UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Platónská tělesa v GeoGebře

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor: **Bc. Jan Doubrava**

Vedoucí práce: **doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.**

„Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně za použití citované literatury.“

V Olomouci dne: 18.04.2019

Bc. Jan Doubrava

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu diplomové práce panu doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi, CSc. za velmi cenné a podnětné rady a připomínky, které přispěly k vytvoření a zdokonalení této práce.

Obsah

Úvod

Vzhledem k tomu, že mými studijními obory jsou matematika a informační výchova, rozhodl jsem se zvolit takové téma své diplomové práce, které by spojovalo oba tyto obory. Zároveň jsem chtěl zpracovat téma, které by bylo možno použít přímo ve výuce matematiky za využití ICT. V současné době se hodně hovoří o aplikaci počítačové techniky ve výuce matematiky, a proto si myslím, že by tato práce mohla sloužit i jako praktická příručka pro učitele matematiky, kteří by rádi své hodiny aktivizovali pomocí ICT.

Cílem práce tedy je vytvořit metodickou příručku pro uživatele, kteří by měli zájem naučit se pracovat s 3D objekty v programu GeoGebra, konkrétněji s platónskými tělesy. Jak tento program, tak dané téma lze využít také při výuce geometrie na základní i střední škole.

Teoretická část práce je rozdělena na dvě kapitoly. První kapitola je zaměřena na život Platóna a na pět platónských těles. Soustředím se zde na vysvětlení, co jsou platónská tělesa, kolik jich je, jaké mají vlastnosti a vztahy mezi sebou a jaké další pojmy jsou s těmito tělesy spojeny.

Ve druhé kapitole se zaměřuji na program GeoGebra, konkrétněji na jeho vývoj, základní popisy a vysvětlení jednotlivých nástrojů při práci s 3D objekty. Dále je zde zmíněna i možnost využití mobilní aplikace 3D grafická kalkulačka.

Praktickou část práce tvoří třetí a čtvrtá kapitola. Ve třetí kapitole ukazuji, jak sestrojit jednotlivá platónská tělesa v programu GeoGebra. U každého tělesa existuje několik způsobů, jak jej zkonstruovat.

Ve čtvrté kapitole popisuji práce s platónskými tělesy, jako například sestrojení sítí těles nebo výpočet obecného objemu těles, když je znám pouze poloměr kulové plochy opsané tělesu, a jiné.

I. Teoretická část

1. *Platón*

1.1 Život Platóna

Řecký filozof, pedagog a matematik Platón, jehož pravé jméno bylo Aristoklés, se narodil roku 427 př. n. l. v Athénách do velmi zámožné rodiny. Byl vojákem a dvakrát vyhrál Isthmické hry – starořeckou soutěž pořádanou na počest boha Poseidona. Na těchto hrách se soutěžilo v atletice, jezdectví, ale navíc také v recitaci a hudbě. Zvláštností je, že pouze na těchto hrách se soutěžilo i v malířství. Platón byl odborníkem hlavně v zápase. Nebylo zvykem, aby takové dospívání vedlo k životu filozofa. Za svého mládí se setkal se svým budoucím učitele Sokratem. Pod jeho vedením nalezl zalíbení v „dialektické" hře – rozmlouvání – a přecházel od pouhé debaty k podrobné analýze a plodné diskuzi. Stal se z něj vyznavač moudrosti a svého učitele Sokrata (Durant, 2003).

V Platónových osmadvaceti letech Sokrates zemřel, což mělo poznamenat každou oblast jeho myšlení. Naplnil jej obrovský odpor k demokratickém zřízení, k lůze, a dokonce i k jeho vlastnímu aristokratickému původu. V tomto období se snažil hájit odkaz svého učitele, což mu vyneslo podezírání ze strany demokratických vůdců. Jeho přátelé na něj naléhali, že Athény pro něj nejsou bezpečné, a tak se roku 399 př. n. l. Platón rozhodl z Athén odejít (Durant, 2003).

Není zcela jisté, kde se pohyboval, ale mnoho odkazů říká, že se nejdříve vydal do Egypta, kde začal psát své dílo „Utopie". Dále pak cestoval na Sicílii a do Itálie, kde se na nějaký čas připojil ke škole, kterou založil další známý matematik Pythagoras. Platón cestoval 12 let, z každého množného zdroje informací sbíral cenné vědomosti, zastavil se u každé svatyně a vyzkoušel každou víru. Podle některých zdrojů odcestoval do Judey nebo si našel cestu až na břehy Gangy. Do Athén se vrátil v roce 387 př. n. l. a založil slavnou Akademii, která přetrvala až do roku 529 n. l. V roce 347 př. n l. Platón v Athénách umírá (Durant, 2003).

1.2 Platónská tělesa

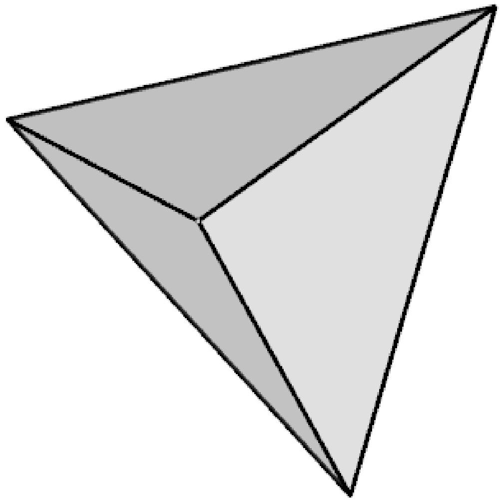
V době, kdy Platón psal své dílo „Timaios“, se matematika a filozofie navzájem významně ovlivňovaly. V tomto svém díle říká, že svět je vytvořen vesmírem a čtyřmi živly (oheň, voda, země a vzduch), a dal je do souvislosti s pěti pravidelnými mnohostěny v prostoru – čtyřstěn, šestistěn – krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. Z toho důvodu vznikl pojem platónská tělesa. Na jeho názory navázal ve 4. století př. n. l. Theaitetos z Athén, který popsal geometrické konstrukce platónských těles a dokázal, že jich není víc než pět (Bečvář, Štoll, 2005).

Z matematického hlediska považujeme platónská tělesa za pravidelné konvexní mnohostěny v prostoru. Aby bylo těleso konvexní, musí pro něj platit Eulerova věta: *Nechť je dán libovolný mnohostěn, počet jeho vrcholů označíme* ***v****, počet jeho stran* ***s*** *a počet jeho hran* ***h****, pak jej můžeme nazvat konvexním mnohostěnem, právě když platí:* ***v + s – h = 2*** (Kodejška, 2017).

Každému z pěti pravidelných mnohostěnů v prostoru je možné opsat i vepsat kulovou plochu. Také je možné každému tělesu sestrojit kulovou plochu, která protíná středy jednotlivé hran. Středy všech takových kulových ploch leží v těžišti daného tělesa, tudíž všechny tři kulové plochy jsou soustředné.

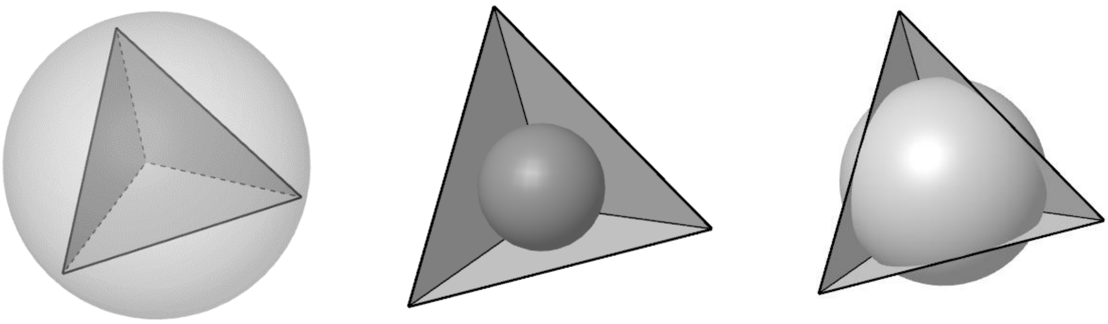
1.2.1 Čtyřstěn

Čtyřstěn neboli *tetraedr* (Obr. 1) je těleso tvořené čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky. V každém vrcholu se setkávají tři z nich. Z názvu je zřejmé, že má těleso čtyři stěny, dále má šest hran a čtyři vrcholy. Platón tento tvar spojil s živlem ohně právě kvůli pronikavé ostrosti hran a vrcholů a také proto, že je nejzákladnější a nejjednodušší z pravidelných těles. Řecký název pro čtyřstěn je *puramis* a je z něj odvozeno slovo *pyramida*. Zajímavostí jistě je, že řecké slovo pro oheň je *pur* (Ashton, 2015).



Obr. 1 - Čtyřstěn

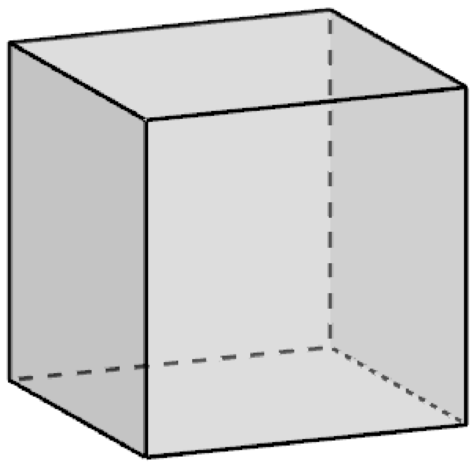
Tělesu přísluší tři sféry: kulová plocha opsaná tělesu, kulová plocha vepsaná tělesu (zmíněno již dříve) a kulová plocha procházející středy hran (Obr. 2). Poloměr kulové plochy vepsané je jedna třetina poloměru kulové plochy opsané (Ashton, 2015).



Obr. 2 - kulová plocha opsaná čtyřstěnu, kulová plocha vepsaná čtyřstěnu a kulová plocha procházející středy hran čtyřstěnu

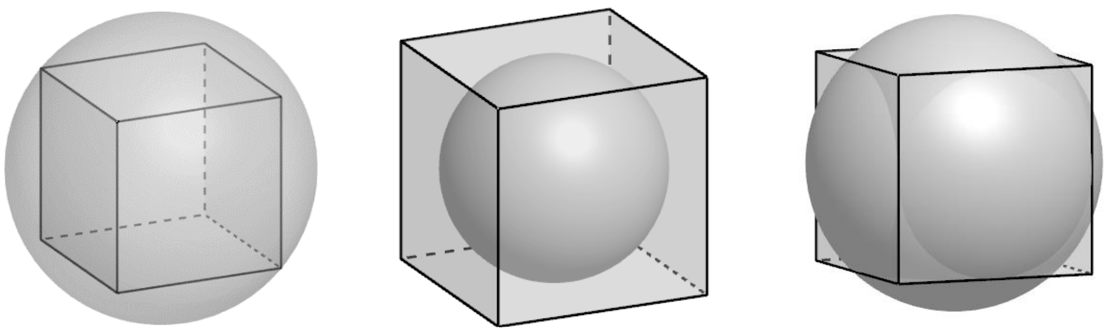
1.2.2 Šestistěn

Řecký název pro toto těleso je *hexaedr* a je známější pod pojmem krychle (Obr. 3). Krychle má šest stěn, dvanáct hran a osm vrcholů. Dále pak kvůli tomu, že je krychle, stabilní jí Platón přiřadil k živlu země, a také proto, že její stěny jsou otočeny dopředu, dozadu, doleva, doprava, nahoru a dolů, což odpovídá šesti směrům: sever, jih, východ, západ, zenit a nadir. Zenit (neboli nadhlavník) je astronomický bod na obloze, který se nachází přímo nad pozorovatelem stojícím na povrchu Země. Zenit je průsečíkem kolmice na horizontální rovinu pozorovacího místa s nebeskou sférou. Nebeskou sféru si lze představit jako kouli nebo polokouli, v jejímž středu je pozorovatel, který se dívá na noční oblohu. Nadir (neboli podnožník) je opakem zenitu. Tedy v astronomii je to bod, který leží přímo pod pozorovatelem, na části nebeské sféry, kterou nemůže pozorovatel vidět. Nadir, stejně jako zenit, je průsečíkem kolmice na horizontální rovinu pozorovacího místa s nebeskou sférou. (Ashton, 2015).



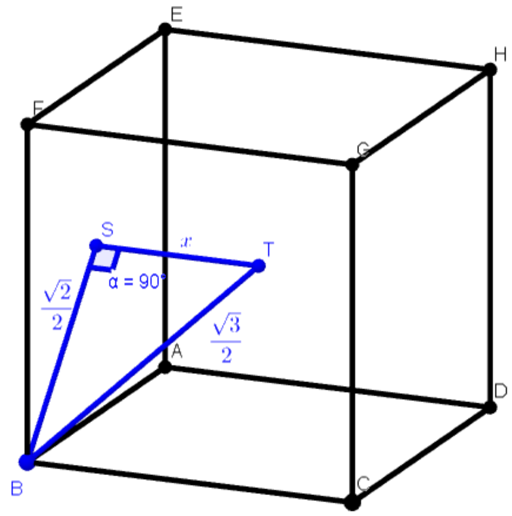
Obr. 3 - Krychle

Krychle je označována za *dokonalé* těleso, protože má šest stěn a číslo šest je právě prvním *dokonalým číslem*. To znamená, že je součtem svých dělitelů (1 + 2 + 3 = 6). Pokud se sečtou všechny hrany krychle s jejich stěnovými úhlopříčkami a tělesovými úhlopříčkami, dostane se číslo dvacet osm. Dvacet osm je druhé *dokonalé číslo* (1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28). Jak už bylo zmíněno, i u krychle lze sestrojit tři soustředné kulové plochy – kulovou plochu opsanou krychli, kulovou plochu vepsanou krychli a kulovou plochu procházející středy hran krychle (Obr. 4). Poloměr kulové plochy opsané krychli je $\sqrt{3}$ krát větší než poloměr kulové plochy vepsané (Ashton, 2015).



Obr. 4 - kulová plocha opsaná krychli, kulová plocha vepsaná krychli a kulová plocha procházející středy hran krychle

To, že jsou poloměry v poměru $1 : \sqrt{3}$, bude nyní dokázáno. Strana krychle se definuje jako 1. Potom poloměr kulové plochy opsané tělesu bude $\frac{\sqrt{3}}{2}$, protože je to polovina délky tělesové úhlopříčky, a poloměr kulové plochy vepsané tělesu bude x. Spojením středu krychle (bod *T*), středu jedné stěny (bod *S*) a vrcholu (bod *B*) vznikne pravoúhlý trojúhelník *BST* (viz Obr. 5).



Obr. 5 – Krychle s pravoúhlým trojúhelníkem

Velikost úsečky *BS* je rovna polovině velikosti stěnové úhlopříčky, tedy $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Využitím Pythagorovy věty se snadno vypočítá velikost úsečky *ST:*

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

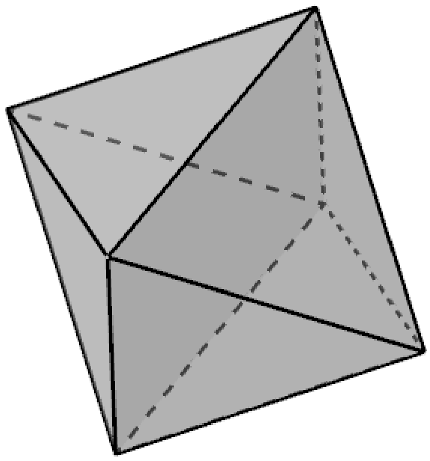
$$x^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Poměr velikostí poloměru kulové plochy vepsané tělesu ku poloměru kulové plochy opsané tělesu je $\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : \sqrt{3}$. Tím je dokázáno, že poloměr kulové plochy opsané krychli je $\sqrt{3}$ krát větší než poloměr kulové plochy vepsané krychli.

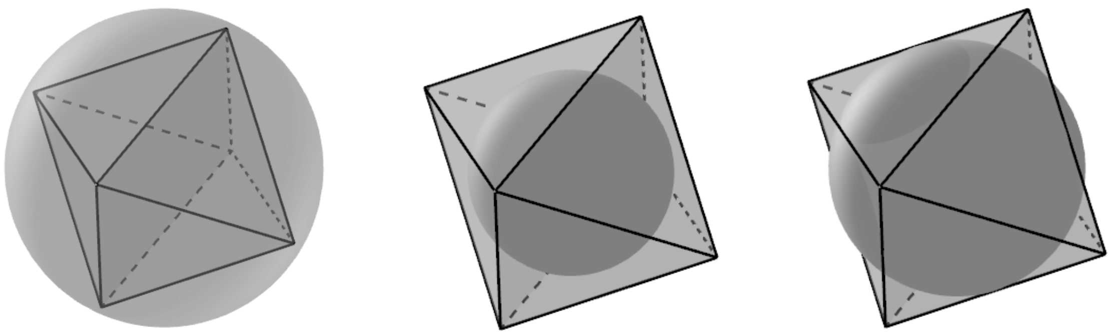
1.2.3 Osmistěn

Osmistěn neboli také *oktaedr* (Obr. 6) je tvořen osmi rovnostrannými trojúhelníky, a proto má osm stěn, dvanáct hran a šest vrcholů. Platónem mu byl přiřazen živel vzduchu, protože jej považoval za přechod mezi ohněm a vodou neboli čtyřstěnem a dvacetistěnem. Objev tohoto tělesa se připisuje Theaitetovi z Athén (Ashton, 2015).



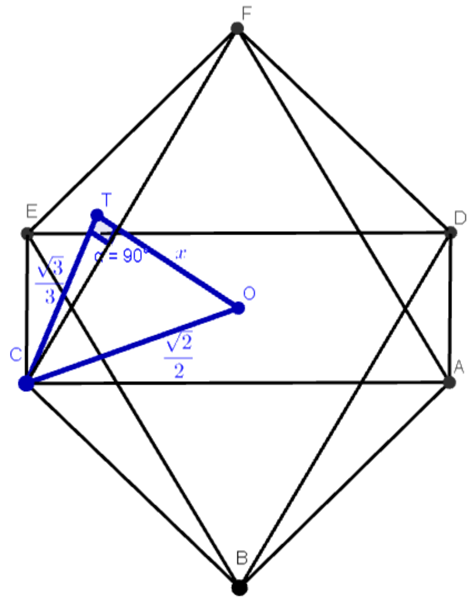
Obr. 6 - Osmistěn

Na Obr. 7 jsou znázorněny kulové plochy opsané a vepsané tělesu a kulová plocha, která se dotýká středů hran. Poloměry kulových ploch opsané a vepsané tomuto tělesu jsou ve stejném poměru jako u krychle, tedy $\sqrt{3}: 1$(Ashton, 2015).



Obr. 7 - kulová plocha opsaná osmistěnu, kulová plocha vepsaná osmistěnu a kulová plocha procházející středy hran osmistěnu

Důkaz, že velikosti poloměrů kulové plochy opsané a vepsané osmistěnu jsou v poměru $\sqrt{3}: 1$, bude nyní předloženo. Opět bude strana osmistěnu definována jako 1. Velikost poloměru kulové plochy opsané tělesu se rovná polovině velikosti úhlopříčky čtverce *ADEC*, tedy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (viz Obr. 8). Pro zjištění velikosti úsečky *CT* je nutno z jedné stěny osmistěnu vytvořit pravoúhlý trojúhelník. V tomto trojúhelníky se pomocí Pythagorovy věty vypočítá velikost $\frac{2}{3}$ výšky trojúhelníku, tedy $|CT| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Spojením středu osmistěnu (bod *O*), těžiště stěny osmistěnu (bod *T*) a jednoho vrcholu (bod *C*) vznikne pravoúhlý trojúhelník *CTO* (viz Obr. 8).



Obr. 8 – Osmistěn s pravoúhlým trojúhelníkem

Použitím Pythagorovy věty se vypočítá velikost poloměru kruhové plochy vepsané tělesu, tedy úsečky *x*:

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{2}{4} - \frac{3}{9}$$

$$x^2 = \frac{1}{6}$$

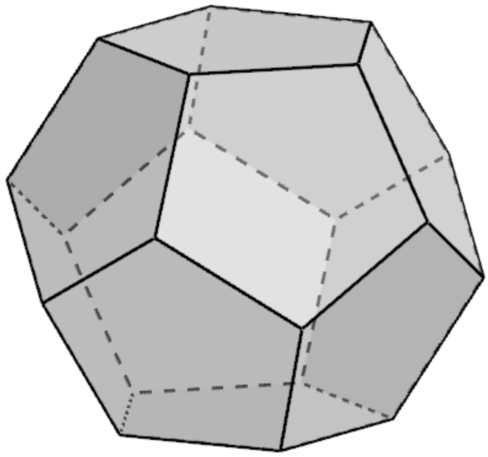
$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Poměr mezi poloměry kruhové plochy opsané a vepsané tělesu je:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} : \frac{\sqrt{6}}{6} = 3\sqrt{2} : \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{12}}{6} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} : 1$$

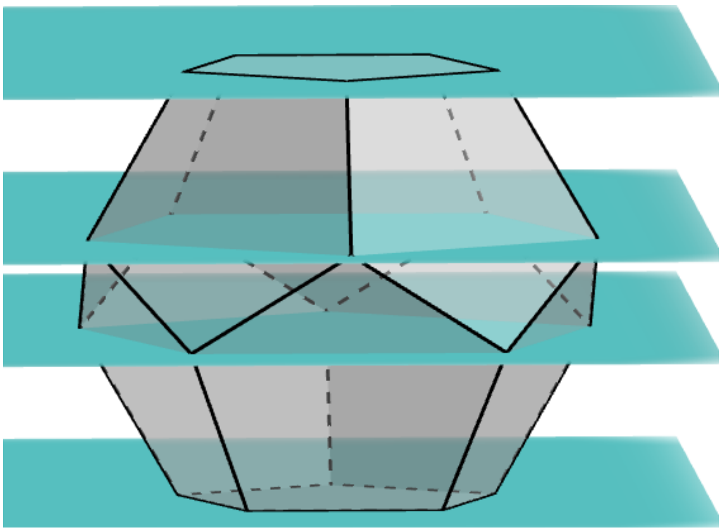
1.2.4 Dvanáctistěn

Dvanáctistěn, jinak také *dodekaedr* (Obr. 9) je tvořen dvanácti pravidelnými pětiúhelníky. Má dvanáct stěn, třicet hran a dvacet vrcholů, v každém z nich se setkávají právě tři stěny. Jelikož Platón už všechny živly přiřadil k ostatním tělesům, ve svém díle „Timaios“ k tomuto tělesu záhadně napsal: *„Zbylá pátá konstrukce, kterou Bůh použil na vyzdobení celého nebe souhvězdími“*. Z této věty bylo vydedukováno, že tomuto tělesu odpovídá vesmír – kosmos (Ashton, 2015).



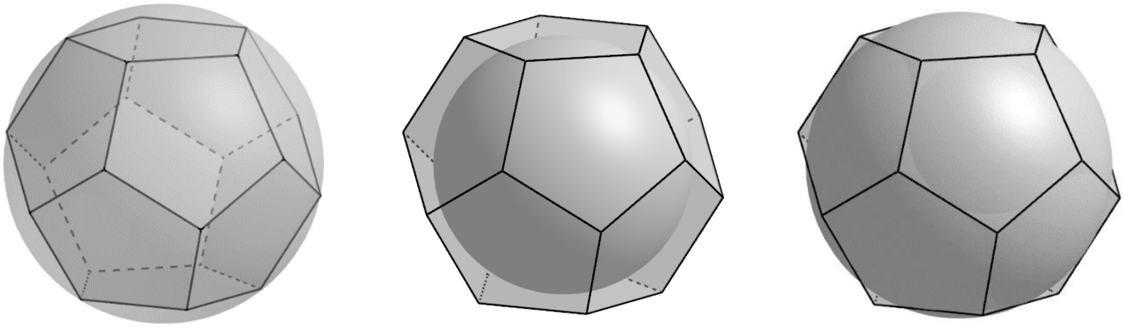
Obr. 9 - Dvanáctistěn

Je-li dvanáctistěn položen na vodorovnou plochu, pak budou jeho vrcholy ležet ve čtyřech vodorovných rovinách, které rozdělují dvanáctistěn na tři části (viz Obr. 10).



Obr. 10 – Dvanáctistěn rozdělený rovinami

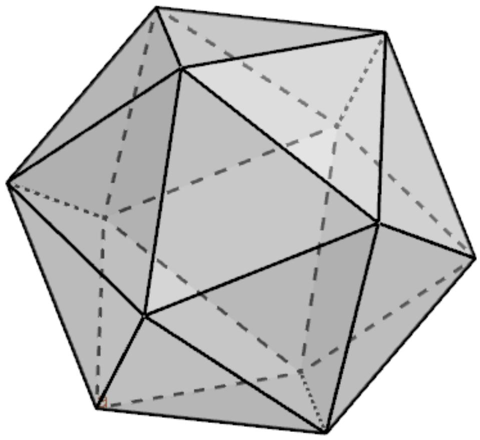
Těleso má opět tři sféry (viz Obr. 11): kulovou plochu opsanou tělesu, kulovou plochu vepsanou tělesu a kulovou plochu procházející středy hran (Ashton, 2015).



Obr. 11 - kulová plocha opsaná dvanáctistěnu, kulová plocha vepsaná dvanáctistěnu a kulová plocha procházející středy hran dvanáctistěnu

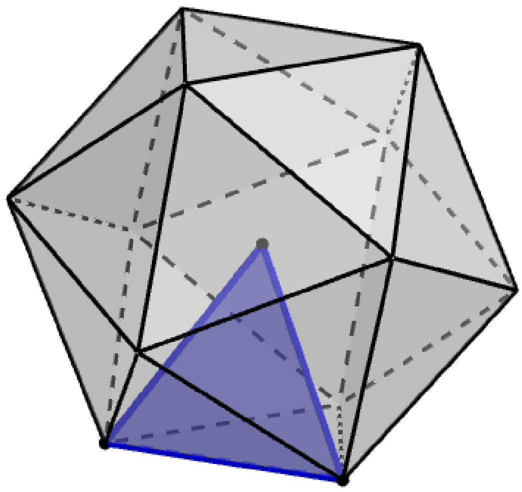
1.2.5 Dvacetistěn

Řecký název pro dvacetistěn je *ikosaedr* (Obr. 12). Sestává z dvaceti rovnostranných trojúhelníků, má tedy dvacet stran, třicet hran a dvanáct vrcholů. Jak již bylo zmíněno, Platón tomuto tělesu přiřadil živel vody, a to proto, že když je ze stejných trojúhelníků sestrojen čtyřstěn, osmistěn a dvacetistěn, tak právě dvacetistěn z nich bude největší. Protilehlé stěny dvacetistěnu tvoří tzv. *zlatý obdélník,* což je obdélník, jehož strany jsou v poměru *zlatého řezu* – více v kapitole 1.5 (Ashton, 2015).



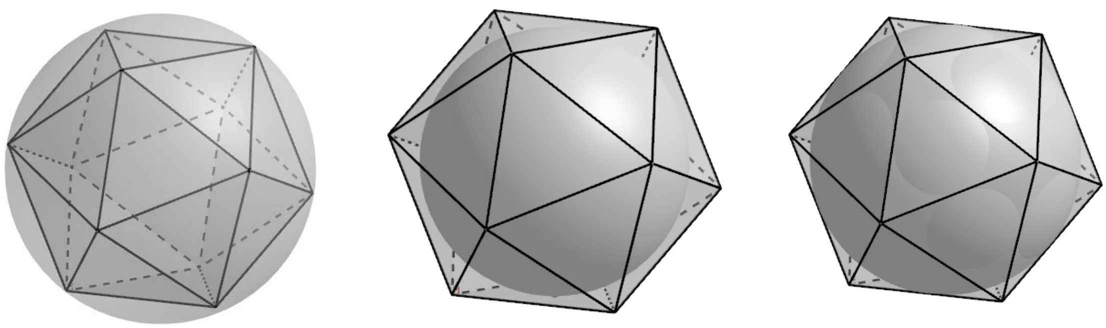
Obr. 12 - Dvacetistěn

Zajímavostí je, že pokud jsou spojeny oba konce jedné hrany se středem dvacetistěnu, vznikne rovnoramenný trojúhelník a tento trojúhelník je podobný s trojúhelníky, které tvoří stěny Velké pyramidy v Gíze v Egyptě (viz Obr. 13).



Obr. 13 – Dvacetistěn s rovnoramenným trojúhelníkem

Jak je vidět na Obr. 14, má i dvacetistěn kulové plochy opsané a vepsané dvacetistěnu a také kulovou plochu, která prochází středy hran tělesa (Ashton, 2015).

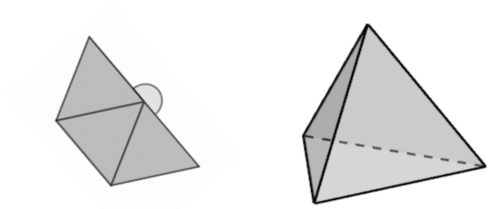


Obr. 14 - kulová plocha opsaná dvacetistěnu, kulová plocha vepsaná dvacetistěnu a kulová plocha procházející středy hran dvacetistěnu

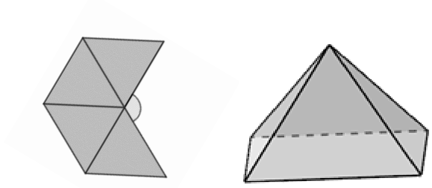
1.3 Pouze pět platónských těles

Nyní bude dokázáno, že platónských těles je opravdu pouze pět. Důležité je si uvědomit, že pravidelný mnohoúhelník má shodné strany i úhly, pravidelný mnohostěn má shodné stěny a nerozlišitelnost vrcholů. Nerozlišitelnost vrcholů lze chápat tak, že jeden vrchol je možno převést pomocí symetrie objektů na druhý. Jedinými konvexními pravidelnými mnohostěny je právě pět platónských těles, což je vysvětleno níže (Ashton, 2015).

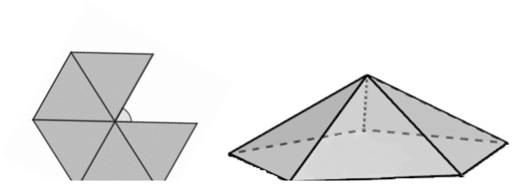
Aby se mohl vymezit prostorový úhel, budou vždy zapotřebí alespoň tři mnohoúhelníky. Nelze sestrojit takové těleso, kde by se u jednoho vrcholu setkávaly pouze dvě stěny – mnohoúhelníky. Pro čtyřstěn, osmistěn a dvacetistěn použijeme rovnostranné trojúhelníky a prostorový úhel je možno vymezit právě se třemi (Obr. 15), čtyřmi (Obr. 16) a pěti (Obr. 17) trojúhelníky okolo jednoho bodu. Se šesti trojúhelníky by výsledek ležel už v rovině (Obr. 18) (Ashton, 2015).



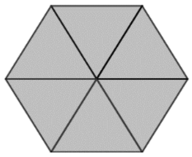
Obr. 15 – Použití tří rovnostranných trojúhelníku



Obr. 16 – Použití čtyř rovnostranných trojúhelníku

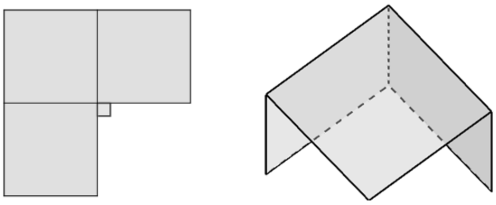


Obr. 17 – Použití pěti rovnostranných trojúhelníku

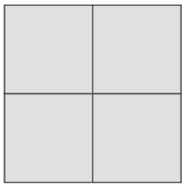


Obr. 18 – Použití šesti rovnostranných trojúhelníku

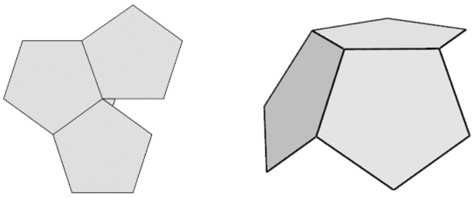
U obrázků 16 a 17 lze vidět, že jsou to jen části daných platónských těles, osmistěnu, respektive dvacetistěnu. Použijí-li se tři čtverce, vytvoří se polovina krychle (Obr. 19), při použití čtyř čtverců (Obr. 20) bude podobný závěr jako u šesti trojúhelníků, tedy výsledek by se zobrazil do roviny. Tři pravidelné pětiúhelníky, které se setkávají v jednom bodě, mají pouze jedno řešení velikosti prostorového úhlu (Obr. 21). Pro tři pravidelné šestiúhelníky, které mají jeden společný bod, leží už výsledek v rovině (Obr. 22), a je tedy jasné, že další mnohoúhelníky nemohou být použity. Jelikož se pomocí pravidelných mnohoúhelníků vymezilo pouze pět prostorových úhlů, existuje právě pět konvexních pravidelných mnohostěnů (Ashton, 2015).



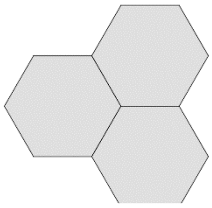
Obr. 19 – Použití tří čtverců



Obr. 20 – Použití čtyř čtverců

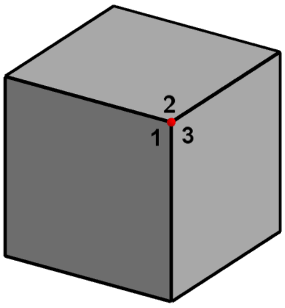


Obr. 21 – Použití tří pětiúhelníků

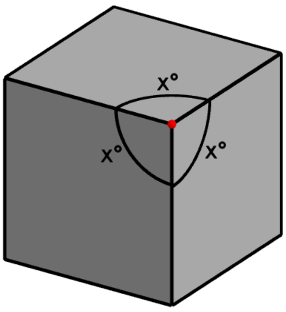


Obr. 22 – Použití tří šestiúhelníků

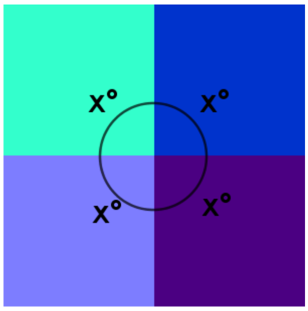
Pokud se zdá tento důkaz příliš složitý, je zde i jiné, jednodušší vysvětlení. Z obrázku 23 lze vidět, že minimálně tři stěny tělesa mají společný právě jeden vrchol. Vnitřní úhly, které mají společný právě jeden vrchol musí být v součtu menší než 360° (Obr. 24). Obrázek 25 ukazuje, že pokud by byl úhel roven 360°, pak se tvar „vyrovná" – zobrazí se do roviny (Pierce, 2018).



Obr. 23 – Společný vrchol stěn



Obr. 24 – Společný vrchol úhlů



Obr. 25 – Vyrovnání tvaru

Jelikož jsou stěny platónských těles pravidelné mnohostěny, pak připadají v úvahu pouze následující možnosti:

Rovnostranný trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikost 60°, dává:

- Tři trojúhelníky setkávající se v jednom vrcholu ($3 \cdot 60° = 180°$)
- Čtyři trojúhelníky setkávající se v jednom vrcholu ($4 \cdot 60° = 240°$)
- Nebo pět trojúhelníků setkávajících se v jednom vrcholu ($5 \cdot 60° = 300°$)

Čtverec, který má velikost vnitřních úhlů 90°, umožňuje pouze jednu variantu:

- Tři čtverce setkávající se v jednom vrcholu ($3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$)

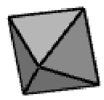
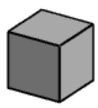
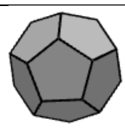
Pravidelný pětiúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikost 105°, dávají opět pouze jednu možnost:

- Tři pětiúhelníky setkávající se v jednom vrcholu ($3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$)

Pravidelný šestiúhelník, který má vnitřní úhly o velikosti 120°, nebude možno sestrojit v prostoru, protože $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, a tudíž by se tvar zobrazil do roviny. Z toho jasně vyplývá, že pravidelný pětiúhelník je největší možný pravidelný mnohoúhelník, který je možno použít pro vytvoření pravidelného tělesa (Pierce, 2018).

Shrnutí těchto výsledků zobrazuje Tabulka 1:

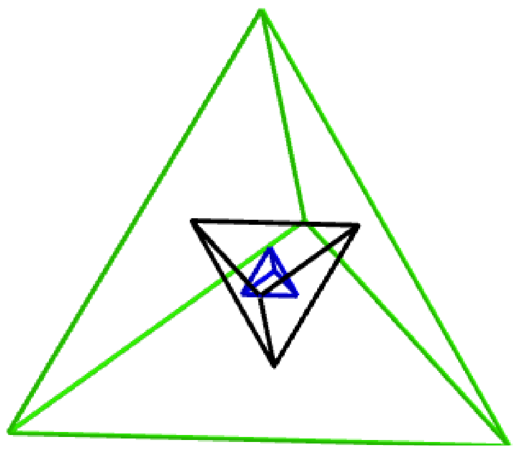
Tabulka 1 – Shrnutí výsledků vlastností pravidelných mnohostěnů

Útvary setkávající se v jednom vrcholu	Úhly se společným vrcholem	Těleso	
3 trojúhelníky	180°	Čtyřstěn (tetrahedron)	
4 trojúhelníky	240°	Osmistěn (octahedron)	
5 trojúhelníků	300°	Dvacetistěn (icosahedron)	
3 čtverce	270°	Šestistěn (krychle)	
3 pětiúhelníky	324°	Dvanáctistěn (dodecahedron)	

1.4 *Páry platónských těles*

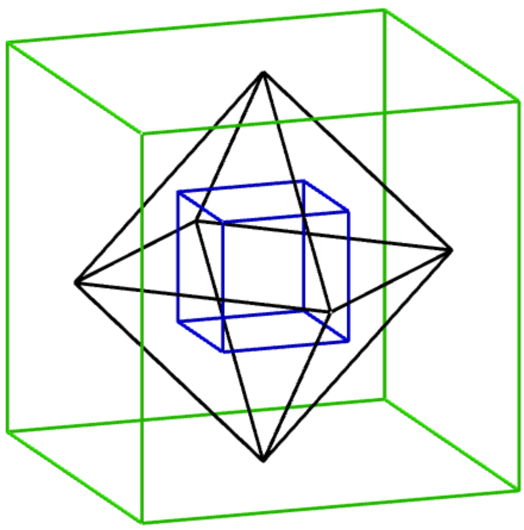
Existence párů neboli také dualita pravidelných mnohostěnů znamená, že lze jednomu tělesu vepsat těleso druhé, a to takovým způsobem, že vrcholy jednoho tělesa jsou zároveň středy stěn druhého tělesa. Z toho vyplývá, že je nutné, aby počet vrcholů jednoho tělesa byl stejný jako počet stěn tělesa druhého a naopak (Ashton, 2015).

Jako první bude popsán čtyřstěn. Spojením středů jeho stěn se vytvoří další čtyřstěn, a tedy čtyřstěn je duální sám se sebou (Obr. 26).



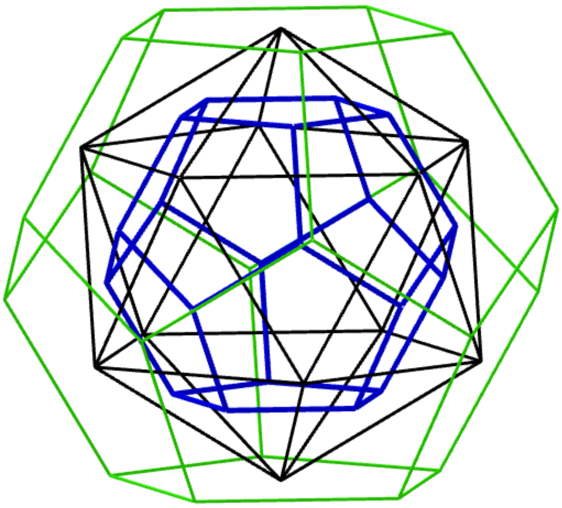
Obr. 26 – Dualita čtyřstěnu

Ze spojení středů stěn krychle vznikne osmistěn a stejně tak ze spojení středů stěn osmistěnu vznikne krychle (Obr. 27).



Obr. 27 – Dualita šestistěnu a osmistěnu

Zbývají poslední dvě tělesa, dvanáctistěn a dvacetistěn, která jsou navzájem duální (Obr. 28).

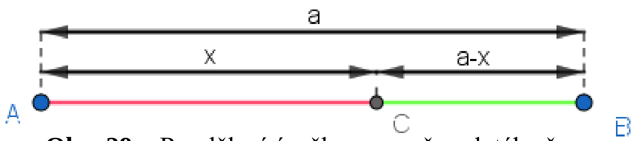


Obr. 28 – Dualita dvanáctistěnu a dvacetistěnu

1.5 Zlatý řez

V kapitole 1.2.5 byl zmíněn tzv. *zlatý obdélník* a *zlatý řez*. V této kapitole budou tyto dva pojmy více přiblíženy, protože mají spojitost s platónskými tělesy.

Zlatý řez je pojem s téměř pětitisíciletou historií sahající až do starého Egypta, kde se používal při stavbě pyramid. První písemné zmínky o tomto pricnipu pocházejí z díla řeckého matematika Euklida – „Základy". *Zlatý řez* je rozdělení úsečky na dva díly tak, že poměr větší části úsečky ku menší části úsečky je roven poměru celé úsečky k větší části úsečky (Obr. 29). Tomuto poměru se říká *zlatý poměr* (Livio, 2006).



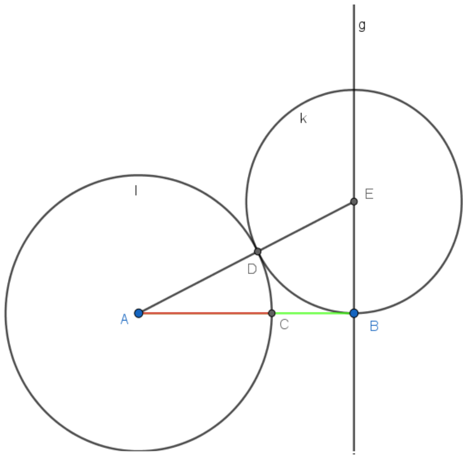
Obr. 29 – Rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu

Vztah pro zlatý poměr je: $\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$. Tento poměr je dán konstantou, která je nazývána *zlaté číslo*, značí se řeckým písmenem φ a jeho hodnota je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots$

Existuje několik způsobů, jak sestrojit zlatý řez. Na obr. 30 je zkonstruován jeden z možných způsobů sestrojení *zlatého řezu* v programu GeoGebra.

Postup:

1. $AB; libovolná\ velikost$
2. $g\ ;g \perp AB$
3. $E\ ;|BE| = \frac{1}{2}|AB|$
4. $k\ ;k\ (E;|BE|)$
5. $D\ ;D \in k \cap AE$
6. $l\ ;l\ (A;|AD|)$
7. $C\ ;C \in l \cap AB$



Obr. 30 – Konstrukce zlatého řezu

Bod *C* dělí úsečku *AB* v poměru *zlatého řezu*. Tedy $\frac{|AC|}{|CB|} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Protože trojúhelník *ABE* je pravoúhlý, pak $|BE| = a$ a $|AB| = 2a$. Použitím Pythagorovy věty se zjistí:

$$|AE| = \sqrt{|AB|^2 + |BE|^2} = \sqrt{4 \cdot a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{5}$$

Dále,

$$|AD| = a \cdot \sqrt{5} - |BC| = a \cdot \sqrt{5} - a = a \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) = |AC|$$

Následně,

$$|BC| = 2a - |AC| = 2a - a \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) = a \cdot (3 - \sqrt{5})$$

Pravá strana vztahu pro *zlatý poměr* je $\frac{a}{x}$ (viz výše), tedy:

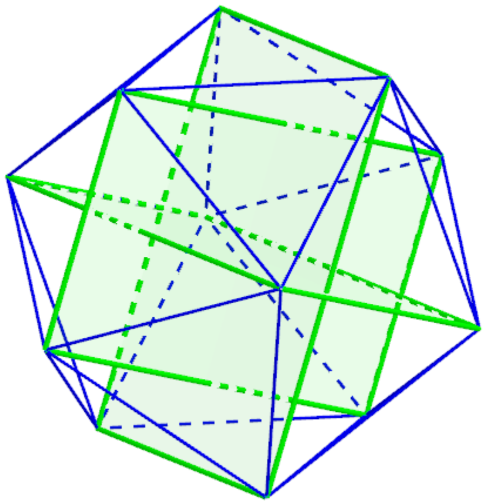
$$\frac{2a}{|AC|} = \frac{2a}{a \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

A to se musí rovnat levé straně vztahu pro *zlatý poměr* $\frac{x}{a-x}$ (viz výše), tedy:

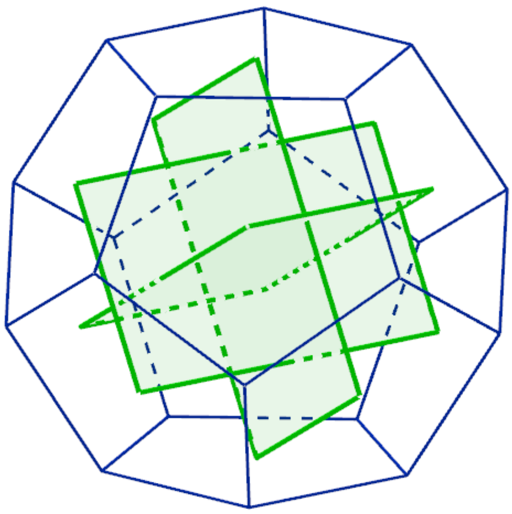
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{a \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{a \cdot (3-\sqrt{5})} = \frac{2 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Je dokázáno, že bod *C* dělí úsečku *AB* v poměru *zlatého řezu*.

Pojem *zlatý řez* byl zaveden hlavně kvůli odvozenému pojmu *zlatý obdélník.* Je to obdélník, jehož strany jsou v poměru *zlatého řezu*. Vyskytuje se u dvou platónských těles, konkrétně u dvanáctistěnu a dvacetistěnu. U dvacetistěnu *zlatý obdélník* vznikne spojením dvou protilehlých stěn. Vezmou-li se tři *zlaté obdélníky*, které leží v navzájem kolmých rovinách, vytvoří dvanáct vrcholů dvacetistěnu. Průsečíkem těchto obdélníků je střed *ikoseadru* (Obr. 31). Vychází se z poznatků o pravidelném pětiúhelníku, které jsou popsány v kapitolách 4.2.2.4 a 4.2.2.5. Ve dvanáctistěnu se sestrojí *zlatý obdélník* spojením protilehlých středů stěn (Obr. 32). Obou tělesům je možno vepsat tři navzájem kolmé *zlaté obdélníky* (Livio, 2006).



Obr. 31 – Zlaté obdélníky ve dvacetistěnu



Obr. 32 – Zlaté obdélníky ve dvanáctistěnu

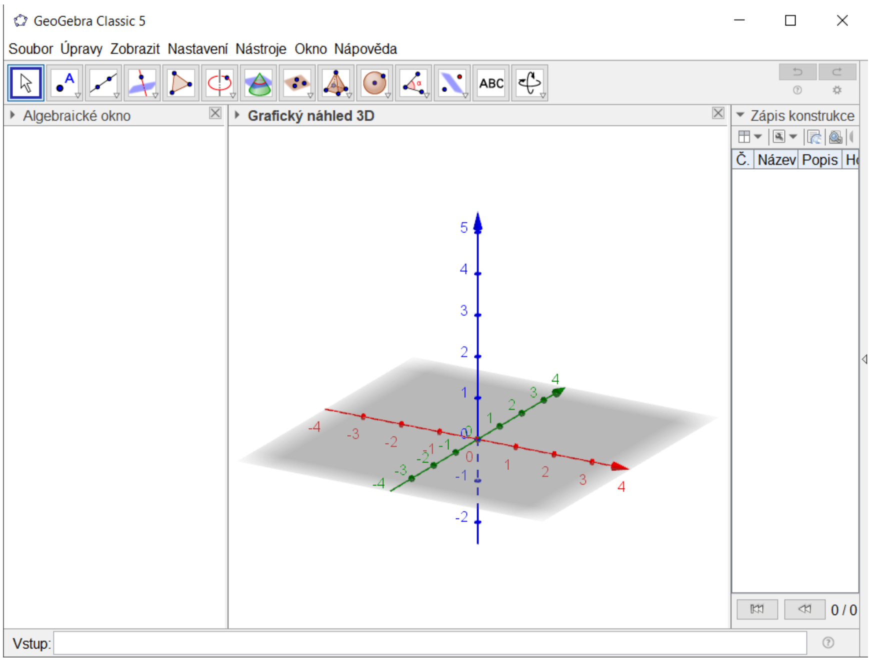
2. *Program GeoGebra*

Program GeoGebra lze definovat jako dynamický matematický software. Spojením geometrie, algebry, tvorby grafů, statistiky a tabulkového procesoru do jednoho balíku je umožněno GeoGebru využívat na všech úrovních vzdělávání. (GeoGebra, 2013)

V roce 2001 Markus Hohenwarter vyvinul GeoGebru na univerzitě v Salzburgu jako program pro výuku a učení matematiky. Tento program získal několik ocenění za nejlepší vzdělávací software a je možné ho bezplatně získat na adrese: https://www.geogebra.org/, a to pro operační systémy Microsoft Windows, Linux a Mac OS X (GeoGebra, 2013).

Nejnovější verzí je GeoGebra Klasik 6. V této se bude pracovat s verzí GeoGebra Klasik 5.

Pří spuštění programu se zobrazí hlavní okno, které si může uživatel dle vlastních potřeb uspořádat. Pro potřeby této práce je nutné si zobrazit **Grafický náhled 3D**, a to je možno udělat dvěma způsoby. První způsob je, že se v panelu **Menu** najde možnost **Zobrazit** a poté se klikne na **Grafický náhled 3D**. Druhý způsob je použití klávesové zkratky *CTRL+SHIFT+3*. Následně se zobrazí okno, které uživatel potřebuje (viz Obr. 33). Jelikož tvůrci GeoGebry chtěli, aby se s programem pracovalo co nejlépe, jsou zde dvě možnosti, jak s ním pracovat: buď za pomoci myši, kdy se pod panelem **Menu** z **Panelu nástrojů** zvolí některý z nástrojů, anebo se mohou zadávat příkazy do **Vstupního pole**, které se nachází ve spodní části okna. Geometrické objekty, 3D objekty, se zobrazují do **Grafického náhledu 3D**, který zaujímá největší část okna. V levé části okna se nachází **Algebraické okno**, ve kterém se zobrazí seznam vytvořených objektů a jejich popis (souřadnice bodu, velikost úseček, analytické vyjádření narýsovaných objektů jako přímka, kružnice, koule atd.). **Zápis konstrukce**, ve kterém se objevují jednotlivé kroky konstrukce, se nachází v pravé části okna. Jak již bylo zmíněno dříve, tak vzhled okna si uživatel může přizpůsobit dle svých představ, a tedy pro lepší viditelnost objektů je možné **Algebraické okno** i **Zápis konstrukce** zavřít.



Obr. 33 - Okno programu GeoGebra – Grafická náhled 3D

2.1 *Přehled nástrojů v prostředí GeoGebra pro práci s 3D objekty*

Práce s programem je pro uživatele velice jednoduchá. Jen pomocí myši lze vytvářet různé objekty jak v rovině, tak v prostoru. Tyto objekty jsou svázány vzájemnými vztahy, a tím vznikají geometrické obrazce.

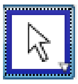
Objekty se vytvářejí jediným kliknutím myší do plochy. Prostředí je vybaveno kvalitně zpracovanou nápovědou, stručně vysvětlující použití jednotlivých nástrojů. Grafické zpracování funkčních tlačítek je i samo o sobě nápovědou. Modře označené objekty jsou ty, které musí uživatel už mít vytvořené. Červené objekty jsou pak ty, jež se vytvoří programem.

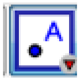
Práce s programem je podobná klasickému rýsování pomocí pravítka a kružítka na papír nebo na školní tabuli. Například u náročnějšího rýsování rovnoběžek stačí pouze vybrat nástroj Rovnoběžka, označit bod, kterým bude nově vytvořená přímka procházet, a poté stačí označit přímku, se kterou má být vytvořená přímka rovnoběžná.

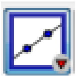
GeoGebra se snaží být pro uživatele nejvhodnějším programem pro práci s geometrickými objekty, a proto lze s hotovými objekty myší lehce pohybovat.

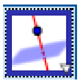
Jednou z nejdůležitějších části programu je **Panel nástrojů**. Na něm je několik tlačítek, která mají v dolním pravém rohu šipku, pod kterou se skrývají další tlačítka s jinými funkcemi. Poslední volba uživatele se po kliknutí stává aktuální a zůstává na tlačítku zobrazena.

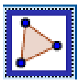
Níže jsou popsána jednotlivá tlačítka v **Panelu nástrojů**.

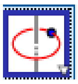
 Tlačítko *Ukazovátko* umožní uchopení jakéhokoli objektu.

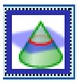
 Tlačítko *Bod* vytvoří nový bod na pracovní ploše. Dále jsou pod tímto tlačítkem skryty možnosti vytvořit *Bod na objektu*, *Průsečík* mezi několika objekty, *Střed* mezi dvěma body a funkce *Připojit/Oddělit bod*.

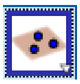
 Pomocí tlačítka *Přímka* vytvoří program přímku. Další volbami jsou: *Úsečka, Úsečka s pevnou délkou*, *Polopřímka*, *Vektor* a *Vektor z bodu*.

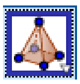
 Tlačítko *Kolmice* vytvoří kolmici k přímce nebo rovině. Funkce *Rovnoběžka, Osa úhlu*, *Tečny z bodu, Polára* a *Množina bodů* jsou další možnosti skryté po tímto tlačítkem.

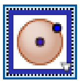
 *Mnohoúhelník* je tlačítko, které vytvoří libovolný mnohoúhelník podle toho, kolik bodů bude označeno. Toto tlačítko v Grafickém náhledu 3D více možností neskrývají.

 Tlačítko *Kružnice daná osou a bodem* pod sebou skrývá tyto funkce: *Kružnice daná středem, poloměrem a směrem, Kružnice dána třemi body, Kruhový oblouk, Kruhový oblouk procházející třemi body, Kruhová výseč, Kruhová výseč k oblouku daná třemi body, Elipsa, Hyperbola, Parabola* a *Kuželosečka daná pěti body.*

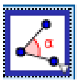
 *Průnik dvou ploch* je samostatné tlačítko bez dalších možností.

 Výběrem tlačítka *Rovina procházející třemi body* a kliknutím na tři body se vytvoří rovina. Dalšími možnostmi skrytými pod tímto tlačítkem jsou: *Rovina, Kolmá rovina* a *Rovnoběžná rovina.*

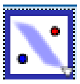
 Tlačítko *Jehlan* pod sebou ukrývá několik dalších těles, jako jsou *Hranol, Kužel, Válec, Čtyřstěn* a *Krychle*. Dále tu jsou tlačítka *Vytažení do jehlanu nebo kužele, Vytažení do hranolu nebo válce* a *Síť.*



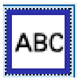
Tlačítko *Koule zadaná středem a bodem* má pod sebou ještě jednu možnost pro vytvoření koule, a to *Koule zadaná středem a poloměrem.*



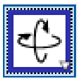
Pod tlačítkem *Úhel* jsou dále skryta tlačítka *Vzdálenost, Obsah* a *Objem.*



Tlačítko *Rovinná souměrnost* má pod sebou další funkce, které vytvoří shodná nebo podobná zobrazení: *Osová souměrnost, Středová souměrnost, Otočení kolem přímky, Posunutí* a *Stejnolehlost.*



Pro vytvoření textu je vhodné použít samostatně ležící tlačítko.

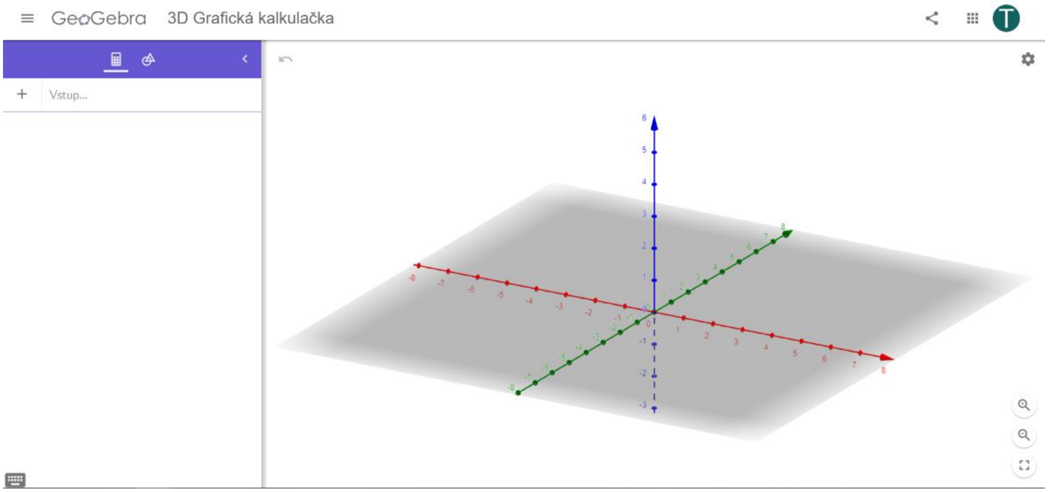


Tlačítko *Otočit Grafický náhled 3D* umožní libovolně otáčet vzniklými objekty. Dále jsou zde tlačítka *Pohybovat s nákresnou*, pro případ, že chceme zobrazit i pohled v 2D, *Zvětšit, Zmenšit, Zobrazit/skrýt objekt, Zobrazit/skrýt popis, Kopírovat formát, Zrušit* a *Pohled podle objektu.*

2.2 3D grafická kalkulačka

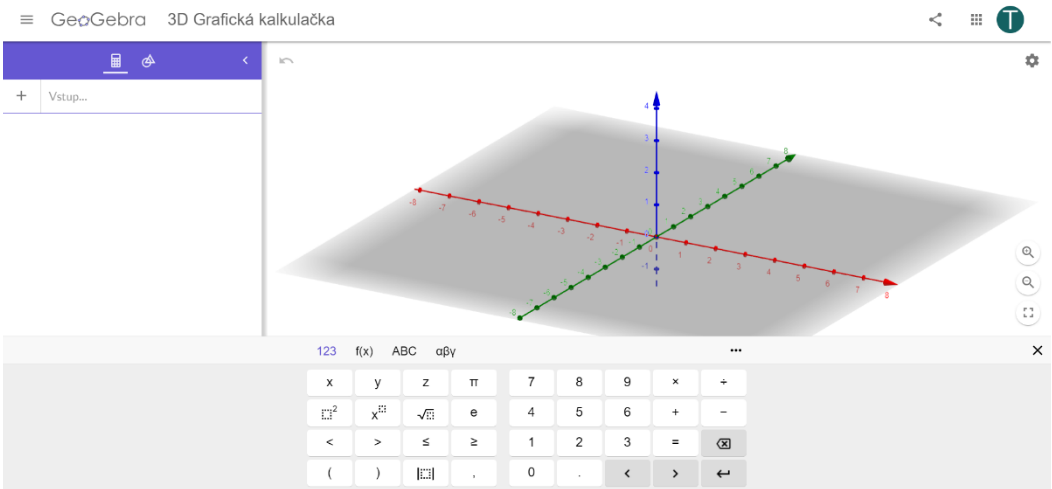
Na webových stránkách GeoGebry (https://www.geogebra.org/) je možnost si stáhnout mimo jiné i aplikaci *3D grafická kalkulačka*. Tato aplikace je vytvořena primárně pro mobilní zařízení, ale lze ji spustit také na počítači, a to jako online verzi. Není však možné si ji do počítače stáhnout a pracovat v ní. Kliknutím na tlačítko „stáhnout" bude stránka přesměrována na stránky Google Play, kde je možné si aplikaci stáhnout přímo do mobilního zařízení. Pokud je mobilní zařízení synchronizované s počítačem, jakmile se na svém mobilním zařízením uživatel připojí k internetu, začne se aplikace sama stahovat a po nainstalování ji může uživatel začít používat. V této aplikaci je možno pracovat pouze s 3D objekty, nikoli s objekty v rovině.

Po spuštění aplikace na počítači v online režimu se v nové kartě (případně v novém okně) zobrazí úvodní obrazovka aplikace (viz Obr. 34).



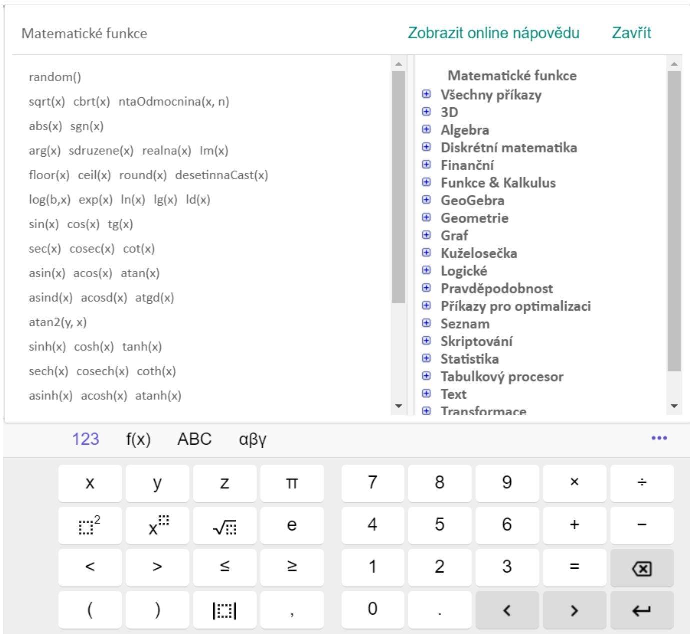
Obr. 34 - Okno programu 3D Grafická kalkulačka

Nahoře vlevo se nachází rolovací menu, název programu a aplikace. Pod tímto jsou dva znaky, znak kalkulačky a dva geometrické útvary (kruh a trojúhelník). Pod znakem kalkulačky se zatím zobrazí pouze textové pole s nápisem *Vstup*. Po kliknutí do textového pole se zobrazí klávesnice s pomocnými symboly a čísly, kterou uživatel může změnit na písmennou klávesnici (viz Obr. 35).



Obr. 35 - Okno programu 3D Grafická kalkulačka s klávesnicí

Po kliknutí na tři tečky, které leží v pravé horní části klávesnice, se zobrazí nápověda funkcí, jež může uživatel potřebovat (viz Obr. 36).

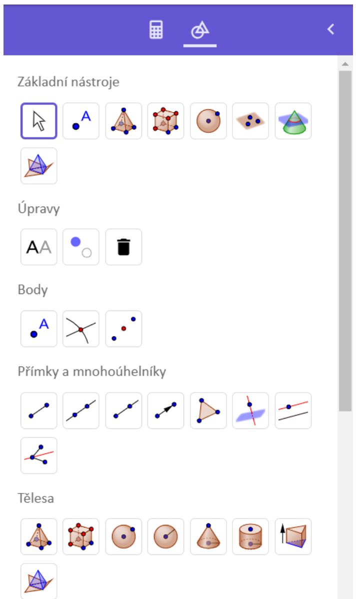


Obr. 36 – Klávesnice s nápovědou

Uživatel si zvolí funkci podle toho, jakou práci právě potřebuje dělat. Pokud uživatel zná přesný název příkazu, který chce použít, je jednodušší kliknout na *Všechny příkazy* a tam si potřebný příkaz najít. Na obr. 37 je zvolen příkaz *Dvanáctistěn* a v levé části okna se zobrazí možnosti, jak toto těleso vytvořit. Princip sestrojení je stejný jako v plné verzi programu GeoGebra, který je popsán v další části práce.

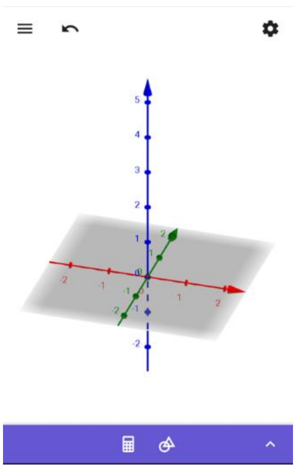
Obr. 37 – Nápověda – vybraná funkce – dvanáctistěn

Pod znakem kruhu a trojúhelníku se zobrazí možnosti základních nástrojů a útvarů, které se mohou použít (viz Obr. 38). Po kliknutí na *Více* bude zobrazeno více možností nástrojů.

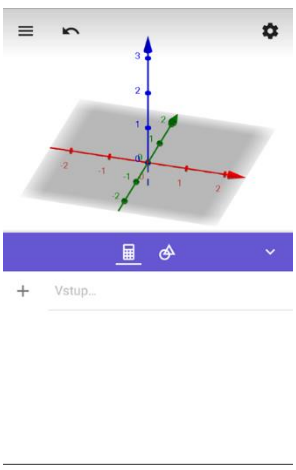


Obr. 38 – Základní funkce

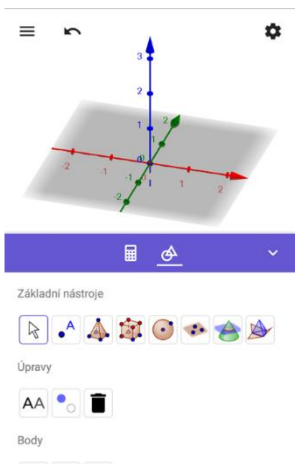
Prostředí aplikace v mobilní verzi je dosti podobné, jen samozřejmě záleží na rozlišení displeje zařízení. Úvodní obrazovka aplikace (viz Obr. 39) zobrazí pouze 3D nákresnu. Ve spodní části obrazovky jsou opět možnosti, které se skrývají pod znakem kalkulačky (viz Obr. 40), příkazový řádek a pod znakem kruhu s trojúhelníkem útvary k sestrojení (viz Obr. 41).



Obr. 39 – Úvodní obrazovka



Obr. 40 – Možnosti kalkulačky



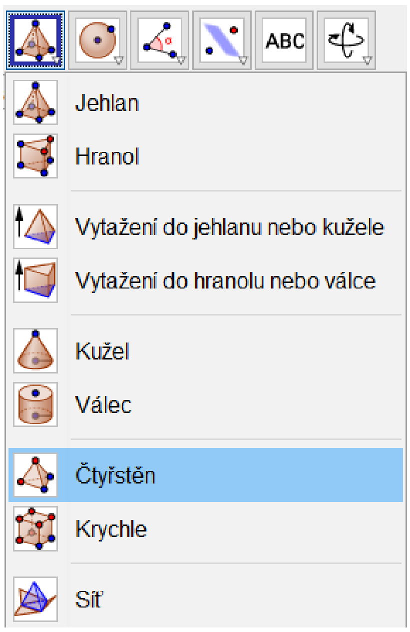
Obr. 41 – Možnosti útvarů

II. Praktická část

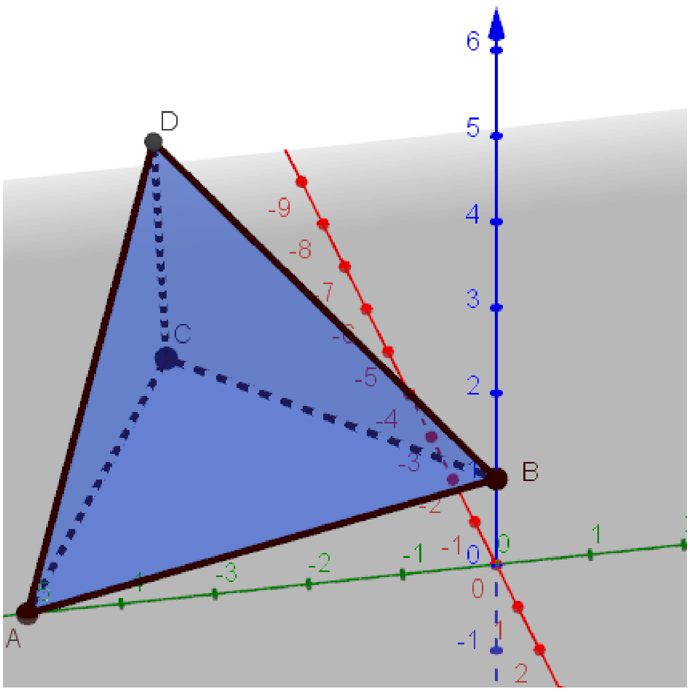
3. *Sestrojení platónských těles v GeoGebře*

3.1 Čtyřstěn

Čtyřstěn je v GeoGebře možné sestrojit čtyřmi způsoby. První, nejjednodušší způsob je, že se z lišty *Panel nástrojů* vybere kolonka *Jehlan* a v možnostech, které jsou ukryty pod touto ikonou, se zvolí *Čtyřstěn* (viz Obr. 42). Pokud kurzor myši chvíli zůstane na této ikoně, pak se zobrazí nápověda, co se má dělat. Nejprve je nutné vybrat libovolnou rovinu a pak zvolit dva body. Vybraná rovina určuje rovinu podstavy čtyřstěnu a body jsou vrcholy čtyřstěnu na této stěně. Po vybrání funkce *Čtyřstěn* a kliknutí na libovolné místo v *Grafickém náhledu 3D* se zobrazí *bod A* a po dalším kliknutí, opět na libovolné místo, se vytvoří *bod B* a zároveň *čtyřstěn ABCD* (viz Obr. 43).

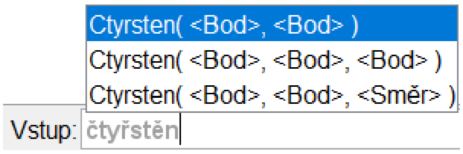


Obr. 42 - Výběr ikony Čtyřstěn



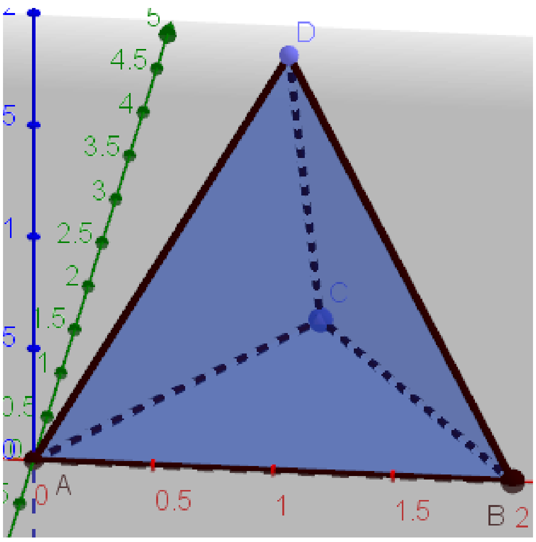
Obr. 43 - Čtyřstěn ABCD – pomocí Panelu nástrojů

Další způsoby sestrojení jsou si dosti podobné. Všechny se provádějí pomocí *Příkazového řádku*, který je umístěn dole v okně programu, kde je napsáno *Vstup*. Pokud je nastavena česká verze programu, do textového pole stačí napsat „čtyřstěn“ a hned se objeví tři možnosti sestrojení tohoto tělesa (viz Obr. 44).



Obr. 44 - Možnosti sestrojení čtyřstěnu

První možností je „ctyrsten (<Bod>, <Bod>)“. Pro použití tohoto postupu je nutné mít nejprve sestrojené objekty, které program vyžaduje. Těmito objekty jsou dva body. Nejdříve se v *Panelu nástrojů* vybere druhá funkce *Nový bod* a klikne se tam, kde chce uživatel mít sestrojen první bod, následně kliknutím zvolí místo druhého bodu. Jsou sestrojeny dva body. Do *Příkazového řádku* se začne opět psát slovo „čtyřstěn“ a zvolí se první možnost, stisknutím klávesy *Enter*. Po stisknutí se ihned označí první bod, místo něj se zadá název bodu, v tomto případě to je bod *A*. Je nutné si dávat pozor na velká a malá písmena. Poté se stisknutím tabulátoru označení přesune na další bod, bod *B*. Jakmile se zadá název druhého bodu, program okamžitě vytvoří čtyřstěn *ABCD* (viz Obr. 45). Body označené černou barvou jsou body vytvořené uživatelem.

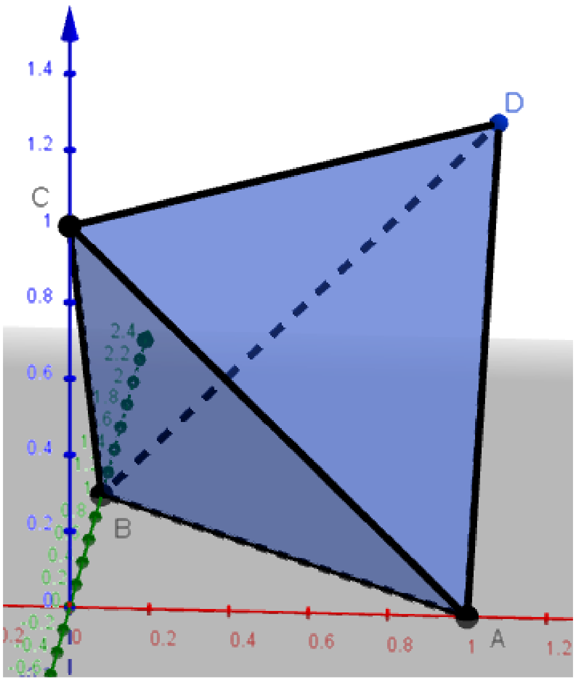


Obr. 45 - Čtyřstěn ABCD - pomocí (<Bod>, <Bod>)

Stisknutím pravého nebo levého tlačítka myši mimo objekty je možné pohybovat celou pracovní plochou. K jejímu přiblížení nebo oddálení slouží kolečko u myši.

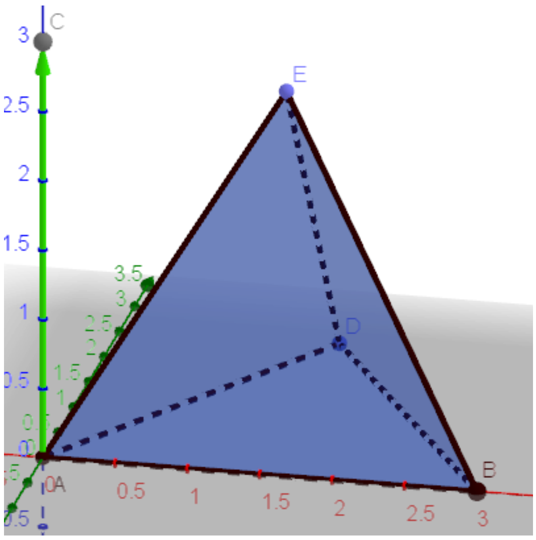
Uchopením bodu B a potáhnutím doleva nebo doprava je možno čtyřstěn libovolně zvětšovat nebo zmenšovat. Bodem C je také možné hýbat, ale tím se bude těleso pouze otáčet podél osy, kterou tvoří hrana AB. Body A a D jsou pevně fixované, kliknutím na ně se bude pouze otáčet pracovní plochou.

Druhou možností je „ctyrsten (<Bod>, <Bod>, <Bod>)“. Tento způsob je složitější, a to z toho důvodu, že se musí vytvořit tři body, které musí tvořit rovnostranný trojúhelník (podstavu čtyřstěnu). Aby byl postup konstrukce co nejjednodušší jsou souřadnice tří bodů zvoleny následovně: $A = [1,0,0],\ B[0,1,0]\ a\ C = [0,0,1]$. Nyní jsou sestrojeny tři body a stejně jako u předchozího postupu, se budou do *Příkazového řádku* postupně zadávat názvy vytvořených bodů pro vybranou možnost sestrojení. Zadáním posledního bodu se vytvoří čtyřstěn *ABCD* (viz Obr. 46). Body označené černou barvou jsou body vytvořené uživatelem.



Obr. 46 - Čtyřstěn ABCD - pomocí (<Bod>, <Bod>, <Bod>)

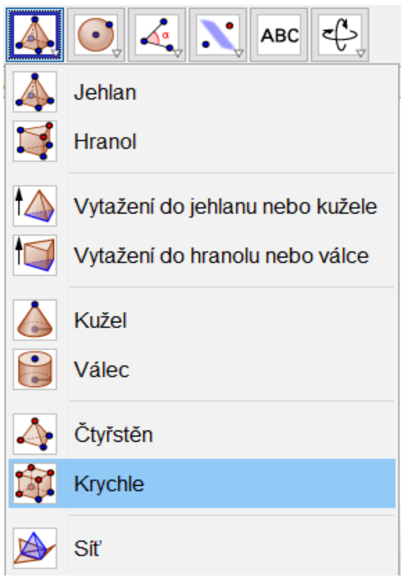
Čtvrtý a poslední způsob sestrojení čtyřstěnu je „ctyrsten (<Bod>, <Bod>, <Smer>). Směrem se myslí vektor. Je nutno sestrojit dva body, které budou určovat hranu tělesa, a vektor. V *Panelu nástrojů* pod ikonou *Přímka* se nachází ikona *Vektor*. Po jejím vybrání je třeba zadat počáteční a koncový bod vektoru. U vektoru je nutno dát pozor, jak je sestrojen. Vektor musí být kolmý k rovině spodní stěny tělesa, protože vektor má reprezentovat výšku ke spodní stěně tělesa a výška je k této stěně kolmá. Pokud by vektor kolmý nebyl, čtyřstěn vytvořený pomocí tohoto příkazu nebude definován. Pro jednoduchost je v příkladu vybrán vektor, jehož počáteční bod je počátek soustavy souřadnice a zároveň je to třetí bod roviny, ve které bude spodní stěna tělesa, a koncový bod leží na ose *z*, jež je kolmá k ose *x*, na které jsou body *A* a *B*. Jelikož byl za počáteční bod vektoru zvolen již dříve vytvořený bod *A*, pak rovina, jejíž součástí bude spodní stěna tělesa, bude rovina daná osou *x* a osou *y*. Na velikosti vektorů nezáleží, protože program si sám vypočítá, jak má být výška dlouhá, aby vytvořila čtyřstěn. Po zadání bodů a vektoru program ihned vytvoří čtyřstěn *ABDE* (viz Obr. 47). Bod *C* byl použit jako koncový bod vektoru *u*. Uživatelem vytvořené body mají barvu černou a vektor barvu zelenou. Zbytek objektů i samotné těleso vytvořil program sám.



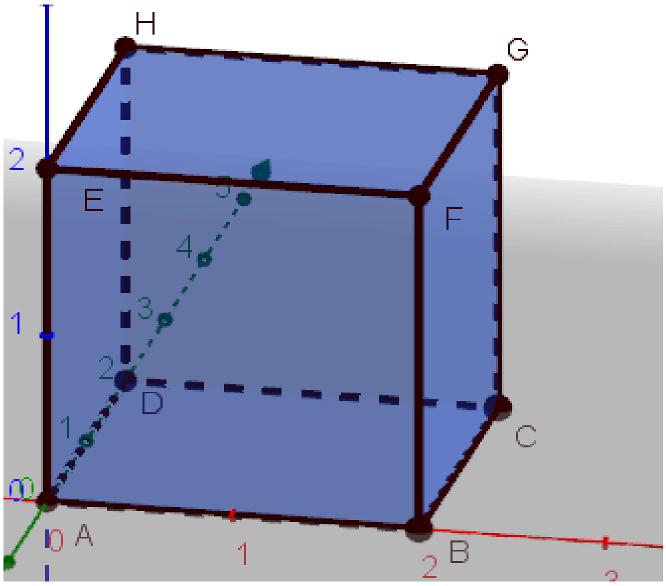
Obr. 47 - Čtyřstěn ABDE - pomocí (<Bod>, <Bod>, <Smer>)

3.2 Šestistěn

Stejně jako čtyřstěn má i šestistěn (krychle), v GeoGebře čtyři možností sestrojení. První možnost je opět ikona v *Panelu nástrojů – Krychle,* která leží pod ikonou *Jehlan.* Postup, jak se k této ikoně dostat, je totožný jako u čtyřstěnu, jen musí být vybrána funkce *Krychle* (viz Obr. 48). Po kliknutí na ikonu stačí pouze vybrat dva body, což budou body dolní stěny krychle. Po určení pozice druhého bodu program dotvoří krychli (viz Obr. 49).

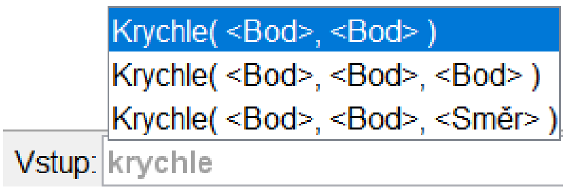


Obr. 48 - Výběr ikony Krychle



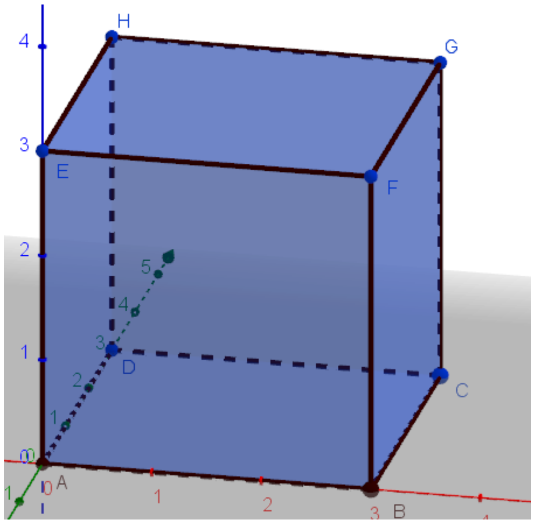
Obr. 49 - Krychle ABCDEFGH – pomocí Panelu nástrojů

Další způsoby sestrojení jsou opět pomocí *Příkazového řádku*, který po zadání slova „krychle“ nabídne tři možnosti (viz Obr. 50).



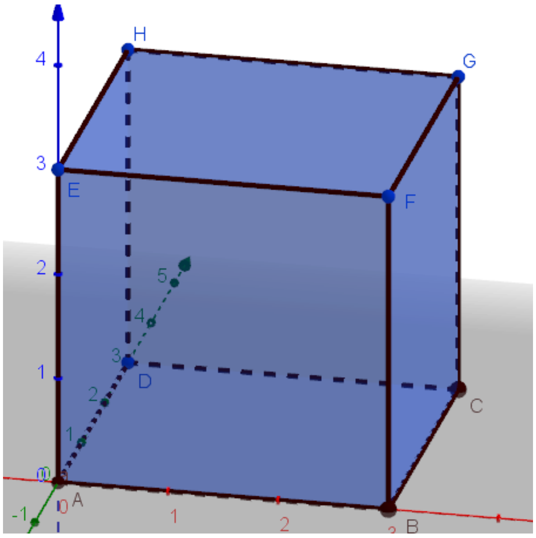
Obr. 50 - Možnosti sestrojení krychle

První možnost „krychle (<Bod>, <Bod>)“ je z těchto tří nejjednodušší a stačí si sestrojit pouze dva body, stejně jako tomu bylo u čtyřstěnu. Po zadání názvů bodů se vytvoří krychle *ABCDEFGH* (viz Obr. 51). Body, které mají černou barvu, jsou body vytvořené uživatelem, zbývající body a těleso dotvořil program sám.



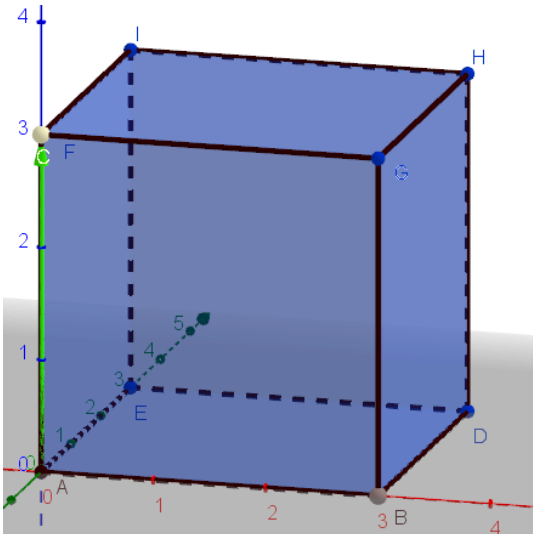
Obr. 51 - Krychle ABCDEFGH – pomocí (<Bod>, <Bod>)

Druhý způsob „krychle (<Bod>, <Bod>, <Bod>)“ je opět o něco složitější a vyžaduje počítání anebo výhodně umístěné body. V příkladu je zvolen bod A jako počátek soustavy souřadnic, tedy $A = [0,0,0]$, bod $B = [3,0,0]$ a bod $C = [3,3,0]$. Třetí bod musí být součástí spodní podstavy a musí být umístěn tak, aby u bodu B byl úhel o velikosti 90°. Po sestrojení těchto tří bodů se použije *Příkazový řádek*, kam se napíše slovo „krychle“, a vybere se druhý způsob sestrojení. Krychle *ABCDEFGH* (viz Obr. 52) se vytvoří po zadání posledního bodu. Černě zbarvené body jsou body vytvořené uživatelem a zbytek doplnil program.



Obr. 52- Krychle ABCDEFGH – pomocí (<Bod>, <Bod>, <Bod>)

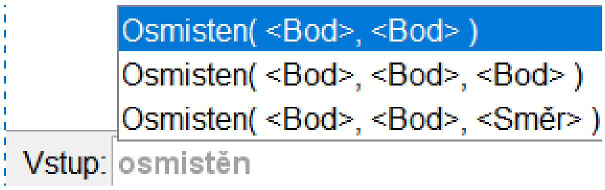
Poslední způsob, jak sestrojit krychli, je „krychle (<Bod>, <Bod>, <Smer>)“. Obdobně jako u čtyřstěnu musí být vektor kolmý k první spodní stěně tělesa. Po zapsání názvů všech objektů do *Příkazového řádku* pod poslední možností sestrojení program vytvoří krychli *ABDEFGHI* (viz Obr. 53). Černě zbarvené body jsou body, které vytvořil uživatel, a vektor je zbarven barvou zelenou. Zbývající objekty sestrojil program.



Obr. 53 - Krychle ABDEFGHI – pomocí (<Bod>, <Bod>, <Smer>)

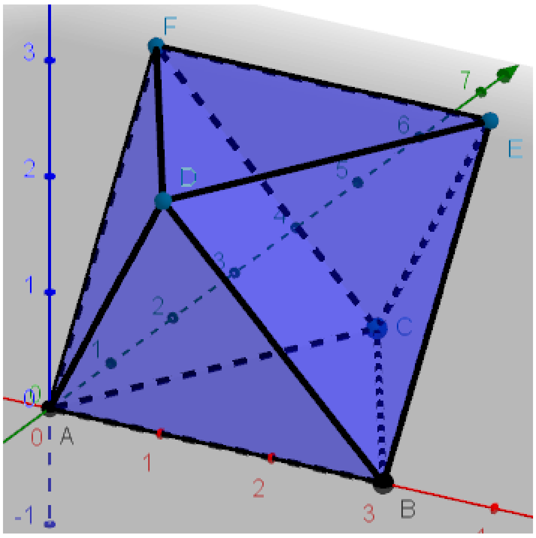
3.3 *Osmistěn*

Sestrojení osmistěnu je možné pouze třemi způsoby, a to pomocí *Příkazového řádku*. Stejně jako u předchozích dvou těles je třeba napsat název tělesa, které má být sestrojeno, a program nabídne možnosti sestrojení (viz Obr. 54).



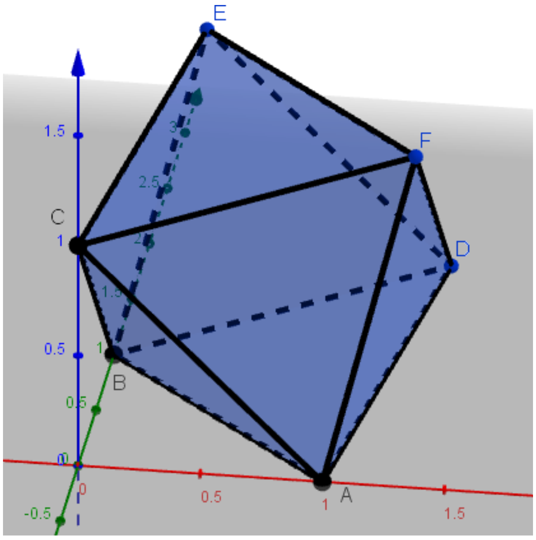
Obr. 54 - Možnosti sestrojení osmistěnu

První možností je „osmisten (<Bod>, <Bod>)“. Tento příkaz vyžaduje, aby byly vytvořeny dva body. Po zadání druhého bodu program vše ostatní vytvoří sám a výsledkem je osmistěn *ABCDEF* (viz Obr. 55). Černé body jsou opět body, které vytvořil uživatel.



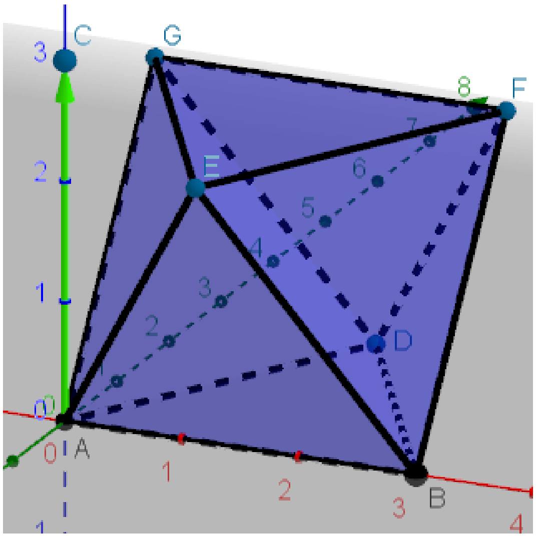
Obr. 55 - Osmistěn ABCDEF - pomocí (<Bod>, <Bod>)

U možnosti „osmisten (<Bod>, <Bod>, <Bod>)“, se bude postupovat obdobně jako u čtyřstěnu při výběru té samé možnosti. Souřadnice bodů budou tedy stejné jako u čtyřstěnu: $A = [1{,}0{,}0],\ B[0{,}1{,}0]\ a\ C = [0{,}0{,}1]$. Do *Příkazového řádku* se napíše slovo „osmistěn“ a vybere se druhá možnost. Po zadání názvu třetího bodu program dokončí zbytek osmistěnu *ABCDEF* (viz Obr. 56).



Obr. 56 - Osmistěn ABCDEF - pomocí (<Bod>, <Bod>, <Bod>)

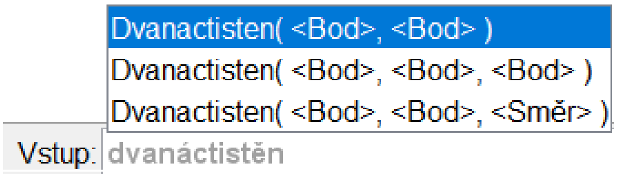
Třetí možností je „osmisten (<Bod>, <Bod>, <Smer>)“. Sestrojení vektoru má stejná pravidla jako u předchozích dvou platónských těles, tedy že vektor musí být kolmý ke spodní stěně tělesa, protože reprezentuje směr výšky tělesa ke spodní stěně. Poté co se do *Příkazového řádku* zadá název vektoru, GeoGebra sama dotvoří zbytek tělesa. Vytvoří se osmistěn *ABDEFG* (viz Obr. 57). Body, které mají černou barvu, jsou body vytvořené uživatelem stejně tak vektor, který má zelenou barvu. V názvu osmistěnu je vynechán bod *C*, protože tento bod byl programem použit jako koncový bod vektoru *u*.



Obr. 57 - Osmistěn ABDEFG - pomocí (<Bod>, <Bod>, <Smer>)

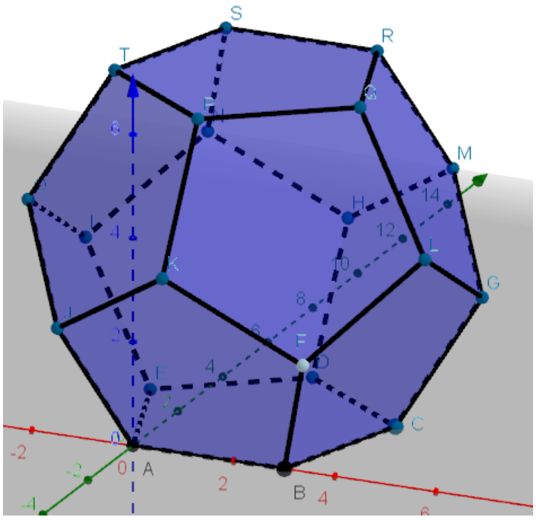
3.4 *Dvanáctistěn*

Dvanáctistěn se bude tvořit pomocí *Příkazového řádku*, který po zadání slova „dvanáctistěn“ zobrazí tři možnosti, díky kterým je možné těleso sestrojit (viz Obr. 58).



Obr. 58 - Možnosti sestrojení dvanáctistěnu

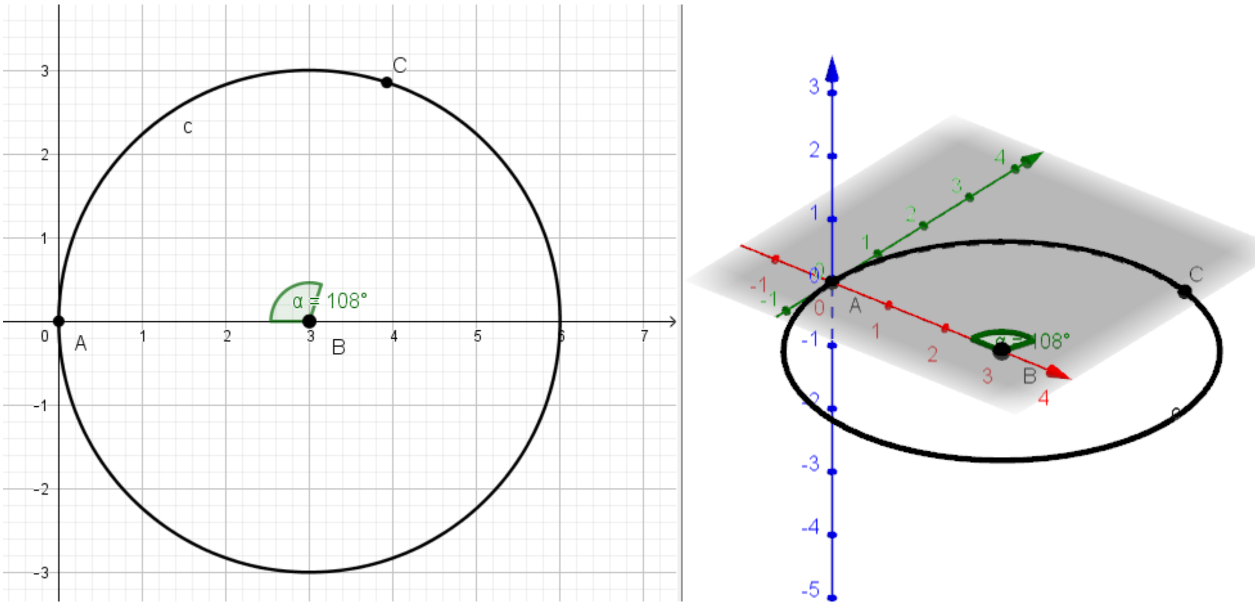
Nejjednodušší z možností je hned ta první: „dvanactisten (<Bod>, <Bod>)“. Stačí, aby byly vytvořeny dva body, a po zadání názvů těchto bodů se zobrazí celý dvanáctistěn (viz Obr. 59).



Obr. 59 - Dvanáctistěn – pomocí (<Bod>, <Bod>)

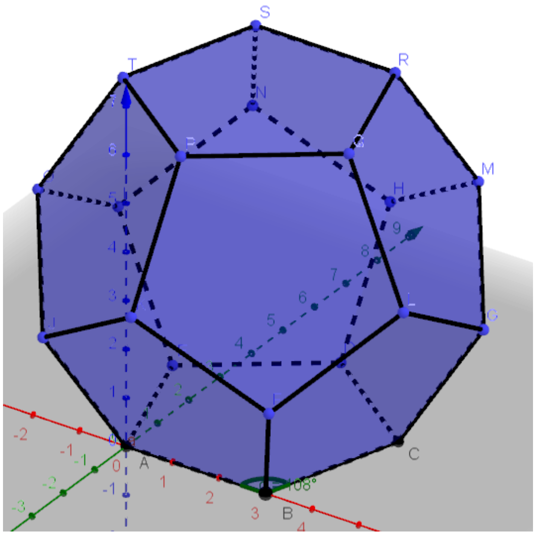
Možnost „dvanactisten (<Bod>, <Bod>, <Bod>)“ je nejobtížnější, protože dopočítat souřadnice třetího bodu není tak jednoduchá jako u předchozích těles, a to především z toho důvodu, že stěnou tělesa je pravidelný pětiúhelník a všechny tři body musí ležet v rovině, jejíž součástí bude spodní stěna dvanáctistěnu.

Pro sestrojení třetího bodu (bodu *C*), je nutné si připomenout vlastnosti pravidelného pětiúhelníku. Důležitou vlastností je, že součet vnitřních úhlů pětiúhelníku je 540°. Protože se jedná o pravidelný pětiúhelník, tak u každého vrcholu bude úhel o stejné velikosti, a to 108°. Nalezení bodu *C* v GeoGebře je jednoduché, ale předchází tomu několik kroků. Jako první bude třeba zapnout *Nákresnu,* a to pomocí klávesové zkratky *CTRL+SHIFT+1*. Vedle *Grafického náhledu 3D* se zobrazí *Nákresna.* Cokoli je vytvořeno v jednom okně, zobrazí se i ve druhém, jen *Nákresna* zobrazuje 2D pohled. V *Nákresně* jsou sestrojeny body *A* a *B*, které program ihned vytvoří i v *Grafickém náhledu 3D*. Při práci v *Nákresně* se *Panel nástrojů* přizpůsobí pro práci v 2D prostředí. Pod ikonou *Úhel* je skrytá funkce *Úhel dané velikosti*. Po vybrání této funkce je nutno kliknout postupně na bod *A* a poté na bod *B*, protože u bodu *B* se má vytvořit úhel dané velikosti. Následně se zobrazí vyskakovací okno s textovým polem, kam se zadává velikost úhlu, v tomto případě již zmíněných 108°. Dále je nutné vybrat možnost *ve směru hodinových ručiček (-),* abych byl získán bod *C* v kladných částech obou os. Vytvoří se úhel *ABC* o velikosti 108° a bod *C*. Vzdálenost bodu *C* od bodu *B* je stejná jako vzdálenost bodu *A* od bodu *B*. Pro kontrolu je možné využít funkci *Kružnice daná středem a bodem* z *Panelu nástrojů*. Střed této kružnice bude bod *B* a bod *A* je vybrán jako bod, který bude určovat vzdálenost bodu *A* od středu *B*, tedy velikost poloměru. Kružnice prochází již dříve vytvořeným bodem *C* (viz Obr. 60).



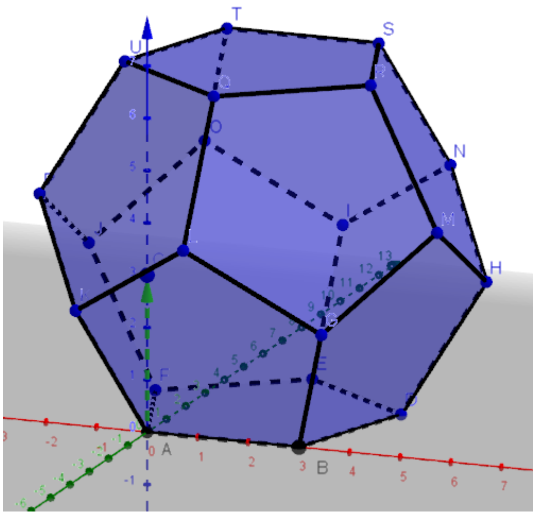
Obr. 60 - Nákresna a Grafický náhled 3D

Nyní jsou sestrojené tři body a další postup je stejný jako u všech předchozích těles. Do *Příkazového řádku* je zadán „dvanáctistěn“, vybráním druhé možnosti a zadáním názvů všech tří bodů se vytvoří dvanáctistěn (viz Obr. 61). Všechny tři body vytvořené uživatelem mají černou barvu. Pomocná kružnice není potřebná, a proto je skryta. Velikost úhlu α je ponechána, aby bylo vidět, že úhel má opravdu velikost 108°.



Obr. 61 - Dvanáctistěn - pomocí (<Bod>, <Bod>, <Bod>)

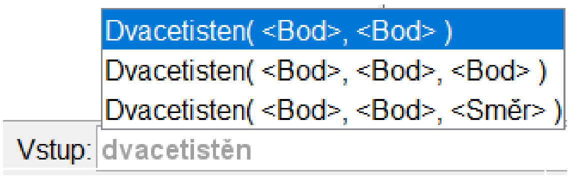
Třetí možnost „dvanactisten (<Bod>, <Bod>, <Smer>)“ není tak složitá jako druhá možnost. Stačí vytvořit dva body a vektor, který musí být opět kolmý ke spodní stěně tělesa ze stejného důvodu, jako tomu bylo u ostatních těles. Opět do *Příkazového řádku* jsou zadávány názvy objektů. Jakmile je zadán název vektoru, GeoGebra dotvoří dvanáctistěn (viz Obr. 62).



Obr. 62 - Dvanáctistěn - pomocí (<Bod>, <Bod>, <Smer>)

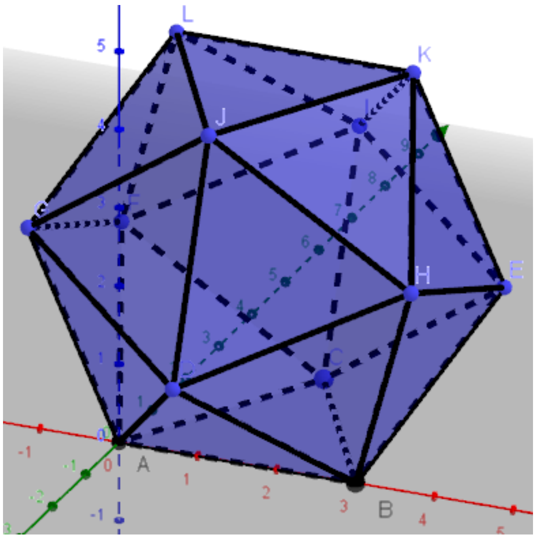
3.5 *Dvacetistěn*

Stejně jako u osmistěnu a dvanáctistěnu, tak i u dvacetistěnu je nutno použít *Příkazový řádek* programu, který nabídne tři možnosti sestrojení dvacetistěnu (viz Obr. 63).



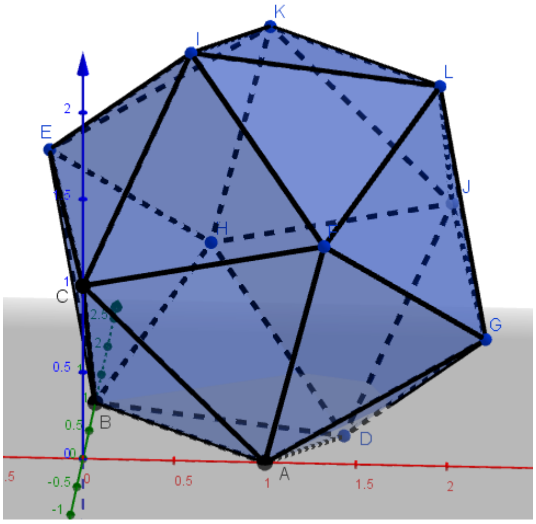
Obr. 63 - Možnosti sestrojení dvacetistěnu

První možností je opět zkonstruování pomocí dvou bodů „dvacetisten (<Bod>, <Bod>)“. Vytvořením dvou bodů a následným zadáním názvů bodů do *Příkazového řádku* se zobrazí dvacetistěn vytvořený programem (viz Obr. 64). Černě zbarvené body jsou zadány uživatelem.



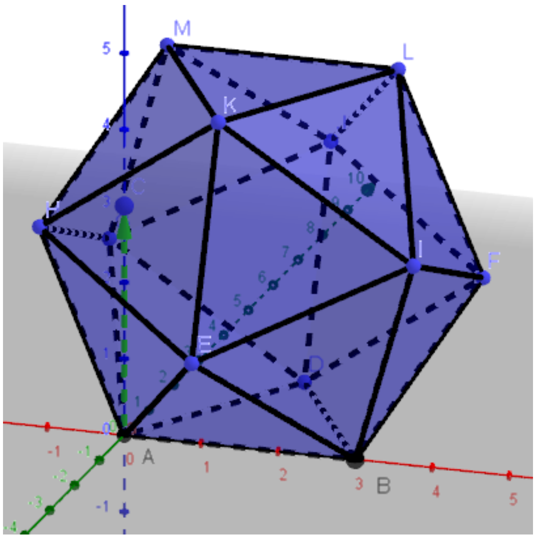
Obr. 64 - Dvacetistěn – pomocí (<Bod>, <Bod>)

Druhý způsob „dvacetisten (<Bod>, <Bod>, <Bod>)“ je zpočátku stejný jako u čtyřstěnu a osmistěnu, a to proto, že všechna tři tělesa jsou tvořena z rovnostranných trojúhelníků. Souřadnice bodů budou tedy stejné: $A = [1,0,0]$, $B[0,1,0]$ a $C = [0,0,1]$. Po zadání názvů bodů do *Příkazového řádku* program dotvoří dvacetistěn (viz Obr. 65).



Obr. 65 - Dvacetistěn – pomocí (<Bod>, <Bod>, <Bod>)

Třetí způsob konstrukce dvacetistěnu je pomocí dvou bodů a vektoru: „dvacetisten (<Bod>, <Bod>, <Smer>)“. Postup vytvoření potřebných objektů je stejný jako u předchozích těles. Vektor musí být kolmý ke spodní stěně tělesa, na které jsou vytvořeny body *A* a *B*. Stejně jak tomu bylo u předešlých těles, i zde po zapsání názvů objektů program vytvoří konečné těleso, tedy dvacetistěn (viz Obr. 66). Objekty, které vytvořil uživatel (body a vektor), mají černou, resp. zelenou barvu.



Obr. 66 - Dvacetistěn - pomocí (<Bod>,<Bod>,<Smer>)

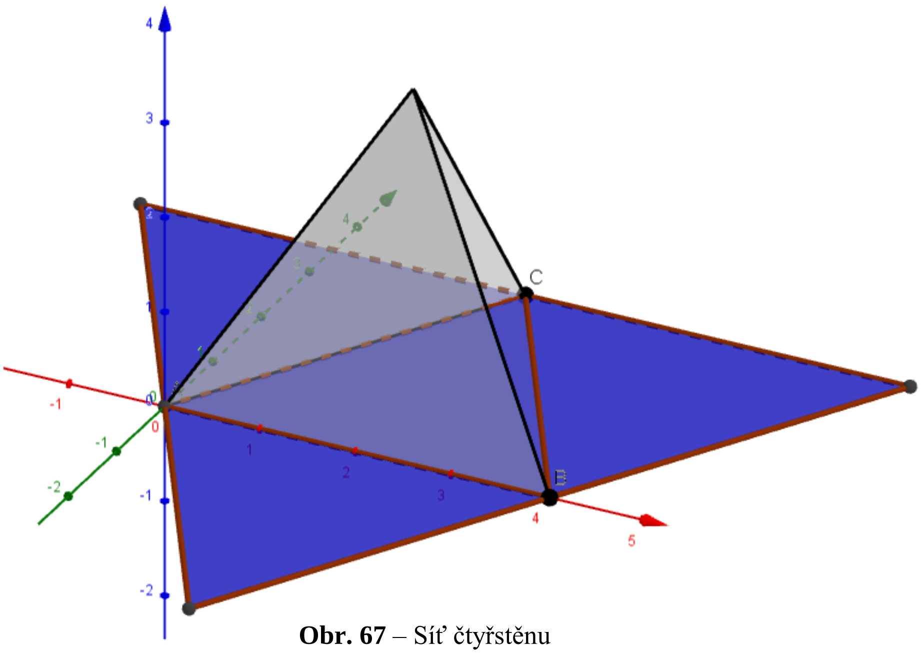
4. *Práce s platónskými tělesy*

Tato kapitola popisuje různé práce s platónskými tělesy, které lze v GeoGebře provádět.

4.1 Sítě těles

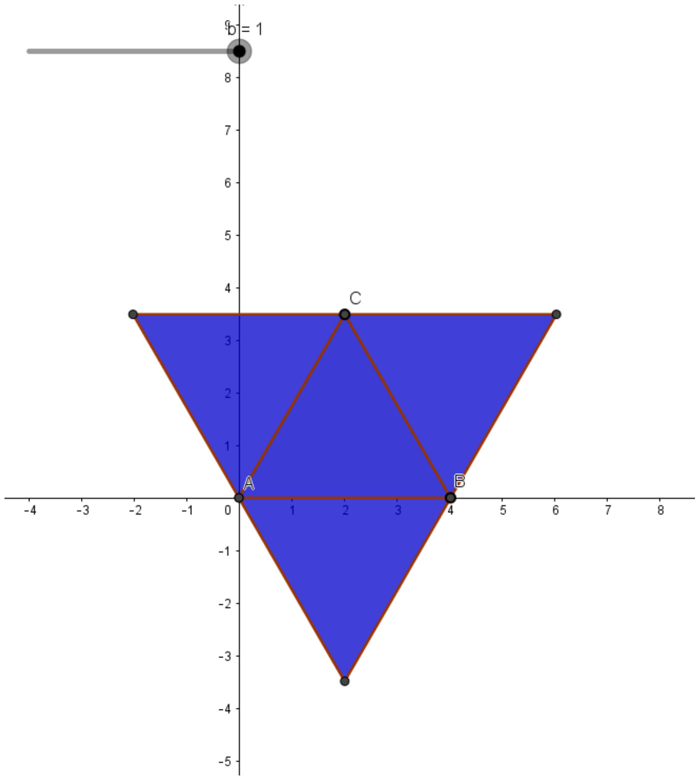
Jedna z prací je sestrojení a zobrazení sítí platónských těles. U všech těles je využit stejný postup, takže tento postup bude demonstrován pouze u jednoho tělesa a poté budou zobrazeny již hotové konstrukce sítí zbývajících těles.

Z *Panelu nástrojů* je vybrána funkce *Jehlan* a pod ni se nachází funkce *Síť*. Po vybrání této funkce stačí pouze kliknout na dané těleso, v tomto případě na pravidelný čtyřúhelník, a vytvoří se síť tělesa pod hlavní stěnou ABC (viz Obr. 67).

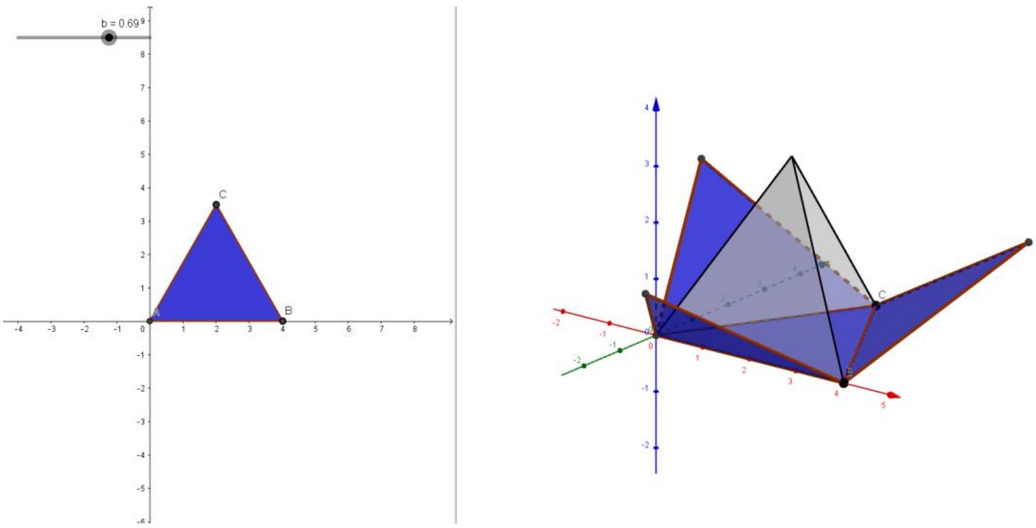


Obr. 67 – Síť čtyřstěnu

Pokud se zobrazí *Nákresna*, tedy zobrazení v rovině, je možno vidět síť tělesa v rovině (viz Obr. 68). Zároveň se vytvoří i posuvník, díky kterému lze vidět, jak se síť rozevírá a zavírá, když se posuvník posouvá (viz Obr. 69).



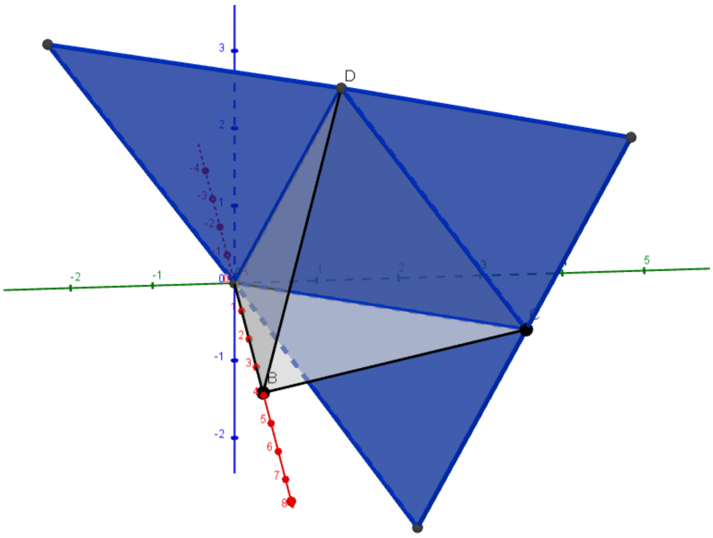
Obr. 68 – Síť čtyřstěnu v 2D



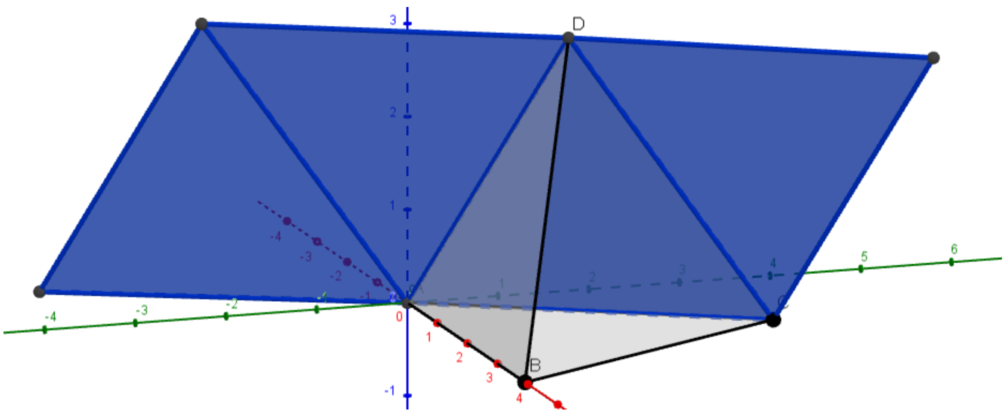
Obr. 69 – částečně rozevřená síť čtyřstěnu v 2D a 3D

Síť tělesa lze vytvořit i pomocí *Příkazového řádku*. Stačí napsat „síť“ a program sám dá na výběr ze dvou možností, první je „Sit(<Mnohostěn>, <Číslo>). Za mnohostěn je nutno napsat písmeno přidělené mnohostěnu a za číslo se zadá buď 0 nebo 1. Zadáním čísla 0 se zobrazí síť složená do tělesa a číslo 1 ukáže síť rozloženou pod stranou *ABC*, tedy je to stejná síť jako při použití funkce z *Panelu nástrojů*.

Druhá možnost, kterou program nabízí, je „Sit(<Mnohostěn>, <Číslo>, <Stěna>, <Hrana>, <Hrana>, …)“. Za mnohostěn a číslo se dosazují stejné hodnoty jako u předchozího způsobu. Dále je možnost vybrat si stěnu, podle které se síť vytvoří, to znamená, že daná stěna bude při rozevírání na téže pozici a ostatní stěny se promítnou do sítě. Dále je možno doplnit název hrany, přes kterou se žádná stěna do sítě nepřeklopí. Na obrázku 70 je vytvořena síť podle stěny *ACD*. Doplněním hrany *AC* se tvar sítě v rovině změní tak, že u hrany *AC* není žádná stěna, která se při rozevření kolem dané hrany nepřeklopí (viz Obr. 71).



Obr. 70 – Sit(<Mnohostěn>, <Číslo>, <Stěna>)

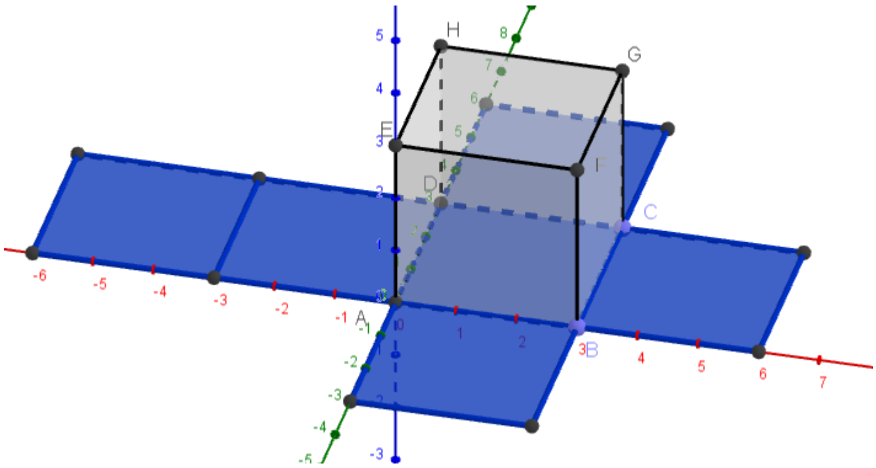


Obr. 71 – Sit(<Mnohostěn>, <Číslo>, <Stěna>, <Hrana>)

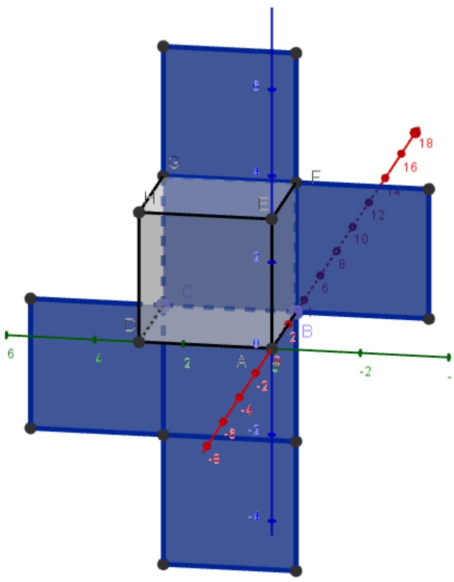
Jelikož jsou sítě vytvořené podle stěny, kde se třetí bod nenachází v rovině dané osami *x* a *y*, tak síť se nezobrazí v *Nákresně*. Její otevření a zavření se provádí uchopením jednoho bodu sítě a pohybováním kurzorem myši.

Jak bylo zmíněno na začátku kapitoly, postupy tvoření sítí dalších těles ukázány nebudou. Budou zobrazeny již hotové konstrukce.

Dalším tělesem, u kterého bude vytvořena síť, je krychle. Vytvořená síť je zkonstruována podle hlavní stěny *ABCD* (viz Obr. 72), tedy podle stěny, která při rozevření sítě do roviny zůstane na své pozici. Další síť krychle je vytvořena podle stěny *BDGF*, tedy tato stěna při rozevření sítě do prostoru zůstane na téže pozici, a hrany *CD*, přes kterou se žádná stěna nepřeklopí do roviny (viz Obr. 73).

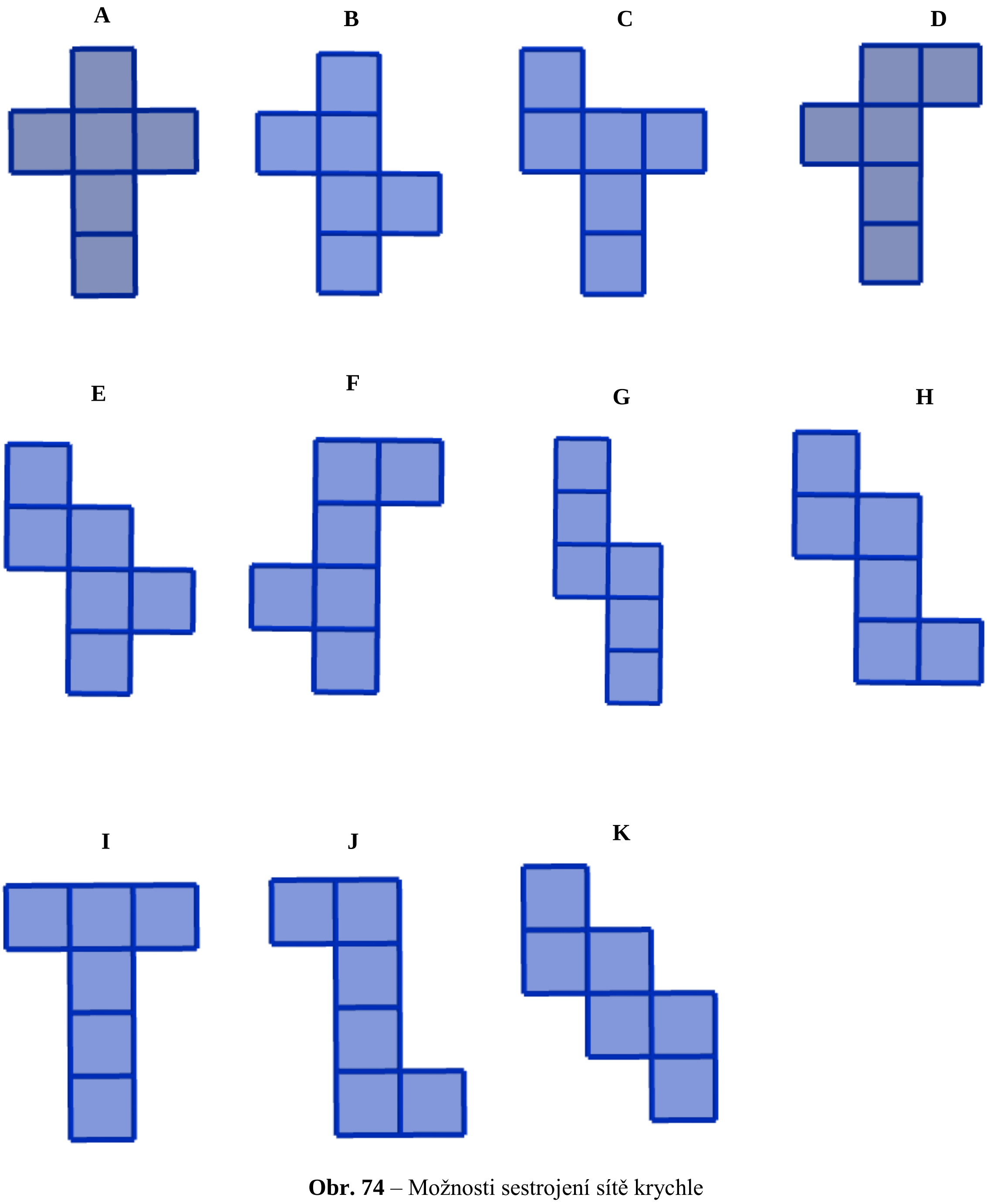


Obr. 72 – Síť krychle podle stěny ABCD



Obr. 73 – Síť krychle podle stěny BDGF a hrany CG

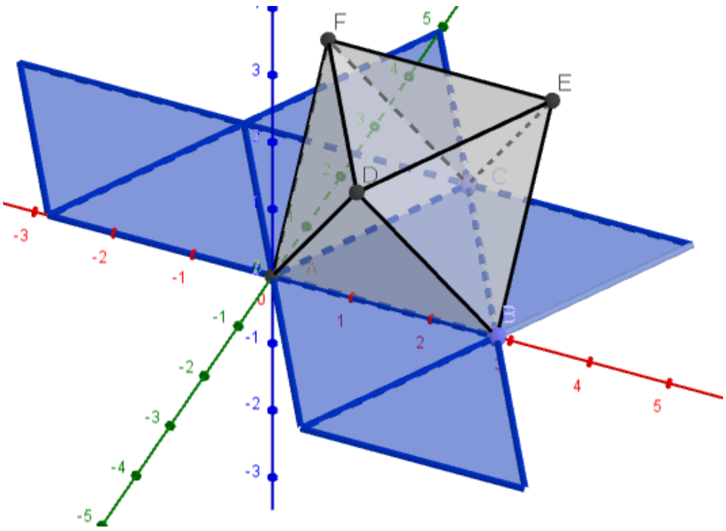
Je jedenáct možností, jak může síť krychle vypadat. První dvě možnosti jsou vytvořeny výše a jejich tvar v rovině je zobrazen na obrázku 74- A, B. Další možnosti jsou níže (viz Obr. 74– C - K).



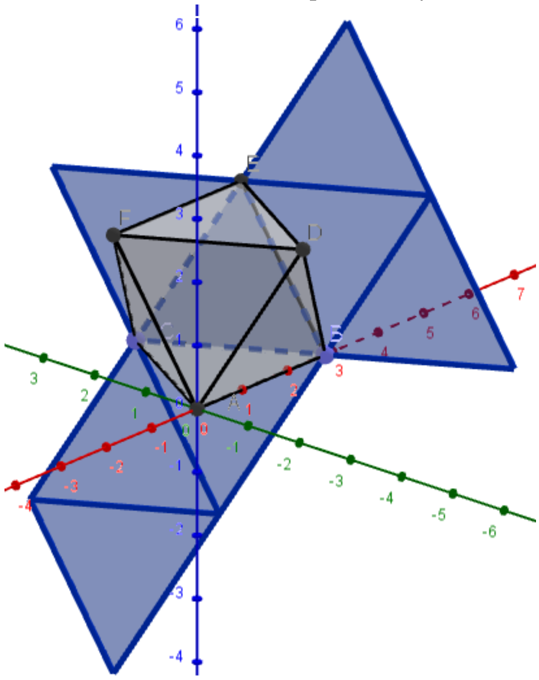
Obr. 74 – Možnosti sestrojení sítě krychle

Všechny tyto sítě lze sestrojit pomocí GeoGebry.

Následně zobrazené sítě budou vytvořeny z osmistěnu. Nejprve síť podle stěny *ABC*, opět tato strana zůstane na své pozici (viz Obr. 75), a poté síť podle stěny *BCE*, která se ze své pozice při rozevření sítě nepohne, a hrany *AB*, podél které se nepřeklopí žádná stěna (viz Obr. 76). Všechny možnosti sítí je možno v GeoGebře sestrojit, ale zde budou ukázány jen tyto dvě.

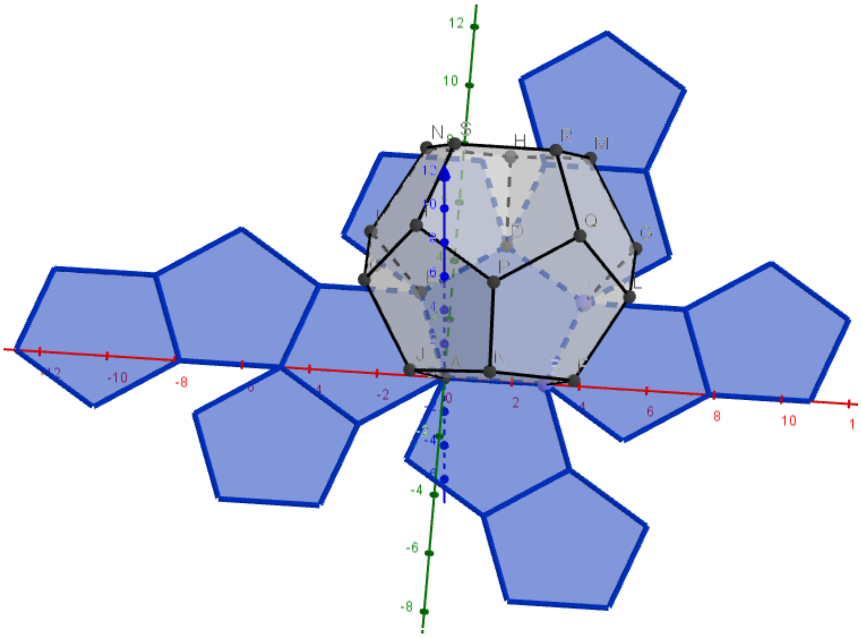


Obr. 75 – Síť osmistěnu podle stěny ABC

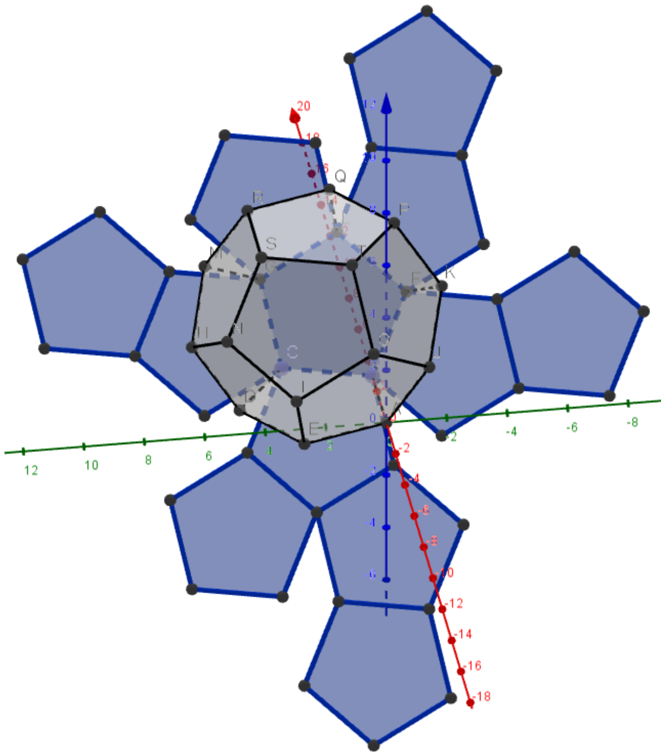


Obr. 76 – Síť osmistěnu podle stěny BCE a hrany AB

Následující příklady sítí budou vytvořeny z dvanáctistěnu. Jako první bude síť vytvořena podle hlavní stěny *ABCDE* (viz Obr. 77) a poté síť podle stěny *BCGLF* a hrany *AB* (viz Obr. 78). Stěny, podle kterých se má síť zobrazit, májí stejné vlastnosti jako u předchozích těles. Pro hranu *AB* platí opět tatáž vlastnost, jako u čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu.

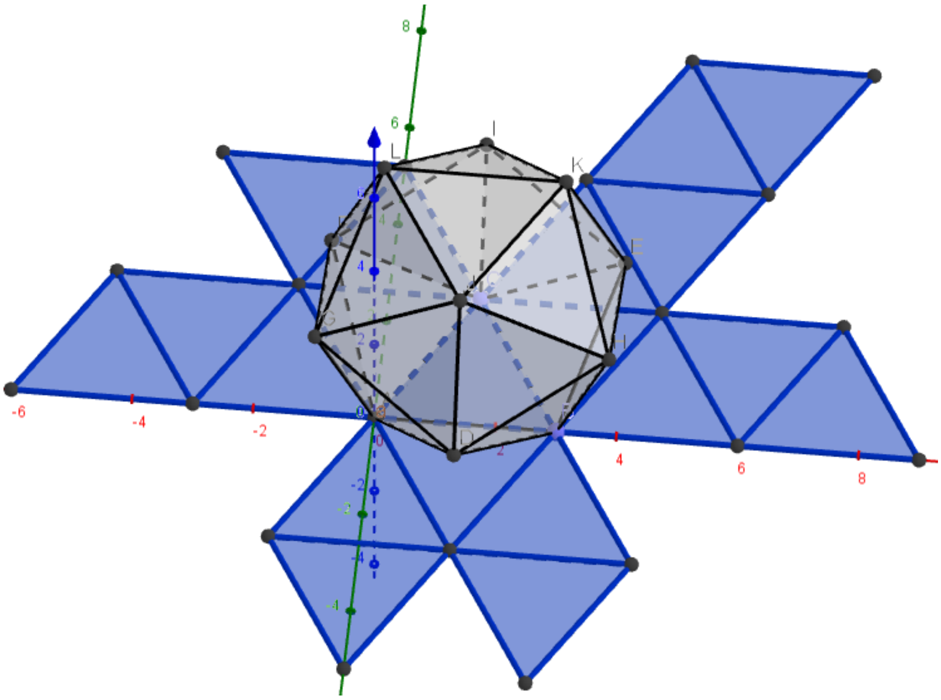


Obr. 77 – Síť dvanáctistěnu podle stěny ABCDE

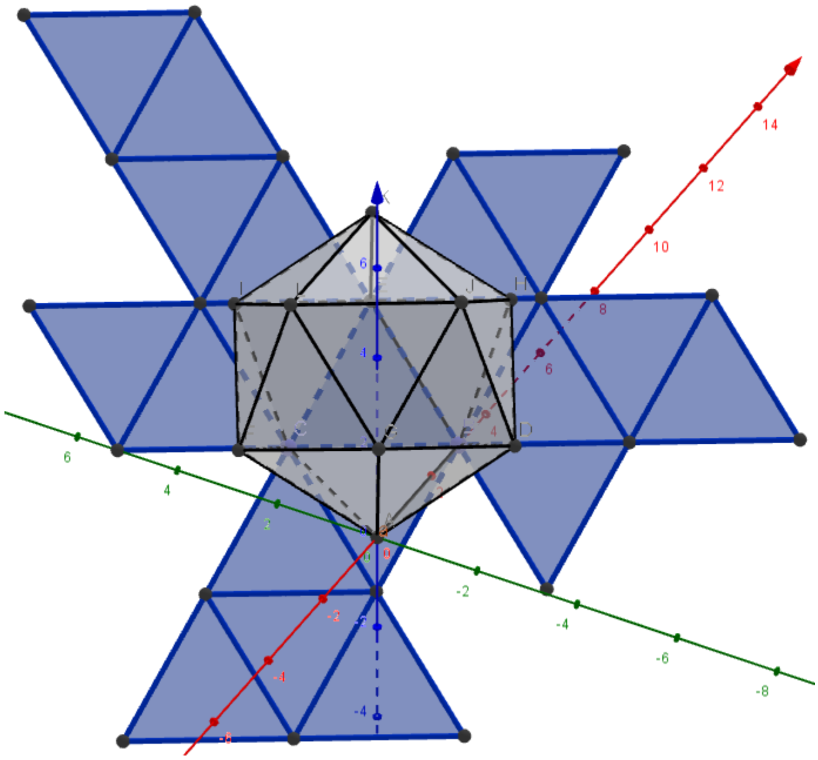


Obr. 78 – Síť dvanáctistěnu podle stěny BCGLF a hrany AB

Posledními příklady budou sítě vytvořené z dvacetistěnu. První bude síť podle stěny *ABC* (viz Obr. 79) a následně síť podle stěny *BCE* a hrany *AB* (viz Obr. 80). Vlastnosti stěn a hran jsou stejné jako u přechozích těles.



Obr. 79 – Síť dvacetistěnu podle stěny ABC



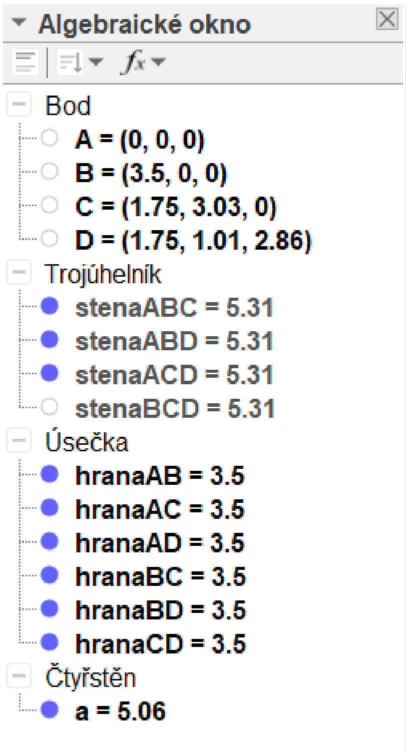
Obr. 80 – Síť dvacetistěnu podle stěny BCE a hrany AB

4.2 *Výpočet povrchu a objemu těles*

V této kapitole bude popsáno, jak vypočítat povrch a objem těles. První část se zaměřuje na povrch a objem těles, které vypočítá program sám. V další části následuje podrobný výpočet objemů těles za předpokladu, že je znám jeden parametr a tím je poloměr kulové plochy opsané jednotlivým tělesům.

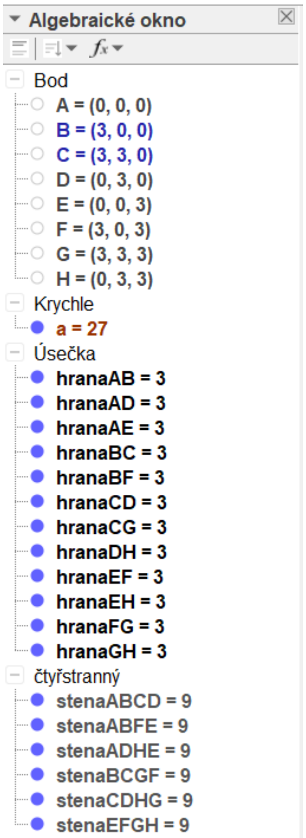
4.2.1 Povrch a objem těles určený pomocí programu GeoGebra

Jako první je spočítán povrch a objem u čtyřstěnu. Pomocí programu GeoGebra je to velice jednoduché. Objem tělesa ani není nutno počítat, protože v *Algebraickém okně* lze nastavit, aby se u každého objektu, který je vytvořen, zobrazila hodnotu, jakou má. U bodů to jsou jejich souřadnice, u úseček to budou jejich délky, u rovinných útvarů to jsou jejich obsahy a u těles to jsou jejich objemy (viz Obr. 81). Pokud jde o objem, z obrázku 82 lze jednoduše zjistit, že objem čtyřstěnu je $a = 5{,}06$ jednotek krychlových. Pro výpočet objemu lze také do *Příkazového řádku* zadat: „V=objem(<Těleso>)“ a program spočítá objem daného tělesa – čtyřstěnu. Vypočítat povrch lze tak, že se vynásobí obsah jedné stěny počtem stěn tělesa. Z obrázku 82 také lze vyčíst, že obsah jedné stěny je 5,31 jednotek čtverečních a povrch celého čtyřstěnu bude: $4 \cdot 5{,}31 = 21{,}24$ jednotek čtverečních.



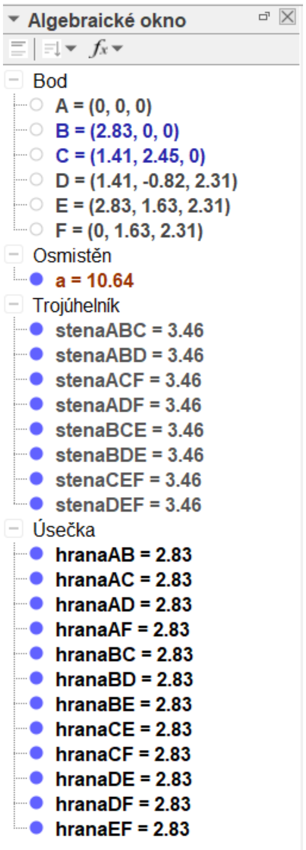
Obr. 81 – Algebraické okno čtyřstěnu

Dalším tělesem, u kterého se bude zjišťovat hodnota povrchu a objemu, je krychle. Stejně jak tomu bylo u předchozího tělesa, i u krychle se dá povrch dopočítat z obsahu stěny krychle a objem vypočítá program sám (viz Obr. 82). Povrch krychle se dopočítá jako šestinásobek obsahu jedné stěny: $6 \cdot 9 = 54$ jednotek čtverečních. Objem krychle se opět skrývá pod: $a = 27$ jednotek krychlových.



Obr. 82 – Algebraické okno krychle

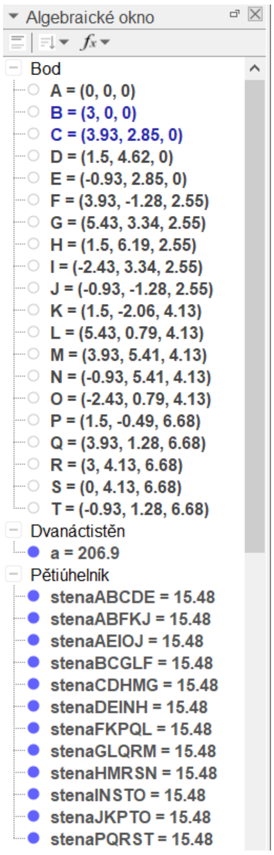
Nyní přichází na řadu osmistěn. Povrch se vypočítá tak, že obsah rovnostranného trojúhelníku, který tvoří stěny osmistěnu, je vynásoben počtem stěn osmistěnu: $8 \cdot 3{,}46 = 26{,}68$ jednotek čtverečních a objem se opět jednoduše vyčte z *Algebraického okna*: $a = 10{,}64$ jendotek krychlových (viz Obr. 83).



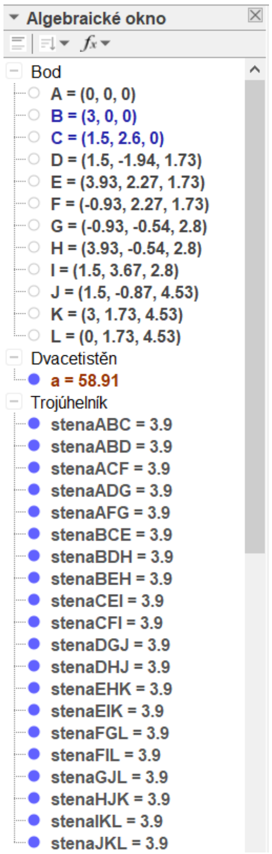
Obr. 83 – Algebraické okno osmistěnu

Předposledním tělesem bude dvanáctistěn. Stěny dvanáctistěnu tvoří pravidelný pětiúhelník, proto se jeho povrch vypočítá jako dvanáctinásobek obsahu pětiúhelníku: $12 \cdot 15{,}48 = 185{,}76$ jednotek čtverečních. Objem tělesa program spočítá sám jako $a = 206{,}9$ jednotek krychlových (viz Obr. 84).

Poslední tělesem je dvacetistěn. Povrch tohoto tělesa se vypočítá jako dvacetinásobek obsahu jedné stěny (kterou tvoří rovnostranný trojúhelník): $20 \cdot 3{,}9 = 78$ jednotek čtverečních. Jako to bylo u všech ostatních těles, i u dvacetistěnu je objem tělesa napsán v *Algebraickém okně*: $a = 58{,}91$ jednotek krychlových (viz Obr. 85).



Obr. 84 – Algebraické okno dvanáctistěnu



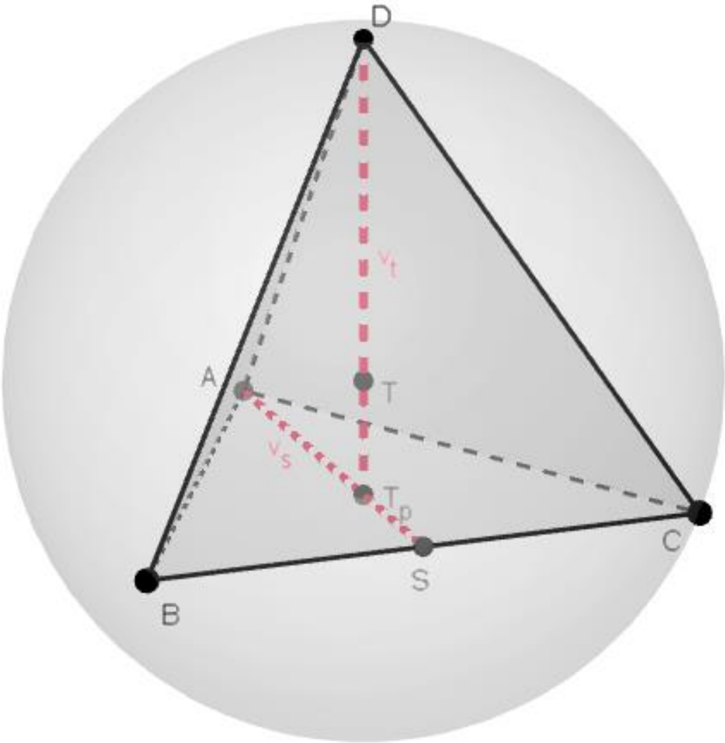
Obr. 85 – Algebraické okno dvacetistěnu

4.2.2 Obecný výpočet objemů těles

Na začátku kapitoly bylo řečeno, že obecný výpočet objemů platónských těles se bude provádět za pomoci pouze jednoho parametru. Tímto parametrem je poloměr r kulové plochy opsané danému tělesu.

4.2.2.1 Čtyřstěn

Střed kulové plochy opsané čtyřstěnu se nachází v těžišti tělesa a poloměr r je vzdálenost mezi středem a každým vrcholem tělesa. Pro vyjádření objemu tělesa v závislosti na poloměru r je třeba nejprve zjistit stěnovou výšku v_s a tělesovou výšku v_t (viz Obr. 86).



Obr. 86 – Čtyřstěn s výškami

Stěnová výška v_s se vypočítá z trojúhelníku *ABC* pomocí Pythagorovy věty:

$$v_s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v_s^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$v_s^2 = \frac{3 \cdot a^2}{4}$$

$$v_s = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

Nyní se vypočítají dvě třetiny výšky, aby se mohla tato hodnota použít pro trojúhelník ADT_P:

$$|AT_P| = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} * \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}$$

U trojúhelníku ADT_P je známa strana AT_P a tělesová výška v_t se vyjádří pomocí poloměru kulové plochy opsané tělesu $v_t = r + \frac{r}{3}$. Nyní se vyjádří hrana a pomocí poloměru *r:*

$$a^2 = \left(r + \frac{r}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{16 \cdot r^2}{9} + \frac{3 \cdot a^2}{9}$$

$$9 \cdot a^2 = 16 \cdot r^2 + 3 \cdot a^2$$

$$6 \cdot a^2 = 16 \cdot r^2$$

$$a = \frac{4 \cdot r}{\sqrt{6}} \qquad (1)$$

Objem čtyřstěnu se vypočítá pomocí vztahu $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$. Na tento vztah se přijde následovně: dosazením stěnové výšky $v_s = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$ do vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku: $S_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2}$ vznikne vztah pro výpočet obsahu podstavy: $S_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Z pravoúhlého trojúhelníku AT_pD se vyjádří tělesová výška v_t pomocí Pythagorovy věty v závislosti na straně *a:*

$$v_t^2 = a^2 - \left|AT_p\right|^2$$

$$v_t^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}\right)^2$$

$$v_t^2 = a^2 - \frac{3 \cdot a^2}{9}$$

$$v_t^2 = \frac{2 \cdot a^2}{3}$$

$$v_t = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a$$

Pomocí tělesové úhlopříčky a obsahu podstavy je možno vypočítat objem čtyřstěnu, jestliže se bude na čtyřstěn pohlížet jako na jehlan. Tedy do vztahu pro výpočet objemu jehlanu $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ se dosadí vypočítané parametry:

$$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a$$

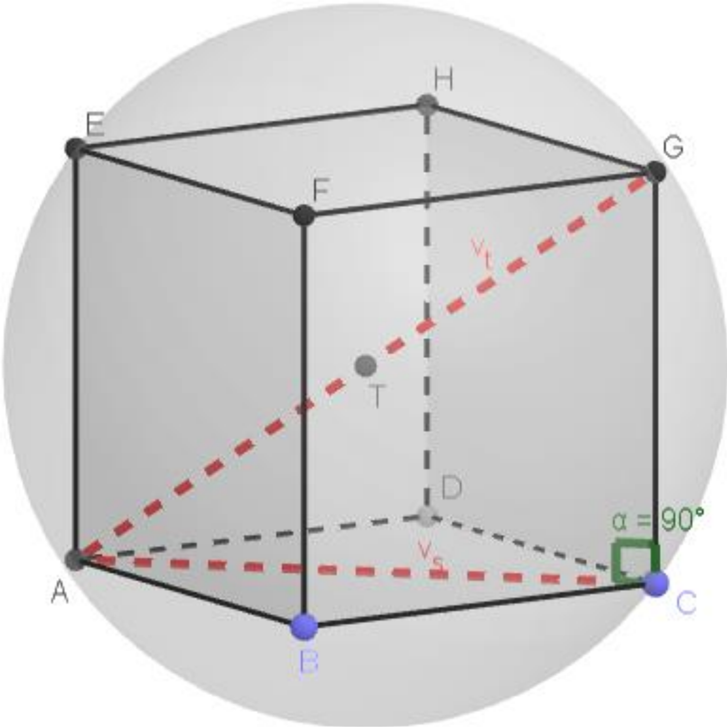
$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Do tohoto vztahu se dosadí vztah (1). Poté vznikne vztah pro výpočet objemu čtyřstěnu pomocí poloměru kulové plochy opsané tělesu:

$$V_4 = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{4 \cdot r}{\sqrt{6}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot r^3}{9}}$$

4.2.2.2 Šestistěn

Střed koule opsané krychli se nachází v těžišti tělesa. V pravoúhlém trojúhelníku *ACG* je hrana a a tělesová úhlopříčka v_t, která má délku *2r* a stěnová úhlopříčka $v_s = a\sqrt{2}$ (viz Obr. 87). Použitím Pythagorovy věty se zjistí hrana a.



Obr. 87 – Krychle s výškami

$$(2 \cdot r)^2 = a^2 + \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2$$

$$4 \cdot r^2 = 3 \cdot a^2$$

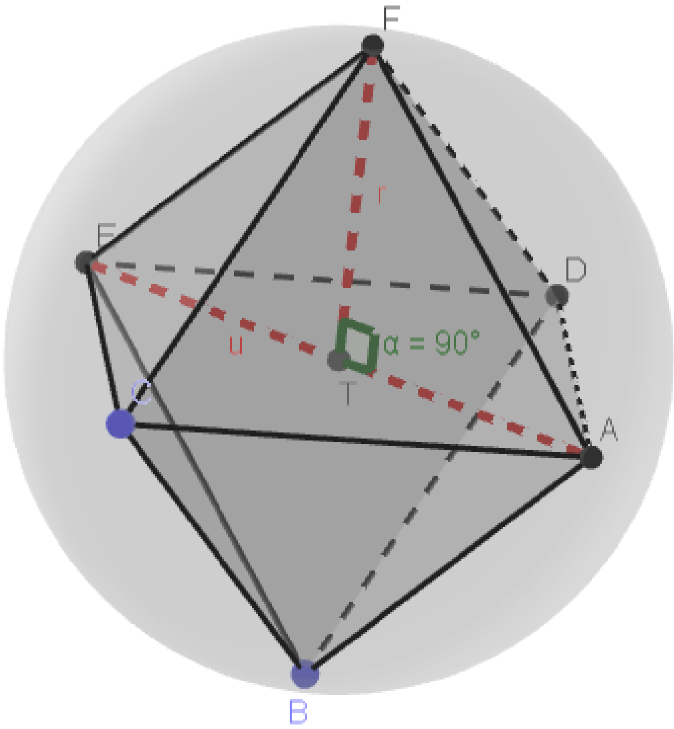
$$a = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Objem krychle se vypočítá pomocí vztahu $V = a^3$. Do tohoto vztahu se dosadí vztah (2):

$$V_6 = \left(\frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8 \cdot r^3}{3 \cdot \sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{8 \cdot r^3 \cdot \sqrt{3}}{9}}$$

4.2.2.3 Osmistěn

Na obrázku 88 je osmistěn, ve kterém lze vidět čtverec *ADEC*. Středem čtverce je průsečík úhlopříček čtverce, který je zároveň i těžištěm tělesa, protože pokud by se vedl řez čtvercem, osmistěn se rozdělí na dva shodné jehlany. Výškou takového jehlanu je polovina úhlopříčky u čtverce. Ta se rovná poloměru r kulové plochy opsané osmistěnu, a proto se použitím Pythagorovy věty vyjádří hrana *a* pomocí poloměru *r*.



Obr. 88 – Osmistěn s výškami

$$a = \sqrt{r^2 + r^2} = r \cdot \sqrt{2} \quad (3)$$

Objem osmistěnu se vypočítá pomocí vztahu $V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$. Jak již bylo zmíněno na začátku kapitoly, je možné rozdělit osmistěn na dva jehlany s podstavami čtverce o straně a a výškou rovnou poloměru r kulové plochy opsané osmistěnu.

Tedy pokud se to do vztahu pro výpočet objemu jehlanu $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ dosadí parametry z jednoho takového jehlanu vytvořeného z osmistěnu, pak dostaneme:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3$$

Poté se objem jehlanu vynásobí dvěma a tím vznikne vztah pro výpočet objemu osmistěnu:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3 \cdot 2$$

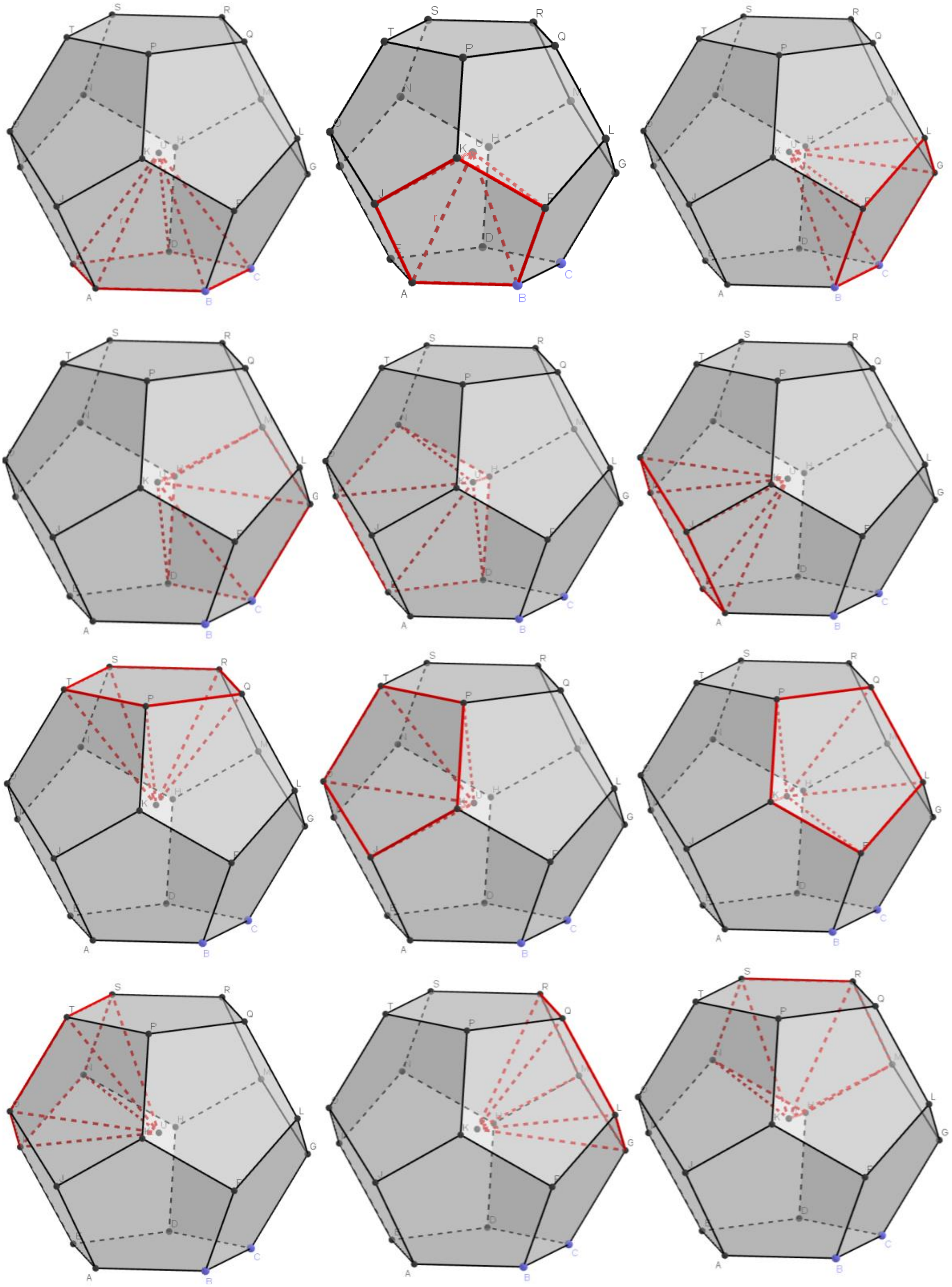
$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$$

Do tohoto vztahu se dosadí vztah (3):

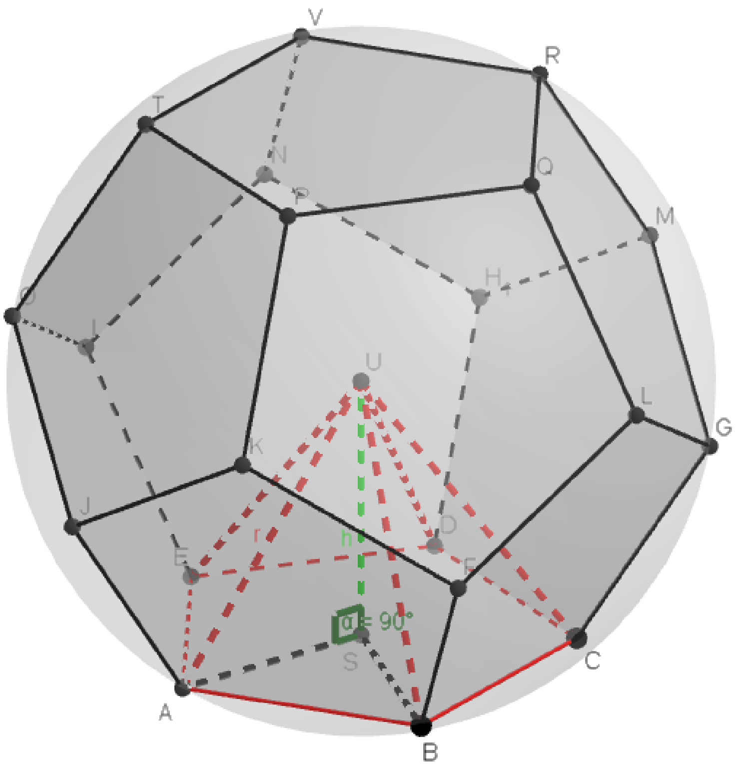
$$V_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(r \cdot \sqrt{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2} \cdot r^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{4 \cdot r^3}{3}}$$

4.2.2.4 Dvanáctistěn

Nejprve se dvanáctistěn rozdělí na dvanáct pětibokých jehlanů (viz Obr. 89) a pak se spočítá objem jednoho takového jehlanu (viz Obr. 90). Výsledný objem se poté vynásobí dvanácti, aby se zjistil objem celého tělesa – dvanáctistěnu. Jediným známým parametrem bude poloměr *r* kulové plochy opsané dvanáctistěnu.

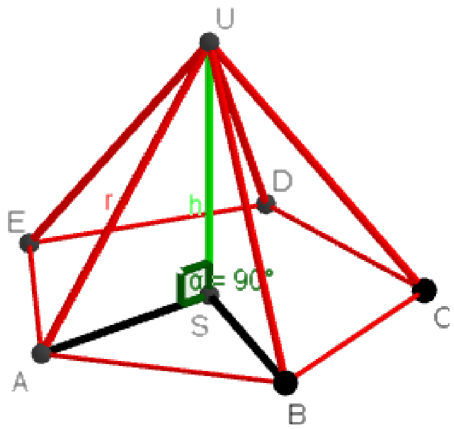


Obr. 89 – Dvanáctistěn rozdělen na jehlany



Obr. 90 – Dvanáctistěn s jehlanem

Na obrázku 91 je zobrazen jehlan *ABCDEU*, u kterého je třeba vypočítat objem, a to podle vztahu: $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$.

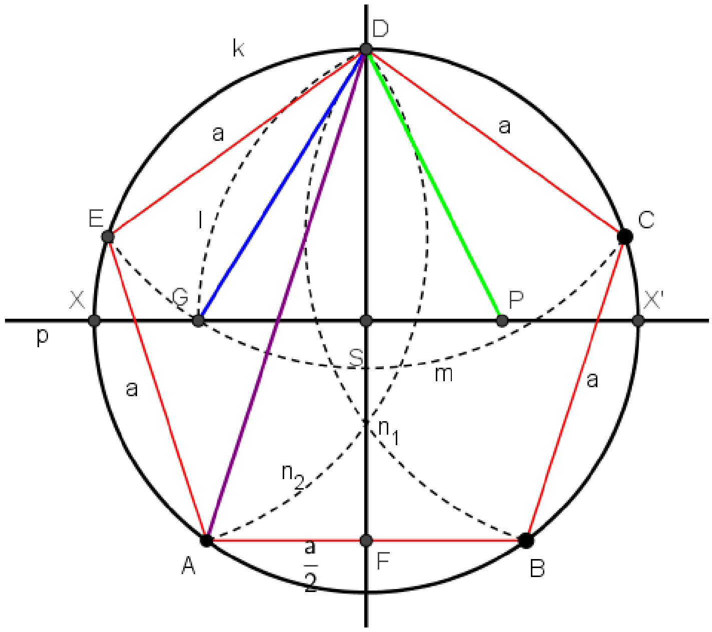


Obr. 91 – Jehlan *ABCDEU*

Nejdřív je nutné zjistit, jak se vypočítá obsah podstavy jehlanu, tedy obsah pravidelného pětiúhelníku *ABCDE* (viz Obr. 92). V tomto obrázku jsou dále vyznačené i body a úsečky, které pomohou pravidelný pětiúhelník sestrojit, a tedy pomohou i vypočítat obsah mnohoúhelníku.

Postup:

1. $k; k(S; q = 1)$
2. $X; X \in k$
3. $X'; |XS| = |SX'|$
4. $p; p \perp XX' \wedge S \in p$
5. $D; D \in k \cap p$
6. $P; P = S \div X'$
7. DP
8. $l; l\,(P; |DP|)$
9. $G; G \in l \cap XX'$
10. $m; m\,(D; |DG|)$
11. $C; C \in k \cap m$
    $E; E \in k \cap m$
12. $n_1; n_1(C; |DG|)$
13. $n_2; n_2(E; |DG|)$
14. $B; B \in k \cap n_1$
15. $A; A \in k \cap n_2$
16. *pětiúhelník ABCDE*



Obr. 92 – Pětiúhelník *ABCDE* s postupem

Pří sestrojování pravidelného pětiúhelníku je sestrojen důležitý pravoúhlý trojúhelník *DSG*, protože velikost přepony *DG* je velikostí stany pětiúhelníku *a*. Pokud se velikost poloměru *q* kružnice opsané pětiúhelníku definuje jako 1, pak z obrázku plyne, že $|SP| = |PX'| = \frac{1}{2}$, protože bod *P* je podle postupu konstrukce ve středu úsečky SX'. Pomocí Pythagorovy věty se zjistí:

$$|DP|^2 = |DS|^2 + |PS|^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$|DP| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Z konstrukce pravidelného pětiúhelníku se ví, že $|DP| = |GP|$, protože body *G, D* leží na kružnici $l(P; |DP|)$, a proto: $|GX'| = |GP| + |PX'| = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a to je hodnota poměru *zlatého řezu* φ $(\cong 1{,}618033989\ldots)$, která byla zmíněna již v kapitole 1.5. Tuto zkušenost je možné si zjistit přímo v GeoGebře při konstrukci pravidelného pětiúhelníku.

Dále platí: $|GS| = |GP| - |SP| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\varphi}\ldots$ převrácená hodnota *zlatého čísla*.

Jelikož se velikost strany a pravidelného pětiúhelníku rovná velikosti úsečky $|DG|$, tedy: $|DG| = |CD|$. Pak je možné podle následujících výpočtů vyjádřit poloměr q kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku pomocí strany a.

$$|DG|^2 = |GS|^2 + |DS|^2 = \frac{1}{\varphi^2} + 1 = \frac{1 + \varphi^2}{\varphi^2}$$

$$|DG| = \frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi}$$

Velikost poloměru q se již dříve definovala jako 1, pak:

$$|CD| = \frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi} \cdot q$$

A dále pak platí:

$$q = \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi^2 + 1)}} \cdot a$$

Podstatnou vlastností diagonály (úhlopříčky) v pravidelném pětiúhelníku je, že velikost úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku je $|AD| = \varphi \cdot a$. Tato vlastnost se použije jak u výpočtu objemu dvanáctistěnu, tak i u výpočtu objemu dvacetistěnu. Důkaz této vlastnosti je proveden níže:

Jelikož $|SB|$ je velikost poloměru q kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku a velikost $|AF| = \frac{a}{2}$, pak platí:

$$|FS|^2 = |AS|^2 - |AF|^2 = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 1} \cdot a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3 \cdot \varphi^2 - 1}{4 \cdot (\varphi^2 + 1)} \cdot a^2 = \frac{\varphi^4}{4 \cdot (\varphi^2 + 1)} \cdot a^2$$

$$|FS| = \frac{\varphi^2}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}} \cdot a$$

Ve druhém řádku výpočtu byla u čitatele použita jedna ze speciálních vlastností *zlatého čísla*: $3 = \varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2}$. Díky této vlastnosti se čitatel $3 \cdot \varphi^2 - 1$ změnil na φ^4. U dalších výpočtů bude zapotřebí využít dalších speciálních vlastností *zlatého čísla*.

Dále platí:

$$|DF| = |FS| + |DS| = \frac{\varphi^2}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}} \cdot a + \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi^2+1)}} \cdot a = \frac{\varphi^2 + 2\varphi}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}} \cdot a$$

$$= \frac{\varphi \cdot (\varphi + 2)}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}} \cdot a = \frac{\varphi \cdot (\varphi^2 + 1)}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}} \cdot \left(\frac{\sqrt{(\varphi^2+1)}}{\sqrt{(\varphi^2+1)}} \right) \cdot a$$

$$= \frac{\varphi \cdot (\varphi^2 + 1) \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}}{2 \cdot (\varphi^2+1)} \cdot a = \frac{\varphi \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}}{2} \cdot a$$

V tomto výpočtu je použita další speciální vlastnost *zlatého čísla*: $\varphi + 1 = \varphi^2$. Vlastnost se použila ve druhém řádku výpočtu, kde se část čitatele v závorce rozdělila: $\varphi + 2 = \varphi + 1 + 1$ a poté se využilo již zmiňované speciální vlastnosti.

Velikosti úseček *AF*, *DF* jsou již známy a nyní je třeba vyjádřit velikost úhlopříčky *AD*, a to pomocí Pythagorovy věty:

$$|AD|^2 = |AF|^2 + |DF|^2$$

$$|AD|^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{\varphi^2 \cdot (\varphi^2 + 1)}{4} \cdot a^2$$

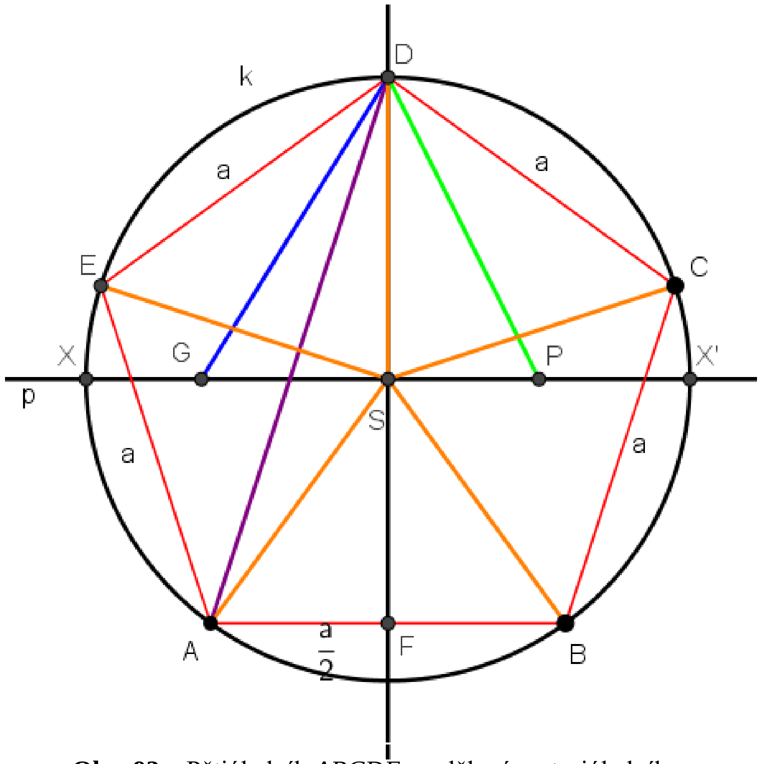
$$|AD|^2 = \frac{\varphi^4 + \varphi^2 + 1}{4} \cdot a^2 = \frac{(\varphi^3 + \varphi^2) + \varphi^2 + 1}{4} \cdot a^2 = \frac{(\varphi^2 + \varphi) + \varphi^2 + \varphi^2 + 1}{4} \cdot a^2$$

$$|AD|^2 = \frac{3 \cdot \varphi^2 + \varphi + 1}{4} \cdot a^2 = \frac{4 \cdot \varphi^2}{4} \cdot a^2 = \varphi^2 \cdot a^2$$

$$|AD| = \varphi \cdot a$$

Zde byly použity tři speciální vlastnosti *zlatého čísla*. První je uplatněna v třetím řádku výpočtu hned na začátku - $\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2$. Druhá speciální vlastnost je aplikována hned po té první - $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$. A poslední speciální vlastností, která se použila již při předchozích výpočtech, konkrétně je to vlastnost - $\varphi + 1 = \varphi^2$. Pomocí těchto vlastností se dokázalo, že úhlopříčka v pravidelném pětiúhelníku má velikosti $\varphi \cdot a$.

Když se do obrázku 92 doplní rovnoramenné trojúhelníky (viz Obr. 93) a vypočítá se obsah jednoho z nich a poté se tento obsah vynásobí pěti, pak se získá obsah podstavy pětibokého jehlanu z obrázku 91.



Obr. 93 – Pětiúhelník *ABCDE* rozdělený na trojúhelníky

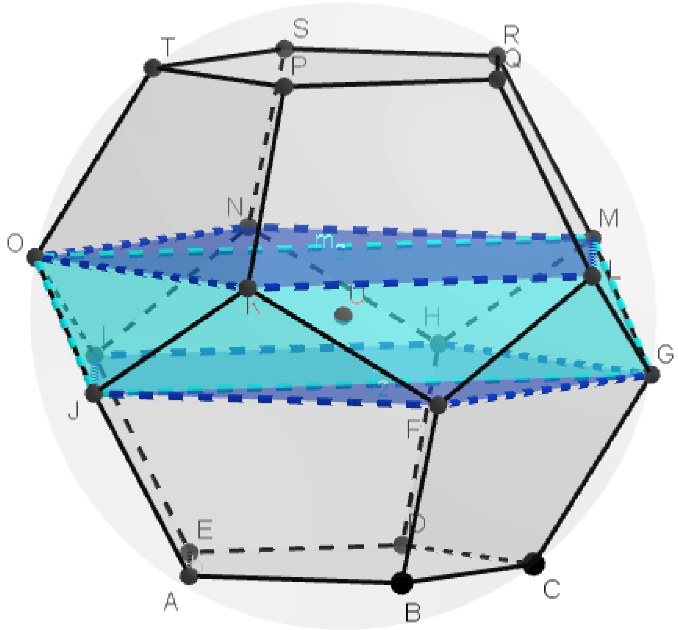
Obsah trojúhelníku *ABS* se vypočítá pomocí vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

$$S = \frac{a \cdot |FS|}{2}$$

$$S = \frac{a \cdot \frac{\varphi^2}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}} \cdot a}{2} = \frac{\varphi^2 \cdot a^2}{4 \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}}$$

$$S_P = 5 \cdot \frac{\varphi^2 \cdot a^2}{4 \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}}$$

Pro další výpočty je třeba vytvořit dva pravidelné pětiúhelníky *FGHIJ* a *KLMNO* (viz Obr. 94).



Obr. 94 – Dvanáctistěn s pětiúhelníky

Úhlopříčky obdélníku *JGMO* jsou zároveň průměry kulové plochy opsané dvanáctistěnu, protože úhlopříčky obdélníku se půlí ve svém středu a tímto středem je bod *U*, tedy střed kulové plochy opsané tělesu. Delší strany obdélníku *JG* a *MO* jsou úhlopříčky v pětiúhelnících, jejichž strany mají délku úhlopříčky stěnového pětiúhelníku, tedy $\varphi \cdot a$, jak již bylo zmíněno výše. Tedy úhlopříčky *KL* a *OK* mají stejnou velikost jako úhlopříčka *AD* (u konstrukce pětiúhelníku), jejíž velikost byla již dříve dokázána. Z toho plyne, že $|MO| = \varphi \cdot \varphi \cdot a = \varphi^2 \cdot a$, protože strany pětiúhelníku *KLMNO* jsou zároveň úhlopříčkami stěn, tedy pravidelných pětiúhelníků. Nyní se vyjádří strana *a* pomocí poloměru *r*:

$$|OG|^2 = |MO|^2 + |GM|^2$$

$$|OG|^2 = \varphi^4 \cdot a^2 + a^2 = a^2 \cdot (\varphi^4 + 1) = a^2 \cdot [(3 \cdot \varphi + 2) + 1] = a^2 \cdot [3 \cdot (\varphi + 1)]$$
$$= a^2 \cdot 3 \cdot \varphi^2$$
$$|OG| = a \cdot \varphi \cdot \sqrt{3}$$

Opět se zde použily speciální vlastnosti *zlatého čísla*. Nejprve to byla vlastnost $\varphi^4 = 3\varphi + 2$ a poté vlastnost $\varphi + 1 = \varphi^2$. Jelikož $|OG| = d$, pak pro výpočet poloměru *r* stačí průměr podělit dvěma:

$$r = \frac{|OG|}{2} = \frac{a \cdot \varphi \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Z toho plyne:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \varphi} \cdot r \qquad (4)$$

Pokud obsah podstavy je $S_P = 5 \cdot \frac{\varphi^2 \cdot a^2}{4 \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}}$, poloměr kružnice opsané podstavě $|AS| = \frac{\varphi}{\sqrt{(\varphi^2+1)}} \cdot a$ a $|AU| = r = \frac{a \cdot \varphi \cdot \sqrt{3}}{2}$, pak se pro výpočet objemu potřebuje už jen vyjádřit velikost výšky *h* (viz Obr. 91), která se zjistí z Pythagorovy věty:

$$h^2 = |SU|^2 = |AU|^2 - |AS|^2$$

$$h^2 = \frac{3 \cdot \varphi^2 \cdot a^2}{4} - \frac{\varphi^2 \cdot a^2}{\varphi^2 + 1} = \frac{3 \cdot \varphi^2 \cdot (\varphi^2 + 1) - 4\varphi^2}{4 \cdot (\varphi^2 + 1)} a^2$$

$$h^2 = \frac{3 \cdot \varphi^4 - \varphi^2}{4 \cdot (\varphi^2 + 1)} \cdot a^2 = \frac{\varphi^2 \cdot (3 \cdot \varphi^2 - 1)}{4 \cdot (\varphi^2 + 1)} \cdot a^2 = \frac{\varphi^2 \cdot \varphi^4}{4 \cdot (\varphi^2 + 1)} \cdot a^2$$

$$h = \frac{\varphi^3}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}} \cdot a$$

Když je známa výška jehlanu, je možné se pustit do objemu, který se vypočítá: $V_J = \frac{1}{3} \cdot S_P \cdot v$, kde se za *v* dosadí výška *h:*

$$V_J = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot \varphi^2 \cdot a^2}{4 \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}} \cdot \frac{\varphi^3 \cdot a}{2 \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}} = \frac{5 \cdot \varphi^5 \cdot a^3}{24 \cdot (\varphi^2 + 1)}$$

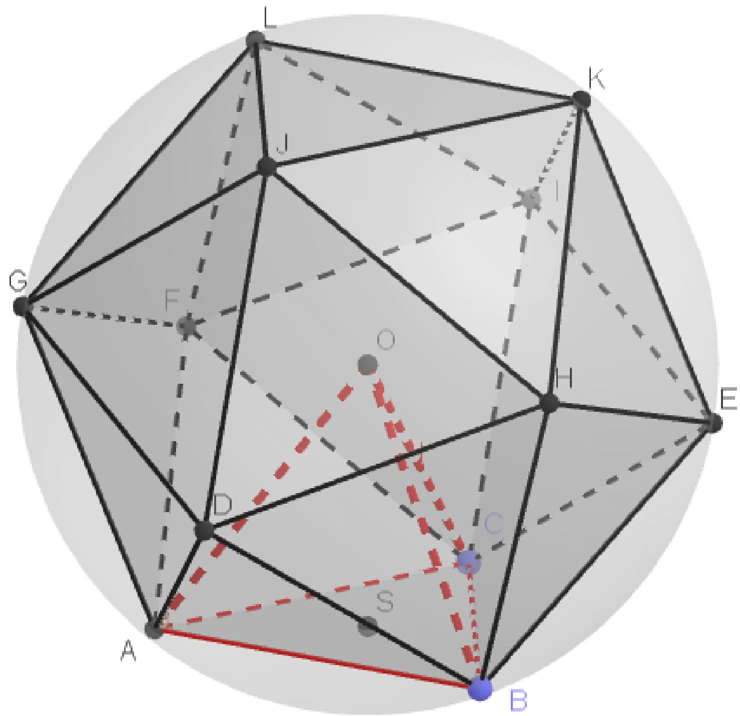
Je-li znám objem jehlanu, je možné vypočítat objem dvanáctistěnu. Objem jehlanu se vynásobí dvanácti. Následně do tohoto výpočtu dosadíme vztah (4):

$$V_{12} = 12 \cdot \frac{5 \cdot \varphi^5 \cdot a^3}{24 \cdot (\varphi^2 + 1)} = \frac{5 \cdot \varphi^5 \cdot a^3}{2 \cdot (\varphi^2 + 1)}$$

$$V_{12} = \frac{5 \cdot \varphi^5}{2 \cdot (\varphi^2 + 1)} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3} \cdot \varphi} \cdot r\right)^3 = \boldsymbol{\frac{20 \cdot \varphi^2}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot (\varphi^2 + 1)} \cdot r^3}$$

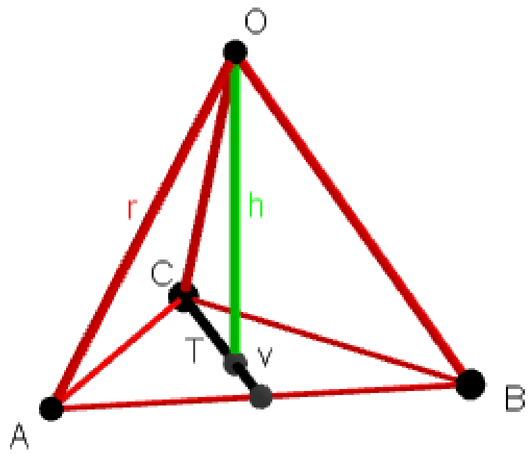
4.2.2.5 Dvacetistěn

Stejně jako u předchozího tělesa, i u dvacetistěnu se rozdělí těleso na několik menších těles, v tomto případě na tříboké jehlany s podstavou rovnostranného trojúhelníku – stěny dvacetistěnu. Aby se zjistil objem dvacetistěnu, musí se nejprve zjistit objem tříbokého jehlanu a poté vynásobit počtem stran, tedy dvaceti. Jak již bylo řečeno u ostatních těles, jediný známý parametr bude poloměr *r* kulové plochy opsané tělesu. Obrázek 95 zobrazuje, jak vypadá jeden takový jehlan.

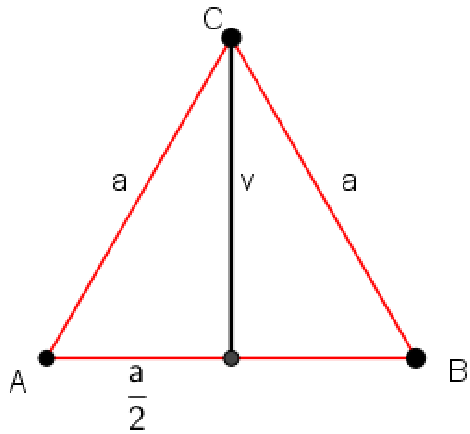


Obr. 95 – Dvacetistěn s jehlanem

Pro lepší znázornění se „vytáhne“ jehlan mimo dvacetistěn (viz Obr. 96). Objem jehlanu se vypočítá jako: $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$. Podstavou je rovnostranný trojúhelník (viz Obr. 97**)** a jeho obsah je nutné vyjádřit pomocí strany trojúhelníku *a* (hrany dvacetistěnu).



Obr. 96 – Jehlan *ABCO*



Obr. 97 – Jehlan *ABCO*

Pro vyjádření výšky *v* pomocí strany *a* se využije Pythagorova věta:

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = v^2$$

$$\frac{4 \cdot a^2 - a^2}{4} = v^2$$

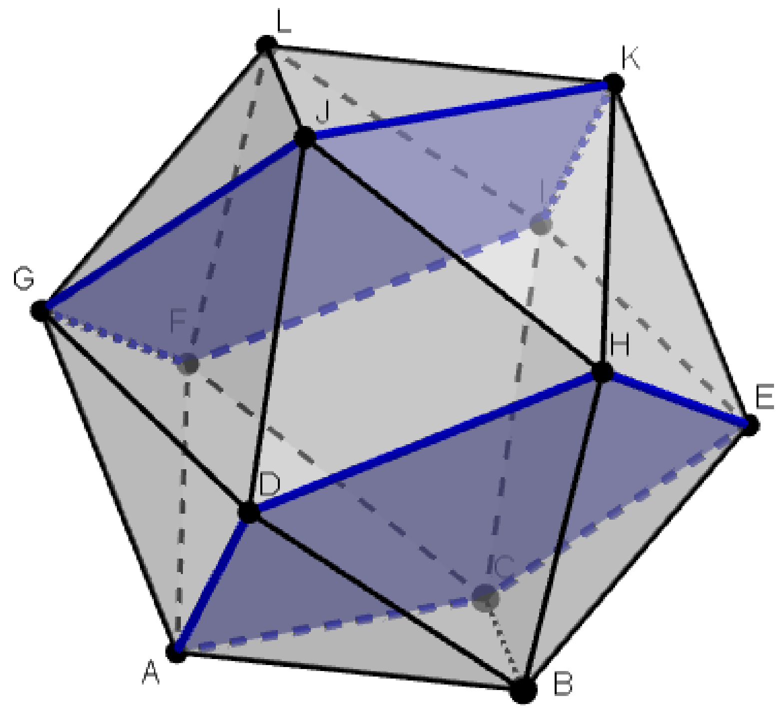
$$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \qquad (6)$$

Nyní je třeba vypočítat obsah podstavy podle vztahu: $S_p = \frac{a \cdot v_a}{2}$, kde se za výšku v_a dosadí výpočet (6):

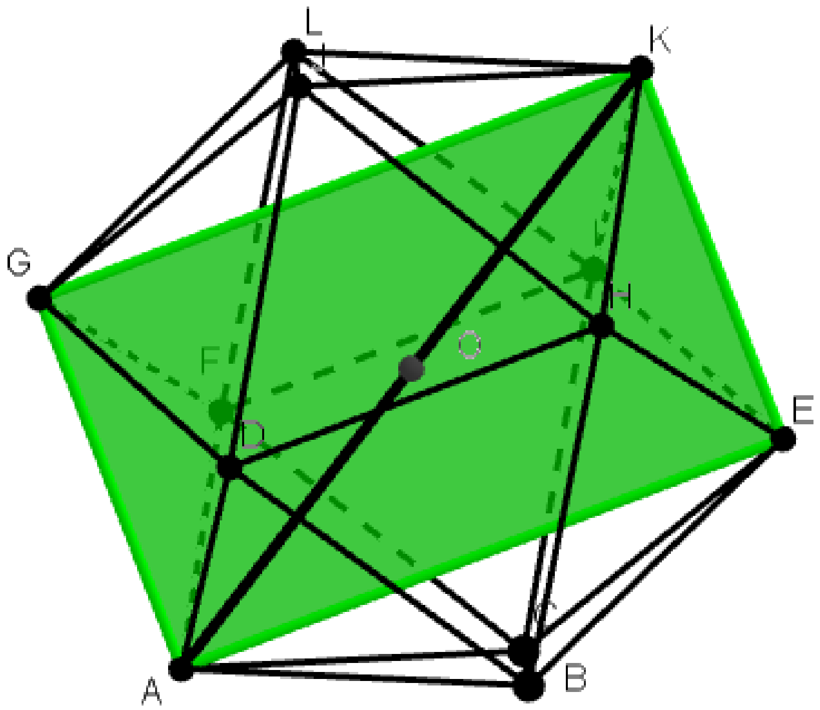
$S_p = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (7)

Když je vyjádřen obsah podstavy, je nutné se zaměřit na vyjádření výšky jehlanu h, aby se mohl spočítat objem jehlanu. K tomu se využije pravoúhlý trojúhelník *CTO*, kde velikost úsečky $|CT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{1}{\sqrt{3}} a$. Obrázek 98 ukazuje dva pravidelné pětiúhelníky *ADHEC* a *GJKIF*.



Obr. 98 – Dvacetistěn s pětiúhelníky

V předchozí kapitole bylo zmíněno, že úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku se rovná $\varphi \cdot a$, kde φ je *zlaté číslo*. Strana pětiúhelníku je hrana dvacetistěnu a. Nyní se vytvoří obdélník *AEKG* (viz Obr. 99).



Obr. 99 – Dvacetistěn s obdélníkem

V obdélníku se sestrojí úhlopříčka *AK* a její střed *O*, který je zároveň i středem kulové plochy opsané tělesu. Vznikne pravoúhlý trojúhelník *AKG*, kde strana $|KG| = \varphi \cdot a$, strana $|AG| = a$ a strana $|AK| = 2 \cdot r$. Opět se použitím Pythagorovy věty vyjádří *r* pomocí strany *a*:

$$4 \cdot r^2 = |AG|^2 + |KG|^2$$

$$4 \cdot r^2 = a^2 + \varphi^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot (\varphi^2 + 1)$$

$$2 \cdot r = a \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}$$

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{(\varphi^2+1)}}{2} \quad (8)$$

U jehlanu (viz Obr. 96) je známa velikost úsečky *CT* a velikost poloměru $r = |CO|$. Už jen zbývá vyjádřit výšku jehlanu $h = |OT|$:

$$h^2 = |OT|^2 = r^2 - |CT|^2$$

$$h^2 = \left(\frac{a \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a\right)^2$$

$$h^2 = \frac{a^2 \cdot (\varphi^2 + 1)}{4} - \frac{1}{3} \cdot a^2$$

$$h^2 = \frac{3 \cdot (\varphi^2 + 1) - 4}{12} \cdot a^2$$

$$h^2 = \frac{3 \cdot \varphi^2 - 1}{12} \cdot a^2 = \frac{\varphi^4}{12} \cdot a^2$$

$$h = \frac{\varphi^2}{2\sqrt{3}} \cdot a \qquad (9)$$

Stejně jako u dvanáctistěnu, i zde se použila speciální vlastnost *zlatého čísla* $3 \cdot \varphi^2 - 1 = \varphi^4$. Ze vztahu (8) se vyjádří *a:*

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}}{2}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{(\varphi^2+1)}} \cdot r \qquad (10)$$

Vztah pro výpočet objemu jehlanu je $V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$, kde *v* je *h*. Do tohoto vztahu se postupně dosadí předchozí výpočty, za S_p se dosadí vztah (7) a za *h* vztah (9):

$$V_J = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\varphi^2}{2\sqrt{3}} \cdot a$$

$$V_J = \frac{\varphi^2}{24} \cdot a^3$$

Objem jehlanu se vynásobí dvaceti a tím se zjistí objem dvacetistěnu. Následně se za stranu *a* dosadí vztah (8):

$$V_{20} = 20 \cdot \frac{\varphi^2}{24} \cdot a^3 = \frac{5 \cdot \varphi^2}{6} \cdot a^3$$

$$V_{20} = \frac{5 \cdot \varphi^2}{6} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{(\varphi^2 + 1)}} \cdot r\right)^3 = \boldsymbol{\frac{20 \cdot \varphi^2 \cdot r^3}{3 \cdot (\varphi^2 + 1) \cdot \sqrt{(\varphi^2 + 1)}}}$$

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit metodickou příručku pro uživatele, kteří by se chtěli naučit pracovat s programem GeoGebra, konkrétně s 3D objekty. Dále také pro učitele matematiky, kteří by chtěli aktivizovat svou výuku využitím ICT. Z toho důvodu jsem ve své práci zmínil několik možností, jak v programu GeoGebra sestrojit všech pět platónských těles. Každý uživatel si tak může vybrat, jaký způsob je pro něj nejvhodnější. Jelikož se v dnešní době začínají čím dál více používat mobilní zařízení i ve školách, rozhodl jsem se ve své diplomové práci zmínit i možnost práce s GeoGebrou v mobilním zařízení, hlavně co se týče operací s 3D objekty.

Dále jsem uvedl dva důkazy, že existuje právě pět platónských těles, a věnuji se otázce, proč jich nemůže být v prostoru více. Jak je řečeno v dané kapitole, právě druhý důkaz je vhodnější pro učitele při vysvětlování důkazů žákům základních a středních škol.

V práci jsou zmíněny pojmy *zlatý řez, zlatý obdélník, zlatý poměr* a *zlaté číslo*. Tyto termíny jsou úzce spjaty s pravidelnými konvexními tělesy, hlavně s dvanáctistěnem a dvacetistěn, a proto jsem do své práce zapojil i toho téma.

Při vysvětlování práce s tělesy jsem se zaměřil na vytváření sítě těles. Na základních i středních školách se nejvíce využívá těleso krychle (např. v šesté třídě se probírá učivo *znázornění hranolů* a zavádí se pojem *volné rovnoběžné promítání,* a při názorné ukázce se nejčastěji používá právě krychle). Proto jsem v práci zmínil všechny možné tvary sítí krychle. Toto téma totiž může být pro žáky zábavné, stačí jim ukázat, že krychle se dá v podobě sítě rozložit do roviny, a nato zadat úkol, ať sami naleznou všechny možnosti tvarů sítě krychle do roviny.

Poté jsem se soustředil na zjištění povrchů a objemů platónských těles. Povrch i objem lze vyčíst přímo z program GeoGebra, který objem vypočítá sám ihned po sestrojení tělesa, a u povrchů jen pomocí lehkého dopočítání dojdeme k výsledkům. Složitější už je vyjádřit obecný vztah pro výpočet objemu těles, pokud známe pouze poloměr kulové plochy opsané tělesu. Při těchto výpočtech jsem musel využít mnohých znalostí, abych se dopracoval k potřebnému výsledku. Dále jsem musel uplatnit několik speciálních vlastností *zlatého čísla* φ, které mi pomohly dostat se ke konečnému výslednému vztahu.

Předložená diplomová práce může tedy především ve své praktické části sloužit jako metodická příručka umožňující aplikovat ICT postupy ve výuce matematiky, a přispět tak k jejímu zpřístupnění žákům v duchu Komenského zásady názornosti výuky.

Všechny obrázky v mé práci jsou vytvořené v programu GeoGebra a jsou uloženy na přiloženém CD.

Přehled zdrojů

1. DURANT, Will. *Příběh filozofie: životy a myšlenky největších filozofů*. Přeložil Pavel KAAS. Hodkovičky: Pragma, [2003]. ISBN 80-7205-983-1.
2. BEČVÁŘ, Jindřich a Ivan ŠTOLL. *Archimedes: největší vědec starověku*. Praha: Prometheus, 2005. Velké postavy vědeckého nebe. ISBN 80-7196-273-2.
3. *RNDr. Čeněk Kodejška, Ph.D., Matematika - Fyzika - SCLPX* [online]. Olomouc, 2017 [cit. 2018-08-21]. Dostupné z: http://www.matfyz.eu/zajimavosti.php?typ=z-platonska-telesa
4. ASHTON, Anthony. *Quadrivium. The Four Classical Liberal Arts of Number, Geometry, Music & Cosmology*. 2015. ISBN 978-80-7363-732-3.
5. LIVIO, Mario. *Zlatý řez: příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Argo, 2006. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 80-7203-808-7.
6. PIERCE, Rod. "Platonic Solids - Why Five?" Math Is Fun. Autor: Rod Pierce. 2018. [cit. 2018-12-22]. Dostupné z: http://www.mathsisfun.com/geoDmetry/platonic-solids-why-five.html
7. *GeoGebra* [online]. 2013 [cit. 2016-09-09]. Dostupné z: www.geogebra.org
8. SUTTON, Daud. *Platónská a archimedovská tělesa: geometrie prostoru*. Praha: Dokořán, 2011. Pergamen. ISBN 978-80-7363-349-3.
9. MACLEAN, Kenneth James Michael. *A geometric analysis of the platonic solids and other semi-regular polyhedra: with an introduction to the phi ratio: for teachers, researchers and the generally curious*. Ann Arbor, MI: Loving Healing Press, c2007. ISBN 1932690999.
10. MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. Pěstujeme lineární algebru. 3. vyd. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 80-246-0421-3.
11. SVOBODOVÁ, Veronika. *Historie pravidelných mnohostěnů*. 2006.
12. JUCOVIČ, Ernest. *Konvexné mnohosteny*. Bratislava: Veda, 1981.
13. GERGELITSOVÁ, Šárka. *Průvodce Geogebrou: počítač ve výuce nejen geometrie*. 1. vyd. Praha: Generation Europe, 2011, 247 s. ISBN 978-80-904974-3-6
14. HONZÍK, L., TICHÝ, M. GeoGebra – více než dynamická geometrie. In MFI. Praha: Prometheus, 2011

Anotace

Jméno a příjmení	Bc. Jan Doubrava
Katedra	Katedra matematiky
Vedoucí práce	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc
Rok obhajoby	2019
Název:	Platónská tělesa v Geogebře
Název v angličtině:	Platonic solids in GeoGebra
Anotace práce:	Cílem práce je vytvořit metodickou příručku pro uživatele, kteří se chtějí naučit pracovat s 3D objekty v programu GeoGebra a také pro učitele, kteří chtějí aktivizovat výuku geometrie za využití ICT.
Klíčová slova:	Platónská tělesa, GeoGebra, zlaté číslo
Anotace v angličtině:	The aim of my degree work is creating a methodical guide for users who want to learn how to work with 3D objects in application called Geo Gebra, and for teachers who try to stimulate the tuition of geometry using ICT.
Klíčová slova v angličtině:	Platonic solids, GeoGebra, Golden number
Přílohy vázané v práci:	CD s příklady
Rozsah práce:	79
Jazyk práce:	čeština