UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Aplikácia Nashovho prístupu k teórii hier v psychológii

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedúci diplomovej práce: **prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.**
Vypracoval(a): **Jana Milová**
Študijný program: N1103 Aplikovaná matematika
Študijný obor: Aplikace matematiky v ekonomii
Forma štúdia: prezenčná
Rok odovzdania: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKÁCIA

Autor: Jana Milová

Názov práce: Aplikácia Nashovho prístupu k teórii hier v psychológii

Typ práce: Diplomová práca

Pracovisko: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedúci práce: prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Cieľom práce je hľadanie paralel medzi dvoma axiomatickými prístupmi: prístupom Johna Nasha k teórii hier a psychologickou konštrukciou, ktorá popisuje prahový psychický proces ľudstva a ich následným popisom pomocou teoretického aparátu.

Kľúčové slová: axiómy, axiomatický prístup, teória hier, John Nash, Nashova rovnováha, psychológia, psychický proces

Počet strán: 80

Počet príloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jana Milová

Title: Applications of Nash axiomatic approach of game theory in psychology

Type of thesis: Diploma thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

The year of presentation: 2017

Abstract: The aim of the thesis is to find parallels between two axiomatic approaches: approach of John Nash to the game theory and psychological structure which describes psychological threshold process of humanity and the subsequent description by theoretical apparatus.

Key words: axioms, axiomatic approach, game theory, John Nash, Nash equilibrium, psychology, psychological process

Number of pages: 80

Number of appendices: 0

Language: Slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu spracovala samostatne pod vedením pána prof. RNDr. dr hab. Jana Andresa, DSc. a všetky použité zdroje som uviedla v zozname literatúry.

V Olomouci dňa ....

podpis

Poďakovanie

Rada by som poďakovala prof. RNDr. dr hab. Janovi Andresovi, DSc a PhDr. Václavovi Mazalovi za ich odborné pripomienky, rady a drahocenný čas, ktorý mi venovali pri písaní mojej diplomovej práce. Ďalej by som rada poďakovala svojej sestre Michaele za cenné pripomienky a jej medicínský prínos k práci, kamarátke a spolubývajúcej Barbore za cenné rady v oblasti psychológie, a v neposlednej rade by som chcela poďakovať svojej rodine a priateľom za ich podporu a navádzanie správnym smerom.

Obsah

Úvod

Teória hier predstavuje oblasť aplikovanej matematiky, ktorá skúma konfliktné rozhodovacie situácie medzi jednotlivcami. Hry, ako také, si však nemusíme predstavovať iba ako kartové, hazardné hry, teda hry v pravom slova zmysle, ale môžeme si hru predstaviť ako každodenné situácie, v ktorých sa musíme rozhodovať. Výsledok tohto rozhodnutia nezávisí len na našom rozhodnutí a správaní, ale taktiež na rozhodnutiach a správaní iných inteligentných ľudí. Môžeme teda povedať, že teória hier skúma očakávané a reálne správanie jednotlivých hráčov (ľudí) v hrách. Formovanie teórie hier do podoby, ktorá je nám známa v súčasnosti, si prešlo niekoľkými významnými krokmi. Podrobnosti k chronologickému vývoju teórie hier sú uvedené v podkapitole 1.1.

Samotná diplomová práca nesie názov *Aplikácia Nashovho prístupu k teórii hier v psychológii* a predstavuje interdisciplinárne spojenie dvoch vedných obor, matematiky a psychológie. Impulz pre túto prácu vzišiel u pána PHDr. Václava Mazala, odborného psychológa z Prahy s vyše 30 ročnou praxou v obore, ktorý nadobudol myšlienku, že môže existovať nejaký presah od Nashovej teórie hier do psychológie. Pre konkrétnejší pohľad čitateľa ide o presah medzi axiomatickým prístupom k teórii hier Johna Nasha a apriórnou psychologickou konštrukciou, ktorá popisuje prahový psychický proces ľudstva.

Hlavným cieľom mojej práce je zistiť, či existujú koincidencie medzi týmito dvoma axiomatickými prístupmi a následný popis pomocou teoretického aparátu. Je ale nutné dopredu zdôrazniť, že zo samotného definovania cieľu vyplýva, že dané paralely môžu, ale nemusia existovať resp. môžu existovať iba v určitej miere.

Od stanoveného cieľa sa odvíja aj koncepcia mojej práce a delenie na: matematickú časť, psychologickú časť a časť, ktorú sme nazvali: možné koincidencie (súvislosti, presahy, paralely). Matematická časť pozostáva z prehľadu základných pojmov, viet a matematických aparátov týkajúcich sa teórie hier, vyjednávacieho problému[1] a axiomatického prístupu Johna Nasha s príslušnými odkazmi na doplňujúcu literatúru. Psychologická časť predstavuje stručný úvod do psychológie a je zložená z prehľadu pojmov potrebných pre ďalšie spracovanie. Posledná tretia kapitola, tretia časť, poukazuje na možné koincidencie (presahy) medzi matematickým a psychologickým prístupom.

Na záver by som chcela poukázať na aktuálnosť prepojenia psychológie s ďalšími vednými obormi. V roku 2011 napísal Daniel Kahneman knihu [3]*Myšlení: rýchle a pomalé*, ktorá spojuje poznatky zo psychológie, ekonómie a štatistiky, zaoberá sa ľudským myslením a tým, aké chyby robíme v úsudkoch a pri rozhodovaní. Kniha bola taktiež inšpiráciou pre bakalársku prácu na Univerzite Palackého, ktorá nesie názov *Myšlení rýchle a pomalé*. Ďalšie spojenie psychológie a ekonómie predstavuje diskusia na tému *Očima expertů: Jak učit ekonomii*. Časť diskusie je pre záujemcov dostupná na [17].

[1]Zadefinovanie vyjednávacieho problému je nutné pre zavedenie axiomatického prístupu Johna Nasha.

1. Matematická časť

V tejto kapitole bude na začiatku priblížený chronologický vývoj teórie hier v priebehu tisícročí so zameraním na najvýznamnejšie body a krátke priblíženie života Johna Nasha a jeho práce pre teóriu hier. Nasledovať bude prehľad základných pojmov z oblasti teórie hier a čitateľovi budú postupne predstavené antagonistické a neantagonistické konflikty, kooperatívne a nekooperatívne hry, a hry viacerých hráčov. V predposlednej časti bude priblížená problematika tzv. vyjednávacieho problému, ktorý je nevyhnutný pre zavedenie axiomatického prístupu Johna Nasha, ktorý následne tvorí samotný záver matematickej časti.

Hlavné zdroje prvej kapitoly sú [2], [5], [12], [13], [15], [21], [23]-[27] a [29].

1.1. Stručná história teórie hier a nášho problému

Samotné počiatky teórie hier siahajú už do prvých piatich storočí nášho letopočtu, kedy bol stanovený tzv. Babylónský Talmud[2], ako zostava starovekých práv a tradícii, ktorý slúžil ako základ židovského náboženského, trestného a občianskeho práva. Jedným z mnohých problémov, ktoré sú v Talmude popísané je aj problém manželskej zmluvy. Problém manželskej zmluvy vychádza z nasledujúceho: muž má tri manželky a v ich manželských zmluvách je špecifikované, že v prípade jeho smrti dostanú manželky podiely z majetku v nasledujúcom poradí: 100, 200 a 300 peňažných jednotiek *zuz*. Ako ale medzi manželky rozdeliť majetok v hodnote iba 100, 200 a 300 peňažných jednotiek? Talmud dáva nasledujúce odporúčania: pokiaľ muž zomrie a jeho majetok má hodnotu 100 peňažných jednotiek, potom je delenie rovnomerné. Ak má však majetok hodnotu 300 peňažných jednotiek, potom nastáva proporcionálne delenie 50, 100, 150 peňažných jednotiek, a pri majetku hodnoty 200 peňažných jednotiek odporúča delenie 50 , 75, 75 peňažných jednotiek. Tieto úvahy miatli učencov Talmudu po dve tisícročia, až v roku 1985 bolo zistené, že v Talmude sa pojednáva o modernej teórii kooperatívnych hier a každé riešenie odpovedá nukleolom príslušnej

[2]Viac o Babylónskom Talmude v [10], [11] a [12].

kooperatívnej hry. Nasledujúci obrázok zahŕňa riešenia k rozdeleniu majetku obsiahnuté v Talmude [obrázok prebratý z [13], str.3]:

		Závazek		
		100	**200**	**300**
Pozůstalost	**100**	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Obr. 1: Odporúčania na rozdelenie majetku podľa Talmudu.

Prvá významná zmienka o teórii hier pochádza z roku 1713 z listu Francisa Waldegrave pre Pierra-Remonda de Montmorta, v ktorom popisuje a navrhuje zmiešanú minimax stratégiu pre hru dvoch hráčov ako riešenie kartovej hry "le Her". V roku 1838 vydáva Augustin Cournot svoju knihu *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*[3], kde v siedmej kapitole pojednáva o špeciálnom prípade duopolu a používa riešenie, ktoré je obmedzenou formou Nashovej rovnováhy.

Prvá „veta" teórie hier vytvorená v roku 1913 vychádzala z toho, že v šachu si môžu výhru vynútiť buď biele, alebo čierne figúrky, alebo si obe strany môžu vynútiť remízu. Táto „veta" bola publikovaná Ernestom Zermelom v jeho práci *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*[4] a je označovaná ako Zermelova veta pre teóriu hier.[5] Hykšová v [13, str.14] označuje doposiaľ spomenutý vývoj ako *prehistóriu* teórie hier a skutočná história začína až Émilem Borelom.

V rokoch 1921-1927 Émil Borel publikoval štyri poznámky o strategických hrách a dal v nich prvý moderný náhľad na formuláciu zmiešaných stratégii s hľadaním minimaxového riešenia pre hry dvoch hráčov s nulovým súčtom s troma alebo piatimi možnými stratégiami. Zo začiatku Borel tvrdil, že hry, kde počet

[3] Výskumy matematických princípov teórie bohatstva.
[4] O aplikácií teórie množín na teóriu šachov (šachových hier).
[5] Viac o tejto vete v [31] a [32].

stratégií je väčší ako sedem, by nemali mať minimaxové riešenie. V roku 1927 tento problém síce sformuloval, ale nikdy k nemu nepodal žiaden dôkaz. Keď sa v roku 1928 podarilo Johnovi von Neumannovi dokázať existenciu riešenia ľubovoľnej hry dvoch hráčov s nulovým súčtom s konečným počtom stratégií, začal sa Borel zaoberať hrami so spojitými priestormi stratégií.

V roku 1928 John Von Neumann, ktorý je považovaný za zakladateľa teórie hier, dokázal vetu o minimaxe v jeho článku *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*[6] a uvádza v ňom, že každá hra dvoch hráčov s nulovým súčtom s konečným počtom čistých stratégii pre každého hráča je určená. To znamená, že ak pripustíme zmiešané stratégie, tak má tento typ hry jeden individuálny racionálny výplatný vektor. V roku 1944 je publikovaná *Teória hier a ekonomického správania* Johna Von Neumanna a Oskara Morgensterna, ktorá obsahuje metódy hľadania riešenia pre hry dvoch hráčov s nulovým súčtom.

Obr. 2: John Von Neumann a Oskar Morgenstern.

V roku 1950 Melvin Dresher a Merrill Flood definovali väzňovu dilemu[7] odpovedajúcu situácií, v ktorej by jednotlivci mohli získať viac spoluprácou, ale rozhodnú sa konať samostatne, čo im znižuje na zisku resp. prínose. Nasledujúci obrázok vykresľuje väzňovu dilemu na príklade dvoch väzňov, ktorí sa musia rozhodnúť či sa priznajú k zločinu, na ktorom sa obaja podieľali, alebo zostanú mlčať.

[6] O teórii spoločenských hier.
[7] Viac o tématike v [19].

The Prisoners' Dilemma

		Prisoner A Choices	
		Stay Silent	*Confess and Betray*
Prisoner B Choices	*Stay Silent*	Each serves one month in jail	Prisoner A goes free Prisoner B serves full year in jail
	Confess and Betray	Prisoner A serves full year in jail Prisoner B goes free	Each serves three months in jail

Obr. 3: Väzňova dilema.

Jeden z najväčších milníkov teórie hier nastáva v spojení s menom John Nash. John Forbes Nash Jr. (13. jún 1928- † 23. máj 2015) bol americký matematik, ktorý sa preslávil svojou prácou v oblasti diferenciálnej geometrie, parciálnych diferenciálnych rovníc a teórie hier. Jeho prácu mu značne komplikovala duševná choroba, ktorá sa uňho začala prejavovať v roku 1958. Po prvých príznakoch paranoje bol umiestnený do nemocnice, kde mu v roku 1959 bola stanovená diagnóza - paranoidná schizofrénia. Niekoľko rokov strávil v psychiatrických liečebniach, kde podstupoval rôzne liečby, až kým sa jeho stav v roku 1970 nezačal pomaly zlepšovať. Jeho boj so zákernou chorobu sa stal námetom pre knižné a následné filmové spracovanie s názvom Čistá Duša[8].

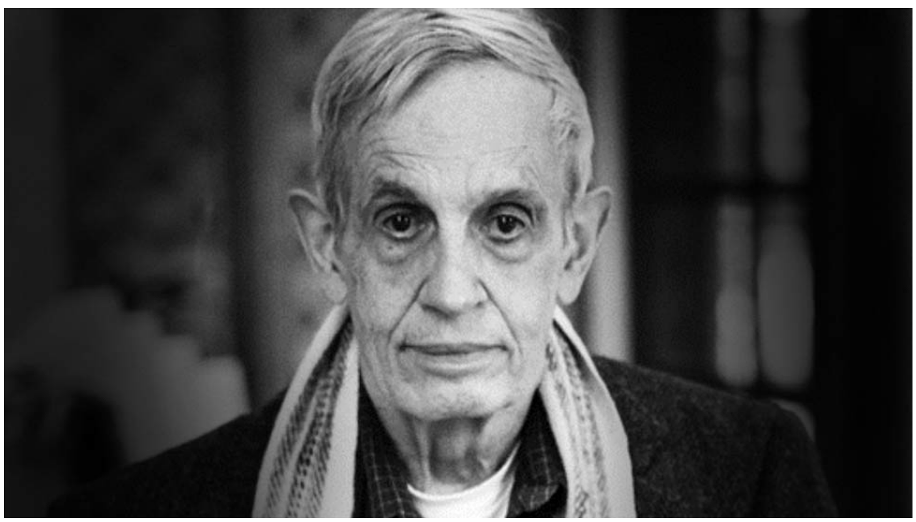
I napriek svoje vážnej diagnóze Nash ďalej pokračoval vo svojej práci. V roku 1994 získal za svoj prínos do teórie hier Cenu Švédskej národnej banky za rozvoj ekonomickej vedy na pamiatku Alfreda Nobela, spolu s ním ju získali aj matematici Reinherd Selten a John Harsanyi. V roku 2015 získal za prácu na nelineárných parciálnych diferenciálnych rovniciach Ábelovu cenu spolu z matematikom Louisom Nirenbergom. John Nash zomrel so svojou manželkou Aliciou 23. mája 2015 pri dopravnej nehode taxíku v New Jersey.

Pre túto prácu sú významné predovšetkým jeho texty z rokov 1950-1953. V týchto rokoch Nash vydáva štyri články, ktoré sa zaoberajú nekooperatívnymi hrami a vyjednávacím problémom. V dvoch článkoch *Equilibrium Points in N-*

[8] Z anglického Beautiful Mind.

Person Games (1950) a *Non-cooperative Games (1951)* Nash dokázal existenciu strategickej rovnováhy pre nekooperatívne hry, tzv. Nashova rovnováha, a zaviedol tzv. Nashov program, v ktorom navrhol priblíženie k teórii kooperatívnych hier cez ich redukciu na nekooperatívnu formu. V ďalších dvoch článkoch, ktoré sa zameriavali na vyjednávací problém *The Bargaining Problem (1950)* a *Two-Person Cooperative Games (1953)*, objavil axiomatickú vyjednávaciu teóriu, dokázal existenciu Nashovho vyjednávacieho riešenia a umožnil prvé spustenie Nashovho programu.

Pre dalšie informácie o Johnovi Nashovi čitateľovi doporučujeme [14], [15] a [16].



Obr. 4: John Nash.

1.2. Teória hier

Na skúmanie konfliktných rozhodovacích situácií medzi jednotlivcami využíva teória hier charakteristické matematické modely, ktoré popisujú danú konfliktnú situáciu. Medzi najvýznamnejšie modely patrí hra v normálnom tvare a hra v rozvinutom tvare. Nasledujúci text sa zameriava len na hru v normálnom tvare a k hre v rozvinutom tvare doporučujeme napr. [29], str.39-46].

Nasledujúce podkapitoly využívajú zdroj [21], z ktorého bolo prebraté aj matematické značenie. Príklady obsiahnuté v podkapitolách [1.2.2] , [1.2.3] a [1.2.4] boli vytvorené autorkou tejto práce.

1.2.1. Základné pojmy

Definícia 1 *Hra v normálnom tvare* je definovaná ako trojica

$$\{P = \{1, \ldots, n\}, X_1, \ldots, X_n, M_1, \ldots, M_n\}, \tag{1}$$

kde:
$P = \{1, \ldots, n\} \ldots$ množina hráčov,
$X_1, \ldots, X_n \ldots$ priestory stratégií a
$M_1, \ldots, M_n \ldots$ výplatné funkcie hráčov (funkcie platieb).

Hra v najvšeobecnejšom slova zmysle predstavuje konflikt alebo rozhodovaciu situáciu. **Hráč** je potom účastnik konfliktu alebo rozhodovateľ.

Každému jednému hráčovi i z množiny hráčov P náleží príslušný priestor stratégií X_i, ktorý obsahuje stratégie daného hráča. **Stratégie** x_i predstavujú rozhodnutia, z ktorých si daný hráč môže vyberať. **Výplatné funkcie** sú definované na kartézskom súčine priestorov stratégií, tj. $M_i = X_1 \times \cdots \times X_n \to R$. Hodnota výplatnej funkcie i-tého hráča je daná súborom všetkých zvolených stratégii všetkých hráčov a môžeme ju zapísať ako $M_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Medzi základné predpoklady teórie hier patrí:

1. hráči sú inteligentní a snažia sa maximalizovať svoj zisk, teda hodnotu svojej výplatnej funkcie,

2. hráči sú dokonale informovaní o hre: poznajú pravidla hry, ktoré sa počas hry nemenia, poznajú nielen svoje stratégie, ale aj stratégie ostatných hráčov, poznajú výšku ziskov a strát.

Príklad 1 (kameň-nožnice-papier) Najčastejší príklad, na ktorom sa dané pojmy ilustrujú, je hra *kameň-nožnice-papier*. Uvažujme, že hru hrajú dvaja hráči *1,2*. Obaja majú rovnaký priestor stratégií $X_1 = X_2 = \{K,N,P\}$. Výplatné funkcie môžeme zaznamenať nasledovne:

		2.hráč		
		K	N	P
1.hráč	K	0	1	-1
	N	-1	0	1
	P	1	-1	0

Obr. 5: Výplatné funkcie v hre kameň-nožnice-papier.

V tabuľke sú uvedené iba hodnoty výplatnej funkcie 1. hráča a ide o tzv. hru s nulovým súčtom, ktorá bude priblížená v nadchádzajúcej podkapitole. Pokiaľ prvý hráč zvolí stratégiu K a druhý hráč stratégiu N, prvý hráč vyhráva 1 jednotku[9]. Pokiaľ by obaja hráči zvolili rovnakú stratégiu napr. P, tak by nastala remíza a výplaty sú 0.

Na záver podkapitoly uvedieme delenie hier podľa rôznych hľadísk:

1. počet hráčov:
   (a) hry dvoch hráčov,
   (b) hry viacerých hráčov,
2. povaha hráčov:

[9] Druhý hráč stráca 1 jednotku.

   (a) inteligetný hráč- racionálny účastník,

   (b) neinteligentný hráč- náhoda, prostredie,

3. priestor stratégií:

   (a) hry s konečným počtom stratégií,

   (b) hry s nekonečným počtom stratégií,

4. vlastnosti funkcie platieb:

   (a) hry s konštantným súčtom,

   (b) hry s nekonštantným súčtom,

5. spolupráca:

   (a) kooperatívne hry, v ktorých hráči môžu spolupracovať a v prípade hry viacerých hráčov aj vytvárať koalície,

   (b) neookoperatívne hry, v ktorých hráči spolu nemôžu spolupracovať.

Poznámka 1 Pre podkapitoly 1.2.2 a 1.2.3 budeme uvažovať výlučne hry dvoch hráčov z dôvodu prehľadnejšieho interpretovania ďalších pojmov. Priestory stratégii hráčov budeme označovať X, Y a výplatné funkcie budeme označovať F_1, F_2.

1.2.2. Antagonistické konflikty

Antagonistické konfllikty predstavujú hry dvoch hráčov s konštantným súčtom. V prípade antogonistického konfliktu je matematickým modelom hra v normálnom tvare, ktorú v tomto prípade nazývame **hra dvoch hráčov s konštantným súčtom**. Matematický model tejto hry môžeme zapísať nasledovne:

$$\{P = \{1, 2\}, X, Y, F_1, F_2, F_1(x, y) + F_2(x, y) = K, \forall x \in X, y \in Y\}, \qquad (2)$$

kde F_1, F_2 predstavujú funkcie platieb a K je ľubovoľné reálne číslo.

Na stanovenie optimálneho riešenia (optimálnej stratégie) v prípade, že existuje, sa využíva dvojica rovnovážných stratégii.

Definícia 2 *(Rovnovážné stratégie)* Stratégia prvého hráča $\overline{x} \in X$ sa nazýva *rovnovážná*, pokiaľ k nej existuje stratégia druhého hráča $\overline{y} \in Y$ taká, že platí

$$\forall x \in X, y \in Y : F_1(x, \overline{y}) \leq F_1(\overline{x}, \overline{y}) \wedge F_2(\overline{x}, \overline{y} \geq F_2(\overline{x}, y), \qquad (3)$$

kde $\overline{y} \in Y$ sa nazýva *rovnovážna stratégia druhého hráča.*

Poznámka 2 Hra má riešenie pokiaľ existuje dvojica rovnovážných stratégii $(\overline{x}, \overline{y})$. Pokiaľ by riešení bolo viac, tak by ktorákoľvek dvojica bola rovnovážna.

Poznámka 3 Výraz (3) predstavuje tzv. ***Nashovu rovnováhu***, v ktorej pokiaľ sa hráč číslo jedna odchýli od svojej optimálnej stratégie a hráč číslo 2 sa bude držať svojej optimálnej stratégie, tak výhra hráča číslo 1 sa buď zníži, alebo v najlepšom prípade zostane rovnaká. Inými slovami, pokiaľ sa hráč odchýli od svojej optimálnej stratégie, nemôže si v žiadnom prípade polepšiť. Niekedy sa v literatúre môžeme stretnúť aj s označením ***Nashovo rovnovážne riešenie***.

Hru s konštantným súčtom môžeme jednoducho pretransformovať na hru s nulovým súčtom, kde $K = 0$.

Definícia 3 *(Hra s nulovým súčtom)* Nech je daná hra s konštantným súčtom

$$\{P = \{1,2\}, X, Y, F_1, F_2, F_1(x,y) + F_2(x,y) = K\},$$

potom má táto hra rovnaké rovnovážne stratégie ako *hra s nulovým súčtom*:

$$\{P = \{1,2\}, X, Y, F_1'(x,y) = F_1(x,y) - F_2(x,y), F_2'(x,y) = F_2(x,y) - F_1(x,y)\}.$$

Poznámka 4 V hre s nulovým súčtom platí nasledujúce:

1. ak pripočítame k všetkým hodnotám výplatnej funkcie konštantu, tak nezmeníme riešenie,

2. v prípade hry dvoch hráčov s nulovým súčtom platí $F_1(x,y) = -F_2(x,y)$,

3. výhra druhého hráča predstavuje výhru prvého hráča s opačným znamienkom (to, čo jeden hráč získa, druhý stráca), preto hru s konštantným súčtom zjedodušujeme tak, že sa zaoberáme funkciou platieb jedného hráča.

4. Vzhľadom k bodu 3 môžeme hru s nulovým súčtom zapísať nasledovne:

$$\left\{P = \{1,2\},\ X,\ Y,\ \underbrace{F}_{funkcia\ platieb\ prv\acute{e}ho\ hr\acute{a}\check{c}a}\right\}.$$

5. $\forall x \in X, y \in Y$:

$$F(x,\overline{y}) \leq F(\overline{x},\overline{y}) \wedge \underbrace{-F(\overline{x},\overline{y}) \geq -F(\overline{x},y)}_{funkcia\ platieb\ druh\acute{e}ho\ hr\acute{a}\check{c}a}$$ [10]

$$F(x,\overline{y}) \leq F(\overline{x},\overline{y}) \wedge F(\overline{x},\overline{y}) \leq F(\overline{x},y)$$

$$F(x,\overline{y}) \leq F(\overline{x},\overline{y}) \leq F(\overline{x},y) \tag{4}$$

   (a) $(\overline{x},\overline{y})$ predstavuje sedlový bod funkcie F,

   (b) $F(\overline{x},\overline{y})$ je cena hry, ktorá odpovedá výhre prvého hráča pri voľbe rovnovážnych stratégií.

[10] Funkcia platieb druhého hráča $\cdot(-1)$.

Poznámka 5 Výraz (4) odpovedá prepisu Nashovej rovnováhy z (3) pre hru s nulovým súčtom a je na nich lepšie pozorovateľný prípad, keď sa hráč odchýli od svojej rovnovážnej stratégie a jeho protihráč nie, jeho výhra sa buď zníži, alebo zostane v najlepšom prípade rovnaká.

Uvažujme hru s nulovým súčtom, ale s konečným počtom stratégií pre oboch hráčov. Takúto hru môžeme zapísať nasledovne:

$$\{P = \{1,2\}, X = \{1,\dots,m\}, Y = \{1,\dots,n\}, \underbrace{F(i,j) = a_{ij}}_{matica\ hry\ A}\}.$$[11]

Riešením hry je dvojica rovnovážných stratégií $(\bar{i},\bar{j})$, ktoré určuje prvok matice **A**. Hráč číslo jedna si vyberá zo stratégií $1,\dots,m$ v riadku a hráč číslo dva zo stratégií $1,\dots,n$ v stĺpci. Pokiaľ si obaja hráči vyberú stratégiu, tak tejto dvojici stratégií odpovedá prvok a_{ij} v matici A a predstavuje hodnotu výplatnej funkcie prvého hráča (hodnota výplatnej funkcie druhého hráča je $-a_{ij}$). Takáto hra sa nazýva ***maticová hra*** a matica A predstavuje výplatnú maticu.

Nashovu rovnováhu v prípade maticových hier získame pomocou sedlového bodu matice A. ***Sedlový bod*** je prvok matice A, ktorý je najväčší v stĺpci a zároveň najmenší v riadku. Pokiaľ nájdeme sedlový bod, získavame prvok a_{ij} matice A a teda cenu hry a stratégie, s ktorými sme obdržali tento prvok predstavujú rovnovážne stratégie pre prvého a druhého hráča. Takéto riešenie sa niekedy označuje ako Nashova rovnováha v rýdzich stratégiach a predstavuje okamžité nájdenie sedlového bodu matice.

Pokiaľ sa snažíme nájsť sedlový bod matice, môže nastať jedna z troch situácií:

1. matica má jeden sedlový bod,
2. matica má viac sedlových bodov (hodnoty týchto bodov sú rovnaké),
3. matica nemá žiaden sedlový bod, tzn. nenašli sme rovnovážne stratégie.

[11] $i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$.

Príklad 2 Nasledujúci príklad ukazuje možné situácie, ktoré môžu nastať pri hľadaní sedlového bodu. Sedlový bod bude označený guľatými zátvorkami.

Príklad matice, ktorá má jeden sedlový bod: $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ (6) & 9 & 8 \end{bmatrix}$,

príklad matice, ktorá ma viac sedlových bodov: $A_2 = \begin{bmatrix} (6) & 7 & (6) \\ (6) & 8 & (6) \\ (6) & 9 & (6) \end{bmatrix}$,

príklad matice, ktorá nemá sedlový bod: $A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

V prvom prípade má matica A_1 jeden sedlový bod, ktorý predstavuje Nashovu rovnováhu. V druhom prípade má matica A_2 šesť sedlových bodov a body určujú alternatívne rovnovážne stratégie. V treťom prípade nemá matica A_3 ani jeden sedlový bod. Znamená to ale, že v takomto prípade pre hráčov neexistujú rovnovážné stratégie? Odpoveď je, že rovnovážné stratégie existujú, ale informácie, ktoré sme doteraz načrtli, nepokrývajú všetky rozhodovacie situácie, ktoré je možné zapísať ako maticovú hru.

Vráťme sa naspäť k príkladu 1, kde sme rozoberali hru kameň-nožnice-papier. Uviedli sme, že ide o hru s nulovým súčtom, ktorú môžeme zapísať pomocou matice nasledovne:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} K & N & P \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ N \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Treba doplniť, že pokiaľ hráči zvolia rovnakú stratégiu napr. kameň, nastáva remíza. V reálnej hre by hráči ďalej pokračovali, kým by jeden z nich nevyhral. Túto možnosť nebudeme uvažovať, a teda remíza bude predstavovať možný, konečný výsledok hry.

Pokiaľ sa pozrieme na maticový zápis hry, tak vidíme, že nie je možné nájsť sedlový bod. Môžeme teda povedať, že nie sme schopný nájsť Nashovú rovnováhu v rýdzich stratégiach. V takýchto prípadoch sa prechádza ku ***zmiešanému rozšíreniu maticovej hry***, ktoré využíva priestory zmiešaných stratégií.[12]

Priestory zmiešaných stratégií predstavujú vektory pravdepodobností, s ktorými si hráči volia stratégie. Priestory zmiešaných stratégií sú dané nasledovne:

$$(X) = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

$$(Y) = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \right\}$$

Keďže stále pracujeme s hrou s konštantným súčtom stačí sa zaoberať výplatnou funkciou prvého hráča, ktorá je daná ako očakávaná hodnota výhry:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y},$$

kde $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sú stĺpcové vektory.

Poznámka 6 Rýdze stratégie sú špeciálnym prípadom zmiešaných stratégii a to v prípade, keď sa jedna z pravdepodobností rovná jednej a ostatné sú nulové.

Veta 1 *(Základná veta maticových hier) Každé zmiešané rozšírenie maticovej hry má Nashovo rovnovážne riešenie.*

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť napr. v [22] alebo v [4, str.36-40].

Poznámka 7 Riešenie sa hľadá pomocou riešenia dvoch duálnych úloh lineárneho programovania.

Základná veta maticových hier predstavuje Nashovu rovnováhu v zmiešaných stratégiach a môže byť zapísaná nasledovne:

[12] V literatúre sa môžeme stretnúť aj s názvom pravdepodobnostné stratégie.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\overline{\mathbf{y}} \leq \overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}\overline{\mathbf{y}} \leq \overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Opät platí, že pokiaľ by si hráč zvolil inú stratégiu ako rovnovážnu, tak si môže pohoršiť alebo v najlepšom prípade zostáva na tom rovnako, ale nemôže si v žiadnom prípade polepšiť.

Poznámka 8 V prípade hry kameň-nožnice-papier by obaja hráči mali rovnovážne stratégie dané vektorom $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$, kde čísla predstavujú pravdepodobnosti, s ktorými si hráči zvolia jednu z troch stratégií.

1.2.3. Neantagonistické konflikty

Pre neantagonistické konflikty je matematickým modelom hra v normálnom tvare, ktorú v tomto prípade nazývame **hra dvoch hráčov s nekonštantným súčtom**. V týchto hrách už neplatí, že to čo jeden hráč získa druhý okamžite stráca a naopak. V prípade neantagonistických konfliktov sa rozlišujú dva prípady hier:

1. nekooperatívne hry- hráči spolu nemôžu spolupracovať,
2. kooperatívne hry- hráči spolu môžu spolupracovať a môže nastať:
   (a) dohoda o voľbe stratégií, ale nie o prerozdelení výhry,
   (b) dohoda o voľbe stratégií a o prerozdelení výhry.

Matematický popis tejto hry môžeme schématicky zapísať nasledovne:

$$\{P = \{1, 2\}, X, Y, F_1, F_2, F_1(x, y) + F_2(x, y) = \varphi(x, y) \neq \mathit{kon\check{s}tanta}\}. \tag{5}$$

Pokiaľ budú priestory stratégií X, Y konečné, tak matematickým modelom sú dvojmaticové hry:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\textit{výhry prvého hráča}} \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}}_{\textit{výhry druhého hráča}}.$$

$$\downarrow$$

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Poznámka 9 Symbol (A, B) znamená zlúčenie odpovedajúcich prvkov matíc A a B do dvojčlenných vektorov.

V prípade **nekooperatívnych hier** získame optimálne riešenie pomocou rovnovážnych stratégií.

Definícia 4 *(Rovnovážné stratégie)* Nech máme hru v tvare

$$\{P = \{1, 2\}, X, Y, F_1, F_2, F_1(x, y) + F_2(x, y) = \varphi(x, y) \neq kon\check{s}tanta\}.$$

Stratégia $\overline{x} \in X$ *je rovnovážná stratégia 1. hráča*, pokiaľ existuje $\overline{y} \in Y$s vlastnosťou:

$$\forall x \in X, y \in Y : F_1(x, \overline{y}) \leq F_1(\overline{x}, \overline{y}) \wedge F_2(\overline{x}, \overline{y}) \geq F_2(\overline{x}, y), \tag{6}$$

kde $\overline{y}$ *je rovnovážná stratégia 2. hráča.*

Poznámka 10 Rovnovážne riešenie v dvojmaticovej hre je dané dvojicou prvkov, ktoré nájdeme nasledovne: prvý prvok musí byť najväčší v stĺpci a druhý prvok najväčší v riadku.

Tak ako v prípade antagonistických konfliktov môžu pri hľadaní Nashovej rovnováhy nastať tri prípady:

1. existuje práve jedno rovnovážne riešenie $(\overline{x}, \overline{y})$,
2. existuje viacej rovnovážných riešení $\rightarrow$ je potrebná ďalšia analýza a to analýza dominantnosti a analýza zámennosti dominujúcich rovnovážných riešení,
3. neexistuje žiadne rovnovážne riešenie $\rightarrow$ prechod ku zmiešanému rozšíreniu dvojmaticových hier.

Pokiaľ existuje práve jedno rovnovážne riešenie považujeme ho za optimálne riešenie. V prípade existencie viacerých rovnovážných riešení môže byť jedno z riešení lepšie pre obidvoch hráčov ako všetky ostatné riešenia. Hovoríme, že toto riešenie dominuje ostatným riešeniam a hráči ho zvolia, lebo je pre nich najvýhodnejšie. K určeniu dominujúceho rovnovážneho riešenia sa využíva nasledujúca definícia:

Definícia 5 Nech $(\overline{x}, \overline{y})$ je rovnovážnym riešením hry zo vzťahu (5). $(\overline{x}, \overline{y})$ je *dominujúce rovnovážne riešenie*, pokiaľ pre každé iné rovnovážne riešenie $(\widehat{x}, \widehat{y})$ tejto hry platí:

$$F_1(\overline{x}, \overline{y}) \geq F_1(\widehat{x}, \widehat{y}) \wedge F_2(\overline{x}, \overline{y}) \geq F_2(\widehat{x}, \widehat{y}).$$

Čo sa ale stane, keď hráči zanalyzujú svoje možnosti a zistia, že v danej hre existuje viacero rovnovážnych bodov, ktoré majú rovnakú hodnotu funkcie platieb, ale odpovedajú viacerým kombináciam stratégii. Ktorý rovnovážný bod je potom pre nich najvýhodnejší? Ktorú stratégiu majú zvoliť, aby to bolo pre nich čo možno najlepšie? Vtedy dochádza k analýze zámennosti dominujúcich rovnovážných riešení. Zámenné rovnovážne body sú body, ktorým po prehodení indexov zostáva hodnota funkcie platieb nezmenená.

Definícia 6 Nech $(\overline{x}_j, \overline{y}_j)$, $j \in J$ sú rovnovážne riešenia a nech platí, že hodnoty funkcií platieb F_1 a F_2 sa nezmenia, keď vezmeme ľubovoľné $(\overline{x}_i), i \in J$ a $(\overline{y}_k), k \in J$. Potom sa tieto rovnovážne riešenia nazývajú *zámenné*.

Definícia 7 Nech $(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$, $i \in I$ sú dominujúce rovnovážne riešenia, ktoré sú vzájomne zámenné. Potom $(\overline{x}_i), i \in I$ *sú optimálne stratégie 1. hráča,* $(\overline{y}_i), i \in I$ *sú optimálne stratégie 2. hráča*. Všetky $(\overline{x}_j, \overline{y}_j)$, $i \in I$, $j \in J$ sú riešenia hry.

Ak sa nám nepodarí nájsť žiadne rovnovážne riešenie, prechádzame k zmiešanému rozšíreniu dvojmaticovej hry. Tak ako v prípade antagonistických konfliktov je potreba zadefinovať priestory zmiešaných stratégii, a to nasledovne:

$$(X) = \left\{ \mathbf{x} = R^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

$$(Y) = \left\{ \mathbf{y} = R^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \right\}$$

Funkcia platieb je daná ako očakávaná hodnota výhry:

$$G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \qquad \textit{očakávaná hodnota výhry } 1. \textit{ hráča}, \tag{7}$$

$$G_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} \qquad \textit{očakávaná hodnota výhry 2. hráča.} \tag{8}$$

Veta 2 *(Zovšeobecnenie základnej vety maticových hier) Zmiešané rozšírenie dvojmaticových hier má aspoň jedno rovnovážne riešenie.*

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť v [22] alebo v [30].

Poznámka 11 Pri hľadaní rovnovážnych riešení u zmiešaného rozšírenia dvojmaticových hier sa prechádza k hľadaniu optimálneho riešenia úlohy nelineárneho programovania.

Príklad 3 Nasledujúci príklad zobrazuje tri prípady, ktoré môžu nastať pri hľadaní Nashových rovnovážnych riešení v dvojmaticových hrách. Rovnovážne riešenie sú zvýraznené tučne.

1. V dvojmatici (A_1, B_1) nájdeme jediné rovnovážne riešenie $(8, 6)$, ktoré predstavuje výhry hráčov. Stratégie $(2, 3)$ sú potom rovnovážnymi rýdzimi stratégiami hráčov.

$$(A_1, B_1) = \begin{bmatrix} (4,5) & (3,3) & (1,7) \\ \\ (7,2) & (3,2) & (\mathbf{8},\mathbf{6}) \end{bmatrix}$$

2. V dvojmatici (A_2, B_2) nájdeme päť rovnovážnych riešení. Ako prvé musíme určiť či sú niektoré z týchto riešení dominujúce. Je zrejmé, že riešenia, kde je hodnota výplatnej funkcie $(7, 8)$ budú dominovať riešeniu $(6, 7)$, pretože pre oboch hráčov je výhodnejšie voliť riešenie $(7, 8)$. Ďalej musíme určiť či sú dané rovnovážne riešenia aj zámenné. Obaja hráči si môžu zvoliť ktorúkoľvek zo stratégií $1, 2, 3$. Pokiaľ by si, ale obaja hráči zvolili stratégiu číslo 1, hodnota výplatnej funkcie je $(-1, -1)$ a dosiahnu tak najhoršieho výsledku. V tejto hre neexistujú dominujúce zámenné rovnovážne riešenia.

$$(A_2, B_2) = \begin{bmatrix} (-1,-1) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (3,2) & (3,1) \\ (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (3,3) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (4,1) \\ (1,1) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (5,7) & (4,3) \\ (5,6) & (3,4) & (3,4) & (\mathbf{6},\mathbf{7}) \end{bmatrix}$$

Pokiaľ by sme dvojmaticu (A_2, B_2) pozmenili a vytvorili dvojmaticu (A_3, B_3), tak rovnovážne riešenia $(7, 8)$ by boli zámenné.

$$(A_3, B_3) = \begin{bmatrix} (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (3,1) \\ (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (4,1) \\ (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (\mathbf{7},\mathbf{8}) & (4,3) \\ (5,6) & (3,4) & (3,4) & (\mathbf{6},\mathbf{7}) \end{bmatrix}$$

3. V dvojmatici (A_4, B_4) nie sme schopní nájsť rovnovážne riešenie. Hra nemá riešenie v rýdzich stratégiach, a preto sa rieši pomocou zmiešaného rozšírenia dvojmaticových hier. Z poznámky 11 vieme, že tieto hry sa riešia s využitím nelineárneho programovania.

$$(A_4, B_4) = \begin{bmatrix} (3,5) & (4,3) & (7,1) \\ (2,8) & (1,7) & (3,3) \\ (7,6) & (3,8) & (3,5) \end{bmatrix}$$

Na určeniu hodnôt výplatných funkcií hráčov z hry danej dvojmaticou (A_4, B_4) využijeme vzťahy (7) a (8). Predstavme si, že by sme hráčom doporučili stratégie $x = (0,4; 0,6; 0)$ a $y = (0,7; 0,3; 0)$, a pripomeňme, že ide o pravdepodobnosti, že hráč bude voliť prvú, druhú alebo tretiu stratégiu. Potom zo vzťahov (7) a (8) získavame:

$$\big(0,4;\ 0,6;\ 0\big) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 0 \end{pmatrix} = \big(2,4;\ 2,2;\ 4,6\big) \cdot \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,34,$$

$$\big(0,4;\ 0,6;\ 0\big)\cdot\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 8 & 7 & 3\\ 6 & 8 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,7\\ 0,3\\ 0\end{pmatrix}=\big(14,8;\ 5,4;\ 2,2\big)\cdot\begin{pmatrix}0,7\\ 0,3\\ 0\end{pmatrix}=11,98.$$

Druhým prípadom neantagonistických konfliktov sú **kooperatívne hry**, kde hráči spolu môžu spolupracovať. Treba podotknúť, že hráči spolu budú spolupracovať len vtedy, keď to bude výhodnejšie ako ich nespolupráca, tzn. zabezpečia si väčšiu výhru, než tú, ktorú by získali bez spolupráce. Pokiaľ sa hráči môžu dohodnúť o voľbe stratégií, ale nemôžu sa dohodnúť o prerozdelení výhry, ide o **kooperatívne hry s neprenosnou výhrou**, musia nájsť odpovede na nasledujúce otázky:

1. Kedy majú spolupracovať?
2. A na akých stratégiach sa majú dohodnúť?

Prvým krokom k odpovediam na dané otázky je určenie tzv. zaručených výhier hráčov $v(1), v(2)$, ktoré predstavujú výhry, ktoré by hráči mali ak by danú hru hrali ako nekooperatívnu hru. Zaručené výhry hráčov sú dané nasledovne:

$$v(1)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}F_1(x,y) \tag{9}$$

$$v(2)=\max_{y\in Y}\min_{x\in X}F_2(x,y) \tag{10}$$

Druhým krokom je stanovenie množiny dosiahnuteľných výhier D, ktoré dominujú $(v(1), v(2))$ nasledovne:

$$D=\Big\{(a_1,a_2)\mid \exists x\in X, y\in Y: F_1(x,y)=a_1, F_2(x,y)=a_2\Big\}^{13},$$

a potom platí:

[13] (a_1, a_2) *dominuje* $(v(1), v(2))$.

1. (a_1, a_2) *dominuje* $(v(1), v(2)) \Longleftrightarrow (a_1 > v(1) \wedge a_2 > v(2)) \vee (a_1 = v(1) \wedge a_2 > v(2)) \vee (a_1 > v(1) \wedge a_2 = v(2))$,

2. ak je $D \neq 0$ potom spolupracovať.

Tretím krokom je stanovenie množiny nedominovaných dosiahnuteľných výhier, tzn. výhry, ktoré nedominujú (a_1, a_2). Množina nedominovaných dosiahnuteľných výhier je množina N, definovaná ako:

$$N = \{(a_1, a_2) \in D \mid \nexists (b_1, b_2) \in D : \textit{dominujúce } (a_1, a_2)\}.$$

Optimálne stratégie nájdeme s využitím nasledujúcej definície.

Definícia 8 Nech $\mathbf{c} = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2})$ je stredná hodnota rozdelenia pravdepodobnosti s najmenším obsahom informácie na N(pokiaľ také rozdelenie existuje). Potom výhry $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{a}}_\mathbf{2})$ nazývame *optimálne* pokiaľ,

$$d(\mathbf{c}, \overline{\mathbf{a}}) = \min_{\mathbf{a} \in N} d(\mathbf{c}, \mathbf{a}), \quad d \ldots \text{euklidovská metrika.}$$

Stratégie $\overline{x} \in X, \overline{y} \in Y$ nazývame *optimálne*, pokiaľ platí:

$$F_1(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{\mathbf{a}}_\mathbf{1} \wedge F_2(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{\mathbf{a}}_\mathbf{2}.$$

Ak by sme sa vrátili späť k otázkam, ktoré sme si položili, tak odpovede by boli nasledujúce:

1. spolupracovať, keď $D \neq 0$,

2. vyberieme optimálne $\overline{x} \in X, \overline{y} \in Y : F_1(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{a}_1, F_2(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{a}_2 \ldots$ optimálne výhry z N.

Príklad 4 Prvý a druhý hráč spolu môžu spolu uzavrieť dohodu, o tom akú stratégiu zvolia, ale nemôžu sa dohodnúť na tom, ako si prerozdelia výhru. Určte pre zadanú maticu, či sa im oplatí spolupracovať, a aké stratégie majú zvoliť.

$$\begin{bmatrix} (3,1) & (-3,-2) & (-1,2) \\ (2,2) & (0,-1) & (5,3) \\ (4,0) & (1,1) & (6,1) \end{bmatrix}$$

1. Zaručené výhry predstavujú výhry, ktoré si hráči zabezpečia, aj keď sa im protihráč snaží čo najviac uškodiť. Postup, ktorým získame zaručenú výhru prvého hráča je nasledovný: druhý hráč vyberá postupne po riadkoch najmenšie hodnoty výplatnej funkcie, tzn. $-1, 0$ a 1, a následne si z nich hráč číslo jedna vyberie maximálnu hodnotu, ktorá predstavuje jeho zaručenú výhru. Obdobne pre hráča číslo dva, prvý hráč najprv vyberá najmenšie hodnoty v stĺpci a následne si z nich hráč číslo dva vyberie maximálnu hodnotu. Takýmto postupom získame zaručené výhry: $v(1) = 1$ a $v(2) = 1$.

2. Pri stanovovaní množiny dosiahnuteľných výhier sa pozrieme na zadanú dvojmaticu a hľadáme dvojicu hodnot výplatných funkcií, ktoré dominujú $(v(1), v(2)) = (1, 1)$:

$$D = \{(3,1), (2,2), (5,3), (6,1)\}.$$

3. Množina nedominovaných dosiahnuteľných výhier obsahuje výhry z množiny D, ktoré v rámci tejto množiny nie sú dominované žiadnou inou výhrou (napr. výhra $(3,1)$ je dominovaná výhrami $(5,3), (6,1)$):

$$N = \{(5,3), (6,1)\}.$$

4. Stredná hodnota rozdelenia pravdepodobností s najmenším obsahom informácie na N je vektor $\mathbf{c} = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2})$, kde c_1 je priemer prvých zložiek variant z množiny N a c_2 je priemer druhých zložiek variant z množiny N:

$$\mathbf{c} = \left(\tfrac{11}{2}, \tfrac{4}{2}\right) = (5,5; 2).$$

5. Optimálnu výhru $\overline{\mathbf{a}}$ získame tak, že si vezmeme vektor $\mathbf{c}$ a pozrieme sa na najbližšie hodnoty výplatných funkcií v zadanej dvojmatici (k hodnota $5,5$ je najbližšie hodnota výplatnej funkcie 5):

$$\overline{\mathbf{a}} = (5, 2).$$

6. Pokiaľ máme optimálne výhry, môžeme určiť optimálne stratégie $\overline{x}$ a $\overline{y}$, a to tak, že optimálna stratégia je stratégia, kde hodnota výplatnej funkcie daného hráča dosahuje hodnotu príslušnej optimálnej výhry:

$$\overline{x} = 2, \overline{y} = 1.$$

Pokiaľ sa hráči môžu dohodnúť o voľbe stratégií a môžu uzatvárať dohody o prerozdelení výhry, ide o **kooperatívne hry s prenosnou výhrou**, musia nájsť odpovede na nasledujúce otázky:

1. Kedy majú spolupracovať?
2. Na akých stratégiach sa majú dohodnúť?
3. A ako si prerozdeliť výhru?

Hráči budú spolupracovať, ak výhra, ktorú si môžu zaistiť spolu, bude väčšia ako súčet výhier každého zvlášť, tzn:

$$v(1, 2) > v(1) + v(2),$$

kde na ľavej strane je maximálna celková výhra a na pravej strane sú zaručené výhry hráčov, ktoré sú dané vzťahmi (9) a (10).

Maximálnu celkovú výhru získame zo vzťahu:

$$v(1, 2) = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} [F_1(x, y) + F_2(x, y)].$$

Hráči budú voliť stratégie, ktoré vedú na maximálnu výhru, čo môžeme zapísať:

$$\overline{x} \in X, \overline{y} \in Y : F_1(\overline{x}, \overline{y}) + F_2(\overline{x}, \overline{y}) = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} [F_1(x, y) + F_2(x, y)] = v(1, 2).$$

Pri rozdeľovaní celkovej výhry sa využíva rozdelenie (a_1, a_2), ktoré musí spĺňať nasledujúce podmienky:

1. $a_1 + a_2 = v(1, 2)$,

2. $a_1 \geq v(1)$,

3. $a_2 \geq v(2)$.

Poznámka 12 Prvá podmienka hovorí, že hráči si musia medzi seba rozdeliť celú celkovú výhru. Druhá a tretia podmienka, hovorí, že ak sa hráči dohodli na prerozdelení výhry, musia dostať minimálne to, čo by si mohli zabezpečiť sami.

Množinu všetkých rozdelení celkovej výhry (a_1, a_2) nazývame **jadrom hry**. Ktoré rozdelenie z tejto množiny si, ale majú hráči vybrať? Presný návod neexistuje, ale existujú doporučenia, akými by sme mohli vybrať optimálne rozdelenie celkovej výhry. Jedným z týchto doporučení je **princíp redukcie jadra**, kde každý hráč dostane svoju zaručenú výhru a k tomu, polovicu toho, čo hráči získali spoluprácou. Optimálne rozdelenie výhry $(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ predstavuje strednú hodnotu rozdelenia pravdepodobnosti s najmenším obsahom informácie na jadre[14] a platí:

$$\overline{a}_1 = v(1) + \tfrac{1}{2}(v(1, 2) - v(1) - v(2)),$$

$$\overline{a}_2 = v(2) + \tfrac{1}{2}(v(1, 2) - v(1) - v(2)).$$

Príklad 5 Zistite či hráči spolu majú spolupracovať, na akých stratégiach sa majú dohodnúť, a ako si majú prerozdeliť výhru. Uvažujeme dvojmaticovú hru s príkladu 4.

$$\begin{bmatrix} (3,1) & (-3,-2) & (-1,2) \\ (2,2) & (0,-1) & (5,3) \\ (4,0) & (1,1) & (6,1) \end{bmatrix}$$

[14]Rovnomerné rozdelenie.

Najskôr si určíme zaručené výhry podľa vzťahov (9) a (10) a získame $v(1) = 1$ a $v(2) = 1$. Ďalej si určíme maximálnu celkovú výhru , kde v dvojmatici hľadáme maximálny súčet oboch hráčov, a v našom prípade tomu odpovedá $v(1,2) = 5 + 3 = 8$.

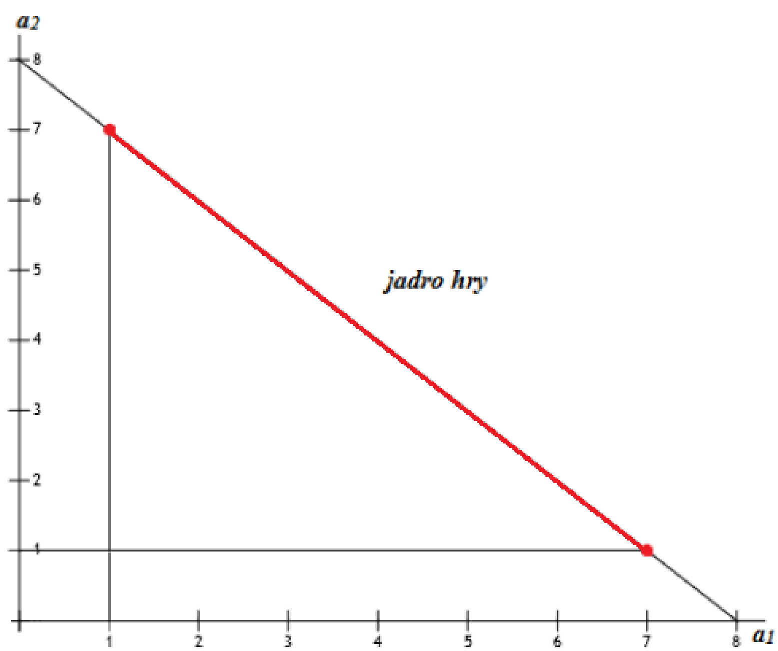
Oplatí sa hráčom spolupracovať? Áno, pretože $v(1,2) > v(1) + v(2) \rightarrow (8 > 2)$.

Na akých stratégiach by sa mali hráči dohodnúť? Vieme, že to majú byť stratégie, ktoré vedú na maximálnu celkovú výhru, a teda príslušné optimálne stratégie sú $\overline{x} = 2$ a $\overline{y} = 3$.

Ako si hráči majú prerozdeliť výhru? Využijeme princíp redukcie jadra a získavame:

$$\overline{a}_1 = v(1) + \tfrac{1}{2}(v(1,2) - v(1) - v(2)) = 1 + \tfrac{1}{2}(8 - 1 - 1) = 4,$$

$$\overline{a}_2 = v(2) + \tfrac{1}{2}(v(1,2) - v(1) - v(2)) = 1 + \tfrac{1}{2}(8 - 1 - 1) = 4.$$



Obr. 6: Jadro hry z príkladu 5.

1.2.4. Hry viacerých hráčov

V tejto podkapitole si predstavíme modely nekooperatívnych a kooperatívnych hier (s prenosnou výhrou) v prípade, že máme hru s viacerými hráčmi. Takúto hru môžeme zapísať matematickým modelom nasledovne:

$$\{P = \{1, \ldots, k\}, X_1, \ldots, X_k, F_1, \ldots, F_k\}. \tag{11}$$

Tak ako v prípade nekooperatívnych hier u neantagonistických konfliktov sa v **nekooperatívných hrách $\boldsymbol{k}$ hráčov** získajú optimálne riešenia pomocou rovnovážnych riešení.

Definícia 9 $K-$ticu stratégií $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{k})$ nazveme *rovnovážným riešením*, ak platí:

$$\forall i \in \{i, \ldots, k\}, \forall x_i \in X_i : F_i(\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \ldots, x_i \ldots, \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{k}) \leq F_i(\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{k}).$$

Poznámka 13 Definícia hovorí, že pokiaľ si ľubovoľný hráč zvolí ľubovoľnú stratégiu z množiny svojich stratégií namiesto svojej rovnovážnej stratégie, tak si tým nikdy nepomôže.

Poznámka 14 Nerovnosti $a \geq b, a > b$ medzi vektormi majú obvyklý význam, tj. nerovnosti platia po zložkách.

Pri hľadaní rovnovážnych riešení môže nastať jedna z nasledujúcich možností:

1. existuje práve jedno rovnovážne riešenie, ktoré predstavuje optimálne riešenie hry,

2. existuje viac rovnovážných riešení: dochádza k ďalšej analýze (viz. neantagonistický konflikt dvoch hráčov (nekooperatívna teória)).

V predchádzajúcej podkapitole sme si predstavili kooperatívne hry s prenosnou výhrou u neantagonistických konfliktov dvoch hráčov, ktorý sa spolu môžu dohodnúť na spolupráci a o tom, ako si medzi sebou prerozdelia výhru. V prípade

kooperatívných hier s prenosnou výhrou u konfliktu $\boldsymbol{k}$ hráčov navyše hráči spolu môžu zakladať tzv. **koalície**.

Uvažujme hru k hráčov podľa vzťahu (11). Vieme, že množina $P = \{1, \ldots, k\}$ označuje množinu hráčov. Koalícia K je daná nasledovne:

$$K \subset P, K \neq \emptyset.$$

Nech je daná množina hráčov napr. $P = \{1, 2, 3, 4\}$. Z tejto množiny môžeme vytvoriť koalície napr. $K = \{1, 2\}$ a $L = \{3, 4\}$. Dvojica koalícií $(K, L) = (\{1, 2\}, \{3, 4\})$ tvorí **koaličnú štruktúru**, ktorá je daná ako (disjunktný) rozklad množiny P. **Sila koalície** je daná pomocou charakteristickej funkcie v nasledovne:

$$v : \underbrace{\mathbf{P}}_{\textit{potenčná množina}} (P) \setminus \emptyset \to R$$

Poznámka 15 Charakteristická funkcia je paralelou výplatnej funkcie pre dvoch hráčov. Rozdiel medzi nimi spočíva v tom, že charakteristická funkcia priraďuje výhry koalíciam a nie hráčom.

Charakteristická funkcia môže byť daná pomocou:

1. pesimistického prístupu, kde získame minimaxovú charakteristickú funkciu $\rightarrow$ tí, čo sa k nám nepridali nám budú chcieť škodiť:

$$\begin{aligned}
K = \{i_1, \ldots, i_r\} \qquad & \textit{koalícia} \\
P \setminus K = \{j_1, \ldots, j_{k-r}\} \qquad & \textit{protikoalícia} \\
\underbrace{X(K)}_{\textit{priestor stratégií hráčov koalície}} & = X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_r} \\
\underbrace{X(P \setminus K)}_{\textit{priestor stratégií zostávajúcich hráčov}} & = X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_{k-r}} \\
v(K) = \max_{X(K)} \min_{X(P \setminus K)} \sum_{i \in K} F_i(x_i, \ldots, x_k), &
\end{aligned}$$

   súčet funkcie platieb hráčov z koalície: pre každú voľbu koalície vezmeme najhorší výsledok hráčov z protikoalície,

2. realistickejšieho prístupu, kde získame neurčitostnú charakteristickú funkciu → o ostatných, čo sa k nám nepridali, nevieme nič[15]:

$$\underbrace{X_{j_1} \times \cdots \times X_{j_k}}_{\textit{stratégie hráčov, ktorí nie sú v koalícii}} \qquad \textit{distribučná funkcia } G(\mathbf{y}),$$

$$v(K) = \max_{X(K)} \int_{X(P\setminus K)} \sum_{i \in K} F_i(\underbrace{\mathbf{x}}_{\textit{stratégie v koalícii}(X(K))}, \underbrace{\mathbf{y}}_{\textit{stratégie v protikoalícii}(X(P\setminus K))}) \mathrm{d}G(\mathbf{y}),$$

kde integrál predstavuje očakávanú hodnotu výhry koalície K pri rozdelení pravdepodobnosti s najmenším obsahom informácie na $X(P \setminus K)$ pri voľbe x a $G(\mathbf{y})$ je distribučná funkcia rozdelenia pravdepodobnosti s najmenším obsahom informácie na $X(P \setminus K)$.

Poznámka 16 Integrál charakteristickej funkcie $v(K)$ pre realistickejší prístup predstavuje tzv. *Lebesgue-Stieltjesov integrál*. Vzhľadom na to, že ide o problematiku, ktorá je nad rámec diplomovej práce, musíme čitateľovi doporučiť pre ďalšie informácie o *Stieltjesovom*, *Lebesgue- Stieltjesovom* a *Riemann- Stieltjesovom* integrále napr. [6] alebo [8].

Pre obidve charakteristické funkcie platí **superaditivita**:

$$\forall L, K \subset P, L \cap K = \emptyset : v(L) + v(K) \leq v(L \cup K),$$

ktorá znamená, že pokiaľ sa spojíme, tak si pomôžeme. Alebo inak, keď budeme spolupracovať, tak nič nepokazíme.

Poznámka 17 Aditívnosť charakteristickej funkcie znamená:

$$\forall L, K \subset P, L \cap K = \emptyset : v(L) + v(K) = v(L \cup K).$$

Hodnota charakteristickej funkcie v prípade, že všetci hráči spolu spolupracujú je daná:

$$v(P) = \max_{\mathbf{x} \in X_1 \times \cdots \times X_k} \sum_{i=1}^{k} F_i(x_1, \ldots, x_k).$$

[15] Prepodkladáme rozdelenie pravdepodobnosti s najmenším obsahom informace na $X(P\setminus K)$.

Pokiaľ chceme určiť optimálne stratégie v kooperatívnej hre s prenosnou výhrou, musíme najprv určiť odpovede na otázky:

1. Kedy spolupracovať?
2. Do akej koalície má hráč vstúpiť?
3. Aké majú byť stratégie hráčov v koalícii?
4. Ako si majú hráči v koalícii rozdeliť výhru?

K spolupráci dochádza, pokiaľ je charakteristická funkcia superaditívna, ale nie je aditívna, tzn. existujú dve disjunktné koalície K a L, ktoré si v prípade spolupráce zajistia viac, ako si je každá z koalícii schopná zaistiť sama:

$$v(K \cup L) > v(K) + (L).$$

Keďže je funkcia v superaditívná, najväčšiu výhru hráči získajú, pokiaľ budú spolupracovať všetci (problém nastáva pri delení výhry medzi hráčov). Hráči si budú voliť také stratégie, ktoré vedú k najväčšiemu súčtu výhier všetkých hráčov ($v(P)$). Optimálne stratégie potom sú:

$$\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) : \textstyle\sum_{i=1}^k F_i(\overline{\mathbf{x}}) = \displaystyle\max_{\mathbf{x} \in X_1 \times \cdots \times X_k} \sum_{i=1}^k F_i(\mathbf{x}) = v(P).$$

Ako sme uviedli v predchádzajúcom odstavci, problém pri spolupráci všetkých hráčov nastáva pri delení výhry. Je to z toho dôvodu, že je potrebné nájsť rozdelenie výhry $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$, ktoré bude vyhovovať všetkým hráčom a budú ochotní ho prijať.

Od takéhoto rozdelenia výhry sa požaduje, aby bolo:

1. kolektívne racionálne ... $\sum_{i=1}^k a_i = v(P)$,
2. individuálne stabilné ... $a_i \geq v(\{i\}), i = 1, \ldots, k$,
3. skupinovo stabilné ... $\sum_{i \in K} a_i \geq v(K), \forall K \subset P, K \neq \emptyset$.

Poznámka 18 Kolektívna racionalita znamená, že medzi hráčov musíme rozdeliť celý zisk (celú výhru). Skupinová stabilita znamená, že neexistuje žiadna skupina hráčov v koalícii, ktorá by dostala menej, než to, čo by si boli schopní zaistiť, keby spolupracovali len medzi sebou.

Rozdelenie, ktoré vyhovuje všetkým trom podmienkam, tvorí **jadro hry a**, s ktorým sme sa stretli už v prípade kooperatívnych hier s prenosnou výhrou u neantagonistických konfliktov. Jadro hry pri hrách k hráčov je riešenie sústavy:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = v(P)$$

$$\sum_{i \in K} a_i \geq v(K), \forall K \subset P, K \neq \emptyset$$

Pokiaľ je jadro hry neprázdne tvorí konvexný polyéder a rozdelenie výhry $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$ je dané ako stredná hodnota rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti na jadre. V tomto prípade ide o obdobu redukcie jadra, s ktorou sme sa stretli v závere predchádzajúcej podsekcie.

Definícia 10 Nech hra

$$\{P = \{1, \ldots, k\}, X_1, \ldots, X_k, F_1, \ldots, F_k\}$$

má charakteristickú funkciu a jej jadro je neprázdne, potom:

1. *optimálne stratégie*

$$\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) : \sum_{i=1}^{k} F_i(\overline{\mathbf{x}}) = \max_{X_1 \times \cdots \times X_k} \sum_{i=1}^{k} F_i(\mathbf{x}),$$

2. *optimálne rozdelenie* $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\mathbf{a}}_\mathbf{1}, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_\mathbf{k})$ je stredná hodnota rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti na jadre hry,

3. dvojica $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})$ je riešenie hry.

Pokiaľ je jadro hry prázdne, potom hľadáme maximálnu stabilnú koalíciu $K \subset P$, vo vnútri ktorej budú platiť nasledujúce vzťahy:

$$\sum_{i \in K} a_i = v(K)$$

$$\sum_{i \in L} a_i \geq v(L), \forall L \subset K, L \neq \emptyset$$

Pokiaľ platia tieto vzťahy, tak sa koalícia $K \subset P$ nazýva stabilná.

Poznámka 19 Postup, ktorý v práci nie je uvedený kvôli rozsiahlosti textu, na hľadanie maximálnej stabilnej koalície, určovanie optimálnych stratégii, optimálneho rozdelenia a riešenia hry pri hre s prázdnym jadrom je popísaný napr. v [[21, str. 45-46].

Príklad 6 Uvažujme hru štyroch hráčov, ktorí sa môžu dohodnúť na spoluprácí a môžu sa dohodnúť na prerozdelení výhry. Charakteristická funkcia je daná nasledovne:

$v(\{1,2,3,4\}) = 27$	$v(\{1,2,3\}) = 15$	$v(\{1,2,4\}) = 13$	$v(\{1,3,4\}) = 17$
$v(\{2,3,4\}) = 19$	$v(\{1,2\}) = 8$	$v(\{1,3\}) = 12$	$v(\{1,4\}) = 15$
$v(\{2,3\}) = 10$	$v(\{2,4\}) = 12$	$v(\{3,4\}) = 15$	$v(\{1\}) = 4$
$v(\{2\}) = 3$	$v(\{3\}) = 5$	$v(\{4\}) = 7$	

Vyplatí sa hráčom medzi sebou spolupracovať a uzatvárať koalície? Ak áno, a hráči by sa dohodli, že bude najlepšie, ak budú spolupracovať všetci spolu, je rozdelenie výhier $\overline{a} = (5, 7, 6, 9)$ rozdelením, s ktorým budú všetci súhlasiť? Bude toto rozdelenie tvoriť jadro hry?

Vieme, že hráči spolu budú spolupracovať, keď charakteristická funkcia bude superaditívna, ale nebude aditívna, tzn. platí: $v(K \cup L) > v(K) + (L)$. Napr. ak by hráči spolupracovali všetci spolu, zajistili by si viac ako každý zvlášť: $v(\{1,2,3,4\}) > v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) + v(\{4\}) \rightarrow 27 > 19$, ak by spolupracovali druhý a štvrtý hráč spolu, tak by si zajistili viac ako každý zvlášť atď. Záverom je teda, že hráčom sa spolu oplatí spolupracovať.

Pri zistení toho, či rozdelenie výhier $\overline{a} = (5, 7, 6, 9)$ bude rozdelenie vyhovujúce všetkým, musíme určiť nasledujúce:

1. Je toto rozdelenie výhier kolektívne racionálne?
   Áno je, pretože delíme celú výhru $5 + 7 + 6 + 9 = 27$,

2. Je toto rozdelenie výhier skupinovo stabilné?
   Nie je, pretože pokiaľ by hráči 1, 4 založili koalíciu zabezpečili by si väčšiu výhru, ako tú, ktorá im je pridelená v tomto rozdelení: $v(\{1, 4\}) = 15 > (5 + 9 = 14)$. Toto rozdelenie výhier potom netvorí jadro hry.

Poznámka 20 Na záver poznamenáme, že v realite sa vyskytujú skôr nedisjunktné koaličné štruktúry, kde hráči môžu patriť do viacerých koalícií naraz. Určiť všetky možné koalície, do ktorých by hráč mohol patriť je zložité, preto sa bežne obmedzujeme na koalíciu, ktorá mu prinesie najväčší zisk.

1.3. Axiomatický prístup

V nasledujúcich podkapitolách bude predstavená teória vyjednávania, konkrétne vyjednávací problém, a axiomatický prístup Johna Nasha, ktoré predstavujú nevyhnutný predpoklad tejto diplomovej práce. Na začiatku podkapitoly [1.3.1] budú zavedené pojmy úžitok a úžitková funkcia, ktoré budú potrebné v ďalšom texte.

Na vytvorenie podkapitol [1.3.1] a [1.3.2] boli využité najmä zdroje [25] - [27].

1.3.1. Vyjednávací problém

Aby sa hráči mohli rozhodnúť, ktorá stratégia je pre nich najoptimálnejšia, musia vedieť porovnávať výsledky jednotlivých stratégií. Z nadobudnutých poznatkov z predchádzajúceho textu, vieme, že výsledok hry je číslo, ktoré je získané z výplatnej funkcie a hráči si vyberajú jej maximálnu hodnotu. Zatiaľ sme sa však nezaoberali, tým ako vzniknú a odkiaľ sa vezmú dané hodnoty výplatnej funkcie. Práve preto si potrebujeme povedať niečo viac o **teórii úžitku.**

Teória úžitku je časťou ekonomickej teórie, ktorá sa zaoberá spotrebiteľským správaním. S úžitkom je spojená analýza rozhodovania o tom, aké statky a služby si pri obmedzenom rozpočte môže jedinec zabezpečiť. ***Úžitok*** predstavuje mieru uspokojenia potrieb (uspokojenie zo spotreby určitého statku). A však je nutné podotknúť, že pokiaľ si subjekt pomocou statkov a služieb uspokojí svoju potrebu[16], neznamená to, že rovnaký úžitok budú mať tieto isté statky a služby pre iného jednotlivca. Úžitok medzi subjektami nie je možné porovnávať, a ide o pojem subjektívny.

Existujú dva názory na to, do akej miery je úžitok merateľný:

1. **kardinalistický**: jedinec je schopný vyjadriť úžitok zo statku konkrétnym číslom alebo dokáže povedať, o koľko je preňho nejaký statok užitočnejší ako druhý,

[16] Statky a služby sú pre neho teda užitočné.

2. **ordinalistický**: jedinec je pri porovnávaní schopný určiť jedine či je preňho nejaký statok užitočnejší ako druhý, ale nedokáže povedať o koľko.

Poznámka 21 Pre rozšírenie znalostí o teórii úžitku a potrebách čitateľovi doporučujeme napr. [2] alebo [28].

Pôvodným prístupom pri hodnotení variant pri rozhodovaní za rizika bola teória očakávanej hodnoty. Teória očakávanej hodnoty predpokladá, že očakávanú hodnotu môžeme spočítať ako vážený priemer hodnôt všetkých možných výsledkov, kde váhy predstavujú pravdepodobnosti pre jednotlivé výsledky. V roku 1738 Daniel Bernoulli odprezentoval a navrhol riešenie tzv. Petrohradského paradoxu, v ktorom ukázal, že pri rozhodovaní za rizika nám nestačí vysvetlenie s využitím teórie očakávanej hodnoty.

Poznámka 22 Viac k Petrohradskému paradoxu v [29, str. 11-12] alebo [18].

Poznámka 23 O rozhodovanie za rizika ide v prípade, kedy rozhodovateľ pozná budúce situácie, ktoré môžu nastať a tým aj dôsledky variant pri týchto situáciach a súčasne pozná pravdepodobnosť jednotlivých situácií.

Pokiaľ by sme dvom jedincom, jeden je bohatý a druhý chudobný, dali 10 000 korún, tak by obaja získali rovnaký obnos peňazí, ale úžitok z nich by bol pre týchto dvoch jedincov rozdielny. Pre jedinca, ktorý má pomerne veľa peňazí,je teda bohatý, zvýšenie tohto bohatstva o 10 000 korún bude mať menší úžitok ako pre človeka, ktorý je chudobný. Môžeme teda konštatovať, že úžitok z peňazí s ich množstvom klesá. Pri výpočte očakávanej hodnoty by sme mali namiesto peňažných čiastok používať peňažné čiastky, ktoré sú transformované určitou konkávnou funkciou, ktorá je dnes známa ako **úžitková funkcia**.[17]

John Von Neumann a Oskar Morgenstern navrhli axiomatickú teóriu úžitku[18], ktorá vychádza z teórie očakávaného úžitku, ktorá nahradila teóriu očakávanej hodnoty. V tejto práci ukázali, že existencia lineárnej úžitkovej funkcie u, ktorá

[17] Bernoulli v Petrohradskom paradoxe pracoval s logaritmickou funkciou.
[18] V knihe Teória hier a ekonomické správanie.

popisuje sústavu preferencií, je daná splnením určitých podmienok sústavou preferencií. Tieto podmienky sú vyjadrené ako súbor axiómov. Von Neumann a Morgenstern zaviedli **von Neumannovu- Morgensternovu úžitkovú funkciu**, ktorá sa stotožňuje s teóriou očakávaného úžitku, a ide o axiomaticky zadefinovanú úžitkovú funkciu.

Uvažujme sústavu U, ktorá má prvky $u, v, w, \ldots$. Ďalej uvažujme, že v sústave U je daná nasledujúca relácia: $u > v$, teda u je preferované pred v a pre ľubovoľné $\alpha \in (0, 1)$ je daná operácia: $\alpha u + (1 - \alpha)v$, kde α predstavuje pravdepodobnosť a prvky u, v je možné kombinovať s pravdepodobnosťami α a $(1 - \alpha)$. Úžitok následne môžeme vyjadriť číselne, pokiaľ sústava U s danou reláciou a operáciou spĺňa nasledujúce axiómy:

1. Pre akúkoľvek dvojicu u, v, platí jeden zo vzťahov: $u = v$, $u > v$, $u < v$. (trichotomie)

2. Z nerovností $u > v$ a $v > w$ vyplýva $u > w$. (tranzitivita)

3. Z nerovností $u < v$ vyplýva $u < \alpha u + (1 - \alpha)v$ a z nerovnosti $u > v$ vyplýva $u > \alpha u + (1 - \alpha)v$. Prvá nerovnosť hovorí, že pokiaľ preferujeme v pred u, potom akákoľvek pravdepodobnosť $1 - \alpha$ na úžitok v v kombinácií s úžitkom u musí byť preferovaná pred u. Analogicky pre druhú nerovnosť.

4. Z nerovností $u < v < w$ vyplýva existencia α tak, že platí $\alpha u + (1 - \alpha)v < w$. Obdobný vzťah môžeme zaviesť pre nerovnosť $u > v > w$. (spojitosť)

5. Platí rovnosť $\alpha u + (1 - \alpha)v = (1 - \alpha)v + \alpha u$, ktorá hovorí, že výsledná kombinácia preferencií nezávisí na poradí.

6. Platí rovnosť $\alpha(\beta u + (1 - \beta)v) + (1 - \alpha)v = \gamma u + (1 - \gamma)v$, kde $\gamma = \alpha\beta$. Tento axióm vyjadruje, že výsledný úžitok nezávisí na poradí krokov pri kombinácii prvkov.

Potom môžeme povedať, že existuje úžitková funkcia $u(x)$, ktorá úžitkom u, v, w priradí numerické hodnoty $u(u), u(v)$ a $u(w)$.

Úžitkovú funkciu je možné prenásobiť kladným reálnym číslom a a pripočítať k nej reálnu konštantu b, bez toho, aby došlo k nejakej zmene v sústave preferencií. Takto vzniknutá úžitková funkcia $au(x) + b$ má rovnaké preferencie ako pôvodná úžitková funkcia.

Je nutné dodať, že úžitková funkcia odzrkadľuje individuálne preferencie jedinca, ktoré nie je možné porovnávať medzi jedincami. Ak by jedincovi A úžitková funkcia priradila k nejakej udalosti číselnú hodnotu 20, a jedincovi B by jeho úžitková funkcia priradila inej udalosti hodnotu 20, neznamená to, že títo jedinci majú z týchto udalostí rovnaký úžitok.

Teória hier sa nezaoberá iba konfliktnými situáciami, ale taktiež hľadaním vzájomne výhodnej spolupráce. ***Teória vyjednávania*** sa zaoberá vyjednávacím problémom (vyjednávacou hrou), v ktorom sa hráči snažia dohodnúť o vzájomne výhodnej spolupráci. Pre rozvoj teórie vyjednávania sú najdôležitejšie články Johna Nasha z roku 1950 [24] a z roku 1953 [27], v ktorých Nash navrhol riešenie vyjednávacieho problému pomocou axiomatického prístupu. Nash najprv pre riešenie vyjednávacieho problému zostavil axiómy, ktoré by riešenie malo spĺňať a následne ukázal, že pre každý vyjednávací problém existuje jediné riešenie, ktoré dané axiómy spĺňa. Toto riešenie sa nazýva ***Nashovo vyjednávacie riešenie***.

Podľa Nasha sa pojem vyjednávanie týka situácie, v ktorej:

1. jednotlivci majú možnosť uzavrieť vzájomne výhodnú dohodu,
2. existuje konflikt záujmov, kvôli ktorým sa uzatvára dohoda,
3. k dohode medzi hráčmi nemôže dojsť bez schválenia týchto hráčov.

Jeden z predpokladov vyjednávacieho problému je existencia množiny prípustných dohôd, ktoré hráči medzi sebou môžu uzatvoriť. Druhým predpokladom je existencia ***bodu nedohody***, ktorý nastane v prípade, že hráči sa nedohodnú na žiadne spoločnej spolupráci. Je zjavné, že hráči sa budú snažiť nájsť lepšie riešenie ako to, ktoré nastane v bode nedohody. Bod nedohody je väčšinou známy pred začatím samotnej hry alebo môže byť určený na základne rovnovážnej zaručenej výhry.

Vyjednávací problém (F,v) je charakterizovaný:

1. množinou hráčov $\{1, \ldots, n\}$, kde opäť pri vysvetľovaní budeme uvažovať len dvoch hráčov $\{1, 2\}$,

2. množinou prípustných dohôd alebo taktiež množinou prípustných riešení F, ktorá je uzavretá a konvexná v R^2,

3. bodom nedohody $v = (v_1, v_2)$, ktorý sa niekedy nazýva aj *status quo* alebo *východiskový bod* a dáva hodnotu výplat dvoch hráčov, ktorí nedosiahnu spoločnej dohody,

4. množinou úžitkových funkcií, ktoré každej prípustnej dohode a bodu nedohody priradia úžitok $i-$teho hráča,

5. hráči sú racionálni, snažia sa maximalizovať svoj úžitok a poznajú navzájom svoje úžitkové funkcie.

John Nash sformuloval pre vyjednávací problém nasledujúcich 5 axiómov, ktoré budú vzápätí predstavené:

1. Paretovská efektívnosť ("Strong efficiency"),

2. Individuálna racionalita ("Individual rationality"),

3. Nezávislosť na mierke ("Scale covariance"),

4. Nezávislosť na irelevantných alternatívach ("Independence of irrelevant alternatives "),

5. Symetria ("Symmetry").

Poznámka 24 Čitateľa upozorňujeme, že model vyjednávania je zostavený bez tzv. hrozieb (z angl. threats).

Poznámka 25 V anglickej literatúre sa čitateľ vždy stretne so zadefinovaním 5 axiómov Johna Nasha, pričom axiómy 1 a 2 sa ilustrujú spoločne, čo bude zrejmé na nadchádzajúcej strane. V českej literatúre sa racionalita uvádza do predpokladov vyjednávacieho problému a zároveň je súčasťou popisu axiómu číslo 1, preto sa v českej literatúre čitateľ stretne iba so 4 axiómmi vyjednávacieho problému. Pri vysvetľovaní axiómov vyjednávacieho problému v diplomovej práci sme čerpali hlavne z [25] a [26].

Nash dokázal, že riešenie, ktoré vyhovuje vyššie zmieneným axiómom, je bod $f(F,v) = (f_1(F,v), f_2(F,v)) \in F$, ktorý maximalizuje tzv. ***Nashov súčin***:

$$[u(f(F,v)) - u(v)][z(f(F,v)) - z(v)],$$

kde u a z označujú úžitkové funkcie prvého a druhého hráča, a v označuje bod nedohody.

Poznámka 26 Nashovo vyjednávacie riešenie patrí k jedným z mnohých vyjednávacích riešení, ktoré existujú. Z tých ďalších môžeme spomenúť napr. Kalai-Smorodinského vyjednávacie riešenie, označované taktiež KS vyjednávacie riešenie, alebo "Vyrovnávacie"vyjednávacie riešenie (z angl. Egalitarian bargaining solution).

Poznámka 27 Obrázky, ktoré ilustrujú jednotlivé axiómy vyjednávacieho problému, boli prebraté z [26, str.386-388]. Vzhľadom na prebratie obrázkov došlo ku zmene označovania a to nasledovne:

1. úžitok prvého hráča je označovaný x_1,
2. úžitok druhého hráča je označovaný x_2,
3. bod $y = (y_1, y_2)$, ktorý je využitý u axiómu 1- Paretovská efektívnosť, odpovedá úžitkom prvého a druhého hráča (nepoužíva sa značenie napr.x_{11}, x_{22} kvôli prehľadnosti) a vyjadruje označenie bodu v množine F.

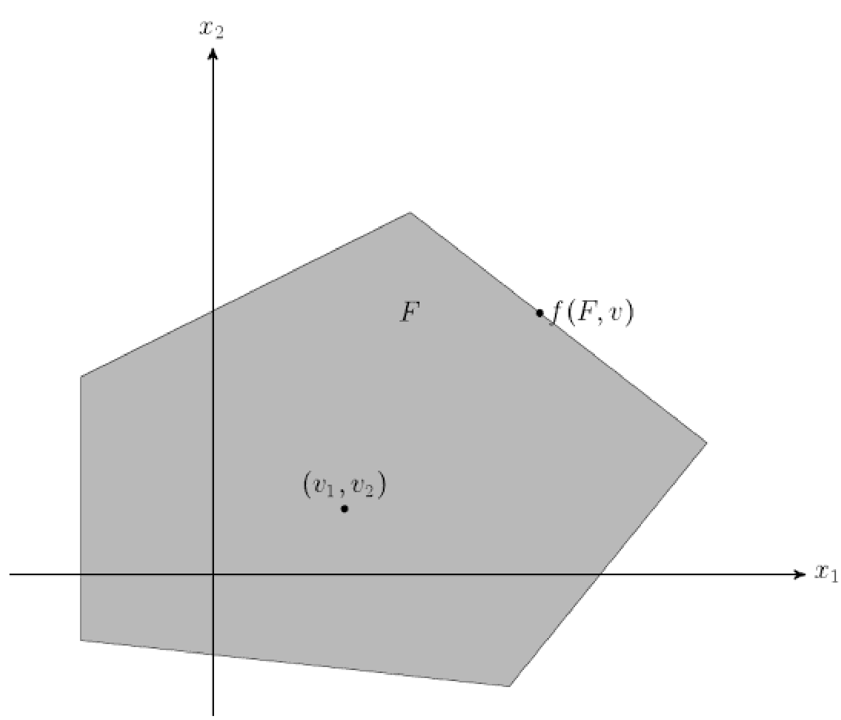
Paretovská efektívnosť a individuálna racionalita
Strong efficiency a individual rationality

Pre získanie znenia axiómu paretovskej efektívnosti uvažujme množinu prípustných dohôd F.
Nech $x = (x_1, x_2) \in F$ a $y = (y_1, y_2) \in F$ sú možné prípustné dohody vyjednávacieho problému (F, v) pre ktoré platí $y_1 \geq x_1$ a $y_2 \geq x_2$ s aspoň jednou ostrou nerovnosťou pre jedného hráča. Potom riešenie $x = (x_1, x_2)$ nemôže byť vyjednávacím riešením (F, v). Ide o vyjadrenie maximalizácie úžitku oboma hráčmi.

Axióm individuálnej racionality hovorí, že $f(F, v) \geq v$, tzn.:

$$f_1(F, v) \geq v_1 \text{ a } f_2(F, v) \geq v_2,$$

to znamená, že ani jeden z hráčov by nemal získať menej vo vyjednávacom riešení než to, čo môže získať v prípade nedohody.



Obr. 7: Ilustrácia paretovskej efektívnosti a individuálnej racionality.

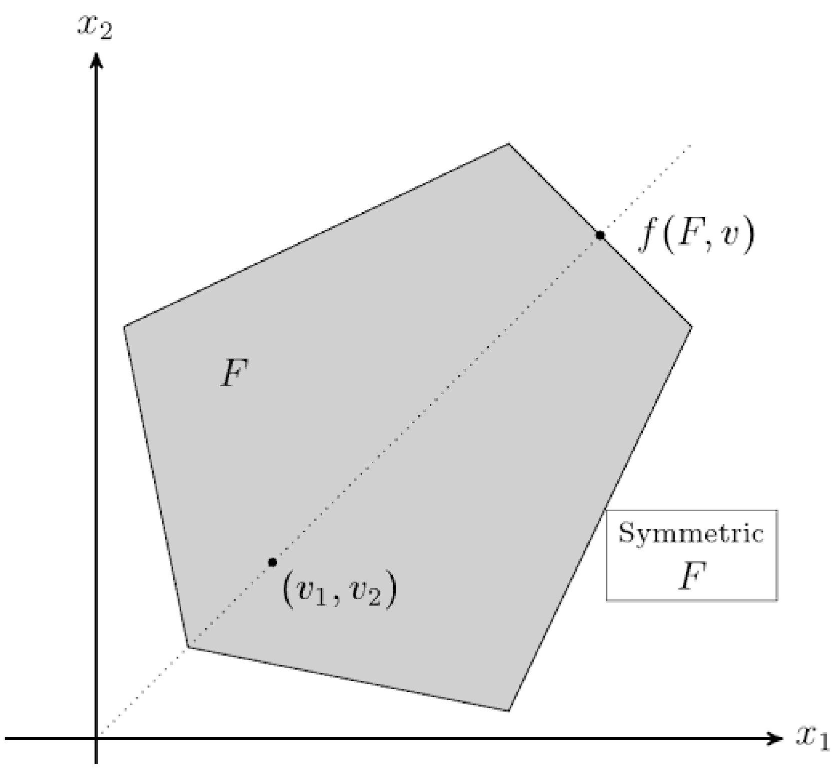
Symetria

Symmetry

Axióm symetrie hovorí, že ak sú pozície hráčov vo vyjednávacom probléme symetrické, tak riešenie by malo byť pre oboch taktiež symetrické.

Iná formulácia axiómu hovorí, že pokiaľ (x_2, x_1) a (x_1, x_2) patria do vyjednávacieho problému a pre bod nedohody platí $v_1 = v_2$, potom je vyjednávací problém symetrický. Ak je vyjednávací problém symetrický, potom $f_1(F, v) = f_2(F, v)$. Čo môžeme interpretovať tak, že obaja hráči majú rovnaké vyjednávacie schopnosti. Daný axióm môžeme formálne zapísať nasledovne:

$$v_1 = v_2 \text{ a } \{(x_2, x_1) : (x_1, x_2) \in F\} = F \rightarrow f_1(F, v) = f_2(F, v).$$



Obr. 8: Ilustrácia symetrie.

Nezávislosť na mierke

Scale covariance

Pre ľubovoľné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, kde $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ si zadefinujeme množinu

$$G = \{(\lambda_1 x_1 + \mu_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2 : (x_1, x_2) \in F\}$$

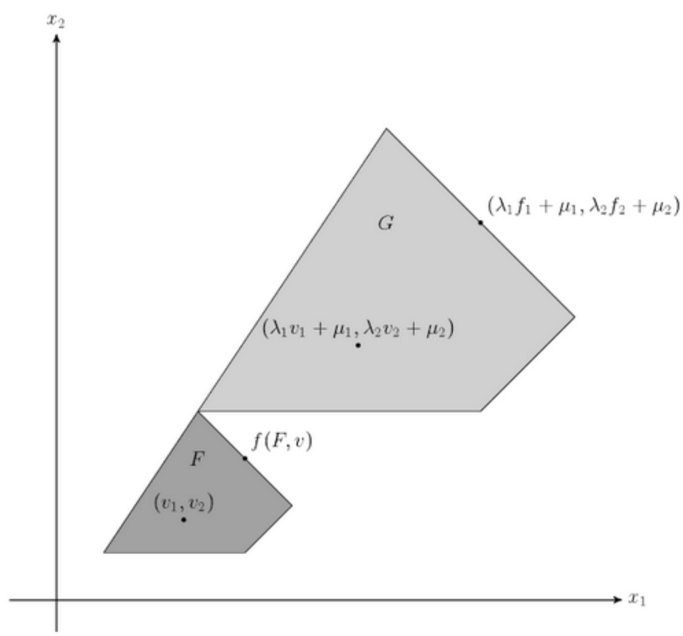
a bod

$$w = (\lambda_1 v_1 + \mu_1, \lambda_2 v_2 + \mu_2).$$

Potom riešenie $f(G, w)$ pre vyjednávací problém (G, w) je dané nasledovne:

$$f(G, w) = (\lambda_1 f_1(F, v) + \mu_1, \lambda_2 f_2(F, v) + \mu_2).$$

Z uvedeného vyššie, vyjednávací problém (G, w) môžeme získať z vyjednávacieho problému (F, v) aplikovaním rastúcej afinnej úžitkovej transformácie, ktorá nebude mať vplyv na žiadne rozhodovacie teoretické vlastnosti funkcie utility. Axióm naznačuje, že riešenie problému (G, w) je možné získať z problému (F, v) rovnakou transformáciou.



Obr. 9: Ilustrácia nezávislosti na mierke.

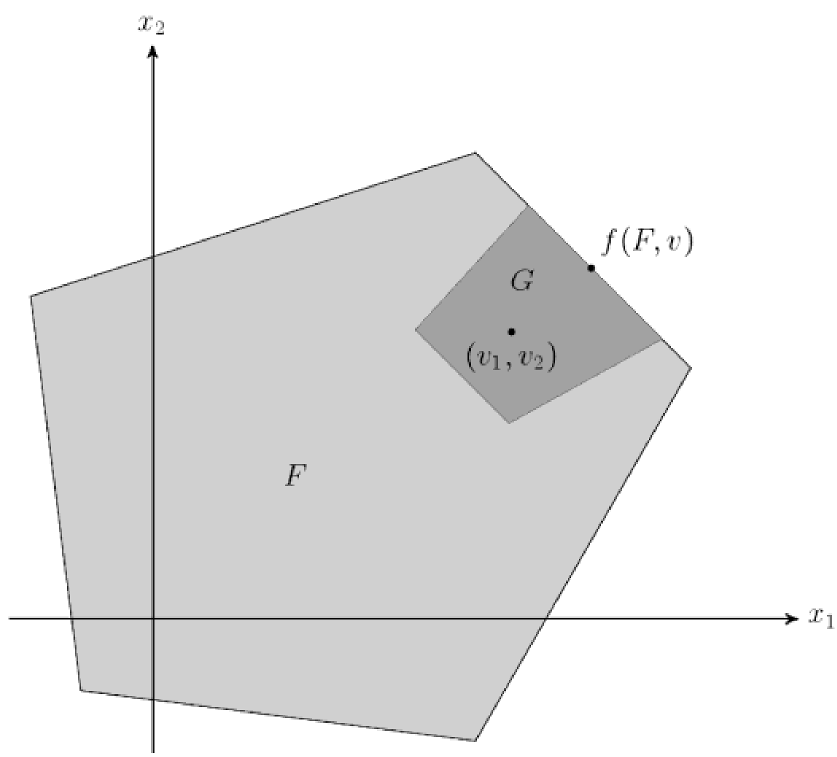
Nezávislosť na irelevantných alternatívach

Independent of irrelevant alternatives

Axióm hovorí, že pre ľubovoľnú uzavretú, konvexnú množinu G, ktorá je podmnožinou množiny F platí:

$$G \subseteq F \text{ a } f(F, v) \in G \rightarrow f(G, v) = f(F, v).$$

SLovami: pokiaľ máme dva vyjednávacie problémy F a G, vyjednávací problém G je podmnožinou F. Potom pokiaľ $f(F, v)$ je vyjednávacím riešením problému F a zároveň leží v Q, potom je vyjednávacím riešením problému Q. Axióm tvrdí, že elimináciou možných alternatív (iných ako bod nezhody), ktoré by neboli vybrané, by nemalo dôjsť k nijakej zmene riešenia. Eliminované alternatívy sú označované ako irelevantné alternatívy.



Obr. 10: Ilustrácia nezávislosti na ireleventných alternatívach.

Príklad 7 Nasledujúci príklad aj s obrázkom, ktoré ilustrujú Nashove axiómy vyjednávacieho problému, boli prebraté z [26, str.388-389].

Na obrázku číslo 11 je zobrazená uzavretá konvexná množina F, ktorá je daná vrcholmi $(4,0),(1,1)$ a $(0,4)$. Za východiskový bod v (bod nedohody) budeme uvažovať bod $(1,1)$. Čiara, ktorá spojuje body $(4,0)$ a $(0,4)$ predstavuje paretovsky efektívne riešenie, keďže vieme, že hráči sa snažia maximalizovať svoj úžitok. Individuálna racionalita je daná charakteristikou vyjednávacieho problému, takže axióm považujeme za splnený. Problém F je symetrický, čo nám zobrazuje prerušovaná čiara $x_2 = x_1$, ktorá trojuholník rozdelila na dve rovnaké polovice. Riešenie vyjednávacieho problému musí ležať na danej prerušovanej čiare. Uvedené požiadavky spĺňa jediný bod - bod $(2,2)$, ktorý je riešením vyjednávacieho problému (F,v).

Zadefinujeme si novú množinu G pomocou úpravy mierky: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}; \mu_1 = \mu_2 = 1$. Uvažujme potom vyjednávací problém (G,w) s východiskovým bodom $w = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, ktorý sme získali pomocou $w = (\lambda_1 v_1 + \mu_1, \lambda_2 v_2 + \mu 2)$. S využitím nezávislosti na mierke, Nashovo vyjednávacie riešenie je $(2,2)$. Vyjednávacie problémy $(F,v),(G,w)$ taktiež ilustrujú nezávislosť na ireleventných alternatívach. Z obrázku vidíme, že $G \subseteq F$, G je uzavretá a konvexná množina a bod $(2,2) \in G$, a teda $f(G,w) = f(F,v) = (2,2)$.

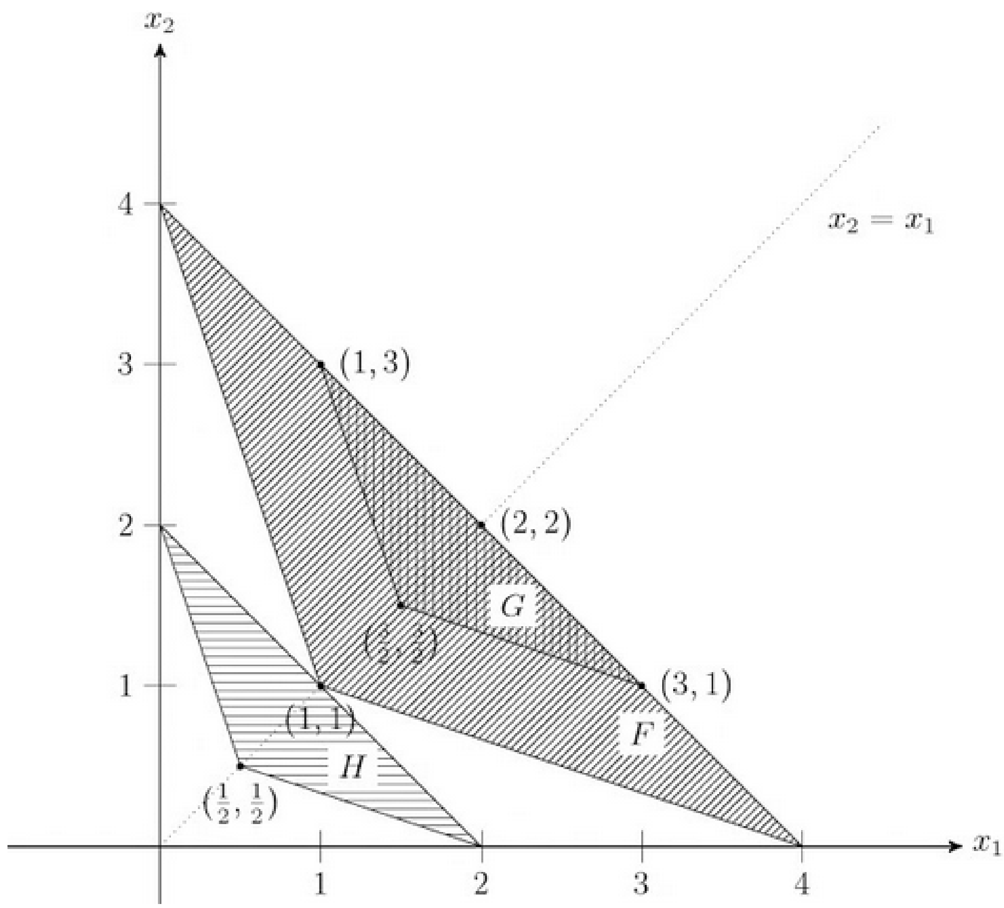
Na záver bola zadefinovaná množina H s úpravou mierky: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}; \mu_1 = \mu_2 = 0$ a problém $(H,(0.5,0.5))$ ilustruje ďalší možný prípad nezávislosti na mierke.

Hodnota Nashovho súčinu pre vyjednávací problém (F,v) v bode $(2,2)$ je

$$f_1(F,v) - v_1][f_2(F,v) - v_2] = [2-1][2-1] = 1.$$

Hodnota Nashovho súčinu pre vyjednávací problém (G,w) v bode $(2,2)$ je

$$[f_1(G,w) - w_1][f_2(G,w) - w_2] = [2 - \tfrac{3}{2}][2 - \tfrac{3}{2}] = \tfrac{1}{4}.$$



Obr. 11: Príklad na ilustrovanie Nashových axiómov.

1.3.2. Axiomatický prístup Johna Nasha

John Nash v článku [27] začína popis axiomatického prístupu nasledovne: *Skôr než riešiť kooperatívnu hru dvoch hráčov s využitím vyjednávacieho procesu, môžeme daný problém riešiť axiomaticky, stanovením všeobecných vlastností, ktoré by malo obsahovať "každé rozumné riešenie". Zadaním dostatočného množstva týchto vlastností vylúčime všetky okrem jedného jediného riešenia.*

Trojica (X_1, X_2, B) predstavuje hru, kde B je kompaktná konvexná množina obsahujúca dvojice utilít (u_1, u_2), ktoré môžu nastať, ak hráči spolupracujú. Trojica (X_1, X_2, B) obsahuje implicitne výplatné funkcie hráčov M_1 a M_2, ktoré musia byť zadané pre určenie hry. Hodnoty výplatných funkcií hráčov (hodnoty hry) sú označené $v_1(X_1, X_2, B)$ a $v_2(X_1, X_2, B)$.

John Nash pre svoj **axiomatický prístup** navrhol týchto sedem axiómov:

1. Pre každú hru (X_1, X_2, B) existuje práve jedno riešenie (v_1, v_2), ktoré leží v B.

2. Ak $(u_1, u_2) \in B$ a $u_1 \geq M_1, u_1 \geq M_2$, potom platí $(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$, tzn. riešenie nie je dominované iným bodom v B okrem seba samého.

3. Riešenie sa nemení pri lineárnych transformáciach úžitkových funkcií ($u_{11} = a_1 u_1 + b_1, u_{22} = a_2 u_2 + b_2$, kde a_1, a_2 sú kladné) zachovávajúcich usporiadanie.

4. Riešenie nezávisí na tom, ktorý hráč je označený ako prvý.

5. Ak sa zmení hra obmedzením množiny B na jej podmnožinu L a riešenie pôvodnej hry leží v L, potom rovnaký bod bude riešením novej hry.

6. Obmedzením priestoru stratégii niektorého z hráčov nezvýši hodnotu, ktorú tento hráč v hre získa, tzn. $v_1(X_{11}, X_2, B) \leq v_1(X_1, X_2, B)$.

7. Je možné obmedziť stratégie oboch hráčov na jedinú dvojicu stratégii bez toho, aby sa niektorému z nich zvýšila hodnota, ktorú dostane, tzn. existuje x_1, x_2 také, že $v_1(x_1, x_2, B) \leq v_1(X_1, X_2, B)$.

Poznámka 28 Axióm 1 je iba stanoviskom o tom, aký typ riešenia chceme dostať. Axióm 2 vyjadruje myšlienku, že hráči by mali uspieť pri spolupráci s optimálnou efektívnosťou. Axióm 3 v sebe obsahuje princíp neporovnateľnosti. Funkcia utility každého hráča je považovaná za danú len pre usporiadanie zachovávajúce lineárne transformácie. Numerické hodnoty sa teda zmenia v rámci transfomácie úžitkovej funkcie, ale relatívna pozícia riešenia zostane rovnaká. Axióm 4 predstavuje symetriu, kde jediné významné rozdiely medzi hráčmi (pri určovaní hodnoty hry) sú tie, ktoré v sebe zahŕňajú matematický popis hry: tzn. odlišné priestory stratégii a funkcie utility.

Prvých pät axiómov je modifikáciou axiómov, s ktorými sme sa stretli v prípade vyjednávacieho problému. Posledné dva axiómy sú jediné axiómy, ktoré sa týkajú priestorov stratégií oboch hráčov a môžeme povedať, že sú to jediné nové axiómy.

Axióm 6 hovorí, že pozícia hráča v hre sa nevylepší obmedzením množiny stratégií, ktoré sú mu k dispozícii. Axióm 7 hovorí, že môžeme oboch hráčov obmedziť na jedinú stratégiu bez toho, aby sme zvýšili hodnotu hry pre prvého hráča. Ekvivalentne to môžeme zaviesť aj pre druhého hráča.

2. Psychologická časť

V tejto kapitole bude predstavený stručný prehľad základných pojmov z oblasti psychológie nevyhnutných pre diplomovú prácu, ktoré boli rozdelené na podkapitoly:

1. organizmus, prostredie a duševný život,
2. prežívanie, psychika, psychické procesy, stavy a vlastnosti,
3. vedomie a nevedomie,
4. správanie,
5. činnosť,
6. osobnosť.

Pre túto kapitolu boli využité najmä zdroje [1], [7], [9], [20].

2.1. Organizmus, prostredie a duševný život

Psychológia (z gréckeho *psyché*= duša, duch, dych a *-logia*= veda, výzkum, náuka, teda náuka o duši) je veda, ktorá sa zaoberá ľudskou psychikou - hlavne kognitívnymi procesmi (ľudské myslenie), ľudským správaním a prežívaním. Niekedy sa používa ako symbol psychológie grécke písmeno ψ.

$$\Psi$$

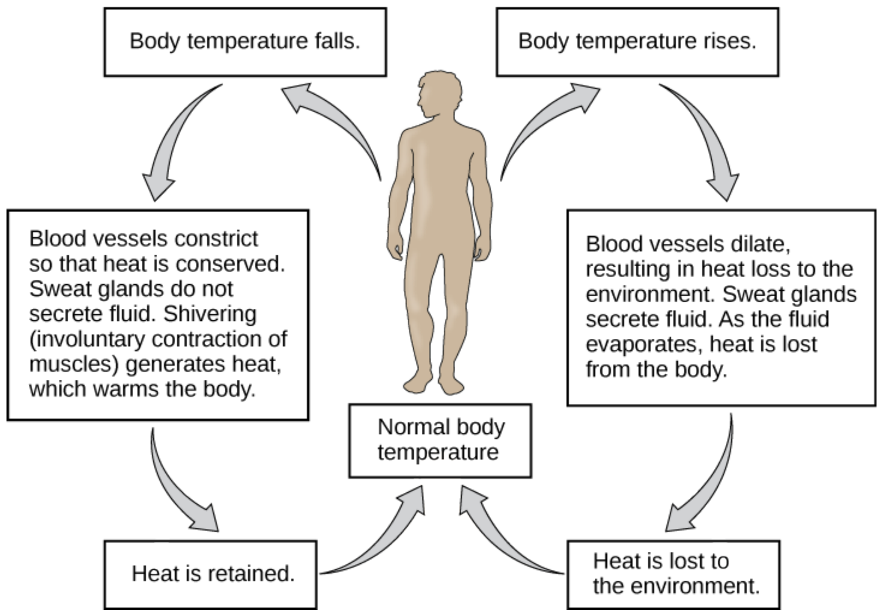
Obr. 12: Symbol psychológie.

Psychológom označujeme človeka, ktorý sa zaoberá psychológiou nielen všeobecne, ale aj výzkumne. Psychológovia sa snažia pochopiť ako vplývajú poznávacie funkcie (napr. pamäť, koncentrácia, pozornosť, rýchlosť rozmýšľania a pod.) na sociálne a individuálne správanie, pričom sa snažia odhaliť, ktoré fyziologické (napr. spánok, denné rytmy a pod.) a neurobiologické procesy (napr. rozmýšľanie, hýbanie svalmi a pod.) sú predpokladom pre konkrétnu poznávaciu funkciu.

Poznámka 29 Diplomová práca sa zameriava na duševné (psychické) javy, s ktorými sa stretávame každý deň. Vedomie, nevedomie, správanie, vôľa a mnohé ďalšie, predstavujú slová, ktoré bežne používa každý jeden z nás. Aby sme sa však mohli bližšie zaoberať spomínanými pojmami, musíme si objasniť a priblížiť z psychologického hľadiska pojmy: organizmus, prostredie a vzťahy medzi nimi a následne sa môžeme ponoriť do hlbšej analýzy.

Keď sa rozhliadneme okolo seba môžeme si všimnúť, že príroda sa skladá z dvoch zložiek: živej a neživej hmoty. **Organizmus** predstavuje organizované zoskupenie živej hmoty, ktorá je schopná samostatného života a za jeho základnú vlastnosť považujeme dráždivosť, teda schopnosť organizmu reagovať na rôzne vonkajšie alebo vnútorne stimuly. Zložitosť organizmov môžeme naznačiť nasledovne: rastlinné → živočíšné → ľudský. Táto zložitosť môže byť daná rôznymi faktormi ako napr. stavba daného organizmu, špecializácia činnosti jednotlivých orgánov a ich vzájomná koordinácia a pod. Základným charakteristickým črtom každého organizmu je udržanie **vnútornej, fyziologickej rovnováhy**. Ak nie sú uspokojené fyziologické potreby, jedna alebo viac, tak je rovnováha narušená. Pokiaľ dôjde k narušenie rovnováhy, tak sa každý organizmus snaží o to isté: odstrániť toto narušenie. **Fyziologickou homeostázou** označujeme schopnosť a úsilie každého organizmu udržať si stav určitej vnútornej rovnováhy. Práve vďaka homeostáze môžeme organizmus chápať ako samoregulujúci systém, v ktorom sa prejavuje spätná väzba. Podľa Štefanoviča v [7] predstavuje spätná väzba určitý druh informácie o vhodnosti reakcie. Ako príklad samoregulácie organizmu pomocou princípu spätnej väzby uvádza termoreguláciu organizmu: zvýšená alebo naopak znížená teplota organizmu sa upravuje pomocou rozťahovania a sťahovania potných žliaz. Pri zvýšenej teplote sa človek potí a preto vyhľadáva ochladenie napr. v podobe zmrzliny, studenej sprchy alebo studenej vody, zatiaľ čo u zníženej teploty bude vyhľadávať teplú sprchu, teplé nápoje a pod.

Každý organizmus žije a pohybuje sa v určitom **prostredí**. Prostredie pred-



Obr. 13: Termoregulačné správanie.

stavuje časť vonkajšieho sveta, ktorá organizmu zabezpečuje jeho existenciu a jeho život. Samotný organizmus z prostredia neustále čerpá to, čo potrebuje pre svoj život a vylučuje do neho to, čo nepotrebuje. Každý organizmus je schopný prežiť v určitom druhu prostredia napr. rastlina potrebuje pre svoj život pôdu. Čím je však organizmu zložitejší, tým je zložitejšie aj prostredie, ktoré potrebuje pre svoj život a v konečnom dôsledku aj pre svoj vývoj. Človek môže normálne existovať výlučne v ľudskom prostredí. Pokiaľ by sme organizmus z jeho prostredia vytrhli, odstránili, tak organizmus zahynie. Táto závislosť organizmu a jeho prostredia, ktorá zaručuje existenciu organizmu, nazývame **jednota organizmu a prostredia**. Okrem spomínaného udržania určitej vnútornej rovnováhy sa snaží každý organizmus o udržanie rovnováhy so svojím prostredím a ide teda o tzv. vonkajšiu homeostázu. Ide o stav, v ktorom organizmus z prostredia dostáva všetko čo potrebuje (je mu zabezpečená zdravá existencia), a pritom organizmus vhodne reaguje na stimuly samotného prostredia. Treba podotknúť, že aj v tomto prípade môže byť roovnováha narušená napr. nie je možné uspokojiť samotné fyziologické potreby organizmu, je ohrozované zdravie alebo existencia organizmu a pod. Čím je organizmus zložitejší, tým budú zložitejšie aj prvky, ktoré udržiavajú jeho rovnováhu s prostredím a o to budú náročnejšie činnosti na udržanie rovnováhy. Vyššie organizmy, napríklad zvieratá, dokážu na prostredie aktívne reagovať (napr. útek pred nebezpečenstvom), a čím sa odlišujú od jednoduchých organizmov, ktoré iba prijímajú stimuly z prostredia. Ľudský organizmus sa prostrediu nielen prispôsobuje, ale si ho aj sám premieňa pomocou pracovnej činnosti. Na udržiavanie rovnováhy s prostredím neslúži iba príroda, ale aj výtvory a samotný život jedinca v ľudskej spoločnosti.

Za existenciou každého živého organizmu stojí neustále vzájomné pôsobenie s jeho vonkajším prostredím. Jeho podstatou pôsobenie je nepretržité prijímanie pôsobobiacich stimulov (podnetov) prostredia organizmom a neustále odpovedanie organizmu na tieto stimuly. Pri odpovedaní však organizmus musí dbať na vhodné reakcie na dané stimuly. Ako sme spomínali v predchádzajúcom odstavci: najjednoduchšie organizmy iba prijímajú stimuly od prostredia a ide o tzv. lokálnu reakciu. Tá spočíva v reakcii organizmu tou časťou tela, na ktorú pôsobí daný stimul (organizmus stimul prijíme a odpovie rovnakými bunkami). Ďalším stupňom reakcií je tzv. humorálna reakcia, ktorá sa vyskytuje u organizmov, u ktorých došlo pri stavbe buniek k bunkovej diferenciácií: niektoré buňky sa zameriavajú na prijímanie stimulov, označujeme ich ako receptorové bunky, a iné na vykonávanie pohybu. Podráždenie receptorových buniek sa prenáša na pohybové bunky, ktoré realizujú odpovedajúcu reakciu. V tomto prípade sa odpoveď nespracuje centrálne a podnet nie je realizovaný celým organizmom. Ďalším stupňom reakcie je tzv. nervová regulácia, ktorá je daná nervovou sústavou. Pre nervovú sústava platí, že čím viac je organizmus vyvinutejší, tým je stavba nervovej sústavy zložitejšia. Nervové bunky zodpovedajú nielen za prijímanie stimulov, ale aj za samotné spracovanie a šírenie odpovedi na podnet k efektorovým bunkám.. Za najvyšší stupeň reakcie sa považuje tzv. neurohumorálná reakcia[19], ktorá je vlastná výlučne človeku. Reakcie sú dané ako odraz pôsobiacich podnetov, spracováním a riadením danej reakcie (odpovede) navonok, aj dovnútra organizmu.

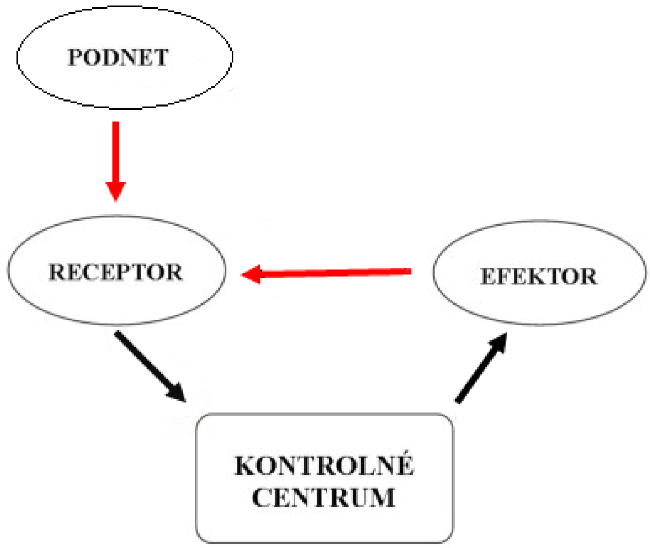
[19]Neurohumorálna reakcia- prepojenie medzi nervovým a humorálnym systémom.

Samotné prispôsobovanie organizmu k prostrediu, ktoré je postavené na reakciách založených z nasledujúcich zložiek [Štefanovič,[7]]:

- správnosť odrazov pôsobiacich stimulov (podnetov),
- správnosť spracovanej odpovede,
- uplatnenie spätnej väzby,

sa nazýva **nervovým (psychickým) alebo regulovaným (riadeným) prispôsobovaním.**

Nervové prispôsobovanie prebieha nasledovne: Na organizmus pôsobí veľký počet stimulov (podnetov) rôzneho druhu a intenzity. Tieto stimuly pochádzajú nielen z okolitého sveta, ale aj z vlastného organizmu a môže ísť napríklad o zvuk alebo bolesť. Každý takýto podnet predstavuje pre organizmus informácie o okolitom svete alebo o rôznych zmenách svojho vlastného organizmu. Podnety v tejto chvíli využijú svoju energiu a mobilizujú nervové bunky, ktoré nazývame receptory. Receptory sú hlavne u vyšších organizmov vysoko špecializované, tzn. prijímajú iba konkrétny druh energie. Následne dochádza k tzv. podráždeniu, ktoré predstavuje nervový proces, ktorý vzniká, keď energia podnetov zmení samotný receptor na konkrétny nervový vzruch.. Pomocou nervových dráh sa nervové podráždenie z receptorov prenesie do centrálného nervstva (mozog a miecha), kde sa zhromaždia informácie zo všetkých receptorov. Takto sa nám vytvorí tzv. odraz, čiže celý obraz o podnetoch, ktoré pôsobia na organizmus. V centrálnom nervstve sa potom pracuje na odpovedi na pôsobiace podnety. Odpoveď potom prostredníctvom nervových vzruchov prechádza cez odstredivé nervy až do výkonných orgánov, ktoré nazývame efektory. Efektormi sú svaly a žľazy, ktoré sú napomocné pri reagovaní organizmu na pôsobiace podnety. Vhodnosť tejto reakcie sa zlepšuje, upravuje s využitím spätnej väzby. Nervová sústava je prostredníkom vzťahov medzi receptormi a efektormi. Činnosti nervovej sústavy stoja za reakciami človeka na prostredie a usmerňujú samotné vzťahy v prostredí, ktoré sa týka jeho vlastného tela.



Obr. 14: Nervové prispôsobovanie.

Prečo sme sa však zaoberali prechodom od organizmu, cez prostredie až po nervovú sústavu a jej činnosti? Dôvodom je, že spomenutá nervová činnosť, alebo neurohumorálna činnosť, ktorá nastáva pri prispôsobovaní vyšších organizmov k prostrediu, je napojená na ďalšie javy, ktoré môžeme nazvať doprovodnými javmi a ide o súčasti psychickej zložky. Samotný odraz pôsobiacich podnetov v mozgu sa zároveň nazýva **vnem**. Pôsobiace podnety môžu u vyšších organizmov vyvolávať taktiež emócie a city. Prispôsobovanie organizmu prostrediu, ktoré je vytvorené na základe informácii a reakcií získaných z nervovej sústavy, sa taktiež nazýva **psychickou činnosťou**. Za jej predstaviteľa sa považuje **psychika**.

Na **duševný život** každého dospelého človeka sa môžeme pozerať z nasledujúcimi postojmi:

1. postoj, ako človek vidí seba samého pri pohľade do seba,

2. postoj, ako človeka vidia ostatní ľudia, to ako sa správa.

Prvý prípad predstavuje duševný život, ktorý sa nazýva **prežívanie** a druhý prípad sa označuje ako **správanie**.

2.2. Prežívanie, psychika, psychické procesy, stavy a vlastnosti

Každý človek v bdelom stave buď niečo vníma, alebo nad niečím premýšľa, alebo sa snaží na niečo rozpamätať, alebo spomína, plánuje a pod.Tieto činnosti môžeme označiť ako vnútorné zážitky, pretože sú vlastné danému človeku a nikomu inému. Pokiaľ človek o svojich vnútorných žážitkoch nepovie ďalším ľuďom, tak ľudia nie sú schopní zistiť ich obsah.

Definícia 11 *Prežívaním* označujeme to, čo si človek sám zo svojho duševného života uvedomuje (seba-pozorováním, introspekciou).

Načo je ale pre človeka dobré prežívanie? V samotnom prežívaní človek odzrkadľuje vonkajší svet okolo neho, dokáže sa v ňom odlíšiť a čo je najdôležitejšie, dokáže si uvedomiť svoje postavenie v čase. Za najhlavnejší znak prežívania sa preto považuje určitá schopnosť človeka uvedomovať si, že niečo prežíva, a že je to on, kto to všetko prežíva.

Každý človek má svoje prežívanie, len on pozná jeho obsah a je vlastné len jemu. Pre lepšie predstavenie, ak by sme teraz začali nad niečím rozmýšľať, tak len my vieme, to nad čím rozmýšľame a nikto iný. Práve z tohto dôvodu je prežívanie **subjektívne** a pre každého človeka **iné**. Ďalšou vlastnosťou prežívania je **jedinečnosť**. To znamená: pokiaľ začneme spomínať na nejakú udalosť, ktorú sme zažili, tak naše prvé a nasledujúce prežitie nabude rovnaké. Preto sa prežívania považuje v určitej podobe za neopakovateľné. Samotné prežívanie je **úzko spojené s časom**. Pokiaľ začneme spomínať, tak ide o spomínanie v čase (v nejakej hodine, v nejakom dátume a pod.). V prípade prežívania nie je možné vymedziť pojmy ako minulosť, prítomnosť a budúcnosť, pretože samotná prítomnosť je súčasťou minulosti a zasahuje aj do budúcnosti. Čo je dôležité podotknúť je, že prežívanie nepokrýva celú psychiku subjektu, ale iba jej uvedomovanú časť. [20]

Prežívanie sa nedokáže celé prejaviť v správaní daného subjektu. Subjekt,

[20] Uvedomenosť prežívania môžeme chápať tak, že daný subjekt dokáže pochopiť a uvedomiť si vzťahy medzi obsahom svojho prežívania (zážitky) a danými vonkajšími súvislosťami.

teda človek, môže spomínať, môže to u neho vyvolávať radosť, smútok, ale navonok nemusí dať na seba vôbec nič poznať. Prežívanie sa práve správaním nedá úplne dokonale vyjadriť. Taktiež na základe správania nie je možné ani posúdiť prežívanie daného subjektu. K vyjadreniu prežívania sa využíva najmä **reč**. Ale aj v tomto prípade platí, že ani rečou nie je možné prežívanie úplne presne vyjadriť resp. zachytiť. Problémom v tom prípade môže byť nedostatok slov, ktoré by sme mohli použiť alebo aj duševná choroba, kde sa prežívanie nedá vyjadriť rečou.

Kategorizácia ľudského prežívania v psychológii je nasledujúca:

1. psychické procesy,
2. psychické stavy,
3. psychické vlastnosti.

Pomocou **psychických procesov** človek dokáže odzrkadliť vo svojej psychike (vedomí) nielen vonkajší objektívny svet, ale aj vnútorný (*poznávacie procesy*), prežíva svoj vlastný vzťah k tomu svetu (citové procesy), a snaží sa pôsobiť na vonkajší svet a na seba samého (voľné procesy). Najjednoduchším psychickým procesom je **pociťovanie**, ktoré nám dokáže dať najzákladnejšie informácie o okolitom svete. **Pocit** predstavuje odraz vlastností predmetov a javov, ktoré na nás pôsobobia (farba, teplo, vôňa, bolesť a pod.). Predmety a javy sa odrážajú ako celok pomocou **vnímania** (percepcia). Výsledkom vnímania je **vnem**, napríklad vnem pomaranča môže vzniknúť vo vedomí človeka iba na základe zraku, čuchu a chuti. Pokiaľ má človek vo svojej psychike (vedomí) zážitky názorneho charakteru (napr. kniha), môžu sa tieto zážitky znovu vo vedomí objaviť, aj keď už nepôsobia na receptory pôvodné podnety, ktoré tieto zážitky vyvolali. Pokiaľ sa tieto zážitky podobajú tým pôvodným pocitom a vnemom, hovoríme o **predstavivosti**, pokiaľ sú kombináciou pôvodných pocitov a vnemov, hovoríme o **fantázií**. **Pamäť** nám slúži na zapamätávanie si, uchovávanie a opätovné vybavenie si toho, čo sme už zažili. Človek sa pohybuje a snaží sa spoznávať vonkajší a vnútorný svet. Na základe dojmov, ktoré v ňom vyvolajú si k nemu vytvára vzťah (kladný alebo záporný). Prežívanie týchto vzťahov k sebe samému, k iným ľuďom, k rastlinám či živočíchom označujeme ako **emócie** alebo **city**. Pri pôsobení vonkajšieho sveta na človeka dochádza k tomu, že človek nezápolí len s pasívnym odrážaním podnetov, ale aj s aktívným ovplivňovaním seba a daného vonkajšieho sveta. Človek si takto dokáže stanoviť svoje ciele do budúcnosti a zápasiť s prekážkami, ktoré sa mu snažia zabrániť k nemu dostať. Stanovovanie cieľov a zápasenie s prekážkami umožňuje človeku **vôľa**.

Súčasný duševný stav (rozpoloženie) človeka, ktorý ovplyvňuje rozsah aktivity človeka sa označuje **psychickým stavom**. Výkonnosť každého človeka sa mení v priebehu dňa resp. dní. Túto výkonnosť môže ovplyvňovať únava, sústredenie, pozornosť a rôzne spôsoby jej rozptýlenia, nálada a citové rozpoloženie a ďalšie. Príkladom psychického stavu môže byť napr. stav únavy, stav trémy alebo nadšenia.

Za **psychické vlastnosti** sa považujú osobnostné črty, ktoré daného človeka charakterizujú, a ktoré sa najviac ukazujú v jeho povahe, v jeho správaní a vystupovaní. Okrem uvedomovania si svojich vnútorných zážitkov si človek dokáže uvedomiť aj svoje vonkajšie vystupovanie a správanie (niečo ho zaujíma viac, niečo menej a pod.). Tieto zážitky predstavujú črty osobnosti, ktoré sú celkom stále, ovplyvňujú samotné správanie človeka a označujeme ich ako psychické vlastnosti človeka. Psychické vlastnosti delíme na [Štefanovič,[7]]:

- aktívno motivačné - charakterizujú o čo sa človek snaží, k čomu by sa chcel dostať: pudy, záujmy, záľuby, životné plány, potreby,
- vzťahovo postojové - predstavujú hodnoty, ktorými sa človek riadi: postoje, charakter, svetový názor,
- autoregulačné - predstavujú sebaovládanie človeka: sebakritika, svedomie,
- dynamické - predstavujú silu a rýchlosť prežívania a správania daného človeka: vlastnosti temperamentu,
- vlastnosti psychických procesov a stavov.

Spojením týchto psychických vlastností u každého človeka sa vytvára tzv. **štruktúra osobnosti**.

Všetky tri spomínané zložky ľudského prežívania (psychické stavy, psychické procesy a psychické vlastnosti) existujú spolu, sú medzi sebou prepojené a uskutočňujú sa spoločne.

Súhrnné označenie pre psychické vlastnosti, psychické stavy a psychické procesy je **psychika** človeka. Základným rozdielom medzi psychikou ľudí a psychikou zvierat je ľudské uvedomovanie si svojich psychických zážitkov a možnosť ich vyjadrenia pomocou reči. Práve pre tento rozdiel sa psychika človeka označuje ako **vedomie**.

2.3. Vedomie a nevedomie

Definícia 12 *Vedomie* je to, čo človek prežíva a uvedomovanie si toto preživanie.

Vedomie predstavuje určitý stupeň duševného vývoja a zdravia človeka. K príslušnému stupňu človek dospieva jednoduchým uvedomovaním si seba samého a okolitého sveta (môžeme povedať, že dokáže určiť rozdiel medzi JA a okolitým svetom) a svojej jedinečnosti. Taktiež sem patrí uvedomovanie si, že svoje správanie a obsahy jeho prežívania patria jemu (patria JA).

To, čo si človek nie je schopný uvedomiť zo svojho duševného života a prežívania sa označuje ako **nevedomie** alebo **podvedomie**. Na nevedomie sa môžeme pozerať rôzne:

1. môžeme ním označiť to, čo si v túto chvíľu neuvedomujeme, ale ide o zážitky, ktoré sme prežili vedome: skúsenosti a zážitky, na ktoré nemyslíme (avšak si ich môžeme predstaviť, musíme ich mať),

2. môžeme doňho zahrnúť podprahové podnety, ktoré nám ostali po ich pôsobení: keď tieto podnety začali pôsobiť, my sme si to neuvedomovali, ale keďže si ich dokážeme vybaviť v snoch alebo vo svojej fantázií, tak môžeme povedať, že je to dôkaz ich existencie,

3. môžeme doňho zahrnúť činnosť pudov, ktorú si neuvedomujeme alebo túžby a priania, ktoré sme potlačili a ďalšie.

Prechodom medzi úplným vedomím, keď je človek úplne bdelý a nevedomím môže byť napr. zaspávanie.

2.4. Správanie

To, ako človek vníma sám seba je dané prežívaním. To, ako človeka vnímajú ostatní, je dané jeho **správaním**. V správaní každého človeka sa navonok odzrkadľuje jeho prežívanie, vedomie a časť jeho nevedomia.

Definícia 13 *Správaním* nazývame takú aktivitu jednotlivca, ktorú môže pozorovať druhá osoba alebo ktorú môžu zachytiť prístroje osoby, ktorá ho skúma.

Na základe správania sa môžeme snažiť posúdiť človeka, nielen čo prežíva (radosť,hnev a pod.), ale aj aké má vlastnosti (názory, temperament a pod.). Za správanie môžeme považovať [Štefanovič, [7]]:

1. reakcie - činnosti svalov a žliaz s vnútornou sekréciou, ktoré fungujú na vrodenom základe: ide o nepodmienené reflexy a inštinkty,

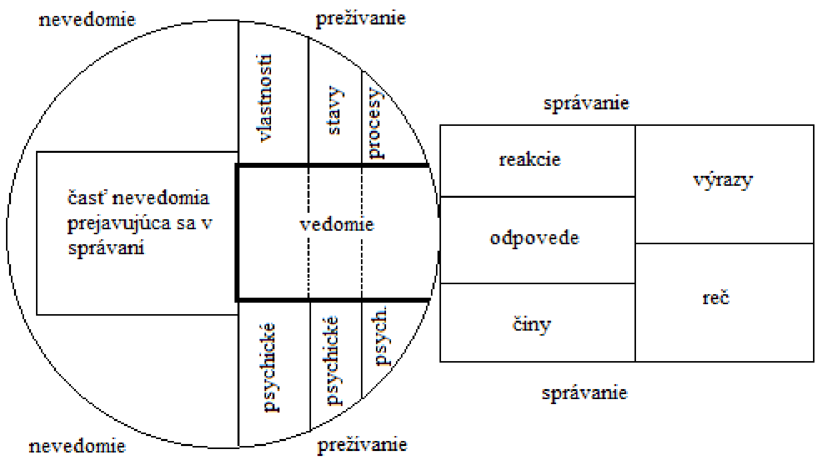
2. odpovede - činnosti svalov a žliaz s vnútornou sekréciou, ktoré fungujú na naučenom základe a sú spojené s osobnou skúsenosťou,

3. konanie - akákoľvek činnosť, ktorú vykonávame uvedomelo a prejavujú sa tu nielen psychické procesy a psychické funkcie (myslenie, reč a rozhodovanie), ale aj samotné vlastnosti človeka,

4. vonkajšie výrazy - zmeny v tvári (sčervenanie), vegetatívne zmeny (potenie) a pantomimika (gestikulácia),

5. reč - verbálne správanie (verbálny prejav), v ktorom sa najviac prejavuje to, čo prežívame: nezahrňuje len obsahovú stránku (to, čo hovoríme), ale aj formálnu (ako to hovoríme).

Psychika a správanie človeka tvoria spolu celok, ktorý môže byť v súlade alebo nesúlade. O súlade hovoríme v prípade, že to, ako sa správame, odpovedá tomu, čo prežívame. O nesúlade budeme naopak hovoriť vo chvíli, keď naše správanie bude v rozpore s naším prežívaním, tzn. budeme sa správať inak, ako to cítime.



Obr. 15: Zložky psychiky [Štefanovič, [7]].

2.5. Činnosť

Z vonkajšieho pohľadu môžeme duševný život človeka charakterizovať nielen jeho správaním a konaním, ale taktiež jeho činnosťou. Na základe týchto troch faktorov nás ľudia môžu posudzovať a domnievať sa niečo o našom prežívaní, úroveň našich psychických procesov, stavov a vlastností našej osobnosti, ktoré pomáhajú človeku pôsobiť na vonkajšie prostredie (presnejšie- prostredie okolo neho).

Samotná činnosť človeka a jeho konanie sú úzko spojené s jeho rozhodovaním, voľným konaním a častokrát sú tu pridružené rôzne ťažkosti, problémy a konfliktné situácie, ktoré dokážu v značnej miere ovplyvniť jeho správanie.

Aby sme mohli zaviesť pojem činnosť, musíme zaviesť pojem aktivácia alebo aktivizácia.

Definícia 14 *Aktiváciou (aktivizáciou)* rozumieme uvedenie organizmu do vnútornej alebo vonkajšej činnosti (aktivity), a stupeň intenzity vnútornej alebo vonkajšej aktivity.

Samotný pojem "aktivácia" častokrát označuje začiatočný bod buď vnútorného prežívania, alebo vonkajšieho správania. Za hladinu všeobecnej aktivácie sa považuje intenzita stavu vnútornej resp. vonkajšej aktivity (činnosti) a je s ňou spojená výkonnosť človeka. Túto spojitosť si môžeme predstaviť ako krivku nasledovne: po zobudení má táto krivka vzrastajúci charakter, človek je čulý, má veľa energie, až po dosiahnutie nejakého optimálneho bodu. Od tohoto bodu nastáva jej neustály pokles, ktorý sa môže prejavovať únavou človeka alebo jeho podráždenosťou.

Definícia 15 *Činnosťou (aktivitou)* označujeme prejav aktivácie navonok spojený so zmenami vlastnej polohy v priestore, so zmenami vzťahu k okoliu a s manipuláciou s predmetmi.

2.6. Osobnosť

Na záver podkapitoly 2.1 sme zmienili, že na duševný život každého dospelého človeka sa dá pozerať z dvoch postojov. Na jednej strane je to postoj, ako človek vidí seba samého pri pohľade do seba, na strane druhej, ako ho vidia ostatní ľudia. Môžeme to preniesť na všetkých ľudí, celú populáciu a hovoriť o záujme ľudí sa navzájom spoznávať, a o záujme vyznať sa sami v sebe. Za spoznávaním človeka je nutné vidieť spoznávanie jedinca ako jednoty, celku, spojenie všetkých jeho vlastností - jeho osobnosť.

Definícia 16 *Osobnosť* je organická jednota telesného a psychického, vrodeného a získaného, typická pre daného jednotlivca, ktorá sa prejavuje jeho správaním.

Poznámka 30 Jednoznačné vymedzenie pojmu osobnosť v psychológii neexistuje. Existuje viac než 50 rôznych vymedzení, ktoré sú dané teoretickým prístupom autora k psychológii osobnosti. To, k čomu väčšina týchto vymedzení smeruje, je obsiahnuté v definícii 16.

Osobnosť teda predstavuje jednotu, tzn. že zložky, ktorými je tvorená, neexistujú samostatne, ale sú v nejakých interakciách medzi sebou, sú medzi nimi súvislosti a samotné správanie je dané ich spoluprácou.

Osobnosť môžeme taktiež charakterizovať nasledovne ako:

1. psychofyzickú jednotu - jednota telesného a duševného, telesných a psychických skutočností. Za súčasť osobnosti sa považuje telo človeka (jeho tvár, vonkajší vzhľad a jeho úprava), pantomimika, mimika tváre spojená s psychickými prejavmi osobnosti,

2. jednota všetkého psychického - ide o stupeň rozvoja, samotnú kvalitu a osobitné zvlášnosti psychických procesov (napr. myslenie), psychických stavov (napr. stresových) a vlastností osobnosti (temperament),

3. súhrn všetkého vrodeného (pôvodného), rozvinutého (rozvíjanie schopností) a získaného v priebehu vývoja jednotlivca,

4. súhrn vonkajších vzťahov, ktoré sú podmienené vnútornými vlastnosťami daného jedinca.

Každý človek má typickú osobnosť, ktorá je charakteristická a špecifická iba pre neho. Vyššie spomenutým popisom sa nesnažíme osobnosť hodnotiť (nesnažíme sa označiť priemernú osobnosť, veľkú osobnosť a pod.). Z psychologického pohľadu je osobnosťou každý jeden človek.

Poznámka 31 Psychológia zahrňuje široké spektrum oblastí, ktoré vo svojej podstaty úzko súvisia s predmetom tejto diplomovej práce. Vzhľadom k jej bohatému rozsahu sú v rámci diplomovej práce do istej miery opomenuté a prenechané čitateľovi k podrobnejšiemu štúdiu odbornej literatúry, ktorá sa danou problematikou zaoberá napr. [Štefanovič,[7]].

3. Možné koincidencie (súvislosti, presahy, paralely)

Nasledujúca kapitola by mala odhaliť možné koincidencie medzi axiomatickým prístupom Johna Nasha, ktorý sme si priblížili v podkapitole [1.3.2], a axiomatickým prístupom PhDr.Václava Mazala, ktorý pochádza zo zatiaľ nepublikovaného článku s názvom: *"Psychologie lidství jako prahový psychický proces: apriorní psychologická konstrukce"*. V jednom aj v druhom prípade pracujeme so siedmymi axiómami, ktoré proti sebe stoja. Ako bolo spomenuté v úvode práce, ide o snahu zistiť do akej miery tieto koincidencie existujú resp. či vôbec existujú.

- Pri samotnom snažení sa pochopiť psychologický podklad bolo nutné odprostenie (abstrahovanie) sa od hry, ktoré by nám malo pomôcť k lepšiemu pochopeniu Johna Nasha. V podstate sa nám už na začiatku zjavovala otázka či John Nash nemohol vidieť už sám presah do psychológie, či nevidel pri samotnom definovaní axiómov niečo viac. Ak by sme zostali u hry ako takej, tak by sme sa dostali do slepej uličky, v ktorej by sme neboli schopní chápať problematiku v rozsahu v akom je potrebné. V určitom slova zmysle ide o odprostenia sa od matematického pohľadu a matematického myslenia. Vo chvíli tohto odhliadnutia od hry sa z hráča stane moment, prvok (anglicky *agents*) a stratégia (osobnostná stratégia človeka) bude predstavovať nejakú trajektóriu (dráhu), pričom je vhodné v tomto prípade uvažovať čas (časový moment).

- Chceme sa dostať do toho, čo formuje ľudstvo a chceme samotné prahové, psychické ľudstvo definovať pomocou nejakého pevného bodu. Z nášho pohľadu by mohlo ísť buď priamo o Nashovu rovnováhu alebo v rozšírenom pohľade by mohlo ísť o presah až do teórie pevných bodov (vety o pevných bodoch) a rovnovážnych stavov. Čo je však nutné zahrnúť do procesných vzťahov je podvojná vzájomnosť, ktorá prebieha ako vloženie sa resp. vnorenie sa. Hybným faktorom sveta je teda podvojná závislosť, ktorej podstatou je asymetria a nie rovnováha, ktorá je závislá na čase alebo teda dĺžke udalosti a je prechodná. Zavedená trajektória predstavuje vzájomné vzťahy, ktorými sa dostávame do daného pevného bodu, ktorý je určujúci. Prečo je ale tento pevný bod určujúci? Pretože existuje podvojná závislosť $\rightarrow$ niečo ako hra, ale viac ako rovnováha. Ak by bola určujúcim pevným bodom rovnováha, tak sme mŕtví (rovnováha je iba ilúzia, ktorá nás ženie). Ako pevný bod si môžeme napr. predstaviť narodenie a smrť jedinca. Všetko medzi tým je podvojná závislosť. Od nášho narodenia sa pomocou udalostí pohybujeme po trajektóriách, ktoré sú asymetrické a pomocou nich sa dostaneme "niekam" a toto "niekam" predstavuje rovnováhu. Potom nastanú ďalšie udalosti a my sa zase pohybuje, až kým nenarazíme na ďalšiu rovnováhu.

- Jedinec sa stretáva s inými predmetmi ako niekto pred 60 rokmi. Samotný význam je spoločný pre ľudí, ale každý ho vidí inak. Keď sa nám v troch rokoch formuje psychika, tak vidíme nejaké veci. Tento pohľad, je daný a vlastný iba nám, čiže ich tak vidíme iba my $\rightarrow$ ide o pevný bod.

- Významy sú nezávislé na nás, rastú a hrajú dôležitú úlohu v sociálnych vzťahoch. Význam je zovšeobecnením skutočnosti, cibrením spoločenskej skúsenosti ľudstva. Je zafixovaný ako poznatok, pojem alebo norma. Jedinec si význam pri tom osvojuje podľa toho, aký subjektívny, osobnostný zmysel pre neho má. Zmysel vyjadruje význam daného pojmu, poznatku alebo normy, čiže vyjadruje vzťah jedinca k nim.

- V zmysloch zachytávame význam daného predmetu, a i napriek tomu, že nás ovplyvňuje, my už ho ovplyvniť nemôžeme, pretože sme logicky niekde inde. Význam je pritom historický/rovnaký, a predmet nás k tomu buď priblíži, alebo nie. Vložením sa do niečoho síce upúšťame od významu, ale samotný význam nás priviedol k vonkajšiemu tvaru predmetu.

- Môžeme skonštatovať, že existuje nejaký všeobecne daný význam a vo chvíli, kedy si ho jedinec osvojí, má pre neho nejaký zmysel.

- Čas je zasádny a predstavuje moment, ktorý predstavuje tvar (nedostávame sa doňho však ihneď, to je iba ilúzia). Meranie času sme si vykonštruovali, aby sme mali lepšie poňatie o čase. A však to, ako čas vnímame neodpovedá tomu, ako ho meriame. Pokiaľ sedíme na hodinovej prednáške, ktorá nám príde nudná, tak máme pocit, akoby sme tam sedeli celú večnosť. Keď sa stretneme s ľudmi, ktorých máme radi a užívame si ich spoločnosť, tak hodina nám príde ako pár minút.

- Ďalším dôležitým faktorom je nutné vyvolávanie emócií. Od organizmu, cez mozog a fyziologické potreby až po ľudstvo dochádza k spojeniu. Toto spojenie vždy prebieha bez toho, aby sme si to všimli, ale nejako to proste cítime. Pritom určité tvary nás ovplyvňujú a my ich dokážeme ohodnotiť. Už Aristoteles postrehol, že existuje určité spojenie medzi emóciami a nejakým tvarom a to vedie k poznaniu.

- Predstavme si samotný vesmír, v ktorom existuje voda. Aby voda mohla vzniknúť, musia sa stretnúť vodík a kyslík. Akú úlohu v tomto stretnutí nesie čas? V podvojnej závislosti sa stretávajú *agents*, ktorý smerujú a snažia sa dostať k pevnému bodu, ku ktorému **musia** dôjsť, pretože sú k tomu predurčený.

PhDr. Václav Mazal vo svojom článku definuje prahový psychický proces a sedem teoretických postulátov nasledovne [Mazal, [9]]: *"Prahový psychický proces lidství je univerzální, je dán skrze ideální objektivní význam ve vztahu k druhému jako k člověku sobě-podobnému, a současně ve všech předmětných formách lidské činnosti, které se pro jedince mění historicky ve významu, aniž by si to nutně uvědomoval. Prahový psychický proces lidství je tak v každém momentu života jedince, a to v různých formách či tvarech zprostředkovaných předmětně. Předmětný psychologický obsah lze popsat pohyblivou strukturou osobnostní činnosti těmito axiomy (postuláty)*:

1. *Postulát poetického tvaru předmětu*
   Každý moment (událost či stav) psychického procesu lidství je v jistém „sy-

nestetickém propojení" předmětného obsahu osobnostní činnosti k ideálnímu, objektivnímu významu jako společenské danosti. ***Každý takový moment je v poetickém („fantastickém") tvaru předmětu daného významu jako jediném „možném"****.*

2. *Postulát času*

   Změna osobnostní činnosti se děje nezvratně v osobnostním smyslu; tímto lze tuto změnu popsat jako diskontinuitní v čase, diskrétní („znatelně" rozlišitelnou). Osobnostní změna je však současně relativní, neboť se proměňuje předmět osobnostní činnosti (jeho poloha, tvar), **relativní „vzdálenost" předmětných zvratných operací - ve významu jakoby zvnějšku daných, v čase přetrvává**.

3. *Postulát dvojakosti vědomí*

   Dvojakost vědomí umožňuje spojení významů s objektivním reálným světem, což lze označit jako vnější smyslovost vědomí - vědomí reálnosti objektivního světa, a spojení významů s reálností samotného života jedince v tomto světě, s potřebou předmětného obsahu, což lze označit jako osobnostní smysl ve vědomí jedince. ***Vědomí jedince je „omezováno" vnější smyslovostí předmětu. Předmět však, pokud svým obsahem stále odpovídá potřebě, současně navádí k vědomí osobnostního smyslu****.*

4. *Postulát identity a krásy*

   Synestetické rysy propojenosti uzlových smyslových svazků vědomí, uskutečňované v každém momentu osobnostní činnosti, ovlivňují „připravenost" osobnosti jedince (prohlubují soustředěnost celostní osobnosti, její citlivost, vnímavost, zaměřenost, přesvědčení, zaujatost), a tím konec konců i její autenticitu, integritu a identitu. Takto je jedinec s to existovat jako identické Já se svou osobnostní zaujatostí v synestetickém propojení poetických - více či méně krásných, šťastných a slastných, momentů života, což je dáno asymetričností smyslu ve významu - jakoby „nákrokem do budoucna" v každém aktuálním momentu, který svou "nedokončeností" poetického tvaru *předmětu orientuje k širšímu předmětnému obsahu, v „soběpodobnosti“, v sebe-identitě s ostatními. Identické Já ve spojení s poetickým tvarem předmětu současně plní funkci „předmětně iluzorního měřítka“.* ***Záměna předmětu v témže významu se pak v daném momentu uskutečňuje „zvratně“, tj. symetricky - obráceně, jakoby z druhé strany, ale vždy v „dvojaké“ předmětné provázanosti*** [21]***, a nezáleží na tom, z které strany vzejde první podnět, jinak také - který předmětný tvar (poloha) je první****. Proto i v identickém Já je „pohotovost“ k mezní, prahové změně udržitelnou, reálnou, možnou.*

5. *Postulát hrové strukturovanosti*

   „Svobodné pohrávání si“ s předmětem činnosti (jeho uvolněné poměřování, doplňování atd.), neboli jeho hrová proměna, je současně pohnutkou k hrovým cílům, resp. ke sjednocení motivu s hrovým cílem. ***Hra tímto způsobem „omezuje“ účastníka hry na jedinou, v daném momentu pro něj osobnostně přijatelnou (cítí se „být sám sebou“) hrovou variantu činnosti, která v daném momentu není provázána s další, aby ho mohla navést současně k jiné variantě.***

6. *Postulát pohyblivé hierarchizace*

   Diskontinuita času spojená s osobnostním smyslem činnosti umožňuje skladebnost a souslednost „poetických“ událostí (momentů), tím také hierarchizaci vztahů a vědomou orientaci jedince v reálném objektivním světě. ***V daném momentu nemůže být jinde v hierarchické provázanosti méně dominantní předmětné určení s výjimkou předmětu činnost určujícího, to je dáno pohyblivostí propojení****.*

7. *Postulát univerzálnosti prahového lidství*

   Prahový psychický proces lidství formuje osobnost jedince v celku, je spjat s ovládnutím významu a se společenskou historií významu na jedinci nezávislou,

[21] Existence pevného bodu dokazuje, že existuje taková situace, která je nejlepší reakcí na sebe samu (Nash); obdobně - Příroda je ve shodě sama se sebou (Newton).

tj. s uskutečňováním osobnostního smyslu ve významu. Jedinec se v daném momentu chápe toho „svého“ smyslu, aby jej ostatní chápali jako on (a aby byl chápán jako „on“). Tím zhodnocuje svou osobnostní identitu - odlišnost od ostatních a současně svou podobnost s ostatními, v témže společně jim dostupném, sdíleném významu, a má proto vždy pohnutku k sobě samému jako k druhému člověku „sobě-podobnému“, což jej „navádí“ k ovládnutí významu. Význam mění předmět nezávisle na jedinci. Aby se předmět stal součástí osobnostní struktury jedince, musí být v poloze, v níž si ho potřeba „nalezne“, neboť teprve když se potřeba „setká“ se svým předmětem, plní regulační psychickou funkci (prahovou). Předmět jakoby se v poetickém poutu k významu „nastavoval“ pro potřebu předmětného obsahu v poetickém tvaru. ***Poetické pouto k významu je proto nezastupitelným, specificky lidským psychologickým určením. Tímto psychickým procesem je dána rozlišovací, prahová mez lidství, a to univerzálně – pro všechny lidské jedince, ve všech činnostech****.*

Pokiaľ by sme si proti sebe postavili zmieňované dva axiomatické prístupy, tak si môžeme všimnúť prípadných koincidencií resp. paralel. Odhalené paralely v stručnosti zhrnieme nasledovne, pričom sa zameriame na zvýraznené časti v postulátoch PhDr. Václava Mazala:

1. v postuláte poetického tvaru predmetu hovoríme o jedinom možnom momente, v prípade Nasha vieme, že existuje práve jedno riešenie hry (axióm 1),

2. v postuláte času hovoríme o relatívnej vzdialenosti, ktorá v čase pretrváva, v prípade Nasha sa nám to približuje k axiómu 3 a nemennosti riešenia pri lineárnych transformáciach úžitkových funkcií, ktoré zachovávajú usporiadanie (ak by sme do porovnávania zahrnuli aj vyjednávací problém Johna Nasha, tak by sa nám tomu najviac priblížil axióm "Nezávislosti na mierke", kde platí, že riešenie zmení svoju hodnotu, ale relatívna pozícia riešenia v množine ostáva),

3. v postuláte dvojakosti vedomia hovoríme o obmedzovaní vedomia jedinca vonkajšou zmyslovosťou predmetu, v prípade Nasha, by mohlo ísť o napojenie na axióm 7, kedy sa obmedzujeme na jedinú stratégiu z množiny možných stratégií resp. axióm 6, kde obmedzujeme množinu stratégií,

4. v postuláte identity krásy je spomínaný pojem symetria ako zvratnosť zámeny predmetu v tom istom význame pre daný moment a nezávislosti na tom, ktorý podnet príde ako prvý, v prípade Nasha, vieme, že nezáleží na tom, ktorý hráč je označený ako prvý (axióm 4),

5. v postuláte hrové štrukturovanosti je spomínané obmedzovanie účastníka hry na jedinú možnú hrovú variantu činnosti, v prípade Nasha sa môžeme, obdobne ako v bode 3, držať určitej paralely na axiómy 6 a 7,

6. v postuláte pohyblivej hierarchizace je dôležité spojenie dominantnosti predmetného určenia, kde v prípade Nasha hovoríme o axióme 2,

7. v postuláte univerzálnosti prahového ľudstva sa hovorí o špecifickosti poetického puta k významu, kde v prípade Nasha sa približujeme k axiómu 5.

Postuláty by sme sa mohli snažiť rozobrať aj zo psychologického hľadiska nasledovne: za osobnostnú činnosť človeka môžeme považovať napr. jeho premýšľanie. To, ako predmet tohoto premýšľania daný človek vníma je subjektívne. Mohli by sme konštatovať, že to, ako nad tým daný človek premýšľa je ovplyvňované jeho osobnosťou (vlastnosťami, charakterom a pod.). Človek nad niečím premýšľa, sám v sebe niečo prežíva a vytvorí si nejaký záver. Lenže bez ďalšej interakcie s okolím, bez reakcií okolia na jeho záver, bez sprostredkovania tohto záveru ďalším ľuďom, sa nepohne ďalej a môžeme usúdiť, že svoj záver nezmení a je to jediný, možný záver. Až po interakcii s okolím, je jedinec schopný znovu premýšľať nad daným predmetom, ale už so začlenením daných interakcií, a môže si následne vytvoriť nový, upravený záver.

S prihliadnutím na udržanie rozsahu práce a na možnosť, že by sme sa mohli skĺznuť až do rôznych foriem špekulácií a domýšľania sa, čo sa týka paralel a presahov, sme ponechali iba odkazy na možné presahy medzi dvoma axiomatickými prístupmi.

Poznámka 32 Na záver tejto kapitoly uvedieme článok z roku 2016, ktorý napísali Jian Yu, Neng-Fa Wang, Zhe Yang a nesie názov *"Equivalence results between Nash equilibrium theorem and some fixed point theorems"* a článok z roku 2011, ktorý napísal Sehie Park s názvom *The Fan minimax inequality implies the Nash equilibrium theorem*, v ktorých sme našli prepojenie medzi Nashovou rovnováhu a teóriou o pevných bodoch, a myslíme si, že by mohli priniesť ďalší pohľad k téme diplomovej práce.

Záver

V rámci diplomovej práce sme si predstavili historický vývoj teórie hier, na ktorý sme naviazali matematické aparáty pre rôzne typy hier a axiomatický prístup Johna Nasha, ktorý je rozšírením vyjednávacieho problému. Problematiku sme sa snažili dokladať jednoduchšími príkladmi poprípade obrázkami, ktoré mali za úlohu čitateľovi osvetliť využitie príslušnej teórie.

Následne sme popísali v stručnosti základ pojmov zo psychológie ako vedomie, nevedomie, správanie, činnosť, osobnosť a pod. Predpokladali sme, že čitateľ má určité základné znalosti zo psychológie, či už zo strednej školy alebo zo samoštúdia vo voľnom čase, a v prípade záujmu alebo nutnosti vie, kde má hľadať prípadne hlbšiu problematiku.

V zásadnej časti práce sme sa zamerali na hľadanie možných koincidencií (presahov) medzi axiomatickým prístupom Johna Nasha a axiomatickým prístupom PhDr. Václava Mazala. Pred samotným poukázaním na možné koincidencie v teoretickom rámci, sme sa snažili čitateľovi predstaviť "pohľad" na psychologický poklad, bez ktorého by nebolo možné venovať sa nejakej analýze a porovnávaniu. Ďalej sme v krátkosti odcitovali nutné a význačné časti článku PhDr. Václava Mazala, aby sme čitateľovi predstavili aj druhý axiomatický prístup. Následne sme predstavili možné teoretické koincidencie (presahy) medzi danými dvoma axiómami a snažili sme sa čitateľa upozorniť na to, že v prípade podrobnejšieho psychologického skúmania postulátov by sme mohli skĺznuť do špekulácii a domýšľania sa. Odhalili sme možný presah do teórie pevných bodoch a v závere práce sme poukázali na prepojenie Nashovej rovnováhy a viet o pevných bodov.

Spracovanie diplomovej práce mi prinieslo nové znalosti z oblasti psychológie, ale aj samotnej matematiky. Zoznámila som sa s axiomatickým prístupom Johna Nasha a s teóriou vyjednávania, s ktorými som sa doteraz nestretla, a taktiež som si rozšírila svoje znalosti psychológie.

Dúfam, že moja diplomová práca prinesie úžitok nielen študentom matematiky, ale taktiež niekoho podnieti, aby sa venoval problematike, ktorá vychádza zo spojenia matematiky a psychológie.

Literatura

[1] ADCOCK, C.J.: *Základy psychologie*, Praha: Orbis, 1973.

[2] JUREČKA, V.: *Úvod do ekonomie: učební text pro studenty neekonomických oborů. 3.*, upr. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2011.

[3] KAHNEMAN, D.: *Myšlení: rychlé a pomalé.*, Brno, Jan Melvil, edice: Pod povrchem, 2012.

[4] MAŇAS, M.: *Teorie her a její aplikace.*, 1. vyd. Praha: Stát. nakl. techn. lit., 1991.Teoretická knižnice inženýra.

[5] MAŇAS, M.: *Teorie her a optimální rozhodpvání.*, 1.vyd. Praha: SNTL, 1974.

[6] SCHILLING, R.: *Measures, Integrals and Martingales.*, New York: Cambridge University Press, 2005.

[7] ŠTEFANOVIČ, J.: *Psychologie pro gymnázia a pedagogické školy*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976.

[8] TVRDÝ, M.: *Stieltjesův integrál: Kurzweilova teorie.*, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012.

[9] MAZAL, V.: *Psychologie lidství jako prahový psychický proces: apriorní psychologická konstrukce*, nepublikovaný článok, 2015.

[10] Babylonian Talmud [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: http://www.jewishvirtuallibrary.org/jsource/Judaism/FullTalmud.pdf.

[11] Babylónský Talmud [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: $http://www.chabad.org/library/article_cdo/aid/2652565/jewish/The-Babylonian-Talmud.htm.$

[12] Chronology of Game Theory [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm-#y90.

[13] Historické počátky teórie hier [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/game_theory/files/Hyksova2004a.pdf.

[14] Interview with Abel Laureate John F. Nash [online]. 2016, [cit. 2016-12-4]. dostupné z: http://www.ams.org/publications/journals/notices/201605/rnoti-p486.pdf.

[15] John Nash and a "Beautiful mind"[online]. 2016, [cit. 2016-12-4]. dostupné z: John Nash and Beautiful mind.

[16] John Forbes Nash Jr. [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: http://www.ams.org/journals/notices/201605/rnoti-p492.pdf.

[17] Očima expertů:Jak učit ekonomii [online]. 2017, [. 2017-4-21]. dostupné z: .

[18] Petrohradský paradox[online]. 2016, [cit. 2016-12-1]. dostupné z: http://koroptew.blogspot.cz/2010/10/petrohradska-loterie.html.

[19] Prisoner's dilemma [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: http://www.econlib.org/library/Enc/PrisonersDilemma.html.

[20] Psychologie [online]. 2017, [cit. 2017-2-2]. dostupné z: https://managementmania.com/cs/psychologie.

[21] Teória hier [online]. 2016, [cit. 2016-11-17]. dostupné z: http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/11524/mod_resource/content/2/mtr2final2014-.pdf.

[22] Teória hier [online]. 2016, [cit. 2016-12-6]. dostupné z: http://frcatel.fri.utc.sk/users/pesko/TH/th2.pdf.

[23] Teorie hier ako formální teorie racionálního rozhodování [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: http://web.ff.cuni.cz/ pelis/gt-pelis.pdf.

[24] The Bargaining problem [online]. 2016, [cit. 2016-10-28]. dostupné z: http://www.eecs.harvard.edu/cs286r/courses/spring02/papers/nash50a.pdf.

[25] The two person bargaining problem [online]. 2016, [cit. 2016-11-30]. dostupné z: http://lcm.csa.iisc.ernet.in/gametheory/ln/web-cp2-bargaining.pdf.

[26] Two person Bargaining problem [online]. 2016, [cit. 2016-12-4]. dostupné z: GameTheoryandMachinery.

[27] Two-person cooperative games [online]. 2016, [cit. 2016-10-28]. dostupné z: http://staff.bath.ac.uk/ecsjgs/Teaching/Advanced Microeconomics/Articles/two-person coperative games.pdf.

[28] Utility theory [online]. 2016, [cit. 2016-11-17]. dostupné z: https://pdfs.semanticscholar.org/d3c0/a1b8224128ac7fe8e8c8401103b3cd9-604c2.pdf.

[29] Úvod do teorie her [online]. 2016, [cit. 2016-10-30]. dostupné z: http://docplayer.cz/6557762-Uvod-do-teorie-her-druhe-upravenevydani-martindlouhypetrfiala.html.

[30] Vety o pevných bodoch [online]. 2016, [cit. 2016-12-6]. dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/ spurny/doc/students/jetleb.pdf.

[31] Zermelo's theorem [online]. 2016, [cit. 2016-10-25]. dostupné z: https://theoryclass.wordpress.com/2009/12/04/zermelos-theorem/.

[32] Zermelo's theorem [online]. 2016, [cit. 2016-10-25]. dostupné z: http://www.math.harvard.edu/ elkies/FS23j.03/zermelo.pdf.