vzorec:

$$s_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Úlohy:

2. Rozhodni, zda platí. Pokud výrok není platný, najdi protipříklad.

a) Pokud je posloupnost shora omezená, pak je nerostoucí.

b) Pro každou posloupnost existuje takové $d \in$ R, že po přičtení tohoto čísla k jakémukoli členu posloupnosti, získáme jeho následující člen.

c) Následující vzorec můžeme použít pro součet prvních *n* členů jakékoli aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$s_n = \frac{n}{2} * (a_1 + a_n).$$

d) Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem *q* je klesající, právě když

$$a_1 > 0 \ \wedge \ q < 1.$$

e) Každá posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má právě jednu vlastní limitu.

f) Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní s limitou rovnou 0 pouze v případě, že pro kvocient *q* platí:

$$0 < \ q < 1.$$

Řešení:

2. Rozhodni, zda platí. Pokud výrok není platný, najdi protipříklad.

a) *Neplatí*. Například posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená a zároveň je rostoucí.

i. Posloupnost je shora omezená, existuje tedy reálné číslo, které je větší než všechny členy posloupnosti:

$$\frac{n}{n+1} < 1,$$

$$n < n+1,$$

$$0 < 1.$$

ii. Posloupnost je rostoucí, tj. pro všechna $n \in \mathrm{N}$ platí:

$$b_n < \ b_{n+1}.$$

Platí tedy

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1},$$

$$n * (n+2) < (n+1)^2,$$

$$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1,$$

$$0 < 1.$$

b) *Neplatí*. Pravda jen pro aritmetickou posloupnost. Neplatí například pro posloupnost $(n * (n+1))_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 12, \ldots$

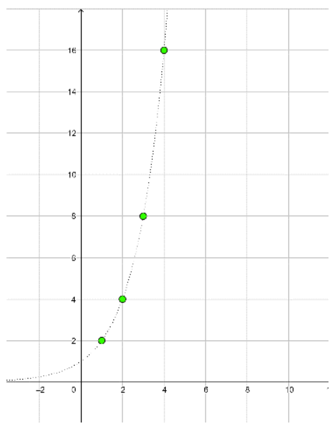
c) *Platí*.

d) *Neplatí*. Nestačí, aby byl kvocient menší než 1, musí být také větší než nula, tedy

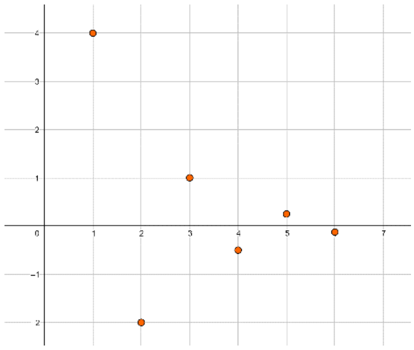
$$\mathbf{0} < q < 1.$$

Výrok tedy neplatí například pro posloupnost, která má $q = -0{,}5$ a $a_1 = 4$, ta není ani klesající ani rostoucí.

e) *Neplatí*. Existují posloupnosti, které nemají žádnou vlastní limitu, například $(2^n)_{n=1}^{\infty}$.



f) *Neplatí*. Například posloupnost, která má $q = -0{,}5$ a $a_1 = 4$, je také konvergentní s limitou v nule, na obrázku vidíme prvních pár členů:



Úlohy:

3. Načrtni princip důkazu.

a) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, právě když pro všechna $n \in \mathrm{N}$ je $a_n \leq a_{n+1}$.

b) Každá rostoucí posloupnost je neklesající.

Řešení:

3. Načrtni princip důkazu.

a) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, právě když pro všechna $n \in \mathrm{N}$ je $a_n \leq a_{n+1}$.

Princip důkazu:

Z definice neklesající posloupnosti víme, že posloupnost je neklesající, pokud pro každá dvě přirozená čísla r, s platí, že pokud r je menší nebo rovno s, pak a_r je menší nebo rovno a_s. Vezmeme tedy $r = n$ a $s = n + 1$.

b) Každá rostoucí posloupnost je neklesající.

Princip důkazu:

Odvození z vět o rostoucí a neklesající posloupnosti. Pokud je posloupnost rostoucí, tak každý následující prvek je větší než prvek předchozí. Tím je však splněn i požadavek neklesající posloupnosti, že je každý následující prvek větší nebo roven přechozímu prvku.

Závěr

V této práci jsem zkoumala, jak velký důraz je kladen na důkazy a dokazování ve školské matematice. Zjistila jsem, že v evropském vzdělávacím rámci se tento důraz na dokazování a schopnosti s tím spojené objevuje poměrně zřetelně. V českém rámcovém vzdělávacím programu už však toto zaměření není tak jasně stanovené, což může znamenat, že ani v samotném vyučování dokazování nemusí hrát tak významnou roli. Dále jsem se zabývala vybranými částmi učebnic nakladatelství Prometheus a Didaktis. Zde se důkazy stěžejních vět daných oblastí ne vždy vyskytovaly, někdy i přestože existuje žákům přístupný důkaz (především u goniometrických vět učebnice Didaktis). Učebnice nakladatelství Prometheus obsahovaly hlavně důkazy formální a jasně oddělené od ostatního výkladu, kdežto v učebnicích nakladatelství Didaktis byly důkazy méně formální, často nastíněné v rámci textu, bez jasného označení, že se o důkaz jedná. V obou případech šlo především o důkazy formou psaného textu, popřípadě s názornými obrázky. V další části jsem tedy vytvořila cvičení pro odvození několika základních matematických vět, které jsou pojaté graficky a které mají za úkol učebnice obohatit o jiný přístup k dokazovaným tvrzením. Úlohy související s dokazováním se také objevovaly v obou učebnicích, sice nepřevažovaly, ale domnívám se, že jejich množství dává dostatečné příležitosti k jejich zařazení do výuky. Tyto úlohy byly různého druhu, doplnila jsem je však ještě o ty založené na procvičování přesných matematických formulací, rozhodování o pravdivosti tvrzení a nalezení protipříkladu, všechny s cílem rozvíjet matematické vyjadřování a kritické schopnosti žáků. Záleží však především na učiteli, jakým druhům úloh dá při výuce přednost.

Literatura

[1] Anon. (2007). *Key competences for lifelong learning: European Reference Framework*. Luxembourg: Publications Office of the European Union.

[2] Balada a spol. (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze.

[3] Bass, H. (2011). Proof in Mathematics Education: An Endangered Species? A Review of Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 42(1), 98-103.

[4] CadwalladerOlsker, T. (2011). "What Do We Mean by Mathematical Proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33-60.

[5] Cohen, D. K., Raudenbush, S. W. & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educa-tional Evaluation and Policy Analysis,* 25, 119–142.

[6] Thompson, D. R., Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education,* 43(3), 253-295.

[7] Dickerson, D. S. & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 711-733.

[8] Důkaz matematickou indukcí. (n.d.). Získáno 15. února 2020 z https://www.karlin.
mff.cuni.cz/~portal/logika/?page=mati

[9] Emanovský, P. (2011). *Úvod do studia matematiky* (studijní text). Olomouc.

[10] European Commission. (2018). *COMMISSION STAFF WORKING DOCUMENT Accompanying the document Proposal for a COUNCIL RECOMMENDATION on Key Competences for LifeLong Learning*. Brusel: European Commission.

[11] Hersh, R. (2009). What I would like my students to already know about proof. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K–16 perspective* (str. 17–20). New York, NY: Routledge.

[12] Kořistková, D. (2006). *Důkazy ve školské matematice* (Nepublikovaná diplomová práce). Univerzita Palackého, Olomouc.

[13] Moravec, L. (2012). *Webová aplikace pro výuku matematické logiky na střední škole* (Rigorózní práce). Univerzita Karlova, Praha.

[14] Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Excercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.

[15] Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II: More Excercises in Visual Thinking*, Washington: The Mathematical Association of America.

[16] Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38(3), 289-321.

[17] Ulm, V., & Gehring, C. (2015). *Developing Key Competences by Mathematics Education*. Německo: Univerzita Bayreuth.

[18] Základní věta aritmetiky. (11. 05. 2019). *Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. Získáno 6. března 2020 z https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Z%C3%A1kladn%C3%AD_v%C4%9Bta_aritmetiky&oldid=17231982.

Seznam učebnic

[19] Odvárko, O. (1997). *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 2. vydání. Praha: Prometheus.

[20] Odvárko, O. (1995). *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 1. vydání. Praha: Prometheus.

[21] Zemek, V. (2014). *Matematika pro střední školy - 5. díl: Funkce II – Učebnice*. Brno: Didaktis.

[22] Zemek, V. & Zemková, K. (2017). *Matematika pro střední školy – 9. díl: Posloupnosti, řady, finanční matematika – Učebnice*. Brno: Didaktis.