



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV PROCESNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF PROCESS ENGINEERING

NAPĚŤOVĚ-DEFORMAČNÍ ANALÝZA HŘÍDELE MÍCHADLA S VYUŽITÍM MODELOVÁNÍ INTERAKCE S PROUDÍCÍ TEKUTINOU

STRESS-STRENGTH ANALYSIS OF AN IMPELLER SHAFT USING FLUID-STRUCTURE INTERACTION MODELLING

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Barbora Zifčáková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Juřena, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav procesního inženýrství
Studentka: **Bc. Barbora Zifčáková**
Studijní program: Procesní inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Juřena, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Napětově–deformační analýza hřídele míchadla s využitím modelování interakce s proudící tekutinou

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce úzce souvisí s reálnou aplikací míchací nádoby pro zpracování vaječných skořápek, v níž za provozu dochází k deformaci hřídele míchadla. Úkolem bude provést tzv. FSI analýzu, tedy vyšetřit velikost deformace s pomocí CFD simulací proudění v nádobě a jeho interakce s hřídelí. Součástí bude i návrh nápravných opatření.

Cíle diplomové práce:

Provedte FSI analýzu hřídele míchací nádoby pro zpracování vaječných skořápek za účelem určení příčin a velikosti deformace hřídele a navrhnete nápravná opatření. Součástí textové části práce by mělo být:

Stručná rešerše CFD prací zaměřených na proudění suspenzí v míchacích nádobách a speciálně prací zabývajících se FSI analýzou míchadla.

Tvorba a popis geometrie a výpočtové sítě včetně zvolených modelových zjednodušení.

Popis provozních podmínek.

Popis zvolené výpočtové metody a nastavení řešiče.

Provedení a vyhodnocení FSI simulace z hlediska charakteru proudění v nádobě a silových účinků na hřídel a ložiska v uložení.

Diskuse a návrh nápravných opatření ke snížení či eliminaci nežádoucího silového působení.

Seznam doporučené literatury:

CHI Y., WANG Y., LI M. F., REN J., CHI Y. J. Numerical simulation and experimental study on eggshell membrane separation device. *International Journal of Agricultural and Biological Engineering*, 2019, vol. 12(2), pp. 173–183. Dostupné z <http://www.ijabe.org/index.php/ijabe/article/view/3058>.

DIVYAMAAN W., MOSES O. T., VISHNU K. P., RANJEET P. U. CFD simulation of solid–liquid stirred tanks for low to dense solid loading systems. *Particuology*, 2016, vol. 29, pp. 16–33. DOI: 10.1016/j.partic.2016.01.012. Dostupné z <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674200116300256?via%3Dihub>.

SHI D., LIANG Y., EAGLESHAM A., GAO Z. Effect of the impeller imbalance on the bending moment acting on a shaft in a stirred vessel. *Chemical Engineering Research and Design*, 2014, vol. 92(11), pp. 2191–2200. ISSN 0263-8762. DOI: 10.1016/j.cherd.2013.12.027. Dostupné z <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263876213005455>.

NIKIFORAKI L., MONTANTE G., LEE K. C., YIANNESKIS M. On the origin, frequency and magnitude of macro-instabilities of the flows in stirred vessels. *Chemical Engineering Science*, 2003, vol. 58(13), pp 2937–2949. ISSN 0009-2509. DOI: 10.1016/S0009-2509(03)00152-0. Dostupné z <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250903001520>.

ANSYS FLUENT Documentation, Ansys Inc. (latest version)

ANSYS Mechanical Documentation, Ansys Inc. (latest version)

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Petr Stehlík, CSc., dr. h. c.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá numerickými simulacemi FSI (*Fluid Structure Interaction*) s použitím softwarů ANSYS Fluent a ANSYS Mechanical. Účelem je vyhodnotit interakci proudící tekutiny s míchadlem v zařízení na propírání vaječných skořápek, jehož hřídel se během provozu zdeformovala. Transientní CFD výpočty zahrnují jednofázové i vícefázové proudění, pro vyšetření vlivu tekutiny na míchadlo je využito jednocestné FSI analýzy. Vyhodnoceny jsou jednak dynamické jevy v kvazi ustáleném stavu systému, tedy při zařazení v plném provozu, jednak při rozjezdu zařízení.

Výpočty ukázaly, že vliv sekundární fáze na míchadlo a dynamiku procesu při plném provozu lze považovat za zanedbatelný, zařízení je nejvíce namáháno při rozběhu. V závěru práce jsou rozebrány možné příčiny deformace hřídele a nastíněny možnosti k dalším simulačním výpočtům.

KLÍČOVÁ SLOVA

výpočtová dynamika tekutin, CFD, interakce s proudící tekutinou, MRF, strukturální analýza, vícefázové proudění, model Eulerian, ANSYS FLuent, ANSYS Mechanical

ABSTRACT

This master's thesis deals with numerical simulations of type FSI (*Fluid Structure Interaction*). Software used is ANSYS Fluent and ANSYS Mechanical. The aim of this thesis is to study the interaction between fluid flow in the mixing tank used in pharmaceutical industry to process eggshells and the agitator whose shaft has deformed during operation. CFD part consists of both one-phase and multi-phase transient simulations. The impact of solid body deformation on fluid flow is neglected hence only one-way *Fluid Structure Interaction* is considered for the simulations. Fluid flow in the tank and stress-strain behavior of the shaft is evaluated both in quasi-steady state and during start-up of the device.

Computations showed that the impact of eggshells on agitator is negligible during operation (in quasi-steady state) unlike the behavior during start-up of the device when stresses and strains of the shaft are significantly higher. Possible reasons why the shaft deformed are presented and further numerical simulations are discussed and suggested.

KEYWORDS

Computational Fluid Dynamics, CFD, Fluid Structure Interaction, MRF, structural analysis, multiphase flow, Eulerian model, ANSYS Fluent, ANSYS Mechanical

ZIFČÁKOVÁ, Barbora. *Napětově-deformační analýza hřídele míchadla s využitím modelování interakce s proudící tekutinou*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav procesního inženýrství, 2022, 100 s. Diplomová práce. Vedoucí práce: Ing. Tomáš Juřena, Ph.D.

Prohlášení autora o původnosti díla

Jméno a příjmení autora:	Bc. Barbora Zifčáková
VUT ID autora:	191758
Typ práce:	Diplomová práce
Akademický rok:	2021/22
Téma závěrečné práce:	Napětově-deformační analýza hřídele míchadla s využitím modelování interakce s proudící tekutinou

Prohlašuji, že svou závěrečnou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucí/ho závěrečné práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autorka uvedené závěrečné práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této závěrečné práce jsem neporušila autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhla nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědoma následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autorky*

*Autor podepisuje pouze v tištěné verzi.

PODĚKOVÁNÍ

Největší díky patří Ing. Tomáši Juřenovi, Ph.D. za skvělé vedení mé diplomové práce, věcné rady a připomínky, množství času, který mi během konzultací a řešení problémů věnoval, a hlavně za neskutečnou ochotu pomoci a poradit mi s každým problémem či nejasností vyskytnuvší se během psaní práce, nehledě na důležitost nebo náročnost. Dále bych ráda poděkovala Ing. Tomáši Létalovi, Ph.D. za rady, cenné připomínky a pomoc se strukturálními výpočty. V neposlední řadě patří velké díky mé rodině a nejbližším, kteří mi byli obrovskou oporou nejen při psaní této diplomové práce, ale během celého mého vysokoškolského studia. Děkuji.

Obsah

Úvod	19
1 Uvedení do problematiky	21
2 Úvod do problematiky CFD	25
2.1 Matematický popis dynamiky proudění	26
2.1.1 Popis kontinua	26
2.1.2 Materiálová derivace	27
2.1.3 Základní rovnice	28
2.2 Vícefázové proudění	32
2.2.1 Volume of Fluid	33
2.2.2 Model Eulerian	33
2.2.3 Mixture model	35
2.3 Metody řešení proudění s pohyblivými částmi fluidní domény	36
2.3.1 MRF	36
2.3.2 Sliding Mesh	36
2.4 Turbulence	37
2.4.1 Modely turbulence	37
2.4.2 Dvourovnicové $k - \varepsilon$ modely turbulence	40
2.4.3 Dvourovnicové $k - \omega$ modely turbulence	41
2.4.4 Modely turbulence u dvojfázového proudění	42
3 Interakce pevných těles s tekutinou	45
3.1 Strukturální výpočty s využitím MKP	46
3.1.1 Statická analýza	48
3.2 Dynamická analýza	48
4 Rešerše dostupné literatury	51
4.1 Vícefázové proudění v míchacích nádobách	51
4.2 FSI analýza	55
5 Praktická část	59
5.1 Geometrie	59
5.2 Postup výpočtů	60
5.2.1 Monitorování konvergence a postprocessing	61
5.3 Nezávislost řešení na síti (CFD)	62
5.4 Srovnání modelů turbulence	67
5.5 Vícefázové proudění	71

5.6	Nezávislost řešení na síti (MKP)	75
5.7	Modální analýza	78
5.8	Namáhání míchadla při ustáleném stavu	79
5.9	Namáhání míchadla při rozjezdu zařízení	81
6	Diskuze dosažených výsledků a možných úprav	85
	Závěr	87
	Seznam symbolů a zkratk	97

Seznam obrázků

1.1	Struktura vaječné skořápky [5]	21
1.2	Míchadlo, fotodokumentace ÚPI VUT	22
2.1	Ruční nákres turbulentního proudění podle da Vinciho [7]	25
2.2	Grafické znázornění Lagrangeovského (vlevo) a Eulerovského (vpravo) popisu kontinua, vlastní zpracování na základě podkladů [12], [10], [11]	27
2.3	Různé tvary rovnice kontinuity, vlastní zpracování podle [13]	29
2.4	Působení mezifázových sil, vlastní zpracování podle [28], [29]	35
2.5	Modely turbulence, vlastní zpracování na základě [37] a [38]	38
2.6	Časové středování veličiny ϕ proudění, vlastní zpracování na základě [14]	39
3.1	Zjednodušené blokové schéma externí one-way a two-way FSI simulace, vlastní zpracování podle [39]	45
3.2	Grafické znázornění použití one-way a two-way FSI simulace, převzato z [40], upraveno	46
5.1	Schematický popis řešené geometrie, upraveno z 3D designu, který vznikl v rámci projektu ÚPI	59
5.2	Popis a rozměry fluidní domény a míchadla.	60
5.3	Postup praktické části práce	61
5.4	a) Místa pro monitorování průběhu simulace b) Oblast post-processingu	62
5.5	Grafické znázornění mezní vrstvy a způsob síťování v oblasti stěny, převzato z [15], upraveno	63
5.6	a) Výpočtová síť, b) Geometrie míchadla	65
5.7	Průběh rychlosti po výšce nádoby.	67
5.8	Průběh momentu na lopatkách míchadla. Časový úsek ca 19 s od rozběhu zařízení.	69
5.9	Kontury a vektory rychlostí v řezu nádoby a na hladině při kvazi ustáleném stavu. Průměrované hodnoty během 1 s mezi 19,2 - 20,2 s. Model $k - \varepsilon$ Standard. Škála v m/s.	70
5.10	Kontury a vektory rychlostí v řezu nádoby a na hladině při kvazi ustáleném stavu. Průměrované hodnoty během 1s mezi 19,2 a 20,2 s. Model $k - \omega$ SST. Škála v m/s.	70
5.11	Frekvence kmitání momentu působícího na lopatky míchadla, jednofázové proudění, model $k - \omega$ SST.	70
5.12	Konvergence momentu na lopatkách během časového kroku.	73
5.13	a) Trajektorie sekundární fáze v nádobě b) Profily objemových zlomků sekundární fáze po výšce nádoby, průměrované hodnoty v intervalu 3 s.	74

5.14	Frekvence momentu působícího na celé míchadlo při dvoufázové simulaci.	74
5.15	Ukázka sítě pro strukturální analýzu v pohledu a řezu a s detailem hřídele v místech změny průřezu.	76
5.16	Celková deformace a napětí v nebezpečných místech na hřídeli.	77
5.17	Okrajové podmínky modální analýzy.	78
5.18	Módy 5 - 10 při 1440 ot/min (zleva doprava, shora dolů).	79
5.19	Napětí a deformace v hřídeli při kvazi ustáleném stavu. Vlevo jedno- fázové proudění, vpravo dvoufázové proudění. Shora dolů jsou zobra- zeny celkové deformace, von Misesova napětí na celé hřídeli a v místě vrubu, popořadě.	80
5.20	Momentové reakce na hřídeli v červeně označených bodech na vlože- ném náčrtu hřídele.	80
5.21	Časový průběh von Misesova napětí v místě maximálních momen- tových reakcí na hřídeli, vizte obrázek 5.20. Maximální deformace vyhodnocena na konci hřídele.	82
5.22	Časový průběh momentových reakcí v jednotlivých osách (příspěvek od krutu a celkový ohybový moment včetně jednotlivých složek). Vy- hodnocováno pouze v místě maximálních momentů, vizte obrázek 5.20.	83

Seznam tabulek

5.1	Kvalita vytvořených sítí.	65
5.2	Rozlišení mezní vrstvy na míchadle.	65
5.3	Nastavení pseudo-transientního výpočtu.	66
5.4	Výkonové číslo pro testované sítě.	66
5.5	Nastavení transientního výpočtu.	68
5.6	Nastavení výpočtu vícefázového proudění.	73
5.7	Charakteristika vytvořených sítí pro strukturální analýzu.	76
5.8	Detaily výpočtu strukturální analýzy.	77
5.9	Vlastní frekvence a příslušné módy.	78

Úvod

Pro podpoření konceptu cirkulární ekonomiky v moderních a vyspělých státech je nezbytné správné nakládání s bioodpadem jakožto významnou součástí komunálního odpadu. Tím není myšleno jen správné třídění, likvidace a skládkování, ale i další zpracování. Přestože jsou vaječné skořápky výborným zdrojem přírodního vápníku, většinou je s nimi zacházeno jako s odpadem. Světová produkce vajec v posledních letech, konkrétně v roce 2017, překonala hranici 80 milionů tun [1]. Vaječná skořápka odpovídá přibližně 10 % hmotnosti celého vejce [2], roční produkce se tedy pohybuje okolo 8 milionů tun. Moriss a spol. (2018) [3] předpokládají, že se roční spotřeba vajec do roku 2035 zvýší až o 50 %. Vaječné skořápky nacházejí uplatnění v nejrůznějších oblastech zpracovatelského průmyslu. Jmenovitě například v zemědělství jako hnojivo nebo doplněk stravy pro zvířata, uplatňují se jako přísada kompozitních materiálů, poměrně rozsáhlý výzkum probíhá i v oblasti elektroniky či biomedicíny. Díky obsahu pro tělo prospěšných látek jsou významnou oblastí výzkumu farmaceutického průmyslu. Právě tomuto odvětví je v práci věnována pozornost.

Cílem práce je pomocí numerických simulací v programech ANSYS Fluent a ANSYS Mechanical zjistit příčinu ohnutí hřídele míchadla na propírání vaječných skořápek a navrhnout nápravná opatření. Disciplína CFD (*Computational Fluid Dynamics*) a MKP (*Metoda konečných prvků*) modelování je velmi komplexní¹. Z toho důvodu je v teoretické části práce uveden matematický úvod do podstaty výpočtového modelování tekutin, jsou popsány nejčastěji používané modely jak pro vícefázové proudění, tak pro řešení turbulence. Teoretický úvod zahrnuje rovněž popis FSI analýzy (*Fluid Structure Interaction*) k řešení deformace hřídele způsobené silovým polem proudící tekutiny.

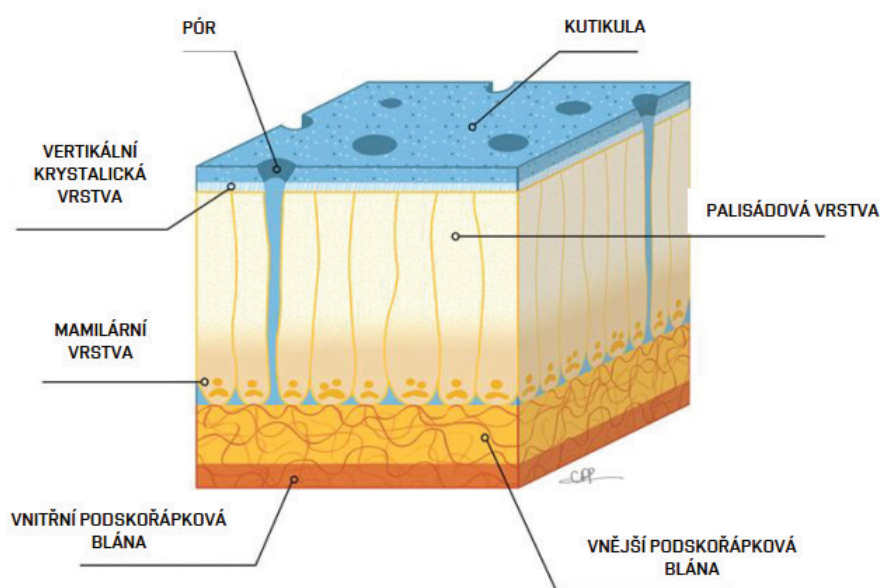
Většina odborných článků a literatury, z nichž tato práce čerpala, je psána v anglickém jazyce. Doslovný překlad nebo český ekvivalent některých termínů, typicky vztahujících se k popisu modelů nebo nastavení v ANSYS Fluent, příp. ANSYS Mechanical, by mohl vést k nejednoznačnosti výkladu a zbytečným nejasnostem. Nejedná-li se o termíny, které se v české literatuře běžně překládají (typicky stěnové funkce aj.), jsou tyto výrazy v práci zpravidla uváděny v původním znění a při prvním použití jsou vysvětleny, případně informativně doplněny českým překladem.

¹Je potřeba poukázat na zažitou nepřesnost při používání výrazů CFD a MKP. CFD označuje vědní disciplínu, matematické modelování proudění tekutin využívající k výpočtu proudění numerické metody implementované do počítačového softwaru. Nejčastěji pro řešení využívá metodu konečných objemů. Pojem MKP (v angličtině FEM – *Finite Element Method*) označuje numerickou metodu pro řešení problémů formulovaných (parciálními) diferenciálními rovnicemi. Nejčastěji bývá spojena s úlohami mechaniky těles, tedy k simulaci napětí, deformací, vlastních frekvencí aj. Běžně se však staví na roveň pojmu CFD.

1 Uvedení do problematiky

Vaječné skořápky jsou výborným zdrojem přírodního vápníku, ten obsahují ve formě uhličitanu vápenatého (94 %), hořčík pak ve formě uhličitanu hořečnatého (1 %) a fosfor ve formě fosforečnanu vápenatého (1 %), zbylá čtyři procenta připadají na další organické látky. Na rozdíl od jiných přírodních zdrojů vápníku nejsou skořápky téměř zatíženy pro tělo nebezpečnými prvky těžkých kovů, jako jsou kadmium, olovo, vanad, hliník nebo rtuť [4].

Vaječné skořápky sestávají ze tří primárních částí – kutikuly, kalcifikované skořápky a podskořápkové blány.



Obr. 1.1: Struktura vaječné skořápky [5]

Podskořápková blána je vláknitý biopolymerní materiál složený ze dvou vrstev – vnitřní a vnější. Vnitřní vrstva, jejíž tloušťka se pohybuje mezi 15–26 μm , je v přímém kontaktu s vaječným bílkem a zabraňuje jeho mineralizaci. Vnější vrstva s tloušťkou mezi 50–70 μm je naopak na některých místech mineralizována a její vlákna zasahují do samotné skořápky, konkrétně do její mamilární vrstvy. Podskořápková blána sestává z 80–85 % z proteinů, z nichž 10 % jsou kolageny a 70–75 % jsou jiné proteiny a glykoproteiny. Obě vrstvy jsou od sebe odděleny vzduchovou mezerou [5].

Skořápka je biokeramický pórovitý materiál složený ze tří vrstev – mamilární, palisádové a vertikální krystalické. *Mamilární vrstva* přímo navazuje na vnější podskořápkovou blánu a je složena z nepravidelně uspořádaných krystalů uhličitanu

vápenatého. *Palisádová vrstva* je houževnatá, až 200 μm tlustá struktura z uhlíkatu vápenatého, tvořená „sloupci“ vybíhajícími z mamilární vrstvy a rostoucími kolmo na povrch skořápky. Je ukončena tenkou *vertikální krystalickou vrstvou*, tedy vápenatou strukturou s vyšší hustotou krystalů uhlíkatu vápenatého než v palisádové vrstvě. Póry, které procházejí skořápkou, umožňují difuzi metabolických prvků a vodní páry [5]. Skořápka je nakonec potažena tenkou, nevápenatou **kutikulou** [5].

Přestože, jak je z výše uvedeného patrné, je potenciál zpracování vaječných skořápek obrovský, nelze tento druh zpracovatelského průmyslu považovat za příliš běžný nebo častý. Firem zabývajících se tímto odvětvím není mnoho, společnost se teprve učí využívat výhody tohoto biologického materiálu. Ústav procesního inženýrství (ÚPI) s jednou takovou společností spolupracuje. Předmětem jedné ze spoluprací byl vývoj míchadla pro praní skořápek. V jedné vsázce 600 litrové míchadlo propírá ca 60 kg vaječných skořápek rychlostí 1440 ot/min. Během provozu však došlo k ohnutí hřídele míchadla a tedy znehodnocení celého stroje.



Obr. 1.2: Míchadlo, fotodokumentace ÚPI VUT

Silové pole vyvolané proudící tekutinou působí na pevnou strukturu míchadla, což vede k tvorbě mechanických napětí a deformací. Taktéž reverzně platí, že velké deformace mohou ovlivnit charakter obtékajícího proudu. K vyšetření této vzájemné interakce slouží tzv. FSI analýza (z anglického *Fluid-Structure Interaction*) – tedy interdisciplinární propojení mezi zákony dynamiky tekutin a mechaniky pevných těles.

Důvod ohnutí hřídele míchadla bude tedy řešen pomocí FSI analýzy, detaily CFD a MKP simulace a jejich propojení budou popsány v praktické části práce.

2 Úvod do problematiky CFD

Historie dynamiky tekutin čítá více než 2000 let. Od starověkého filozofa ARISTOTELA (384–322 př. n. l.) a jeho definici kontinua a odporové síly, ARCHIMÉDA (287–212 př. n. l.) s jeho konceptem tlaku v tekutině, dnes známým jako Archimédův zákon, přes renesančního génia LEONARDA DA VINCIHO (1452–1519) a jeho podrobný popis turbulentního proudění a první definici rovnice kontinuity [6]. Cesta k současnému pojetí a chápání dynamiky tekutin byla však ještě dlouhá.



Obr. 2.1: Ruční náčrt turbulentního proudění podle da Vinciho [7]

CFD (z anglického *Computational Fluid Dynamics*, ekvivalent české *Výpočtové dynamiky tekutin*) označuje komplexní analýzu a simulaci systémů, které zahrnují nejen proudění tekutin, nýbrž i přenos tepla, chemické reakce, radiace aj. Základem jsou zákony zachování (hmoty, hybnosti a energie), kterými se pohyb tekutiny řídí. Jedná se o parciální diferenciální rovnice, které lze analyticky řešit jen za velmi zjednodušujících předpokladů. Jsou tedy řešeny numerickými metodami, implementovanými do počítačových CFD softwarů (ANSYS Fluent, OpenFoam, CFX, COMSOL). V oblasti dynamiky tekutin hovoříme o

- metodě konečných diferencí
- metodě konečných elementů
- metodě konečných objemů
- spektrální metodě

z nichž v oblasti CFD je nejpoužívanější metoda konečných objemů [8]. Jejím principem je diskretizace fluidní domény na tzv. kontrolní objemy, buňky. Řídící rovnice jsou pak numericky řešeny v uzlových bodech těchto objemů, informace ze všech buněk pak charakterizují chování studovaného systému jako celku.

Zásluhou obrovského vývoje výpočetní techniky v posledních dekádách není využití CFD pouze doménou akademického prostředí a výzkumu, nýbrž i poměrně

běžnou součástí průmyslových aplikací. Z oblasti procesního průmyslu hovoříme například o

- spalování v plynových turbínách, na roštu
- míchání, separaci, fluidizaci v nejrůznějších zařízeních procesního průmyslu
- distribuci toku v potrubních systémech
- distribuci znečišťujících látek a odpadních vod

2.1 Matematický popis dynamiky proudění

Pohyb tekutin je vlastně vzájemná interakce obrovského množství částic – atomů a molekul. Proto při vyšetřování pohybu tekutin zavádíme pojem tzv. *kontinua* – spojitého prostředí, které je popsáno hustotou. To znamená, že i infinitezimální objem tekutiny obsahuje dostatečné množství částic k určení charakteristických veličin, jako jsou rychlost, tlak, teplota aj. [9]

2.1.1 Popis kontinua

K popisu tekutiny jako kontinua se používají dva základní principy:

- Lagrangeovský přístup
- Eulerovský přístup

Lagrangeovský přístup, pojmenovaný po italském matematikovi J. L. LAGRANGEovi (1736–1813) [10], popisuje pohyb jednotlivých částic tekutiny podél jejich trajektorie, přičemž monitoruje, jak se vlastnosti proudu spojené s těmito částicemi mění v závislosti na čase. Proměnné proudu (respektive dané částice) F , které mohou být jak skalární (teplota T , tlak p), tak vektorové (poloha \vec{r} , rychlost \vec{v} , zrychlení \vec{a}), jsou proto funkcí času t [10], [11]. Pro částici A tedy platí

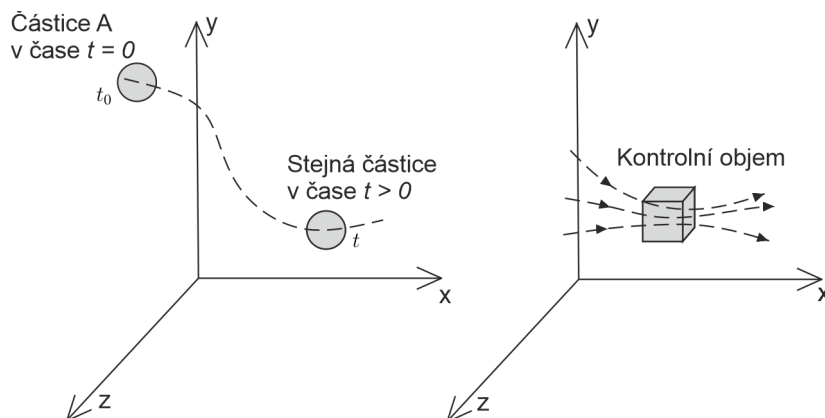
$$F_A = F_A(t) \quad (2.1)$$

Jedná se o výpočetně velmi náročné řešení, neboť k popisu celého toku je nutné tímto způsobem sledovat všechny částice, které proud tvoří. Z toho důvodu se v mechanice tekutin používá typicky u dvofázových toků, kde je jedna fáze jednoduše rozpoznatelná a oddělitelná od druhé, např. tok tuhých částic (*solid particle flow*) nebo bublinkový tok (*bubble flow*).

Eulerovský přístup, podle švýcarského matematika L. EULERA (1707–1783), naproti tomu pohyb jednotlivých částic nebere v potaz. Sleduje fixní objem v prostoru, tzv. *kontrolní objem*, kterým tekutina protéká. Eulerovský přístup definuje parametry proudu F jako skalární nebo vektorová pole, která jsou funkcí polohy a času [10], tedy

$$F = F(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

kde x, y, z jsou souřadnice libovolného bodu v rámci kontrolního objemu a t je čas. Všechny souřadnice (polohové i časová) jsou vzájemně nezávislé [8]. Použití přístupu podle Eulera je v dynamice tekutin zpravidla výhodnější a častější. Grafické znázornění obou metod vizte na obrázku 2.2 níže.



Obr. 2.2: Grafické znázornění Lagrangeovského (vlevo) a Eulerovského (vpravo) popisu kontinua, vlastní zpracování na základě podkladů [12], [10], [11]

2.1.2 Materiálová derivace

Obě metody popisují tentýž fyzikální děj, musí tedy existovat způsob, jak je popojit. Analytickým pojátkem mezi nimi je tzv. *materiálová derivace* (též *totální, substanciální, lagrangeovská nebo eulerovská*) [10]

$$\frac{D(F)}{Dt} = \frac{\partial(F)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)(F) \quad (2.3)$$

kde t je čas, \vec{v} rychlost, F je proměnná proudu (skalární i vektorová, např. tlak nebo zrychlení) a ∇ je operátor *nabla* definovaný $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Výraz $\frac{D(F)}{Dt}$ vyjadřuje rychlost změny F . Totální derivace $\frac{d}{dt}$ je v mechanice tekutin nahrazena speciálním označením $\frac{D}{Dt}$, které zdůrazňuje, že zrychlení je vztaženo k částici tekutiny (lagrangeovský popis)¹ [11]. Člen $\frac{\partial(F)}{\partial t}$ se nazývá *lokální* rychlost změny F v čase v daném fixním bodě (pro rychlost \vec{v} lokální zrychlení). Pro ustálené proudění je nulový. Člen $(\vec{v} \cdot \nabla)F$ je *konvektivní* rychlost změny F v důsledku prostorových změn. Konkrétně pro rychlost \vec{v} se jedná o konvektivní zrychlení, které

¹Obě derivace jsou formálně totožné, materiálová derivace není nic jiného než totální derivace podle času. Zatímco totální derivace je z pohledu matematiky více formální, označení $\frac{D}{Dt}$ zdůrazňuje fyzikální důležitost materiálové derivace.

je způsobeno pohybem tekutiny např. z místa s větším průřezem do místa s menším průřezem. Tedy i pro ustálené proudění může být nenulové [10],[8].

Odvození materiálové derivace vychází z předpokladu, že v daném časovém okamžiku t je hodnota F „lagrangeovské“ částice stejná jako lokální hodnota pole veličiny F v tomto místě. Jinými slovy, v daném čase t se „lagrangeovská“ částice nachází přesně v poloze nepohyblivého sledovaného bodu kontrolního (eulerovského) objemu, hodnota veličiny F je tedy stejná z obou úhlů pohledu. Detailní odvození zde není uvedeno, lze odkázat na zdroje [10, str. 124–127], [8, str. 51–53] a [11, str. 156–157].

2.1.3 Základní rovnice

Základem pro odvození řídicích rovnic proudění tekutiny jsou zákony zachování, konkrétně

- Zákon zachování hmoty
- Zákon zachování hybnosti
- Zákon zachování energie, dochází-li při proudění k přenosu tepla, chemickým reakcím aj.

Rovnice kontinuity

Následující kapitola je zpracována primárně podle [13], k lepšímu pochopení problematiky pak sloužily ještě zdroje [14], [8] a [11].

Rovnice kontinuity je vyjádřením zákona zachování hmoty

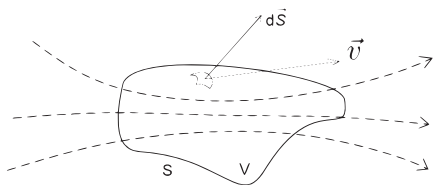
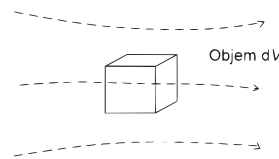
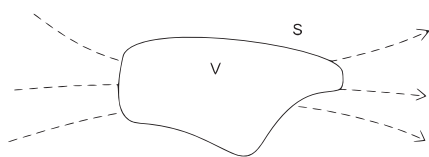
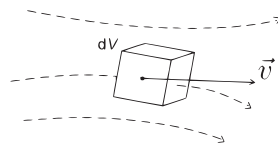
$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0} \quad (2.4)$$

kde ρ je hustota. Pro tzv. *ideální kapalinu*, tedy nestlačitelnou a neviskózní, má rovnice tvar

$$\nabla \vec{v} = 0 \quad (2.5)$$

Pravá strana rovnice 2.4 nemusí být nutně nulová. Obecně je rovna členu S_m , který představuje buď zdroj hmoty přidané do kontinuální fáze z disperzní fáze (například při vypařování kapek), nebo jakýkoliv uživatelsky definovaný zdroj hmoty [15]. Přestože rovnice kontinuity vyjadřuje pouze jeden fyzikální zákon, v literatuře se běžně vyskytuje zapsaná různými a na první pohled naprosto odlišnými způsoby. Důvodem je odvození na základě různých modelů toku – je-li zkoumán konečný nebo infinitezimální objem, pohybuje-li se s proudem nebo má fixní polohu v prostoru.

Tyto modely byly už částečně nastíněny při popisu kontinua v kapitole 2.1.1, na následujícím obrázku jsou, včetně příslušných tvarů rovnice kontinuity, schematicky zakresleny a dovysvětleny. Následující schéma má pouze informativní charakter, detailní odvození jednotlivých tvarů rovnice kontinuity v této práci není rozebráno. Lze je dohledat v odborné literatuře, např. [13, str. 49–60] a [11, str. 188–200].

	INTEGRÁLNÍ FORMA	DIFERENCIÁLNÍ FORMA
KONZERVATIVNÍ FORMA	<p>Konečný kontrolní objem V s fixní polohou v prostoru, kterým tekutina protéká.</p>  $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$	<p>Infinitezimálně malý element s fixní polohou v prostoru, kterým tekutina protéká. Element tekutiny je nekonečně malý ve smyslu diferenciálního počtu, nicméně obsahuje dostatečné množství částic, aby byl považován za kontinuum.</p>  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$
NEKONZERVATIVNÍ FORMA	<p>Konečný kontrolní objem V pohybující se s proudem. Přestože se může během pohybu měnit jeho tvar a velikost, stále obsahuje stejný počet částic tekutiny.</p>  $\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \, dV = 0$	<p>Infinitezimálně malý element, který se pohybuje podél dané proudnice rychlostí \vec{v}, která je rovna velikosti rychlostního pole v daném bodě.</p>  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$

Obr. 2.3: Různé tvary rovnice kontinuity, vlastní zpracování podle [13]

Ze schématu: V je kontrolní objem, dV infinitezimálně malý element tekutiny, S kontrolní povrch a $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, kde \vec{n} je normála elementárního povrchu dS . Kontrolní objem V představuje dostatečně velkou, konečnou oblast toku, která je ohraničena kontrolním povrchem S .

Diferenciální rovnice vyžadují, aby proměnné toku byly diferencovatelné, tedy spojitě. Integrální forma rovnic žádný takový předpoklad z matematického hlediska splňovat nemusí, proto je pro CFD považována za vhodnější. Tento fakt se projeví především u proudění s výraznými diskontinuitami, např. rázové vlny.

Rovnice uvedené v 2.3 jsou vyjádřením jedné – rovnice kontinuity. Každou z těchto rovnic lze odvodit z ostatních použitím různých matematických postupů. Ty zde uvedené nejsou; dohledat je lze v odborné literatuře, např. [13, str. 56–60]. Postup odvození čtyř forem rovnice na základě modelu toku není omezen pouze na rovnici kontinuity, lze jej aplikovat také na odvození řídicích rovnic vyjadřujících zákon zachování hybnosti a energie.

Navier-Stokesova rovnice

Navier-Stokesova rovnice, pojmenována na počest pánů C. L. NAVIERA (1785–1836) a G. G. STOKESE (1819–1903) [11], kteří ji nezávisle na sobě v první polovině 19. století odvodili, je vyjádřením zákona zachování hybnosti. Lze ji odvodit z Newtonova druhého pohybového zákona síly, který říká, že změna hybnosti částice je rovna výsledné síle působící na částici. Síly působící na částici jsou dvojího typu – objemové a plošné [13], [10].

$$\vec{F}_o + \vec{F}_p = m \cdot \vec{a} \quad (2.6)$$

Objemové síly \vec{F}_o (vyjádřené na jednotku hmotnosti jako \vec{f}) jsou způsobené hmotností tělesa, např. gravitační síla (dále to mohou být elektrické nebo magnetické síly, které zde ale nebudou uvažovány).

Plošné síly \vec{F}_p , působící na povrch elementu, jsou dvojího typu:

- tlakové – normálová napětí p způsobená okolním hydrostatickým tlakem
- viskózní – normálová a smyková napětí τ , způsobená třením okolní tekutiny

Plošné síly jsou vyjádřené tenzorem napětí [10]

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Vzhledem k symetrii platí $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, tenzor má tak 6 nezávislých proměnných. Rovnováhou sil působících na element tekutiny, dosazením za členy

v rovnici 2.6 a dalšími matematickými úpravami (detailní odvození vizte např. v [13, str. 60–66]) získáme jednotlivé složky Navierovy-Stokesovy rovnice ve tvaru [13]

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x} \quad (2.8a)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y} \quad (2.8b)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho w \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z} \quad (2.8c)$$

Výše uvedené rovnice nejsou řešitelné, neboť počet neznámých je vyšší než počet rovnic. Doplňkovými rovnicemi jsou tzv. *konstitutivní vztahy* [10], které v roce 1845 Stokes odvodil pro newtonské kapaliny². Těmito vztahy lze smyková napětí zapsat pomocí rychlostního pole.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda(\nabla \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ \tau_{yy} &= \lambda(\nabla \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \tau_{zz} &= \lambda(\nabla \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde μ (Pa·s) je dynamická viskozita a $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ je tzv. *druhá viskozita* stlačitelné tekutiny.

Častým předpokladem v praxi je absolutní nestlačitelnost kapalin, kdy dynamická viskozita μ je konstantní a vliv druhé viskozity λ je nulový. Navier-Stokesova rovnice, zapsaná vektorově, má pak tvar³ [10]

$$\rho \frac{\partial(\vec{v})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.10)$$

Pro ideální, tedy neviskózní a nestlačitelnou, kapalinu je viskózní člen $\mu \nabla^2 \vec{v}$ z rovnice 2.10 nulový a Navier-Stokesova rovnice se redukuje na Eulerovu rovnici⁴ ve tvaru [10]

²Newtonské kapaliny jsou látky, jejichž smykové napětí je lineárně úměrné deformační rychlosti, např. gradientu rychlosti. Newtonské kapaliny poprvé definoval I. NEWTON (1643–1727) na konci 17. století.

³Odvození vizte v [10, str.428–430].

⁴Aproximace toku Eulerovou rovnicí je možná jen v oblastech, kde jsou viskózní síly zanedbatelné ve srovnání se setrvačnými nebo tlakovými silami, tedy u toků s vysokým Reynoldsovým číslem a v dostatečné vzdálenosti od stěny.

$$\frac{\partial(\vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \quad (2.11)$$

Navier-Stokesovy rovnice jsou analyticky řešitelné jen za velmi zjednodušujících a prakticky omezujících předpokladů. Zdrojem problémů je právě konvektivní člen, tedy změna v prostoru $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $w\frac{\partial v}{\partial z}$ atd. Jsou aplikovatelné jak na laminární, tak na turbulentní proudění. U turbulentního proudění však vyvstává komplikace s náhodnou fluktuací složek rychlosti v čase [8].

Energetická rovnice, tedy vyjádření zákona zachování energie, není pro řešenou problematiku klíčová a dále v této práci rozebrána nebude.

2.2 Vícefázové proudění

Stěžejní problematikou řešenou v této práci je hydrodynamika vícefázového proudění, konkrétně tok pevných částic (skořápek), vody a vzduchu (při modelování hladiny). Pojem fáze je v tomto případě chápán v širším kontextu. Mimo fyzikální, termodynamicky rovnovážné fáze – pevnou látku, kapalinu a plyn – lze fázi identifikovat jako určitou třídu materiálu, který interaguje s tokem a potenciálním polem, v němž je ponořen. Tedy například různě velké částice jednoho materiálu lze považovat za jednotlivé fáze a tok tohoto materiálu za vícefázový.

Existují v zásadě dva přístupy, jak lze vícefázové proudění řešit:

- Euler–Lagrange
- Euler–Euler⁵.

U prvního zmiňovaného je tekutá fáze řešena jako kontinuum a dispergovaná fáze je simulována sledováním pohybu velkého množství částic. V ANSYS Fluent je na tomto přístupu založen model *DPM – Discrete Phase Model*. Tento přístup je vhodný k řešení rozstříku sprejů nebo spalování, naopak nevhodný k simulování směsí kapalina–kapalina, fluidních vrstev a jiných aplikací, kde nelze zanedbat objemový zlomek další fáze.

Přístup Euler–Euler naproti tomu pohlíží na obě fáze jako na vzájemně se prolínající kontinua. Fáze jsou reprezentovány objemovými zlomky a řídicí rovnice jsou psány pro každou fázi zvlášť. ANSYS Fluent nabízí tři základní modely k výpočtu vícefázového proudění použitím přístupu Euler–Euler [15]:

- VOF (Volume of Fluid) model
- Eulerian model
- Mixture model

⁵Detailnější vysvětlení eulerovského a lagrangeovského popisu kontinua, přestože aplikovaných na jednofázové proudění, vizte kapitolu 2.1

2.2.1 Volume of Fluid

Model pro taková vícefázová proudění, která mají ostře definovaná rozhraní vzájemně se nemísitelných tekutin. Název metody je odvozen od způsobu, jakým je popsáno fázové rozhraní. Lze definovat funkci F , která je v každém bodě obsazeném tekutinou rovna jedné a v ostatních bodech je nulová. Průměrná hodnota této funkce v dané buňce pak představuje objemový zlomek tekutiny α_q v této buňce [16]. Ve všech buňkách daného objemu pak dochází k jednomu ze tří případů [17], [18], [15]

$$\alpha_q^{VOF} = \begin{cases} 1, & \text{buňka je plně obsazena danou tekutinou} \\ 0, & \text{buňka není obsazena danou tekutinou} \\ 0 < \alpha_q < 1, & \text{buňka je částečně obsazena tekutinou} \rightarrow \text{fázové rozhraní} \end{cases}$$

Jednotlivé fáze q jsou tedy v každé buňce reprezentovány objemovým zlomkem α_q , jejich suma je rovna jedné. Veličiny a vlastnosti proudění jsou reprezentovány objemově průměrovanými hodnotami. Metoda byla původně navržena C. W. HIRTEM a B. D. NICHOLSEM. VOF model se nejčastěji používá pro simulace toků s volnou hladinou, pro sledování bublin velkých rozměrů a jiných aplikací s jasně definovaným fázovým rozhraním [15], [19].

2.2.2 Model Eulerian

Z výše uvedených modelů je nejvíce komplexní. Řídící rovnice řeší pro každou fázi zvlášť, taktéž používá koncept fázových objemových zlomků α . Počet fází je omezen pouze velikostí dostupné paměti, výpočetního výkonu a kvalitou konvergence. Je možné jím řešit velmi komplexní aplikace, což si však vybírá daň v podobě problémů s konvergencí. Typickými aplikacemi jsou fluidní vrstvy, suspenze částic nebo probublávané kolony. Modelem je možno řešit i granulární tok (tok pevná látka – tekutina)⁶. Jako jediný umožňuje do výpočtu zahrnout lagrangeovské sledování pohybu částic, konkrétně pomocí modelu *Dense Discrete Phase Model* [21]. Mimo to umožňuje propojení s modelem VOF (jedná se o *Multi-Fluid VOF model*) [15].

Momentová rovnice pro danou fázi q (v našem případě s pro pevnou a l pro kapalnou fázi) má tvar [15], [22], [23], [24], [20]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) + \nabla(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q \vec{v}_q) = -\alpha_q \nabla p - \nabla \alpha_q \bar{r}_q + \alpha_q \rho_q \vec{g}_q + \vec{R} + \vec{F}_q \quad (2.12)$$

⁶Granulární model je rozšířením modelu Eulerian. Sekundární pevná fáze je modelována jako pseudo-kapalina, jejíž fyzikální vlastnosti jsou odvozeny z kinetické teorie granulárního toku [20], [15]

kde $\bar{\tau}_q$ je tenzor napětí a deformace, \vec{g} gravitační zrychlení, \vec{R} přenos hybnosti mezi fázemi a F_q představuje mezifázové síly působící na danou fázi.

Pro přenos hybnosti platí vztah

$$\vec{R} = \sum (\underbrace{K_{ls}(\vec{v}_l - \vec{v}_s)}_{\text{Mezifázový přenos hybnosti}} + \underbrace{\dot{m}_{ls}\vec{v}_{ls} - \dot{m}_{sl}\vec{v}_{sl}}_{\text{Rychlost změny hybnosti}}) \quad (2.13)$$

kde $\dot{m}_{ls}, \dot{m}_{sl}$ je přenos hmoty z fáze l do fáze s (a opačně) a K_{ls} je koeficient přenosu hybnosti mezi fázemi, který vyjadřuje vliv odporové síly. Je formulován na základě empirických vztahů, tudíž je příčinou většiny nejistot při výpočtu vícefázového proudění [24], [15]. ANSYS Fluent nabízí pouze několik modelů pro výpočet K_{ls} (přestože se jedná o nejčastěji používané), ostatní modely dostupné v literatuře je možné implementovat pomocí UDF (*User-defined functions*, „uživatelé definované funkce“) [24]. Jednotlivé modely se liší především metodou výpočtu odporové funkce C_D , v originále *drag function*, která se vyskytuje v rovnici pro K_{ls} a která je závislá na relativním Reynoldsově čísle Re [15].

Při použití granulárního modelu Eulerian je v rovnici 2.13 pro pevnou fázi ještě člen $p_s - \text{solid pressure}$ (tlak pevné fáze). Navíc je řešena doplňková transportní rovnice pro granulární teplotu [20].

Modely pro výpočet koeficientu přenosu hybnosti K_{ls} jsou, například:

- Syamlal-O'Brien
- Wen & Yu
- Gidaspow
- Huilin-Gidaspow
- Gibilaro
- Schiller-Naumann

Detailní popis jednotlivých modelů pro výpočet K_{ls} a odporové funkce C_D , včetně oblasti jejich použití, vizte v [15, str. 631–644], [21, str. 2664–2668], [24]. Zde jsou uvedeny pouze ilustrativně v návaznosti na jejich zmiňování v kapitole 4.

Člen F_q z rovnice 2.13, popisující mezifázové síly, je součtem příspěvků různých přenosů hmoty [25], [26], [15], [27]

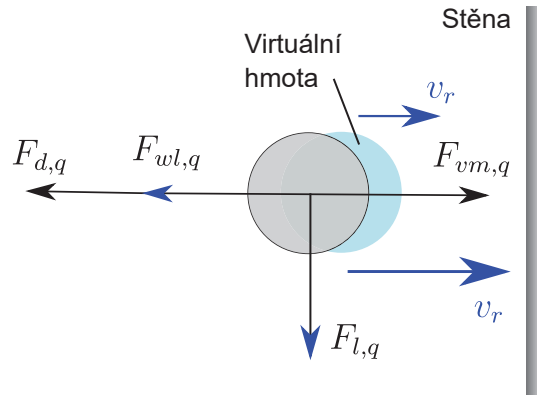
$$F = F_l + F_{wl} + F_{vm} + F_{td} \quad (2.14)$$

kde F_l je vztlaková síla (*lift force*),

F_{wl} „síla mazání stěny“ (*wall lubrication force*),

F_{vm} síla virtuální hmoty (*virtual mass force*) a

F_{td} je turbulentní disperzní síla, která sehrává roli turbulentní difuze.



Obr. 2.4: Působení mezifázových sil, vlastní zpracování podle [28], [29]

Mezifázové síly jsou zpravidla úměrné relativní rychlosti mezi fázemi \vec{v}_r , konstanta úměrnosti je pak obecnou funkcí objemových zlomků, fyzikálních vlastností kontinuální fáze a ve většině případů i samotné relativní rychlosti [30]. Formulace těchto sil jsou také založeny na empirických vztazích [15], [29], [25]. Stejně jako odporová síla se podílejí na celkovém přenosu hybnosti [30], ve srovnání s ní je však lze často zanedbat [31, 28, 30, 32, 33, 23, 34, 22].

2.2.3 Mixture model

Jedná se o zjednodušenou verzi modelu Eulerian. Řeší řídicí rovnice psané pro celkovou směs, rovnici objemových zlomků pro dispergované fáze a algebraické vztahy vyjadřující relativní rychlosti (pohybují-li se jednotlivé fáze vůči sobě různými rychlostmi). Hydrodynamické parametry jsou počítány z hmotnostně zprůměrovaných vlastností proudu. Model je schopen modelovat disperzní fázi jako granulární látku. Vhodnou aplikací jsou simulace sedimentací, cyklonových odlučovačů a dalších toků s nízkými koncentracemi malých částic [35], [15].

Model je schopen do výpočtu zahrnout i relativní rychlost mezi fázemi (z anglického *slip velocity*). Ve vztahu pro výpočet figuruje opět odporová funkce, pro jejíž modelování je v ANSYS Fluent defaultně nastaven model Schiller-Naumann [15].

Výběr modelu pro konkrétní aplikaci závisí na mnoha parametrech – na režimu toku (bublínkový tok, tok s volnou hladinou, tzv. slug flow aj.), požadovaných výstupech nebo na tom, jak detailní simulaci chceme mít. K volbě lze využít doporučení uvedená v teoretické příručce ANSYS Fluent – jak základní srovnání včetně příkladů konkrétních aplikací, tak detailní návod k výběru modelu, založený na vlivu Stokesova čísla St a zatížení pevnými částicemi β [15].

Mimo tato doporučení se bude výběr vhodného modelu pro tuto práci opírat o další fundované zdroje dostupné v odborné literatuře; jejich souhrn je uveden v kapitole 4.

2.3 Metody řešení proudění s pohyblivými částmi fluidní domény

K simulaci míchání je nutné řešit relativní pohyb mezi rotujícím míchadlem a nepohyblivou stěnou a narážkami. Fluidní doména se v takovém případě rozdělí na rotující a stacionární část. V případě míchacích zařízení se k výpočtu nejčastěji používá metoda MRF (z anglického *Multiple Reference Frame*) a metoda klouzavých sítí (anglicky *Sliding Mesh*) [15].

2.3.1 MRF

Metoda MRF je jednodušší z obou jmenovaných. Využívá více referenčních systémů (rámců) – relativní (pohyblivý) souřadnicový systém pro rotující část domény, stacionární pro nepohyblivou. Pohybové rovnice jsou při transformaci do pohyblivého souřadnicového systému rozšířeny o další členy – Coriolisovo a dostředivé zrychlení. Výsledky z obou částí domény jsou pak zkombinovány na jejich rozhraní pomocí transformace rychlostního pole z jednoho rámce do druhého. Jedná se o časově ustálené řešení (*Steady State*), neboť výpočetní síť je během simulace nepohyblivá. Z toho je také odvozeno další pojmenování metody – „metoda zamrznutého rotoru“, z anglického *Frozen Rotor Approach*, neboť během simulace se jinak pohyblivé části „zmrazí“ v dané poloze vůči stacionární doméně. Tento fakt je příčinou poměrně velkého fyzikálního zjednodušení, přesto je metoda vhodnou volbou pro aplikace, kde nedochází k velké interakci mezi rotující a stacionární částí a tok mezi těmito částmi není příliš komplikovaný. Výsledky z MRF jsou často použity jako výchozí stav pro složitější výpočet metodou klouzavých sítí [15].

2.3.2 Sliding Mesh

Je-li tok na rozhraní pohyblivé/stacionární domény komplikovaný, metoda MRF nemusí charakter proudu dostatečně postihnout. V těchto případech je vhodné použít náročnější metodu klouzavých sítí. Na rozdíl od MRF dochází k pohybu výpočetní sítě, simulace je tedy ze své podstaty transienční. Jednotlivé domény jsou vzájemně propojeny rozhraními (*Interfaces*), na nichž dochází k interpolaci hodnot z obou domén a tedy k jejich interakci. Aby tekutina mohla během simulace protékat z jedné domény do druhé, musí být zajištěno, aby během pohybu nedocházelo k překryvu

jedné výpočetní sítě přes druhou – stacionární/pohyblivá doména po sobě musí během pohybu „klouzat“. Jedná se o výpočetně poměrně náročné řešení, proto je třeba pečlivě zvážit, zda potřebujeme simulaci natolik detailní, aby bylo nutno místo ekonomické MRF použít metodu, která má až řádově vyšší nároky na výpočetní čas [15].

2.4 Turbulence

Turbulence is the most important unsolved problem of classical physics.

Richard P. Feynman

Celá kapitola včetně podkapitol čerpá z podrobného popisu turbulence a jejích modelů v teoretické příručce ANSYS Fluent [15], dále pak z [36]. Jiné použité zdroje budou uvedeny přímo u konkrétní pasáže.

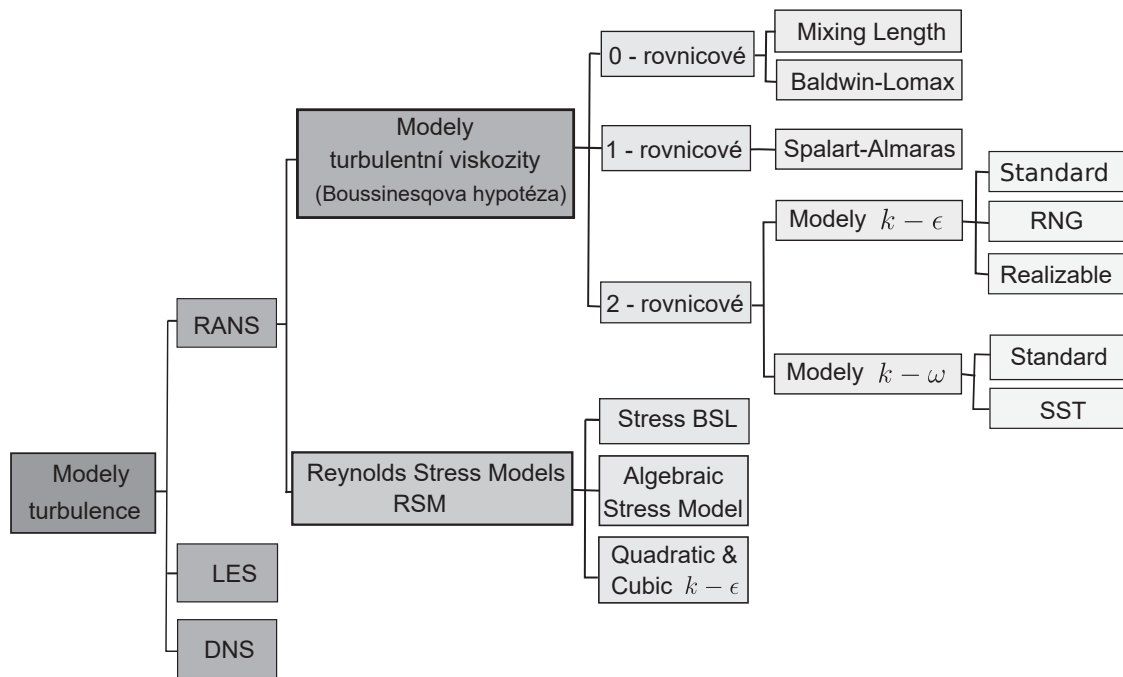
K turbulentnímu proudění dochází, je-li vliv setrvačných sil výrazně vyšší než vliv sil vazkých, konkrétně překročí-li Reynoldsovo podobnostní číslo Re svou kritickou hodnotu. V opačném případě je proudění laminární.

Turbulentní proudění je charakterizováno náhodným, chaotickým pohybem částic, který způsobuje, že se jednotlivé vrstvy proudění vzájemně prolínají a dochází ke vzniku vírů různých velikostí a intenzit. Turbulence je vždy disipativní proces – víry postupně přenášejí svou energii, zmenšují se, rozpadají, až vlivem vazkých sil nakonec disipují svou energii v teplo. Turbulentní proudění je, mimo jiné, charakteristické náhodnou fluktuací jednotlivých veličin – k popisu proudění je tedy potřeba přistupovat statisticky, nikoliv použít deterministický přístup.

Turbulence se vyskytuje téměř ve všech inženýrských aplikacích. K jejímu řešení v CFD slouží turbulentní modely, které tento fenomén řeší s různou přesností a výpočetní náročností. ANSYS Fluent nabízí mnoho modelů turbulence; vhodnost jejich použití se liší podle typu proudění a studovaného problému. V této práci bude uvedeno pouze základní rozdělení nabízených modelů, detailněji budou rozebrány pouze ty, které jsou vhodné k simulaci míchaných nádob.

2.4.1 Modely turbulence

Možné rozdělení přístupů k modelování turbulence je znázorněno na následujícím obrázku. Je potřeba zdůraznit, že se jedná pouze o ilustrační výběr. Hierarchie všech dostupných modelů turbulence by byla mnohem rozsáhlejší a detailnější; jejich podrobný popis lze nalézt např. v [15].



Obr. 2.5: Modely turbulence, vlastní zpracování na základě [37] a [38]

Turbulenci lze v ANSYS Fluent řešit v zásadě třemi způsoby:

- DNS – Direct Numerical Simulation
- LES – Large Eddy Simulation
- RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes

DNS – Direct Numerical Simulation

Jedná se o přímou numerickou metodu, která řeší Navier-Stokesovy rovnice přímo, bez použití modelu turbulence. Výpočet tedy není zjednodušený ani aproximovaný. Jedná se o velmi přesnou simulaci, jejíž výsledek je srovnatelný s reálným experimentem, množství získaných informací a možnost jejich analýzy experiment navíc dalece přesahuje. Metoda vyžaduje velmi jemnou síť – natolik jemnou, aby zachytila i ty nejmenší víry (tzv. Kolmogorovo mikroměřítko turbulence). Tento fakt se odráží na extrémně vysoké výpočetní náročnosti⁷. Z toho důvodu se DNS v běžné inženýrské praxi nepoužívá. Uplatnění nachází jen ve vědecké sféře, navíc pro fundamentální úlohy s laminárním prouděním, kde fyzikálně přesné výsledky získané metodou DNS jsou důležité pro další výzkum.

⁷Výpočetní nároky pro metodu DNS jsou úměrné třetí mocnině Reynoldsova čísla [15]

LES – Large Eddy Simulation

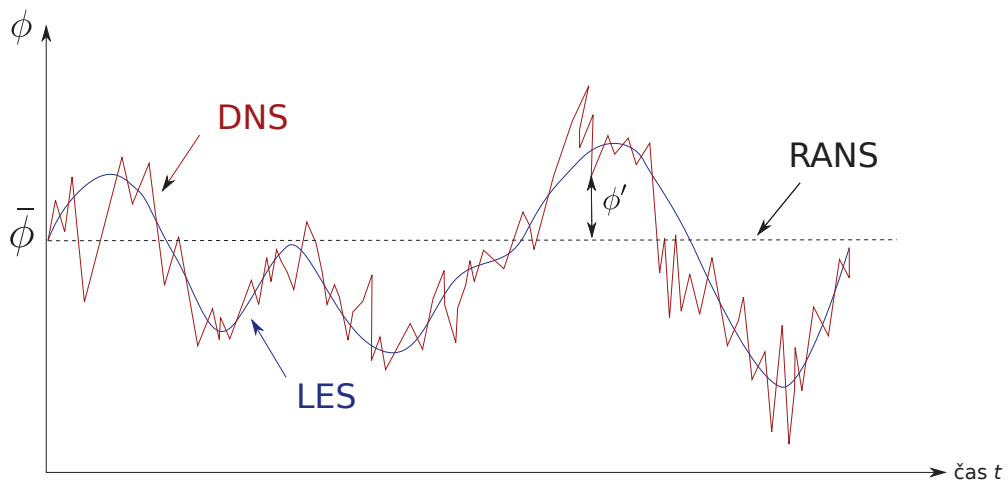
Large Eddy Simulation, v překladu „simulace velkých vírů“, částečně odstraňuje největší nevýhodu DNS, jíž je přímý výpočet malých vírů a tedy nároky na velmi jemnou síť. Hybnost, hmota, energie a ostatní veličiny jsou přenášeny hlavně velkými víry. Z toho důvodu jsou velké víry zachyceny výpočetní sítí a počítány přímo, zatímco pro zbylé je turbulence modelována. Díky tomu je možné použít hrubší síť a větší časový krok než u metody DNS. Hlavní nevýhodou je nutnost velmi jemné sítě v oblasti stěn, neboť i velké víry co do turbulence jsou geometricky velmi malé.

RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes

Metody RANS jsou v inženýrské praxi zdaleka nejpoužívanější. Veličiny proudění jsou časově zprůměrované, což umožňuje modelovat celé spektrum turbulentních vírů s použitím rozumného rozlišení výpočetní sítě. Na Navier-Stokesovy rovnice je použito **Reynoldsovo středování**

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (2.15)$$

kde se okamžitá hodnota veličiny proudění ϕ (skalární i vektorové) rozdělí na složku časově středovanou $\bar{\phi}$ a flukтуаční ϕ' . To je, společně s grafickým znázorněním rozdílů DNS, LES a RANS, znázorněno na následujícím obrázku.



Obr. 2.6: Časové středování veličiny ϕ proudění, vlastní zpracování na základě [14]

Časově středované formy rovnice kontinuity a Navier-Stokesovy rovnice, nazývané též Reynoldsova rovnice, jsou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i) = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{\rho v'_i v'_j}) \quad (2.17)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta. Obě rovnice jsou, na rozdíl od rovnic zmíněných v kapitole 2.1, psány v Einsteinově sumační symbolice. V rovnici taktéž chybí člen objemových sil. Červeně vyznačená část rovnice 2.17 představuje **tenzor Reynoldsových napětí**, dodatečný člen, jehož vznik souvisí s fluktuacemi rychlostí při turbulentním proudění. Právě tento člen je důvodem modelování turbulence pomocí RANS modelů.

Jednou z možností řešení Reynoldsových napětí je **Boussinesquova hypotéza**, podle níž turbulentní napětí souvisí s gradienty středních rychlostí stejným způsobem, jako viskózní napětí s gradienty celkových rychlostí. Platí

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\mu_t \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} + \bar{\rho} k_t \right) \quad k_t = \frac{\overline{v'_i v'_i}}{2} \quad (2.18)$$

kde μ_t je turbulentní viskozita, vlastnost proudění, nikoliv kapaliny, a k_t je kinetická energie turbulence. Dle rovnice 2.18 jsou Reynoldsova napětí úměrná rychlosti disipace snižené o vířivou turbulentní kinetickou energii [37]. Boussinesquova hypotéza je aplikována v turbulentních modelech Spalart-Almaras, $k - \varepsilon$ a $k - \omega$. Její hlavní nevýhodou je předpoklad turbulentní viskozity μ_t jako skalární izotropní veličiny, což z fyzikálního hlediska neodpovídá vždy skutečnosti – jedná se pouze o aproximaci. Tento fakt zapříčiňuje nevhodnost Boussinesquovy hypotézy pro popis anizotropních toků, typicky při proudění přes zakřivené plochy nebo v potrubí s vedlejším pohybem [37]. I přes tento nedostatek podává metoda kvalitní výsledky pro širokou škálu inženýrských aplikací.

Další možností je výpočetně náročnější model **RSM – Reynolds Stress Model**. I zde jsou, stejně jako u modelů založených na Boussinesquově hypotéze, potřeba dodatečné transportní rovnice. Reynoldsova napětí jsou modelována způsobem, kdy jsou transportní rovnice řešeny pro každou složku Reynoldsova tenzoru napětí zvlášť, celkově je pro 2D model potřeba 5 transportních rovnic, pro 3D model 7 rovnic. Přesné formulace pro modelování jednotlivých členů lze nalézt v [15]. Metoda je vhodná pro proudění s výraznou anizotropií turbulence.

2.4.2 Dvourovnicové $k - \varepsilon$ modely turbulence

Modely $k - \varepsilon$ patří k nejpoužívanějším v inženýrské praxi. K výpočtu turbulentní viskozity μ_t používají Boussinesquovu hypotézu. Řeší dvě dodatečné transportní rovnice – pro k (kinetickou energii turbulence) a ε (disipaci kinetické energie). Mezi dvourovnicové $k - \varepsilon$ modely turbulence patří modely:

- Standard
- RNG
- Realizable

Liší se především metodou výpočtu turbulentní viskozity μ_t (matematickým vztahem a použitými konstantami), Prandtlovým číslem Pr řídícím difuzi k a ε a v podmínkách vzniku a zániku v rovnicích pro ε .

Standard $k - \varepsilon$

Model prezentovaný už v roce 1972 (LAUNDER a SPALDING). Předpokládá, že proudění je plně turbulentní a účinky molekulární viskozity jsou zanedbatelné.

RNG $k - \varepsilon$

Jedna z modifikací standardního modelu $k - \varepsilon$. Model byl odvozen statistickou „metodou renormalizačních grup“, odtud i název modelu (RNG – *Renormalization Group Theory*). Standardní model vylepšuje o modifikaci rovnice pro ε , Prandtlovo číslo není definováno konstantní hodnotou, ale analytickou rovnicí a díky formulaci efektivní viskozity je možné model aplikovat i na proudění s nízkými Re . Díky těmto změnám je možné použít model na širší skupinu toků.

Realizable $k - \varepsilon$

Model prezentovaný v roce 1995 (SHIH et al.). „Realizable“ značí, že model splňuje jistá omezení týkající se Reynoldsových napětí a z fyzikálního hlediska tak více odpovídá skutečnosti. Od standardního modelu se liší dvěma důležitými modifikacemi – používá novou formulaci turbulentní viskozity μ_t a novou transportní rovnici pro ε . Jedná se o nejnovější model ze skupiny $k - \varepsilon$ modelů, který zároveň poskytuje nejlepší výkon v řadě různých aplikací. Jisté limitace byly pozorovány při použití v situacích, kde je výpočtová doména kombinací stacionární a rotační zóny. Tento nedostatek je třeba brát v potaz například při použití MRF (Multiple Reference Frame).

2.4.3 Dvourovnicové $k - \omega$ modely turbulence

Modely opět založené na aplikaci Boussinesqovy hypotézy. Dodatečné transportní rovnice řeší pro k (kinetickou energii turbulence) a ω (specifickou disipaci energie, veličinu, která určuje měřítko turbulence). Modely $k - \omega$ dokáží řešit proudění v mezní vrstvě, její odtržení a záporný tlakový spád lépe než modely $k - \varepsilon$.

Standard $k - \omega$

Standardní $k - \omega$ model dostupný ve Fluentu je založen na $k - \omega$ modelu, který v roce 1998 navrhl WILCOX. Modifikuje jej pro proudění s nízkým Re, stlačitelné a smykové proudění.

SST $k - \omega$

Shear Stress Transport (SST) model, vylepšená modifikace standardního $k - \omega$ modelu, kombinuje výhody $k - \varepsilon$ a $k - \omega$ modelů turbulence. V blízkosti stěny používá robustní a přesnou formulaci $k - \omega$, zatímco ve volném proudu aplikuje $k - \varepsilon$, který lépe funguje v oblastech dostatečně vzdálených od stěny.

2.4.4 Modely turbulence u dvojfázového proudění

Výše uvedené modely turbulence se týkaly jednofázového proudění. Turbulence je velmi komplexní problematika, která do dnešní doby není matematicky úplně vyřešena. Turbulence vícefázového proudění je ještě složitější a k dosažení přesné matematické formulace má mnohem dále.

Turbulence vícefázového proudění je v ANSYS Fluent řešena modifikací modelů uvedených v kapitolách 2.4.2 a 2.4.3. V rámci modelů $k - \varepsilon$ a $k - \omega$ nabízí tři možnosti:

- Mixture model
- Dispersed model
- Turbulentní model pro každou fázi

V rámci modelu RSM nabízí Fluent dvě možnosti:

- Mixture model
- Dispersed model

Modely jsou dále uvedeny pouze s velmi zkráceným popisem, mnohem fundovanější a podrobnější charakteristiku lze nalézt v [15]. Modifikace pro vícefázová proudění jsou u všech zmíněných modelů (3 pro $k - \varepsilon$, 2 pro $k - \omega$) podobná, proto nebudou rozebrána zvlášť, ale obecně⁸.

Vícefázové modely turbulence založené na $k - \varepsilon$ a $k - \omega$

Mixture model je defaultní model nastavený v ANSYS Fluent. Je vhodný pro proudění s jasně definovaným rozhraním fází, stratifikované proudění a jsou-li hustoty přítomných fází přibližně stejné.

⁸Stejně je tomu i v teoretické příručce ANSYS Fluent (jež je zdrojem tohoto výtahu), která modifikace formulací a rovnic demonstruje pouze na modelu $k - \varepsilon$ Standard.

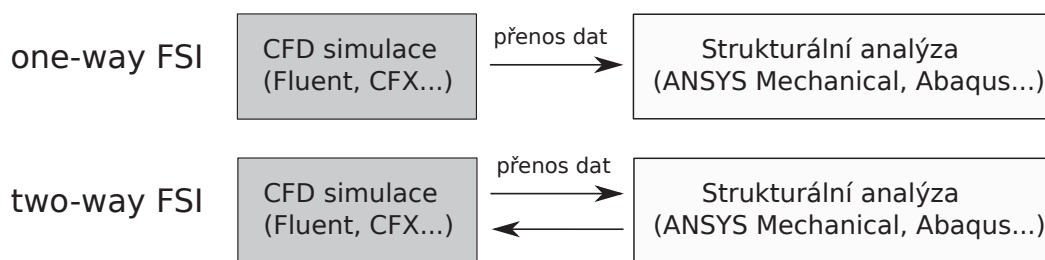
Dispersed model je vhodné použít, jsou-li koncentrace disperzní fáze malé nebo při použití granulárního modelu. Transportní rovnice je nejdříve řešena pro spojitou fázi, flukтуаční veličiny disperzní fáze jsou pak odhadnuty pomocí Tchenovy teorie. Disperze je vyjádřena fázově váženým průměrováním.

Turbulentní model pro každou fázi je vhodné použít především tam, kde dochází k výraznému přenosu turbulence mezi fázemi. Řeší transportní rovnice pro k a ε , jak název napovídá, pro každou fázi zvlášť. Z toho důvodu má vyšší nároky na výpočetní výkon než zbylé modely.

3 Interakce pevných těles s tekutinou

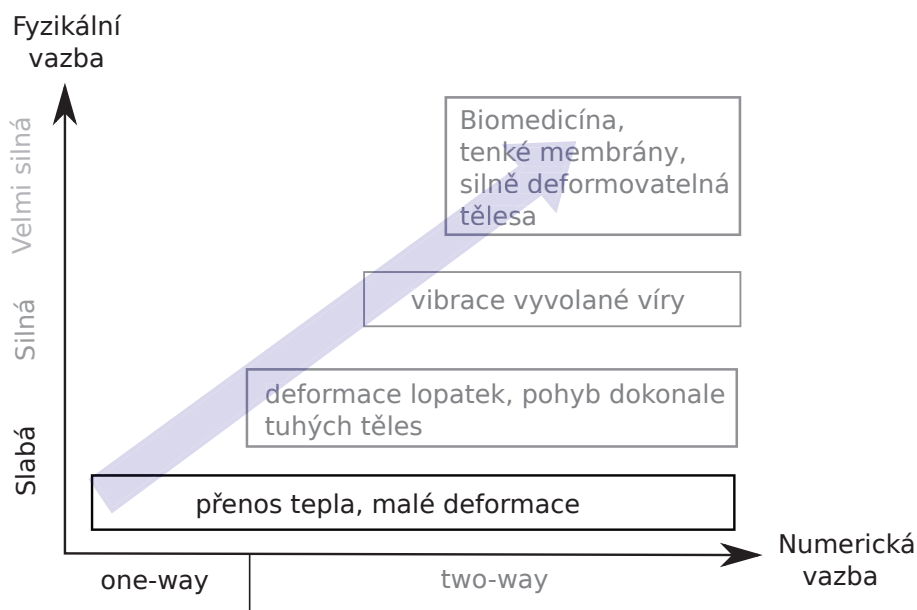
Hydrodynamika vícefázového proudění, v případě nádoby na propírání vaječných skořápek tok pevných částic (skořápek), vody a vzduchu (při modelování hladiny), je podstatná pro správný návrh, konstrukci a funkci míchacích zařízení. Vzájemná interakce částic mezi sebou, se stěnou nádoby a míchadlem ovlivňuje jak děje v nádobách probíhající (reakce, přenos hmoty, tepla aj.), tak samotné zařízení, kdy silové působení vyvolané proudící kapalinou může vyvolat vibrace zařízení nebo jeho deformaci.

FSI (Fluid-Structure Interaction) simulace je metoda, jak predikovat účinky proudového pole na napětí a deformace pevného tělesa. FSI simulaci lze kategorizovat na základě fyzikální vazby mezi proudovým polem a pevným tělesem. Silový účinek proudu způsobuje posunutí (deformaci) pevného tělesa. Pokud je tato deformace zanedbatelná a neovlivňuje proudové pole, tedy fyzikální vazba mezi řešenými oblastmi je slabá, hovoříme o **one-way FSI simulaci** – výsledky výpočtu proudění jsou ve formě vnějšího zatížení importovány do strukturálního modelu, kde jsou vypočtena napětí a deformace pevného tělesa. V opačném případě, ovlivňuje-li posunutí pevného tělesa proudové pole, mluvíme o **two-way FSI simulaci**. Data ze simulace proudění a strukturální analýzy jsou mezi sebou neustále přenášena, dokud není dosaženo požadované konvergence. Jedná se tedy o výpočetně mnohem náročnější variantu. Celou FSI simulaci je možno řešit kompletně ve Fluentu (interní simulace), nebo výsledky ze CFD simulace importovat do externího softwaru na výpočet strukturální analýzy (ANSYS Mechanical, Abaqus aj.) [15], [39].



Obr. 3.1: Zjednodušené blokové schéma externí one-way a two-way FSI simulace, vlastní zpracování podle [39]

Fyzikální vazbě mezi řešenými oblastmi je úměrná numerická vazba mezi jednotlivými řešiči, tzn. čím více spolu proudové pole a pevné těleso interagují, tím náročnější je úloha na výpočet, vizte obrázek níže.



Obr. 3.2: Grafické znázornění použití one-way a two-way FSI simulace, převzato z [40], upraveno

Vzhledem k charakteru řešeného problému a k metodám použitým v referencích (vizte kapitolu 4.) byla pro účely práce zvolena jednocestná FSI simulace. Proudění bylo řešeno pomocí ANSYS Fluent, silové účinky proudového pole se v podobě okrajových podmínek strukturální analýzy importovaly do ANSYS Mechanical.

3.1 Strukturální výpočty s využitím MKP

Strukturální analýza obecně zahrnuje hodnocení konstrukce z pohledu statiky, dynamiky, pružnosti, pevnosti nebo deformační stability. V dané oblasti je nutné řešit systém obecných rovnic pružnosti o 15 neznámých proměnných

- Posuvy u, v, w
- Přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- Napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

Těmito rovnicemi jsou

- Rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x &= 0 & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} + o_z &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y &= 0 & & \end{aligned} \quad (3.1)$$

- Rovnice geometrické

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Konstitutivní vztahy

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ jsou složky vnější objemové síly, E je Youngův modul pružnosti (modul pružnosti v tahu), μ Poissonovo číslo a G modul pružnosti ve smyku. Řešitelnost systému rovnic je dosažena předepsáním nezbytného počtu okrajových podmínek [41].

Analytické řešení problémů obecné pružnosti a pevnosti je známo pouze u základních, jednoduchých úloh, které jsou většinou definované nekomplikovanou geometrií. Z toho důvodu se, stejně jako u CFD, používají numerické metody, z nichž v oblasti výpočtů napětí a deformací pevných těles převládá **metoda konečných prvků (MKP)** v deformační variantě, kdy hledanými neznámými jsou složky posuvů (resp. natočení) [41].

Matematicky je deformační varianta MKP formulována pomocí **Lagrangeova variačního principu**, který hledá stacionární (a zároveň minimální) hodnotu celkové potenciální energie tělesa

$$\Pi = W - P \quad (3.4)$$

kde v rovnicích pro \mathbf{W} (energii napjatosti tělesa) a \mathbf{P} (potenciál vnějšího zatížení) se vyskytují zmíněné neznámé. Π je obecně funkcí posuvů u, v a w . Spojité řešení posuvů se v MKP aproximuje lineární kombinací tzv. **bázových funkcí** – známých, předem definovaných funkcí $\tilde{u}_i, \tilde{v}_j, \tilde{w}_k$. Metoda konečných prvků tedy vede na řešení soustavy algebraických rovnic - lineárních pro základní, jednoduché úlohy, obecně však nelineárních [41].

Strukturální analýza obecně zahrnuje hodnocení konstrukce z pohledu statiky, dynamiky, pružnosti, pevnosti nebo deformační stability, přičemž mezi základní analýzy z balíčku softwaru ANSYS patří:

- Statická analýza
- Transientní analýza

- Harmonická analýza
- Modální analýza

3.1.1 Statická analýza

Statickou, tedy časově nezávislou simulaci lze využít, je-li možné zanedbat vliv tlumení a setrvačné účinky. Odvozením, které lze najít v odborné literatuře, např. [41], získáme základní rovnici MKP, potažmo rovnici pro výpočet neznámých posuvů, ve tvaru

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (3.5)$$

kde \mathbf{F} je celková matice zatížení, \mathbf{K} globální matice tuhosti, podávající informace o fyzikálních vlastnostech zkoumané geometrie, a \mathbf{U} matice deformačních parametrů. Řádky maticové soustavy 3.5 jsou rovnice rovnováhy v uzlových bodech výpočetní sítě. Z výsledných posuvů jednotlivých uzlů lze pak vypočíst posuv libovolného bodu řešené oblasti, stejně jako napětí a deformaci [41].

3.2 Dynamická analýza

V dynamické úloze hraje roli závislost na čase. Tuto závislost popisuje obecná pohybová rovnice druhého řádu ve tvaru

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.6)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{C} matice tlumení, \mathbf{K} matice tuhosti, \mathbf{U} matice posuvů (časové derivace pak rychlostí a zrychlení) a \mathbf{F} matice externího zatížení.

Transientní strukturální analýza, popsána obecnou rovnicí 3.6, je metoda k určení odezvy tělesa na časově proměnné zatížení (s různou frekvencí a amplitudou). Jedná se o nejkompaktnější úlohu z řad strukturálních výpočtů [42].

Speciálním případem transientní úlohy je *harmonická analýza*, která slouží k vyšetření odezvy tělesa na harmonické, tj. sinusové zatížení se známou frekvencí.

Zjistit vibrační charakteristiky tělesa, tj. vlastní frekvence a módy, umožňuje *modální analýza*. Jedná se o netlumenou dynamickou úlohu bez zatížení, obecná pohybová rovnice se tedy redukuje na tvar

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.7)$$

Volné kmitání lineárního systému je popsáno goniometrickou funkcí. Odvozením, které lze dohledat v odborné literatuře (např. [42, str. 779]), se pro popis volného kmitání získá rovnice

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.8)$$

Jejím (netriviálním) řešením jsou pak vlastní frekvence $f = \omega/2\pi$ a příslušné módy, vypočtené z posuvů \mathbf{U} .

4 Rešerše dostupné literatury

Existuje mnoho prací zabývajících se řešením modelování dvoufázových toků v míchacích nádobách nebo reaktorech a mechanickým účinkem silového pole těchto směsí na jednotlivé části zařízení. Následující kapitoly jsou rešerší vybraných prací a slouží k sumarizaci nejčastěji používaných metod a postupů, které se při CFD modelování těchto jevů využívají.

4.1 Vícefázové proudění v míchacích nádobách

Není-li uvedeno jinak, jsou všechny práce řešeny pomocí různých verzí ANSYS Fluent. V následujících tabulkách je uveden stručný popis simulované aplikace, stěžejní nastavení výpočetního modelu, charakteristika disperzních částic a případně další informace důležité pro výpočet.

Jednotlivé práce se dají rozdělit do dvou kategorií. První vyhodnocuje vliv geometrie míchací nádoby a provozních podmínek na parametry proudu, jako jsou kvalita suspenze, výška oblaku částic („cloud height“) nebo predikce mrtvých zón, v nichž se částice usazují. Druhá kategorie je zaměřena na validaci CFD modelu, tj. porovnání různých metod výpočtu, nastavení, vlivů použitých koeficientů apod.

Všichni autoři používají k výpočtu vícefázového proudění dvoutekutinové modely („two fluid models“)¹, kontinuum tedy popisují přístupem Euler-Euler. Pouze v [18] navíc v rámci vedlejší simulace pomocí modelu DPM, jenž využívá popisu Euler-Lagrange, vyhodnocují vliv proudového pole na trajektorie jednotlivých částic různých velikostí a hustot s cílem určit, jak se částice pohybují v nádobě s a bez nárážek.

Naprostá většina počítá s modelem Eulerian, v [32] jej navíc srovnávají s modelem Eulerian s rozšířením pro kinetickou teorii granulárního toku². Zjistili, že oba modely podávají srovnatelné výsledky při nízkých koncentracích pevné fáze (ca do 10 %). Formulaci pro granulární tok používají pro simulace husté suspenze také v [23]. Na hladinu je kladen důraz pouze v [18], kde ji simulují modelem VOF.

Pohyb míchadla je ve většině prací řešen jak steady-state, tak transientní metodou MRF. Pouze [23] a [33] jej zachytili transientní simulací metodou klouzavých sítí.

Modely turbulence úzce souvisí s konkrétními podmínkami simulace a jejich použití tedy nelze obecně generalizovat. Všechny studie řeší turbulenci dvourovnicovým modelem $k - \varepsilon$. Velká část prací volí jako dobrý poměr mezi přesností simulace a

¹Tento název se běžně používá pro skupiny modelů Euler-Euler

²Jediný rozdíl mezi těmito modely je ten, že model Eulerian s rozšířením pro granulární tok v momentových rovnicích zohledňuje interakce mezi částicemi pevné fáze [32]

nároky na výpočetní výkon model Standard s rozšířením Mixture. Dle [33] vykazuje standardní $k - \varepsilon$ model turbulence špatnou konvergenci v kombinaci s použitím klouzavých sítí, tento nedostatek odstraňuje varianta RNG. RANS modely jsou nejčastěji využívanou metodou modelování turbulence. Pracují však s předpokladem izotropie, v modelování anizotropní turbulence tedy mohou vykazovat jisté limity. Tento problém může vyřešit výpočetně náročnější model RSM, který počítá Reynoldsova napětí přímo. Wadnerkar et al. [32] proto srovnávali varianty dostupných dvourovnicových modelů s modelem RSM při výpočtu míchání suspenzí s různou koncentrací pevné fáze. V kombinaci s granulárním modelem Eulerian použili více-fázové modely $k - \varepsilon$ Mixture, Dispersed a Per phase. Varianta Dispersed odpovídala výsledkům experimentu pouze při nižších koncentracích pevné fáze (do 10 % hm.). Varianty Mixture a Per phase podávaly srovnatelné výsledky, které vykazovaly nižší odchylky oproti modelu Dispersed. Zanedbatelný rozdíl v modelech Mixture a Per phase referuje i [43]. $k - \varepsilon$ RNG při výpočtu turbulence eliminuje víry malých měřítek, což vede k nerealistickým hodnotám turbulence a turbulentní disipace v oblastech s vysokým Re , typicky kolem míchadla. Výrazné zlepšení nevykazovaly ani modely $k - \varepsilon$ Standard a Realizable. Lokální koncentrace pevné fáze špatně predikovaly i modely $k - \omega$ Standard a SST. Požadované přesnosti bylo dosaženo až s výpočetně náročným modelem RSM.

Do přenosu hybnosti je ve většině případů zahrnut pouze vliv odporové síly, ostatní mezifázové síly jsou zanedbány. Koeficient přenosu hybnosti je počítán modely Gidaspow [23], [20], Wen-Yu [34], [31], případně je použita modifikace Brucato et al. [43], [44]. Wadnerkar et al. [32] zkoumali vliv několika formulací pro modelování odporové síly³. Modifikovaná korekce podle Brucato et al. se ukázala být vhodná při vyšších koncentracích (nad 10,6 % hm.) a pro částice do 600 μm , při těchto koncentracích podával uspokojujivé výsledky i model Huilin-Gidaspow. Nejmenší odchylky od experimentu při všech koncentracích bylo dosaženo použitím modelu Syamlal O'Brien.

Příspěvek od turbulentní disperzní síly je významný pouze tehdy, je-li velikost turbulentních vírů větší než velikost dispergovaných částic [43]. Turbulentní disperzní sílu do výpočtu zahrnuli pomocí Simoninova modelu v [43], [44] a [20]. Vliv modelů podle de Bertodano et al., Simonin a Viollet a Burns et al., dostupných v software ANSYS Fluent [15], studovali Wadnerkar et al. [32]. Dospěli k závěru, že všechny jsou vhodné k modelování turbulentní disperze v míchacích nádobách, neboť při jejich zahrnutí do výpočtu došlo k lepší predikci distribuce pevných částic.

Proudění v blízkosti stěny bylo ve všech případech modelováno pomocí stěnových funkcí.

³Přesnou formulaci jednotlivých modelů viz [32, str. 22]

CFD

Ref.	Cíl	Charakteristika toku	Metoda výpočtu	Další informace
Chi et al. (2019) [33]	Vliv geometrie zařízení na charakteristiky toku při mechanické separaci podskořápkové blány od skořápků ^a .	Pevné částice $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ $d = 0,5\text{--}1,5 \text{ mm}$ $\alpha_{S/L} = 5 \%$ $\omega = 200 \text{ ot/min}$	Eulerian, Sliding Mesh, RNG k- ϵ , stěnové funkce, stěny <i>no slip</i> , hladina <i>free slip</i>	Výchozí stav v klidu s usazenými částicemi na dně.
Kasat et al. (2008) [43]	CFD model míchaného reaktoru s Rushtonovým oběžným kolem k pochopení interakcí mezi kvapilou suspenze a procesem míchání.	Pevné částice $\rho = 2470 \text{ kg/m}^3$ $d = 264 \mu\text{m}$ $\phi_s = 10 \%$ obj. $\omega = 2\text{--}40 \text{ ot/s}$	Model Eulerian, Standard k- ϵ Mixture model, MRF, steady-state simulace, turbulentní disperzní síla (Simoninův model), odporová síla (modifikace podle Brucato et al.)	Výchozí stav s tekutinou v klidu s homogenní distribucí částic.
Zhao et al. (2014) [23]	Míchání husté suspenze Al(OH) ₃ pomocí vylepšeného míchadla Intermig ^b .	Pevné částice $\rho = 2477 \text{ kg/m}^3$ $d = 176 \mu\text{m}$ $\alpha_s = 32,3 \%$ (800 g/L) $\omega = 250 \text{ ot/min}$	Model Eulerian (granulární), Standard k- ϵ Mixture model, Sliding Mesh, odporová síla (model Gidaspow), transientní simulace, standardní stěnové funkce	Simulace vyhodnocena pomocí rychlostního pole, distribuce pevných částic, výkonového čísla a tzv. <i>cloud height</i> .
Gohel et al. (2012) [20]	CFD model míchaného reaktoru k predikci výšky oblaku dispergované fáze – (<i>cloud height</i>).	Pevné částice $\rho = 2630 \text{ kg/m}^3$ $d = 180 \mu\text{m}$ $\alpha_s = 4$ a 6.2% obj. $\omega = 150\text{--}450 \text{ ot/min}$	Model Eulerian (granulární), k- ϵ Realizable, MRF, steady-state simulace, turbulentní disperzní síla (formulace podle Deutsch a Simonin), odporová síla (model Gidaspow)	Počáteční stav s tekutinou v klidu a s homogenní distribuovanými pevnými částicemi.
Qiuxiang et al. (2018) [34]	Vliv nastavení třílopatkového míchadla na míchání suspenze voda–hlinitík.	Pevné částice $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$ $d = 75 \mu\text{m}$ $\alpha_s = 10 \%$ obj. $\omega = 360 \text{ ot/min}$	Model Eulerian, Standard k- ϵ Mixture model, MRF, standardní stěnové funkce, odporová síla (model Wen-Yu)	

^aPoměr pevné a kapalné fáze, z anglického „solid-to-liquid ratio“.^bZde nebyl software uveden.

CFD				
Ref.	C11	Charakteristika toku	Metoda výpočtu	Další informace
Pukkella et al. (2019) [18]	Vývoj nového typu narážek – <i>interface baffles</i> – k optimálnému procesu míchání a zabránění vzniku středového víru.	Pevné částice $\rho=2650 \text{ kg/m}^3$ $d=22, 60, 87.5, 125 \mu\text{m}$ $S/L < 10 \%$ obj. $\omega = 52 \text{ a } 152 \text{ ot/min}$	Model VOF k řešení hladiny, pohyb jednotlivých částic sledován modelem DPM, turbulentní disperze částic řešena pomocí Random Walk method ^a , MRF, $k - \varepsilon$ Dispersed, standardní stěnové funkce, transientní simulace, no slip na stěny, hladina zero shear	Model DPM byl použit v další simulaci, kdy čtyři částice (22, 60, 87.5, 125 μm) byly nastříkány do míchací nádoby v různé vzdálenosti od dna a byla hodnocena jejich trajektorie v nádobě s a bez narážek.
Gu et al. (2017) [31]	Simulace míchací nádoby se třemi druhy míchadla. Byl studován vliv typu míchadel, otáček, umístění v nádobě a vliv velikosti částic na úroveň homogenity směsi.	Pevné částice $\rho=2470 \text{ kg/m}^3$ $d=80, 120, 160 \mu\text{m}$ $S/L = 5 \%$ obj.	Model Eulerian, MRF, Standard $k - \varepsilon$ Mixture, odporová síla (model Wen & Yu)	Počátečním stavem simulace byla homogenní disperze částic v celé doméně.
Khopkar et al. (2006) [44]	Vliv různých modelů odporové síly (normální a modifikovaná korelace podle Brucato et al.) a turbulence volného proudu na pohyb částic při míchání hustých suspenzí.	Pevné částice $\rho=2470 \text{ a } 2480 \text{ kg/m}^3$ $d=135, 264, 390 \text{ a } 355 \mu\text{m}$ $S/L = 5, 10, 15 \text{ a } 20 \%$ obj. $\omega = < 30 \text{ ot/s}$	Model Eulerian, MRF, Standard $k - \varepsilon$ Mixture model, odporová síla (korelace podle Brucato et al.), turbulentní disperzní síla (Simoninův model)	Modelována pouze polovina a čtvrtina míchací nádoby. Reynoldsovo číslo v rozmezí 0,54–69,4.
Wadnerkar et al. (2016) [32]	CFD simulace míchání suspenzí různých hustot. Srovnání několika přístupů – Eulerian klasického a pro granulární tok, turbulentních modelů $k - \varepsilon$, $k - \omega$ a RSM. Studie vlivu několika modelů pro mezifázovou odporovou sílu a turbulentní disperzní sílu.	Pevné částice $\rho=2585 \text{ kg/m}^3$ $d=3000 \mu\text{m}$ $S/L < 5, 2, 10, 6, 20 \text{ a } 40 \%$ hm. $\omega = 360\text{--}589,8 \text{ ot/min}$	Model Eulerian a Eulerian s rozšířením pro granulární tok, MRF, srovnání $k - \varepsilon$, $k - \omega$ a RSM modelů turbulence, 3 modely turbulentní disperzní síly (de Bertodano et al., Simonin & Viollet a Burns et al.), několik modelů pro odporovou sílu (vizte [32]), pseudo-transientní simulace	Simulována pouze polovina fluidní domény. Vychozí stav simulace s uniformní distribucí pevné fáze v nádobě.

^aJedna z možností, jak predikovat disperzi částic kvůli turbulenci. Jedná se o stochastickou metodu, která zahrnuje vliv fluktuací turbulentní rychlosti na trajektorii částic [15]

4.2 FSI analýza

Studii zabývající se FSI simulací míchadel v míchacích nádobách nebo reaktorech bylo nalezeno pouze velmi omezené množství. Tyto práce se navíc velmi často zabývají vývojem vlastního kódu, který významně snižuje nároky na výpočetní výkon ve srovnání s použitím komerčních nástrojů jako ANSYS Fluent a ANSYS Mechanical [45], [46], [47].

Vliv proudového pole na deformaci hřídele a míchadla v míchací nádobě zkoumali Hoseini et al. [48] a Liang et al. [49]. Proudění v nádobě bylo v obou pracích řešeno podobně, jak je popsáno v kapitole 4.1 – včetně $k-\varepsilon$ modelu turbulence a transientní simulace pomocí *sliding mesh*. V obou případech využili dvoucestné (two-way) FSI analýzy.

Hoseini et al. [48] navrhovali geometrické úpravy Rushtonovy turbíny – klasické a s výřezy tvaru U a V – k minimalizaci mechanického napětí na lopatkách a snížení výkonového čísla, tedy i spotřeby energie. K optimalizaci využili dva přístupy – MOGA (*Multi-Objective Optimization Method*) v kombinaci s přímou optimalizací (*Direct Optimization*) a metodou odezvových ploch (*Response Surface Optimization*). Nezabývali se chováním systému v kvazi ustáleném stavu (tedy možným periodickým chováním zařízení, vibracemi aj.), naopak studovali krátký časový interval po rozběhu, kdy moment i rozložení tlaku na lopatkách dosahují nejvyšších hodnot. Výřezy tvaru U oproti klasické Rushtonově turbíně snižují energetické nároky o 48 %, tvaru V o 21 %. Díky použitým optimalizačním metodám se podařilo navrhnout takovou geometrii lopatek s V výřezy, která zajišťuje optimum mezi energetickými nároky a napětím na lopatkách.

Liang et al. [49] se naopak zaměřili na dynamické chování systému. Transientní simulaci s využitím *sliding mesh* inicializovali steady-state řešením pomocí MRF. Simulaci validovali porovnáním výkonového čísla a ohybového momentu hřídele s experimentem. Cílem simulace bylo vyhodnotit ohybový moment hřídele a zatížení působící na míchadlo – radiální/axiální síly a ohybový moment.

Jednocestnou (one-way) FSI analýzou odstředivého čerpadla, rotujícího rychlostí 1480 ot/s, se zabývali Zhang et al. [50]. Turbulenci řešili modelem $k-\omega$ SST, výpočetní síť vytvořili pro $y^+ = 50$ (necílili tedy na hodnoty ~ 1 , které se v dostupné literatuře často uvádějí jako ideální pro tento model turbulence). Taktéž využili pro inicializaci proudového a tlakového pole steady-state řešení metodou MRF. Transientní chování simulovali metodou klouzavých sítí s časovým krokem odpovídajícím otočení o 1° , celková doba simulace byla 6 otáček. Před samotnou FSI analýzou byl pomocí modální analýzy vyloučen vliv resonance – tedy že vlastní frekvence rotoru jsou blízké frekvenci otáčení (nebo vyšším harmonickým). Díky symetrii míchadla vstupovala do výpočtu dynamiky tělesa pouze hřídel, silami ve třech směrech, vy-

počtenými pomocí CFD, byl zatížen pouze hmotný bod charakterizující míchadlo. Odezvu na externí zatížení vyvolané tekutinou řešili transientní dynamickou analýzou, jejíž stabilitu zajistili vhodnou definicí proporcionálního tlumení, přičemž toto zatížení bylo jedinou uvažovanou budící silou – neuvažovali tedy neváhu míchadla, asymetrii rotoru, elektromotor aj., jež mohou být dalším zdrojem vibrací. Do výpočtu navíc zahrnuli Coriolisovu sílu a charakteristiku ložisek.

FSI simulací se často využívá v aerodynamice. V [51], [52] a [53] použili k výpočtu větrných turbín one-way FSI simulaci.

Wang et al. [51] simulovali proudění jako steady-state modelem $k-\omega$ SST, napětí a deformaci lopatek od proudového pole řešili statickou analýzou. Provedená modální analýza měla pouze informativní charakter a sloužila k validaci modelu porovnáním s výsledky dostupnými v literatuře.

Ullah et al. [52] se zabývali dynamickou analýzou přílivové turbíny, konkrétně se zaměřili na modální a únavovou analýzu a predikci životnosti zařízení. Stejně jako [51] řešili úlohu CFD jako časově ustálenou, rotaci pomocí MRF a turbulenci modelem $k-\omega$ SST. Pomocí modální analýzy (extrahovali prvních 6 módů) vyloučili vliv rezonance a únavovou analýzou ověřili bezpečnost navržené geometrie z hlediska dlouhodobého zatěžování.

FSI			
Ref.	Cíl	Typ FSI výpočtu	Další popis
Hoseini et al. [48]	Optimalizace geometrie Rushtonovy turbíny ke snížení napětí a deformace lopatek.	Two-way FSI.	Zabývali se krátkým intervalem, kdy jsou síly a momenty na lopatky nejvyšší.
Liang et al. [49]	Dynamická analýza hřídele a míchadla k vyhodnocení napětí a deformací.	Two-way FSI	Zabývali se kvazi ustáleným stavem dostatečně dlouho od rozběhu. Předmětem zájmu byla periodičita systému.
Zhang et al. [50]	Jednocestná FSI analýza odstředivého čerpadla.	One-way FSI.	FSI analýza odstředivého čerpadla, předmětem zájmu transientní a kvazi ustálené chování systému.
Wang et al. [51]	FSI simulace větrné turbíny Wind-PACT 1,5 MW s vodorovnou osou otáčení.	One-way FSI Steady-state	Test nezávislosti sítě proveden při modální analýze. Další zatížení (mimo aerodynamického, získaného ze CFD) jsou gravitace a odstředivá síla. Analyzováno rozložení tlaku a napětí, deformace lopatek a modální analýza.
Ullah et al. [52]	Modální a únavová analýza třílopatkové přílivové turbíny s horizontální osou otáčení.	One-way FSI.	Kontrola rezonance modální analýzou (prvních 9 módů). Únavová analýza řešena modelem stress-life.
Thangavelu et al. [53]	Modální a únavová analýza třílopatkové přílivové turbíny s horizontální osou otáčení.	One-way FSI Steady-state	Výhodnocení deformace rovných a zakřivených lopatek větrné turbíny pod různými úhly náklonu. Deformace vypočtena z tlakového zatížení získaného výpočtem CFD.

5 Praktická část

Následující kapitoly popisují způsob výpočtů včetně zdůvodnění volby jednotlivých postupů a nastavení.

5.1 Geometrie

V zařízení je v 600 litrech vody propíráno 60 kg vaječných skořápek. Míchadlo rotuje rychlostí 1440 ot/min.

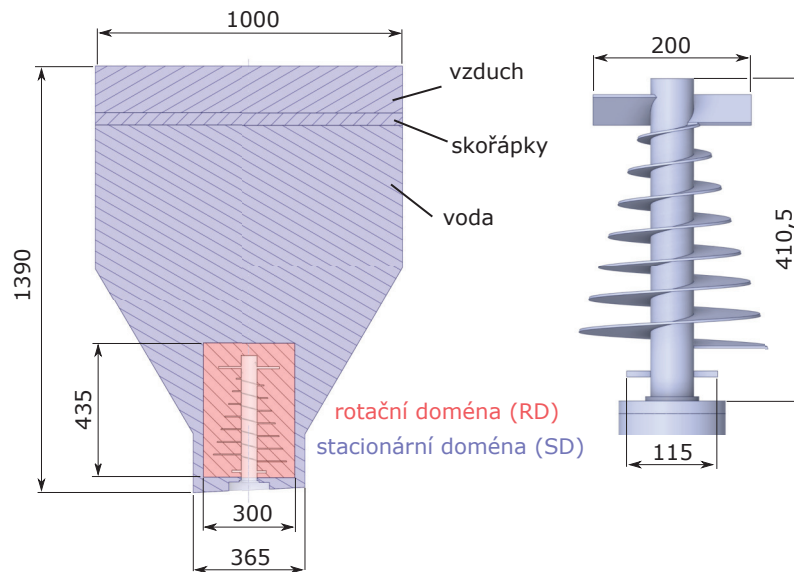


Obr. 5.1: Schematický popis řešené geometrie, upraveno z 3D designu, který vznikl v rámci projektu ÚPI

Do výpočtu nevstupuje kompletní geometrie z obrázku 5.1. Základní rozměry fluidní domény a míchadla jsou zakótovány na následujícím obrázku.

Fluidní doména je zjednodušena o potrubí k čerpadlu a spojovací členy, jako jsou šrouby, matice a svary sloužící k uložení sestavy míchadla. Dvě narážky, sloužící k rozbití centrálního víru, jsou umístěny v rovině kolmé k nákresu na obrázku 5.1, nejsou tedy vidět.

Kvůli rotaci míchadla a, jak již bylo avizováno, použití metod MRF nebo klouzavých sítí je fluidní doména rozdělena na stacionární a rotační část. Rotační doména nesahá až ke dnu, neboť to je zkoseno pod úhlem 3° .

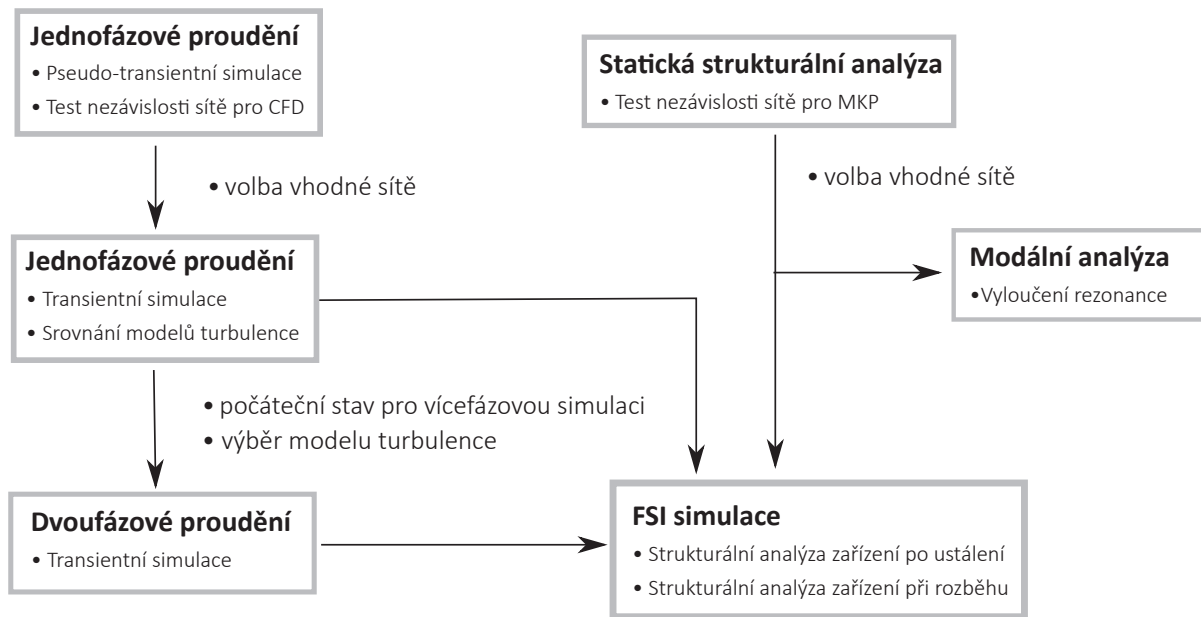


Obr. 5.2: Popis a rozměry fluidní domény a míchadla.

Popisky „vzduch“, „skořáčky“ a „voda“ na obrázku 5.2 označují objemy jednotlivých fází ve fluidní doméně.

5.2 Postup výpočtů

Běžnou praxí ve výpočtovém modelování proudění je postup od části k celku. Tím je myšleno zkoumání pouze jednotlivých částí systémů v počátcích simulace a návrhu, testování jemnosti sítě, testování modelů v závislosti na síti, diskretizačním schématu aj. Konečnému řešení tedy předchází celá řada mezivýpočtů, ladění a validací, proto je na následujícím obrázku stručně shrnut postup výpočtů, vesměs chronologický, který čtenáři ulehčí orientaci v následujících kapitolách.



Obr. 5.3: Postup praktické části práce

5.2.1 Monitorování konvergence a postprocessing

Konvergenci simulace lze posoudit poklesem škálovaných reziduí, která vyjadřují splnění řídicích rovnic. V ideálním případě by rezidua byla nulová, výsledek simulace by byl tedy v každé iteraci stejný. Při numerickém výpočtu však vždy dochází k chybě, odchylce od skutečného řešení, rezidua tak nulové hodnoty nabývat nemůžou. Dostatečnou náhradou potom je, poklesnou-li pod dostatečně nízkou hodnotu (v ANSYS Fluent defaultně nastavena na 0,001 typicky pro rovnice aktivované v tomto modelu).

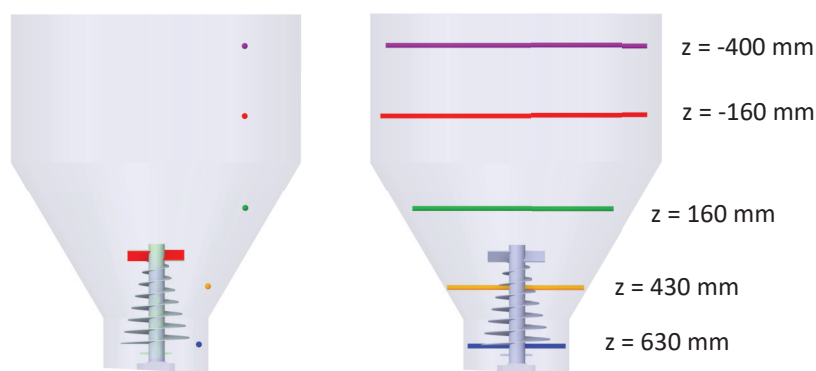
Nízká hodnota reziduí však nutně neznamená záruku zkonvergovaného řešení. Je třeba během simulace monitorovat průběh vhodné veličiny a teprve po jejím ustálení lze o zkonvergovaném řešení hovořit. Během simulací byla monitorována rychlost a tlak v několika bodech po výšce nádoby a moment působící na lopatky míchadla.

Simulace se poté vyhodnocovaly srovnáním rychlostních profilů v různých výškách nádoby, kontur rychlosti v řezu a na hladině a porovnáním výkonového čísla míchadla.

Výkonového čísla N_p (z angl. *power number*) je vyjádřením výkonu potřebného pro míchání a vypočte se, zjednodušeně, jako [48]

$$N_p = \frac{P}{\rho_l \cdot n^3 \cdot d^5} = \frac{2\pi n \tau}{\rho_l \cdot n^3 \cdot d^5} \quad (5.1)$$

kde τ je moment působící na míchadlo, který lze monitorovat během CFD simulace, P výkon, n otáčky a d průměr míchadla. Toto bezrozměrné číslo je silně závislé na průměru a typu míchadla, výšce nádoby a tvaru dna [54].



Obr. 5.4: a) Místa pro monitorování průběhu simulace b) Oblast post-processingu

5.3 Nezávislost řešení na síti (CFD)

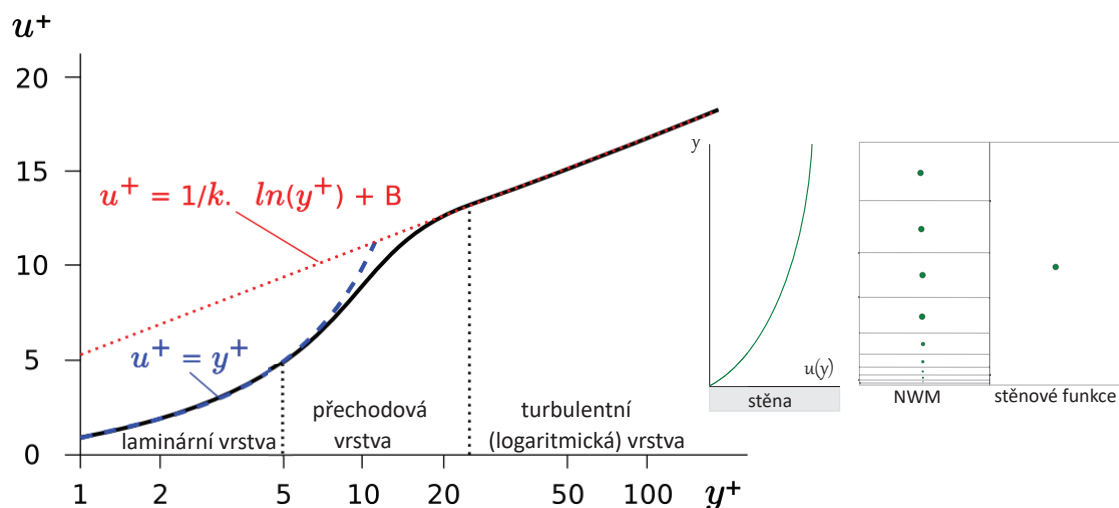
Přípravná fáze sestávala ze srovnání čtyř výpočetních sítí (3D) s různým počtem buněk. Meshováno bylo v softwaru Fluent Meshing pomocí polyhedrálních elementů. Sítě s tímto typem elementů dosahují vysokých kvalit i u náročných geometrií, proti tetrahedrálním a většinou i hexahedrálním elementům značně snižují počet buněk a zároveň nekladou příliš vysoké nároky na zkušenost a zručnost výpočtáře, neboť tvorba těchto sítí je v softwaru Fluent Meshing velmi intuitivní a zautomatizovaná. Vyšší počet stěn polyhedrů a tedy sousedících buněk vede na lepší aproximaci gradientů veličin než u tetrahedrálních sítí, může však být příčinou vyšších výpočetních nároků oproti hexahedrálním sítím, a to i přes nižší počet buněk.

Proudění v blízkosti stěny

S nezávislostí řešení na síti se kromě hustoty sítě jako takové pojí správné vysíťování v oblasti stěny. Děje probíhající v oblasti stěny mají složitý charakter, jsou zdrojem vířivosti a turbulence a dochází zde k velkým gradientům hybnosti a ostatních veličin. Modelování proudění v oblasti stěny tedy může významně ovlivnit výsledek numerické simulace.

Oblast v blízkosti stěny lze rozdělit na tři podoblasti [15]:

- *viskózní vrstvu* s dominantním laminárním prouděním, kde primární roli v přenosu hybnosti a tepla hraje molekulární viskozita
- *turbulentní vrstvu*, kde, jak název napovídá, je dominantní efekt turbulence
- *přechodovou vrstvu*, v níž efekt molekulární viskozity i turbulence je srovnatelně důležitý



Obr. 5.5: Grafické znázornění mezní vrstvy a způsob sítování v oblasti stěny, převzato z [15], upraveno

Proudění u stěny se řeší dvěma přístupy, jež vyžadují rozdílné rozlišení sítě, vizte obr. 5.5. Jsou to [15]:

- *stěnové funkce* (z angl. *wall functions*), které modelují proudění v oblasti viskózní a přechodové vrstvy pomocí semiempirických rovnic
- *modelování v blízkosti stěny* (z angl. *near-wall modelling, NWM*), jež řeší oblast s dominantním efektem viskozity dostatečně jemnou sítí

Vhodnost použití obou metod se posuzuje podle tzv. hodnoty y^+ , bezrozměrného čísla, které udává vzdálenost centroidu první buňky od stěny a tedy vyjadřuje, v jaké ze tří oblastí v blízkosti stěny se první buňka nachází. Stěnové funkce vyžadují první buňku v logaritmické oblasti (plně turbulentní), tedy $y^+ > 30$, zatímco pro NWM musí být síť plně rozlišená oblast s nízkým Re (viskózní vrstva), čemuž odpovídají hodnoty y^+ blízké 1. V opačném případě mohou obě metody počítat s velkou numerickou chybou. Cílem je vyhnout se přechodové vrstvě, v níž, jak je patrné z obr. 5.5, není průběh rychlosti lineární ani logaritmický.

V praxi je však dodržení těchto kritérií častým problémem - nízké hodnoty y^+ vedou na vysoký počet buněk a tedy i výpočetní čas, zatímco zvětšování buněk může vést k nedostatečnému pokrytí mezní vrstvy. Na složitých geometriích a v oblastech s komplexním charakterem toku, kde např. dochází k velkým gradientům tlaku a rychlosti a tedy velkým rozsahům y^+ , je striktní dodržení těchto kritérií velmi komplikované, ba v praxi často nemožné. ANSYS Fluent v dnešní době redukuje tyto komplikace vylepšenými modely, které jsou necitlivé na hodnotu y^+ a automaticky přepínají mezi formulací pro nízké Re v oblasti jemné sítě a stěnovými funkcemi v oblasti, kde je síť hrubá, přičemž vhodnými korelacemi a funkcemi podává rozumný rychlostní profil i pro síť, jejichž první buňka se nachází v přechodové vrstvě. Mezi y^+ insensitive modely patří všechny $k - \omega$,

$k - \epsilon$ s vylepšenými stěnovými funkcemi (z angl. Enhanced Wall Treatment) nebo Spalart Almaras. Detailní popis těchto i ostatních modelů a jejich formulace ve vztahu k proudění v blízkosti stěny lze najít v [15, str. 139–145].

V neposlední řadě je potřeba dodat (a teoretická příručka ANSYS Fluent [15] na tento fakt několikrát upozorňuje), že důležitější než striktní dodržení doporučených hodnot y^+ je dostatečné pokrytí mezní vrstvy buňkami (prizmatickými vrstvami).

Testování sítě

Nezávislost sítě byla testována pro úlohu míchání vody bez skořápek (jednofázová úloha), pohyb míchadla se modeloval pomocí MRF, metodou pseudo-transientní. Jedná se o implicitní podrelaxační metodu časově ustáleného (steady-state) výpočtu. Turbulence byla po vzoru řešerše řešena standardním modelem $k - \epsilon$ s korekcí zakřivení (*Curvature Correction*)¹. Proudění v blízkosti stěny bylo řešeno škálovatelnými stěnovými funkcemi (z angl. scalable wall functions, SWF), které jsou, narozdíl od standardních stěnových funkcí, schopné pracovat i se sítěmi, jejichž první buňka se nachází v přechodové oblasti mezní vrstvy².

Proudění v nádobě bylo plně turbulentní, Reynoldsovo číslo pro míchací nádoby Re_r

$$Re_r = \frac{\rho_l \cdot d^2 \cdot n}{\mu_l} \quad (5.2)$$

kde ρ_l (kg/m³) je hustota kapaliny, d (m) průměr míchadla, n (s⁻¹) otáčky a μ_l (Pa·s) dynamická viskozita kapaliny, dosahovalo v oblasti míchadla hodnot $9,6 \cdot 10^5$, a přestože bylo míchadlo rozděleno na velký počet plošek, jimž mohla být předepsána vhodná velikost první buňky, docházelo, především v oblasti kolem trubky míchadla, k problémům s dosažením požadované minimální hodnoty y^+ , která zde i přes poměrně velké buňky ve větším procentu spadala pod 11,225 (potažmo 30). Pro dosažení ideálních hodnot y^+ pro stěnové funkce by síť v těchto oblastech musela být neúměrně velká k dané geometrii. Na rozlišení mezní vrstvy na stěnách nádoby nebyl kladen velký důraz, neboť předmětem zájmu byly hydrodynamické děje v blízkosti míchadla. Prizmatická vrstva proto nebyla generována na narážkách - kvůli ostrým úhlům zde bylo pro síť s přijatelnou kvalitou potřeba vytvořit zbytečně jemnou síť, což se odrazilo na vyšším počtu buněk.

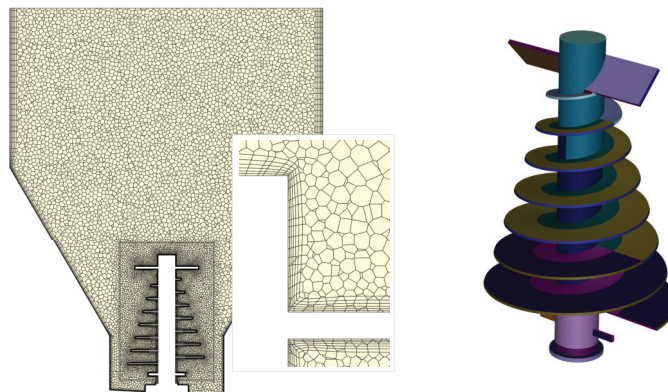
Síť 4 byla počítána metodou EWT, která má v oblasti stěny míchadla dostatečně jemnou síť pro použití metody NWM. Úloha však konvergovala špatně, rezidua kmitala a pokles byl velmi pozvolný – při stejném počtu iterací stagnovala rezidua kontinuity téměř o dva řády výše než při použití stěnových funkcí. Úloha byla dál počítána jako transientní

¹Přestože jsou dvourovnicové modely v inženýrské praxi široce využívány a jsou schopné podat dostatečně přesné výsledky, jejich slabinou jsou zakřivené proudnice a rotace turbulentních veličin, na něž nejsou dostatečně citlivé. Jednou z možností zvýšení této citlivosti je právě *Curvature correction* [15]

²Pro případy, kdy jsou buňky malé, využije řešič tzv. limiteru, kterým virtuálně posune buňky s nízkou hodnotou y^+ do turbulentní oblasti. Hraniční hodnotou je přitom $y^+ = 11,225$.

s časovým krokem 0,001 s (přibližně otočení o 10°), problém s konvergencí však nebyl vyřešen.

Ukázky z vytvořených sítí a detailu upravené geometrie míchadla jsou na obrázku níže, jejich charakteristiky a nastavení výpočtu pak v následujících tabulkách.



Obr. 5.6: a) Výpočtová síť, b) Geometrie míchadla

Tab. 5.1: Kvalita vytvořených sítí.

	Počet buněk (mil.)	Max šikmost	Min ortogonalita
Síť 1	0,59	0,75	0,25
Síť 2	1,03	0,75	0,25
Síť 3	2,03	0,75	0,25
Síť 4	2,64	0,82	0,17

Tab. 5.2: Rozlišení mezní vrstvy na míchadle.

	Počet prizem	Průměrné y^+
Síť 1 (2, 3)	6 (5)	~ 45
Síť 4	16 (14)	~ 3

Hodnota v závorce udává počet prizmatických vrstev na těch místech míchadla, kde musely být buňky násobně větší oproti zbytku geometrie (trubka míchadla a spirála v těsné blízkosti trubky).

Různé hodnoty časového faktoru (pseudo-transientní metody) měly vliv na rychlost dosažení kvazi ustáleného stavu, zatímco snížení faktoru se odrazilo na periodě kmitání sledovaných veličin, amplituda zůstávala stejná. Kvůli nestandardní geometrii míchadla vstupoval do výpočtu výkonového čísla N_p pouze moment působící na horní lopatky,

Tab. 5.3: Nastavení pseudo-transientního výpočtu.

	Síť 1	Síť 2	Síť 3	Síť 4
Model turbulence	$k - \varepsilon$ Std SWF	$k - \varepsilon$ Std SWF	$k - \varepsilon$ Std SWF	$k - \varepsilon$ Std EWT
Doplňková nastavení			Production limiter Curvature correction	
Model rotace			MRF	
Vlastnosti vody	Teplota: 10 °C Hustota: 999,7 kg/m ³ Dynamická viskozita: 1,307 · 10 ⁻³ Pa · s			
Okrajové podmínky	Wall. No slip (stěny míchadla a nádoby) Wall. Zero shear (hladina) Wall. No slip. Relative motion 1440 rpm (míchadlo mimo RČ)			
Nastavení řešiče	Řešič: Pressure based Schéma výpočtu: Coupled Prostorová diskretizace: Second order upwind, PRESTO! (tlak) Typ simulace: Steady-state (pseudo-transientní) Metoda časového kroku: Automatic Určení délkového měřítka: Aggressive Časový faktor: 10 (4000 iterací), 5 (3000 it), 2 (2000 it)			
Konvergence	Kontinuita: minimálně 5 · 10 ⁻⁴			

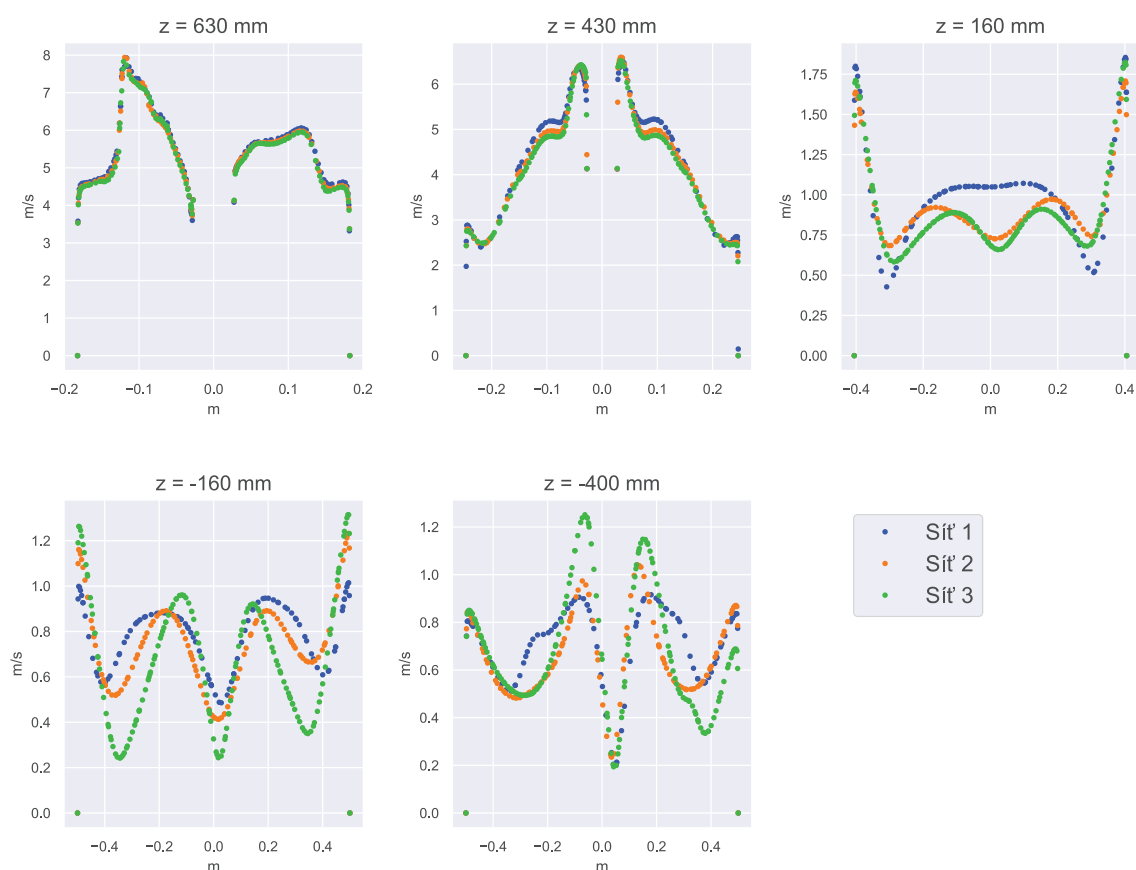
vypočten jako vážený plošný průměr. Průměr d byl zjednodušeně uvažován jako vnější průměr horních lopatek.

V objemu nádoby jsou rozdíly v rychlostních profilech patrné na obrázku 5.7 – střední a jemná síť především velikostí rychlostí, nejhrubší i tvary profilů. V těsné blízkosti míchadla (tedy ve výškách $z = 630$ a 430 mm) jsou však profily pro všechny sítě téměř totožné. Maximální rozdíl výkonových čísel je u sítě 1 a 3 a činí 7,2 %. Rozdíl sítě 2 a 3 je pouhých 2,4 %, vizte tabulku 5.4.

Tab. 5.4: Výkonové číslo pro testované sítě.

	Výkonové číslo N_p
Síť 1	1,35
Síť 2	1,29
Síť 3	1,26

Rychlostní profily po výšce nádoby



Obr. 5.7: Průběh rychlosti po výšce nádoby.

Pro zde řešenou aplikaci je stěžejní přesnost v blízkosti míchadla, děje probíhající dále v doméně nijak významnou roli nehrají. Dle výše uvedeného by bylo možné s dostatečnou přesností tedy počítat na nejhrubší síti. Vzhledem k plánovaným simulacím vícefázového proudění, které mohou být náročnější na jemnost sítě, byla však pro další výpočty zvolena síť 2 s 1 milionem buněk.

5.4 Srovnání modelů turbulence

Kromě standardního modelu $k - \varepsilon$ byla úloha počítána i dokonalejším a modernějším modelem $k - \omega$ SST, jehož stručná charakteristika byla uvedena v kapitole 2.4.3.

Oba modely byly srovnány na transienčním výpočtu. Počátečním stavem úlohy bylo zařízení v klidu, kvazi ustáleného stavu (hodnoceného opět monitorováním vhodných veličin, vizte kapitolu 5.2.1) se dosáhlo po čase ca 19 s.

Do nastavení výpočtu byla již zahrnuta definice vícefázového modelu (parametry a nastavení jsou uvedeny v kapitole 5.5) a sekundární fáze (pro zjednodušení byly skořápky při inicializaci rovnoměrně distribuovány v celém objemu), před spuštěním výpočtu však

byly rovnice objemového zlomku deaktivovány a úloha tak byla počítána jako jednofázová³. Časový krok nezůstal během celé simulace konstantní, průběžně (v násobcích celých otoček) byl zvyšován z počáteční hodnoty $1,157 \cdot 10^{-4}$ (otočení o 1°).

Podle výsledků testu nezávislosti sítě byly úlohy počítány na střední síti (sít 2). Přestože je model $k - \omega$ SST necitlivý na hodnoty y^+ a bez problémů si poradí s širokým rozsahem těchto hodnot, nejlepších výsledků dosahuje při dostatečném rozlišení mezní vrstvy a tedy při hodnotách $y^+ < 5$. Z toho důvodu byla transientní úloha počítána i na síti 4. Problém s konvergencí však přetrvával (stejně jako v případě turbulentního modelu $k - \epsilon$ Standard, vizte stranu 64). Příčin může být několik, z pravděpodobných to je možná zhoršená lokální kvalita buněk nebo skutečnost, že jemná síť u míchadla je již schopna zachytit malé víry nebo nestability a pro simulaci těchto fenoménů aktuální nastavení modelu není adekvátní.

V následující tabulce 5.5 není uvedeno kompletní nastavení výpočtu, pouze rozdíly oproti nastavení pseudo-transientní úlohy, které je popsáno v tabulce 5.3.

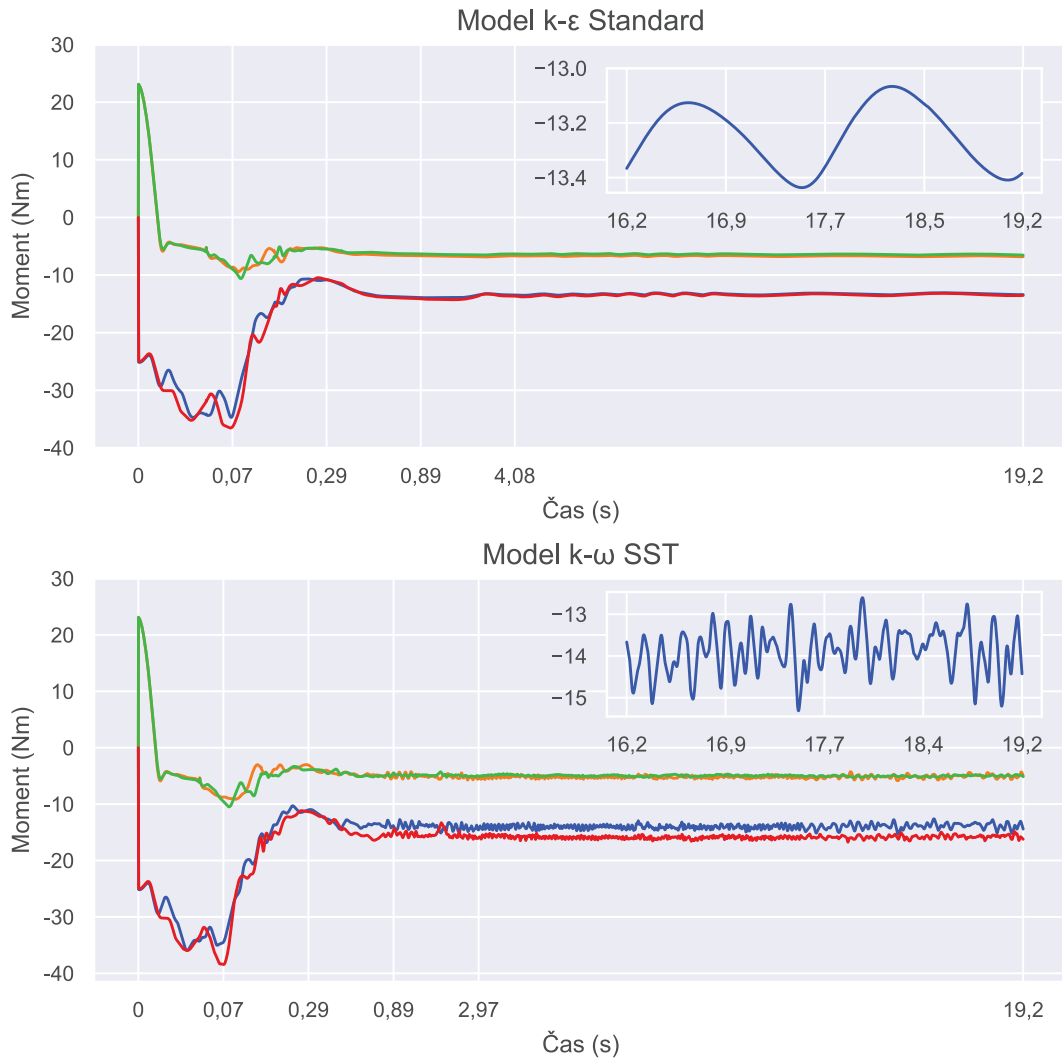
Tab. 5.5: Nastavení transientního výpočtu.

Model turbulence	Standardní $k - \epsilon$	$k - \omega$ SST
Nastavení řešiče		
Typ simulace:		Transientní
Metoda časového kroku:		Fixed
Určení časového kroku:		User-specified
Maximální časový krok:	$1,0416 \cdot 10^{-2}$	$6,6944 \cdot 10^{-3}$
Konvergence	Kontinuita: maximálně $1 \cdot 10^{-4}$	

Grafy na obrázku 5.8 ukazují průběhy momentů působících na horní lopatky míchadla po dobu ca 19 s od rozběhu; čtyři průběhy z důvodu monitorování každé strany lopatek zvlášť. Model $k - \omega$ SST zachycuje oscilace sledovaných veličin, naproti tomu průběh momentu u modelu $k - \epsilon$ je hladký a bez oscilací, přestože číselně srovnatelný s momentem vypočteným pomocí $k - \omega$ SST. Jelikož se maximální časový krok u obou modelů lišil, pro srovnání je v grafu zobrazen i detail na časový úsek 3 sekund s krokem $2,3148 \cdot 10^{-3}$ s, což je ekvivalent otočení o 20° .

Kmitání sledovaných veličin je typické pro rotační zařízení, vizte např. [50]. Z toho důvodu bylo dále počítáno s modelem $k - \omega$ SST. Frekvence kmitání momentů působících na lopatky byly zjištěny pomocí rychlé Fourierovy transformace (FFT, z anglického *Fast Fourier Transform*), která časový průběh těchto momentů převádí na frekvenční. Dále jsou pak vyobrazeny kontury a vektory průměrovaných rychlostí (v časovém intervalu 1 s) v řezu nádoby a na hladině pro oba testované modely turbulence. Výkonové číslo pro oba

³Jedná se mimo jiné o doporučený postup uživatelské příručky ANSYS Fluent [21]. Tento postup obecně vede na lepší konvergenci při zapnutí druhé fáze než v případě, kdy je vícefázový model nastaven teprve po inicializaci výpočtem pouze primární fáze.

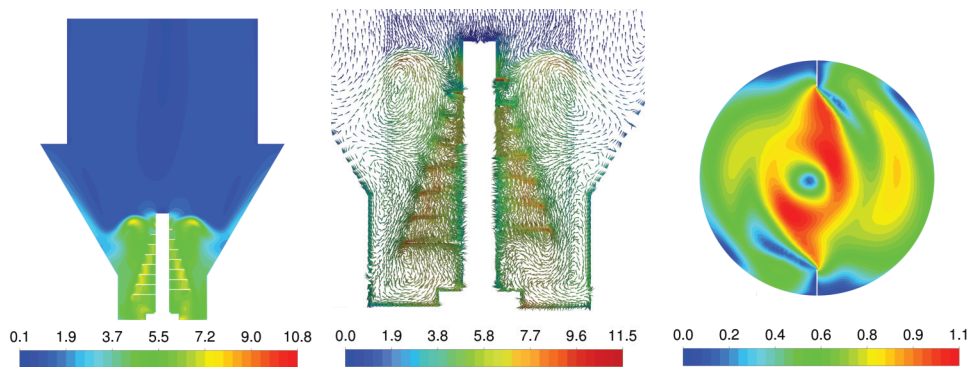


Obr. 5.8: Průběh momentu na lopatkách míchadla. Časový úsek ca 19 s od rozběhu zařízení.

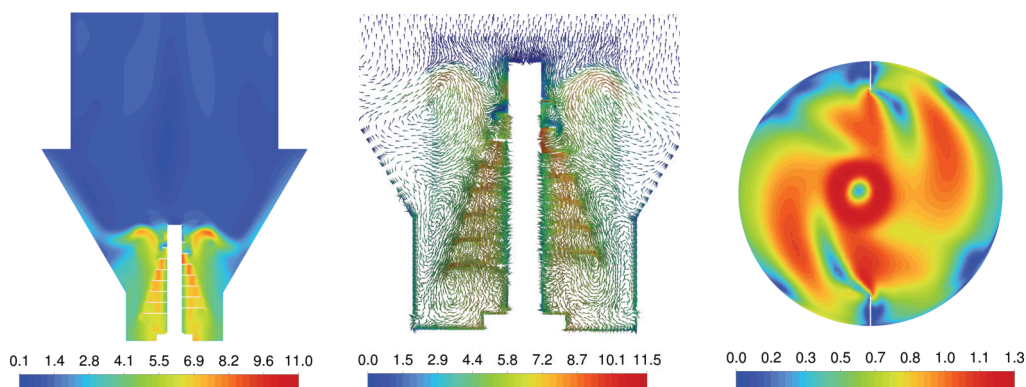
modely vyšlo téměř totožné, kdy pro $k - \varepsilon$ Standard dosahuje hodnoty 1,35 a pro $k - \omega$ SST 1,36.

Rozdíl v obou testovaných modelech je patrný jak z kontur rychlosti na hladině, tak v řezu nádoby. Tvar a orientace největších vírů v oblasti míchadla jsou u obou modelů velmi podobné, nepatrné rozdíly jdou vidět jen při dostatečném přiblížení obrázků 5.9 a 5.10.

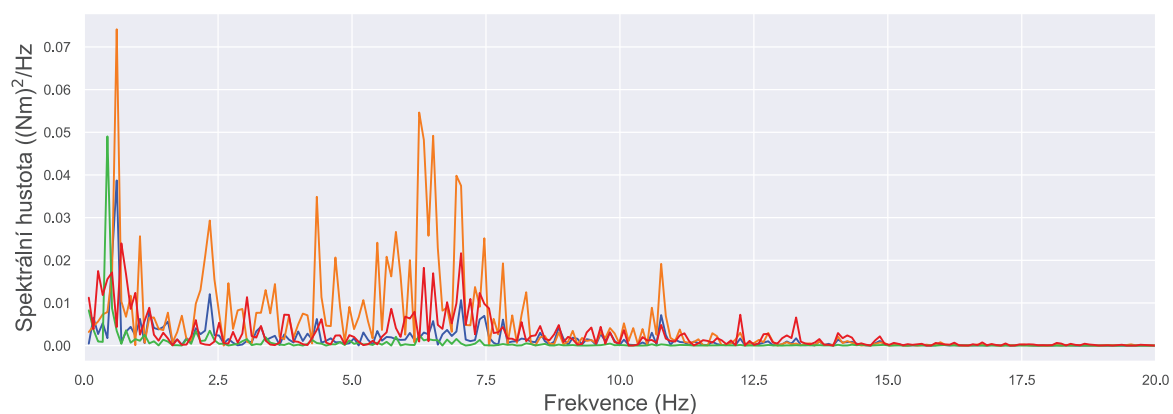
Rychlá Fourierova transformace byla provedena přímo v ANSYS Fluent, frekvence momentu působícího na lopatky jsou zobrazeny v grafu 5.11. Jednu dominantní frekvenci není možné stanovit.



Obr. 5.9: Kontury a vektory rychlostí v řezu nádoby a na hladině při kvazi ustáleném stavu. Průměrované hodnoty během 1 s mezi 19,2 - 20,2 s. Model $k - \varepsilon$ Standard. Škála v m/s.



Obr. 5.10: Kontury a vektory rychlostí v řezu nádoby a na hladině při kvazi ustáleném stavu. Průměrované hodnoty během 1s mezi 19,2 a 20,2 s. Model $k - \omega$ SST. Škála v m/s.



Obr. 5.11: Frekvence kmitání momentu působícího na lopatky míchadla, jednofázové proudění, model $k - \omega$ SST.

5.5 Vícefázové proudění

Vzhledem k výsledkům srovnání turbulentních modelů a závěrům uvedeným v kapitole 5.4 bylo pro simulaci vícefázového proudění použito pouze modelu $k-\omega$ SST, jako výchozí stav sloužil předchozí výpočet proudění vody.

Zjednodušeným předpokladem byla inicializace úlohy rovnoměrně distribuovanou dispergovanou fází (skořápkami), jejíž hustota byla na základě [55] a [56] zvolena 2000 kg/m^3 , což koresponduje s měřením dříve provedeným na ÚPI. Objemový zlomek sekundární fáze je

$$\phi = \frac{V_s}{V_{l+s}} = 0,0476 \quad (5.3)$$

kde V_s je objem skořápek

$$V_s = \frac{m_s}{\rho_s} = \frac{60}{2000} = 0,03 \text{ m}^3$$

a V_{s+l} je objem celé směsi, tedy objem skořápek V_s a vody V_l

$$V_{s+l} = V_s + V_l = 0,03 + 0,6 = 0,63 \text{ m}^3$$

Jako model odporové síly byl na základě řešerše a [15] zvolen Huilin-Gidaspow, jenž je schopen přepínat mezi formulací pro nízké i vysoké objemové zlomky sekundární fáze.

Úlomky skořápek jsou různých tvarů a velikostí. Právě nepravidelný tvar způsobuje (mimo jiné) překážku v přesném popisu rozměrů dispergované fáze. Průměr sekundární fáze byl tedy vypočten jako ekvivalentní průměr podle specifického povrchu

$$D_e = \frac{6 \cdot V_{\xi}}{A_{\xi}} \quad (5.4)$$

kde V_{ξ} je objem jedné částice a A_{ξ} její povrch. Zjednodušeně byly skořáčky uvažovány jako čtvercové částice se stranou 5 mm a tloušťkou 0,3 mm; ekvivalentní průměr byl pak roven $0,8 \text{ mm}^4$.

Výběr vícefázového modelu

Jak ukázala řešerše v kapitole 4.1, nejčastěji používaným modelem pro simulaci proudění v míchací nádobě je model Eulerian. Tento fakt slouží jako dobrý základ pro argumentaci výběru, volba modelu se však bude opírat i o doporučení uvedená v teoretické příručce Ansys Fluent [15].

Výběr modelu lze podle [15] provést na základě výpočtu dvou parametrů – zatížení pevnými částicemi β (v anglickém originále „particulate loading“) a podobnostního Stokesova čísla St .

⁴Maximální rozdíl ekvivalentního průměru podle specifického povrchu pro částice o straně 1–10 mm byl 33 %, zatímco pro ekvivalentní průměr podle objemu nebo povrchu byl rozdíl 78 % a 88 %, popořadě. Z toho důvodu byl pro popis částic vybrán právě ekvivalentní průměr podle specifického povrchu.

Zatížení pevnými částicemi se vypočte jako

$$\beta = \frac{\alpha_s \rho_s}{\alpha_l \rho_l} = \frac{0,0476 \cdot 2000}{0,952 \cdot 999,7} = 0,1 \quad (5.5)$$

kde indexy s a l opět značí pevnou a kapalnou fázi, popořadě. Parametr β je menší než 1, nikoliv však řádově, a průměrná vzdálenost mezi jednotlivými částicemi

$$\frac{L}{d_s} = \left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1 + \kappa}{\kappa} \right)^{1/3} \quad \text{kde} \quad \kappa = \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{a} \quad \gamma = \frac{\rho_s}{\rho_l} \quad (5.6)$$

nabývá hodnoty 2,22. Zatížení pevnými částicemi je tedy střední. Pro tento případ lze použít modely Mixture, Eulerian i DPM, jejich výběr je však třeba provést ještě na základě dalšího kritéria.

Tímto kritériem je Stokesovo číslo St , tedy poměr časového měřítka disperzní a kontinuální fáze

$$St = \frac{\tau_s}{t_l} \quad (5.7)$$

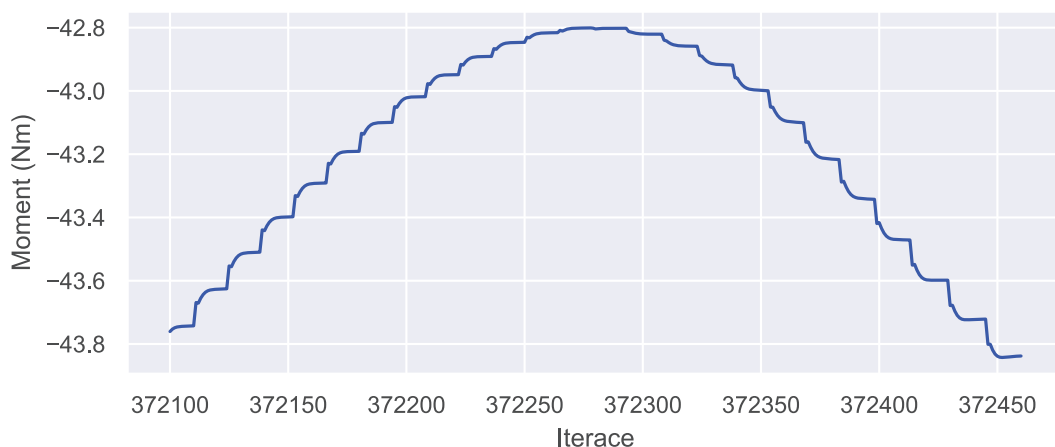
kde

$$\tau_s = \frac{\rho_s \cdot d_s^2}{18 \cdot \mu_l} \quad \text{a} \quad t_l = \frac{L_l}{v_l} = \frac{1}{\pi \cdot n}$$

Lze si všimnout, že po dosazení za charakteristickou rychlost $v_l = \pi \cdot d \cdot n$, kde n (s^{-1}), už ve vztahu pro t_l nefiguruje charakteristický rozměr L_l , v našem případě průměr míchadla d . Je také třeba brát zřetel na fakt, že tvar skořápek je silně nepravidelný a je nutné charakterizovat jej vhodným způsobem. Tím byl zvolen ekvivalentní průměr podle specifického povrchu, který udává průměr koule se stejným poměrem povrchu k objemu jako uvažovaná částice. Při uvážení limitních velikostí částic 0,5 a 10 mm a tloušťky skořápky 0,3 mm leží hodnota Stokesova čísla mezi 1 a 4,6. Pro uvedené spektrum rozměrů jsou tedy hodnoty $St > 1$, nikoliv však řádově a lze tedy teoreticky použít všechny tři metody výpočtu, ideálně ten nejméně výpočtově náročný - model Mixture. Výpočet s ním však, i přes četné změny nastavení včetně modelu odporového koeficientu, velikosti časového kroku a podrelaxačních faktorů, nekonvergoval. Vícefázové proudění tedy bylo simulováno výpočetně náročnějším modelem Eulerian, přičemž problém s konvergencí byl vyřešen. Detaily nastavení výpočtu jsou v následující tabulce 5.6.

Oproti výpočtům jednofázového proudění byla změněna kritéria pro konvergenci, konkrétně byla o řád zvýšena hodnota reziduí, čímž se výpočet urychlil. I přes tuto změnu byla zajištěna konvergence sledovaných veličin během časového kroku, vizte průběh momentu na lopatkách 5.12.

Simulace byla monitorována stejně jako doposud, v kontrolních bodech byl sledován ještě objemový zlomek sekundární fáze. Celkově bylo napočítáno přibližně 15 s míchání, reálná doba výpočtu byla přibližně dva týdny při použití 32 fyzických jader.

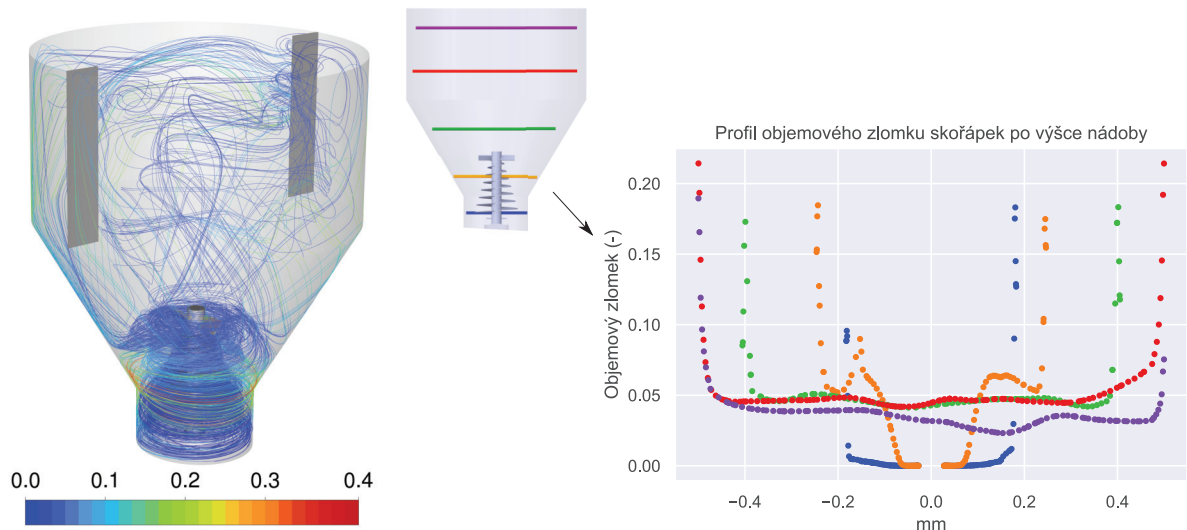


Obr. 5.12: Konvergence momentu na lopatkách během časového kroku.

Tab. 5.6: Nastavení výpočtu vícefázového proudění.

Sít	Sít 2 (1,03 mil buněk)
Model turbulence	$k - \omega$ SST
Doplňková nastavení:	Production limiter Curvature correction
Vícefázový model	
Model:	Eulerian
Sekundární fáze:	Granular
Průměr částic:	0,8 mm
Objemový podíl pevné fáze:	4,76 %
Odporový koeficient:	Huilin-Gidaspow
Nastavení řešiče	
Prostorová diskretizace:	Second order upwind PRESTO! (tlak) First order upwind (objemový zlomek)
Typ simulace:	Transientní
Metoda časového kroku:	Fixed
Určení časového kroku:	User-specified
Maximální časový krok:	$1,0416 \cdot 10^{-3}$
Konvergence	Kontinuita: maximálně $1 \cdot 10^{-3}$

K předpokládanému výraznému nárůstu momentu na lopatkách při vícefázovém proudění nedošlo, výkonové číslo se zvýšilo pouze o necelé 3 %. Sekundární fáze se vlivem odstředivé síly držela na stěnách nádoby, na dně ani na míchadle skořápky neulpívaly. Zá-



Obr. 5.13: a) Trajektorie sekundární fáze v nádobě b) Profily objemových zlomků sekundární fáze po výšce nádoby, průměrované hodnoty v intervalu 3 s.

roven je z profilů objemových zlomků po výšce nádoby, zobrazených v grafu 5.13b patrné přibližně rovnoměrné rozložení sekundární fáze v doméně.

Výrazný frekvenční pík celkového momentu působícího na míchadlo byl 11 Hz⁵, což odpovídá přibližně otočení o 2,2 otáčky.



Obr. 5.14: Frekvence momentu působícího na celé míchadlo při dvofázové simulaci.

⁵U simulací jednofázového proudění byl moment monitorován pouze na lopatkách, nikoliv na celé geometrii. Vzhledem k časové náročnosti všech simulací nebyly jednofázové simulace počítány znovu, není možné tedy frekvence kmitání momentů u obou typů proudění posoudit.

5.6 Nezávislost řešení na síti (MKP)

Základními prvky sítě pro strukturální analýzu jsou:

- *solid*
- *shell*
- *beam*

Liší se počtem stupňů volnosti, což určuje, zda je možné prvky použít na zkoumanou geometrii. Obecně prvky *solid* dávají nejspolehlivější a nejpřesnější výsledky, ovšem za předpokladu dostatečně jemné sítě s dobrou kvalitou, což se odráží na počtu buněk a tedy i výpočetních nárocích. Tuto komplikaci lze obejít použitím dvou zbývajících typů. Zjednodušeně lze vhodnost jejich použití posoudit podle relativních rozměrů geometrie. Je-li např. jeden rozměr mnohem menší než zbývajících dva (malá tloušťka), lze uvažovat o použití elementu *shell*, při dominantním jednom rozměru pak *beam* [57].

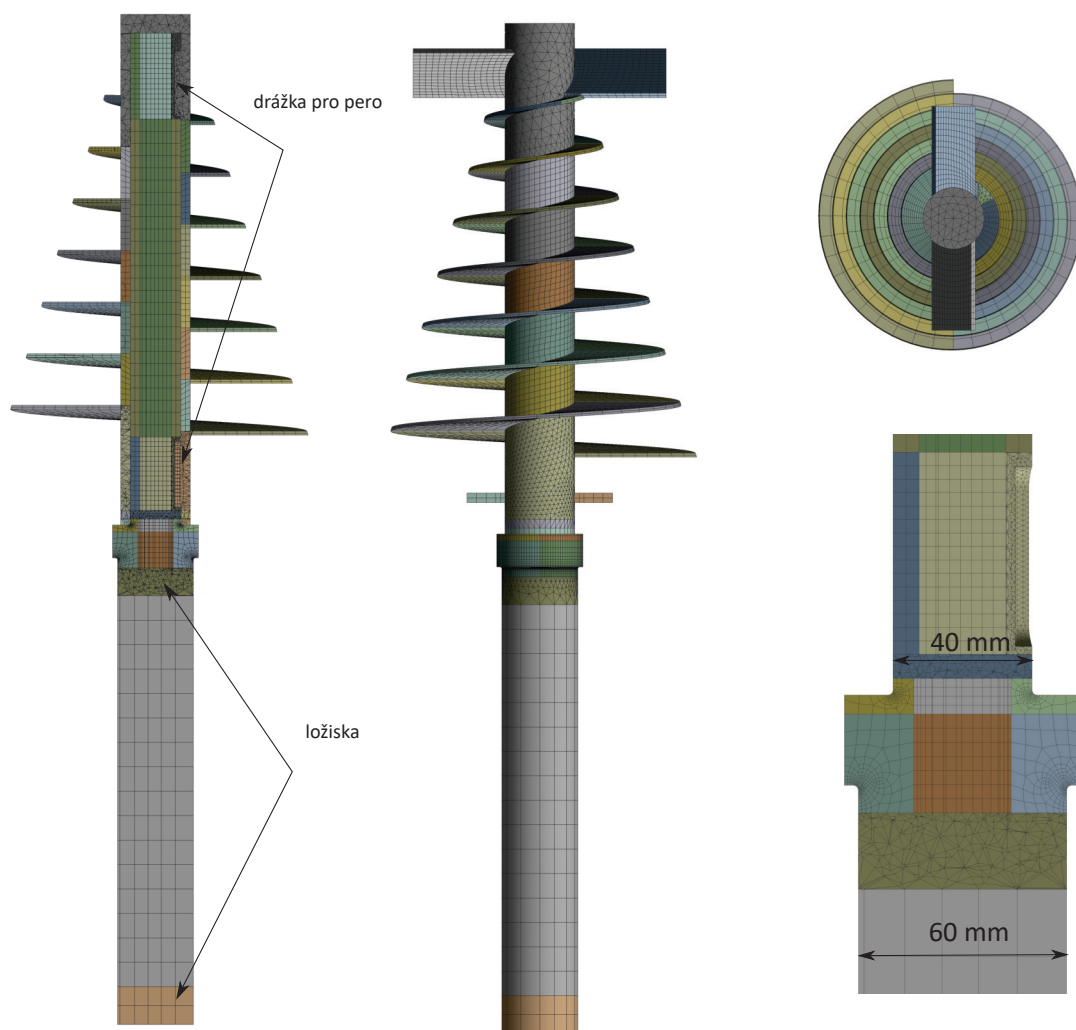
Obdobně jako pro CFD, i při MKP simulacích jsou kvalita a dostatečná jemnost sítě klíčovými faktory. Ostré rohy na geometrii mohou být zdrojem singularit napětí, tedy míst, v nichž se při zmenšování velikosti prvků napětí radikálně zvyšuje. Obejít tuto komplikaci je možné zaoblením ostrých rohů pomocí radiusu, kvůli malým geometrickým rozměrům pak však výrazně narůstá počet prvků sítě. Na zaoblení a dostatečně jemnou síť byl kladen důraz především na hřídeli, která je považována za kritickou část geometrie, neboť během provozu zařízení došlo k jejímu vyhnutí. Na namáhání lopatek nebo šneku nebyl brán příliš velký zřetel - radiusy v těchto místech nebyly modelovány a síť byla jen natolik jemná, aby byla zajištěna správná interpolace tlakového zatížení ze CFD výpočtů. Počet prvků byl výrazně snížen rozdělením geometrie na velký počet těles (konkrétně 68) a vytvořením většinou strukturované, hexahedrální sítě tvořené prvky *solid*.

Pro FSI analýzu, kdy zatížením je tlak importovaný z ANSYS Fluent, nebylo možné použít síť se šroubovicí a lopatkami modelovanými skořepinovými prvky. Tlak se importoval v ASCII formátu, kdy každý uzel sítě byl popsán geometrickými souřadnicemi a hodnotou statického tlaku. Kvůli přenosu dat z 3D těles na rovinná tělesa docházelo ke špatné interpolaci hodnot, konkrétně se interpoloval tlak pouze z jedné strany šroubovice. Snížit počet prvků použitím těchto typů elementů tedy nebylo možné.

Pro test nezávislosti velikosti sítě byla provedena statická strukturální analýza. Míchadlo bylo zatíženo tlakem vypočteným pomocí pseudo-trasientních simulací (test nezávislosti sítě CFD), pohyb byl omezen fixní vazbou v místě dolního ložiska a cylindrickou vazbou na horním ložisku. Otestovány byly 3 sítě s různou jemností především v zaobleních, jejich detaily vizte v tabulce 5.7, nastavení úlohy v 5.8. Nebude-li specifikováno jinak, nastavení všech strukturálních výpočtů bude stejné. Ukázka z vytvořené sítě je k nahlédnutí na obrázku 5.15.

Za kritickou část geometrie byla považována hřídel. Detaily zaoblení byly modelovány v místech změny průřezu hřídele. Přenos krouticího momentu z trubky míchadla na hřídel bylo možné provést zjednodušeným kontaktem na styčných plochách obou těles a výrazně

tak zjednodušit celou geometrii, pro věrohodnost však byly modelovány i drážky a pera. Detail výpočetní sítě vizte na obrázku 5.15.



Obr. 5.15: Ukázka sítě pro strukturální analýzu v pohledu a řezu a s detailem hřídele v místech změny průřezu.

Maximální napětí se nacházelo v drážce pro pero, navzdory očekávání však nikoliv v kořeni drážky, ale na obvodu hřídele (v místě kontaktu). Se zjemněním sítě zde napětí bodově narůstalo. Bez ohledu na fakt, jedná-li se o místo s výskytem singularity napětí

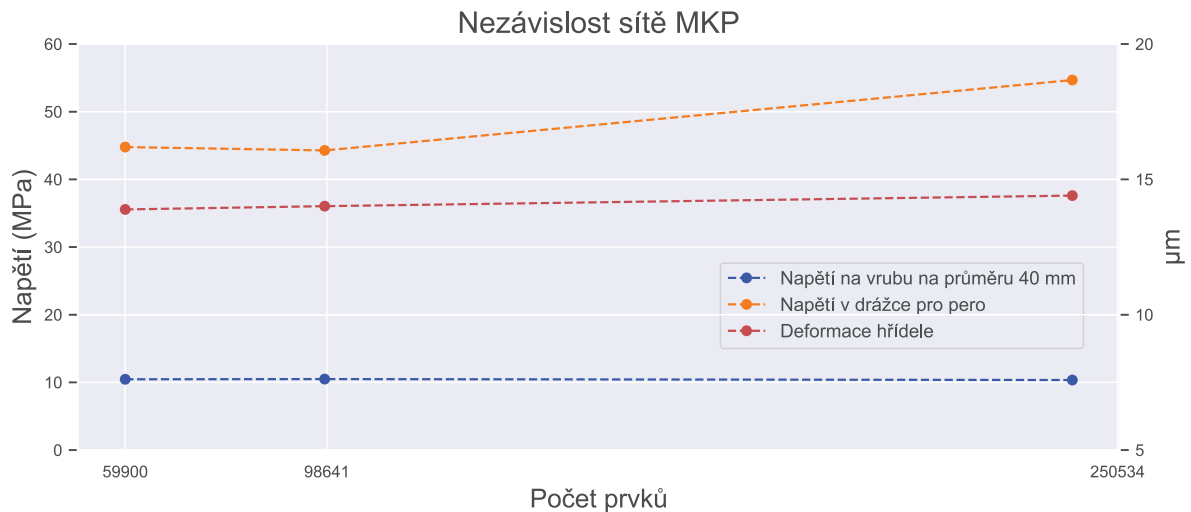
Tab. 5.7: Charakteristika vytvořených sítí pro strukturální analýzu.

	Počet prvků (tisíc)	Počet uzlů (tisíc)	Čas simulace (min)
Síť 1	60	201	0,9
Síť 2	98	318	2,53
Síť 3	242	730	3,77

Tab. 5.8: Detaily výpočtu strukturální analýzy.

Typ simulace	statická strukturální
Vlastnosti materiálu	
Míchadlo:	nerezová ocel 1.4401 (AISI 316) mez kluzu: 290 MPa mez pevnosti: 580 MPa
Hřídel	nerezová ocel 1.4301 (AISI 304) mez kluzu: 215 MPa mez pevnosti: 505 MPa
Kontakty	
Bonded contact:	spojení pera a drážky
Vazby	
Fixní vazba:	spodní ložisko
Cylindrická vazba	horní ložisko
Zatížení	importovaný tlak

nebo ne, není pro zde řešený problém bodově vysoké napětí v drážce podstatné, neboť nebylo vyšetřováno únavové namáhání ani životnost.

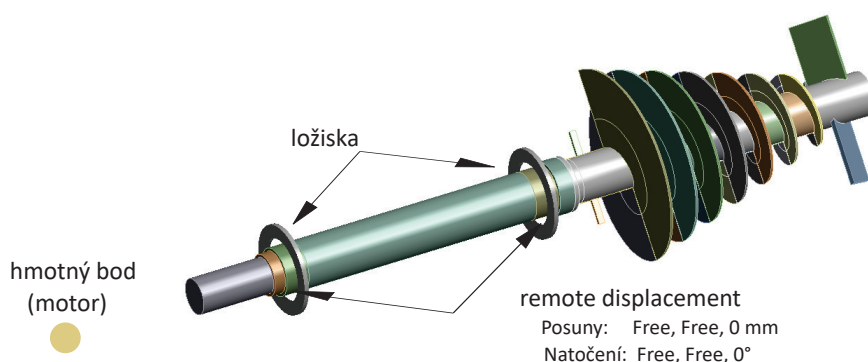


Obr. 5.16: Celková deformace a napětí v nebezpečných místech na hřídeli.

Podle grafu 5.16 lze usoudit, že pro další výpočty je adekvátní používat nejhrubší síť s 60 tisíci prvky.

5.7 Modální analýza

Před dalšími strukturálními výpočty byla vypočtena modální analýza k vyloučení nebezpečí rezonance. K výpočtu vlastních frekvencí a příslušných módů slouží v ANSYS Workbench modul *Modal Analysis*. Ložiska byla do výpočtu zahrnuta v podobě kontaktů typu *bearing*, neboť ta, narozdíl od okrajové podmínky *fixed*, zohledňují pružné chování ložiska. Axiální pohyb byl omezen vazbou *remote displacement*. Do výpočtu byl zahrnut i vliv odstředivé síly při rotaci a přidaná hmota od motoru. Vliv tlumení od okolní tekutiny nebyl uvažován.



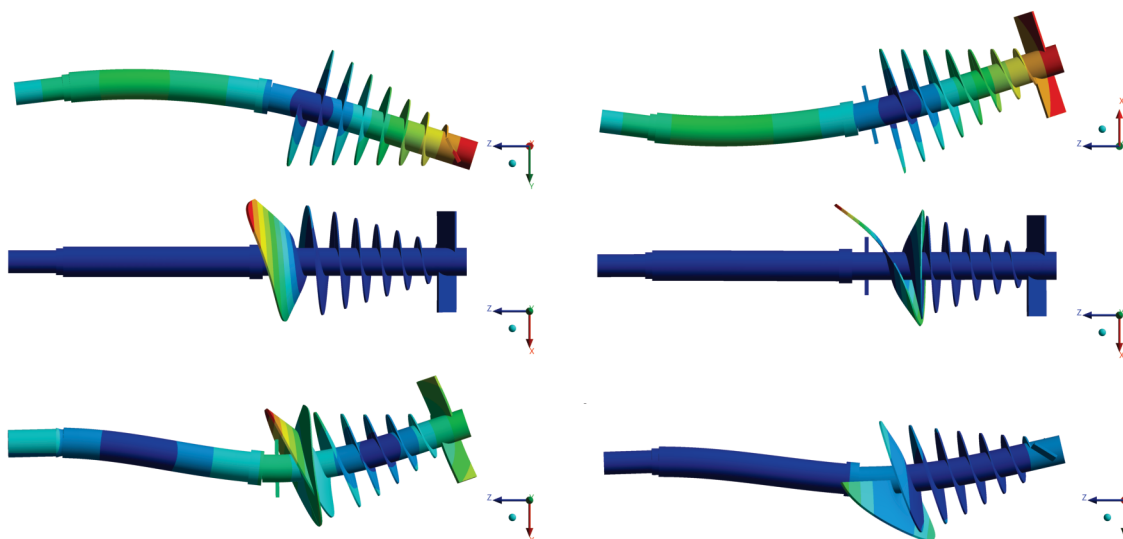
Obr. 5.17: Okrajové podmínky modální analýzy.

Celkově bylo vypočteno 10 vlastních frekvencí a příslušných módů, přičemž první 3 frekvence vyšly téměř nulové. Výsledky modální analýzy (pro srovnání i při nulové rychlosti otáčení) jsou uvedeny v následující tabulce 5.9.

Tab. 5.9: Vlastní frekvence a příslušné módy.

Mód	Frekvence (Hz) při 0 ot/min	Frekvence (Hz) při 1440 ot/min
4	0,02	1,6
5	117,6	116,4
6	120,4	121,7
7	265,2	264
8	338,3	339,1
9	361,3	361,2
10	369,3	370

U frekvencí vyšších než budicí frekvence míchadla, tj. 24 Hz, nebezpečí rezonance nehrozí. Pouze frekvence čtvrtého módu je nižší než budicí frekvence, riziko tedy teoreticky může hrozit při rozjezdu zařízení, ovšem při tak vysokých otáčkách je doba "průchodu" touto frekvencí obvykle natolik krátká, že k nebezpečné rezonanční výchylce nedojde.



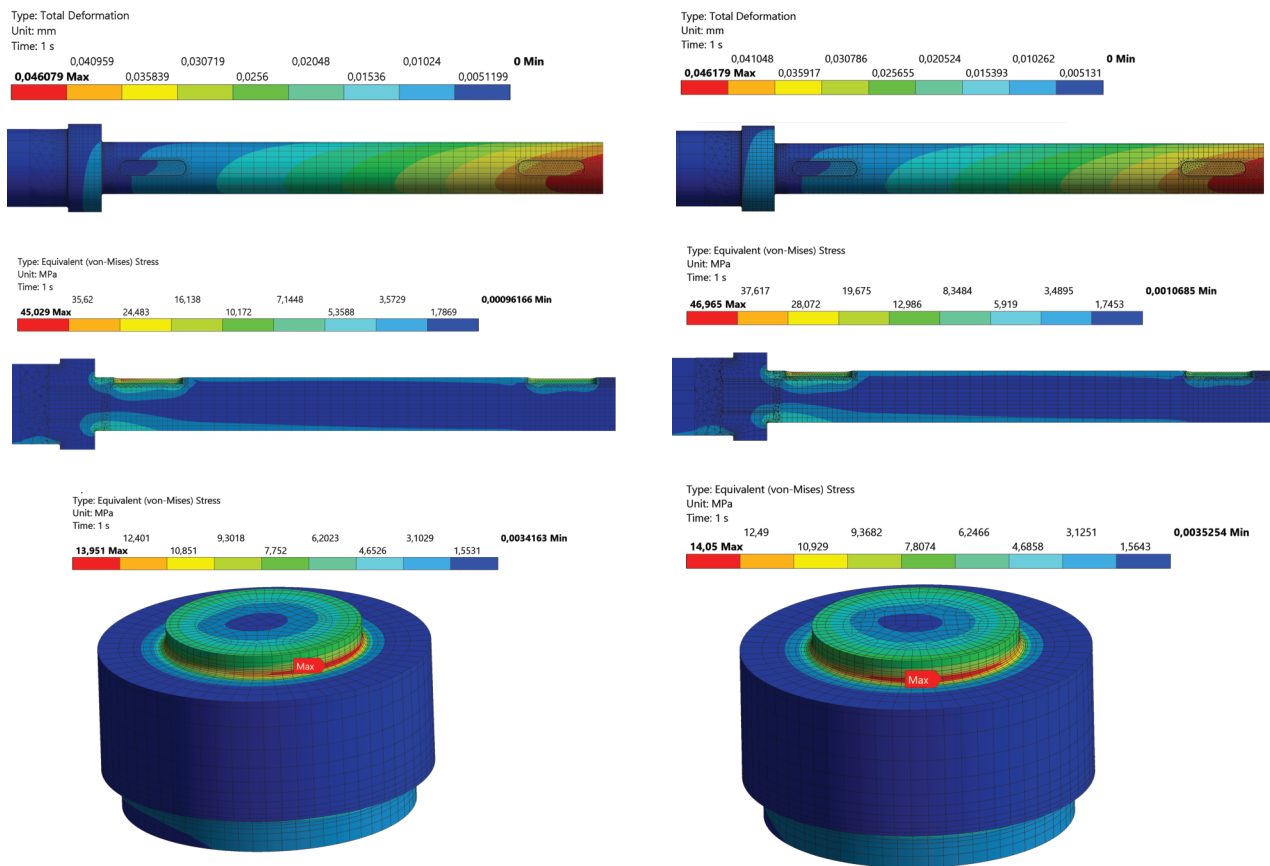
Obr. 5.18: Módy 5 - 10 při 1440 ot/min (zleva doprava, shora dolů).

5.8 Namáhání míchadla při ustáleném stavu

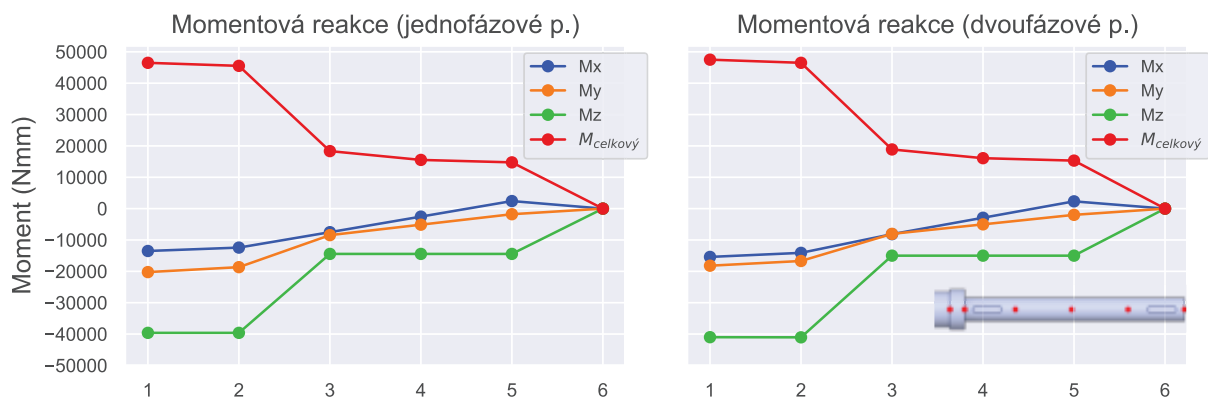
Silové působení na míchadlo při kvazi ustáleném stavu, tedy při zařízení v plném provozu a s vodou (případně směsí) kompletně rozmíchanou, bylo vyšetřeno statickou strukturální analýzou.

Zatížení bylo exportováno z ANSYS Fluent jako statický tlak, časově průměrovaný po dobu 1 s. Vyhodnocena byla napětí na hřídeli, její deformace a momentové reakce, vše k nahlédnutí na obrázcích 5.19 a 5.20.

Vliv skořápek na napětí a deformace hřídele je, jak lze vidět na obrázku 5.19, zanedbatelný - maximální deformace narostla o 0,2 %, maximální napětí (v místě drážky) o 4,1 %. V místě změny průřezu hřídele je nárůst napětí roven 0,7 %. I při uvážení maximálního napětí v drážce 47 MPa při vícefázovém proudění (kde je pravděpodobnost výskytu singularity napětí, jak je popsáno v kapitole 5.6), není tato hodnota s ohledem na mez kluzu použitého materiálu natolik vysoká, aby způsobila ohnutí hřídele. Nebezpečí poškození hřídele při kvazi ustáleném stavu a správné manipulaci se zařízením lze tedy vyloučit.



Obr. 5.19: Napětí a deformace v hřídeli při kvazi ustáleném stavu. Vlevo jednofázové proudění, vpravo dvoufázové proudění. Shora dolů jsou zobrazeny celkové deformace, von Misesova napětí na celé hřídeli a v místě vrubu, popořadě.



Obr. 5.20: Momentové reakce na hřídeli v červeně označených bodech na vloženém náčrtu hřídele.

5.9 Namáhání míchadla při rozjezdu zařízení

Rotační doméně byla v CFD simulaci předepsána konstantní rychlost 1440 ot/min. Lineární nárůst rychlosti, jak je tomu ve skutečnosti, nebyl uvažován. Hlavním důvodem bylo předpokládané významné dynamické chování systému při míchání skořápek, k němuž, jak se ukázalo, nedochází.⁶

Je vhodné zdůraznit, že rozjezd zařízení zde počítaný je oproti skutečnosti velmi zjednodušený. Jak již bylo řečeno výše, byl rozběh simulován s konstantní – a maximální – rychlostí. V provozu však běžně míchadlo nabíhá do plné rychlosti postupně během několika sekund.

Snahou bylo tuto situaci vyšetřit také. Pro lineární nárůst rychlosti byla vytvořena množina pojmenovaných výrazů (z anglického *named expressions*), která lineárně zvyšovala úhlovou rychlost z 0 ot/min na 1440 ot/min během časového intervalu 5 s. Zároveň se jednalo o vícefázovou simulaci, kdy skořápky byly usazeny na dně (simuloval se tedy extrémní případ, k němuž může dojít). Během simulací však vystavilo hned několik technických problémů, které jsou shrnuty v následujících bodech a dovysvětleny v dalších odstavcích:

- Dosud používaný model MRF nebyl schopen tento typ úlohy počítat. I přes velmi nízké časové kroky (odpovídající desetinám ° otočení) a velkou podrelaxaci rovnic úloha nekonvergovala správně, což lze přičítat významným transientním jevům.
- Pohyb rotační domény byl tedy počítán metodou klouzavých sítí, která je však násobně náročnější na výpočetní čas.

Násobně vyšší výpočetní náročnost metody klouzavých sítí je způsobena (mimo jiné) maximálním časovým krokem, který může být použit, tedy maximálním pootočením rotační domény vůči stacionární. Během časového kroku by při pohybu rotační domény nemělo docházet k „přeskočení“ velkého počtu buněk na rozhraní obou domén. V ideálním případě by se měly míjet jen dvě buňky, aby tekutina mohla správně protékat z jedné domény do druhé⁷.

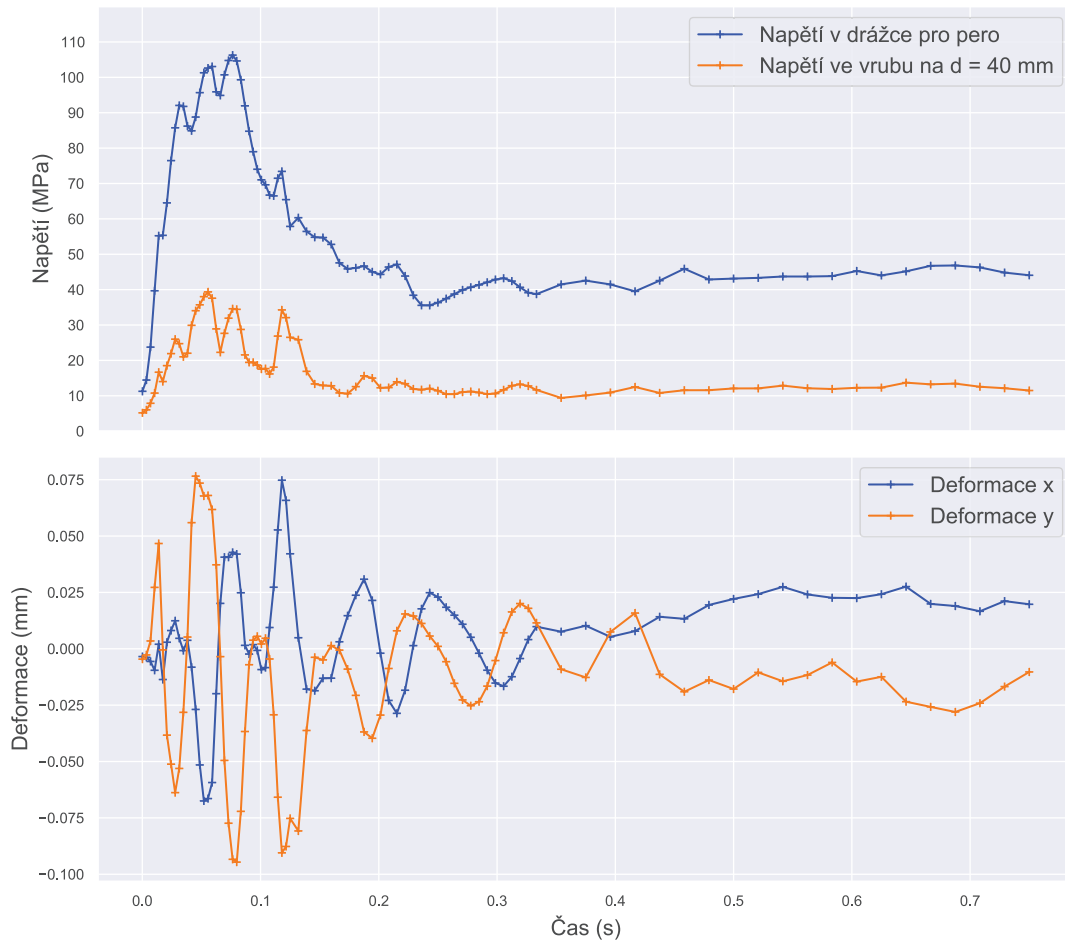
Vzhledem k vytvořené síti s definovou velikostí buněk na rozhraní domén 7 mm toto ideální pootočení odpovídá ca 1,3 °. Kvůli rostoucí rychlosti musel být zároveň snižován časový krok, aby podmínka adekvátního pootočení domény zůstala zachována. Takle podmínka docela jasně ukazuje rozdíl v náročnosti použití klouzavých sítí oproti metodě MRF, u níž maximální časový krok (přestože v kvazi ustáleném stavu) odpovídal otočení o 60 ° pro jednofázové proudění a 10 ° pro vícefázové proudění. Je třeba také dodat, že kvůli zhoršené konvergenci byl časový krok pro klouzavé sítě zlomkem definovaného adekvátního kroku (otočení). Vlivem výše uvedeného a kvůli časové tísně se, bohužel, nepovedlo

⁶Za předpokladu vhodně zvoleného výpočtového modelu a správné manipulace se zařízením během provozu.

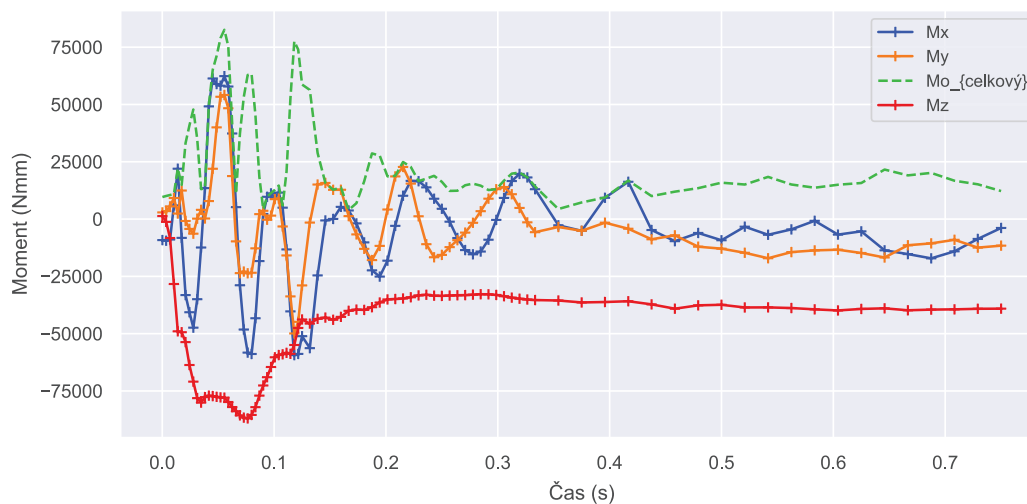
⁷V praxi tohle není nutnou podmínkou. CFD je nástroj, s nímž je třeba pracovat a přizpůsobovat jej dané situaci. Pokud tedy úloha konverguje a výsledky jsou fyzikálně správně, je možné volit větší časový krok.

simulaci metodou klouzavých sítí ve stanoveném čase dokončit.

Dále je tedy vyhodnocen rozběh zařízení počítaný metodou MRF pro jednofázové proudění. Prvních 18 otoček míchadla bylo vyhodnoceno v sekvenci statických strukturálních analýz se stejnými vazbami a okrajovými podmínkami jako doposud. Grafy na obrázcích 5.21 a 5.22 zobrazují časový průběh napětí a deformací na hřídeli.



Obr. 5.21: Časový průběh von Misesova napětí v místě maximálních momentových reakcí na hřídeli, vizte obrázek 5.20. Maximální deformace vyhodnocena na konci hřídele.



Obr. 5.22: Časový průběh momentových reakcí v jednotlivých osách (příspěvek od krutu a celkový ohybový moment včetně jednotlivých složek). Vyhodnocováno pouze v místě maximálních momentů, vizte obrázek 5.20.

Moment v ose z, tedy krouticí moment, podle předpokladu odpovídá hodnotami i průběhem momentu monitorovanému během CFD simulace.

I přes poměrně vysoký nárůst napětí na hřídeli se opakuje situace jako v případě namáhání při ustáleném provozu, tedy že i při uvážení extrémního případu, tedy lokálních špičkových napětí v drážce pro pero, je bezpečnost hřídele vůči meznímu stavu pružnosti stále vysoká a ze simulací tedy nevyplýnul žádný důvod ohnutí hřídele.

6 Diskuze dosažených výsledků a možných úprav

Ze strukturálních výpočtů vyplynulo, že namáhání míchadla v ani jednom ze simulovaných stavů není natolik velké, aby kvůli němu došlo k ohnutí hřídele. Závěry jsou validní samozřejmě za předpokladu správně zvolené výpočtové metody a korektní manipulace se zařízením během provozu.

V kapitole 5.9 byl vysvětlen důvod nepoužití metody Sliding Mesh pro simulaci rotace. Při plném provozu (kompletně rozmíchaná směs) je sice řádové navýšení namáhání míchadla s použitím metody klouzavých sítí velmi nepravděpodobné¹, rozdíl však může být při rozjezdu zařízení, navíc při implementaci postupného navyšování rychlosti míchadla.

Korektní manipulací je myšleno zajištění, že k ohnutí hřídele během provozu došlo za stejných podmínek, za nichž byl provoz simulován. I při maximální snaze totiž není možné lidský faktor stoprocentně vyloučit. Mezi možné negativní jevy, které během provozu mohly nastat, patří:

- Větší množství skořápek na jedno propírání, než je předepsáno. Vzhledem k zanedbatelnému nárůstu zatížení míchadla při správném množství skořápek (vizte kapitoly 5.5 a 5.8) však násobně větší namáhání míchadla není pravděpodobné.
- Vliv by také mohla mít nesprávná manipulace se zařízením (při přepravě, čištění, odsávání skořápek apod.) vedoucí např. k počáteční deformaci míchadla, vyhnutí upevněného motoru nebo naklonění nádoby. Všechny tyto jevy mohou vést na zvětšení nevývahy rotoru a negativně se podepsat na dynamickém chování systému – zvýšením amplitudy kmitů nebo změnou frekvence kmitání, což v kombinaci se zatěžováním od proudového pole může vyvolat diametrálně odlišné namáhání míchadla, než bylo v práci řešeno.

Z inženýrského hlediska je žádoucí navrhovat rotační části, které jsou vystaveny dynamickému namáhání, co nejvíce symetrické. U řešeného míchadla velkou nesymetrii způsobuje šroubovice. Řešením by mohlo být vytvoření dvou šroubovic místo jedné (jdoucích proti sobě). Z technologického hlediska však taková úprava není jednoduchá (vizte obrázek 2.6, kde je patrné složité navařování lopatek a segmentů šroubovice) a v kombinaci s nejistým výrazným zlepšením dynamické odezvy (která navíc podle výpočtů zde v práci není příliš významná) ji lze považovat za nevýznamnou.

Druhou variantou je naddimenzovat hřídel. Současná hřídel je vyrobena z vysoce korozivzdorné, austenitické nerezové oceli, jejíž vlastnosti jsou vhodné (a povolené) pro součásti používané v potravinářském nebo farmaceutickém průmyslu. Lepší variantou než změna materiálu hřídele se tedy jeví změna rozměrů, konkrétně zvětšení průměru v nebezpečném místě.

¹Tvrzení lze podložit například studií [58], kde při simulaci brzdného mechanismu predikovaly metody MRF a klouzavé sítě tlakové rozložení velmi podobně.

Závěr

Předkládaná diplomová práce se zabývá numerickými simulacemi z oblastí CFD a MKP. Řešenou aplikací je míchací nádoba na propírání vaječných skořápek, jejichž zpracováním se získává cenný produkt ve farmaceutickém průmyslu. Během provozu však došlo k ohnutí hřídele. Cílem práce bylo vyšetřit interakci proudící kapaliny s míchadlem a odhalit možné příčiny deformace hřídele.

První část práce je věnována poměrně rozsáhlému popisu týkajícího se dynamiky tekutin a výpočtového modelování. Mimo teorii dynamiky tekutin včetně základních rovnic a principů jsou popsány různé metody výpočtu, které je možné aplikovat na řešený problém. Způsoby výpočtů, které ANSYS Fluent nabízí, jsou popsány u zásadních voleb nastavení, jež se týkají CFD a zde řešené aplikace – jmenovitě jsou shrnuty způsoby řešení vícefázového proudění, simulace rotujících částí a modelování turbulence. Tento popis dá čtenáři základní vhled do náročné disciplíny výpočtového modelování tekutin a umožní mu pochopit a ohodnotit volbu zvolených metod výpočtů použitých v práci. Podobný teoretický popis, přestože ne tak podrobný, čtenáře uvede i do problematiky strukturálních výpočtů a FSI analýzy. Zvolené metody výpočtů, použité modely, fyzikální zjednodušení a nastavení řešiče se velkou měrou opírají o rozsáhlou rešerši jak modelování proudění v míchacích nádobách, tak výpočtů interakce tělesa s tekutinou.

Pomocí transientních výpočtů bylo simulováno jak jednofázové (pouze voda), tak vícefázové proudění v nádobě (voda a skořápky). Předpoklad výrazného nárůstu momentu a silového působení na míchadlo při vícefázovém proudění se nepotvrdil, výkonové číslo se zvýšilo pouze o necelé 3 %. Podle očekávání se skořápky vlivem odstředivé síly držely na stěnách nádoby, v okolí míchadla ani na dně neulpávaly, v objemu bylo rozložení sekundární fáze poměrně rovnoměrné.

K vyšetření interakce tělesa s proudící tekutinou byla zvolena jednocestná FSI analýza. Napětí a deformace míchadla způsobené zatížením od proudového pole byly počítány v ANSYS Mechanical pomocí statických strukturálních analýz. Zvláště byly vyhodnoceny dva zátěžné stavy – kvazi ustálený, tedy při plném provozu, a při rozjezdu zařízení. Přestože namáhání míchadla bylo při rozjezdu násobně vyšší než v ustáleném stavu, nedosahovalo natolik vysokých hodnot, aby způsobilo ohnutí hřídele.

Důvodů, proč nebyla odhalena příčina ohnutí hřídele, může být hned několik. Jedním z nich je zvolená výpočtová metoda pro proudění v nádobě. Proces míchání byl počítán metodou MRF, která má sice násobně nižší nároky na výpočetní čas než metoda klouzavých sítí, přesto však každá ze simulací trvala v řádech dní až týdnů. Lepší predikce tlakového zatížení míchadla by mohlo být dosaženo použitím metody Sliding Mesh, ovšem za cenu velmi dlouhých simulačních časů a nároků na hardware. Vysoký nárůst namáhání během ustáleného stavu není, vzhledem k dosaženým výsledkům zde a v použité literatuře, příliš pravděpodobný, rozdíly by však mohly být při simulaci rozběhu zařízení, zvláště s uvažováním lineárního nárůstu rychlosti z 0 na plné otáčky (1440 ot/min) v řádu několika sekund,

který byl v této práci zanedbán (mimo jiné opět z důvodu velké náročnosti simulace).

Vysoce nepravidelný tvar skořápek musel být pro účely práce popsán zjednodušeně pouze průměrem částic, který byl vypočten jako ekvivalentní průměr podle povrchu. Jedná se o velké fyzikální zjednodušení, které je však vzhledem ke zvolenému modelu vícefázového proudění téměř nutné. Možné lepší predikce míchání skořápek by mohlo být dosaženo použitím nástroje RockyDEM, který dokáže poměrně přesně simulovat téměř jakýkoliv tvar sekundární fáze. Mimo vysoké nároky na hardware se s použitím RockyDEM však pojí další nevýhoda, pro studentskou práci navíc poměrně klíčová, jíž je absence dostatečného množství vědeckých článků, které se jeho použitím zabývají.

V neposlední řadě nelze vyloučit vliv lidského faktoru, který deformaci hřídele napomohl. Tím je myšlena především nekorektní manipulace se zařízením během přepravy nebo čištění. Naklonění nádoby nebo třeba vyhnutí motoru nebo celého uložení může mít zásadní vliv na dynamické chování systému, které v simulacích přirozeně nebylo zohledněno a které může mít za následek diametrálně odlišné namáhání míchadla a jeho deformace.

Simulace sice neodhalily příčinu ohnutí hřídele, na druhou stranu potvrdily správnost návrhu zařízení, které bylo vyvinuto na ÚPI. Bez jasných odpovědí na otázku, co během provozu způsobuje deformaci hřídele, je nejjednodušší variantou vydat se cestou klasického inženýrského přístupu a navržené zařízení naddimenzovat. Vzhledem k použití vysoce kvalitní nerezové oceli je vhodné dimenzovat rozměry hřídele, nikoliv materiál.

Literatura

- [1] Marium Waheed et al. „Channelling eggshell waste to valuable and utilizable products. A comprehensive review“. In: 106 (2020), s. 78–90. ISSN: 09242244. DOI: 10.1016/j.tifs.2020.10.009. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0924224420306324> (cit. 10.05.2021).
- [2] A. Travel, Y. Nys a M. Bain. „Effect of hen age, moult, laying environment and egg storage on egg quality“. In: *Improving the Safety and Quality of Eggs and Egg Products* (2011), s. 300–329. DOI: 10.1533/9780857093912.3.300. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9781845697549500139> (cit. 10.05.2021).
- [3] Saul S. Morris, Kalpana Beesabathuni a Derek Headey. „An egg for everyone. Pathways to universal access to one of nature’s most nutritious foods“. In: 14 (2018). ISSN: 17408695. DOI: 10.1111/mcn.12679. URL: <http://doi.wiley.com/10.1111/mcn.12679> (cit. 10.05.2021).
- [4] Uduma Eke Osonwa et al. „Egg shell powder as a potential direct compression excipient in tablet formulation“. In: *West African Journal of Pharmacy* 1.28 (2017), s. 107–118. URL: https://www.researchgate.net/publication/318824746_Egg_Shell_Powder_as_a_Potential_Direct_Compression_Excipient_in_Tablet_Formulation (cit. 10.05.2021).
- [5] Maxwell T. Hincke et al. „The eggshell: structure, composition and mineralization“. In: *Frontiers in Bioscience* 17 (), s. 1266–1280. URL: https://www.researchgate.net/publication/51895246_The_eggshell_structure_composition_and_mineralization (cit. 18.05.2022).
- [6] John D. Jr. Anderson. „Brief History of the Early Development of Theoretical and Experimental Fluid Dynamics“. In: *Fluid Dynamics and Aerothermodynamics: Fundamentals of Fluid Flows* (2010). DOI: 10.1002/9780470686652.eae001. (Cit. 14.09.2021).
- [7] *Leonardo da Vinci’s laboratory: studies in flow*. 2019. URL: https://media.nature.com/lw800/magazine-assets/d41586-019-02144-z/d41586-019-02144-z_16924380.jpg (cit. 25.06.2021).
- [8] Pijush K. Kundu a Ira M. Cohen. *Fluid Mechanics*. Second Edition. USA: Elsevier, 1990. ISBN: 0121782514.
- [9] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics. Principles and Applications*. první. Nizozemí: Elsevier, 2001. ISBN: 0080430090.
- [10] Yunus A. Çengel a John M. Cimbala. *Fluid Mechanics. Fundamentals and Applications*. New York: McGraw-Hill, 2006. ISBN: 0072472367.

- [11] Bruce R. Munson et al. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. šesté. USA: John Wiley & Sons, 2009. ISBN: 978-0470-26284-9.
- [12] Hanna Corell. „Applications of ocean transport modelling“. Dizertační práce. Stockholm: Department of Meteorology, Stockholm University, 2012. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:516366/FULLTEXT01.pdf> (cit. 25. 07. 2021).
- [13] John D. Anderson. *Computational fluid dynamics. the basics with applications*. New York: McGraw-Hill, c1995. ISBN: 00-700-1685-2.
- [14] H.K Versteeg a W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics. the finite volume method*. první. Harlow: Pearson, 1995. ISBN: 05-822-1884-5.
- [15] ANSYS Inc. *ANSYS Fluent Theory Guide*. Release 2021 R1. 2021.
- [16] C.W. Hirt a B.D. Nichols. „Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries“. In: *Journal of Computational Physics* 39 (1981), s. 201–225. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999181901455> (cit. 16. 08. 2021).
- [17] W. Edelbauer. „Numerical simulation of cavitating injector flow and liquid spray break-up by combination of Eulerian–Eulerian and Volume-of-Fluid methods“. In: (), s. 19–33. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793016303747> (cit. 15. 08. 2021).
- [18] Arjun Kumar Pukkella et al. „Improved mixing of solid suspensions in stirred tanks with interface baffles. CFD simulation and experimental validation“. In: *Chemical Engineering Journal* 358 (2019), s. 621–633. ISSN: 13858947. DOI: 10.1016/j.cej.2018.10.020. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1385894718319570> (cit. 18. 04. 2021).
- [19] Esteban Guerrero, Felipe Muñoz a Nicolás Ratkovich. „COMPARISON BETWEEN EULERIAN AND VOF MODELS FOR TWO-PHASE FLOW ASSESSMENT IN VERTICAL PIPES“. In: *CT&F - Ciencia, Tecnología y Futuro* 7.1 (2017), s. 73–84. ISSN: 2382-4581. URL: <http://www.scielo.org.co/pdf/ctyf/v7n1/0122-5383-ctyf-7-01-00073.pdf> (cit. 16. 08. 2021).
- [20] Shitanshu Gohel et al. „CFD Modeling of Solid Suspension in a Stirred Tank. Effect of Drag Models and Turbulent Dispersion on Cloud Height“. In: *International Journal of Chemical Engineering* 2012 (2012), s. 1–9. ISSN: 1687-806X. DOI: 10.1155/2012/956975. URL: <http://www.hindawi.com/journals/ijce/2012/956975/> (cit. 12. 06. 2021).
- [21] ANSYS Inc. *ANSYS Fluent User's Guide*. Release 2021 R1. 2021.
- [22] Wojciech Sobieski. „Drag Coefficient in Solid–Fluid System Modeling with the Eulerian Multiphase Model“. In: *Drying Technology* 29.1 (2010-12-03), s. 111–125. ISSN: 0737-3937. DOI: 10.1080/07373937.2010.482714. URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/07373937.2010.482714> (cit. 07. 09. 2021).

- [23] Hong-liang ZHAO et al. „Experimental and CFD studies of solid–liquid slurry tank stirred with an improved Intermig impeller“. In: *Transactions of Nonferrous Metals Society of China* 24.8 (2014), s. 2650–2659. ISSN: 10036326. DOI: 10.1016/S1003-6326(14)63395-1. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1003632614633951> (cit. 18.04.2021).
- [24] „Multiphase Eulerian Simulations of a Sedimentation Process in a Solid-Fluid Particle-Laden Flow“. In: *The publications of the MultiScience - XXX. MicroCAD International Scientific Conference* (2016), s. -. DOI: 10.26649/musci.2016.102. URL: http://www.uni-miskolc.hu/~microcad/publikaciok/2016/D4_9_Klajbar_Csaba.pdf (cit. 06.09.2021).
- [25] Tanyakarn Treeratanaphitak a Nasser M. Abukhdeir. „Phase-bounded finite element method for two-fluid incompressible flow systems“. In: *International Journal of Multiphase Flow* 117 (2019), s. 1–13. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932218304750?via%5C%3Dihub> (cit. 06.09.2021).
- [26] Jun-Won Suh et al. „Multi-Objective Optimization of the Hydrodynamic Performance of the Second Stage of a Multi-Phase Pump“. In: *Energies* 10.9 (2017). ISSN: 1996-1073. DOI: 10.3390/en10091334. URL: <http://www.mdpi.com/1996-1073/10/9/1334> (cit. 05.09.2021).
- [27] N. G. Deen, T. Solberg a B. H. Hjertager. „Large eddy simulation of the Gas–Liquid flow in a square cross-sectioned bubble column“. In: *Chemical Engineering Science* (2001). URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.531.5325%5C&rep=rep1%5C&type=pdf> (cit. 06.09.2021).
- [28] Wei Chen a Lifeng Zhang. „Effects of Interphase Forces on Multiphase Flow and Bubble Distribution in Continuous Casting Strands“. In: *Metallurgical and Materials Transactions B* 52.1 (2021), s. 528–547. ISSN: 1073-5615. DOI: 10.1007/s11663-020-02046-w. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s11663-020-02046-w> (cit. 06.09.2021).
- [29] Di Jin, Jinbiao Xiong a Xu Cheng. „Investigation on interphase force modeling for vertical and inclined upward adiabatic bubbly flow“. In: *Nuclear Engineering and Design* 350 (2019), s. 43–57. ISSN: 00295493. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2019.05.005. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029549319301165> (cit. 05.09.2021).
- [30] P. Oliveira a R Issa. „On the Numerical Treatment of Interphase Forces in Two-Phase Flow“. In: *ASME* 185 (1994). URL: https://www.researchgate.net/publication/284513885_On_the_Numerical_Treatment_of_Interphase_Forces_in_Two-Phase_Flow (cit. 05.09.2021).

- [31] Deyin Gu et al. „Design of impeller blades for efficient homogeneity of solid-liquid suspension in a stirred tank reactor“. In: *Advanced Powder Technology* 28.10 (2017), s. 2514–2523. ISSN: 09218831. DOI: 10.1016/j.appt.2017.06.027. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921883117302716> (cit. 07.09.2021).
- [32] Divyamaan Wadnerkar et al. „CFD simulation of solid–liquid stirred tanks for low to dense solid loading systems“. In: *Particuology* 29 (2016), s. 16–33. ISSN: 16742001. DOI: 10.1016/j.partic.2016.01.012. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1674200116300256> (cit. 18.04.2021).
- [33] Yuan Chi et al. „Numerical simulation and experimental study on eggshell membrane separation device“. In: *International Journal of Agricultural and Biological Engineering* 12.2 (2019), s. 173–183. ISSN: 1934-6344. DOI: 10.25165/j.ijabe.20191202.3058. URL: <https://ijabe.org/index.php/ijabe/article/view/3058> (cit. 18.04.2021).
- [34] Qiuxiang Bu a Yue Wang. „Numerical simulation of solid-liquid suspension characteristics induced by three-bent-bladed turbine in stirred tank“. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 382 (2018-07-01). ISSN: 1757-8981. DOI: 10.1088/1757-899X/382/4/042028. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/382/4/042028> (cit. 12.06.2021).
- [35] Adrian Stuparu, Romeo Susa-Resiga a Alin Bosioc. „CFD Simulation of Solid Suspension for a Liquid–Solid Industrial Stirred Reactor“. In: (), s. 5705. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/12/5705/htm> (cit. 15.08.2021).
- [36] Petr Vlček. „Modelování turbulentního proudění“. Praha: ČVUT. URL: <http://chps.fsfd.cvut.cz/pt/2013/pdf/3509.pdf> (cit. 14.09.2021).
- [37] Ideen Sadreghighi. „Turbulence Modeling“. In: čvc. 2021. DOI: 10.13140/RG.2.2.35857.33129/7.
- [38] Li Xiangdong a Tu Jiyuan. „Evaluation of the eddy viscosity turbulence models for the simulation of convection–radiation coupled heat transfer in indoor environment“. In: *Energy and Buildings* 184 (2019), s. 8–18. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378778818326963%5C#fig0001> (cit. 26.08.2021).
- [39] M. Ezkurra a J. A. Esnaola. „Analysis of One-Way and Two-Way FSI Approaches to Characterise the Flow Regime and the Mechanical Behaviour during Closing Manoeuvring Operation of a Butterfly Valve“. In: *International Journal of Mechanical and Materials Engineering* 12.4 (2018). URL: <http://ebiltegia.mondragon.edu/xmlui/bitstream/handle/20.500.11984/1165/Analysis-of-One-Way-and-Two-Way-FSI-Approaches.pdf?sequence=1%5C&isAllowed=y> (cit. 22.09.2021).
- [40] „Ansys Fluent Fluid Structure Interaction with Ansys Mechanical. Lecture 01: Overview of FSI in Workbench“. In: *Ansys Training* (). (Cit. 15.09.2021).

- [41] Jindřich Petruška. *Počítačové metody mechaniky II*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles.
- [42] ANSYS Inc. *Ansys® Mechanical APDL, Theory Reference*. Release 2015. 2015.
- [43] G.R. Kasat et al. „CFD simulation of liquid-phase mixing in solid–liquid stirred reactor“. In: *Chemical Engineering Science* 63.15 (2008), s. 3877–3885. ISSN: 00092509. DOI: 10.1016/j.ces.2008.04.018. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0009250908001929> (cit. 18.04.2021).
- [44] A. R. Khopkar et al. „Computational Fluid Dynamics Simulation of the Solid Suspension in a Stirred Slurry Reactor“. In: 45.12 (2006), s. 4416–4428. ISSN: 0888-5885. DOI: 10.1021/ie050941q. URL: <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/ie050941q> (cit. 07.09.2021).
- [45] Thomas Berger, Michael Fischer a Klaus Strohmeier. „Fluid-Structure Interaction of Stirrers in Mixing Vessels“. In: *Journal of Pressure Vessel Technology* 125.4 (2003-11-01), s. 440–445. ISSN: 0094-9930. DOI: 10.1115/1.1613951. URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/pressurevesseltech/article/125/4/440/462869/FluidStructure-Interaction-of-Stirrers-in-Mixing> (cit. 28.09.2021).
- [46] S. Karray et al. „Fluid-Structure Interaction in a Stirred Vessel Equipped with a Rushton Turbine“. In: *International Journal of Mechanics and Applications* 2.6 (2012-11-1), s. 129–139. ISSN: 2165-9281. DOI: 10.5923/j.mechanics.20120206.05. URL: <http://article.sapub.org/10.5923.j.mechanics.20120206.05.html> (cit. 22.09.2021).
- [47] Khaled M. Mohamed, Andrew G. Gerber a Gordon A. L. Holloway. „Modelling of Hydrodynamic Forces on a Whirling Mixing Vessel Stirrer Including Fluid-Structure Interaction“. In: *Volume 4: Fluid-Structure Interaction* (2009-07-26), s. 465–473. DOI: 10.1115/PVP2009-77888. URL: <https://asmedigitalcollection.asme.org/PVP/proceedings/PVP2009/43673/465/341774> (cit. 26.09.2021).
- [48] S.S. Hoseini et al. „Impeller shape-optimization of stirred-tank reactor. CFD and fluid structure interaction analyses“. In: *Chemical Engineering Journal* 413 (2021). ISSN: 13858947. DOI: 10.1016/j.cej.2020.127497. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1385894720336214> (cit. 13.03.2022).
- [49] Yangyang Liang et al. „Coupling simulation of fluid structure interaction in the stirred vessel with a pitched blade turbine“. In: *Chinese Journal of Chemical Engineering* 26.5 (2018), s. 922–929. ISSN: 10049541. DOI: 10.1016/j.cjche.2017.10.026. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1004954117310078> (cit. 13.03.2022).

- [50] Hehui Zhang et al. „CFD-Rotordynamics Sequential Coupling Simulation Approach for the Flow-Induced Vibration of Rotor System in Centrifugal Pump“. In: *Applied Sciences* 10.3 (2020). ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10031186. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/3/1186> (cit. 13.03.2022).
- [51] Lin Wang, Robin Quant a Athanasios Kolios. „Fluid structure interaction modelling of horizontal-axis wind turbine blades based on CFD and FEA“. In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 158 (2016), s. 11–25. ISSN: 01676105. DOI: 10.1016/j.jweia.2016.09.006. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167610515302361> (cit. 22.09.2021).
- [52] Habib Ullah et al. „Numerical investigation of modal and fatigue performance of a horizontal axis tidal current turbine using fluid–structure interaction“. In: *Journal of Ocean Engineering and Science* 4.4 (2019), s. 328–337. ISSN: 24680133. DOI: 10.1016/j.joes.2019.05.008. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2468013319301007> (cit. 23.09.2021).
- [53] Saravana Kannan Thangavelu et al. „Aeroelastic performance analysis of horizontal axis wind turbine (HAWT) swept blades“. In: *Materials Today: Proceedings* (2021). ISSN: 22147853. DOI: 10.1016/j.matpr.2021.04.315. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214785321032351> (cit. 24.09.2021).
- [54] Michael W. Chudacek. „Impeller Power Numbers and Impeller Flow Numbers in Profiled Bottom Tanks“. In: (). DOI: 10.1021/i200030a056. URL: <https://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/i200030a056> (cit. 05.03.2022).
- [55] „A Method for Estimating Shell Weight and Correcting Specific Gravity for Egg Weight in Eggshell Quality Studies“. In: *Poultry Science* 69.1 (1990), s. 48–52. ISSN: 00325791. DOI: 10.3382/ps.0690048. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0032579119326574> (cit. 04.04.2022).
- [56] „Eggshell Valorization. Membrane Removal, Calcium Oxide Synthesis, and Biochemical Compound Recovery towards Cleaner Productions“. In: *Biointerface Research in Applied Chemistry* 12.5 (2021-11-21), s. 5870–5883. ISSN: 2069-5837. DOI: 10.33263/BRIAC125.58705883. URL: <https://biointerfaceresearch.com/wp-content/uploads/2021/10/20695837125.58705883.pdf> (cit. 04.04.2022).
- [57] Nader G. Zamani. „The Challenges of Teaching Finite Element Analysis in the Undergraduate Curriculum“. In: *Proceedings of the 14th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: “Engineering Innovations for Global Sustainability”* (2016-08-27), s. -. DOI: 10.18687/LACCEI2016.1.1.028. URL: <http://laccei.org/LACCEI2016-SanJose/meta/RP028.html> (cit. 26.03.2022).

- [58] C. Bienz et al. „In Front of the Grid - CFD at SAUBER PETRONAS F1 Leading the Aerodynamic Development“. In: *1st European Automotive CFD Conference* (). URL: https://www.researchgate.net/publication/315717371_In_Front_of_the_Grid-CFD_at_SAUBER_PETRONAS_F1_Leading_the_Aerodynamic_Development (cit. 19.05.2022).

Seznam symbolů a zkratk

CFD	výpočtová dynamika tekutin – Computational Fluid Dynamics
DNS	direct numerical simulation
DPM	discrete phase model
EWT	enhanced wall treatment
FEM	finite element method
FFT	rychlá Fourierova transformace – Fast Fourier Transform
FSI	interakce proudění s tělesem – Fluid Structure Interaction
LES	large eddy simulation
MKP	metoda konečných prvků
MOGA	multi-objective optimization method
MRF	multiple reference frame
ÚPI	Ústav procesního inženýrství
VOF	volume of fluid
UDF	user-defined function
NWM	near wall modelling
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes
RD	rotační doména
RNG	renormalization group theory
RSM	Reynolds stress model
SD	stacionární doména
SST	shear stress transport
SWF	scalable wall functions
\vec{a}	vektor zrychlení ($m \cdot s^{-2}$)
A_ε	povrch částice (m^2)
C	matice tlumení ($N \cdot s/m$)

C_D	odporová funkce (-)
d	průměr částic dispergované fáze (m) průměr míchadla (m)
D_e	ekvivalentní průměr podle specifického povrchu (m)
E	Youngův modul pružnosti (Pa)
F	obecné označení proměnné proudu celková matice zatížení (N)
f	vlastní frekvence (Hz)
\vec{f}	objemové síly vyjádřené na jednotku hmotnosti (N/kg)
F_l	vztlaková síla (N)
\vec{F}_o	vektor objemové síly (N)
\vec{F}_p	vektor plošné síly (N)
F_q	mezifázové síly působící na fázi (N)
F_{td}	turbulentní disperzní síla (N)
F_{vm}	síla virtuální hmoty – virtual mass force (N)
F_{wl}	„síla mazání stěny“ – wall lubrication force (N)
G	modul pružnosti ve smyku (Pa)
\vec{g}	vektor gravitačního zrychlení ($m \cdot s^{-2}$)
K	matice tuhosti (N/m)
T	teplota (K)
k	kinetická energie turbulence (v rovnici 2.18 jako k_t) ($m^2 \cdot s^{-2}$)
K_{ls}	koeficient přenosu hybnosti mezi fázemi (-)
l	index označující kapalnou fázi (-)
L_l	charakteristický rozměr (m)
m	hmotnost (kg)
M	matice hmotnosti ($N \cdot s^2/m$)
\vec{n}	normála povrchu (-)

n	otáčky (s^{-1})
N_p	výkonové číslo (-)
o_x, o_y, o_z	složky vnější objemové síly (N)
p	tlak (Pa) normálová napětí (odvození Navier-Stokesovy rovnice) (Pa)
ps	tlak pevné fáze – solid pressure (Pa)
P	výkon (W)
Pr	Prandtlovo číslo (-)
q	index označující fázi (-)
\vec{R}	vektor přenosu hybnosti mezi fázemi
\vec{r}	polohový vektor (m)
Re	Reynoldsovo číslo (-)
Re_r	Reynoldsovo číslo pro míchací nádoby (-)
S	povrch (m^2)
s	index označující pevnou fázi (-)
S_m	zdroj hmoty (v rovnici kontinuity)
St	Stokesovo číslo (-)
T	teplota (K)
t	časové měřítko kontinuální fáze (s) čas (s)
\mathbf{U}	matice deformačních parametrů (m)
V	objem (m^3)
\vec{v}	vektor rychlosti (m/s)
$V_{\dot{\epsilon}}$	objem částice (m^3)
v_l	charakteristická rychlost (m/s)
\vec{v}_r	vektor relativní rychlosti mezi fázemi (m/s)
\mathbf{W}	energie napjatosti tělesa (J)

u, v, w	posuvy (z obecných rovnic pružnosti) (m)
x, y, z	prostorové souřadnice (m)
α	objemový zlomek fáze (-)
β	zatížení pevnými částicemi (-)
δ_{ij}	Kroneckerovo delta (-)
ϵ	disipace kinetické energie ($m^2 \cdot s^{-3}$)
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_z$	přetvoření (z obecných rovnic pružnosti) (-)
λ	druhá viskozita stlačitelné tekutiny (Pa · s)
μ	dynamická viskozita (Pa · s) Poissonovo číslo (-)
μ_t	turbulentní viskozita (Pa · s)
Π	celková potenciální energie tělesa (J)
ρ	hustota (kg/m^3)
σ_{ij}	tenzor napětí (Pa)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	napětí (z obecných rovnic pružnosti) (Pa)
τ	smysková napětí (všechny kombinace τ_{xx-zz} (Pa)) moment (Nm)
τ_s	časové měřítko disperzní fáze (s)
ϕ	okamžitá hodnota veličiny proudění objemový zlomek sekundární fáze (-)
$\bar{\phi}$	časově středovaná složka veličiny proudění
ϕ'	flukuační složka veličiny proudění
∇	operátor nabla
ω	specifická disipace energie (s^{-1}) úhlová rychlost (s^{-1})
$\tilde{u}_i, \tilde{v}_j, \tilde{w}_k$	bázové funkce