

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## ILUSTRACE ZÁKONA VELKÝCH ČÍSEL POMOCÍ SIMULACÍ THE ILLUSTRATION OF THE LAW OF LARGE NUMBERS BY SIMULATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

MARTIN CHABIČOVSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. RNDr. JAROSLAV MICHÁLEK, CSc.

BRNO 2009

## **Abstrakt**

Stochastická konvergence, zákon velkých čísel a centrální limitní věta představují důležitou část teorie pravděpodobnosti, která se často užívá v matematické statistice. Cílem této práce je popsat tuto teorii a demonstrovat ji na příkladech a grafických simulacích. Kromě simulací stochastické konvergence, zákona velkých čísel a centrální limitní věty pro některá diskrétní a spojitá rozdělení pravděpodobnosti práce obsahuje i několik zajímavých simulací a to simulaci Galtonovy desky, Buffonovy úlohy a Bertrandova paradoxu. K vytvoření grafických simulací byl použit programovací jazyk matlab.

## **Summary**

Stochastic convergence, law of large numbers and central limit theorem is an important part of probability theory, which is often used in mathematical statistics. The aim of this work is to describe this theory and demonstrate it with examples and graphical simulation. In addition simulation of stochastic convergence, law of large numbers and central limit theorem for some discrete and continuous probability distribution the work contains several interesting simulations for example simulation of Galton's box, Buffon's needle problem and Bertrand's paradox. To create a graphic simulation were used programming language matlab.

## **Klíčová slova**

stochastická konvergence, zákon velkých čísel, centrální limitní věta

## **Keywords**

stochastic convergence, law of large numbers, central limit theorem

CHABIČOVSKÝ, M. *Ilustrace zákona velkých čísel pomocí simulací*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 33 s. Vedoucí doc. RNDr. Jaroslav Michálek, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Ilustrace zákona velkých čísel pomocí simulací* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jaroslava Michálka, CSc. s použitím pramenů uvedených v seznamu literatury.

Martin Chabičovský

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Jaroslavu Michálkovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce.

Martin Chabičovský

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti</b>	<b>3</b>
2.1	Některá rozdělení pravděpodobnosti . . . . .	3
2.2	Charakteristická funkce . . . . .	5
2.3	Konvergence náhodných veličin . . . . .	7
2.4	Slabý zákon velkých čísel . . . . .	8
2.5	Silný zákon velkých čísel . . . . .	9
2.6	Centrální limitní věta . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Simulace a příklady</b>	<b>11</b>
3.1	Stochastická konvergence-aproximace rozdělení . . . . .	11
3.2	Demonstrace zákon velkých čísel . . . . .	13
3.3	Demonstrace centrální limitní věty . . . . .	15
3.4	Zajímavé příklady . . . . .	18
3.4.1	Buffonova úloha . . . . .	18
3.4.2	Galtonova deska . . . . .	20
3.4.3	Bertrandův paradox . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Popis programu</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Seznam příloh</b>	<b>28</b>

# 1 Úvod

Zákon velkých čísel, stochastická konvergence a centrální limitní věty představují důležitou část teorie pravděpodobnosti, která se často využívá v matematické statistice. V dnešní době není obtížné demonstrovat tuto teorii pomocí počítačových simulací, které lze snadno zprogramovat v nejužnějších programovacích prostředích. V této práci jsem se pokusil demonstrovat na příkladech a grafických simulacích stochastickou konvergenci, zákon velkých čísel a centrální limitní větu. K vytvoření simulací mi pomohl programovací jazyk matlab.

V části Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti jsou uvedeny významné věty a definice vztahující se k této problematice. Některé věty jsou uvedeny včetně důkazu. Rozsáhlejší důkazy nebo důkazy zaměřené mimo rámec této práce nejsou provedeny ale je uveden odkaz na příslušnou literaturu. Následující kapitola Simulace a příklady se věnuje demonstraci zákona velkých čísel a centrální limitní věty na simulacích a příkladech. Popis je zde čteně doplněn obrázky. Poslední kapitola obsahuje návod na použití přiloženého programu, který jsem sám vytvořil a použil k vytvoření obrázků pro tuto práci.

# 2 Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

V této práci se bude předpokládat znalost základních pojmů z teorie pravděpodobnosti. V teoretické části jsou uvedena některá diskrétní a spojitá rozdělení pravděpodobnosti, charakteristická funkce a její vlastnosti, stochastická konvergence, zákony velkých čísel a centrální limitní věty. Tato teorie je zpracována podle monografií [1], [2] a [5].

## 2.1 Některá rozdělení pravděpodobnosti

### Příklady diskrétních rozdělení pravděpodobnosti

- Alternativní

Náhodná veličina  $X$  má alternativní rozdělení (značíme  $X \sim A(\theta)$ ), když nabývá pouze hodnot 0, 1 a to s pravděpodobnostmi

$$p(x) = P(X = x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

$$EX = \theta, \quad DX = \theta(1 - \theta)$$

- Binomické

Budiž  $n$  přirozené číslo a  $\theta \in (0, 1)$ . Náhodná veličina  $X$  má binomické rozdělení (značíme  $X \sim Bi(n, \theta)$ ), když nabývá pouze hodnot 0, 1, ...,  $n$  a to s pravděpodobnostmi

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

$$EX = n\theta, \quad DX = n\theta(1 - \theta)$$

- Hypergeometrické

Nechť  $N, K, n$  jsou přirozená čísla, přičemž  $K < N, n < N$ . Náhodná veličina  $X$  má hypergeometrické rozdělení (značíme  $X \sim Hg(N, K, n)$ ), když nabývá pouze celočíselných hodnot s pravděpodobnostmi

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{pro } \max\{0, K + n - N\} \leq x \leq \min\{K, n\}.$$

$$EX = \frac{nK}{N}, \quad DX = \frac{nK(N-K)}{N^2}$$

- Poissonovo

Nechť  $\lambda > 0$  je parametr rozdělení. Náhodná veličina  $X$  má Poissonovo rozdělení (značíme  $X \sim Po(\lambda)$ ), když nabývá pouze hodnot 0, 1, ...,  $n$  a to s pravděpodobnostmi

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \dots$$

$$EX = \lambda, \quad DX = \lambda$$

## Příklady spojitých rozdělení pravděpodobnosti

- Rovnoměrné

Nechť  $(a, b)$  je konečný interval. Náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením (značíme  $X \sim R(a, b)$ ) má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin (a, b). \\ \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b). \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Exponenciální

Nechť  $\lambda > 0$ . Náhodná veličina s exponenciálním rozdělením (značíme  $X \sim Ex(\lambda)$ ) má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0. \\ \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

$$EX = \lambda, \quad DX = \lambda^2$$

- Cauchyovo

Nechť  $a \in \mathbb{R}$  a  $b > 0$  jsou daná čísla. Náhodná veličina s Cauchyovým rozdělením (značíme  $X \sim C(a, b)$ ) má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + (x-a)^2}.$$

Střední hodnota a rozptyl Cauchyova rozdělení neexistují.

- Beta

Nechť  $a > 0, b > 0$ . Náhodná veličina s beta rozdělením (značíme  $X \sim B(a, b)$ ) má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & \text{pro } x \in (a, b). \\ 0 & \text{pro } x \notin (a, b). \end{cases}$$

$$EX = \frac{a}{a+b}, \quad DX = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

- Normální

Nechť  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ . Náhodná veličina s normálním rozdělením (značíme  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$EX = \mu, \quad DX = \sigma^2$$

- Logaritmicko normální

Nechť  $a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, b > 0$ . Náhodná veličina s logaritmicko normálním rozdělením (značíme  $X \sim LN(a, b, m)$ ) má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b(x-a)} e^{-\frac{(\ln(x-a)-m)^2}{2b^2}}, \quad x > a.$$

$$EX = a + e^{m+\frac{b^2}{2}}, \quad DX = (EX)^2(e^{b^2} - 1)$$



- Fischer-Snedecorovo F rozdělení

Nechť  $m, n \in \mathbb{N}$  a  $m \geq 1, n \geq 1$ . Náhodná veličina s F rozdělením o  $m$  a  $n$  stupních volnosti (značíme  $X \sim F(m, n)$ ) má hustotu

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{(m+n)}{2}}, \quad x > 0.$$

Je-li  $n > 2$ , existuje  $EX = \frac{n}{n-2}$  a je-li  $n > 4$ , existuje konečný rozptyl  $DX = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ .

## 2.2 Charakteristická funkce

**Definice 2.1** Charakteristickou funkci  $\psi(t)$  náhodné veličiny  $X$  definujeme vzorcem

$$\psi(t) = Ee^{itX} = E \cos tX + iE \sin tX, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Též se dá vyjádřit ve tvaru  $\psi(t) = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} p(x) & \text{pro diskrétní náhodnou veličinu } X. \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx & \text{pro spojitou náhodnou veličinu } X. \end{cases}$

Pro přehlednost budeme značit charakteristickou funkci náhodné veličin  $X$   $\psi_X(t)$  a náhodné veličiny  $Y$   $\psi_Y(t)$ .

**Věta 2.2 (vlastnosti charakteristické funkce)**

1.  $\psi(0) = 1$  a  $|\psi(t)| \leq 1$ .
2.  $\psi(t)$  je vždy stejnoměrně spojitá.
3. Jestliže  $a, b$  jsou konstanty a  $Y = a + bX$ , pak  $\psi_Y(t) = e^{ita} \psi_X(bt)$ .
4. Jestliže  $X_1, \dots, X_n$  jsou nezávislé náhodné veličiny a  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ , pak

$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t).$$

5. Existuje-li prvních  $n$  obecných momentů  $\mu'_1, \dots, \mu'_n$  náhodné veličiny  $X$  a jsou-li tyto momenty konečné, pak její charakteristická funkce  $\psi(t)$  má prvních  $n$  derivací a platí

$$\psi^{(k)}(0) = i^k \mu'_k, \quad k=1, \dots, n.$$

Dále platí

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^n \mu'_k \frac{(it)^k}{k!} + o(t^n), \quad t \rightarrow 0,$$

kde  $o(t)$  je funkce malé  $o$  ( $f(x) = o(g(x))$  pro  $x \rightarrow a$ , když  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$  pro  $x \rightarrow a$ ).

6. Je-li  $\psi(t)$  charakteristická funkce odpovídající distribuční funkci  $F(x)$  a jsou-li  $a, b$  ( $a < b$ ) body spojitosti funkce  $F(x)$ , pak platí:

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \psi(t) \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{2it} - \psi(-t) \frac{e^{ita} - e^{itb}}{2it} \right) dt.$$

Odtud zejména plyne, že charakteristická funkce jednoznačně určuje distribuční funkci.

7. Existuje-li hustota, může být rovněž vypočtena pomocí charakteristické funkce. Pokud pro charakteristickou funkci  $\psi(t)$  platí  $\int |\psi(t)| dt < \infty$ , má  $X$  spojitou hustotu  $f(x)$  a lze ji vypočíst podle vzorce

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-itx} dt.$$

8. Budiž dána posloupnost distribučních funkcí  $F_1(x), F_2(x), \dots$  a jim odpovídající posloupnost charakteristických funkcí  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots$ . K tomu, aby posloupnost  $\{F_n(x)\}$  konvergovala k nějaké distribuční funkci  $F(x)$  ve všech bodech spojitosti této funkce, je nutné a stačí, aby posloupnost  $\{\psi_n(t)\}$  konvergovala v každém bodě k nějaké funkci  $\psi(t)$ , která je spojitá v bodě  $t = 0$ . Je-li tato podmínka splněna, pak  $\psi(t)$  je charakteristická funkce odpovídající distribuční funkci  $F(x)$  a posloupnost  $\{\psi_n(t)\}$  konverguje k  $\psi(t)$  stejnoměrně v každém konečném intervalu.

Důkaz: Viz [5].  $\square$

**Příklad 2.1** Stanovení charakteristické funkce  $\psi_X(t)$  náhodné veličiny  $X \sim N(0, 1)$  a charakteristické funkce  $\psi_Y(t)$  náhodné veličiny  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

$$\begin{aligned} \psi_X(t) = Ee^{itX} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x) dx \\ \psi'_X(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x) dx \end{aligned}$$

Jelikož  $\cos(tx)f(x)$  a  $\frac{d}{dt} \cos(tx)f(x)$  jsou spojitě na  $(-\infty, \infty)$  lze přejít ze vztahu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x) dx \quad \text{na} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \cos(tx) f(x) dx \\ \psi'_X(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} x \sin(tx) f(x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sin(tx) (-xe^{-\frac{x^2}{2}}) dx = \\ = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} [\sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{\infty} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t\psi(t) \end{aligned}$$

Dostáváme tak diferenciální rovnici, jejíž počáteční podmínka  $\psi_X(0) = 1$  plyne z Věty 2.4

$$\psi'_X(t) = -t\psi_X(t)$$

Její řešení je

$$\begin{aligned} \ln \psi_X(t) &= -\frac{t^2}{2} + \ln C \\ \psi_X(t) &= Ce^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Dosažením počáteční podmínky dostaneme  $C = 1$  a tedy

$$\psi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože  $Y = \mu + \sigma X$  pak zřejmě  $\sim N(\mu, \sigma^2)$ . Užitím 3. vlastnosti charakteristické funkce dostaneme

$$\psi_Y(t) = e^{it\mu} \psi_X(\sigma t) = e^{it\mu - \sigma^2 \frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## 2.3 Konvergence náhodných veličin

**Definice 2.3 (konvergence náhodných veličin)** *Nechť  $(\Omega, A, P)$  je pravděpodobnostní prostor a na něm je definována posloupnost náhodných veličin  $X_1, X_2, \dots$  a náhodná veličina  $X$ .*

*Řekneme, že posloupnost  $X_n, n = 1, 2, \dots$  konverguje k  $X$  skoro jistě, jestliže*

$$P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

*Řekneme, že  $X_n, n = 1, 2, \dots$  stochasticky konverguje k  $X$  (budeme značit  $X_n \xrightarrow{st} X$ ), když pro každé  $\varepsilon > 0$  platí*

$$P(\{\omega : |\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0.$$

*Řekneme, že  $X_n, n = 1, 2, \dots$  konverguje k  $X$  podle středu, je-li  $EX_n^2 < \infty$  a pro  $n = 1, 2, \dots$  platí*

$$E(X_n - X)^2 \rightarrow 0.$$

*Nechť  $X_n$  má distribuční funkci  $F_n$  a nechť  $X$  má distribuční funkci  $F$ . Jestliže  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  v každém takovém bodě  $x$ , ve kterém je funkce  $F$  spojitá, pak říkáme, že veličiny  $X_n$  konvergují k náhodné veličině  $X$  v distribuci a rozdělení náhodných veličin  $X_n$  nazýváme asymptotické rozdělení. Konvergence v distribuci se často značí  $\mathcal{L}(X_n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ .*

**Věta 2.4 (Čebyševova nerovnost)** *Nechť náhodná veličina  $X$  má střední hodnotu  $EX$  a konečný rozptyl  $DX$ . Pak pro každé  $\varepsilon > 0$  platí*

$$P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

*Důkaz:* Pro jednoduchost uvádím důkaz jen pro spojitý případ. Obecný důkaz lze najít v [5].

Uvažujme množinu

$$M_\varepsilon = \{x : |x - EX| > \varepsilon\} \text{ a } \overline{M}_\varepsilon = R - M_\varepsilon.$$

Dále

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx = \int_{M_\varepsilon} (x - EX)^2 f(x) dx + \int_{\overline{M}_\varepsilon} (x - EX)^2 f(x) dx \\ &\geq \int_{M_\varepsilon} (x - EX)^2 f(x) dx \geq \int_{M_\varepsilon} \varepsilon^2 f(x) dx = \varepsilon^2 \int_{M_\varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 P(X \in M_\varepsilon) = \varepsilon^2 P(|X - EX| > \varepsilon). \end{aligned}$$

$$\text{Odtud } P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad \square$$

## 2.4 Slabý zákon velkých čísel

**Definice 2.5 (Slabý zákon velkých čísel)** Řekneme, že posloupnost náhodných veličin  $X_i$ ,  $i=1,2,\dots$  splňuje slabý zákon velkých čísel, když posloupnost náhodných veličin

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$$

stochasticky konverguje k 0.

(Tj.  $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)| > \varepsilon) = 0$ .)

**Věta 2.6** Posloupnost náhodných veličin  $X_i$ ,  $i=1,2,\dots$  splňuje slabý zákon velkých čísel (SLZVČ), když posloupnost

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

*Důkaz:* Nechť je dána posloupnost náhodných veličin  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$ . Pak  $EY_n = 0$  a pro její rozptyl platí

$$DY_n = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n EX_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Tudíž pro všechna  $\varepsilon > 0$  za použití Čebyševovy nerovnosti dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{DY_n}{\varepsilon^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D \sum_{i=1}^n X_i}{n^2 \varepsilon^2} = 0.$$

Proto  $Y_n \rightarrow 0$  stochasticky a tedy  $X_i$  splňuje SLZVČ.  $\square$

**Věta 2.7 (Čebyševova)** Nechť  $X_i$ ,  $i=1,2,\dots$  je posloupnost nezávislých náhodných veličin s omezenými rozptyly  $DX_i \leq c$ , kde  $c$  je daná konstanta. Pak posloupnost  $X_i$  splňuje SLZVČ.

*Důkaz:* Za uvedených předpokladů platí

$$0 \leq \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n c = \frac{c}{n}$$

a v limitním případě dostáváme

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0 \quad \text{proto} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 0.$$

Protože  $X_i$  splňuje podmínku věty 2.6 tak  $X_i$  splňuje SLZVČ.  $\square$

**Věta 2.8 (Chinčinova)** Nechť  $X_i$ ,  $i=1,2,\dots$  je posloupnost nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou  $EX_i = \mu$ . Pak  $X_i$  splňuje SLZVČ a tedy

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{st} \mu.$$

*Důkaz:* Viz [5].

## 2.5 Silný zákon velkých čísel

**Definice 2.9 (Silný zákon velkých čísel)** Řekneme, že posloupnost náhodných veličin  $X_i, i=1,2,\dots$  splňuje silný zákon velkých čísel, když posloupnost náhodných veličin

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$$

konverguje skoro jistě k 0. (Tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) = 0) = 1$ .)

**Věta 2.10 (Kolmogorova)** Necht'  $X_i, i=1,2,\dots$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou  $EX_i = \mu$ . Pak platí

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \quad \text{skoro jistě.}$$

Dá se též říct, že veličiny  $X_1, X_2, \dots$  splňují silný zákon velkých čísel.

Důkaz: Viz [5].

## 2.6 Centrální limitní věta

**Věta 2.11 (Lindenbergova)** Necht'  $X_1, X_2, \dots$  jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, které má střední hodnotu  $\mu$  a konečný rozptyl  $\sigma^2$ . Označme

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu) = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Pak pro  $n \rightarrow \infty$   $Y_n$  konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ .

Důkaz: Položme

$$Z_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma} \quad k = 1, 2, \dots$$

Veličiny  $Z_1, Z_2, \dots$  jsou nezávislé, mají stejné rozdělení s nulovou střední hodnotou a s rozptylem  $DZ_k = 1$ . Označme  $\psi(t)$  charakteristickou funkci tohoto rozdělení. Z věty 2.2 plyne

$$\psi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + R(t),$$

kde  $R(t)/t^2 \rightarrow 0$  při  $t \rightarrow 0$ . Charakteristická funkce každé veličiny  $Z_k/\sqrt{n}$  je

$$Ee^{itZ_k/\sqrt{n}} = Ee^{i(t/\sqrt{n})Z_k} = \psi(t/\sqrt{n}) = 1 - \frac{t^2}{2n} + R(t/\sqrt{n}).$$

Protože  $Y_n = Z_1/\sqrt{n} + \dots + Z_n/\sqrt{n}$ , je charakteristická funkce  $\psi_n(t)$  veličiny  $Y_n$  rovna

$$\psi_n(t) = Ee^{itY_n} = Ee^{i(t/\sqrt{n})\sum Z_k} = \prod_{k=1}^n \psi(t/\sqrt{n}) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + R(t/\sqrt{n})\right)^n.$$

Jelikož pro každé pevné  $t$  při  $n \rightarrow \infty$  platí

$$nR(t/\sqrt{n}) = t^2 \frac{R(t/\sqrt{n})}{t^2/n} \rightarrow 0 \quad \text{a} \quad \psi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{nR(t/\sqrt{n})}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Z příkladu 2.1 je známo, že  $e^{-t^2/2}$  je charakteristická funkce rozdělení  $N(0, 1)$ , a tak z věty 2.2 plyne  $F_{Y_n}(x) \rightarrow \Phi(x)$ .  $\square$

**Věta 2.12** *Nechť náhodná veličina  $X_n$  má binomické rozdělení s parametry  $n$  a  $\theta$  ( $X_i \sim Bi(n, \theta)$ ), kde  $\theta \in (0, 1)$ . Pak náhodná veličina  $Y_n$*

$$Y_n = \frac{X_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

pro  $n \rightarrow \infty$  konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ .

*Důkaz:* Nechť jev  $A$  nastává v každém z  $n$  nezávislých pokusů s pravděpodobností  $\theta$ . Nechť  $Z_k = 1$ , když v  $k$ -tém pokusu jev  $A$  nastal a nechť  $Z_k = 0$ , když nenastal. Pak  $Z_1, \dots, Z_n$  jsou nezávislé náhodné veličiny, které mají alternativní rozdělení se střední hodnotou  $\mu = \theta$  a rozptylem  $\sigma^2 = \theta(1-\theta)$ . Veličina  $X_n = Z_1 + \dots + Z_n$  má rozdělení  $Bi(n, \theta)$ . Tedy

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

a tvrzení věty plyne z centrální limitní věty.  $\square$

**Věta 2.13** *Nechť  $X_n$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $n\lambda$  ( $X_n \sim Po(n\lambda)$ ), kde  $\lambda > 0$ . Pak náhodná veličina  $Y_n$*

$$Y_n = \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$$

pro  $n \rightarrow \infty$  konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ .

*Důkaz:* Nechť  $Z_1, Z_2, \dots$  jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $Po(\lambda)$ , které má střední hodnotu  $\mu = \lambda$  a rozptyl  $\sigma^2 = \lambda$ . Potom  $X_n = Z_1 + \dots + Z_n \sim Po(n\lambda)$ . Protože

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}},$$

důkaz věty plyne z centrální limitní věty.  $\square$

## 3 Simulace a příklady

### 3.1 Stochastická konvergence-aproximace rozdělení

V této části popíši a demonstruji na příkladech, jak lze aproximovat některá rozdělení pravděpodobnosti jinými. To je ukázáno na příkladě aproximace binomického rozdělení Poissonovým a hypergeometrického binomickým. Tyto aproximace jsou jednak odvozeny na příkladech, ale také demonstrovány na obrázcích, které byly vytvořeny úpravou simulací z příloženého programu v matlabu.

Nejprve na příkladě ukáži aproximaci binomického rozdělení Poissonovým.

**Příklad 4.1** Odvození pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení z pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení.

Nechť  $X \sim Bi(n, \theta)$  má pravděpodobnostní funkci  $p(x)$  pak

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \frac{1}{x!} n(n-1) \cdots (n-x+1) \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \\ &= \frac{1}{x!} n^x \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \\ &= \frac{1}{x!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) (n\theta)^x (1-\theta)^{-x} \left(1 - \frac{n\theta}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

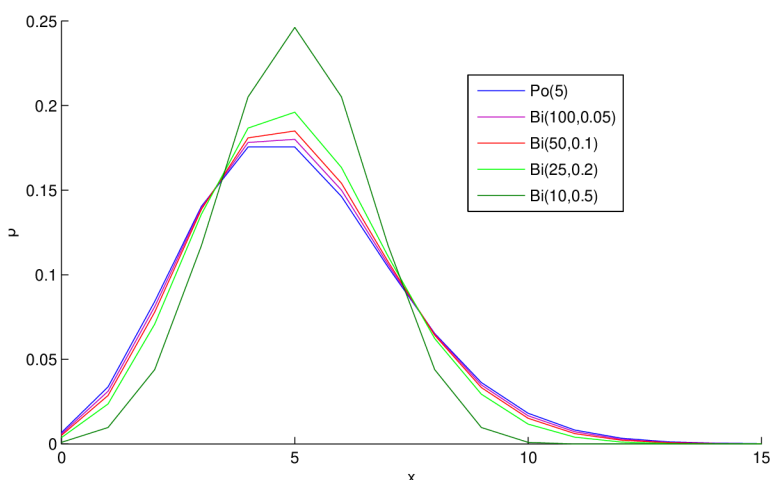
Užitím  $n\theta \rightarrow \lambda$  se pro  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\theta \rightarrow 0} p(x)$  dostává

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\theta \rightarrow 0} p(x) = \frac{1}{x!} (1-0)(1-0) \cdots (1-0) (\lambda)^x (1-0)^{-x} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Aplikací vzorce  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$  obdržíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\theta \rightarrow 0} p(x) = \frac{1}{x!} \lambda^x e^{-\lambda},$$

což je pravděpodobnostní funkce  $Po(\lambda)$ .



Obrázek 3.1: Konvergence pravděpodobnostní funkce  $Bi$  k pravděpodobnostní funkci  $Po$ .

### 3.1 STOCHASTICKÁ KONVERGENCE-APROXIMACE ROZDĚLENÍ

Na obrázku 3.1 je názorně demonstrována rychlost konvergence pravděpodobnostní funkce  $Bi$  k pravděpodobnostní funkci  $Po$ . Všechna rozdělení  $Bi(n, \theta)$  splňují, že  $n\theta = \lambda = 5$ . Na první pohled je z obrázku patrný rozdíl v aproximaci u rozdělení  $Bi(10, 0.5)$  a  $Bi(100, 0.01)$ . Tím je ukázáno, že pro dobrou aproximaci musí být splněno:  $n \rightarrow \infty$  a  $\theta \rightarrow 0$ . Abychom však dostali dostatečně přesnou aproximaci nemusíme jít s hodnotami  $n$  a  $\theta$  až k  $\infty$  respektive k 0. V knize [4] se uvádí, že stačí  $n > 30$  a  $\theta < 0, 1$ .

Na následujícím příkladě bude ukázána aproximace hypergeometrického rozdělení binomickým.

**Příklad 4.2** Aproximace pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení pravděpodobnostní funkcí binomického rozdělení.

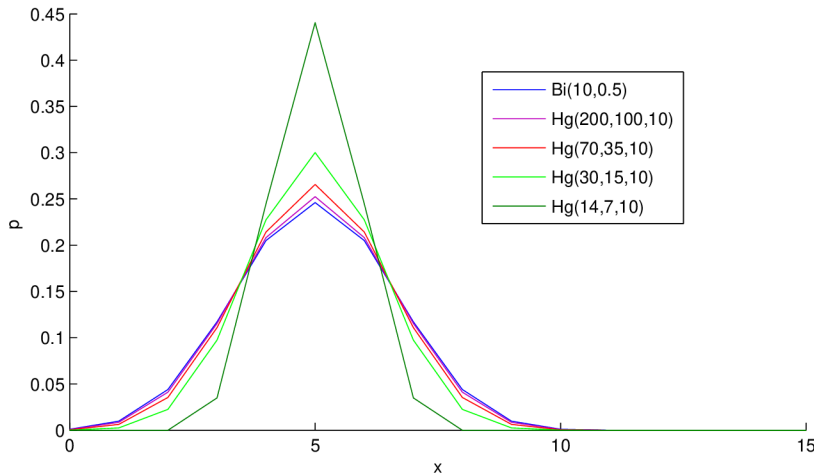
Nechť  $X \sim Hg(N, M, n)$  má pravděpodobnostní funkci  $p(x)$  pak

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{M!}{(M-x)!x!} \frac{(N-M)!}{(N-M-n+x)!(n-x)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-x)!x!} \frac{M(M-1)\cdots(M-x+1)(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+x+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \frac{1}{N^n} = \\ &= \binom{n}{x} \frac{\frac{M}{N}(\frac{M}{N} - \frac{1}{N})\cdots(\frac{M}{N} - \frac{x-1}{N}) \frac{N-M}{N}(\frac{N-M}{N} - \frac{1}{N})\cdots(\frac{N-M}{N} - \frac{n-x-1}{N})}{(1 - \frac{1}{N})\cdots(1 - \frac{n-1}{N})} \end{aligned}$$

Užitím  $\frac{M}{N} \rightarrow \theta$  se pro  $\lim_{M,N \rightarrow \infty} p(x)$  získává

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} p(x) = \binom{n}{x} \frac{\theta(\theta-0)\cdots(\theta-0)(1-\theta)(1-\theta-0)\cdots(1-\theta-0)}{(1-0)\cdots(1-0)} = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x},$$

což je pravděpodobnostní funkce rozdělení  $Bi(n, \theta)$ .



Obrázek 3.2: Konvergence pravděpodobnostní funkce Hg k pravděpodobnostní funkci Bi.

Na obrázku 3.2 je opět patrné, že pro aproximaci je nutné  $\frac{M}{N} \rightarrow \theta$ ,  $N, M \rightarrow \infty$  a  $\frac{n}{N} \rightarrow 0$ . Většinou stačí volit  $\frac{n}{N} < 0, 1$ . Spojením úvahy o aproximaci binomického rozdělení Poissonovým s aproximací hypergeometrického binomickým se dá ukázat, že lze aproximaovat



hypergeometrické rozdělení Poissonovým. K tomu je nutno splnit podmínky z jednotlivých aproximací. Pokud je  $\frac{n}{N} \rightarrow 0$ ,  $\frac{M}{N} \rightarrow \theta \rightarrow 0$  a  $n \rightarrow \infty$  lze aproximovat hypergeometrické rozdělení Poissonovým a to s parametrem  $n\frac{M}{N} \rightarrow \lambda$ .

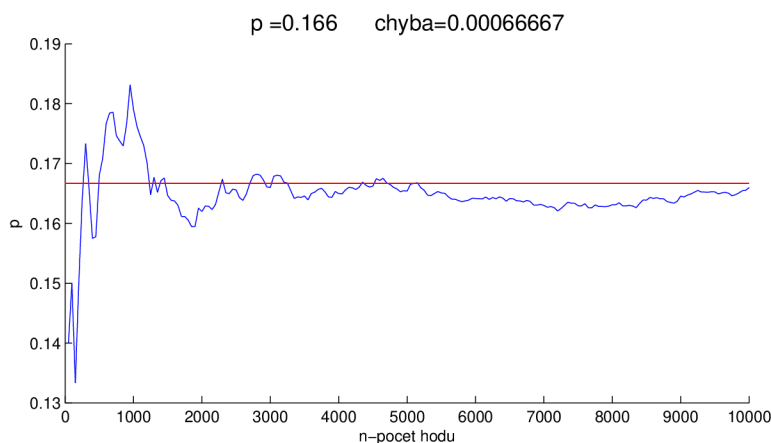
## 3.2 Demonstrace zákon velkých čísel

Nyní se zaměřím na zákon velkých čísel. Jeho princip nejprve osvětlíme na příkladě.

### Příklad 4.3

Mějme kostku a opakovaně s ní házejme. Jev A znamená, že na kostce padlo předem dané číslo. Neht  $X_k = 1$  padne-li v k-tém hodě dané číslo a  $X_k = 0$  nepadne-li. Hody jsou navzájem nezávislé.  $X_k \sim A(\theta)$ , kde  $\theta = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$  je pravděpodobnost padnutí daného čísla v jednom hodu. Rozdělení má střední hodnotu  $\mu = \theta = \frac{1}{6}$ . Potom  $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim Bi(n, \theta)$ . Necht  $m$  udává počet příznivých výsledků pokusů a  $n$  celkový počet pokusů. Z Chinčinovy věty pak plyne

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{st} \mu = \frac{1}{6}.$$



Obrázek 3.3: Simulace hodů kostkou.

Tato konvergence je graficky znázorněna na obrázku 3.3. Pro vysoce přesnou aproximaci je však třeba značný počet hodů. Pro představu, aby byla přesnost na pět desetinných míst ( $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$ ) se spolehlivostí 95% ( $\alpha = 0,05$ ) je třeba více než  $1,5 \cdot 10^{10}$  hodů.

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \alpha$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}Y_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \alpha$$

$$P\left(\left|\frac{Y - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right| < \frac{n\varepsilon}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) \geq 1 - \alpha$$

$$n \geq \left(\frac{u_{1-\alpha}\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{u_{0,95}\sqrt{\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)}}{0.5 \cdot 10^{-5}}\right)^2 \approx 1,5 \cdot 10^{10}$$

### 3.2 DEMONSTRACE ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL

Nahradíme-li pokus s házením kostkou házením mincí dospěje se k podobnému výsledku, jen s rozdílem  $\mu = \theta = \frac{1}{2}$ .

Aplikace následujícího postupu na jevy, u nichž pravděpodobnost nastoupení je dána pomocí geometrické pravděpodobnosti vede k zajímavějším výsledkům. Nechť  $\Omega$  je měřitelná podmnožina  $n$ -rozměrného euklidovského prostoru s kladnou a konečnou  $n$ -rozměrnou Lebesgueovou mírou. Dále nechť  $\mathcal{A}$  je systém všech měřitelných podmnožin množiny  $\Omega$  a  $\mu(A)$  nechť je  $n$ -rozměrná Lebesgueova míra měřitelné množiny  $A \in \mathcal{A}$  potom

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Uvažujme nyní konkrétní případ. Pro  $\Omega$  bude platit:  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  a  $A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Pravděpodobnost nastoupení jevu A je

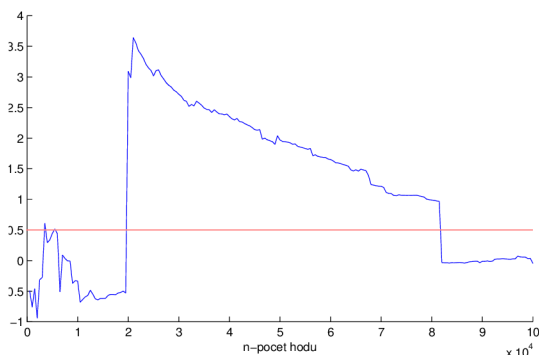
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi}{4}.$$

Mějme náhodnou veličinu  $X_i$ , která nabývá hodnot  $X_i = 1$ , pokud  $i$ -tý náhodně zvolený bod  $z \Omega$  náleží do A a  $X_i = 0$  pokud nenáleží do A. Potom  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bi(n, \frac{\pi}{4})$ . Relativní četnost nastoupení jevu A při  $n$  pokusech je  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{m}{n}$ . Z Chinčinyovy věty se dostává

$$4 \cdot \frac{m}{n} \xrightarrow{st} \pi.$$

Tohoto výsledku jsem užil ve svém programu při simulaci výpočtu  $\pi$  v sekci Zákon velkých čísel. Jinému způsobu aproximace  $\pi$  za užití geometrické pravděpodobnosti je věnována kapitola 3.4.1-Buffonova úloha.

Podobné úvahy, jako byly použity v příkladě 4.3 lze použít i na ostatní rozdělení pravděpodobnosti, která splňují potřebné předpoklady. Na otázku za jakých okolností nelze použít aproximace střední hodnoty rozdělení pomocí relativní četnosti odpovídá sama definice zákona velkých čísel a věty od něj odvozené. Požadavky pro splnění jsou vždy konečná střední hodnota a omezený rozptyl. Tento požadavek nesplňuje například Cauchyovo rozdělení. To jak vypadá aproximace střední hodnoty, která neexistuje pro  $C(0,1)$  je vidět na obrázku 3.4. Velké výkyvy na obrázku jsou způsobeny tím, že toto rozdělení nemá ohraničený rozptyl. To má za následek, že se občas vygeneruje obrovské náhodné číslo, které způsobí prudký nárůst nebo pokles relativní četnosti.



Obrázek 3.4: Demonstrace zákona velkých čísel pro  $C(0,1)$ .

### 3.3 Demonstrace centrální limitní věty

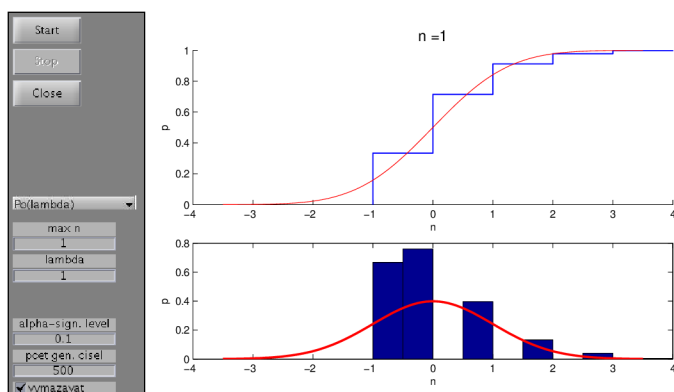
V sekci 2.6 Centrální limitní věta jsem uvedl Lindenbergovu větu a také dvě konkrétnější limitní věty jednu pro rozdělení Bi a druhou pro Po. Nyní se pokusím ilustrovat platnost této věty na simulaci. V příloženém programu je k dispozici demonstrace centrální limitní věty pro binomické, Poissonovo, rovnoměrné, beta, exponenciální, logaritmicke-normální, normální, Fischerovo a Cauchyovo rozdělení. U všech výše zmíněných rozdělení je demonstrována rychlost konvergence k rozdělení  $N(0, 1)$ . Na příkladě Cauchyova rozdělení je ukázána situace, kdy rozdělení nesplňuje centrální limitní větu. Z důvodu postrádání generátoru náhodných čísel s Cauchyho rozdělením v matlabu jsem použil pro odsimulování Cauchyova rozdělení studentovo rozdělení s parametrem rovným jedné, které je rovno standartnímu Cauchyovu rozdělení  $C(0, 1)$ .

Na následujících obrázcích bude demonstrována centrální limitní věta pro rozdělení Poissonovo, exponenciální, rovnoměrné a Cauchyovo. Na všech obrázcích je zobrazen histogram a empirická distribuční funkce pro 500 náhodných veličin  $Y_n$

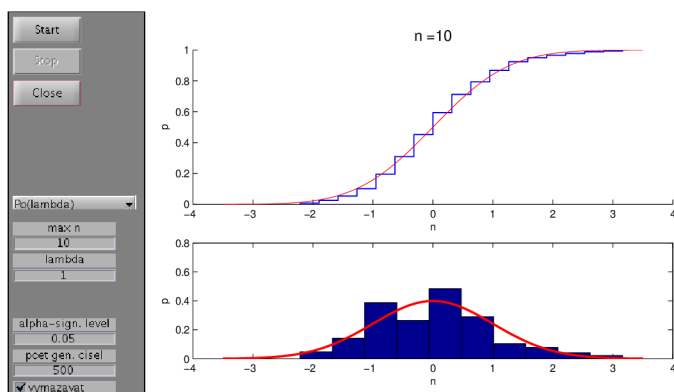
$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}},$$

kde  $\mu$  je střední hodnota zvoleného rozdělení a  $\sigma^2$  je rozptyl.

Na obrázcích 3.5, 3.6 a 3.7 je  $X_i \sim Po(1)$  a  $n=1, 10$  a 28. Hodnota  $n = 28$ , při kterém byla simulace ukončena, byla určena pomocí K-S testu na hladině významnosti  $\alpha = 0, 1$ .

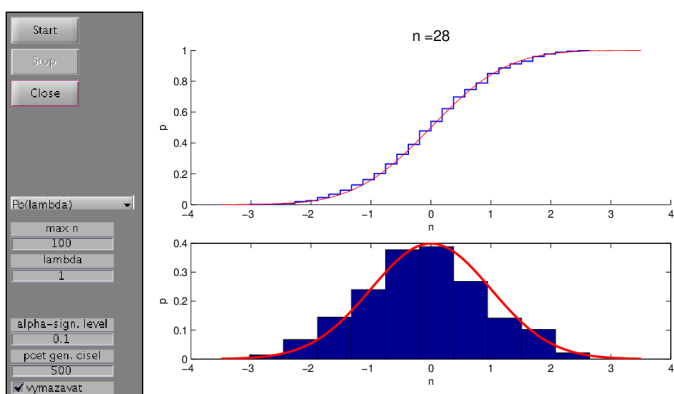


Obrázek 3.5: Centrální limitní věta pro  $Po(1)$  při  $n = 1$ .



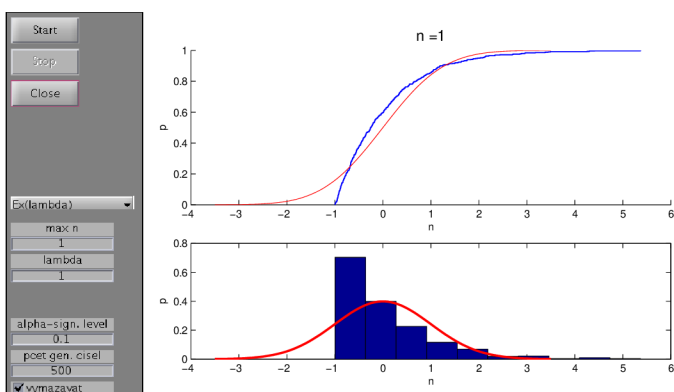
Obrázek 3.6: Centrální limitní věta pro  $Po(1)$  při  $n = 10$ .

### 3.3 DEMONSTRACE CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTY

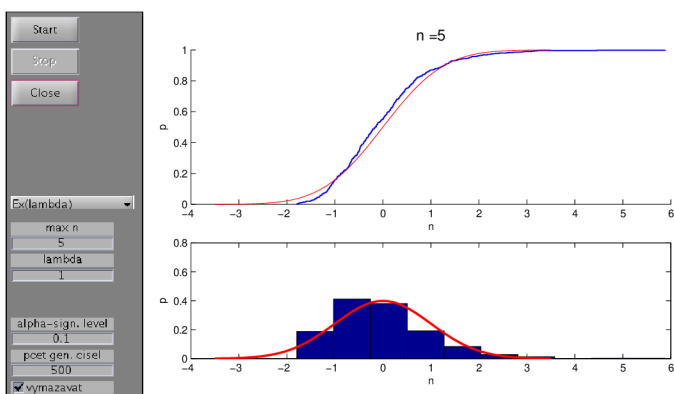


Obrázek 3.7: Centrální limitní věta pro  $Po(1)$  při  $n = 28$ .

Na obrázcích 3.8, 3.9 a 3.10 je ukázka pro  $X_i \sim Ex(1)$ . Hodnota  $n = 12$  byla opět získána K-S testem při  $\alpha = 0.1$ .

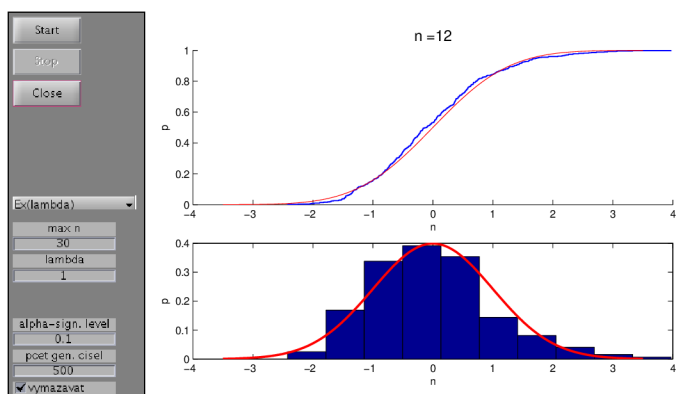


Obrázek 3.8: Centrální limitní věta pro  $Ex(1)$  při  $n = 1$ .



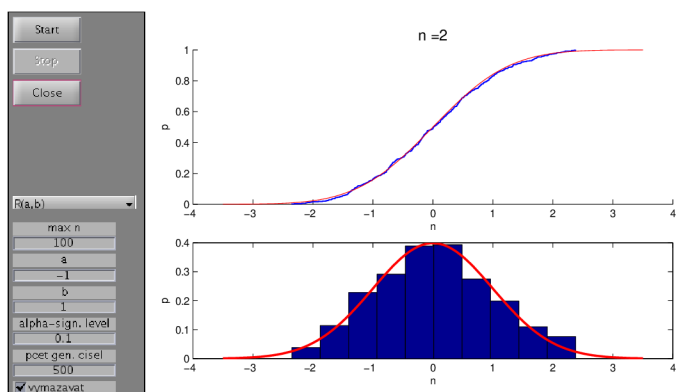
Obrázek 3.9: Centrální limitní věta pro  $Ex(1)$  při  $n = 5$ .

### 3.3 DEMONSTRACE CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTY



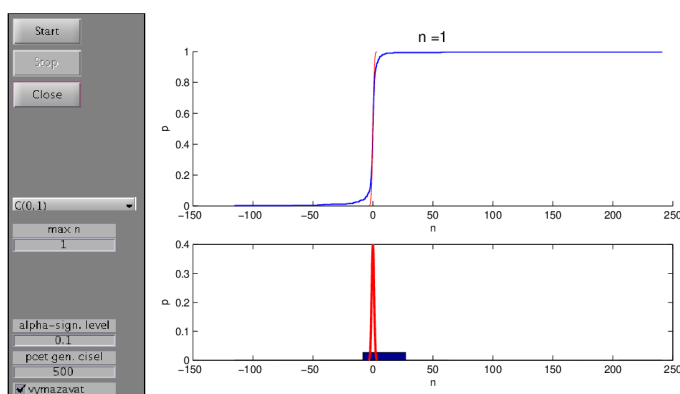
Obrázek 3.10: Centrální limitní věta pro  $Ex(1)$  při  $n = 12$ .

Na obrázku 3.11 je ukázka pro  $X_i \sim R(-1, 1)$ . Z hodnoty  $n = 2$ , která byla získána K-S testem při  $\alpha = 0.1$ , je patrné, že rychlost konvergence k rozdělení  $N(0, 1)$  je velká.

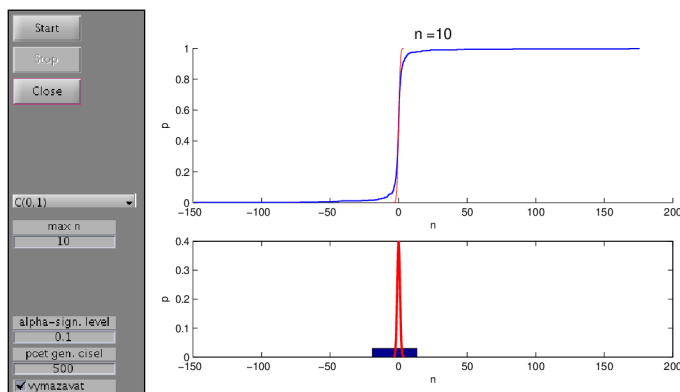
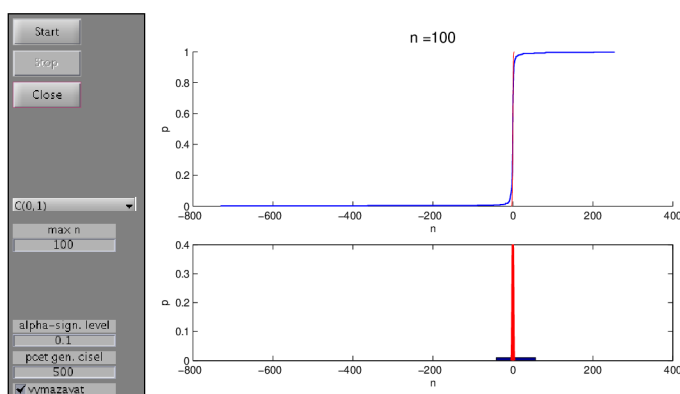


Obrázek 3.11: Centrální limitní věta pro  $R(-1, 1)$  při  $n = 2$ .

Neplatnost centrální limitní věty pro  $X_i \sim C(0, 1)$  demonstrují obrázky 3.12, 3.13 a 3.14.



Obrázek 3.12: Centrální limitní věta pro  $C(0, 1)$  při  $n = 1$ .

Obrázek 3.13: Centrální limitní věta pro  $C(0, 1)$  při  $n = 10$ .Obrázek 3.14: Centrální limitní věta pro  $C(0, 1)$  při  $n = 100$ .

Z provedených simulací, které byly zde ukázány na obrázcích se dá usoudit rychlost konvergence jednotlivých rozdělení k rozdělení  $N(0, 1)$ . Pro rozdělení  $R(-1, 1)$  stačilo volit  $n = 2$ , aby K-S test provedený pro 500 náhodných čísel  $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ , kde  $\mu$  je střední hodnota uvažovaného rozdělení a  $\sigma^2$  je rozptyl, nezamítl hypotézu, že jsou z rozdělení  $N(0, 1)$ . Rozdělení  $Ex(1)$  potřebovalo  $n=12$  a  $Po(1)$  muselo mít  $n = 28$ . Pro rozdělení  $C(0, 1)$  nenastala situace, že by byla hypotéza nezamítnuta.

## 3.4 Zajímavé příklady

### 3.4.1 Buffonova úloha

Mějme úlohu: V rovině jsou narýsovány rovnoběžky, jejichž vzdálenost je  $d$ . Na tuto rovinu náhodně házíme jehlu délky  $L$ ,  $L < d$ . Jaká je pravděpodobnost, že jehla přetne některou z rovnoběžek?

Tuto úlohu vymyslel v roce 1777 francouzský matematik Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon (\*1707-+1788).

Řešení úlohy je následující: Nechť  $x$  je vzdálenost středu jehly od nejbližší přímky a  $\varphi$  úhel, který svírá jehla s rovnoběžkami. Potom  $\Omega = \{(\varphi, x) : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \frac{d}{2}\}$  je prostor elementárních jevů. To, že jehla protne přímku, vyjádříme jevem  $A$ ,  $A =$

$\{(\varphi, x) \in \Omega : x \leq \frac{L}{2} \sin \varphi\}$ . Definice geometrické pravděpodobnosti udává, že  $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$ . Dosazením za  $m(A)$  a  $m(\Omega)$  se dostane

$$P(A) = \frac{\int_0^\pi (\frac{L}{2} \sin \varphi) d\varphi}{\pi \frac{d}{2}} = \frac{2L}{\pi d}.$$

Pravděpodobnost  $P(A)$  se dá odhadnout pomocí relativní četnosti  $P(A) \approx \frac{m}{n}$ , kde  $n$  je počet hodů jehlou a  $m$  je počet hodů v nichž jehla protla rovnoběžku. Z geometrické pravděpodobnosti jevu A a relativní četnosti tohoto jevu se dá odhadnout číslo  $\pi$ .

$$\frac{m}{n} \approx P(A) = \frac{2L}{\pi d} \Rightarrow \pi \approx \frac{2Ln}{md}$$

K tomuto vztahu se dá též dojít za použití ZVČ. Mějme náhodnou veličinu  $X \sim A(\theta)$ , kde  $EX = \theta = \frac{2L}{\pi d}$  udává pravděpodobnost s jakou jehla při dopadu protne rovnoběžku. V případě, že jehla protla rovnoběžku je  $X = 1$  v opačném  $X = 0$ . Nechť  $n$ -krát hodíme jehlou. Počet protnutí v  $n$  hodech je vyjádřen náhodnou veličinou  $Y \sim Bi(n, \theta)$ .  $Y = \sum_{i=1}^n X_i = m$ , kde  $X_i = \{0, 1\}$ . Relativní četnost při  $n$  hodech je  $\frac{m}{n}$ , kde  $m$  je počet protnutí. To lze vyjádřit  $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Aplikováním Chinčinovy věty na tento příklad dostaneme  $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{st.} \theta = \frac{2L}{\pi d}$ . Snadnou úpravou se dostává

$$\frac{2Ln}{dm} \xrightarrow{st.} \pi.$$

Tento vztah byl v minulosti mnoha autory použit k určení přibližné hodnoty  $\pi$ . Některé z nich včetně jejich výsledků uvádím pro názornost v následující tabulce, která byla převzata z knihy [3].

experimentátor	rok	počet hodů	zjištěná hodnota $\pi$
Volf	1850	5000	3,15
Smith	1859	3024	3,1553
Fuchs	1894	1120	3,1419
Lazzarini	1901	3408	3,1415929

Užitím simulace jsem dostal následující hodnoty:

počet hodů	100	1000	5000	10 000	50 000	100 000	500 000	1 000 000
zjištěná hodnota $\pi$	3,36	3,136	3,1432	3, 1372	3,1442	3,1445	3,1427	3,1416

Z porovnání hodnot zjištěných simulací a hodnot od experimentátorů v minulosti se zdá patrné, že výsledky, kterých dosáhl třeba Lazzariny, musely být značně náhodné. Z hodnot zjištěných simulací je patrné, že hodnota  $\pi$  se s rostoucím počtem hodů pomalu zpřesňuje. Přesnost aproximace  $\pi$  je u sta hodů jen na jednu platnou cifru u desetitisíce na jedno desetinné místo a u statisíce hodů se zlepšil na dvě desetinná místa. Naskytá se tedy otázka, jak moc velké štěstí měl Lazzariny při svém pokuse. Pro hodnotu  $\pi$ , kterou obdržel Lazzariny existuje pouze jedna hodnota počtu protnutí jehlou  $m$  při počtu hodů jehlou  $n = 3408$ . Pravděpodobnost  $P_n(m)$ , že Lazzariny při svém pokuse měl právě  $m$

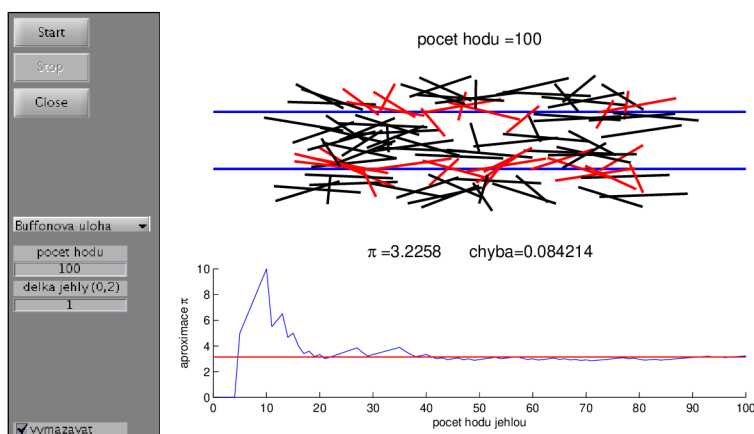
protnutí při  $n$  hodech se dá odhadnout za pomoci CLV. Jelikož při  $n$  hodech vyjadřuje počet protnutí náhodná veličina  $Y_n \sim Bi(n, \theta)$ , lze pro velká  $n$  užitím CLV obdržet, že  $Y_n$  má přibližně rozdělení  $N(n\theta, n\theta(1 - \theta))$ . Tedy

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n\theta(1 - \theta)}} e^{-\frac{(m-n\theta)^2}{2n\theta(1-\theta)}}.$$

Pro případ  $d = 2L$  a jelikož  $e^{-\frac{(m-n\theta)^2}{2n\theta(1-\theta)}} \leq 1$  dostáváme

$$P_n(m) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n\theta(1 - \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3408 \cdot \frac{1}{\pi}(1 - \frac{1}{\pi})}} \approx 0,015.$$

Z tohoto výsledku je patrné, že Lazariny ve svém pokuse musel mít značně velké štěstí.



Obrázek 3.15: Simulace Buffonovy úlohy.

### 3.4.2 Galtonova deska

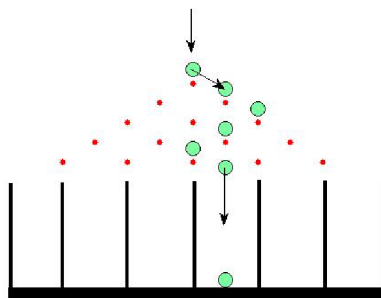
Galtonova deska je zařízení vynalezené anglickým vědcem Sirem Francisem Galtonem (\*1822-+1911) k demonstrování normálního rozdělení.

Nechť  $\theta$  představuje pravděpodobnost vychýlení koule vlevo a  $1 - \theta$  pravděpodobnost vychýlení vpravo při dopadu na klín. Mějme Galtonovu desku s  $n$  řadami klínů a nechme jí projít  $m$  koulí. Uvažujme náhodnou veličinu  $X_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$  a  $j = 1, \dots, n$ , která popisuje pohyb  $i$ -té koule po dopadu na klín v  $j$ -té řadě Galtonovy desky. Pro  $X_{ij}$  platí, že nabývá jen hodnot 0 a 1. Hodnoty 0 v případě, že koule pokračuje po nárazu na klín vlevo a 1, jestliže vpravo. Tedy  $X_{ij}$  má alternativní rozdělení  $X_{ij} \sim A(\theta)$ . Pro ideální kouli a ideální klín je  $\theta = 1 - \theta = \frac{1}{2}$ .

V případě Galtonovy desky s  $n$  řadami klínů představuje pohyb koule po desce  $n$  alternativních nezávislých pokusů. Mějme náhodnou veličinu  $Y_i$  udávající číslo přihrádky, do které dopadla  $i$ -tá koule po projití Galtonovy desky. Potom  $Y_i = \sum_{j=1}^n X_{ij}$ . Je známo, že součet nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením dává náhodnou veličinu s binomickým rozdělením. V našem případě  $Y_i \sim Bi(n, \theta)$ . Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny  $Y_i$  popisující dopadení koule do  $i$ -té přihrádky zleva je pro  $\theta = \frac{1}{2}$



$$p(i) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

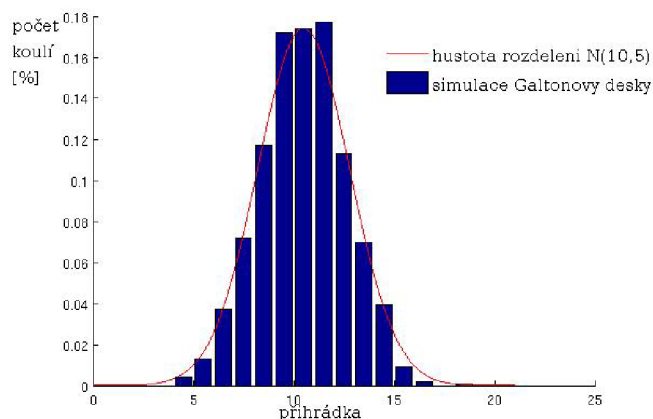


Obrázek 3.16: Galtonova deska.

Z věty 1.14 je známo, že náhodná veličina  $(Z_n = Y_i - n\theta)/(\sqrt{n\theta(1-\theta)})$  pro  $n \rightarrow \infty$  konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ , kde  $Y_i \sim Bi(n, \theta)$ . Úpravou vztahu pro  $Z_n$  se dostává

$$Y_i = \sqrt{n\theta(1-\theta)}Z_n + n\theta.$$

Odtud je již zřejmé, že  $Y_i \sim N(n\theta, n\theta(1-\theta))$  a pro  $\theta = \frac{1}{2}$  dostaneme  $Y_i \sim N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ , kde  $n$  je počet řad klínů.



Obrázek 3.17: Simulace Galtonovy desky s 20 řadami klínů pro 1000 koulí.

### 3.4.3 Bertrandův paradox

Uvažujme úlohu: K dané kružnici zvolíme náhodně tětivu a chceme vědět, jaká je pravděpodobnost, že tětiva bude delší než strana rovnostranného trojúhelníka vepsaného kružnici.

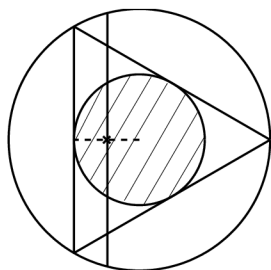
Tuto úlohu zformuloval v roce 1888 Joseph Bertrand ve své práci *Calcul des probabilités*.

Problémem této úlohy je náhodná volba tětivy. Ta se dá realizovat více způsoby. Tři z nich autor zveřejnil spolu s touto úlohou. To, že tato úloha byla pojmenována jako paradox, bylo způsobeno tím, že každý z těchto tří způsobů volby náhodné tětivy přináší

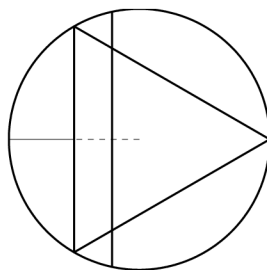
jiné řešení.

První pojetí. Poloha tětivy je určena polohou jejího středu. To se prakticky provádí náhodnou volbou středu tětivy uvnitř kružnice pomocí souřadnic  $x$  a  $y$  středu tětivy, přičemž střed základní kružnice je počátkem kartézské soustavy souřadnic. Při této volbě bude tětva delší než strana rovnostranného trojúhelníka vepsaného kružnici, když střed tětivy padne dovnitř kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Kružnice vepsaná trojúhelníku je soustředná se základní kružnicí a její poloměr je polovinou poloměru základní kružnice. Obsah plochy ohraničené základní kružnicí je  $\pi r^2$  a obsah plochy ohraničené kružnicí vepsanou trojúhelníku je  $\pi(\frac{r}{2})^2$ . Hledaná pravděpodobnost se rovná

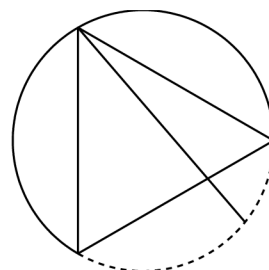
$$\frac{\pi(\frac{r}{2})^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$



Obrázek 3.18: První pojetí.



Obrázek 3.19: Druhé pojetí.



Obrázek 3.20: Třetí pojetí.

Druhé pojetí. Délka tětivy je určena vzdáleností jejího středu od středu kružnice. Střed tětivy je v polárních souřadnicích jednoznačně určen vzdáleností od počátku (střed kružnice) a úhlem svírajícím s předem zvolenou osou. Náhodná volba tětivy se realizuje náhodnou volbou středu tětivy, který volíme pomocí náhodné vzdálenosti od počátku a úhlu. Tětiva bude delší než strana pravidelného trojúhelníka, jestliže vzdálenost středu tětivy bude menší než polovina poloměru kružnice. Pravděpodobnost, že náhodně zvolená tětva bude delší než strana trojúhelníka, je

$$\frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}.$$

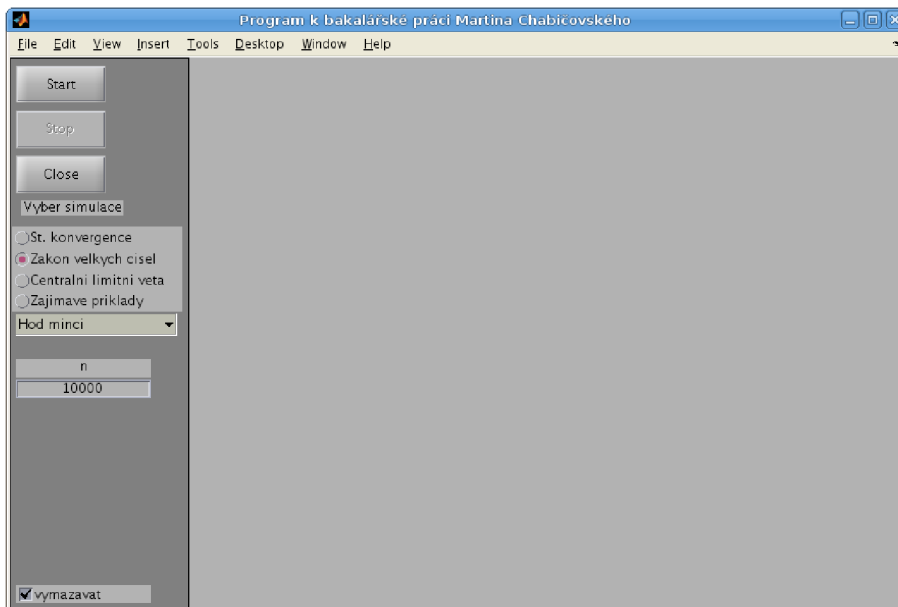
Třetí pojetí. Z důvodu symetrie můžeme předpokládat, že jeden koncový bod tětivy je pevný a je umístěn do vrcholu trojúhelníka. Druhý zvolíme náhodně na kružnici. Tětiva bude delší než strana trojúhelníka, když druhý bod padne do oblouku, který se nachází mezi ostatními dvěma vrcholy trojúhelníka. Délka tohoto oblouku kružnice je třetina délky celé kružnice. Pravděpodobnost, že tečna bude delší než strana trojúhelníka, je

$$\frac{\frac{1}{3}2\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{3}.$$

Tyto tři způsoby volby náhodné tětivy jsem též zprogramoval a jejich simulaci si lze spustit v příloženém programu.

## 4 Popis programu

V této kapitole popisují stručně možnosti a ovládání přiloženého programu. Po zadání příkazu `bcprogram` do příkazového řádku v matlabu se spustí program a na obrazovce se objeví okno.



V pravém rohu jsou umístěna pod sebou tři tlačítka: Start, Stop, Close. Start slouží ke spuštění vybrané simulace. Stop ukončí právě probíhající simulaci a tlačítko Close ukončí celý program. Pod tlačítkem Close je umístěn nápis Výběr simulace. Dále následuje skupina tlačítek, která slouží k výběru jednoho ze čtyř typů simulací: Stochastická konvergence, Zákon velkých čísel, Centrální limitní věta a Zajímavé příklady. Pod touto skupinou tlačítek je rozklikávací nabídka simulací podle zvoleného typu.

- Stochastická konvergence

Na výběr jsou tyto simulace: Hg k Bi cdf, Hg k Bi pdf, Bi k Po cdf, Bi k Po pdf. Zde se jedná vždy o ukázkou konvergence pravděpodobnostní (pdf) či distribuční (cdf) funkce prvního rozdělení k druhému. Nápis Hg k Bi cdf tedy označuje ukázkou jak distribuční funkce hypergeometrického rozdělení konverguje k binomickému rozdělení.

Při volbě Hg k Bi se pod tímto oknem zobrazí pole na zadání vstupních parametrů:  $\max N$ ,  $n$  a  $\theta$ . To jsou parametry rozdělení  $Bi(n, \theta)$  a  $Hg(N, M, n)$ , kde  $\max N$  označuje hodnotu  $N$  při níž se ukázkou zastaví. Parametr  $M$  je určován v průběhu vykreslování ze vztahu  $M = \theta \cdot N$ , kde  $N = 1, \dots, \max N$ .

Při volbě Bi k Po se zobrazí pole na zadání vstupních parametrů:  $\max N$  a  $\lambda$ . To jsou parametry rozdělení  $Bi(n, \theta)$  a  $Po(\lambda)$ , kde  $\max N$  označuje hodnotu  $n$ , při níž se ukázkou zastaví. Parametr  $\theta$  je určován v průběhu vykreslování ze vztahu  $\theta = \lambda / n$ , kde  $n = 1, \dots, \max N$ .

- Zákon velkých čísel

V této nabídce jsou na výběr tyto simulace: Hod mincí, Hod kostkou, Pi a Cauchy.

Pod touto nabídkou je k dispozici volba parametru  $n$ , který označuje počet vygenerovaných náhodných čísel, při kterém je simulace ukončena.

- Centrální limitní věta

Zde jsou na výběr tyto simulace:  $Po(\lambda)$ ,  $Ex(\lambda)$ ,  $B(a,b)$ ,  $R(a,b)$ ,  $LN(\mu,\sigma)$ ,  $Bi(n,\theta)$ ,  $N(0,1)$ ,  $F(a,b)$  a  $C(0,1)$ . Pro tyto simulace jsou nastavitelné parametry: max  $n$ , parametry zvoleného rozdělení,  $\alpha$  a počet generovaných čísel. Parametr max  $n$  vychází ze vztahu pro centrální limitní větu

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

a označuje  $n$ , při kterém se nejpozději zastaví simulace. Parametr  $\alpha$  značí hladinu významnosti v K-S testu, který při každém  $n$  ( $n = 1, \dots, \max n$ ) testuje veličiny  $Y$  zda jsou z rozdělení  $N(0,1)$  na hladině významnosti  $\alpha$ . Pokud test nezamítne hypotézu, že náhodné veličiny  $Y$  jsou z  $N(0,1)$  je ukončena simulace. Počet generovaných čísel označuje počet  $Y$ , pro který je vykreslen histogram, empirická distribuční funkce a dělán test.

- Zajímavé příklady Na výběr jsou: Galtonova deska, Buffonova úloha, Bertrandův paradox 1, Bertrandův paradox 2 a Bertrandův paradox 3. U Galtonovy desky je na výběr volba počtu řad Galtonovy desky a počet koulí, který se nechá projít Galtonovou deskou. Pro Buffonovu úlohu se volí počet hodů jehlou a délka jehly. Délka jehly se volí v rozsahu od 0 do 2, kde 2 označuje vzdálenost rovnoběžek. Pro simulace Bertrandova paradoxu se volí jen počet náhodných voleb tětív, přičemž označení simulací Bertrandova paradoxu odpovídá pojetí volby tětivy z kapitoly 3.4.3.

## 5 Závěr

Cílem práce bylo popsat stochastickou konvergenci, zákony velkých čísel, centrální limitní větu a použití vyložené teorie demonstrovat na vybraných příkladech a grafických simulacích. Popisu vybrané teorie jsem věnoval kapitulu Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti. Zde je navíc definována charakteristická funkce, která byla užita k důkazu centrální limitní věty. Demonstraci této teorie jsem věnoval následující kapitulu, kde jsou uvedeny i některé zajímavé příklady, jakož jsou Galtonova deska, Buffonova úloha a Bertrandův paradox, které slouží k demonstrování této teorie. Všechny mnou vytvořené grafické simulace jsem vložil do jediného programu, kde se dají pohodlně spustit. Popisu tohoto programu jsem pak věnoval poslední kapitulu.

# Literatura

- [1] Anděl, J.: *Matematická statistika*. Praha: SNTL/ALFA, 1978. 346 p. ISBN 04-017-78.
- [2] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*. Praha: MATFYZPRESS, 2005 358 p. ISBN 80-86732-40-1.
- [3] Gnedenko, B.V.: *The theory of probability*. Moscow: Mir Publishers , 1978 392 p.
- [4] Karpíšek, Z.: *Matematika IV : statistika a pravděpodobnost*. Brno: CERM, 2003 170 p. ISBN 80-214-2522-9.
- [5] Rényi, A.: *Teorie pravděpodobnosti*. Praha: ACADEMIA, 1972 512 p. ISBN 104-21-825.

## 6 Seznam použitých zkratek a symbolů

$EX$	střední hodnota
$DX$	rozptyl
$\psi$	charakteristická funkce
ZVČ	zákon velkých čísel
SIZVČ	slabý zákon velkých čísel
CLV	centrální limitní věta
st.	stochastická konvergence
$p(x)$	pravděpodobnostní funkce
$f(x)$	hustota
$F(x)$	distribuční funkce
$\Phi(x)$	distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$

# 7 Seznam příloh

- přiložené CD

Toto CD obsahuje:

- tuto bakalářskou práci ve formátu pdf
- program pro matlab `bcprogram.m`