UNIVERZITA PALACKÉHO

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY

HISTORIE MATEMATIKY VE VZTAHU K VYUČOVÁNÍ MATEMATIKY NA 2. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Diplomová práce

Autor práce:
Ivana Písková
Učitelství pro 2 stupeň ZŠ
Aprobace: M – Rv

Vedoucí práce:
Mgr. Jitka Hodaňová, Ph. D.

Olomouc 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci vypracovala samostatně. Všechny zdroje, prameny a literaturu, z nichž jsem při zpracování diplomové práce čerpala, jsou citovány a uvedeny v seznamu použité literatury.

Souhlasím, aby práce byla uložena na Univerzitě Palackého v knihovně Pedagogické fakulty a zpřístupněna ke studijním účelům.

V Olomouci dne 29. března 2010

………………………

podpis

Poděkování

Ráda bych poděkoval Mgr. Jitce Hodaňové, Ph. D. za odborné vedení diplomové práce, za cenné rady, připomínky, podněty a čas strávený při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu podporovali.

Obsah

Úvod

„Matematika je královnou všech věd, jejím milencem je pravda a prostota a průzračnost jsou jejím oděvem. Matematika, která tolik prospěla společnosti, vědám a umění, stane se nakonec vůdcem lidského rozumu ve všem poznání.“

Jan Władysław Śniadecki

Matematika je jednou z nejstarších věd. Její poznatky se utvářely a formovaly od nejranějších dob existence lidstva.

Téma své diplomové práce jsem si vybrala proto, že mě historie matematiky velmi zajímá. Matematika mě vždy bavila nejvíce ze všech výukových předmětů, a domnívám se, že je důležité znát její historii.

Matematika byla vždy jedním z prvních vyučovacích předmětů ve školách. Stala se však málo oblíbenou disciplínou, protože se ji žáci učili bez hlubšího pochopení. I dnes patří matematika k méně oblíbeným předmětům na 2. stupni základní školy. Myslím si, že žáky je proto nutné lépe motivovat k práci. Historie této vědy a řešení historických úloh by mohlo posloužit jako dobrá motivace pro žáky.

Cílem diplomové práce je motivovat žáky prostřednictvím historických úloh tak, aby se pro žáky výuka matematiky stala přístupnější. Práce má dvě části - teoretickou a praktickou.

V teoretické části je zpracován stručný přehled dějin matematiky ve čtyřech hlavních etapách. Tato období zahrnují vývoj matematiky od neolitu až po současnost. V práci jsou zahrnuty pouze významné události z historie matematiky.

Praktická část obsahuje přehled historických úloh, které se vztahují k výuce matematiky na 2. stupni základní školy. Úlohy jsou řazeny dle procvičovaného učiva. Několik historických úloh je dále podrobně řešeno.

Čtyři vybrané historické úlohy byly předloženy žákům 2. stupně základní školy. Svůj postoj k řešení historických úloh sdělili v krátkém dotazníku.

Dějiny matematiky – etapy ve vývoji matematiky

Současná historiografie matematiky rozlišuje čtyři vývojové etapy:

1. *První etapa – Období tvorby základních elementárních matematických pojmů*
   (od prehistorické doby do 6. století př. n. l.)
2. *Druhá etapa – Období matematiky konstantních veličin*
   a. Období vytváření deduktivní matematiky
      (Řecko od 6. století př. n. l. do 4. století n. l.)
   b. Období elementární matematiky ve středověku
      (završené v Evropě na konci 19. století)
3. *Třetí etapa – Období matematiky proměnných veličin*
   (od 17. století do začátku 19. století)
4. *Čtvrtá etapa – Období matematiky zobecněných prostorových a kvantitativních vztahů*
   (od první poloviny 19. století do současnosti)

Dnes uvažujeme, zda se od druhé poloviny 20. století nevytváří další období, které se sice charakteristice 4. etapy dostatečně nevymyká, jde-li o předmět matematiky, ale v metodách je už značně ovlivněno informatikou, kybernetikou, teorií her apod.

Obrázek č. 1.1:

Místa významná pro vývoj matematiky ve starověku[1]

1. Řím: *Agrimensoři, Vitruvius*

2. Syrakusy: *Archimédes*

3. Elea: *Zenon*

4. Tarent: *Pythagoras*

5. Kyrene: *Eratosthénes*

6. Athény: *Platón, Ptolemaios*

7. Strageir*a: Aristoteles*

8. Chios: *Hippokrates*

9. Samos: *Pythagoras*

10. Knidos: *Eudoxos*

11. Milet: *Thales*

12. Nicaia: *Hipparchos*

13. Perge: *Apollónios*

14. Alexandrie: *Euklides, Eratosthénes, Apollonios, Heron, Ptolemaios, Diofantos, Pappos*

15. Kroton: *Pythagoras*

[1] BALADA, F., *Z dějin elementární matematiky*. Str. 7.

1 Období tvorby základních elementárních matematických pojmů

První vývojové období matematiky je nejdelší etapou trvající tisíciletí. Zahrnuje prehistorické počátky počítání a matematiku tzv. vodních říší. Patří sem starý Egypt, Mezopotámie, Indie a Čína, kde panovaly příznivé klimatické podmínky.

Matematiky první etapy byla především matematikou praktickou, empirickou a receptivní. Její poznatky přecházely z generace na generaci. Z důvodů různých katastrof byly někdy poznatky objevovány znovu a znovu, protože ti, kteří je znali, zemřeli a neměli možnost je předat. Později po objevení hieroglyfů bylo možné poznatky zaznamenat a uchovat. Během stálého vývoje se vytvořila skupina, která se zabývala počítáním a měřením.

1. 1 Prehistorické počátky počítání

První představy o čísle a tvaru pochází ze starší doby kamenné - paleolitu. V období čtvrtohor začíná člověk získávat pomocí nástrojů prostředky k obživě. Ohodnocování předmětů a počítání s nimi začalo se vznikem nejjednodušší hospodářské činnosti. Názvy čísel - číslovky měly zpočátku spíše kvalitativní než kvantitativní charakter. Rozlišovalo se pouze mezi jedním, dvěma a více.

Prehistorické počátky zahrnují etapu, během které se vytvářel člověk dnešního typu se svou společenskou organizací, řečí, dělbou práce a celou kulturou. O tomto období nemáme téměř žádné hmotné doklady, proto se musíme obrátit k nepřímým pramenům, které nám mohou přispět k vytváření obrazu prehistorického vývoje matematiky.

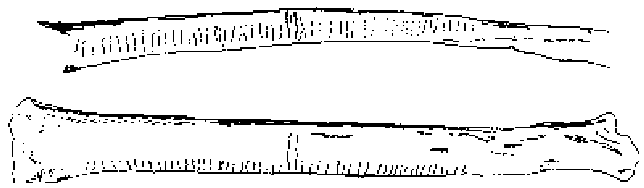
- Způsoby počítání u etnických skupin na nízké úrovni kulturního vývoje.
- Studium jazyk především ve vztahu k matematickým pojmům a jeho srovnání se současnými i starými jazyky.
- Různé lidové počtářské praktiky v různých oblastech světa.
- Postupné zmocňování kvantit jedincem a zmocňováním lidstvem.
- Nálezy z prehistorie (vrubovky apod.).

Věstonická vrubovka

Za nejstarší přímý doklad matematické činnosti lidí bývá někdy považována tzv. věstonická vrubovka, která byla nalezena profesorem Karlem Absolónem dne 19. 8. 1936. Jedná se o 18 cm dlouhou vřetenní kost mladého vlka s 55 vyrytými zářezy. Od dvou dvakrát tak delších zářezů, ležících uvnitř řady, je jich uspořádáno na jednu stranu (bazálně) 25 a na druhou stranu (terminálně) je 30 zářezů.

Názor profesora Absolóna byl takový, že zářezy představují násobky pěti, ale při pohledu na obrázek je zřejmé, že jen některé skupiny jsou pětičlenné. Nemůžeme z toho tedy vyvodit, že lovci mamutů na jižní Moravě již znali pětkovou soustavu a uměli počítat do 30 nebo dokonce do 55. Vrubovku můžeme považovat za počitadlo, které dávalo možnost porovnávat veliká množství, aniž je uměli dávní lidé spočítat.

Obrázek č. 1. 2:



Věstonická vrubovka (stáří 28. tisíc let)

Od té doby bylo objeveno ještě několik nálezů: Kost s vruby od osady Ishango u Edwardova jezera v Zaire, která je datována do doby mezi 9 až 6,5 tisíci léty př. n. l. Později nalezená paviání kost s vruby v hraniční jeskyni v pohoří Lemombo mezi Jihoafrickou republikou a Svazijskem překonala věstonickou vrubovku svým stářím odhadovaným na 35 tisíc let. *„Vrubovky, rabuše, rováše, počítací hůlky patřily mezi početní instrumenty prostých negramotných lidí i v Evropě až do 20. století, a v některých oblastech světa se používají dodnes.“* [2]

Číslovky

D. E. Smith ukázal na základě rozboru jazyků australských kmenů, že mnoho z nich nemá číslovku pro počty větší než 4. Převážně rozlišují jen dvě číslovky, číslo 3 vzniká součtem 2 + 1, číslo 4 sečtením 2 + 2. Větší počty vyjadřují neurčitě číslovkou „mnoho“, „velmi“ apod.

Abiponové žijící v jižní Americe mají jen dvě číslovky *initara* (1) a *inioka* (2), číslo 3 vyjadřují *inioka-initara*, ale 4 nazývají *„prsty pštrosa“*, 5 *„prsty ruky“*, 10 *„prsty obou rukou“* a 20 *„prsty rukou i nohou“*.

---

[2] J. FOLTA: *Dějiny matematiky 1.* Str. 38.

Formy dvacítkových soustav byly nalezeny v Mexiku u Mayů i v Evropě u Keltů. Dvacítka byla vyjádřením počtu prstů na rukou i nohou jednoho člověka. Při dopočítání 20 prstů byl počtář nucen udělat vrub na holi pro zapamatování napočítané dvacítky. V Grónsku se používá pro dvacítku *„člověk“*, pro 40 *„dva lidé“*.

Operace **násobení** spadá do doby, kdy se například číslo 20 přestalo vyjadřovat jako 10 + 10, ale jako 2 x 10. Začátky **dělení** pak do doby, kdy se číslo 10 začalo vyjadřovat jako *„polovina těla"*. Zlomky se však vytvářely velmi zřídka.

Zeměměřictví

Mezi důležité činnosti člověka patřilo měření délek a zjišťování objemů různých těles. Měrné jednotky se často odvozovaly z částí lidského těla. Tímto způsobem vznikly například jednotky, jako jsou palce (= šířka prstu cca 1,8 cm), dlaň (= asi 4 palce), píď (= vzdálenost palce od co nejvíce oddáleného konce ukazováčku nebo prostředníčku), loket (cca 52,3 cm), stopy a sáh (= vzdálenost konců obou rukou v rozpažení) nebo půlsáh. Při stavbách domů se začaly nalézat způsoby jak stavět podle přímky a jak vytyčovat pravé úhly.

Geometrie

„Počátky geometrického myšlení můžeme spatřovat až v době, kdy si lidé uvědomili jednotlivé vlastnosti pozorovaných geometrických útvarů a snažili se tyto vlastnosti cílevědomě využívat pro některé pracovní úkony.“ [3] Příroda člověku nabízí množství motivů, jejichž podstatnou vlastností je geometrický útvar, který si stačilo uvědomit a cílevědomě využít pro různé pracovní úkony. Postupně vznikla myšlenka o vlastnostech útvarů – oblost, počet vrcholů apod.

Nejstarší doklady o geometrii se dochovaly na keramice, kterou lidé zdobili ornamenty. První geometrické útvary, se kterými se člověk seznámil, byly nejspíše kruh, kružnice, úsečka (kruhový tvar Měsíce, Slunce, rovný prut), objevovaly se symboly vírů a hvězdic, kde jejich pravidelnost naznačuje symetrii a shodnost jednotlivých částí.

Geometrické úvahy se objevily všude, kde bylo nutné měření nebo porovnávání vzdáleností, obsahů, objemů, vytyčování směrů, při stavbě příbytků a jiných staveb.

[3] FOLTA, J., ŠEDIVÝ, J.: *Světonázorové problémy matematiky 1*. Str. 29.

Nejstarší historické doklady geometrických úvah nacházíme v egyptských papyrech z počátku 2. tisíciletí př. n. l.

Mnohé matematické poznatky vycházely z astronomie. Již primitivní kmeny dokázaly určitým způsobem dělit čas. Setkáváme se u nich i s poznatky o pohybu Slunce, Měsíce a hvězd. S rozšířením zemědělství a obchodu dosáhly tyto znalosti vědečtějšího charakteru. Spojováním vegetačních změn s periodickými změnami Měsíce se začíná užívat lunární kalendář. Primitivní národy pozorovaly také slunovraty, východy souhvězdí při stmívání a používaly souhvězdí jako vodítek při mořeplavbě.

Stavitelství

Vytyčování staveb a stavební konstrukce vyžadovala značné zkušenosti a přípravu. Než se začalo stavět, řešilo se vše náčrtky již na konci 3 tisíciletí př. n. l. V Egyptě měli snahu o vyjádření trojrozměrných tvarů v dvojrozměrném obraze.

Zemědělství

Zemědělství související s geometrií bylo jedním z hlavních zdrojů obživy. V Egyptě nilské zátopy zúrodňovaly pole, ale současně smazávaly meze. Půda se musela znovu a znovu vyměřovat a přidělovat rolníkům, odhadovat množství osiva i výnos po sklizni. Egyptské zemědělství přispělo i ke vzniku první geometrické terminologie. Základním tvarem pole byl pravoúhelník *„čtyřrohé pole“*, ale také kruh *„oblé pole“*, trojúhelník *„zašpičatělé pole“*, lichoběžník *„odseknuté pole“*. Geometrické tvary, vztahy mezi geometrickými objekty, vlastnosti útvarů i otázky jejich „proměřování“ vyvstávaly z nejrůznějších praktických činností lidí.

1. 2 Matematika tzv. vodních říší

Navazuje na prehistorii, patří sem státní útvary vzniklé v klimaticky příznivých podmínkách vhodných pro celkový rozvoj. Do tzv. vodních říší spadá Egypt, útvary na území Mezopotámie a v povodí velkých řek v Indii a Číně v 5. – 4. tisíciletí př. n. l.

Předmětem práce matematiků té doby, která ukazovala už značně vysokou úroveň znalostí, byly pojmy – číslo, geometrický útvar, primitivní numerace, číselné posloupnosti, elementární metody a výpočty měr útvarů. Množství a rozsah matematických znalostí si žádal roztřízení úloh a předávání poznatků.

1. 2. 1 Egypt

Egyptští panovníci si nechávali stavět honosné hrobky ve tvaru pyramid, které byly velmi náročné na zručnost stavitelů, stavební techniku, jednoduchá měření i počítání s velkými čísly. Nejstarší egyptský záznam čísla z roku 3 300 př. n. l. je o 5 století starší jako pyramida. Byl vytesán do kamene a oslavuje válečnou kořist. Více o matematice nám ale řeknou staré papyry.

První vládnoucí dynastie začaly sčítat lid, pozemky, dobytek a zlato jako základ vybíraní daní pro panovníka. Impulsem pro vytvoření astronomie bylo zemědělství, které vyžadovalo přesné výpočty nilských záplav. Od 4. tisíciletí př. n. l. užívali v Egyptě kalendář. První dochované jméno egyptského matematika je **Imhotep**.

Egyptská naleziště poskytla dva zachované dokumenty, vzácné papyry s matematickým obsahem, které vypovídají o tehdejších způsobech prováděných elementárních početních operací.

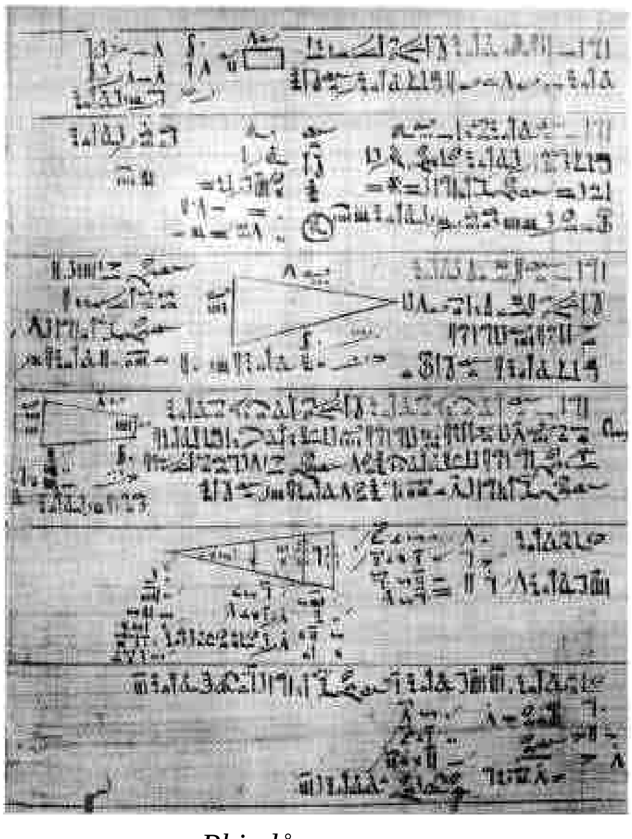
Londýnský papyrus (534 cm x 33 cm)

Historikové datují svitek do 18. století př. n. l. Obsahuje 84 pestrých úloh s méně důkladným řešením. Zabývají se sklony pyramid, výpočty objemu sýpek různého tvaru apod.

Písař Ahmóse jej opsal podle starších vzorů, proto bývá nazýván Ahmósova početnice.

Papyrus koupil bohatý Skot A. H. Rhind v egyptských Thébách v roce 1858. Po jeho smrti byl předán Britskému muzeu v Londýně, část se však nachází v New Yourku.

Obrázek č. 1. 3:

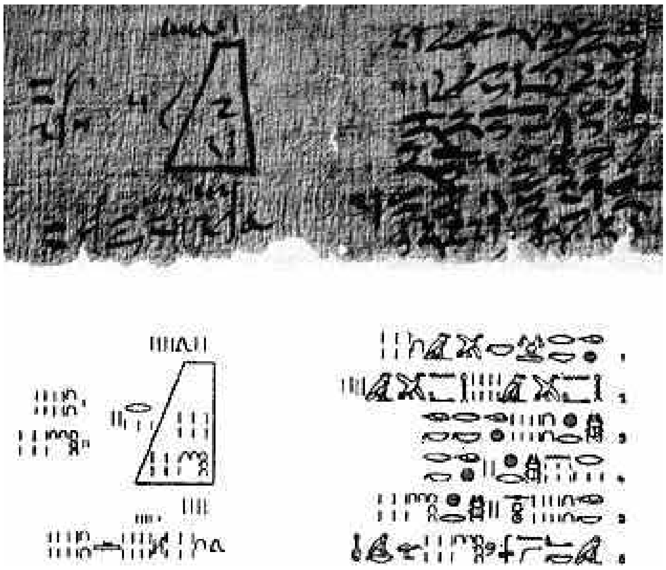


Rhindův papyrus

Moskevský papyrus (534 cm x 8 cm)

Pochází z 19. stol. př. n. l. a je značně poškozen, čitelných je 25 úloh s řešením. Týkají se výpočtu neznámé veličiny „aha“, obsahů obrazců a množství obilí nezbytného k upečení potřebného počtu chleba nebo k uvaření piva. Úlohy mají jednotnou formu zápisu textu a řešení. Ruský šlechtic V. S. Golešničov, a profesor egyptologie na univerzitě v Káhiře získal v roce 1893 papyrus, jenž odeslal do moskevského muzea.

Obrázek č. 1. 4:

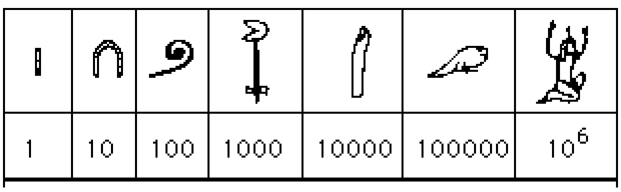


Úloha z Moskevského papyru zabývající se výpočtem objemu komolé pyramidy. (Hieratický originál, pod ním hieroglyfický přepis)

Egyptská numerace

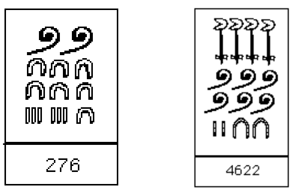
„*Materiál záznamů, zdi chrámů a hrobů, papyry uložené v suchých skalních hrobech svou trvanlivostí přečkaly věky a dovolují nám učiniti si obraz o výši egyptské kultury*“[4] Papyry jsou přímým svědectvím, jak se počítalo a jak se výpočty zapisovaly. Egyptský způsob zápisu vycházel z nepoziční desítkové číselné soustavy. Egypťané vytvořili znak (hieroglyf) pro každou mocninu deseti, číslice 1 - 9 se zapisovaly čárkami. Čísla stejných řádů byla psána pomocí sčítacího principu, ale symbol plusu se nezapisoval, znaky se kladly plošně vedle sebe. Záporná čísla, ani nula ještě neexistovali.

Obrázek č. 1. 5:



Egyptské hieroglyfy

Obrázek č. 1. 6:



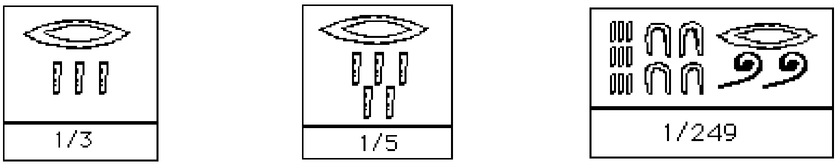
Zápis čísel hieroglyfy

[4] VETTER, Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury.* Str. 63.

Egyptští matematici pracovali už i se **zlomky** typu $\frac{1}{n}$ (kmenovými), které značíme $\overline{n}$. Každý podíl musel být tedy vyjádřen součtem různých zlomků tohoto tvaru. Zřejmě proto byl v Rhindově papyru tabelován podíl $\frac{2}{x}$ pro *lichá x = 3, …, 101* a podíl $\frac{y}{10}$ pro *y = 2, …, 9*. Při tvorbě tabulek matematici také objevili identitu $2 \times \overline{n} = \frac{2}{n}$.

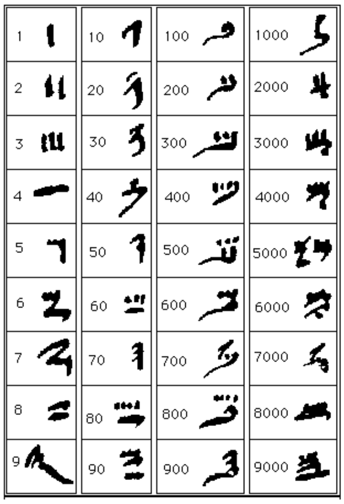
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \qquad\qquad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Obrázek č. 1. 7:



Zápis zlomků hieroglyfy

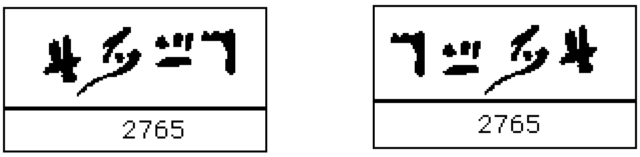
Obrázek č. 1. 8:



Hieratické písmo

Při rychlém zapisování vznikaly znaky zkrácených a zjednodušených forem. Postupem času se tak přešlo na písmo hieratické, užívané především kněžími.

Obrázek č. 1. 9:



Dva možné zápisy čísla hieraticky

Početní výkony **sčítání** a **odčítání** byly snadné. Vždy se odčítalo menší číslo od většího. Tyto operace měly speciální symboly původně představující směr chůze a prováděly se na počitadlech.

Násobení se realizovalo z tradice dávných předků pomocí *„zdvojování“* a sčítání, využívalo se speciálního schématu.

37 . 87 = 3 219		
/	1	87
	2	174
/	4	348
	8	696
	16	1 392
/	32	2 784
	37	3 219

V prvním řádku se číslu 1 přiřadil větší činitel. Každý následující řádek byl dvojnásobkem řádku předcházejícího a to v obou sloupcích. Konec zdvojování signalizoval levý sloupec, který nesměl převýšit menšího z činitelů. V levém sloupci se pak označila čísla, jejichž součet se rovnal menšímu činiteli. Součin byl výsledkem součtu čísel z pravého sloupce v označených řádcích.

Dělení bylo převáděno na násobení – kolikrát 14 je 175? Číslu 1 se přiřadil dělitel, zdvojování končí u výsledku nejblíže nižšího dělenci a následuje půlení. V pravém sloupci vybereme a označíme vhodná čísla, která nám svým součtem dají hodnotu dělence. Hledaný podíl je součet čísel z levého sloupce v označených řádcích.

175 : 14 = 12, 5

	1	14
	2	28
/	4	56
/	8	112
/	$\overline{2}$	7
4 8	$\overline{2}$	175

Druhá odmocnina se určovala pomocí vzorce: $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$. Hledalo se přirozené číslo *a*, jehož druhá mocnina byla nejblíže nižší k číslu *n*, dále se podíl vyjadřoval pomoci kmenných zlomků. Mladší papyry obsahují úlohy vedoucí na lineární a kvadratické **rovnice**. Byly zřejmě do Egypta přeneseny z Mezopotámie.

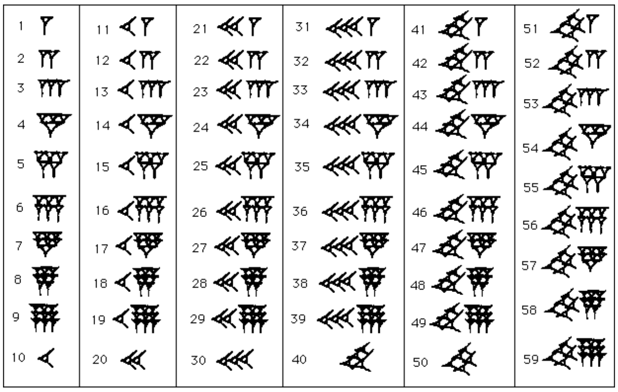
Egypt byl kolébkou měřičského umění. Znali výpočet obsahu čtyřúhelníku, trojúhelníku, lichoběžníku, kruhu. „Egyptská hodnota“ čísla π: $\frac{256}{81} = 3,1605$. Počítali i objem krychle, kvádru, válce a nejzajímavější objev byl, že egyptští písaři znali výpočet **objemu** komolého čtyřbokého jehlanu (pyramidy). Orientace egyptských pyramid podle světových stran je obdivuhodná. Například Cheopsova pyramida má od nich odchylku jen 3´. Tato pyramida měla téměř dokonalou čtvercovou základnu. Praktická geometrie byla v Egyptě na značné výši.

Astronomie byla budována na poznatcích získaných dlouhodobým pozorováním oblohy a později na znalostech skutečných pohybů Země a Měsíce. Cílem bylo propojit délky dne, měsíce a roku v jeden celek - **kalendář**. Užívali nejdříve *lunární* kalendář a později patrně jako první národ kalendář *solární*, kde měl rok 365 dnů, 12 měsíců po 30 dnech a jednotlivé roky oddělovalo 5 svátečních dnů. Rok byl rozdělen na 3 období odpovídající přirozenému rytmu zemědělských prací v Egyptě.

1. 2. 2 Mezopotámie

Starověká Mezopotámie bylo území mezi řekami Eufrat a Tigrid v Asii. V této oblasti s příznivými životními podmínkami vznikla jedna z prvních vyspělých civilizací – na severu říše Akkadu, na jihu říše Sumeru. Ve 4 tisíciletí př. n. l. vybudovali zavlažovací a odvodňovací kanály, tím vzrostla sklizeň a to vedlo k nutnosti budovat opevnění a ke vzniku prvních měst. Rozvoj si vynutil složité společenské a politické struktury, rodily se první zákony a vznikalo jedno z nejstarších písem. Původní sumerské písmo bylo obrázkové, postupně se přešlo na písmo klínové. Rozrůstalo se zemědělství, obchod, řemesla a společnost potřebovala matematiku.

Obrázek č. 1. 10:



Standardní symbolika pro čísla 1 – 59

Na přelomu 3. a 2. tisíciletí př. n. l. vznikla Starobabylónská říše, jejíž vládnoucí vrstva přijala klínové písmo. Právě z tohoto období pochází nejvíce matematických textů a to hlavně díky způsobu zápisu. Rytí rákosovým stéblem (rydlem) do hliněných tabulek, které byly ukládány v knihovnách a archívech.

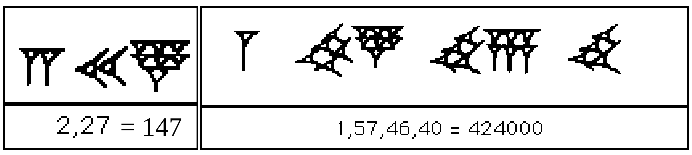
S rozvojem písma souvisí vzdělávání a vznik škol, které byly zakládány při větších chrámech a palácích. *„Školu (dům tabulek) vedl ředitel (školní nebo velký otec); výuku zajišťovali učitelé a pomocní učitelé (velcí bratři), kteří připravovali tabulky pro žáky (synové domu tabulek) kontrolovali jejich úkoly a prověřovali jejich znalosti.“* [5] Ve škole se učilo počítání, čtení, psaní, kreslení a sumerský jazyk. Výuka byla založena na memorování, opakování a opisování. Vyžadovala velkou inteligenci, trpělivost, pečlivost a byla dosti nákladná. Kdo uměl číst a psát byl považován za výjimečného.

Sumerský nepoziční zápis čísel vydržel do poloviny 3. tisíciletí př. n. l., postupně byl nahrazován akkadským zápisem založeným na **poziční šedesátkové soustavě,** která byla ve srovnání s nepozičními soustavami velmi důmyslná. Čísla byla zapisována do řady zleva doprava od nejvyšších řádů k nejnižším. Pokud se stejný symbol opakoval více než třikrát, byl seskupován po třech nebo po čtyřech.

Pozůstatky šedesátkové soustavy jsou dodnes zachovány v měření času a úhlů. Babyloňanům se podařilo rozložit kruh na 6 stejných dílů po 60 stupních, tedy rozdělení kruhu na 360 stupňů, každý stupeň má 60 minut, každá minuta 60 sekund.

Příklad zápisu čísel 147, 21 609 a 424 000 v poziční šedesátkové soustavě užívané v Mezopotámii.

Obrázek č. 1. 11:



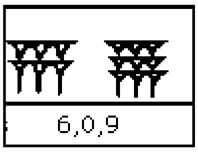
Zápis čísel klínovým písmem

[5] BEČVÁŘ, J., BEČVÁŘOVÁ, M., VYMAZALOVÁ H., *Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie.* Str. 192.

Což značí $2 \times 60 + 27, \quad 1 \times 60^3 + 57 \times 60^2 + 46 \times 60 + 40.$

Velkým problémem popsaného pozičního systému byl chybějící znak pro **nulu**. Vznikaly tak zmatky při rozlišování řádů. Například číslo 21 609.

Obrázek č. 1. 12:



Což lze chápat jako

$$6 \times 60 + 9$$
$$6 \times 60^2 + 0 \times 60 + 9$$
$$6 \times 60^3 + 9 \times 60^2$$

Zápis čísla 21 609

Potřeba nuly se však objevila až při sestavování astronomických tabulek, kde při jednoznačném výkladu bylo nutno čísla rychle číst. Chybějící řád byl tedy vyznačován malou mezerou, pokud chybělo řádů více, docházelo opět k chybám. V 8. století př. n. l. se začal pro chybějící řád využívat znak, který však ještě nebyl standardizován.

Postupy **sčítání** a **odčítání** se nezachovaly. Pro **násobení** byly sestavovány tabulky součinů čísel 1 – 59, pro **dělení** tabulky převrácených hodnot. Práce se **zlomky** se přibližovala dnešnímu pojetí. Zvládali některé kvadratické a kubické **rovnice** o jedné neznámé. V Mezopotámii byly užívány i tabulky druhých a třetích **mocnin** a **odmocnin** přirozených čísel.

Obrázek č. 1. 13:

Tabulka Plimptom 322

S **geometrií** na tom byli v Babylónii podobně jako v Egyptě. „*Mezi úlohami zaznamenanými na babylónských hliněných destičkách nacházíme také problémy, které byly řešeny užitím věty dnes nazývané větou Pythagorovou.*“ [6] Tabulka Plimptom 322 bývá označována tabulkou pythagorejských trojic, což není vhodné označení. Tabulka byla několikrát studována, ale stále nejsou dostatečně přesvědčivě zodpovězeny otázky, jak a proč byla tabulka vypočtena a k čemu byla používána.

Sumerské záznamy astronomických pozorování obsahovaly seznam hvězd a ukazovaly jejich pohyb po dobu několika let, rozlišení souhvězdí, zápisy zatmění Slunce a Měsíce, které tvořily oporu kalendáře. Vznikla také astrologie a sestavování horoskopů.

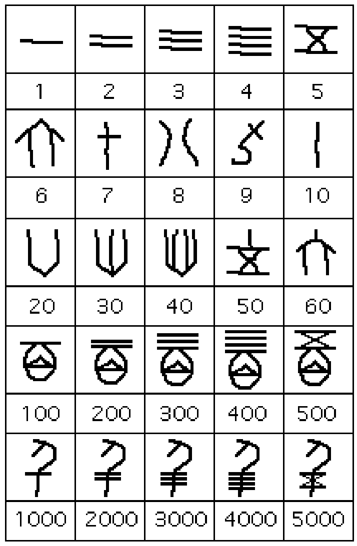
[6] BALADA, F., *Z dějin elementární matematiky*. Str. 182.

1. 2. 3 Čína

Už v pravěku se usazovali lidé podél velkých čínských řek. Čínská kultura má své počátky v téže době jako Egypt a Mezopotámie, ale málo dochovaných matematických písemných památek. Většina textů byla pravděpodobně zničena v roce 213 př. n. l., kdy despotický císař Š´chuang´ti přikázal spálit všechny knihy. Ojedinělé zprávy o nejstarší čínské matematice se týkají především zkoumání kalendáře. Matematické výsledky čínských učenců spoluvytvářely počtářskou matematiku středověkého Orientu.

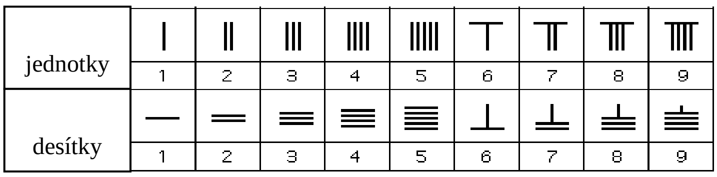
S nejstaršími čínskými zápisy čísel se setkáváme na magických kostkách ze 14. – 11. století př. n. l. a na keramických nebo bronzových předmětech a mincích z 10. – 3. století př. n. l. Největší číslo, které se zde vyskytuje, je 30 000. Od 4. století př. n. l. Číňané začali používat tyčinky, které se udržely do 13. století př. n. l.

Obrázek č. 1. 14:



Číslice na magických kostkách

Obrázek č. 1. 15:



Číslice – tyčinky 2. století př. n. l.

Obsahem prvního dochovaného matematického díla *„Matematika v devíti knihách“* je pestrý souhrn znalostí a mnohaleté práce matematiků, kteří žili v 1. tisíciletí př. n. l. Přesná doba vzniku, autoři a prameny nejsou známi. Bezpochyby byly knihy napsány v různých dobách a odpovídaly různé úrovni a stavu vědy. Je to sbírka 246 úloh – nejprve je formulována úloha, potom se dochází k výsledku a nakonec je naznačen způsob řešení. Úlohy jsou spíše rozděleny podle věcné tématiky, než podle matematických metod.

Hlavní specifické rysy čínské matematiky:

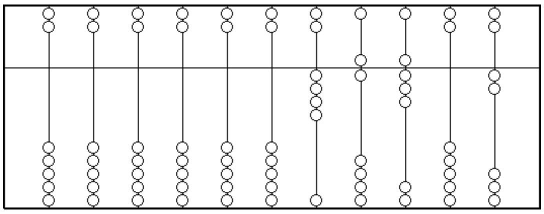
- desítkový poziční systém jako základ numerace,
- lineární rovnice o jedné neznámé byly řešeny metodou přebytku a nedostatku,
- v soustavě lineárních rovnic s více neznámými byla uplatňována metoda maticová,

- metoda výpočtu druhých a třetích odmocnin,
- řešení kvadratických rovnic,
- využívání tzv. Pythagorovy věty,
- výpočty obsahů a objemů řady útvarů,
- počítání se zápornými čísly při řešení soustav rovnic.

Poprvé v dějinách se konkrétně v 8. knize setkáváme se **zápornými čísly** nazývanými *„fu“* (dluh) a značenými červeně, kladná se nazývala *„čeng“* (majetek) a značila se černou barvou.

Na základě antické početní desky vzniklo počitadlo suan – pchan, kde se pohybovalo kuličkami nasazenými na drátkách. Později toto počitadlo převzali Japonci a nazvali je soroban.

Obrázek č. 1. 16:



Čínský suan - pchan

1. 2. 4 Indie

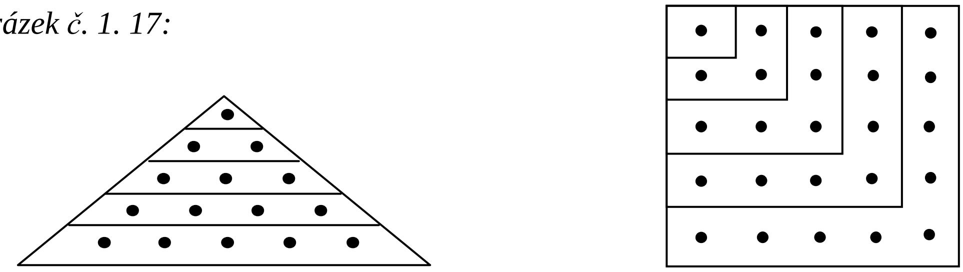
Starodávné kultury v povodí velkých řek indického subkontinentu existovaly již v 5. tisíciletí př. n. l. Krátké nápisy na památkách na pohled blízké písmu sumerskému jsou doposud nerozluštěny. Text byl zřejmě psán na kůry, látky či kůže, které měli malou trvanlivost.

Nejstaršími písemnými památkami z 2. tisíciletí př. n. l. jsou *„védy“* a *„sútry“*. *„Veda“* znamená *„vědět“*. Obsahem védské literatury psané převážně sanskrtem (jazyk indického náboženství a vědy) je náboženství a mytologie, úvahy filosofické, kosmologické, etické a lékařské. *„Sútra“* znamená *„pravidlo“*. Je to sbírka návodů k činnostem určitého typu – stavba oltářů, přinášení obětí, právnické řízení, léčení atd. Obsahem jsou také poznatky z gramatiky, fonetiky, etymologie, astronomie atd.

K matematice mají blízko *„Pravidla provazce“* (*„Šalvasútra“*), které obsahují geometrické konstrukce a výsledky některých výpočtů. Zachovaly se ve třech verzích a nejčastěji jsou řazeny do období 6. – 5. století př. n. l.

Indické stavitelské umění vyžadovalo skládání čtverců, trojúhelníků nebo mnohoúhelníků, což byl základ nauky o trojúhelníkových, čtvercových a mnohoúhelníkových číslech.

Obrázek č. 1. 17:



Součet čísel v trojúhelnících dává „trojúhelníková“ čísla: 1, 3, 6, 10, 15…, ve čtvercích „čtvercová“ čísla: 1, 4, 9, 16, 25…

Základní prameny, ze kterých čerpáme znalosti o indické matematice, jsou:

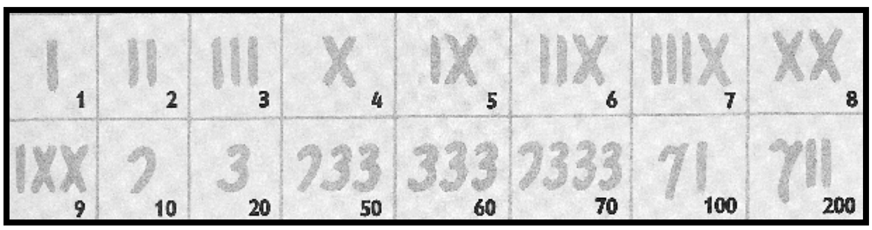
1) anonymní rukopis na březové kůře věnovaný aritmetice a algebře,
2) anonymní astronomická práce „*Súrja siddhánta*“ čili „*Učenosti Slunce*“,
3) veršovaný astronomický a matematický traktát „*Árjabhattíja*“.

Poziční numerace je nejvýznamnější výsledek, kterého dosáhla indická matematika. Naše aritmetika je nepochybně indického původu. Indičtí učenci rozpracovali pravidla pro početní výkony založené na desítkové poziční soustavě numerace a to čtyři aritmetické operace, umocnění na druhou a na třetí, vyhledávání druhých a třetích odmocnin. Výpočty se prováděly na početní desce pokryté prachem a pískem, proto se nazývaly „*práce s prachem*“.

V Indii se užívala řada způsobů zápisu čísel. Byly to numerace:

- nepoziční (číslice „*kharóšthí*“ a „*bráhmí*“),
- slovní (poziční i nepoziční),
- abecední poziční,
- číslicová poziční.

Obrázek č. 1. 18:



Indické číslice „kharóšthí“

Slovní zápis je specifikou veršovaných skladeb. Jedna číslice byla vyjadřována různými slovy. Například:

0 – prázdný, nebe, otvor,	5 – smysly, šípy (boha lásky),
1 – začátek, Luna, Země,	6 – barvy, roční období,
2 – oči, uši, nozdry,	7 – mudrci, tóny,
3 – Šiva (trojoký bůh),	10 – prsty, vtělení boha Višnu,
4 – védy, kasty, strany světa,	20 – nehty.

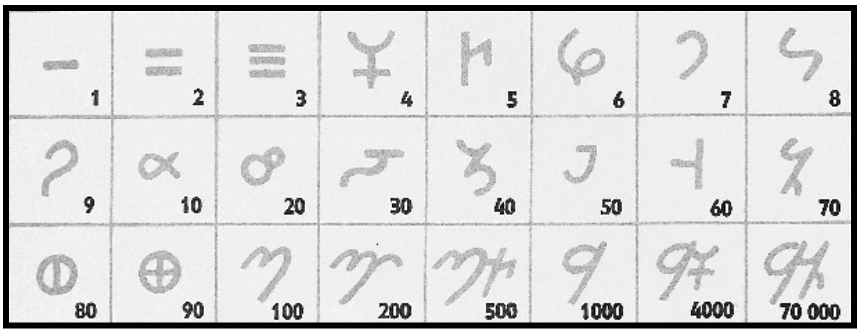
Zápis čísla 325 170 ve verši: Šiva – oči – šípy – Luna – mudrci – otvor.

Začínalo se číslicí nejnižšího řádu, často se uváděly mocniny deseti.

Ve 3. století př. n. l. se objevily číslice *„bráhmí“*, které tvořily znaky pro čísla 1 až 9. Byla vytvořena desítková poziční numerace s použitím **nuly**. Jeden z názvů pro nulu byl *„šúnja“* (= prázdné), arabští učenci ho přeložili slovem *„as-sifr“* a evropští v latinských překladech napsali slovo *„ciffra“*.

Písmo *„bráhmí“* má zajímavější číslice, než *„khárošthí“*. U prvních tří sice používá jednotlivých čárek, dále však už kreslí číslice jedním znakem, mnohdy psaným jedním tahem. To dalo možnost dalšího vývoje.

Obrázek č. 1. 19:



Indické číslice „bráhmí“

2 Období matematiky konstantních veličin

Přesné hranice mezi jednotlivými epochami stanovit nelze, ale za počátek období matematiky konstantních veličin je považován vznik prvních matematických a filosofických škol v antickém Řecku v 6. – 5. století př. n. l. Období zahrnuje tzv. zlatý věk řecké matematiky, římské období antiky, matematiku v Indii, muslimskou matematiku, čínskou matematiku a matematiku v Evropě po zániku Západořímské říše.

V předřeckých civilizacích měla matematika empirický ráz, většina návodů k řešení byla nalezena zkusmo a ověřena na ojedinělých případech. Teoretické myšlení zůstávalo zásadně v pozadí. Logické myšlení lidí se vyvíjelo po mnoho tisíciletí. Věda o logickém myšlení se však mohla vytvářet jen ve společenských podmínkách, které umožňovaly uplatňování argumentace, tříbení názorů a logických závěrů v diskusích většího počtu lidí. Tedy tam, kde byla oslabena despocie.

Pythagoras objevil matematiku jako metodu argumentací a dedukcí. Obsah základní charakteristiky změny je heslovitě uveden v tabulce.

Každé z dílčích období má určitou úroveň a specifický charakter související s místem. Tato etapa trvala do počátku 17. století n. l. a je rozdělena na dvě odlišné epochy.

2. 1 Období vytváření deduktivní matematiky

Nejvýraznějším charakterem této epochy je vznik matematiky jako deduktivně budované teorie. Při zkoumání matematických objektů se začíná logicky odvozovat. Celý systém se opírá o řetězec předešlých výsledků, z nichž se vyvozuje a je tak vytvářen určitý systém základních vztahů. Řekové došli jako první k ideji důkazu a důkazům dali logickou formu.

Patří sem období antického Řecka (dílo pythagorejců, Thaleta, Zénóna, Démokrita, Hippokrata, Platona, Aristotela a Eudoxa), kdy se plně využívala tzv. geometrická algebra. Helénistické období (tři velcí matematici zlatého věku Eukleides, Archimédes a Apollónios) a období římské nadvlády (Nikomachos z Gerasy, Menelaos, Klaudius Ptolemaios, Hérón Alexandrijský, Diofantos).

Z dřívějších tradic vědeckého myšlení se v některých svých postupech a rysech antická věda vymanila a ukázala tak cestu rozvoji racionálního přírodovědeckého výzkumu. Rysy tvoří hlavní pozitiva, která přispěla k rozvoji vědeckého bádání.

Tabulka č. 2. 1:

600 př. n. l.		
Doba	… Sumer, Babylon, Egypt	Řecko, Arábie, Evropa…
motivace matematického myšlení	potřeby praxe - stavitelství, účetnictví, kalendář, navigace, (magie)	navíc: touha vysvětlit příčiny jevů, problémy magie i samostatné matematiky
otázka	Jak? (vyměřit, sestrojit)	Proč? (je to tak a tak)
systém práce	množství experimentů typu "pokus - omyl"	orientované získávání zkušeností a jejich hierarchie
nástroj	ruka, trpělivost, paměť	rozmýšlení, úvaha
představy	předmětné	idealizované objekty
povaha objevu	mystická; objev - vnuknutí, dar od boha	logická; objev je důsledek cílevědomého bádání.
kritérium pravdivosti poznatku	náboženská víra; o vnuknutí není možné pochybovat; přibližný souhlas s praxí	logické vyvození poznatků z evidentních pravd; vzájemné skloubení poznatků do struktury - harmonie; souhlas s praxí
výsledky	náhodné a mozaikovité	systematizované a hierarchizované
učení se vyučování	reprodukce návodu; žák se učí imitovat učitele mnohonásobným opakováním	dialog podněcující a usměrňující samostatné bádaní každého žáka
míra náročnosti	délka návodu, ve kterém je poznatek uložen	množství abstrakce použitých pojmů a myšlenek

Zvláštní rysy metodiky antické vědy:

a) přírodně materialistické kosmologické spekulace,
b) empirie,
c) experiment,
d) systematický, deduktivně logický způsob výkladu,
e) kritický přístup k naivnímu přijímání smyslového vnímání.

Charakteristika starověké antické matematiky:

1) Matematika vystupuje z anonymity, známe její tvůrce a školy.
2) Vytváří logicky budované teorie, které sjednocují výsledky a mají vlastní metodiku ověřování.
3) Poprvé se utvářejí různé koncepce matematiky a jejich hranice nosnosti.
4) Formulace některých problémů, které podněcují další rozvoj matematiky a přinášejí nekonvenční řešení.

5) Od 4. století př. n. l. do 2. století n. l. se formuje časové jádro, ve kterém jsou vytvářeny nejvýznamnější výsledky.
6) Probíhá členění matematiky do předmětem vymezených disciplín.

2. 1. 1 Antické Řecko

Řekové se dostali do styku s kulturou celého tehdejšího světa a tak původně nerozvinuté řecké společnosti nic nebránilo v šíření poznatků. Se vznikem prvních řeckých matematických a filosofických škol – Milétské, Pythagorejské či Eleatské – dochází ke změně pohledu na matematiku. Od poloviny 6. století př. n. l. začala být chápána jako samostatný vědní obor. Tvrzení se začala dokazovat a to byl kvalitativně zcela nový přístup v matematickém myšlení. Řečtí matematikové viděli rozdíl mezi aritmetikou - vědou o číslech a logistikou - praktickým počítáním.

Vznik a šíření řecké matematiky souvisí s mnoha postavami.

Thales z Mílétu

(625? - † 547? př. n. l.)*

Živil se jako kupec, se svými obchody navštívil Egypt, zřejmě Krétu a Asii. Později se věnoval veřejným záležitostem a v poslední etapě života ho uchvátila stereometrie, matematika a filosofie. Založil iónskou **školu v Mílétu**.

Země je kulatá deska plovoucí na rozlehlém oceánu, zemětřesení je důsledkem vlnobití. Dokázal předpovědět zatmění Slunce. Za počátek všeho považoval vodu, podle jeho žáka **Anaximandrose** byl pralátkou *apeiron* - *nekonečné* (voda či vzduch). Žák Milétské školy **Anaximenés** označil jako pralátku *apeiros aér* (nekonečný vzduch).

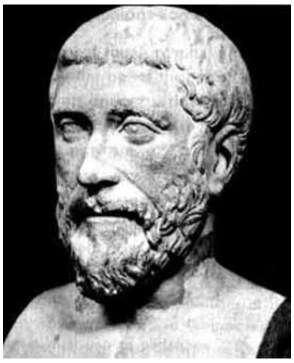
Snažil se rozumně a logicky vysvětlit jevy, kladl proto i na matematické tvrzení požadavek nejen vyslovit, ale i dokázat.

Připisují se mu následující důkazy vět:

- Každý průměr dělí kruh na dvě stejné části,
- v rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly při základně shodné,
- obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé – Thaletova věta,
- dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve straně a přilehlých úhlech, aj.

Pythagoras ze Samu

(570? - † 509? př. n. l.)*



Byl to legendární řecký filosof, matematik, astronom, politik a žák Mílétské školy přezdívaný jako *„otec čísel“*. Údajně hodně cestoval, byl stoupencem rodové aristokracie, proto se dostal do sporu s nastupujícími demokratickými politiky. Následně přesídlil do Krotónu, kde kolem roku 520 př. n. l. založil filosofickou školu, považovanou za uzavřený náboženský a politický spolek. Po vítězství demokratů roku 509 odešel do Metapontu, kde zemřel.

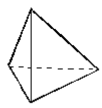
Pythagorovi se připisuje redukce hudebních harmonií na matematické vztahy. „*Muž boží*“ říkal, že pralátkou musí být něco omezeného = čísla 1 - 10 mají svůj vlastní význam a svou moc. Nejmocnější je pak úplná a dokonalá 10. Poprvé použil slovo *filosof* jako *milovník moudrosti*. Podle něj je *svět* - *kosmos* uspořádán do číselných vztahů. Spolu s Thaletem je považován za zakladatele matematiky jako vědy.

Pythagorovi připisovaná **Pythagorejská škola** byla autoritativní, učení bylo tajné a založené na tezi, že základem všeho je číslo. *„Jejich koncepci světa, opírající se o přirozená čísla, narušil jejich vlastní objev nesouměřitelnosti a nemožnosti vyjádřit poměrem přirozených čísel kvadratické iracionality.“* [7] Základem pythagorejského učení předávaného pouze ústně byla harmonie, mystika čísel a nauka o převtělování duší – orfismus. Hledali podstatu bytí v tajuplných matematických vztazích a číselných vazbách. Dali oheň do středu; avšak země je u nich hvězdou, která se otáčí v kruhu kolem tohoto ústředního tělesa, které však není slunce; přesto je to první tušení, že se země pohybuje. Pravděpodobně již v Mezopotámii znali Pythagorovu větu, ale až pythagorejci ji dokázali.

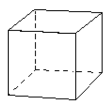
Dnes máme matematickou soutěž zvanou **Pythagoriáda**. Je určena žákům 6. a 7. ročníků. Obsahuje příklady na prostorovou představivost a logické uvažování.

Živly podle pythagorejců

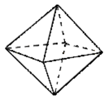
oheň – pravidelný čtyřstěn (tetraedr)

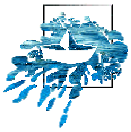


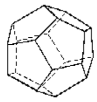
země – krychle (hexaedr)



[7] FOLTA, J., *Dějiny matematiky 1*. Praha, Národní technické muzeum 2004. Str. 93.

vzduch – pravidelný osmistěn (oktaedr) 



voda – pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr) 

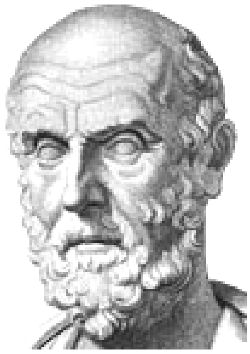
vesmír – pravidelný dvanáctiúhelník (dodecahedron)

Zenon z Eleje

(490? – † 430 př. n. l.)*

Patřil k **elejské škole**, jejíž vůdčí postavou byl Parmenidés, podle kterého je plynutí času iluzí. Zenon jeho učení podporoval a popíral tak učení Pythagorovo. Pomocí svých tzv. *aporií* (logických paradoxů) chtěl dokázat, že pohyb neexistuje a je jen klamným zdáním našich smyslů, což se mu podařilo. Nejznámější dochované aporie jsou – Achilles a želva, Letící šíp, Dichotomie a Závodiště.

Hippokrates z Chia



(460? - † 370 př. n. l.)*

Nejslavnější lékař antického starověku a *„otec medicíny"*. *„Kladl důraz především na pozorování lidského těla a rozlišení konkrétních projevů zdravého a nemocného organismu."* [8] Soubor etických pravidel jednání lékaře - Hippokratova přísaha je dnes nahrazena tzv. lékařským slibem vycházejícím z jejích zásad.

Objevil útvary omezené oblouky kružnic zvané „měsíčky". Obsah těchto útvarů se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníku sestrojitelného pravítkem a kružítkem.

Eudoxos z Knidu

(408? - † 355 př. n. l.)*

Přímý předchůdce Eukleida vytvořil **Eudoxovu školu**, která navazovala na pythagorejce i platoniky, ale byla proti mystice a jevy chtěla vysvětlovat čistě vědecky.

„Jeho největším matematickým objevem je vytvoření teorie proporcí. Nesouměřitelné úsečky nebylo možné srovnávat pomocí čísel, protože pojem iracionální číslo neexistoval. Jeho teorie byla čistě geometrická a přísně

---

[8] HAŠKOVEC, V., MÜLLER, O., *Galerie géniů*. Str. 193.

axiomatická. Odstraňovala aritmetickou teorii pythagorejců, která platila jen pro souměřitelné veličiny.“ [9]

Druhým přínosem je *„exhaustivní“* (vyčerpávající) metoda, která byla prvním učením o limitách, umožňovala přesné výpočty obsahů a objemů.

Demokritos z Abdér

(460? - † 370 př. n. l.)*

Řecký filosof, myslitel, vědec a zakladatel školy. Pocházel z velmi bohaté rodiny, měl své učitele a díky touze po poznání procestoval více zemí než kdokoli z jeho současníků.

Rozhodující bylo jeho setkání s Leukippem, který mu předal teorii o atomech, na které Demokritos založil své rozsáhlé a propracované materialistické učení. Svět se skládá z prázdnoty a atomů, které jsou nejmenší a dále nedělitelné částečky neživé hmoty. Dosud se všichni domnívali, že veškerá hmota je živá. Jeho díla však odmítal Platon a křesťané.

Mezi nejvýznamnější antické filosofy, kteří ovlivnili vývoj matematiky, patří **Sokrates** *(* 469 - † 399 př. n. 1.),* **Platón** *(* 427 - † 347 př. n. 1.)* a **Aristoteles** *(* 384 - † 322 př. n. 1.),* který je považován za zakladatele logiky.

2. 1. 2 Helénistické období

Epocha helénismu začala v době pochodů Alexandra Makedonského za hranice Řecka (332 - 323 př. n. 1). Po Alexandrově smrti se jím vytvořená říše rozpadla na tři říše: Egypt, Mezopotámie a Sýrie, Makedonie. Období bylo ukončeno v 1. století př. n. l. porobením helénistických zemí Římany.

Tato doba je *„zlatým věkem řecké matematiky.“* Helénistická věda se rozvíjela hlavně v alexandrijském Múseu, založeném kolem roku 300 př. n. l, které se stalo přední vědeckou institucí. Múseion jako první plně zaměstnával a platil vědce za výzkumnou práci a za její šíření. Na svou dobu zde byla vytvořena pozoruhodná sbírka rukopisných svitků. Až do 4. století n. l. Múseion fungovalo, ale jeho význam postupně upadal. Působila zde řada učenců.

[9] PUTŮČEK, J., *Historie matematiky pro učitele 1. díl.* Str. 34.

Eukleides

(? - † 270 př. n. l.)*

Byl řeckým matematikem a geometrem. Pravděpodobně studoval v Athénách na Platonově Akademii. Přibližně v roce 300 př. n. l. založil v Alexandrii matematickou školu.

Napsal několik různých knih. Dnes nejvýznamnější matematickou prací v dějinách jsou Euklidovi **Základy** (Elementy). Dílo je tvořeno 13 knihami, v nichž jsou shromážděny a systematicky uspořádány všechny dosavadní matematické poznatky. Knihy jsou věnovány planimetrii, stereometrii, aritmetice a geometrické algebře. „*Nalezneme zde* ***„Euklidův algoritmus“*** *pro nalezení největšího společného dělitele dané skupiny čísel i* ***„Euklidovu větu“****, že existuje nekonečný počet prvočísel.*“ [10] Dnešní středoškolská geometrie je obsahem prvních čtyř dílů. V následujících dílech se Eukleides zabývá dalšími otázkami geometrie a poté podává výklad celé teorie čísel. Pozoruhodné je, že i aritmetické operace provádí pomocí geometrie. Staří Řekové totiž neznali žádný vhodný číselný zápis, a tak Euklides všechna čísla znázorňuje úsečkami. Přitom s nimi dokázal úplné divy.

Důležitá je metoda, kterou Eukleides při psaní použil. Na počátku zvolil *pět základních axiomů* geometrie. Jsou to poučky, které jsou tak jednoduché, že je nelze odvodit z žádných ještě jednodušších pouček. Například 1. axiom říká: “*Mezi dvěma body může být proložena úsečka*“. Euklides tím položil pevný základ celé matematiky. Jeho metoda se stala vzorem precizního logického myšlení jak v matematice, tak v celé přírodovědě. Euklida můžeme označit za otce matematické přesnosti.

Archimédes ze Syrakus

(287 ? - † 212 př. n. l.)*

Syn astronoma v mládí odešel do Alexandrie a studoval zde matematiku u nástupců Euklida. Po studiích se vrátil do rodného bohatého města.

Napsal řadu knih, které patří k absolutní špičce antické vědy: O rovnováze ploch, O kouli a válci, O plovoucích tělesech, O spirálách, O konoidech a sféroidech, Kvadratura paraboly, Měření kruhu, O počítání písku. Například kniha **Metoda** zajímavě popisuje spojení matematiky a mechaniky.

---

[10] PUTŮČEK, J., *Historie matematiky pro učitele 1. díl.* Str. 38.

Pomocí pokusů položil **základy statiky** (= nauka o rovnováze těles a sil) a **vědecké hydrostatiky**. *„Popudem k tomu snad byla známá historka s královskou korunou. Syrakuský panovník Hieron si ji objednal u zlatníka a měla být vyrobena z ryzího zlata. Ale když byla hotová, král pojal podezření, že do zlata bylo přimíšeno stříbro. Požádal Archiméda, aby složení koruny prověřil. Ten nechtěl klenot porušit a dlouho marně hledal způsob, jak to udělat. Až jednoho dne, když byl ve veřejných lázních, vypozoroval, jak se při ponoření do vody zvedla hladina. V té chvíli ho konečně napadlo řešení – a prý ho tak rozrušilo, že vyběhl na ulici nahý a křičel Heuréka! (Našel jsem!). Do odměrné nádoby ponořil korunu a potom kus čistého zlata o stejné váze. Ukázalo se, že koruna zvedla hladinu výš než zlato, a že je v ní tedy příměs jiného kovu. Nevíme, co se stalo se zlatníkem, zato náš génius brzy po této příhodě zformuloval slavný* ***Archimédův zákon:*** *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.“* [11]

Archimédes je označován jako první *„vědecký inženýr“* v historii, důsledně spojil matematiku s fyzikou a teorii s praxí (vytvořil páky, kladky, kladkostroje, …). Každá hospodyňka, aniž by to tušila, používá často *„Archimédův šroub“*. Hlavní část mlýnku na maso tvoří šroub, který se uvnitř válcovitého strojku točí a tlačí maso k nožům. Řešil tímto způsobem jednoduché čerpadlo, s jehož pomocí přiváděli zemědělci vodu na pole.

Apollonios z Pergy

(262 - † 200 př. n. l.)*

Za jeho nejvýznamnější matematické dílo je považováno 8 knih **O kuželosečkách**, v němž došel k principu souřadnic pro studium geometrických útvarů. Právě u něho se neblaze projevilo oddělení aritmetiky od geometrie. U Apollonia se poprvé setkáváme s výslovným požadavkem, aby se při geometrických konstrukcích užívalo pouze kružítka a pravítka. Apollonios při svém výkladu zavedl pojmy: *elipsa*, *parabola a hyperbola.*

V nedochovaném díle **O dotycích** byly údajně řešeny Apolloniovy úlohy. Apollonios formuloval úlohu nejprve pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) a přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru).

[11] HAŠKOVEC, V., MÜLLER, O., *Galerie géniů*. Str. 16.

Erastothenes a jeho pravidlo *Erastothenovo síto* slouží lidstvu přes 2 tisíce let. Užívá se v případech, kdy je nutné rozhodnout o velikém čísle, zda je prvočíslem, či nikoli. Postup je jednoduchý - ze všech přirozených čísel počínaje číslem 2 vyškrtáme násobky čísla 2. První nevyškrtnuté číslo je prvočíslem, je to číslo 3. Dál postupujeme vyškrtáním všech násobků čísla 3. První nepřeškrtnuté číslo je 5, je to prvočíslo….

Díla Euklidova, Archimédova a Apollonia se stala pilířem klasické řecké matematiky pro další staletí. Opisovala se, komentovala, drobně doplňovala až do zániku antické civilizace.

Řekové po jistých počátečních úpravách užívali složité soustavy s 27 písmeny své abecedy ve významu číselných znaků.

Obrázek č.: 2. 1. 2. 1 Řecké čísclné znaky

α	1	ι	10	ϱ	100
β	2	ϰ	20	σ	200
γ	3	λ	30	τ	300
δ	4	μ	40	υ	400
ε	5	ν	50	φ	500
ϛʹ	6	ξ	60	χ	600
ζ	7	ο	70	ψ	800
η	8	π	80	ω	800
ϑ	9	ϙʹ	90	ϡʹ	900

2. 1. 3 Období římské nadvlády

Období římské nadvlády začalo římskými výboji (konec 3. století př. n. l.). Římští legionáři získali četná území. Zpustošeno bylo téměř celé Řecko. Roku 31 př. n. 1. byla dobyta také Alexandrie (shořela i část knihovny Musea), ale nadále však zůstala střediskem středověké matematiky. Podmínky pro vědeckou práci byly ale nepříznivé. Rozvíjí se od 1. století př. n. l. a končí rozpuštěním athénské Akademie v roce 529 n. l., kdy mnozí antičtí učenci odchází do orientálních zemí.

Nikomachos z Gerasy (kolem roku 100 n. l.) je jedním z prvních alexandrijských matematiků římského období. Jeho **Úvod do aritmetiky** je nejvýznamnější zachovaný výklad pythagorejské aritmetiky, který se většinou zabývá stejnými otázkami jako aritmetické knihy Euklidových Základů. Euklides však vyjadřuje čísla úsečkami, Nikomachos užívá obyčejné řeči k aritmetickému záznamu neurčitých čísel.

K nejdůležitějším dokumentům tohoto období patří **Velká sbírka**, známější pod arabským jménem **Almagest**, která je dílem **Klaudia Ptolemaia** (* 85? - † 165? n. l.). Je to originální astronomická práce. Ve spise je podán výklad všech astronomických poznatků té doby. Tato práce obsahuje rovněž trigonometrii. Setkáváme se zde také s *Ptolemaiovou větou* o čtyřúhelníku vepsaném do kružnice $ef = ac + bd$, kde písmena *e* a *f* označují délku úhlopříček a *a*, *c*, respektive *b*, *d* délku protilehlých stran.

Menelaova (* 70?) práce **Sférika** obsahuje geometrii koule a také *Menelaovu větu* pro trojúhelníky a její rozšíření na kulovou plochu.

Heron z Alexandrie byl starověký matematik a vynálezce. Popsal výtlačné čerpadlo, které se stalo předchůdcem parního stroje. Zabýval se praktickými úlohami z matematiky, mechaniky a dalších oblastí fyziky. *„Nejdůležitějším Hérónovým geometrickým dílem je třídílná* ***„Metrika“*** *(nauka o měření). Prvá knihaobsahuje pravidla měření obsahů ploch a povrchu těles. Zde je dána formule pro výpočet plochy S obecného trojúhelníka, tzv. „Hérónův vzorec“:*

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Druhá kniha je věnována měření objemů. Třetí kniha se zabývá rozdělováním útvarů na části. Jež jsou jedna k druhé v daném poměru; přitom měl Hérón na mysli jak rovinné obrazce, tak i tělesa – jehlan, kužel a kouli.“ [12]

Diofantos z Alexandrie položil základy algebry a dodnes po něm nazýváme neurčité rovnice. Diofantos poprvé systematicky užívá algebraické symboly. Dílo **Aritmetika.**

Pappos z Alexandrie napsal poslední z velkých alexandrijských matematických pojednání. Jeho kniha **Synagoge** (matematická sbírka) byla určitou příručkou ke studiu řecké geometrie. Při studiu těles v prostorové geometrii jsou často využívanými principy tzv. *Pappovy věty.*

V polovině prvního tisíciletí se ve velké míře začalo rozšiřovat křesťanské náboženství. Školy byly uzavírány, učenci opouštěli centra antické vzdělanosti a odcházeli do Asie.

[12] KOLMAN, A., *Dějiny matematiky ve starověku.* Str. 188.

2. 2 Období elementární matematiky ve středověku

Druhá etapa období konstantních veličin byla zaměřena k rozpracování elementární matematiky. Oživila počtářský charakter matematiky; z orientu čerpala tzv. indicko-arabský poziční číselný záznam a hlavní aritmetické algoritmy.

Starověká civilizace Blízkého východu i přes helénistický vliv zcela nezanikla. Základnami styku Východu a Západu byl Konstantinopol a Indie. Politická nadvláda Řeků nad Blízkým východem vymizela s rychlým vzestupem islámu. Na územích dobytých Araby se stala oficiální řečí arabština. Nahradila tak řečtinu a latinu.

„Od 11. až do 15. století se Evropa seznamovala s výsledky jak antických matematiků, tak i arabských komentářů a rozpracování. Na konci této etapy se evropským matematikům podařilo dospět k samostatným výsledkům v oblastech souvisejících právě s výpočtářskou praxí (trigonometrické výpočty a tabulky nezbytné pro rozvoj astronomie, logaritmy, řešení rovnic 3. a 4. stupně apod.).“ [13]

2. 2. 1 Indická matematika

S úpadkem římského impéria se přesunula střediska matematického bádání do Indie. *„Knihami soustřeďujícími vědomosti byly* ***Siddhánty (Učenosti)****, které vznikaly ve 4. – 5. století n. l. O něco mladším spisem je* ***Arjábhattija*** *napsaný v roce 499 n. l., který měl široký matematický obsah a i když nezahrnoval všechny tehdy v Indii známé matematické znalosti, byl užíván a ještě po tisíci letech komentován.“* [14]

Od 5. století n. l. se zachovala díla konkrétních indických matematiků. Nejznámější z nich byli **Árjabhata** (kolem roku 500 n. l.) a **Brahmagupta** (kolem roku 625 n. l.). Jejich dílo obsahuje aritmeticko-algebraické části. **Árjabhata I.** aproximoval hodnotu $\pi = 3{,}1416$; řešil neurčité rovnice prvního stupně. Na rozdíl od Diofanta Indové přijímali jen celočíselná řešení těchto rovnic a připouštěli záporné kořeny. Brahmagupta nazýval kladná čísla jako majetek a záporná čísla jako dluh. Komentátorem idejí Árjabhata byl **Bháskara I.**, který v 7. století rozpracoval teorii diofantovských rovnic a astronomické problémy. Do poloviny 9. století spadá tvorba **Mahávíra**, autora *Krátkého kursu matematiky*. Dílo je první indické pojednání plně věnované matematice.

Velký význam pro rozvoj fyzikálně-matematických věd, měla tvorba významného indického matematika a astronoma **Bhánskary II.** (* 1115 – † 1183?)

---

[13] FOLTA, J., ŠEDIVÝ, J., *Světonázorové problémy matematiky 1*. Str. 14.
[14] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 132.

podle jehož děl se vyučovala ve školách. Bhánskarova pojednání **Lílávátí** a **Bídžaganíta** jsou věnována matematice. Dílo Lílávátí se na dlouhou dobu standardním orientálním aritmetickým a měřickým dílem.

„Nejznámějším výsledkem indické matematiky je náš dnešní desítkový poziční systém. Desítkový i poziční systém jsou velmi staré, avšak jejich spojení vzniklo asi v Indii, kde během doby postupně nahradilo starší nepoziční systémy. Jeho první známý výskyt je na desce z roku 595 n. l., kde je napsán v desítkovém pozičním záznamu letopočet 346.“ [15]

Již dlouho před tímto písemným dokladem měli Indové systém, který velká čísla vyjadřoval metodou pozičních hodnot. V rukopise **Bakhšálí**, jehož vznik se datuje do doby od 3. do 12. století n. l., se objevuje slovo „súnya“, které vyjadřuje nulu. Text obsahuje tradiční indický materiál o neurčitých rovnicích, kvadratických rovnicích a aproximacích.

„Nejstarší písemný doklad symbolu nuly pochází z 9. století. Je to tedy mnohem později než v babylónských textech. Symbol 0 pro nulu mohl vzniknout řeckým vlivem („ouden“ je řecký výraz pro nic); zatímco babylónská tečka se psala jen mezi ciframi, objevuje se indická nula též ne konci, a tím se cifry 0, 1, 2,…, 9 staly rovnocennými.“ [16]

2. 2. 2 Arabská matematika

Arabové přejímali a dále rozvíjeli vědecké a kulturní výsledky porobených národů. Pomocí obchodních a diplomatických styků získávali další poznatky i z oblasti matematiky. Pronásledovaní učenci nacházeli azyl v Byzanci. Prvním vědeckým centrem arabské (islámské) matematiky se stal Bagdád, kde se koncem 8. a počátkem 9. století soustředilo mnoho učenců. Vědecká činnost v tomto období byla velmi podporována, v Bagdádu vznikl *„Dům moudrosti“* s knihovnou a observatoří. Islámské práce v exaktních vědách začaly **al-Fazáriho** překladem Siddhántás a vrcholu dosáhl kolem roku 825 **Muhammad Ibn Musa al-Chvárizmí** (* 780? - † 850?), který napsal několik knih o matematice a astronomii. *„Název překladu **Algorithmi de numero Indorum** zavedl do naší matematické řeči termín „algoritmus“, který je latinizovaným jménem autora. Obdobná věc se stala s Muhammadovou algebrou, která měla název **Hisab al-džebr val-muqabala** (doslova „věda o redukci a vzájemném rušení“, což asi znamenalo „věda o rovnicích“). Tato algebra, jejíž arabský text se zachoval,*

[15] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 66.
[16] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 67.

se stal známou na Západě díky latinskému překladu a slovo „al-džebr" se stal synonymem celé matematické disciplíny „algebry"." [17] Dílo al-Chvarízmího hraje v dějinách matematiky důležitou roli, jelikož bylo jedním z hlavních pramenů, jimiž do západní Evropy pronikly indické číslice a arabská algebra.

Trigonometrii se věnoval **al-Battání** (* 858? – † 929?), který znal *Kosinovu větu* pro sférický trojúhelník a sestavil tabulku kotangent s intervalem jednoho stupně. *„**Abu-I-Vafá** (* 940 – † 998?) odvodil sinovou větu sférické trigonometrie, vypočítal tabulky sinů s intervalem 15', jejichž hodnoty mají správných 8 desetinných míst)."* [18] Počátkem 11. století **al-Karchí** rozpracoval algebru, která navazovala na Diofanta. Na základě antické teorie kuželoseček vytvořil arabský matematik **Omar Chajjám** (* 1038? – † 1124?) rozsáhlou geometrickou teorii rovnic třetího stupně.

Po roce 1256, kdy Bagdád vyplenili Mongolové, vzniklo nové středisko vzdělanosti, observatoř *Marágha*, která okolo sebe soustředila celou orientální vědu. Byla vybudována vládcem pro **Násiruddína Tusího** (* 1201 - † 1274), který vydělil trigonometrii z astronomie jako samostatnou vědu. V 1. polovině 15. století perský matematik **Gijáseddín Džemšíd al-Káší** (* ? - † 1429) vynikl svojí obratností při výpočtech, které jsou srovnatelné s výsledky dosaženými koncem 16. století v Evropě. *„Řešil kubické rovnice iteracemi a trigonometrickými metodami a znal způsob řešení určitých algebraických rovnic vyšších řádů, který zobecňuje počítání odmocnin vyšších stupňů z obyčejných čísel. Tato metoda, dnes zvaná Hornerovo schéma, vznikla pravděpodobně vlivem čínské matematiky. V al-Kášího díle nalezneme též binomickou větu pro libovolný celočíselný kladný exponent. Vedle šedesátinných zlomků užíval také desetinných zlomků s desetinnou čárkou (např. 25,07 krát 14,3 je 358,501) a π znal správně na 16 desetinných míst."* [19]

V Egyptě byl významnou osobností **Abú Kámil**, který rozšifroval al-Chvárizmího dílo a největší muslimský fyzik **Ibn al-Hajtham** (Alhazen, * 965? – † 1039?). *„Rozřešil „Alhazenův problém", ve kterém se požaduje ze dvou bodů ležících v rovině dané kružnice vést přímky protínající se v bodě kružnice tak, aby svíraly s normálou tohoto bodu shodné úhly. Alhazenův problém vede k bikvadratické rovnici a byl řešen v duchu řecké tradice průsečíkem hyperboly a kružnice."* [20]

---

[17] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 69.
[18] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 71.
[19] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 72.
[20] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 73.

2. 2. 3 Středověká Evropa

Je to období od 5. – 6. století do konce 16. století. V roce 800 n. l. byl odtržen Východ od Západu. Západní společnost se stala feudální a církevní a pomalu se rozšiřovala k severu. Během prvních století západního feudalismu nacházíme jen nepatrné ocenění matematiky. Klášterní matematika obsahovala trochu církevní aritmetiky používané k výpočtu dat Velikonoc; s primitivním zemědělstvím nebyla vůbec podporována matematika praktická. Období od zániku římské říše až do 13. století tedy prakticky nepřispělo k dalšímu rozvoji matematiky.

Prvky řecko-římské vzdělanosti, po pádu římského impéria v roce 476 n. l., udržovaly kláštery a vzdělaní laici. Jedním z těchto laiků byl diplomat a filosof **Anicius Manlius Severinus Torquatus Boëthius** (* 480? – † 524?). Boëthius napsal matematické spisy, které byly v západním světě považovány za směrodatné více než tisíc let. Spisy odrážely tehdejší kulturní podmínky, a proto byly velmi chudé na vědecký obsah.

Ve středověku bylo základem výuky tzv. „světských věd“ **sedm svobodných umění** (septem artes liberales), často vyjadřovaných sloganem: *lingua, tropus, ratio, numerus, tenor, angelus, astra. „Úvodním stupněm bylo tzv.* ***trivium****, trojcestí, které sestávalo ze tří humanitně zaměřených disciplín, gramatiky, rétoriky a dialektiky, které byly nazývány arte sermocinales. Na trivium navazovalo tzv.* ***quadrivium*** *nebo též quadruvium, čtyřcestní, které bylo tvořeno čtyřmi matematicky zaměřenými disciplínami, aritmetikou, geometrií, astronomií a hudbou, které byly nazývány artes reales.“* [21]

Významné místo mezi církevními matematiky zaujímal **Alkuin z Yorku** (* 735? - † 804?). Mezi jeho díla patří latinsky psaná sbírka **Úlohy k bystření mladíků**. Jedná se o nejstarší středověkou evropskou sbírku 53 matematických úloh, která ovlivnila po dlouhá staletí autory učebnic. Dalším církevním matematikem byl francouzský mnich **Gerbert z Aurillacu** (* 940? - † 1003), někdy nazýván „*obnovitel evropské vědy*“, který se stal v roce 999 papežem jako Silvestr II. Byl prvním západním učencem, který šel do Španělska studovat matematiku arabského světa.

Ve 12. a 13. století vznikla první mocná obchodní města v Itálii (Janov, Pisa, Benátky, Milán a Florencie), která úspěšně obchodovala s arabským i evropským severem. Obchodníci navštěvovali Orient a studovali jeho kulturu.

[21] BEČVÁŘ, J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě.* Str. 65.

Jedním z obchodníků, byl i **Leonard Pisanský**, nazývaný také **Fibonacci** (* 1170? – † 1240). Po návratu z cest napsal roku 1202 **Liber abaci** (*Kniha o abaku, Aritmetika*), která obsahuje algebraické a aritmetické znalosti shromážděné z cest. *„Aritmetiku a algebru lineárních a kvadratických rovnic Leonardo vyložil v takové úplnosti a hloubce, jíž nebylo dosaženo před ním a ani dlouho po něm. Toto hodnocení platí jak ve srovnání s latiskou, tak i arabskou literaturou.“* [22] Roku 1220 sepsal dílo o geometrii a trigonometrii **Practica geometriae** (*Praxe geometrie*). V matematice známe **Fibonacciho posloupnost**, která je označována nekonečná posloupnost přirozených čísel, začínající 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …, kde každé číslo je součtem dvou předchozích. Čísla, nacházející se ve Fibonacciho posloupnosti, jsou někdy nazývána **Fibonacciho čísla**. Dvě následující čísla Fibonacciho posloupnosti jsou v poměru **zlatého řezu**.

Zájem především o praktickou matematiku se rozrostl s rozšiřováním obchodu a mořeplavby. Rozvoji věd bylo příznivé i vytváření prvních univerzit - 1100 v Bologni, koncem 12. století v Paříži a Oxfordu, 1209 v Cambrindge , 1348 v Praze, 1364 v Krakowě, 1365 ve Vídni, 1385 v Heidelbergu, 1409 v Lipsku, 1459 v Bazileji atd. Všechny měly obdobnou strukturu. Matematika dlouho zůstávala pouze pomocnou disciplínou a neměla ani speciální profesory.

Algebru a aritmetiku mimo univerzity učili řemeslní počtáři (zvaní *„Rechenmeister“*). Teoretickou matematiku studovali scholastičtí filosofové. Nejvýznamnějším středověkým církevním matematikem byl **Nicolas d´Oresme** (* 1323? – † 1382), který se zabýval lomenými mocninami a zavedl závisle proměnnou (šířku) vůči nezávisle proměnné (délce), kterou lze měnit.

Po pádu Cařihradu (1453) a zániku Byzantské říše se mnoho řeckých učenců uchýlilo do západních měst. Vzrostl zájem o původní řecké texty. Vůdčím matematikem 15. století byl **Johannes Müller** (* 1436 – † 1476), zvaný *Regiomontanus*. Tento učenec byl nejen pozoruhodným počtářem, ale i tvůrcem přístrojů a tiskařem. Podílel se na překladech a vydáních klasických matematických rukopisů. Hlavním dílem tohoto matematika bylo **De triangulis omnimodus libri quinque** (1464), které je systematickým úvodem do trigonometrie a obsahuje sinovou větu pro sférické trojúhelníky. Mnoho úsilí také věnoval sestavování trigonometrických tabulek.

[22] JUŠKEVIČ, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*. Str. 363.

Na přelomu 15. a 16. století překročila evropská matematika rámec znalostí, které byly vytvořeny v antickém Řecku a národy orientu. Mile překvapili italští počtáři, kteří ukázali, že je možné vytvořit dosud neexistující matematické teorie. Spolehlivě ovládali aritmetické výpočty včetně výpočtů s iracionálními čísly, italští malíři byli dobrými geometry.

Summa de Arithmetica (1494) je jedna z prvních tištěných knih, ve které shrnul františkánský mnich **Luca Pacioli** (* 1445 - † 1556?) výsledky vývoje aritmetiky. Řešením kubických rovnic se zabývali matematikové: **Scipio Del Ferro** (* 1465? – † 1526), **Niccoló Fontana Tartaglia** (* 1499 – † 1557), **Hieronymus Cardanus** (* 1501 – † 1576) a **Ludovico Ferrari** (* 1522 – † 1565).

Cardanova kniha **Ars magna** (1545) obsahuje postupy na řešení rovnic 3. a 4. stupně, jejichž výsledkem jsou tzv. *Cardanovy vzorce*. Postupy vymysleli jeho žáci Tartaglia, Ferro, resp. Ferrari. *„Cardano uvažoval též o záporných číslech, která nazýval „fiktivními“, ale nevěděl, co si počít s tzv. „casus irreducibilis“ kubické rovnice, v němž se objevila tři reálná řešení jako součet nebo rozdíl čísel, jež dnes nazýváme komplexními. Tato obtíž byla odstraněna posledním velkým bolognským matematikem 16. Století,* ***Raffaelem Bombellim*** *(* 1526 - † 1572), jehož* ***Algebra*** *vyšla roku 1572. V této knize – a v* ***Geometrii*** *napsané asi roku 1550, která však zůstala v rukopise – zavádí Bombelli důslednou teorii ryze imaginárních čísel.“* [23]

Důležitou oblastí matematického úsilí zůstávala i nadále astronomie. Vznikaly velké astronomické teorie Koperníka, Tychona Brahe a Keplera a vytvářelo se nové pojetí vesmíru. Vznikaly trigonometrické a astronomické tabulky, u kterých stoupala přesnost.

V roce 1593 učinil belgický matematik **Adriaen van Roomen** (* 1561 - † 1615) veřejnou výzvu, která požadovala řešení rovnice 45. stupně.

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + \cdots - 3795x^3 + 45x = A$$

Řešením této rovnice se také zabýval **Francois Viéte** (* 1540 – † 1603), který hledal řešení pomocí tabulek vyjádřením sin θ jako pravé strany rovnice. Viétovy hlavní myšlenky tkví ve zdokonalení teorie rovnic; jako jeden z prvních vyjadřoval čísla písmeny. Zdokonalovala se i početní technika, což bylo výsledkem zdokonalení symboliky. **Ludolph van Ceulen** (* 1540 - † 1610) vypočetl π na 35 míst.

[23] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 87.

Užil vepsaných a opsaných mnohoúhelníků se stále rostoucím počtem vrcholů. **Simon Stevin** (* 1548 – † 1620) spojoval praktický smysl s teoretickým pohledem a originalitou. *„V práci **La disme** (1585) zavedl Stevin desetinné zlomky jako součást návrhu na sjednocení systému měr na desetinném základě. Stevinovy desetinné zlomky byly jedním z velkých pokroků, které byly umožněny všeobecným zavedením indicko-arabského číselného zápisu. Dalším podstatným zlepšením počtářských metod byl objev logaritmů.“* [24] K tomu přispěl **John Napier** (* 1550 – † 1617) uveřejněním práce **Mirifici logarithmorum canonis descriptio** (1614), kde se zaobíral myšlenkou, jak konstruovat dvě vzájemně svázané číselné posloupnosti, z nichž jedna byla klesající geometrická a druhá rostoucí aritmetická. Tímto tématem se zabýval společně s profesorem **Henrym Briggsem** (* 1561 – † 1630), který po smrti Napiera uveřejnil **Arithmetica logarithmica** (1624). Obsahem jsou čtrnáctimístné logaritmy celých čísel od 1 do 20 000 a od 90 000 do 100 000. Holandský zeměměřič **Ezechiel de Decker** (* 1603 - † 1647) doplnil mezeru mezi 20 000 a 90 000 uveřejnil úplné logaritmické tabulky (1627). Nový objev byl uvítán nejen matematiky, ale i astronomy.

„Dlouhé období matematiky konstantních veličin se blížilo ke svému konci a začínalo období matematiky proměnných veličin, symbolické algebry, analytické geometrie a diferenciálního a integrálního počtu.“ [25]

[24] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 90.
[25] JUŠKEVIČ, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*. Str. 419.

3 Období matematiky proměnných veličin

Po probuzení Evropy z tisíciletého snu středověku, nastala epocha velkých vědeckých objevů. Rostla města a rozšiřoval se obchod vyžadující velké množství zboží. Ruční práce byly pomalé, a tak si lidé pomáhali různými hnacími a obráběcími stroji. *„S každým dalším desetiletím se stroje stávaly „rozumnějšími“ a složitějšími. Ale složitý stroj nelze stavět postaru, zkusmo, „od oka“. Je nutné ho předem propočítat. Tak se objevila nová věda – mechanika – věda o pohybu, která pomáhala propočítávat stroje. Ale všelijaké propočty a výpočty – vždyť to už je opět naše stará známá – matematika.“* [26]

„Již na začátku 17. století se velmi důrazně projevila podstatná změna v celé tvářnosti matematiky. Týkala se hlavně samého předmětu matematiky. Zatímco do té doby matematika zkoumala vlastně jen konstantní veličiny či tvary a jejím obsahem byla převážně „elementární matematika“, která byla jen nahodile doplněna výsledky jiného charakteru, začínají matematikové 17. a 18. století obracet svou pozornost stále více k otázkám funkčních závislostí, nekonečných procesů, limit, nekonečně malých veličin, derivací, projektivních transformací apod. Od 17. století se staly předmětem matematiky také proměnné veličiny a geometrické transformace.“ [27]

Do matematiky pronikaly podněty z „matematické přírodovědy“, která se snaží pomocí matematicky formulovaných obecných přírodních zákonů objasnit jednotlivé přírodní jevy. Matematika získala vahou svých výsledků všeobecnou podporu. Vznikly různé matematické instituce a první matematické časopisy.

3. 1. 1 17. století

První systematický výklad výsledků dosažených v oboru, který dnes nazýváme infinitesimálním počtem, podal **Bonaventura Cavalieri** (* 1598 – † 1647) v knize **Geometria indivisibilibus continuorum** (1635). Opíral se o teorii, podle které pohybem bodu vznikne přímka a pohybem přímky rovina. Výsledky shrnul v tzv. *„Cavalieriho principu“*, který říká, že dvě tělesa o stejné výšce mají stejný objem, jestliže rovinné řezy, vedené ve stejných výškách, mají vždy stejnou plochu. Postupný vývoj infinitesimálního počtu značně urychlil Francouz **René Descartes**

[26] DEPMAN, I., FOLTA, J., *Svět čísel*. Str. 73.
[27] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 210.

(* 1596 – † 1650) vydáním **Geometrie** (1637), která vznikla původně jako dodatek k práci **Discours de la méthode** (Rozprava o metodě) a podrobila klasickou geometrii metodám algebraiků. Velkou část knihy tedy zabírá teorie algebraických rovnic. Obsahuje *„Descartovo pravidlo"*, určující počet kladných a záporných kořenů. Je to první tištěná práce obsahující prvky tzv. analytické geometrie. *„Ačkoliv údajně nestudoval díla F. Viéty, dospěl k analogické algebraické symbolice. Zvolil symboly a, b, c, ... pro označovaní koeficientů, x, y, z, ... pro označení neznámých. Pro označovaní mocnin se až do té doby užívalo různých zkratek slov „čtverec", „krychle", apod. Descartes zavedl dnešní označení* x^2, x^3 *atd. Jeho zápisy rovnic — až na rovnítko — jsou tedy zcela moderní."* [28] Kartézská soustava souřadnic byla pojmenována podle Descartova latinského jména Renatus Cartesius.

Analytickou geometrii v rovině vybudoval společně s Descartem **Pierre Fermat** (* 1601 – † 1665). Základy souřadnicové metody zpracovával ještě dříve než Descartes. Fermat odvodil, že přímky lze popsat rovnicemi 1. stupně a kuželosečky rovnicemi 2. stupně. Je považován za zakladatele moderní teorie čísel, tzv. *malá Fermatova věta* je důležitou pomůckou při hledání velkých prvočísel. Mnohem slavnější je *velká Fermatova věta*, ze které se stal doslova matematický hlavolam tisíciletí. V roce 1638 objevil Fermat metodu určování maxim a minim. V jednoduché algebraické rovnici změnil proměnnou o malou diferenci a pak za tuto diferenci dosadil nulu. Diferencování využil také k hledání tečny. Řada Fermatových výsledků vešla ve známost až po jeho smrti, kdy byl publikován sborník jeho prací.

Společně s Fermatem se na vytvoření *teorie pravděpodobnosti* podílel **Blaise Pascal** (* 1623 – † 1666). První výsledky z teorie pravděpodobnosti a z kombinatoriky lze nalézt v jejich vzájemné korespondenci. Jeho první práce o kuželosečkách (1640), obsahuje jednu ze základních vět projektivní geometrie, tzn. *velká Pascalova věta*. Pascal se obsáhle věnoval číselným řadám a binomickým koeficientům. V práci **Traktát o aritmetických trojúhelnících** zavedl známý tzv. *Pascalův trojúhelník.* V roce 1642 zkonstruoval první mechanický počítací stroj. Tento stroj dokázal sčítat a odčítat.

Nezávisle na sobě **Isaac Newton** (* 1643 – † 1727) a **Gottfried Wilhelm Leibniz** (* 1646 – † 1716) vybudovali diferenciální a integrální počet. Koncepce obou matematiků však byla zcela odlišná. Newton chápal matematiku jako nástroj

[28] FUCHS, E., *Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele.* Str. 88.

fyzikálního poznávání světa. Leibniz vycházel z abstraktních koncepcí a budoval tak „čistou“ matematickou analýzu.

Newton vybudoval v algebře také metodu numerického řešení kvadratických rovnic a odvodil důležité věty o symetrických funkcích kořenů algebraických rovnic. Jeho kniha **Matematické principy přírodní filozofie** (Principia, 1687) je často označována za nejdůležitější dílo v dějinách vědy. Pospal zde rozvinutou teorii kuželoseček. Svými pracemi přispěl také k rozvoji analytické a projektivní geometrie. Zobecnil binomickou větu, vymyslel tzv. *„Newtonovu metodu“* řešení soustav nelineárních rovnic. Přispěl k výzkumu mocninných řad. Jeho práce zcela změnily koncem 17. století nazírání na svět a postavení člověka v něm.

„Leibniz definoval derivaci a integrál, zavedl symboly dx a R, odvodil základní vzorce pro derivování, popsal vzájemný poměr diferencování a integrování. Vybudoval základy teorie nekonečných řad a teorie diferenciálních rovnic. Od něho pocházejí dnes tak běžně používané pojmy jako například funkce, diferenciál, diferenciální rovnice, algoritmus aj.“ [29] Významně přispěl i k rozvoji logiky. Dále také vynalezl vlastní počítací stroj, na kterém již bylo možné násobit i dělit. *„Mnohé Leibnizove matematické myšlienky boli realizované až v 20. storočí a možno, že niektoré ešte len na realizáciu čekajú. Na uskutočnenie čakajú aj Leibnizove sny o znášanlivosti, porozumení a láske medzi ľuďmi a medzi národmi. Kiež by medzi nimi raz zavládla laibnizovská harmónia a mier.“* [30]

3. 1. 2 18. století

Toto století je především stoletím rozvinutí a využití metod infinitesimálního počtu a na jeho aplikace v mechanice. Tento kalkul aplikovala řada matematiků na jiné oblasti matematiky a mechanické problémy. V matematice se objevují i nové obory jako například počet pravděpodobnosti, diferenciální geometrie a na konci 18. století deskriptivní geometrie.

Díky stále rostoucí výměně informací se od 18. století vytváří celosvětový proud vývoje matematiky. Matematikové se začínají výhradně věnovat matematice. Matematika již není pěstována jen vedle jiného hlavního zaměření, například fyzikálního.

[29] FUCHS, E., *Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele.* Str. 225.
[30] ZNÁM, Š., a kol., *Pohĺad do dejín matematiky.* Str. 138.

Vývoj nejen matematiky velmi ovlivnila švýcarská rodina Bernoulliů. **Jakob Bernoulli** (* 1655 – † 1705) se zabýval matematickou analýzou, teorií pravděpodobnosti a mechanikou. Poprvé ve světové literatuře použil slovo *„integrál“*. Dokázal divergenci harmonické řady a řešil některé kombinatorické úlohy. Jméno Jakoba Bernouliho je spojeno s *Bernoulliovými čísly*, *Bernoulliovou větou* a *Bernoulliovým schématem*. Společně s bratrem **Johannem Bernoulliem** (* 1667 – † 1748) vyřešil úlohu o brachystroně a položili tak základy variačního počtu.

Za jednoho z nejslavnějších Bernoulliů byl považován **Daniel Bernoulli** (* 1700 – † 1782), syn Johanna. Výborných výsledků dosáhl v díle **Hydrodynamica** – odvodil tzv. *Bernoulliho rovnici*. V matematice se nejvíce zabýval algebrou, teorií pravděpodobností, teorií řad a diferenciálními rovnice. *„Definoval číslo e jako $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Jako první využil k řešení parciálních derivací diferenciálních rovnic trigonometrických řad, které byly později nazvány Fourierovými řadami.“* [31]

Danielův přítel, velmi významný matematik a fyzik **Leonhard Euler** (* 1707 – † 1783), byl nejplodnějším matematikem v historii. Jeho vědecké zájmy se týkaly prakticky všech přírodních věd, publikoval 865 vědeckých prací. Zvláště významné jsou práce z matematické analýzy, kterou systematicky rozpracovával po celý svůj život. Desítky jeho prací byly shrnuty do díla **Introductio in analysin infinittorum** (Úvod do analýzy nekonečně malých veličin, 1748). Poté vydal čtyřdílný traktát z analýzy. První díl byl věnován diferenciálnímu počtu, zbylé tři počtu integrálnímu. *„Objevil zásadní vztah mezi exponenciálními a trigonometrickými funkcemi, podílel se na rozpracování analytických metod teorie pravděpodobnosti. Téměř všechny oblasti matematiky překypují Eulerovými funkcemi, integrály, konstantami a důkazy. Je autorem řady matematických značek, které používáme dodnes. Patří k nim označení pro Ludolfovo číslo π, sumu Σ, integrál ∫, nekonečno ∞, základ přirozených logaritmů e, imaginární číslo $i = \sqrt{-1}$.“* [32] S použitím Newtonovy mechaniky sestavil a vyřešil *parciální diferenciální rovnici*, která popisuje změny tvaru struny v čase a prostoru. Je považován za zakladatele teorie grafů. Poslední léta svého života byl slepý, což mu nebránilo v tvorbě. Téměř polovinu svých prací vytvořil v posledních 10 letech života.

Základní matematické práce **Jeana Baptisty Ronda d'Alemberta** (* 1717 – † 1783) se týkají diferenciálních rovnic. Společně s Eulerem a Danielem Bernoullim

[31] FUCHS, E., *Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele.* Str. 35.
[32] HAŠKOVEC, V., MÜLLER, O., *Galerie géniů*. Str. 126.

je považován za zakladatele *matematické fyziky*. Významných výsledků dosáhl v hydrodynamice a mechanice, v roce 1743 zformuloval *d'Alembertův princip*.

Teorií řad, teorií pravděpodobnosti a komplexními čísly se převážně zabýval anglický matematik **Abraham de Moivre** (* 1667 - † 1754). Moivre objevil souvislosti mezi rekurentními formulemi a diferenčními rovnicemi a zformuloval pravidla pro počítání s komplexními čísly – *Moivreova věta*.

Vedoucí anglický matematik **Colin Maclaurin** (* 1698 - † 1746) proslul *„Maclaurinovou řadou"*, kterou se zabývá v knize **Treatise of Fluxios**. *„Tato řada však nebyla objevena Maclaurinem, protože se vyskytuje už v roce 1715 v práci* ***Methodus incrementorum****, napsané* ***Brookem Taylorem****. Maclaurin výslovně přiznává svou závislost na Taylorovi."* [33]

Matematik a mechanik italského původu **Joseph Louis Lagrange** (* 1736 - † 1813) se zajímal o matematickou analýzu a organizoval vědeckou společnost. Společně s Eulerem vydal roku 1774 práci, kterou se datuje vznik *variačního počtu*. Výsledky práce z oblasti mechaniky shrnul Lagrange v díle **Analytická mechanika** (1788); vybudoval jednotnou teorii - klasickou analytickou mechaniku jako teorii o obecných diferenciálních pohybových rovnicích. Ve dvou dílech vydal kurs analýzy (**Teorie analytických funkcí**, 1797; **Kapitoly z teorie funkcí**, 1801 – 1806). V teorii diferenciálních rovnic zavedl Lagrange metodu *variace konstant*.

Posledním z vůdčích matematiků 18. století byl **Pierre Simon de Laplace** (* 1749 – † 1827), jehož vědecká činnost byla velmi rozmanitá. *„Obě velké Laplaceovy práce, které zahrnují nejen jeho vlastní bádání, nýbrž i všechny dřívější výsledky o dotyčném předmětu, jsou* ***Théorie analytique des probabilités*** *(Analytická teorie pravděpodobnosti) z roku 1812 a pětisvazková nebeská mechanika* ***Mécanique céleste*** *z let 1799 - 1825."* Významných výsledků dosáhl nejen v matematice (teorie parciálních diferenciálních rovnic, teorie pravděpodobnosti aj.), ale i v nebeské matematice (teorie vzniku sluneční soustavy) a experimentální a teoretické fyzice. Podrobně studoval rovnici $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, která hraje významnou roli v teorii potenciálu a je dnes nazývána *Laplaceovou rovnicí*. Systematicky rozvíjel výsledky z teorie pravděpodobnosti, převážně Pascalovy, Fermatovy a Bernoulliů. Zdokonalil důkazové metody a odvodil limitní větu – *Laplace-Moivreovu větu*. Dále také zavedl vytvořující funkce a studoval integrální transformaci.

---

[33] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 133.

4 Období matematiky zobecněných prostorových a kvantitativních vztahů

Matematika v předchozích dvou staletích vytvořila bohatý systém abstraktních disciplín. Francouzská revoluce a napoleonská doba vytvořily příznivé podmínky pro další rozvoj v oblasti matematiky. V Evropě probíhala průmyslová revoluce. Největší rozmach průmyslu nastal v Anglii, ale matematika se nejvíce rozvíjela ve Francii a v Německu.

Poslední období trvá od počátku 19. století dodnes a je spjato s rostoucím využitím matematiky v různých oblastech života. Matematika se stává nepostradatelným prostředkem nejen celé fyziky, ale i jiných vědeckých a technických oblastí. Vzrůstá vědomí, že předmětem matematiky nejsou jen přírodní jevy, ale i jevy společenské.

4. 1. 1 19. století

V první polovině 19. století se začal měnit vztah matematiky a jejích aplikací. Matematika již nahromadila tolik poznatků, že jakýkoliv předložený problém mohla řešit známými metodami. Nahromaděné výsledky a jejich uplatnění v aplikacích si vynutily pro další vývoj novou abstrakci předmětu matematiky. Aby mohla matematika proniknout hlouběji do problematiky reálného světa, přešla na vyšší úroveň abstrakce. Nesoustředila se již na zodpovídání podnětů z jiných oblastí, začala se soustředit více na své problémy. Nový směr matematiky je charakterizován úsilím o přesnost pojmů a úvah. Matematika se rozvíjela nejsilněji ve Francii a později v Německu.

„Matematikové 19. století již nežili kolem královských dvorů či v aristokratických salónech. Jejich hlavním zaměstnáním již nebyla činnost v učených společnostech; byli obvykle zaměstnáni na univerzitách nebo technických školách a byli stejně učiteli jako badateli.“ [34]

[34] FUCHS, E., *Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele.* Str. 145.

Jedním z největších matematiků na dělící linii mezi 18. a 19. století je **Karl Friedrich Gauss** (* 1777 – † 1855). Vědecká práce Gausse byla neobyčejně mnohostranná. Prvořadých výsledků dosáhl v algebře, teorii čísel, diferenciální geometrii, geodézii, nebeské mechanice, teoretické astronomii, teorii elektřiny a magnetismu. V mnoha těchto směrech předznamenal jejich další vývoj. Ve své disertační práci (1799) podal první důkaz základní věty algebry. V práci **Aritmetické výpočty** (Disquisitiones arithmeticae, 1801) odvodil některé základní výsledky z teorie čísel a moderní algebry. Uvedena je zde také teorie kvadratických zbytků a zkoumání dělení kruhu – hledání kořene rovnice $x^n - 1 = 0$. To vedlo ke zjištění, že stranu pravidelného sedmnáctiúhelníku (obecněji pravidelného n – úhelníku, $n = 2^p + 1$, $p = 2^k$, n je prvočíslo, k = 0, 1, 2…) lze konstruovat pouze pomocí pravítka a kružítka. Gauss dosahoval neuvěřitelné zručnosti i ve výpočtové technice. Pro základní větu algebry našel celkem šest rozdílných důkazů. (Základní větu algebry poprvé zformuloval v 17. století Albert Girand.) V letech 1821 – 1823 publikoval metodu *nejmenších čtverců,* která se užívá v numerické matematice. Dodnes normální rozdělení pravděpodobnosti znázorňujeme *Gaussovou křivkou*. Přispěl také k rozvoji geometrie. Jako první dospěl k principům neeuklidovské geometrie, i když své výsledky z této oblasti nikdy nepublikoval.

Matematickou analýzou a teorií čísel se zabýval Francouz **Adrien-Marie Legendre** (* 1752 – † 1833). Mezi jeho nejdůležitější práce patří ty, které se týkají trigonometrie na kulové ploše. K tomuto účelu zavedl *Legendreovy polynomy* a také vybudoval jejich teorii. Nezávisle na Gaussovi vybudoval teorii nejmenších čtverců. Popsal vlastnosti prvočísel a přispěl k rozvoji teorie čísel. Napsal učebnici geometrie.

Dalším významným matematikem je zakladatel deskriptivní geometrie – **Gaspard Monge** (* 1746 – † 1818). Monge se zabýval také matematickou analýzou, chemií, metrologií a mechanikou. Je jedním ze zakladatelů pařížské Polytechniky. Monge je také autorem dodnes užívaného značení parciálních derivací v diferenciální geometrii. Mongeovým žákem byl **Victor Poncelet** (* 1788 – † 1867), který je zakladatelem projektivní geometrie.

S prvními léty pařížské polytechniky byli spjati mimo Lagrange a Monge i další významní matematici – **Simeón Poisson**, **Joseph Fourier** a **Augustin Cauchy**. Všichni tři se zajímali o užití matematiky ve fyzice; tímto zájmem byli vedeni k objevům v „čisté“ matematice.

Jméno **Simeóna Denise Poissona** (* 1781 – † 1840) je známo ve spojení s *Poissonovými závorkami* v diferenciálních rovnicích, Poissonovou konstantou v teorii elasticity, Poissonovým integrálem, Poissonovou rovnicí v teorii potenciálu a zákonem z teorie pravděpodobnosti.

Jedním ze zakladatelů matematické fyziky byl **Jean Baptiste Joseph Fourier** (* 1768 – † 1830). Hlavním oborem tohoto francouzského matematika byla matematická analýza, i když jeho první matematické výsledky se týkaly algebry (v roce 1796 dokázal tvrzení o počtu reálných kořenů algebraické rovnice ležící v zadaném intervalu – tzv. *Fourierova věta*). V roce 1822 zveřejnil své výsledky o studiu vedení tepla v pevných látkách (*Analytická teorie tepla*). Zde uveřejnil *Fourierovu metodu* řešení parciálních diferenciálních rovnic a rozvoj funkcí v trigonometrické řady, tzv. *Fourierovy řady*. Fourier také vypracoval teorie tzv. *Fourierova integrálu.*

Velmi plodná byla tvorba **Augustina Louise Cauchyho** (* 1789 – † 1857), který napsal přes 800 prací z matematické analýzy, matematické fyziky, teorie čísel, algebry a teoretické a nebeské mechaniky. Na vyšší úroveň povznesl přesnost matematických důkazů. Teorii matematické analýzy budoval s využitím pojmu limity. Například definoval spojitost funkce, vybudoval teorii konvergentních řad, stanovil podmínky konvergence *Taylorovy řady* k dané funkci, rozvíjel teorii determinantů, zavedl některé integrační metody v teorii parciálních diferenciálních rovnic a také pojmy: komplexní sdružená čísla, modul komplexního čísla, poloměr konvergence a určitý integrál jako limitu vhodných součtů. Dále můžeme znát *Cauchyho integrál* a *Cauchyho úlohu*.

Mezi významné matematiky 19. století patří i pražský matematik **Bernard Bolzano** (* 1781 – † 1848), který se zabýval matematickou analýzou, logikou, mechanikou a fyzikou. I když celý život prožil v Čechách, své práce psal německy. Bolzano udal jako první příklad spojité funkce, která nemá v žádném bodě derivaci. Tohoto objevu si však nebyl vědom. Významně přispěl k upřesnění pojmu limita a ke vzniku teorie množin.

Různé partie matematiky obohatil i norský matematik **Niels Henrik Abel** (* 1802 – † 1829). Abel podal důkazy mnoha závažných vět. Nejznámější je důkaz, že v obecných případech nejsou algebraické rovnice n-tého stupně při *n* ³ 5 řešitelné pomocí odmocnin. Dále se zabýval matematickou analýzou a teorií funkcí.

Za zakladatele moderní algebry je považován francouzský matematik **Éveriste Galois** (* 1811 – † 1832). Galois na základě konečných grup permutací vyložil teorii řešitelnosti algebraických rovnic pomocí odmocnin. Tato práce, která byla vydaná až v roce 1845, přispěla ke vzniku teorie grup kolem roku 1870. Galois zavedl do matematiky pojmy grupa, pologrupa, normální dělitel, aj.

Teorii eliptických funkcí se čtyřmi základními funkcemi definovanými nekonečnými řadami vybudoval **Carl Gustav Jacob Jacobi** (* 1804 – † 1851). Tento německý matematik dosáhl významným výsledků v teorii funkcí, teorii čísel, teorii diferenciálních rovnic, lineární algebře a mechanice.

Za den „zrození" neeuklidovské geometrie bývá považován 23. únor 1826, kdy ruský matematik **Nikolaj Ivanovič Lobačevskij** (* 1792 – † 1856) předložil svou práci **Zkrácený výklad základů geometrie** a poreferoval o ní na kazaňské univerzitě. Úplný výklad své geometrie podal v práci **Nové základy geometrie** s úplnou teorií rovnoběžek (1835 – 1838). Během svého života se však jeho práce nedočkaly všeobecného uznání.

O rozvoj geometrie se významně zasloužil také německý matematik **Bernard Georg Friedrich Riemann** (* 1826 – † 1866). Dosáhl mimořádných výsledků v teorii funkcí, v diferenciálních rovnicích, v matematické a teoretické fyzice. Zavedl tzv. *Riemannovu geometrii* (1854). Rozvíjel teorii matematického prostoru, do kterého zahrnoval funkcionální a topografické prostory. Formálně zavedl přesnou definici integrálu a zároveň dokázal jeho existenci. Jeho jméno nese řada tvrzení z různých oblastí matematiky (*Riemannův integrál*, *křivka*, *plocha, prostor* aj.).

Dalším krokem k zpřesňování základů matematiky byla teorie množin vytvořená německým matematikem, **Georgem Ferdinandem Ludwigem Philippem Cantorem** (* 1845 – † 1918). Základy teorie množin položil v letech 1873 – 1884. V roce 1974 publikoval důkaz o nespočetnosti množiny reálných čísel. Teorii množin vybudoval prakticky do dnešní podoby. Zabýval se také problémy teorie čísel, algebry a matematické analýzy.

Richard Dedekind (* 1831 - † 1916) proslul v oboru algebry a teorie čísel. Studoval problém iracionálních čísel novou exaktní metodou dnes zvanou *Dedekindovy řezy* a vytvořil tak jejich teorii.

Felix Klein (* 1849 - † 1925) se zajímal převážně o neeuklidovskou geometrii, teorii grup a teorii funkcí. Zformuloval *tzv. Erlangenský program*, kterým chtěl docílit větší propojení geometrie s algebrou. Program ovlivnil rozvoj matematiky a fyziky ve 20. století. V práci **Vorlesungen über das Ikosaeder** (1884) ukázal nové pohledy na stará platónská tělesa. *„O geometrii se právem říká, že je to jedna z nejstarších věd vůbec, která však prochází neustálým procesem omlazování a tím si uchovává půvab věčného mládí. A Kleinovy ideje trvale zůstávají její podstatnou složkou.“* [35]

Henri Poincaré (* 1854 - † 1912) byl největší matematik 2. poloviny 19. století. Je považován za zakladatele oboru analytických funkcí několika komplexních proměnných. V knize **Analýza polohy** (1895) zavedl prakticky všechny koncepty a klíčové metody, které se pak staly hnací silou oboru topologie po následujících 50 let.

4. 1. 2 20. století

„Matematika 20. století se obohatila ohromným množstvím teorií, jejichž předmětem studia jsou abstraktní objekty. Přes vysokou úroveň abstrakce současné matematiky je třeba vždy pamatovat, že jejími zdroji a kořeny byla objektivní realita.“ [36]

Velkému rozmachu se ve 20. století těšily teorie pravděpodobnosti a matematická statistika, které vyrostly z problematiky zpracování dat a statistických šetření. Rozvíjela se teorie množin a vznikly také nové teorie jako například teorie her a matematická informatika. Do matematiky začala zasahovat výpočetní technika.

Na přelomu 19. a 20. století ovlivnil vývoj matematiky **David Hilbert** (* 1862 – † 1943). Hilbert se zajímal prakticky o všechny oblasti matematiky a mnoha dosáhl mimořádných výsledků. V roce 1899 podal, v monografii **Základy geometrie**, úplný systém axiómů euklidovské geometrie. Ve 20. letech 20. století formuloval tzv. *Hilbertův program*, který byl pokusem o vybudování formální matematiky a prokázání její bezespornosti. Zformuloval také *23 Hilbertových problémů*, které považoval za významné pro další vývoj matematiky. Hilbertův program zhroutil americko-rakouský matematik a logik **Kurt Gödel** (* 1906 – † 1978) svou větou o neúplnosti (1930).

Funkcionální analýzou a teorií množin se například zabývali: polský matematik **Stefan Banach** (* 1892 – † 1945) britský fyzik a matematik **Paul Adrien Maurice Dirac** (* 1902 – † 1984).

---

[35] BEČVÁŘ, J., FUCHS, E., *Matematika v 19. století.* Str. 87.
[36] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 165.

Za největšího odborníka v teorii čísel první poloviny 20. století je považován anglický matematik **Godfrey Harold Hardy** (* 1877 – † 1947).

První monografie z teorie množin pochází od německého matematika **Felixe Hausdorffa** (* 1868 – † 1942). Základy teorie množin napsal v roce 1910. Hausdorffa lze považovat za zakladatele obecné topologie a teorie metrických prostorů. Teorií množin a základy matematiky se také zabýval izraelský matematik **Abraham Adolf Frankel** (* 1891 – † 1965).

Dalším významným matematikem 20. století byl **John von Neumann** (* 1903 – † 1957). Oblast zájmu Neumanna v matematice byla velmi široká, zabýval se například logikou, teorií množin, algebrou, teorií pravděpodobnosti a vývojem elektronických počítačů. Od třicátých let se zásluhou Neumanna začala rozvíjet teorie her. Společně s **Oscarem Morgensternem** (* 1902 – † 1977) zveřejnil roku 1944 práci – **Teorie her a ekonomické chování**, ve které aplikovali teorii her na ekonomii.

Vynikajících výsledků v matematice dosáhl také český matematik **Otakar Borůvka** (* 1899 – † 1995), který se zabýval projektivní geometrií, matematickou analýzou, teorií diferenciálních rovnic a algebrou. Borůvka vybudoval teorii rozkladů, která má světový význam.

5 Praktická část

Praktická část diplomové práce obsahuje zásobník 54 historických slovních úloh s výsledky. Úlohy, které zastupují možné procvičované učivo 2. stupně základní školy, jsou dále podrobně řešeny. Řešených úloh je celkem 21.

Zpracované historické úlohy mohou pomáhat učitelům základních škol při výuce matematiky. V práci jsou zahrnuty úlohy pro všechny ročníky 2. stupně základní školy. Některé úlohy se vztahují k přímo probíranému učivu, jiné mohou sloužit jako zpestření ve výuce či rozvoji logického myšlení.

Se čtyřmi historickými úlohami bylo pracováno s žáky 2. stupně základní školy. Vztah k historii matematiky a řešení historických úloh vyjádřili žáci v dotazníku.

5. 1 Přehled historických slovních úloh vztahujících se k učivu základní školy

Klasifikace vybraných historických úloh dle procvičovaného učiva a zařazení v ročníku základní školy:

Číslo úlohy procvičované učivo možné zařazení v ročníku ZŠ

Číslo úlohy	Procvičované učivo	Možné zařazení v ročníku ZŠ
1. – 4.	operace s přirozenými čísly	6.
5., 6.	posloupnosti (operace s přirozenými čísly)	(6.)
7.	Fibonacciho posloupnost	6.
8. – 22.	úsudek (základní početní operace)	6.
23., 24	převod	6.
25. – 27.	geometrické úlohy	6.
28. – 42.	rovnice o jedné neznámé	7.
43.	poměr	7.
44.	kvadratická rovnice	8.
45. – 47.	Pythagorova věta	8.
48. – 54.	dvě rovnice o dvou neznámých	9.

Texty úloh:

1) Sedm lidí má po sedmi kočkách, každá kočka sežere sedm myší, každá myš sežere sedm klasů, z každého klasu může vyrůst sedm měřic ječmene. Jak velké jsou jednotlivé počty a jejich celkový součet? [37]

(7, 79, 343, 2401 a 16807; 19607)

2) Rozdělte číslo 100 do dvou částí, jejichž rozdíl je 40. [38]

(30 a 70)

[37] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 17.
[38] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 94.

3) Myslete si čtyři jednociferná čísla. První vynásobte dvěma a přičtěte 5, součet vynásobte pěti, přičtěte 10 a druhé číslo. Získaný součet vynásobte deseti a přičtěte třetí číslo, nový výsledek vynásobte deseti a přidejte čtvrté číslo. Od získaného čísla odečtěte 3500. [39]

(Rozdíl bude čtyřciferným číslem zapsaným původně myšlenými čísly a, b, c, d.)

4) Homér Hesiodovi na otázku, jak velký byl počet Helénů, kteří táhli do pole proti Tróji. Bylo tam sedm ohnišť, mocný žár, ohniště pak obsahovalo padesát rožňů a na každém rožni byl kus masa. Ale každý ten kus obklopilo devět set Achájů. [40]

(315 000)

5) Nějaký král nařídil svému sluhovi sebrat ze třiceti vesnic vojsko takovým způsobem, že z každé vesnice vezme tolik mužů, kolik do ní vstoupilo. Šel tedy sám do první vesnice, do druhé šel s dalším, tedy do třetí šli čtyři. Řekni, kdo můžeš, kolik mužů bylo sebráno z oněch třiceti vesnic. [41]

(2^{30} = 1 073 741 824 mužů)

6) Jeden žebřík měl sto příčlí. Na prvním seděl jeden holub, na druhém dva, na třetím tři, na čtvrtém čtyři, na pátém pět, a tak na všech příčlích až do stého. Řekni, kdo můžeš, kolik bylo celkem holubů. [42]

(Holubů bylo celkem 5 050.)

7) Kolik párů potomků může mít v jednom roce jediný pár králíků, když: a) každý pár má v každém měsíci jednu dvojici potomků, která se od druhého měsíce rozmnožuje stejným způsobem; b) nevyskytují se žádné případy uhynutí? [43]

(Fibonacciho posloupnost 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)

[39] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy*. Str. 137.
[40] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 56.
[41] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 22.
[42] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 22.
[43] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*. Str. 80.

8) Hádanka

Jednou šel po cestě mul s oslicí, oba obtíženi vínem. Oslice pod nákladem zasténala, tehdy se mul, kterého ona s koněm jako syna měla, zeptal: „Mámo, proč jsi zavzdychala jako mladá dívčina?“ Oslice odpověděla, že se jen těžko pohybuje. „Oho, chtěla bys jako dívčina poskakovat! Já nesu víc, a není mi to zatěžko; kdybych od tebe vzal jeden měch, měl bych dvakrát víc než ty, a kdybys mi ty jeden odebrala, měli bychom oba stejně.“

Kdo chce ta čísla uhádnout, nemusí spočítat ani prsty obou rukou. [44]

(Mul nesl 7 měchů a oslice 5.)

9) Pes se žene za králíkem, který je 150 stop před ním. Pes urazí každým skokem devět stop, zatímco králík urazí sedm stop. Kolik skoků musí udělat pes, aby dohonil králíka? [45]

(75 skoků.)

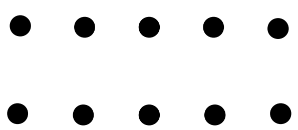
10) Kdosi má 24 liber vzácného oleje. Má k dispozici nádoby, které pojmou 13, 11 a 5 liber. Jak může pomocí těchto nádob rozdělit olej na tři stejná množství? [46]

(Po řadě nádoby o objemu 24, 13, 11 a 5 liber, výsledky přelévání: 24, 0, 0, 0; 0, 8, 11, 5; 16, 0, 8, 0; 3, 13, 8, 0; 3, 8, 8, 5; 8, 8, 8, 0.)

11) Kdosi měl 12 pint vína. Dále měl dvě nádoby, jednu na 8 pint, druhou na 5 pint. Jak lze nalít 6 pint vína do nádoby, který má objem 8 pint? [47]

(Po řadě nádoby o objemu 12, 8 a 5 pint, výsledky přelévání: 12, 0, 0; 4, 8, 0; 4, 3, 5; 9, 3, 0; 9, 0, 3; 1, 8, 3; 1, 6, 5; 6, 6, 0.)

12) Deset mincí je rozmístěno v rovině ve dvou řádcích (viz obr.). Mají se přemístit nejvýše čtyři mince, a to do takových poloh, aby se na pěti různých přímkách objevilo po čtyřech mincích. [48]



(Stačí přemístit jednu minci jedné řady a tři mince druhé řady. 300 různých řešení.)

[44] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 75.
[45] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 111.
[46] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 128.
[47] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 168.
[48] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 179.

13) Sedm mostů se klene přes říčku Pregel, na jejíchž březích se rozkládá město Kaliningrad. Lze uskutečnit procházku po městě tak, aby se po každém mostu přešlo právě jednou? [49]

(Procházku daným způsobem nelze uskutečnit.)

14) Jeden člověk měl převést v loďce přes řeku vlka, kozu a zelí. Do loďky se vejde člověk a s ním jen vlk nebo koza nebo zelí. Kdyby nechal kozu s vlkem bez dohledu, vlk by kozu sežral. Kdyby nechal kozu a zelí bez dohledu, koza by sežrala zelí. Jen za jeho dozoru nikdo nikoho nesežere. Jak člověk převeze všechny na druhý břeh? [50]

(Člověk převeze nejdřív kozu, potom se vrátí pro zelí. Na druhém břehu vyložil zelí, naložil kozu a vrátil se pro vlka, kde vyložil kozu. Vlka převezl na druhý břeh. Nakonec se vrátil pro kozu.)

15) Muž a žena, z nichž každý vážil jeden centnéř, mající dvě děti, které dohromady váží také jeden centnéř, se měli přepravit přes řeku. Nalezli loďku, která nemůže uvést více než jeden centnéř. Nechť uskuteční přepravu, kdo může, aniž by se loďka potopila. [51]

(Nejprve se přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět. Pak se přepraví matka a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět. Potom se opět přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět, načež se přepraví otec a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět; celá akce se uzavře závěrečnou přepravou obou dětí.)

16) Nějaký zemřelý otec zanechal jako dědictví třem synům třicet skleněných lahviček, z nichž deset bylo plných oleje, dalších deset do poloviny, třetích deset bylo prázdných. Ať rozdělí, kdo může, olej i lahvičky, aby každému ze tří synů připadlo stejně jak lahviček, tak oleje. [52]

(Jeden syn dostane10 lahví naplněných do poloviny, druhý a třetí dostanou 5 prázdných a 5 plných láhví.)

[49] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 201.
[50] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 11.
[51] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 11.
[52] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 31.

17) Žádám tě, abys mi řekl, kolik brázd má na svém poli vyoraných muž, když na obou koncích pole udělal tři obraty. [53]

(Vyoraných brázd má 7.)

18) Sedm kolářů udělalo po sedmi kolech. Ať řekne, kdo chce, kolik vozů postavili. (Jeden vůz má 4 kola.) [54]

(Bylo postaveno 12 vozů a jedno kolo zbylo.)

19) Nějaký umírající otec rodiny zanechal svým čtyřem synům čtyři nádobky s vínem. V jedné nádobě bylo 40 měřic, ve druhé 30, ve třetí 20 a ve čtvrté 10 (měřic). Zavolal správce svého domu a řekl: „Tyto čtyři nádobky s vínem zanechaným uvnitř rozděl mezi mé čtyři syny a to tak, aby každý z nich měl stejný díl jak vína, tak nádob.“ Ať řekne, kdo chápe, jakým způsobem je třeba rozdělit, aby všichni z toho mohli dostat stejně. [55]

(Nádoby s 10 a 40 měřicemi se slijí a rozdělí na půl, totéž nádoby s 20 a 30 měřicemi.)

20) Lovec poštval psa na lišku, která má před psem náskok 60 skoků. Zatímco liška udělá 9 skoků, pes udělá 6 skoků, ale tři skoky psí jsou rovny sedmi skokům liščím. Kolik skoků udělá pes, než dožene lišku? [56]

(Pes udělá 72 skoků, liška 108.)

21) 12 osob, muži a ženy, utratili při hostině 82 zlatých. Každý muž utratil 8 zlatých, žena 6 zlatých. Kolik bylo mužů a kolik žen? [57]

(Hostiny se zúčastnilo 5 mužů a 7 žen.)

22) Mísa, která vážila 30 liber čili 600 solidi je vyrobena ze zlata, stříbra, mosazi a cínu. Stříbra má třikrát více než zlata, mosazi má třikrát více než stříbra a cínu třikrát více než mosazi. Ať řekne, kdo může, kolik každého kovu obsahuje. [58]

(Mísa obsahuje 15 solidi zlata, 45 stříbra, 135 mosazi a 405 cínu.)

---

[53] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 31.
[54] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 32.
[55] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 35.
[56] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 97.
[57] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 100.
[58] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 30.

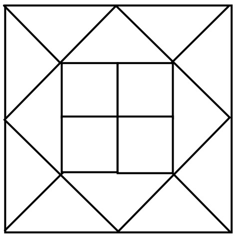
23) Nějaký člověk jdoucí po cestě nalezl měšec se dvěma talenty. Viděli to nějací jiní (lidé) a řekli mu: „Bratře, dej nám část svého nálezu.“ On odmítl a nechtěl jim nic dát. Oni ho však napadli, roztrhli mu měšec a každý si vzal 50 zlatých. A když (on) potom viděl, že se nemůže ubránit, vztáhl ruku a uchvátil 50 zlatých. Ať řekne, kdo chce, kolik bylo lidí. (1 talent = 75 liber, 1 libra = 72 zlatých) [59]

(Lidí bylo 216.)

24) Hlemýžď byl od vlaštovky pozván na svačinu ve vzdálenosti jedné galské míle. Hlemýžď však nemohl za den ujít více než jednu unci stopy. Ať řekne, kdo by chtěl, za kolik dní by hlemýžď dorazil na onu svačinu. (1 galská míle = 2,25 km = = 1 500 dvojkroků, 1 dvojkrok = 5 stop, 1 stopa = 12 uncí) [60]

(Hlemýžď by dorazil na svačinu za 90 000 dní.)

25) Jednotkový čtverec se má rozdělit na 12 shodných trojúhelníků a čtyři shodné čtverce (viz obr.). Je třeba vypočítat obsah trojúhelníku a čtverce. [61]



(Obsah čtverce se rovná obsahu trojúhelníku a činí $\frac{1}{16}$.)

26) Mám lněné plátno dlouhé 60 loktů, široké 40 loktů. Chci je rozdělit na části tak, aby každá část měla na délku 6 loktů a na šířku 4, ať stačí na obvyklou tuniku. Ať řekne, kdo chce, kolik tunik z něj lze zhotovit. [62]

(Lze zhotovit 100 tunik.)

27) Je pole, které má na délku 200 stop a na šířku 100 stop. Chci na ně umístit ovce a to tak, aby každá ovce měla na délku 5 stop a na šířku 4 stopy. Ať řekne, žádám, kdo může, kolik ovcí tam může být umístěno. [63]

(Lze umístit 1 000 ovcí.)

[59] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 30.
[60] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 29.
[61] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 30.
[62] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 23.
[63] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 23.

28) Pastýře, který hnal 70 býků, se zeptali: „Jak velkou část svého početného stáda býků ženeš?“ Odpověděl: „Ženu dvě třetiny z třetiny dobytka.“ Kolik býků bylo v celém stádu? [64]

(315 býků.)

29) Ze čtyř lidí, kteří obětovali v chrámu, druhý dal dvakrát více než první, třetí třikrát více než druhý a čtvrtý čtyřikrát více než třetí, a všichni dohromady dali 132. Kolik dal první? [65]

(První dal 4.)

30) Holubice sedící na stromě viděla jiné letící (holubice) a řekla jim: „Kdybych viděla ještě tolik a potřetí tolik, pak by jich společně se mnou bylo sto.“ Ať řekne, kdo může, kolik holubic letělo na začátku. [66]

(Holubic letělo 33.)

31) Ctihodný Pythagore, potomku helikónských múz, řekni mi, prosím tě o to, kolik v tvém domě na zápasišti vědy dlí žáků horlivě usilujících o odměnu vítězi? Chci ti to říci, ó Polykrate. Pohleď, polovina se zabývá krásnou matematikou, čtvrtina naopak usiluje o poznání přírody, té nesmrtelné, sedmina pak setrvává zcela v mlčení promýšlejíc to, co vyslechla. Připočti k tomu tři ženy, z nichž Theano vyniká; tolik jich vedu ke kněžství pierských múz. [67]

(Žáků bylo 28.)

32) *Diofantův epitaf:* Prach Diofantův v hrobě je skryt, pohleď, i kámen moudrým uměním (= matematicky) prozradí zemřelého věk: Zvůle bohů byl po šestinu života dítětem a za další polovinu šestiny se dočkal chmýří na lících. Jak minula sedmina, oženil se s milovanou svojí, pět let s ní prožil, než syna dočkal se mudrc. Jen do poloviny svého věku se otec se synem těšil, brzy mohyla dítě otci skryla. Dvakrát dva roky otec oplakával syna, než po třech letech dočkal se svého smutného konce. [68]

(Diofantos se dožil 84 let.)

[64] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 16.
[65] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 81.
[66] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 29.
[67] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 45.
[68] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 74.

33) Proč mi hrozíš bitím kvůli ořechům, matko? Podělily se z toho půvabné dívky. Pohleď, Melission si vzala dvě sedminy ořechů, Titane potom dvanáctinu, šestinu a třetinu si naopak vzaly Astioche a Philinna, ty veselé; dvacet si pak vzala Thetis, ta zlodějka, dvanáct ještě Thisbe; Glauke však – jen se podívej, jak se směje – drží v rukách jedenáct. A tohle je ten jediný ořech, který mi ještě zůstal. [69]

(Celkem bylo 336 ořechů.)

34) Já mohyla skrývám nešťastné děti Philinniny, kterých tak mnoho marně přivedla na svět. Mladíků bylo pětina, třetina byla ještě panen, pak ještě dcery tři, které teprve krátce byly provdány. Konečně byly ještě čtyři, světla a hlasu postrádající, které tam k Acheronu klesly z matčina klína. [70]

(Celkový počet dětí je 15.)

35) Prolejte slzy, než půjdete dále. Zde jsme pohřbeni my, které ubil řítící se Antiochův dům. Hodující seděli jsme zde, když bůh nám hodovní síň proměnil v hrob. Čtyři Tegeaté to jsou, kteří zde leží, dvanáct Messeňanů a pět ještě z Agru, ale polovina hostů byla z města Sparty. Též Antiochie sám zahynul, pětina z pětiny byly Athéňané. Korint pláče nad jediným Hylasem. [71]

(Celkový počet obětí je 50.)

36) Poslové dvou měst, např. z Lyonu a Paříže se ve stejné době vydali na cestu proti sobě. Pařížský posel urazil každý den o dvě míle více než lyonský a za čtyři dny se setkali. Obě města jsou od sebe vzdálena 104 mil. Má být stanoveno, kolik mil každý z nich urazil za den a kolik celkem. [72]

(Lyonský 12 mil za den, pařížský 14 mil za den. Celkem půjdou 4 dny: 48 a 56.)

37) Pán se dohodl se sluhou takto: „Budeš-li pracovat, dám ti za den kromě stravy 12 grošů. Když budeš odpočívat, zaplatíš za stravu 8 grošů.“ Za rok, tedy za 365 dní, pán nedlužil nic sluhovi ani sluha pánovi. Kolik dní sluha pracoval a kolik odpočíval? [73]

(Sluha pracoval 146 dní a odpočíval 219 dní.)

---

[69] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 48.
[70] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 50.
[71] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 54.
[72] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 98.
[73] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 100.

38) Tři obchodníci vydělali 400 zlatých. Druhý získal o 12 víc než první, třetí o 16 víc než druhý. Kolik každý získal? [74]

(První 120, druhý 132, třetí 148.)

39) Jsou čtyři fontány. První naplní nádrž za den, druhá za dva, třetí za tři a čtvrtá za čtyři dny. Jakpak dlouho trvá, jsou-li všechny otevřené? [75]

(K naplnění nádrže stačí $\frac{12}{25}$ dne.)

40) Vodní nádrž má pět přívodních struh. Jestliže otevřeme jen první z nich, nádrž se naplní za třetinu dne, když jen druhou, naplní se za den, když jen třetí – za dva a půl dne, když jen čtvrtou – za tři dny, když jen pátou – za pět dní. Za kolik dní se nádrž naplní, když otevřeme všechny přívodní strouhy? [76]

(Za $\frac{15}{74}$ dne.)

41) V Aténách byl vodojem s třemi rourami. První mohla naplnit vodojem za hodinu, druhá za dvě hodiny, třetí za tři hodiny. Za jakou část hodiny mohly naplnit vodojem všechny tři roury společně? [77]

(Za $\frac{11}{6}$ hodiny.)

42) Jsem bronzový lev. Z chodidla pravé nohy, z obou očí a z úst proudí ven voda. Za dva dny naplní nádrž pravé oko, levé pak za tři, ale noha za čtyři. Už šest hodin stačí ústům. Jakpak dlouho to trvá, jsou-li současně otevřeny oči a noha a ústa? (1 den = 12 hodin) [78]

(K naplnění nádrže stačí $3 + \frac{33}{37}$ hodiny.)

43) Jeden umírající člověk řekl: „Jestliže se mé ženě narodí syn, ať mu patří dvě třetiny jmění a zbytek mé ženě. Jestliže se narodí dcera, ať jí patří třetina a ženě dvě třetiny.“ Narodila se dvojčata – syn a dcera. Jak se má rozdělit jmění, aby se splnila závěť nebožtíka? [79]

(Jmění syna, manželky a dcery musí být v poměru 4 : 2 : 1.)

[74] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 99.
[75] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 52.
[76] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 93.
[77] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 196.
[78] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 57.
[79] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 70.

44) Stádo opic bavících se v háji se rozdělilo na dvě části. Čtverec osminy jejich počtu se bavil skákáním ve větvích. Dvanáct opic vítalo radostným křikem tichý rozbřesk dne. A teď řekni, jinochu, kolik opic bylo v háji. [80]

($\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x, x_1 = 48, x_2 = 16$)

45) Oštěp stojí svisle ve vodě a nad její hladinou vyčnívá o tři lokty. Vítr ho nachýlil tak, že jeho vrchol je na hladině, ale spodní hrot nezměnil svou polohu. Určete délku oštěpu, jestliže vzdálenost nové polohy vrcholu od původního místa vnoření oštěpu do vody se rovná 5 lokům. [81]

(Oštěp je dlouhý $5\frac{2}{3}$ lokte.)

46) Rákos ční nad vodou o jeden aršin. Máme určit hloubku říčky, kde rákos roste, ale nesmíme rákos vytrhnout ani měřit hloubku veslem či jiným předmětem. [82]

($x = 4$)

47) Dvě věže stojí ve vzdálenosti 50 stop, jedna je vysoká 40 stop a druhá 30 stop. Ke kašně umístěné mezi nimi slétávají současně ptáci, kteří seděli na vrcholcích věží. Protože letí stejnou rychlostí, doletí na kašnu současně. Určete vzdálenost kašny od věží. [83]

(18 stop a 32 stop.)

48) Během souboje kohoutů se jeden z diváků dohodl s jejich majiteli. Prvnímu řekl: „Když zvítězí tvůj kohout, dáš mi svou výhru, když prohraješ, zaplatím ti dvě třetiny možné výhry.“ Druhému soupeři řekl: „Když zvítězí tvůj kohout, dáš mi svou výhru, když prohraješ, zaplatím ti tři čtvrtiny možné výhry.“ V obou případech získá divák 12 penízů. Jakou výhru mohl získat každý účastník (majitel kohouta)? [84]

($x = 42$, $y = 40$)

[80] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy*. Str. 86.
[81] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy*. Str. 106.
[82] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy*. Str. 203.
[83] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy*. Str. 115.
[84] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy*. Str. 84.

49) Několik lidí společně kupuje berana. Když každý přispěje pěti penízi, bude chybět 45 penízů do ceny berana. Když každý přispěje sedmi penízi, budou chybět tři peníze. Kolik je lidí a jakou cenu má beran? [85]

(21 lidí, beran stojí 150 penízů.)

50) Dva lidé A, B obdrželi určitý počet mincí, který se má mezi ně rozdělit tak, že když k mincím A přidáme polovinu mincí B nebo k mincím B přidáme dvě třetiny mincí A, v obou případech dostaneme 48. Kolik mincí obdržel každý z lidí A, B? [86]

($x = 36$, $y = 24$)

51) Třem sochám: Zethovi, Amphionovi a jejich matce.
My dva jsme dohromady těžcí dvacet min, já Zethos a bratr. Když mi vezmeš třetinu a Amphionovi čtvrtinu, vyjde právě matčina váha, šest min. [87]

(Zethova socha má hmotnost 12 min a Amphionova 8 min.)

52) Nějaký učitel měl tolik žáků, že kdyby každý přinesl 5 zlatých na zakoupení domu, chybělo by ještě 30 zlatých, kdyby však každý přinesl 6 zlatých, přebývalo by 40 zlatých. Kolik bylo žáků a jaká byla cena domu? [88]

(Žáků bylo 70, cena domu 380 zlatých.)

53) Jeden boháč daroval chuďasům almužnu; každý chuďas dostal 7 grošů a 24 grošů zbylo. Kdyby každý chuďas dostal 9 grošů, nedostávalo by se 32 grošů. Kolik bylo chuďasů a kolik bylo grošů? [89]

(Chuďasů bylo 28, grošů bylo 220.)

54) 4 lokty červeného plátna a 3 lokty černého plátna stojí 29 zlatých, 2 lokty červeného plátna a 5 loktů černého plátna stojí 25 zlatých. Kolik stojí loket červeného a kolik loket černého? [90]

(Loket červeného stojí 5 zlatých, loket černého 3 zlaté.)

[85] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 93.
[86] KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy.* Str. 95.
[87] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 58.
[88] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 95.
[89] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 100.
[90] MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh.* Str. 100.

5. 2 Řešení vybraných úloh

Číslo úlohy: 1

Text úlohy:
Sedm lidí má po sedmi kočkách, každá kočka sežere sedm myší, každá myš sežere sedm klasů, z každého klasu může vyrůst sedm měřic ječmene. Jak velké jsou jednotlivé počty a jejich celkový součet?

Rozbor úlohy:
Úlohy může být řešena úsudkem, řešení zvládnou žáci i bez znalosti mocnin. Postupně zjišťujeme jednotlivé počty.

Řešení úlohy:

Lidí	7 lidí
7 lidí má po 7 kočkách	$7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ koček
Každá ze 49 koček sežere 7 myší	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343$ myší
Každá z 343 myší sežere 7 klasů	$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401$ klasů
Z každého z 2401 klasu může vyrůst 7 měřic	$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16807$ ječmene
	19607

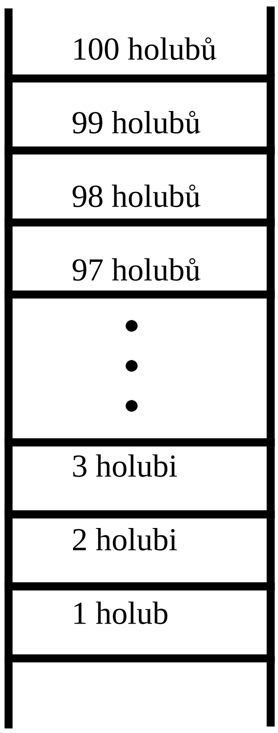
Jednotlivé počty jsou: 7, 49, 343, 2401 a 16807.
Celkový součet jednotlivých počtů je 19607.

Číslo úlohy: 6

Text úlohy:
Jeden žebřík měl sto příčlí. Na prvním seděl jeden holub, na druhém dva, na třetím tři, na čtvrtém čtyři, na pátém pět, a tak na všech příčlích až do stého. Řekni, kdo můžeš, kolik bylo celkem holubů.

Rozbor úlohy:
Žebřík má celkem 100 příčlí. Na poslední příčli bude tedy sedět 100 holubů. Musíme zjistit součet 1 + 2 + 3 + 4 + …+ 96 + 97 + 98 + 99 +100. Pokud si uvědomíme, že počet holubů sedících na 1. příčli a počet holubů sedících na 99. příčli nám dá součet 100, je pro nás výpočet mnohem jednodušší. Na 2. příčli sedí 2 holubi a na 98. příčli sedí 98 holubů, jejich součet je také 100 holubů. Takto získáme 49 párů, jako poslední sečteme 49 + 51. Padesátá a stá příčle nám zůstanou samostatně (nemají žádnou příčli do páru), tyto příčle poté přičteme k výsledku.

Řešení úlohy:



Počet holubů sedících na příčlích, kteří jsou do páru (součet je 100):

(1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + … + (48 + 52) + (49 + 51) = 49.100 = 4 900

Počet holubů sedících na příčlích, kteří nejsou do páru:

100 + 50 = 150

Celkem holubů:

4900 +150 = 5050

Celkem bylo **5050 holubů.**

Číslo úlohy: 8

Text úlohy:

Hádanka

Jednou šel po cestě mul s oslicí, oba obtíženi vínem. Oslice pod nákladem zasténala, tehdy se mul, kterého ona s koněm jako syna měla, zeptal: „Mámo, proč jsi zavzdychala jako mladá dívčina?“ Oslice odpověděla, že se jen těžko pohybuje. „Oho, chtěla bys jako dívčina poskakovat! Já nesu víc, a není mi to zatěžko; kdybych od tebe vzal jeden měch, měl bych dvakrát víc než ty, a kdybys mi ty jeden odebrala, měli bychom oba stejně.“

Kdo chce ta čísla uhádnout, nemusí spočítat ani prsty obou rukou.

Rozbor úlohy:

Úloha může být řešena úsudkem nebo pomocí rovnic.

Řešení úlohy:

Mul nesl více měchů než oslice.

Nejprve se budeme snažit vyřešit druhý úkol: „*…kdybys mi ty jeden odebrala, měli bychom oba stejně.*“ Vyplníme tabulku, jaký náklad mohli mul a oslice vést. Dále víme, že hledaná čísla jsou menší než 10.

Mul	3	4	5	6	7	8	9
Oslice	1	2	3	4	5	6	7

Nakonec otestujeme získané hodnoty v tabulce podle první informace: „*Kdybych od tebe vzal jeden měch, měl bych dvakrát víc než ty.*“

Zjistíme, že jediné řešení, které vyhovuje zadání, je řešení [7, 5].

Mul nesl 7 měchů obilí a oslice nesla 5 měchů obilí.

Číslo úlohy: 9

Text úlohy:

Pes se žene za králíkem, který je 150 stop před ním. Pes urazí každým skokem devět stop, zatímco králík urazí sedm stop. Kolik skoků musí udělat pes, aby dohonil králíka?

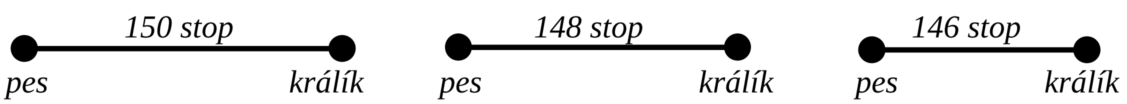
Rozbor úlohy:

Úloha může být řešena úsudkem nebo pomocí lineární rovnice o jedné neznámé.

Řešení úlohy:

Králík má náskok 150 stop.
Pes urazí jedním skokem 9 stop.
Králík urazí jedním skokem 7 stop.
Kolik skoků musí udělat pes, aby dohonil králíka?

po jednom skoku po dvou skocích… atd.



Pes se každým svým skokem přiblíží ke králíkovi o dvě stopy. Udělá-li jeden skok, králík má náskok 148 stop před psem, udělá-li dva skoky, náskok je 146 stop. Aby pes králíka dohonil, musí udělat (150 : 2) skoků.

(150 : 2) = 75

Pes musí udělat 75 skoků, aby dohonil králíka.

Číslo úlohy: 10

Text úlohy:
Kdosi má 24 liber vzácného oleje. Má k dispozici nádoby, které pojmou 13, 11 a 5 liber. Jak může pomocí těchto nádob rozdělit olej na tři stejná množství?

Rozbor úlohy:
Úloha je řešena úsudkem. Postupně budeme „přelévat“ olej do nádob, až dojdeme k požadovanému rozdělení oleje. K „přelévání“ musíme využít i nádobu o objemu 24 liber, jinak by úloha neměla řešení.

Řešení úlohy:

24 : 3 = 8
Naším úkolem je rozdělit olej do tří nádob po 8 librách. Z čehož plyne, že nádoba o objemu 5 liber nám bude sloužit pouze jako pomocná. Po konečném rozdělení zůstane prázdná.

Řešení můžeme zapsat do následující tabulky. V prvním řádku je uveden objem nádob, které máme k dispozici. Na dalších řádcích je již uvedeno, kolik oleje se právě nachází v jednotlivých nádobách. Na začátku máme olej pouze v nádobě, která pojme 24 liber oleje, poté již začneme olej „přelévat“.

objem nádob	24	13	11	5
	24	0	0	0
1. přelití	0	8	11	5
2. přelití	16	0	8	0
3. přelití	3	13	8	0
4. přelití	3	8	8	5
5. přelití	8	8	8	0

Olej se nám podařilo rozdělit na požadované množství po 5 přelitích.

Číslo úlohy: 15

Text úlohy:

Muž a žena, z nichž každý vážil jeden centnéř, mající dvě děti, které dohromady váží také jeden centnéř, se měli přepravit přes řeku. Nalezli loďku, která nemůže uvést více než jeden centnéř. Nechť uskuteční přepravu, kdo může, aniž by se loďka potopila.

Rozbor úlohy:

Tato úloha je tzv. Převoznická úloha. Úlohu řešíme úsudkem, jednotlivé kroky převozu je vhodné si rozkreslit nebo rozepsat. Dítě může samo veslovat a na loďce se vždy musí někdo přepravovat.

Pro zajímavost: 1 centnéř = 61,65 kg.

Řešení úlohy:

Loď uveze 1 centnéř. Na loďce se tedy může přepravovat: muž (M), žena (Ž), první dítě (D_1), druhé dítě (D_2) nebo obě děti společně (D_1, D_2).

Jedno z možných řešení:

1. břeh	2. břeh
M, Ž, D_1, D_2	-
M, Ž	D_1, D_2
M, Ž, D_2	D_1
M, D_2	D_1, Ž
M, D_1, D_2	Ž
M	Ž, D_1, D_2
M, D_2	Ž, D_1
D_2	Ž, D_1, M
D_1, D_2	Ž, M
-	M, Ž, D_1, D_2

Nejprve se přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět. Pak se přepraví matka a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět. Potom se opět přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět, načež se přepraví otec a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět; celá akce se uzavře závěrečnou přepravou obou dětí.

Číslo úlohy: 19

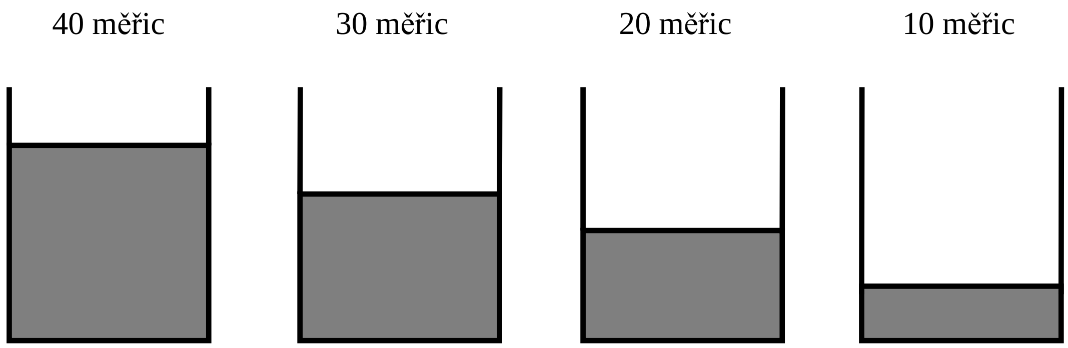
Text úlohy:

Nějaký umírající otec rodiny zanechal svým čtyřem synům čtyři nádobky s vínem. V jedné nádobě bylo 40 měřic, ve druhé 30, ve třetí 20 a ve čtvrté 10 (měřic). Zavolal správce svého domu a řekl: „Tyto čtyři nádobky s vínem zanechaným uvnitř rozděl mezi mé čtyři syny a to tak, aby každý z nich měl stejný díl jak vína, tak nádob.“ Ať řekne, kdo chápe, jakým způsobem je třeba rozdělit, aby všichni z toho mohli dostat stejně.

Rozbor úlohy:

K dispozici máme celkem 100 měřic vína ve čtyřech nádobách. Každý ze synů musí dostat stejný díl vína i nádob. Víno můžeme slévat a přelévat. Každý ze synů dostane jednu nádobu s 25 měřicemi.

Řešení úlohy:



Celkem máme: (40 + 30 + 20 +10) = 100 měřic vína.

Každý ze synů dostane: (100 : 4) = 25 měřic vína v jedné nádobě.

Rozdělení měřic vína (víno můžeme slévat a rozlévat):

Víno v první a poslední nádobě slijeme => získáme 50 měřic vína a rozlijeme napůl => => získáme dvakrát 25 měřic vína.

Víno v druhé a třetí nádobě také slijeme, získáme 50 měřic vína a znovu rozlijeme napůl a získáme opět dvakrát 25 měřic vína.

Každý ze synů získá v jedné nádobě 25 měřic vína.

Číslo úlohy: 24

Text úlohy:
Hlemýžď byl od vlaštovky pozván na svačinu ve vzdálenosti jedné galské míle. Hlemýžď však nemohl za den ujít více než jednu unci stopy. Ať řekne, kdo by chtěl, za kolik dní by hlemýžď dorazil na onu svačinu.

Rozbor úlohy:
Úloha se zabývá převáděním jednotek. Převedeme-li galskou míli na unce a vydělíme takto získanou vzdálenost rychlostí hlemýždě, získáme počet dnů, které stráví hlemýžď na cestě na svačinu. Vztah mezi jednotkami je z původního zadání této úlohy.

Řešení úlohy:

Vzdálenost hlemýždě od vlaštovky ……………….. 1 galská míle.
Hlemýžď ujde za den ………………………………. 1 unci.
Kolik dní mu bude trvat cesta?

1 galská míle = 1500 dvojkroků = 75000 stop = 90000 uncí

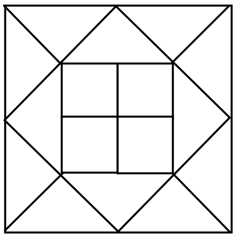
Za jeden den urazí hlemýžď 1 unci => cesta bude hlemýždi trvat (90000 : 1) dní, tedy 90000 dní.

Hlemýžď by na svačinu dorazil za 90000 dní.

Číslo úlohy: 25

Text úlohy:

Jednotkový čtverec se má rozdělit na 12 shodných trojúhelníků a čtyři shodné čtverce (viz obr.). Je třeba vypočítat obsah trojúhelníku a čtverce.

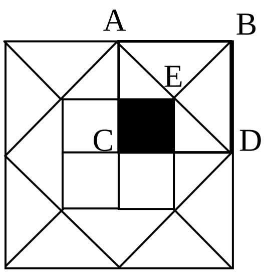


Rozbor úlohy:

Rozdělený čtverec je jednotkový, jeho rozměr je tedy 1.

Řešení úlohy:

Obsah dvou trojúhelníků:



délka strany čtverce ABCD je rovna $\frac{1}{2}$

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Obsah trojúhelníku:

$$S_{\Delta ABE} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$$

Obsah černého čtverce:

$$S_{\blacksquare} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$$

Obsah trojúhelníku i čtverce je stejný, $\frac{1}{16}$ jednotkového obsahu.

Číslo úlohy: 51

Text úlohy:

Mám lněné plátno dlouhé 60 loktů, široké 40 loktů. Chci je rozdělit na části tak, aby každá část měla na délku 6 loktů a na šířku 4, ať stačí na obvyklou tuniku. Ať řekne, kdo chce, kolik tunik z něj lze zhotovit.

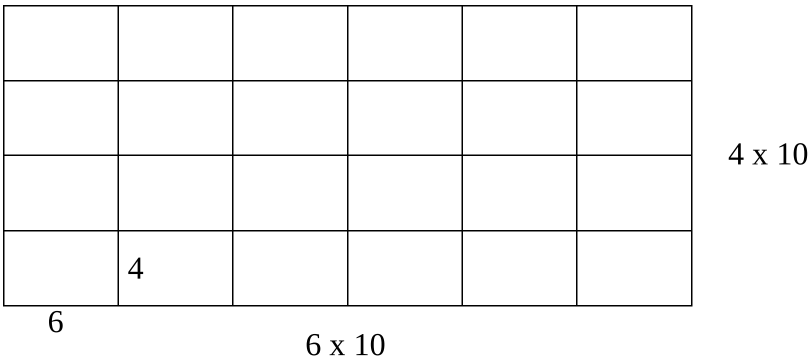
Rozbor úlohy:

Lněné plátno se snažíme pokrýt díly na tuniky.

Řešení úlohy:

Plátno má rozměry 60 x 40.

Díl na tuniku musí mít rozměr 6 x 4 lokty.



Kolik lze zhotovit tunik?

Z plátna o délce 60 loktů můžeme ustřihnout (60 : 6) = 10 pruhů plátna o délce 6 loktů a šířce 40 loktů.

Z jednoho pruhu o šířce 40 loktů můžeme ustřihnout (40 : 4) = 10 dílů plátna o rozměrech 6 x 4. Z 10 pruhů plátna o šířce 40 loktů vznikne tedy (10 . 10) = 100 dílů na ušití tunik.

Ze sukna o velikosti 60 x 40 loktů lze ustřihnout 100 dílů plátna na ušití tunik.

Číslo úlohy: 28

Text úlohy:

Pastýře, který hnal 70 býků, se zeptali: „Jak velkou část svého početného stáda býků ženeš?" Odpověděl: „Ženu dvě třetiny z třetiny dobytka." Kolik býků bylo v celém stádu?

Rozbor úlohy:

Pastýř žene 70 býků. Tento počet býků se rovná dvou třetinám z třetiny dobytka. Úlohu budeme řešit pomocí lineární rovnice o jedné neznámé.

Řešení úlohy:

Pastýř hnal …………………… 70 býků.

Pastýř hnal …………………… $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{3}$ dobytka (býků).

Býků v celém stádu x

$\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{3}$ dobytka (býků) = $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x$

Zápis a řešení rovnice:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x = 70$$
$$\frac{2}{9} x = 70 \ / \cdot 9$$
$$2x = 630 \ / : 2$$
$$x = 315$$

V celém stádu bylo celkem 315 býků.

Číslo úlohy: 29

Text úlohy:

Ze čtyř lidí, kteří obětovali v chrámu, druhý dal dvakrát více než první, třetí třikrát více než druhý a čtvrtý čtyřikrát více než třetí, a všichni dohromady dali 132. Kolik dal první?

Rozbor úlohy:

Úlohu řešíme pomocí jedné lineární rovnice o jedné neznámé.

Řešení úlohy:

první dal ………….. x

druhý ……………... 2krát více než první (2 . x)

třetí …………….... 3krát více než druhý (3 . 2 . x)

čtvrtý ……………... 4krát víc než třetí (4 . 3 . 2 . x)

celkem dali 132

Zápis a řešení rovnice:

$$x + 2x + 6x + 24x = 132$$
$$33x = 132$$
$$x = 4$$

První dal v chrámu 4.

Číslo úlohy: 36

Text úlohy:

Poslové dvou měst, např. z Lyonu a Paříže se ve stejné době vydali na cestu proti sobě. Pařížský posel urazil každý den o dvě míle více než lyonský a za čtyři dny se setkali. Obě města jsou od sebe vzdálena 104 mil. Má být stanoveno, kolik mil každý z nich urazil za den a kolik celkem.

Rozbor úlohy:

Každý z poslů měl jinou rychlost počítanou v jednotkách míle za den. Každý tedy urazil jinou dráhu, kterou vypočítáme ze vzorce $s = v \cdot t$. Součet jednotlivých drah, nám dá 104 míle, vzdálenost měst. Máme určit rychlost obou poslů (kolik mil urazili za den) a kolik mil urazil každý za 4 dny.

Řešení úlohy:

	v (míle/den)	t (počet dnů)	s (míle)
Lyonský posel	x	4	4 . 4 x
Pařížský posel	x + 2	4	4 . (x + 2)

Zápis a řešení rovnice:

$$4x + 4(x+2) = 104$$
$$4x + 4x + 8 = 104$$
$$8x = 96$$
$$x = 12$$

lyonský posel urazil 12 mil za jeden den,
pařížský posel urazil (12+2) = 14 mil za den

Za 4 dny urazili: lyonský posel (4 × 12) = 48 mil
pařížský posel (4 × 14) = 56 mil

Lyonský posel urazil za jeden den 12 mil a pařížský 14 mil. Za 4 dny urazili 48 a 56 mil.

Číslo úlohy: 37

Text úlohy:

Pán se dohodl se sluhou takto: „Budeš-li pracovat, dám ti za den kromě stravy 12 grošů. Když budeš odpočívat, zaplatíš za stravu 8 grošů.“ Za rok, tedy za 365 dní, pán nedlužil nic sluhovi ani sluha pánovi. Kolik dní sluha pracoval a kolik odpočíval?

Rozbor úlohy:

Počet odpracovaných a odpočinkových dnů nám dá dohromady 365 dní, tedy jeden rok. Za neznámou nám stačí dát počet odpracovaných dnů a dny odpočinkové vyjádříme pomocí dnů odpracovaných, nebo naopak. Za rok nedluží pán sluhovi nic, tedy rozdíl příjmu a toho, co sluha musí dát panovi, je roven nule. Groše, které sluha dostane, vrátí všechny zpět pánovi.

Řešení úlohy:

Mohl pracovat ………………… 365 dní

Pracoval …………………......... x dní

Nepracoval ……………………. (365 – x) dní

Za odpracovaný den dostal …… 12 grošů

Za odpočinkový den vrátil ……. 8 grošů

Za jeden rok měl 0 grošů

Zápis a řešení rovnice:

$$12x - 8(365 - x) = 0$$
$$12x - 2920 + 8x = 0$$
$$20x = 2920$$
$$x = 146$$

Sluha pracoval: 146 dní

Sluha odpočíval: 365 -146 = 219 dní

Sluha pracoval 146 dní a odpočíval 219 dní.

Číslo úlohy: 41

Text úlohy:

V Aténách byl vodojem s třemi rourami. První mohla naplnit vodojem za hodinu, druhá za dvě hodiny, třetí za tři hodiny. Za jakou část hodiny mohly naplnit vodojem všechny tři roury společně?

Rozbor úlohy:

Úlohu řešíme pomocí jedné lineární rovnice o jedné neznámé. Nejdříve zjistíme, jakou část vodojemu naplní každá roura za dobu naplňování. Všechny tři roury naplní jeden vodojem. Tedy součet jednotlivých částí, které naplní roury je roven jedné.

Řešení úlohy:

1. roura	za	1 h	1	vodojem
		x h	x	vodojemu
2. roura	za	2 h	1	vodojem
		1 h	$\frac{1}{2}$	vodojemu
		x h	$\frac{x}{2}$	vodojemu
3. roura	za	3 h	1	vodojem
		1 h	$\frac{1}{3}$	vodojemu
		x h	$\frac{x}{3}$	vodojemu
všechny tři roury:		za x hodin	$\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)$	vodojemu
		<u>za x hodin</u>	<u>1 vodojem</u>	

Zápis a řešení rovnice:

$$\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)=1/\,.6$$

$$6x+3x+2x=6$$

$$11x=6/:\ 11$$

$$x=\frac{6}{11}$$

Vodojem se naplní třemi rourami přibližně za $\frac{6}{11}$ hodiny.

Číslo úlohy: 43

Text úlohy:

Jeden umírající člověk řekl: „Jestliže se mé ženě narodí syn, ať mu patří dvě třetiny jmění a zbytek mé ženě. Jestliže se narodí dcera, ať jí patří třetina a ženě dvě třetiny.“ Narodila se dvojčata – syn a dcera. Jak se má rozdělit jmění, aby se splnila závět nebožtíka?

Rozbor úlohy:

Úlohu řešíme pomocí poměru. Zapíšeme jednotlivé poměry a rozšíříme tak, abychom jsme z nich mohli vytvořit postupný poměr.

Řešení úlohy:

Narodí-li se syn, získá ………. $\frac{2}{3}$ jmění, zbytek zůstane ženě (2 : 1)

Narodí-li se dcera, získá …….. $\frac{1}{3}$ jmění, ženě patří …….. $\frac{2}{3}$ jmění (1 : 2)

Narodila se dvojčata, jak se rozdělí jmění, aby se splnila závěť nebožtíka?

	Syn	Dcera	Žena
narodí-li se syn	2 díly jmění	-	1 díl jmění
narodí-li se dcera	-	1 díl jmění	2 díly jmění

Získané poměry dáme dohromady:

	Syn	Dcera	Žena
narodí-li se syn a dcera	4 díly jmění	1 díl jmění	2 díly jmění

=> poměr majetku 4:1:2

Při narození dvojčat se majetek dělil mezi syna, dceru a matku v poměru 4:1:2.

Číslo úlohy: 44

Text úlohy:

Stádo opic bavících se v háji se rozdělilo na dvě části. Čtverec osminy jejich počtu se bavil skákáním ve větvích. Dvanáct opic vítalo radostným křikem tichý rozbřesk dne. A teď řekni, jinochu, kolik opic bylo v háji.

Rozbor úlohy:

V úloze máme za úkol zjistit, kolik opic bylo v háji. Opice se rozdělily na dvě nestejné části. V první části jich byl čtverec osminy, tedy $\frac{1}{8}$ z celkového počtu opic na druhou. V druhé části jich bylo 12.

Řešení úlohy:

celkem opic ………………. x

počet opic v první části ….. $\left(\frac{x}{8}\right)^2$

počet opic v druhé části 12

Zápis a řešení rovnice:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 - x$$
$$\frac{x^2}{64} + 12 = x$$
$$x^2 + 768 = 64x$$
$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-64) \pm \sqrt{(-64)^2 - 4.768}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{64 \pm \sqrt{(4096 - 3072)}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{64 \pm \sqrt{1024}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{64 \pm 32}{2}$$
$$x_1 = 16$$
$$x_2 = 48$$

V háji bylo 16 nebo 48 opic, obě řešení kvadratické rovnice odpovídají zadání.

Číslo úlohy: 45

Text úlohy:

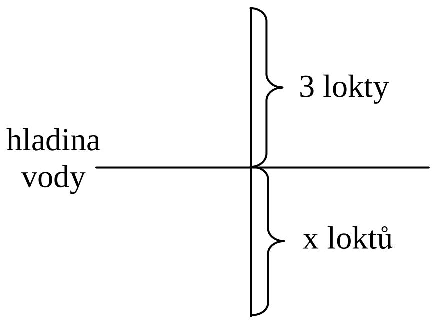
Oštěp stojí svisle ve vodě a nad její hladinou vyčnívá o tři lokty. Vítr ho nachýlil tak, že jeho vrchol je na hladině, ale spodní hrot nezměnil svou polohu. Určete délku oštěpu, jestliže vzdálenost nové polohy vrcholu od původního místa vnoření oštěpu do vody se rovná 5 loktům.

Rozbor úlohy:

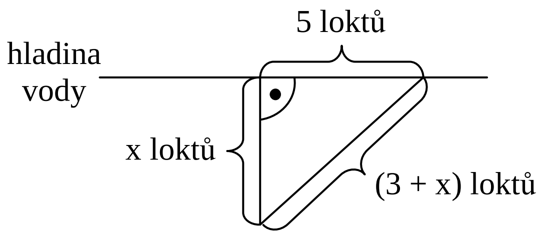
Pro řešení úlohy je důležitý náčrt situace. Úloha bude řešena pomocí Pythagorovy věty (pro výpočet přepony v pravoúhlém trojúhelníku platí: $c^2 = a^2 + b^2$).

Řešení úlohy:

Původně:



Po odchýlení větrem:



Pythagorova věta pro výpočet přepony v pravoúhlém trojúhelníku:

$$(3+x)^2 = x^2 + 5^2$$
$$9 + 6x + x^2 = x^2 + 25$$
$$6x = 25 - 9$$
$$6x = 16$$
$$x = 2\frac{2}{3}\ \textit{loktů}$$

Celková délka oštěpu = $3 + 2\frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}\ \textit{loktů}$.

Délka oštěpu je $5\frac{2}{3}$ loktů.

Číslo úlohy: 48

Text úlohy:

Během souboje kohoutů se jeden z diváků dohodl s jejich majiteli. Prvnímu řekl: „Když zvítězí tvůj kohout, dáš mi svou výhru, když prohraješ, zaplatím ti dvě třetiny možné výhry.“ Druhému soupeři řekl: „Když zvítězí tvůj kohout, dáš mi svou výhru, když prohraješ, zaplatím ti tři čtvrtiny možné výhry.“ V obou případech získá divák 12 penízů. Jakou výhru mohl získat každý účastník (majitel kohouta)?

Rozbor úlohy:

Řešitel si musí uvědomit, že jeden kohout vždy zvítězí a druhý prohraje. Tato úloha se dá řešit soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Do rovnice zapíšeme vždy jednu z možností, vyhraje určitý počet penízů a musí zaplatit určitou část peněz z jiné možné výhry. V obou případech divák získal 12 penízů.

Řešení úlohy:

Prvnímu řekl:

zvítězí tvůj kohout ……………… dáš mi výhru x penízů
prohraje tvůj kohout …………….. zaplatím ti $\frac{2}{3}x$

Druhému řekl:

zvítězí tvůj kohout ……………… dáš mi výhru y penízů
prohraje tvůj kout ……………….. zaplatím ti $\frac{3}{4}y$

V obou případech získal divák 12 penízů.

<u>Jakou výhru mohl získat každý z účastníků?</u>

Zápis a řešení rovnic:

$$x - \frac{3}{4}y = 12$$
$$y - \frac{2}{3}x = 12$$

$$4x - 3y = 48$$
$$3y - 2x = 36$$

$$4x - 3y = 48$$
$$-4x + 6y = 72$$

$$3y = 120 \qquad 3 . 40 - 2x = 36$$
$$y = 40 \qquad -2x = 84$$
$$x = 42$$

První majitel kohouta mohl získat výhru 42 penízů, druhý 40 penízů.

Číslo úlohy: 49

Text úlohy:

Několik lidí společně kupuje berana. Když každý přispěje pěti penízi, bude chybět 45 penízů do ceny berana. Když každý přispěje sedmi penízi, budou chybět tři peníze. Kolik je lidí a jakou cenu má beran?

Rozbor úlohy:

Úlohu můžeme řešit úsudkem nebo pomocí dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Jedna neznámá pro nás bude počet kupujících, druhá cena berana.

Řešení úlohy:

Berana kupuje ………………. x lidí

Cena berana ………………… y penízů

Každý zaplatí ………………. 5 penízů ………… bude chybět 45 penízů

Každý zaplatí ………………. 7 penízů ………… budou chybět 3 peníze

Zápis a řešení rovnic:

$$5x = y - 45$$
$$7x = y - 3$$

$$5x - y = -45$$
$$7x - y = 3$$

$$-5x = 45$$
$$7x = -3$$

$$2x = 42$$
$$x = 21$$

$$5\,.\,21 = y - 45$$
$$105 = y - 45$$
$$y = 105$$

Lidí kupujících berana bylo 21, cena berana byla 150 penízů.

5. 3 Úlohy řešené ve výuce, dotazník

Čtyři vybrané historické úlohy řešili žáci a žákyně 2. stupně základní školy. Úlohy vyžadují pouze základní matematické operace, proto mohou být pro všechny ročníky stejné. Řešeny byly následující úlohy z historie matematiky.

1) ÚLOHA K BYSTŘENÍ MLADÍKŮ

Homér Hesiodovi na otázku, jak velký byl počet Helénů, kteří táhli do pole proti Tróji. Bylo tam sedm ohnišť, mocný žár, ohniště pak obsahovalo padesát rožňů a na každém rožni byl kus masa. Ale každý ten kus obklopilo devět set Achájů.

2) ÚLOHA O ŽEBŘÍKU MAJÍCÍM STO PŘÍČLÍ

Jeden žebřík měl sto příčlí. Na prvním seděl jeden holub, na druhém dva, na třetím tři, na čtvrtém čtyři, na pátém pět, a tak na všech příčlích až do stého. Řekni, kdo můžeš, kolik bylo celkem holubů.

3) *ÚLOHA Z JEZUITSKÉ KOLEJE V KOLÍNĚ NAD RÝNEM*

12 osob, muži a ženy, utratili při hostině 82 zlatých. Každý muž utratil 8 zlatých, žena 6 zlatých. Kolik bylo mužů a kolik žen?

4) *ÚLOHA O OTCI A JEHO TŘECH SYNECH*

Nějaký zemřelý otec zanechal jako dědictví třem synům třicet skleněných lahviček, z nichž deset bylo plných oleje, dalších deset do poloviny, třetích deset bylo prázdných. Ať rozdělí, kdo může, olej i lahvičky, aby každému ze tří synů připadlo stejně jak lahviček, tak oleje.

Vybrané historické úlohy řešilo celkem 62 dětí (35 chlapců a 27 dívek) z 6., 7., 8., a 9. třídy. Před samotným řešením proběhl krátký rozbor každé z úloh a byly zodpovězeny případné dotazy. Poté řešili žáci úlohy samostatně. Se správným řešením všech čtyř úloh byli žáci seznámeni na konci samostatného řešení.

Výsledky úloh, které byly zadané žákům, se nachází v kapitole 5.1. Úloha č. 1 odpovídá úloze číslo 4, č. 2 úloze 6, č. 3 úloze 21 a č. 4 úloze 16.

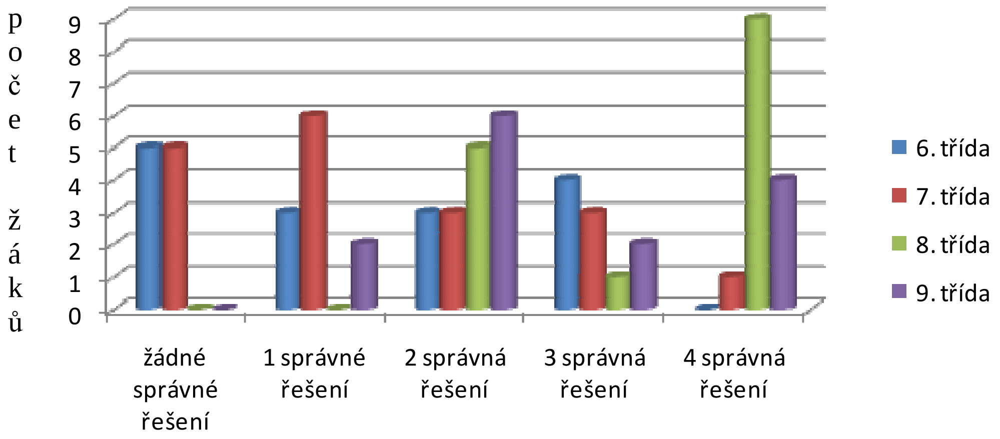
Po vyřešení úloh žáci vyplnili krátký dotazník vyjadřující jejich postoj k řešení historických úloh. Žákům byly položeny následující otázky:

1.	Máš rád/a matematiku?	ANO / NE
2.	Zaujalo tě řešení historických úloh?	ANO / NE
3.	Která úloha tě nejvíce zaujala?	úloha č. …...
4.	Která úloha byla pro tebe nejjednodušší?	úloha č. …...
5.	Která úloha byla pro tebe nejtěžší?	úloha č. …...
6.	Chtěl/a bys řešit historické úlohy v hodinách matematiky?	ANO /NE / OBČAS
7.	Řešíte historické úlohy v hodinách matematiky?	ANO /NE / OBČAS

Z odpovědí, na otázky v krátkém dotazníku, vyplynulo:

- Matematiku má rádo 51 dětí z celkového počtu 62 žáků.
- Řešení vybraných historických úloh zaujalo 44 dětí.
- Nejvíce zaujala úloha číslo 2.
  (Odpovědi na 3. otázku: úloha č. 1 – 6 dětí, úloha č. 2 – 30 dětí, úloha č. 3 – 11 dětí, úloha č. 4 – 15 dětí.)
- Úloha číslo 2 byla zároveň pro nejvíce dětí nejjednodušší.
  (Odpovědi na 4. otázku: úloha č. 1 – 18 dětí, úloha č. 2 – 22 dětí, úloha č. 3 – 18 dětí, úloha č. 4 – 4 děti.)
- Nejtěžší byla pro žáky úloha číslo 4.
  (Odpovědi na 5. otázku: úloha č. 1 – 11 dětí, úloha č. 2 – 7 dětí, úloha č. 3 – 12 dětí, úloha č. 4 – 32 dětí.)
- Z dotazovaných žáků by 65 % chtělo alespoň občas řešit historické úlohy v hodinách matematiky.
  (Odpovědi na 6. otázku: ANO – 25 dětí, NE – 22 dětí, OBČAS – 15 dětí.)
- Většina dětí historické úlohy v hodinách matematiky neřešila.
  (Odpovědi na 7. otázku: ANO – 3 děti, NE – 53 dětí, OBČAS – 6 dětí.)

Grafické porovnání výsledků správných odpovědí v jednotlivých ročnících.



Z grafu lze vyčíst:

- V 9. třídě vyřešilo všech 14 žáků správně alespoň jednu úlohu.
- S historickými úlohami si velmi dobře poradilo 15 žáků 8. ročníku. Každý spočítal nejméně dva úkoly.
- Problémová 7. třída složená ze 17 chlapců a jedné dívky měla pouze jednoho úspěšného řešitele všech čtyř historických úloh.
- Ve velmi snaživém 6. ročníku nedosáhl ani jeden žák čtyř správných odpovědí. Z 15 žáků si však 10 dětí vědělo rady aspoň s jedním úkolem.

Závěr

Historie matematiky a řešení historických úloh by mohlo být vhodnou motivací pro práci žáků v matematice na základní škole. Zařazení vhodných historických prvků do hodin matematiky může motivovat žáky k činnosti, která se pro ně stává zajímavější a poutavější. Matematika by měla rozvíjet nejen logické myšlení dětí, ale i jejich tvořivost a zvyšovat zájem o osvojování dalších vědomostí.

V první části diplomové práce jsou popsány dějiny matematiky. V další části jsou uvedeny historické úlohy v originálním zadání a některé úlohy jsou dále podrobně řešeny. Při studování historických úloh jsem konstatovala, že některé úlohy neodpovídají reálné situaci (např. úloha č. 6). Některé historické úlohy v originálním zadání nejsou jednoznačné. Texty úloh jsem neměnila, převzala jsme originální zadání z odborné literatury.

Historické úlohy, které jsou zařazeny v druhé části diplomové práce, mohou být využity přímo ve výuce matematiky nebo i v zájmových matematických kroužcích. Přehled těchto úloh může být zdrojem a inspirací pro učitele. Cílem je obohatit výuku matematiky o historické prvky.

Historické úlohy byly zadány žákům 2. stupně v hodinách matematiky na základní škole. Žáci 6., 7., 8. a 9. ročníku řešili čtyři vybrané historické slovní úlohy. Řešení historických úloh žáky zaujalo. Z krátkého dotazníku také vyplynulo, že historické úlohy v hodinách matematiky žáci neřeší, ale rádi by se ve výuce matematiky s úlohami setkávali.

Diplomová práce mě obohatila o velké množství zajímavostí z historie matematiky. Úlohy uvedené v diplomové práci budu využívat se své budoucí pedagogické praxi.

Použitá literatura

1) BALADA, F., *Z dějin elementární matematiky,* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1959.

2) BEČVÁŘ, J., BEČVÁŘOVÁ, M., VYMAZALOVÁ H., *Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie*, 1. vyd. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-255-4.

3) BEČVÁŘ, J., FUCHS, E., *Matematika v 19. století,* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-019-5.

4) BEČVÁŘ, J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě,* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-232-5.

5) DEPMAN, I., FOLTA, J., *Svět čísel,* 1, vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství 1973.

6) FOLTA, J., *Dějiny matematiky 1*. Praha: Národní technické muzeum 2004. ISBN 80-239-4031-7.

7) FOLTA, J., ŠEDIVÝ, J., *Světonázorové problémy matematiky I.*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

8) FUCHS, E., *Diskrétní matematika a Teorie množin pro učitele (CDROM).* Brno: Masarykova univerzita, 2000. ISBN 80-210-2463-1.

9) HAŠKOVEC, V., MÜLLER, O., *Galerie géniů*. Praha: Albatros, 2004. ISBN 80-00-01517-X.

10) JUŠKEVIČ, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku,* 1. vyd. Praha: Academia, 1977.

11) KOLMAN, A., *Dějiny matematiky ve starověku,* 1. vyd. Praha: Academia, 1969.

12) KONFOROVIČ, A., G., *Významné matematické úlohy*, 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-21848-2.

13) MAČÁK, K., *Tři středověké sbírky matematických úloh,* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-215-5.

14) PUTŮČEK, J., *Historie matematiky pro učitele 1. díl,* 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum, 2003. ISBN 80-7020-127-4.

15) PUTŮČEK, J., *Historie matematiky pro učitele 2. díl,* 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum, 2003. ISBN 80-7020-128-2.

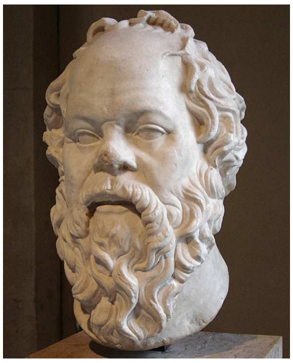
16) STRUIK, D., *Dějiny matematiky*, 1. vyd. Praha: Orbis, 1963.

17) VETTER, Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury,* 1. vyd. Praha: Melantrich, 1926.

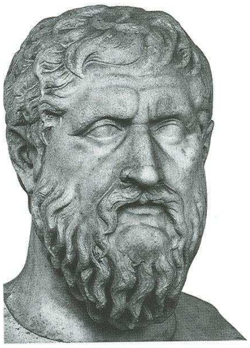
18) ZNÁM, Š., a kol., *Pohĺad do dejín matematiky*, 1. vyd. Bratislava: ALFA, 1986.

Seznam příloh:

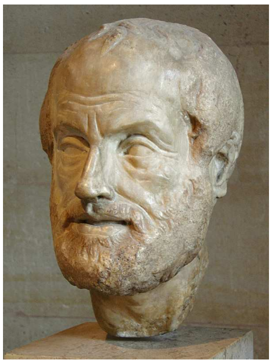
Příloha č. 1 – Významní matematikové druhé etapy



Sokrates



Platon



Aristoteles

Apollónios z Pergy

Eratosthenes

Klaudius Ptolemaios

Menelaos

Heron z Alexandrie

Příloha č. 2 – Významní matematikové středověké Evropy

Alkuin z Yourku

Gerbert z Aurillacu

Johannes Müller

Fibonacci

Luca Pacioli

Niccoló Fontana Tartaglia

Hieronymus Cardanus

Ludolph van Ceulen

John Napier

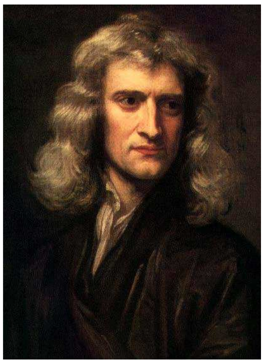
Příloha č. 3 – Významní matematikové 17. století

Bonaventura Cavalieri

René Descartes

Peirre Fermat

Blaise Pascal



Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Laibniz

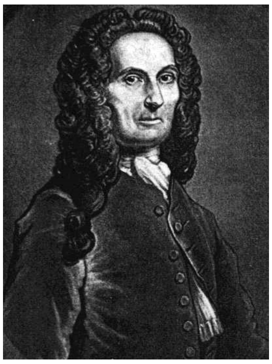
Příloha č. 4 – Významní matematikové 18. století

Jacob Bernoulli

Johann Bernoulli

Daniel Bernoulli

Leonhard Euler



Abraham de Moivre

d´Alembert

Colin Maclaurin

Joseph Louis Lagrange

Pierre Simon de Laplace

Příloha č. 5 – Významní matematikové 19. století

Karl Friedrich Gauss

Adrien-Marie Lagendre

Gaspard Monge

Victor Poncelet

Siméon Denis Poisson

Jean Baptiste Joseph Fourier

Augustin Louis Cauchy

Bernard Bolzano

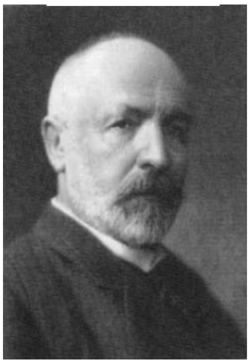
Niels Henrik Abel

Évariste Galois

Carl Gustav Jacob Jacobi

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

Bernhard Riemann



Georg Cantor

Richard Dedekind

Felix Klein

Henri Poincaré

Příloha č. 6 – Významní matematikové 20. století

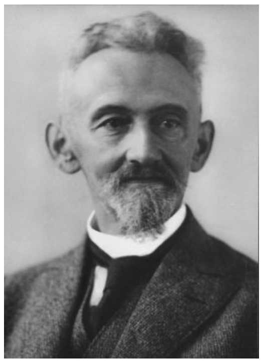
David Hilbert

Kurt Gödel

Stefan Banach

Paul Dirac

Godfrey Harold Hardy



Felix Hausdorff

John von Neumann

Oscar Morgenstern

Otakar Borůvka

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Ivana Písková
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph. D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematiky na 2. stupni ZŠ
Název v angličtině:	The history of mathematics in relation to teaching mathematics in primary five to nine
Anotace práce:	Cílem diplomové práce „*Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematiky na 2. stupni ZŠ*“ je rozvíjet zájem žáků na základní škole o matematiku prostřednictvím historie matematiky. V diplomové práci se autor zabývá historií matematiky a řešením historických úloh. V první části popisuje autor historický vývoj matematiky. Druhá část diplomové práce je zaměřena na řešení historických úloh.
Klíčová slova:	Matematika, historie matematiky, historické matematické úlohy
Anotace v angličtině:	The aim of master’s project “*The history of mathematics in relation to teaching mathematics in primary five to nine*” is to encourage the interests of pupils about mathematics through the history of math. In this master’s project the author looks at the history of math and at solving of historical exercises. In the first part the author deals with the history of math. The second part of the master’s work concentrates on the solving historical exercises.

Klíčová slova v angličtině:	Mathematics, The history of mathematics
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1 – Významní matematikové druhé etapy Příloha č. 2 – Významní matematikové středověké Evropy Příloha č. 3 – Významní matematikové 17. století Příloha č. 4 – Významní matematikové 18. století Příloha č. 5 – Významní matematikové 19. století Příloha č. 6 – Významní matematikové 20. století
Rozsah práce:	90 stran + 7 stran příloh
Jazyk práce:	Český jazyk