Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Geometrická cvičení ve skládání papíru

Vypracovala: Aneta Čadková
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Geometrická cvičení ve skládání papíru jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Poděkování

Ráda bych poděkovala mému vedoucímu bakalářské práce, panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho ochotu, nemalou trpělivost, nespočet užitečných rad a připomínek, jež mi přispěly k vypracování bakalářské práce.

Anotace

Cílem bakalářské práce Geometrická cvičení ve skládání papíru je ukázat, že skládání papíru je vhodné nejen pro matematické zdůvodňování konstrukcí, ale i z důvodu využití manuální zručnosti studentů, a také kvůli aplikacím v praxi. Na základě Huzitových axiomů si můžeme uvědomit, že skládání papíru překračuje možnosti Euklidovských konstrukcí pomocí pravítka a kružítka. Prostřednictvím skládání papíru můžeme rozdělit libovolný úhel na tři stejné části (tzv. trisekce úhlu) nebo sestrojit pravidelný sedmiúhelník – konstrukce, které klasicky pomocí pravítka a kružítka nelze vytvořit.

Annotation

The aim of the bachelor thesis Geometric exercises in paper folding is to show that paper folding is not only suitable for mathematical reasoning of structures, but also because of the use of student's manual skills, and for applications in practice as well. Based on Huzita's axioms, we can realize that folding the paper exceeds the possibilities of Euclidean constructions with a ruler and compass. Through paper folding we can divide any angle into three equal parts (i.e. angle trisection) or construct a regular heptagon - constructions which cannot be done classically, using a ruler and compass.

Obsah

1 Úvod

Téma Geometrická cvičení ve skládání papíru bylo pro mě velice zajímavé, proto jsem si jej vybrala za mou bakalářskou práci. Mnoho lidí si neuvědomuje, jak je skládání papíru ve výuce na základních školách důležité. Touto bakalářskou prací bych chtěla ukázat, že skládání papíru neboli origami, není jen pouhá hra či zábava, ale také žákům pomůže si dané věci lépe představit. Skládání papíru přináší do výuky mnoho pozitiv. Žáci si daný objekt lépe představí, když si ho mohou osahat, pootočí všemi směry a sami si například objekt složí.

Bakalářská práce vychází zejména z publikace SUNDARA RAO, T, Wooster Woodruff BEMAN a David Eugene SMITH. Geometric exercises in paper folding. New York: Dover publications, 1966. ISBN 0486215946. New York: Dover publications, 1966, 148 p. ISBN 0486215946.

Na začátku bakalářské práce si řekneme několik slov o papíru a jeho významu, nahlédneme do historie papíru a okrajově se podíváme na jeho výrobu. Dále se zaměříme na rozdělení a formáty papíru, neboť tyto vlastnosti jsou nezbytnou součástí ke složení origami. V další kapitole, která se zaměřuje na origami, si popíšeme techniky skládání origami, a také jak se origami rozděluje. Seznámíme se s Huzitovými axiomy, na jejichž základě si ukážeme řešení nejznámějšího antického konstrukčního problému trisekce úhlu.

Další kapitola se bude zabývat skládáním papírových modelů, konkrétně se jedná o pravidelné mnohoúhelníky. Zajímavým mnohoúhelníkem je pravidelný pětiúhelník, na kterém si ukážeme sestrojení zlatého řezu. Dalšími pravidelnými mnohoúhelníky jsou čtverec, rovnostranný trojúhelník, šestiúhelník, sedmiúhelník, osmiúhelník, desetiúhelník a patnáctiúhelník.

Většina obrázků, použitých v bakalářské práci, je vytvořena mnou v programu GeoGebra. Pravidelný sedmiúhelník je zobrazen mnou vytvořenými fotografiemi.

2 Papír a jeho význam

Papír je spojován s historií lidské civilizace. Jeho objev umožňuje předávání informací mezi lidmi. Jedná se o velmi tenký materiál, který se vyrábí zhutněním vlákna. Jde především o přírodní vlákna, jež jsou založená na celulóze. Nejčastějším materiálem je buničina, která je vyrobená ze dřeva (ve většině případů se jedná o smrk) či ze sběrového papíru. K výrobě papíru se také mohou použít i vlákna rostlinného původu, jako je například konopí a bavlna [8].

Několika hromadám archů se také říká rys papíru, jedná se konkrétně o 480 archů. Papír může být z určitého hlediska i mírně nebezpečný, neboť může způsobit papírové říznutí. Papírové archy se někdy mohou chovat jako ostré žiletky [8].

Lze předpokládat, že vliv techniky vede k pomalému úpadku éry papíru. Ovšem opak je pravdou. Spotřeba papíru stále více stoupá, a tak papír i nadále zůstává nejlepším zdrojem k vyjádření myšlenek. Důkazem je i to, že text psaný na papíře, je lépe zapamatovatelný, než text v počítačové podobě, a to až o třicet procent. Papír má také mnoho výhod. Je lehký, trvanlivý, vyznačuje se relativně nízkou cenou a využití najdeme téměř všude; jako například u hygienických potřeb, různých obalů aj. Papír je velmi důležitou součástí našeho života a potvrzuje to i fakt, že se ho ročně vyrobí až 350 milionů tun [9].

2.1 Historie papíru

Dříve, než se objevil papír, sloužilo k předávání informací několik přírodních materiálů. Nejstarším přenašečem informací byl kámen. Nevýhodou této metody přenosu bylo pracné a časově náročné tesání informací, proto se staré civilizace snažily hledat nová řešení. Jedním z nich byl papyrus, vyrobený ve 3. tisíciletí př. n. l. v Egyptě. Kolem roku 300 př. n. l. se papyrus rozšířil i do celého středomoří. Hliněné destičky sloužily jako psací materiál v Mezopotámii, stromová kůra, listy, dřevo a dřevěné desky i kovové desky v Indii. Nejstarší záznamy z Číny se uvádějí na želvích krunýřích. Pergamen - usušená, vyčištěná, odtučněná, hlazená a křídovaná holina z kůží mladých domácích zvířat (oslů, ovcí, koz) - pocházel z Malé Asie [9].

2.2 Výroba papíru

Ve stručnosti si řekneme několik základních informací o tom, jak se vyrábí papír, který každý z nás jistě dennodenně používá.

2.2.1 Ruční papír

Původně byl papír vyráběn z bavlněného či lněného odpadu. Čím více se zvyšovala spotřeba papíru, tím přibývalo technologií sloužících k jeho výrobě. Začaly se využívat piliny, sláma či starý papír. Výroba papíru začínala nabíráním papíroviny z kádě na čerpací formu. Tu tvořil laťový rám, který byl vyztužený žebry, a na nich se nacházelo síto. Forma měla celkem dvě části, kterými bylo síto a snímatelný rám. Výška snímatelného rámu sloužila k určování gramáže papíru a také se jí řídila vrstva papíroviny. Na ručním papíře se mohou vytvořit stopy síta, kterým říkáme vergé. Objevit se mohou i papíry bez stop síta, které se nazývají velin [8].

2.2.2 Moderní výroba

Moderní výroba papíru se provádí na papírenském stroji, který vynalezl Henry Fourdrinier. Výroba má několik fází [8]:

a) Výroba buničiny – z dřevěné štěpky, která je vstupním materiálem, se nejprve vyrobí buničina popřípadě dřevovina.

b) Příprava – vláknina, která se získá, se později upravuje buď chemicky, nebo mechanicky,

- **Mechanické úpravy** – mechanickou úpravou je mletí. Ve vodní suspenzi se vláknina mele v diskových mlýnech. Pokud jde o měkké savé papíry, pak se vláknina mele málo. Pokud se však jedná o tužší papíry, je stupeň mletí vysoký.
- **Chemické úpravy –** pro zvýšení pevnosti papíru se do vlákniny přidává kationický škrob, barvy, pro neprůsvitnost papíru se přidává uhličitan vápenatý a dalších několik chemických látek.

c) **Papírenský stroj**

- **Mokrá část** – na podélné síto natéká vláknitá suspenze, poté dochází k odvodnění vlákniny a to tak, že se vlákna usadí na sítě a voda odteče do sběrné vany.
- **Lisová část** – lisovou část tvoří několik válcových lisů za sebou, díky kterým se odstraní většina vody z papírového listu.
- **Sušící část** - abychom dostali všechnu vodu z papíru, musíme papíry sušit na válcích, které jsou vytápěné párou.

d) **Další příměsi -** Takto upravený papír nám neposlouží na psaní či skládání, neboť bez potřebných přísad je velice savý (např. ubrousky, toaletní papír aj.). Do papíru se musí přidat ještě několik přísad, jako jsou škroby, kaolin, plnidla, klížidla a jiné [8].

2.3 Recyklace papíru

Papír, stejně jako plast a sklo, patří mezi recyklovatelné materiály. Každý materiál má přidělenou svoji barvu kontejneru a na papír připadá barva modrá. Recyklovat se mohou lepenky, kartony, reklamní letáky, kancelářský papír, sešity, noviny či časopisy. Naopak recyklovat by se neměly papíry umaštěné, mokré, voskový nebo uhlový papír či použité papírové kapesníčky [8].

2.4 Rozdělení papíru

Nyní se podíváme na rozdělení papíru podle účelu a podle gramáže [17].

2.4.1 Dělení podle účelu

a) **Psací papíry –** používají se pro každodenní potřebu. Jsou známy jako dopisní papíry, kancelářské papíry, papíry, které se používají ve školách do sešitů a papíry konceptní.

b) **Kreslící papíry** – mohou to být např. náčrtkový papír.

c) **Grafické papíry a kartony (pro umělecký tisk)** – papíry strojové i ruční s dobrou potiskovatelností, bělostí a savostí.

d) **Tiskové papíry (používané pro průmysl)** – do této kategorie patří například papír bankovkový, ceninový, novinový papír a jiné.
e) **Balicí papíry a obalové kartony** – papíry, které se používají v potravinářství, dárkový papír, kartony nebo hedvábný papír.
f) **Natírané papírové kartony –** papíry pokryté lakem či křídovým nátěrem z jedné nebo obou stran, fotopapíry se světlocitlivou vrstvou.
g) **Pauzovací papír** – průsvitný papír, vyrobený namáčením do pryskyřice.
h) **Předsádkový papír** – jedná se o velice pevný papír, který je určen pro spojování desek s knižním blokem.

2.4.2 Rozdělení podle gramáže

- **Papíry** – s gramáží do $150\ g/m^2$.
- **Kartony** – s gramáží od $150 - 400\ g/m^2$ – ve většině případů se vyrábějí z kvalitní suroviny, mohou být jednovrstvé nebo i vícevrstvé, jednovrstevnými kartony rozumíme kartony do gramáže $250\ g/m^2$, vícevrstvé pak od $250\ -\ 400\ g/m^2$. Jejich výroba se provádí ručně i strojově. Nejvíce se používá kreslící a rýsovací karton.
- **Lepenky** – s gramáží od $400\ g/m^2$.
    - strojové – používají se na desky knih,
    - ruční – mají nerovný povrch a větší savost než lepenky strojové,
    - lepenky vlnité (zvláštní) - vyrábí se ze dvou a více vrstev kartónů; střídají se rovné a zvlněné vrstvy, které se k sobě slepují. Příkladem zvláštní lepenky je mikrovlnná lepenka.

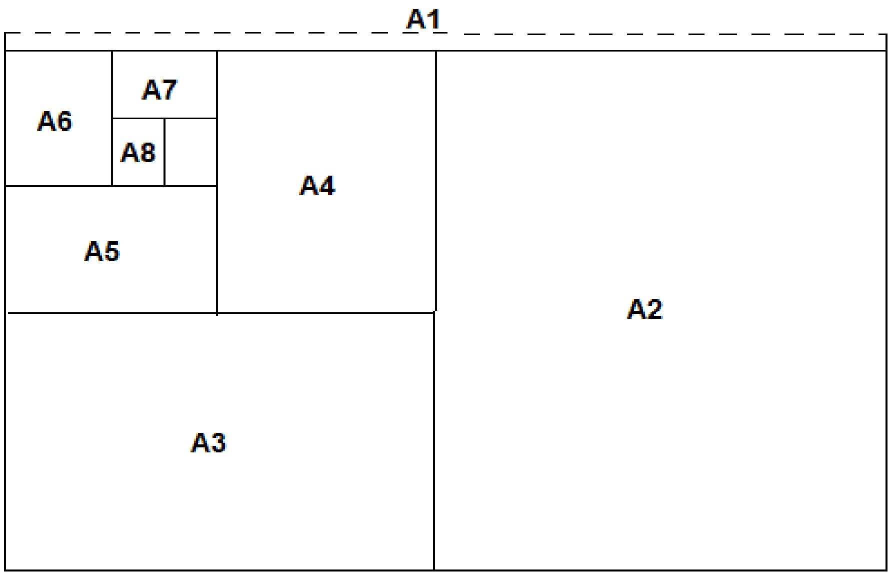
2.5 Formáty papíru

Formulovány jsou tři řady formátů – typ A, B a C méně známé jsou řady D a E. Základní je řada A, rozšiřující je řada B, pro obálky je navržena řada C [17].

2.5.1 Řada A

- $A0\ =\ 841\ \times\ 1189\ mm$ (čtyřnásobný arch)
- $A1\ =\ 841\ \times\ 594\ mm$ (dvojnásobný arch)

- $\boldsymbol{A2 = 594 \times 420\, mm}$ **(arch)**
- $A3 = 420 \times 297\, mm$ (půl arch)
- $A4 = 297 \times 210\, mm$ (čtvrtka)
- $A5 = 210 \times 148\, mm$ (osminka)
- $A6 = 148 \times 105\, mm$ (půl list)
- $A7 = 105 \times 74\, mm$ (čtvrt list)
- $A8 = 74 \times 58\, mm$ (osmina listu)



Obrázek 1: Grafické znázornění typů papíru [17].

2.5.2 Řada B

- $B0 = 1000 \times 1414\, mm$
- $B1 = 707 \times 1000\, mm$
- $B2 = 500 \times 707\, mm$
- $B3 = 353 \times 500\, mm$
- $B4 = 250 \times 353\, mm$
- $B5 = 176 \times 250\, mm$
- $B6 = 125 \times 176\, mm$
- $B7 = 88 \times 125\, mm$
- $B8 = 62 \times 88\, mm$

2.6 Vlastnosti papíru

Při skládání origami je důležité dbát i na to, jaký papír použijeme. Můžeme použít papír kancelářský, balící nebo dostupné origami papíry. Papír musí splňovat několik podmínek. Rozlišujeme čtyři základní parametry:

a) **Jemnost** – nepříliš silný papír, který lze několikanásobně přeložit.

b) **Věrnost a ohebnost** – po přeložení a rozložení zpět je ohyb hezky vidět, to znamená, znovu mohu papír přehnout tam, kde již jednou přehnutý byl.

c) **Pevnost** – netrhá se po přeložení.

d) **Barevnost** – pokud nemáme barevný papír, můžeme použít obyčejný bílý kancelářský papír a nabarvit ho štětcem barvou; barevnost papíru může přispět k motivaci skládání origami.

Ve většině případů se ke skládání origami používá papír čtvercového tvaru. V Japonsku je údajně nejběžnější formát $17\ x\ 17\ cm$ a pro miniaturisty je to $6\ x\ 6\ cm$. Nejsnadněji se dá vytvořit formát $21\ x\ 21\ cm$, a to z formátu A4 [4].

3 Origami

Origami, známé také pod názvem skládání papíru, pochází z japonského slova ori – skládat a kami – papír. Ke skládání origami patří zručnost a cit. Každý by měl proto začít méně složitými skládankami a postupně se zdokonalovat. V dnešní době slouží jednodušší skládanky k seznamování dětí v mateřských školkách. Origami můžeme zahrnout i do základních škol, do výtvarné výchovy či jako pomůcku do hodin matematiky. Skládání skládanek z papíru se jako výchovná hra začalo objevovat již v 19. století [7, 12].

Historie vzniku origami neodmyslitelně souvisí s příchodem vynalezení papíru. Dobu vzniku origami nelze konkrétně určit, nicméně nalezneme názory, že skládání origami přivezli do Japonska španělští Mauři. Ti však skládání papíru používali k tomu, aby určili geometrické vlastnosti čtverce. Další skupinou, která využívala origami, byli Číňané. Tvořili praktické věci, jako jsou vázy, misky, krabičky a jiné nádoby [10,12].

Papír se začal vyrábět kolem roku 105 n. l. v Číně. Výrobu papíru se snažili Číňané utajit před ostatními státy. I přes všechna opatření se kolem roku 610 n. l. přenesla výroba papíru do ostatních zemí přes Koreu do Japonska a následně do celé Evropy. Španělsko se stalo prvním státem v Evropě, ve kterém vznikly první papírny. Postupně se začaly šířit také do Francie a Itálie [8].

Do Království českého se dostal papír až v roce 1370, kdy v Chebu vznikla první papírna. Papír byl velmi cenný, jelikož byl ze začátku drahý. Díky tomu se používal jen při náboženských účelech – při obřadech a jako výzdoba svatyní.

Skládání jen tak pro zábavu se připisuje 17. století. Jako první se hra rozšířila u dívek z vyšších vrstev společnosti. V tomto století znali Japonci okolo sedmdesáti druhů skládanek. Dnes je jich několika násobně více. Origami, které známe dnes, se vytvořilo až koncem 19. století, kdy obchodník s papírem začal dovážet papír do Evropy z Tokia. Vytvářel jak obdélníkové velikosti papíru, tak i papír ve tvaru čtverce. Ty čtverce, které byly barevné, prodával jako origami papír.

Nejoblíbenější a nejběžnější skládačkou Japonska je papírový jeřáb „Orizuru“, jenž byl složen poprvé kolem roku 1800. Symbol jeřába symbolizuje dlouhý život, proto si ho lidé skládají a vyvěšují v bytě. Nemocní lidé věří v uzdravení, když budou mít doma tisíc jeřábů. V Hirošimě byl postaven pomník jako památka dětem, které zahynuly ve válce. Ten znázorňuje děvčátko, jak drží nedokončeného jeřába v ruce [10, 12].

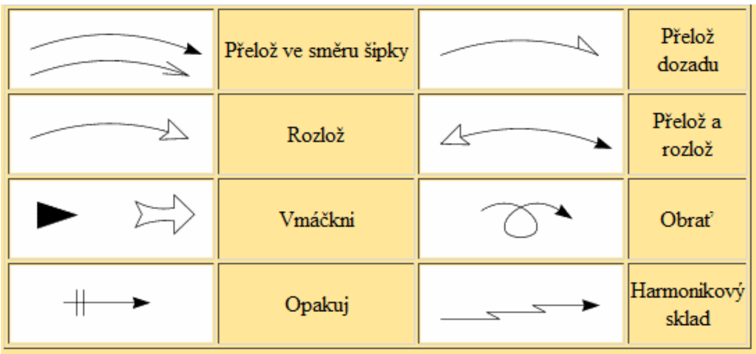
Pojmem origami rozumíme jakékoliv složení papíru v nějaký tvar či věc bez použití kružítka a pravítka.

3.1 Technika skládání

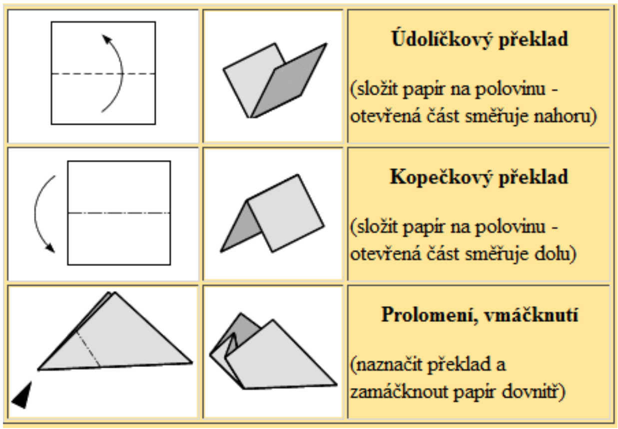
Ke skládání origami je zapotřebí několik základních technik a postupů. První věc, která je velmi důležitá, a na které nejvíce záleží, je papír. Nejlépe se origami skládá z kancelářského papíru, který je jemný, pevný a nejlépe se přehýbá. Pro motivaci skládání slouží balicí papír, který je jemnější než papír kancelářský a více barevnější. Nejlevnější variantou je papír novinový nebo letáky, kterých je dostatek [15].

Pro ty, kteří se origami zabývají ve větší míře, je speciální japonský papír. Jedná se o papír čtvercové velikosti o rozměrech $15\ x\ 15\ cm$. Tento japonský papír je velice tenký a z jedné strany barevný. Jeví se jako nejlepší papír pro výroby origami, nicméně je poměrně dražší.

Dalším bodem je nutná znalost origami jazyka. Jde o šipky překladu, symboly a základní sklady, které jsou nutné ke složení origami. Ne v každé literatuře či webových stránkách najdeme stejné označení [15].



Obrázek 2: Technika skládání1. Převzato z internetového zdroje [15].



Obrázek 3: technika skládání 2. Převzato z internetového zdroje [15].

Předposledním krokem skládání je správné vnímání postupů složení. Nejlepší způsob skládání je krok za krokem, abychom neudělali nějakou chybu. Výsledkem by mohla být skládanka, která nám nebude zapadat správně do přehybů. Existuje několik způsobů, jak skládat různé skládačky, proto se nemusíme úplně držet daného postupu, neboť v průběhu skládání můžeme přijít sami na jiný, možná i lehčí způsob složení [15].

Posledním krokem je výběr správné plochy pro skládání origami. Nejlepší skládání je na rovném, čistém a pevném povrchu. Důležitý je překlad, který musí být výrazný, aby byl dobře vidět. Ke zvýraznění rýhy můžeme použít nehet. Čím více dbáme na přesnost přehybu, tím lépe se nám bude skládanka skládat [15].

Ve skládání origami můžeme najít hned několik chyb, proč nám skládanka nevyšla tak, jak by měla. Jsou jimi špatná plocha, špatně jsme si skládanku natočili, méně viditelná rýha, chybné přeložení skládanky, neúplné porozumění postupu skládání či zbrklost a rychlost při skládání [15].

3.2 Rozdělení origami

Origami můžeme rozdělit do dvou základních okruhů, jež jsou v současné době nejznámější v Japonsku a značně se od sebe liší. Origami je rozděleno na tradiční a moderní [12].

3.2.1 Tradiční origami

Tradiční origami, jiným slovem klasické, je vytvořené z jednoho kusu papíru. Papír se překládá bez použití nůžek, lepidla a dalších ozdob. U tradičního origami je přesně stanoven postup skládání, a tak by se neměly po skládání lišit výsledky.

3.2.2 Moderní origami

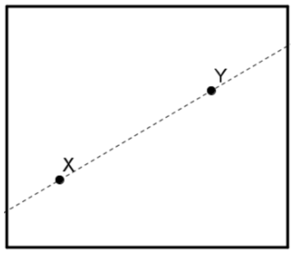
Druhým typem je moderní origami. Vyznačuje se tím, že je zde prostor pro svou fantazii. Skládání papíru by mělo vycházet ze srdce. Rozdíl mezi tradičním a moderním origami spočívá v tom, že u tradičního origami není většinou znám autor, zatímco moderním origami se zabývají i známí umělci. Autorem moderního origami je muž jménem Akira Yoshizawa.

4 Axiomy origami v geometrii

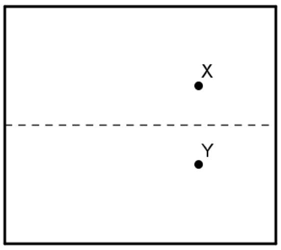
Huzitovy axiomy

Při skládání papíru jsou velmi důležité ohyby a přehyby, které se používají při skládání origami. Základní přehyby pro konstrukci origami a skládání papíru, formuloval do šesti základních axiomů Humiaki Huzita, Japonsko-Italský matematik a origami umělec [3].

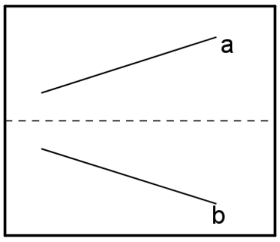
1) Jsou dány dva body X, Y, těmito body můžeme vytvořit hranu, aby jimi procházela.



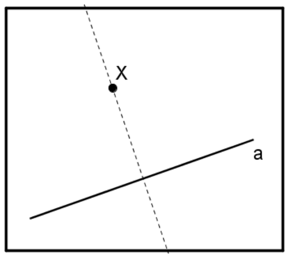
2) Jsou dány dva body $X, Y,$ můžeme vytvořit hranu tak, že bod X bude ležet na bodě Y.



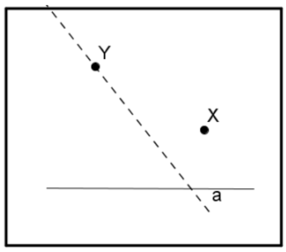
3) Jsou dány dvě přímky a, b; můžeme vytvořit hranu tak, že přímka a bude ležet na přímce b.



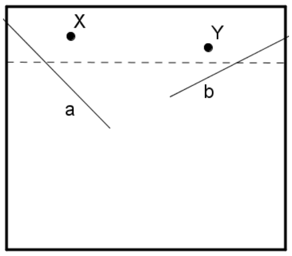
4) Je dán bod X a přímka a; můžeme vytvořit hranu, která bude procházet bodem X a zároveň se přímka a rozdělí na dvě části, které se následně překryjí.



5) Jsou dány dva body X, Y a přímka a, můžeme vytvořit hranu tak, že bod X bude ležet na přímce a, a zároveň bude hrana procházet bodem Y.



6) Jsou dány dva body X, Y a dvě přímky a, b, můžeme vytvořit hranu tak, že bod X bude ležet na přímce a, a bod Y bude ležet na přímce b [6].

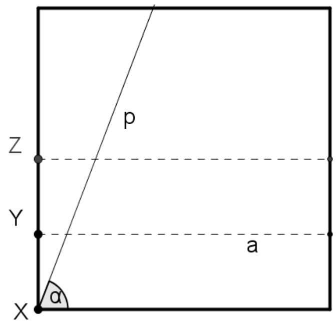


Pomocí axiomu 6, můžeme vyřešit matematické konstrukce. Jednou z konstrukcí je trisekce úhlu [6].

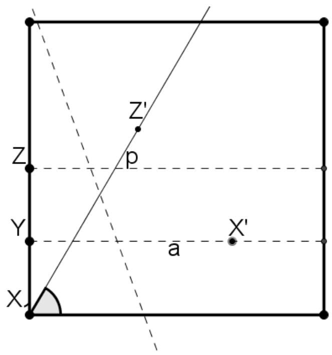
5 Trisekce úhlu

Pomocí Eukleidovské geometrie nelze rozdělit libovolný úhel na tři stejné části, proto použijeme skládání papíru [16].

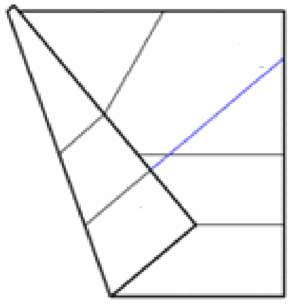
Budeme potřebovat čtvercový papír, na kterém vytvoříme ostrý úhel (v našem případě úhel α a přímku p). Poté papír přeložíme na polovinu a jednu polovinu znovu opět na polovinu. Tento přehyb označíme písmenem a. Tím nám vzniknou tři body X, Y, Z [6].



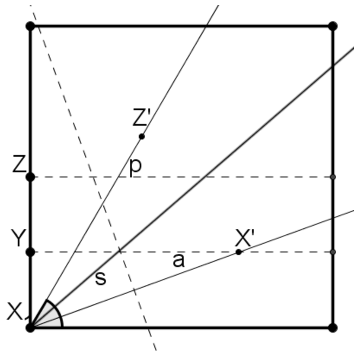
Nyní použijeme axiom č. 6 z předešlé kapitoly. Vytvoříme ohyb tak, že bod X, bude ležet na přehybu a, a bod Z bude ležet na přímce p.



Po přeložení nám vznikly nové dva body neboli obrazy bodů X, Z a to X', Z'.



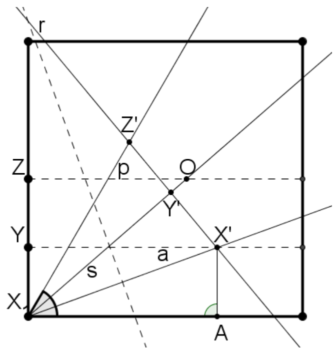
Posledním krokem k trisekci úhlu je vedení polopřímek z vrcholu X body X', Z'.



Trisekce úhlu patří mezi tři antické problémy matematiky. Dalšími dvěma problémy jsou duplikace krychle a kvadratura kruhu. Již od starověku se učenci této doby snažili problém trisekce úhlu vyřešit. Mladý francouzský matematik Évariste Galois až v roce 1830 dokázal, že trisekci úhlu nelze provést pouze za pomoci kružítka a pravítka [16].

5.1 Důkaz Trisekce úhlu

Vytvoříme kolmici k přehybu a, která prochází bodem X'. Průsečík kolmice a spodní strany čtverce označíme bodem A. Vytvoříme přímku r, která prochází body X', Z' a je kolmá na polopřímku s. Průsečík polopřímky s a přímky r označíme bodem Y'.



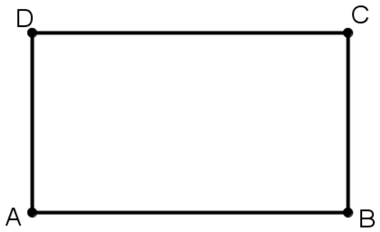
Nyní se podíváme na shodnost třech trojúhelníků a to $\Delta XY'Z'$, $\Delta XY'X'$ a $\Delta XAX'$, abychom dokázali, že jsme opravdu úhel α rozdělili na třetiny. Platí, že $|Z'Y'| = |Y'X'| = |X'A|$; $|XX'| = |XZ'|$; $\Delta XX'Z'$ je rovnoramenný. Poté platí: $\Delta XY'Z'$je shodný s $\Delta XY'X'$ a zároveň s $\Delta XAX'$ podle věty SUS. Pak $\sphericalangle Z'XY' = \sphericalangle X'XY' = X'XA = \frac{\alpha}{3}$ [1].

6 Skládání papírových modelů

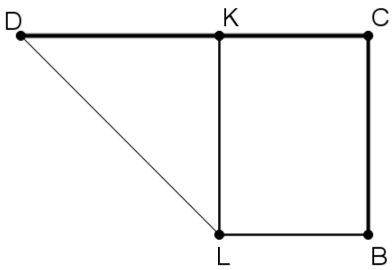
V další kapitole se budeme věnovat skládání papírových modelů, na nichž si ukážeme vlastnosti jednotlivých modelů a to proto, aby žáci lépe pochopili geometrii. Jednou z dalších výhod skládání papírů je, že si žáci mohou modely osahat, sami složit a otáčet s nimi pro lepší představivost. V této kapitole budeme vycházet především z publikace SUNDARA RAO, T, Wooster Woodruff BEMAN a David Eugene SMITH s názvem Geometric exercises in paper folding [14], kterou doplníme informacemi z webových stránek [5,13].

6.1 Čtverec

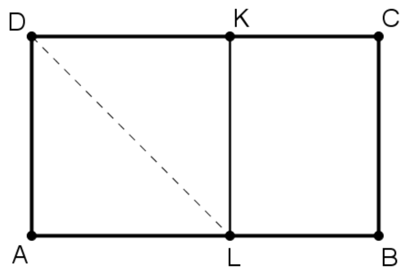
Ke složení čtverce použijeme papír ve tvaru obdélníku. Použili jsme obdélník $ABCD$.



Čtverec získáme tak, že vrchol obdélníku A, přeložíme na stranu DC a tím nám vznikne nový bod K.

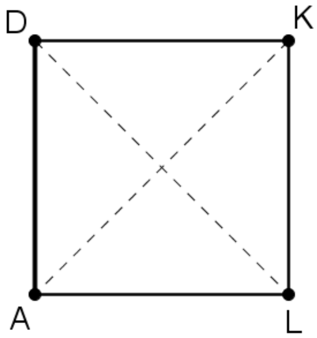


Poté, co papír rozložíme zpět, můžeme vidět tři části. Jsou jimi dva trojúhelníky ALD a KDL a jeden menší obdélník $LBCK$.

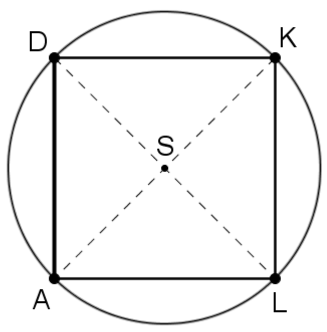


6.1.1 Základní vlastnosti obdélníku a čtverce

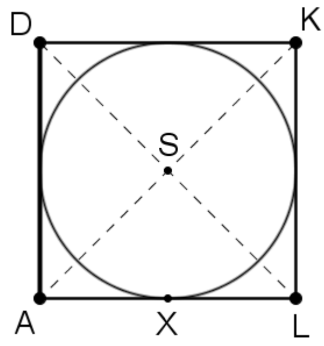
- Oba geometrické útvary patří mezi rovnoběžníky.
- V obdélníku a čtverci se nachází čtyři pravé úhly, jejichž velikost je $90°$.
- Ve čtverci jsou všechny strany stejně dlouhé a dvě protilehlé i zároveň rovnoběžné. Obdélník má vždy shodné dvě protilehlé strany, které jsou i zároveň rovnoběžné. V obou geometrických tvarech jsou sousední strany na sebe kolmé.
- Součet vnitřních úhlů čtverce a obdélníku je $360°$.
- Úhlopříčky čtverec dělí na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky.
- Úsečky DL a AK se nazývají úhlopříčky čtverce. Jejich průsečík tvoří střed čtverce. Úhlopříčky mezi sebou svírají pravý úhel.



- Čtverci i obdélníku lze opsat kružnici. Kružnici vepsanou pak můžeme provést jen u čtverce.
- Kružnice opsaná u čtverce se středem S a poloměrem SA. Kružnice vepsaná se středem S a poloměrem SX.

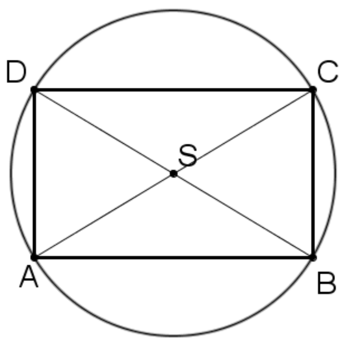


Obrázek 4:Kružnice opsaná čtverce



Obrázek 5: Kružnice vepsaná čtverce

- Kružnici opsanou u obdélníku sestrojíme pomocí bodu S a poloměrem SA.



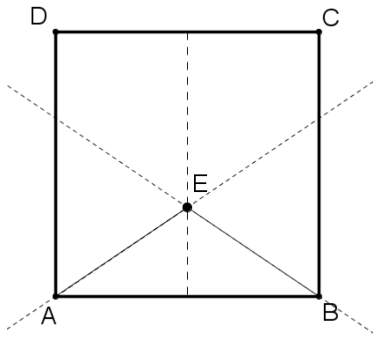
Obrázek 6: Kružnice opsaná obdélníku

6.1.2 Vlastnosti trojúhelníků ALD a KDL*:*

- Trojúhelníky jsou shodné.
- Trojúhelníky jsou rovnoramenné a pravoúhlé.
- V případě pravoúhlého trojúhelníku jsou dvě strany odvěsny a třetí, strana nejdelší, přepona. Rovnoramenný trojúhelník tvoří dvě ramena a základna.
- Pravý úhel se nachází u vrcholu A a vrcholu K.
- Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°.

6.2 Rovnostranný trojúhelník

Vezmeme čtvercový kus papíru a přeložíme jej na polovinu. Tento přehyb nám rozdělí čtverec na dvě části. Vezmeme libovolný bod na tomto přehybu a vytvoříme nový přehyb tak, aby procházel body AE a BE.

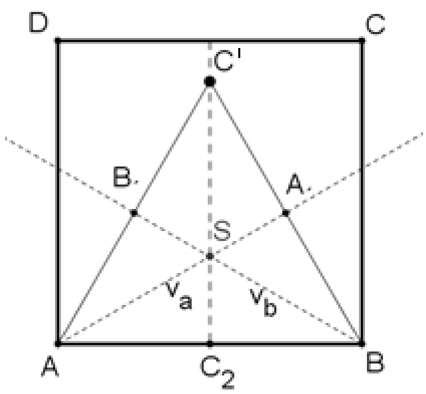


Vlastnosti:

- Prostřední čára rozděluje rovnoramenný trojúhelník ABE na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.
- Překlad čtverce dělí úhel u vrcholu E na dva stejně velké úhly.
- Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je $180°$.

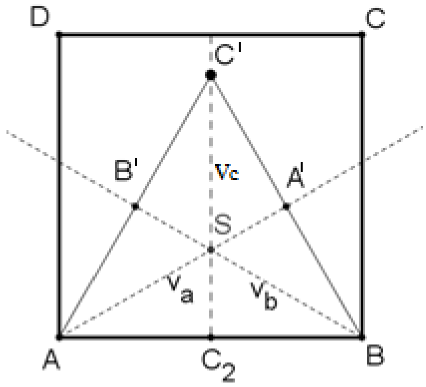
6.2.1 Další krok ke složení rovnostranného trojúhelníku:

Vrchol C přiložíme na prostřední čáru tak, aby přehyb procházel bodem B. Stejně tak vrchol D přiložíme na čáru, aby přehyb procházel bodem A. Vznikne nám třetí vrchol rovnostranného trojúhelníku C'. Přeložením vrcholu B na vrchol C' vznikne přehyb, který vytvoří výšku na stranu a. Přeložením vrcholu A k vrcholu C'vznikne výška na stranu b.

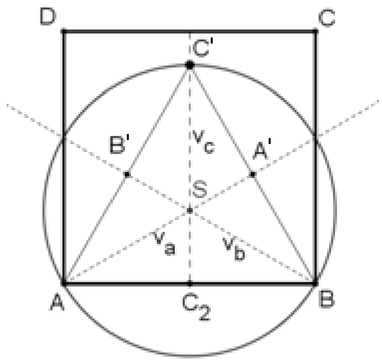


6.2.2 Základní pozorovatelné vlastnosti rovnostranného trojúhelníku

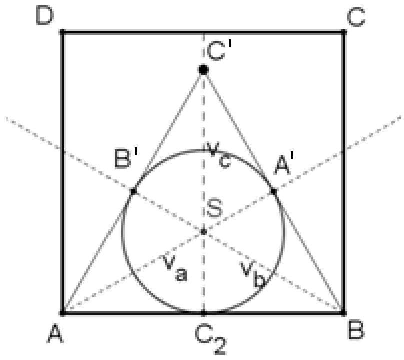
- Součet všech vnitřních úhlů je roven 180°. Všechny vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku jsou stejně velké, neboť platí: $\frac{180°}{3} = 60°$.
  - Všechny tři strany jsou stejně dlouhé.
  - Každá výška rozděluje rovnostranný trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.
  - Výšky dělí strany na polovinu a jsou kolmé na vrcholy.
  - Všechny tři výšky se protínají v bodě S.



  - Z ΔC_2SA a $\Delta A'SB$ vyplývá, že $SC_2 = A'S$.
  - Z ΔC_2SB a $\Delta\, A'SB$ vyplývá, že $\sphericalangle C_2BS = \sphericalangle A'BS$.
  - U $\Delta ABB'$a $\Delta C'BB'$ platí, $\sphericalangle AB'B = \sphericalangle C'B'B$. Trojúhelníky svírají úhel 90°, tzn. trojúhelníky jsou pravoúhlé.
  - Je dokázáno, že $|SA|, |SB|$ a $|SC'|$ jsou stejně dlouhé, stejně tak $|SA'|$, $|SB'|$ a $|SC_2|$ jsou stejně dlouhé.
  - Kružnici opsanou vytvoříme pomocí bodu S, který bude středem kružnice a poloměrem SA, SB nebo SC'. Kružnici vepsanou vytvoříme pomocí bodu S, jež je střed kružnice a poloměrem SA', SB' nebo SC_2 .

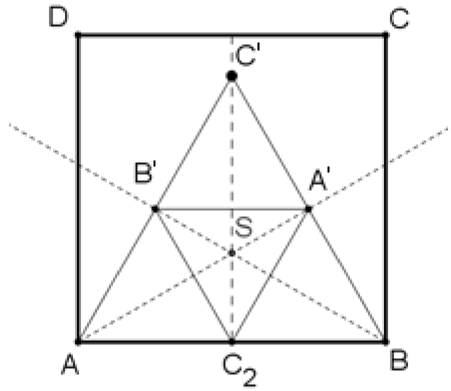


Obrázek 7: kružnice opsaná rovnostranného trojúhelníku



Obrázek 8: Kružnice vepsaná rovnostranného trojúhelníku

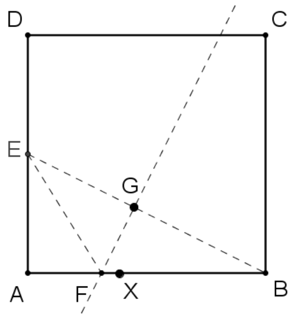
- Rovnostranný trojúhelník je rozdělen do šesti shodných pravoúhlých trojúhelníků, které svírají stejný úhel u vrcholu S.
- Trojúhelník ASC' je dvakrát větší než $\Delta A'SC'$, proto platí $AS = 2SA'$. Totéž platí i u $BS = 2SB'$ a $C'S = 2SC_2$. Proto je poloměr kružnice opsané dvakrát větší, než poloměr kružnice vepsané.
- Pravý úhel čtverce u vrcholu A je rozdělen na tři stejně velké úhly pomocí přehybů AS a AC'. $\sphericalangle BAC'$ je roven $\frac{2}{3}$ pravého úhlu. Úhly $C_2\,AS$ a SAB' jsou rovny $\frac{1}{3}$ pravého úhlu. Totéž platí i s úhly u vrcholů B a C'.
- Nyní přeložíme tak, aby přehyby procházely body $A'B'$, $B'C_2$ a $A'C_2$. Pak trojúhelník $A'B'C_2$ je rovnostranný. Tím jsme vytvořili čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky v trojúhelníku ABC'.



- Strany $A'B', B'C_2$ a C_2A' jsou rovnoběžné s AB, BC' a $C'A$ a zároveň platí, $|AB| = |2A'B'|, |BC'| = |2B'C_2|, |C'A| = |2C_2A'|$.
- Vrcholy $A, C_{2,} A', B'$ tvoří kosočtverec. Stejně tak i $C_{2,}B, A', B'$ a $C', B', C_{2,}\ A'$.

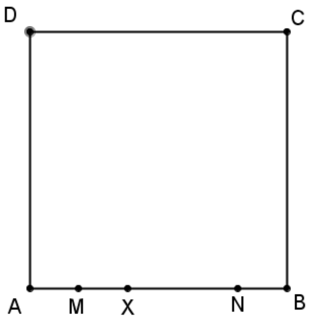
6.3 Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný pětiúhelník složíme ze čtverce $ABCD$. Přeložením strany AB na stranu DC získáme střed strany AD, který označíme bodem E. Nyní přeložíme tak, aby přehyb procházel body EB. Vzdálenost EA přiložíme na přehyb EB a tím získáme bod G. Přehyb BG přiložíme na stranu AB, a tím dostaneme bod X, neboť platí $|BG| = |XB|$. Přehyb, který prochází bodem X a je kolmý na stranu AB, se nazývá zlatý řez, neboť platí: $\frac{BX}{AX} = \frac{AB}{BX}$.

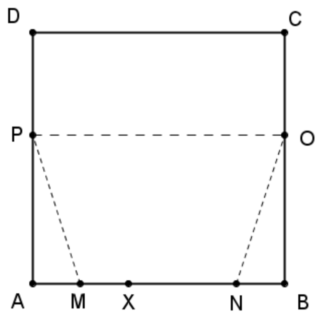


Nyní přiložíme bod A na bod X a tím získáme střed AX. Získaný střed nazveme bodem M. Vzdálenost AM přiložíme na bod B, a místo, kde se bude bod M dotýkat strany AB, nazveme bodem N, neboť platí:

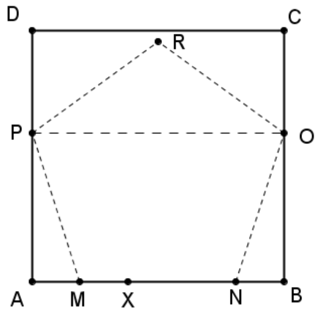
- $|AM| = |MX|$
- $|BN| = |AM|\ nebo |XM|$
- $|MN| = |XB|$



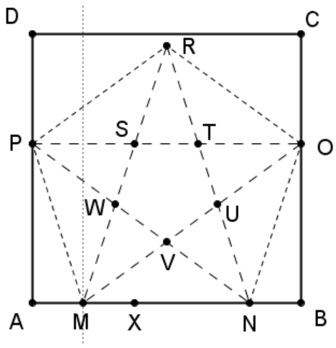
Poté vytvoříme body O a P. Přehyb bude procházet bodem M a bude se protínat se stranou AD. Délka přehybu bude vzdálenost MN. Tím nám vznikne bod P. Totéž vytvoříme s bodem N a vznikne nám bod O.



Bod M přiložíme na bod N, abychom získali střed strany MN. Bod R bude ležet na tomto přehybu a vzdálenost PR a RO bude rovna $|MP|$. Nyní nám vznikl pětiúhelník $MNORP$.



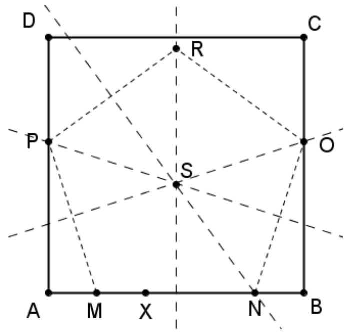
Z obrázku je vidět, že $|NP| = |AB|$, stejně tak $|MO| = |AB|$. Dále platí, že $|PO|$ je rovnoběžná s AB.



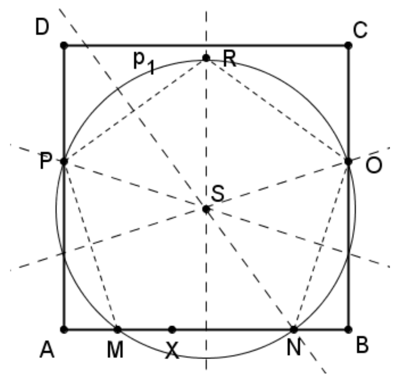
- Součet vnitřních úhlů konvexního n- úhelníku se rovná $(n - 2) \times 180°$.
- Součet vnitřních úhlů pětiúhelníku se tedy rovná $(5 - 2) \times 180°$.
- Platí tedy, že součet vnitřních úhlů pětiúhelníku je $540°$. Velikost úhlů při jednotlivých vrcholech je $108°$.

6.3.1 Základní vlastnosti pětiúhelníku

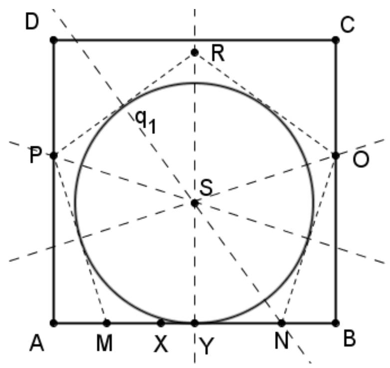
- Pětiúhelník má pět stran a pět vrcholů, neboť počet stran je roven počtu vrcholů.
- Počet úhlopříček $n -$ ú$helníku$ vypočteme ze vzorce $\frac{1}{2}n \times (n - 3)$. Počet úhlopříček pětiúhelníku je pět.
- Pravidelnému pětiúhelníku lze opsat i vepsat kružnici.
- Nalezneme střed pětiúhelníku tak, že vztyčíme kolmice k daným vrcholům.



Kružnice opsaná se středem S a poloměrem SM. Kružnice vepsaná se středem S a poloměrem SY.



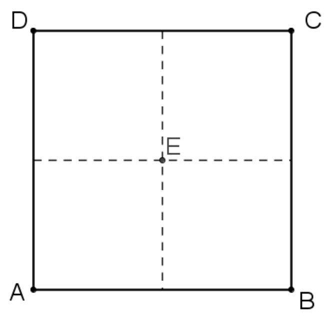
Obrázek 9:Kružnice opsaná pravidelného pětiúhelníku



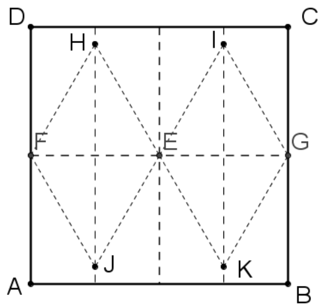
Obrázek 10: Kružnice vepsaná pravidelného pětiúhelníku

6.4 Pravidelný šestiúhelník

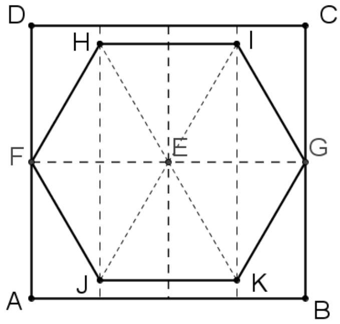
Pravidelný šestiúhelník složíme ze čtverce $ABCD$. Čtverec přeložíme na polovinu tak, aby se strana AB přeložila na stranu CD a strana BC na stranu AD. Průsečík přehybů označíme bodem E.



Na obou stranách vytvoříme rovnostranné trojúhelníky se základnou FE a EG.



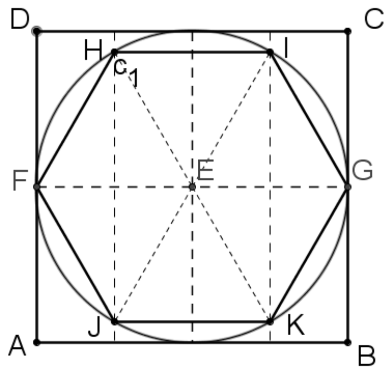
Vznikly nám čtyři rovnostranné trojúhelníky $FEH,\ EGI,\ FEJ,\ EGK$. Poté přeložíme tak, aby přehyb procházel HI a JK. Nyní jsme dostali šestiúhelník $JKGIHF$.



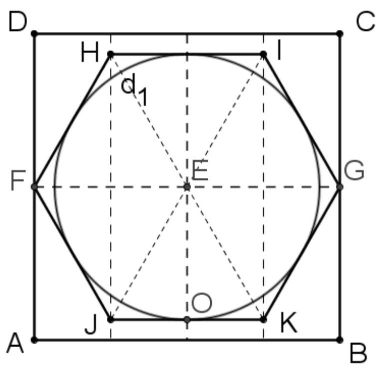
Obrázek 11: Pravidelný šestiúhelník

6.4.1 Základní vlastnosti šestiúhelníku

- Šestiúhelník má šest shodných stran, šest vrcholů a šest shodných vnitřních úhlů.
- Součet velikostí vnitřních úhlů se rovná $(n-2) \times 180°$.
- Součet velikostí vnitřních úhlů je roven $720°$. Poté platí: $\sphericalangle FJK = \sphericalangle JKG = \sphericalangle KGI = \sphericalangle GIH = \sphericalangle IHF = \sphericalangle HFJ = 120°$.
- Z obrázku je zřejmé, že šestiúhelník je sestaven ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků.
- Pravidelnému šestiúhelníku lze opsat a vepsat kružnici.
- Kružnice opsaná se středem v bodě E a poloměrem EF. Kružnice vepsaná se středem v bodě E a poloměrem EO.



Obrázek 12: Kružnice opsaná pravidelného šestiúhelníku



Obrázek 13Kružnice vepsaná pravidelného šestiúhelníku

Z obrázku je zřejmé, že je šestiúhelník vytvořen i dvěma lichoběžníky. Lichoběžníky $FGIH$ a $FGKJ$.

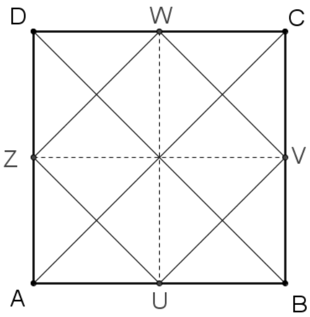
6.4.2 Vlastnosti lichoběžníku

Lichoběžník je čtyřúhelník. Jeho dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné a zbylé nikoli. Rovnoběžné strany se nazývají základny, v našem případě FG a IH a FG a JK a zbylé dvě FH i IG a FJ i GK se nazývají ramena.

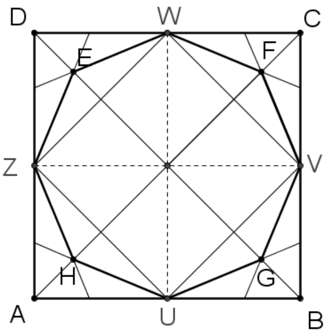
Základny nejsou shodné, ramena shodná být mohou. Z obrázku je patrné, že ramena shodná jsou, proto můžeme říci, že lichoběžník je rovnoramenný.

6.5 Pravidelný osmiúhelník

Pravidelný osmiúhelník složíme z daného čtverce $ABCD$. Nejprve vytvoříme středy stran čtverce $ABCD$, které budou tvořit vrcholy U, V, W, Z a poté přehyby UV, VW, WZ a ZU.



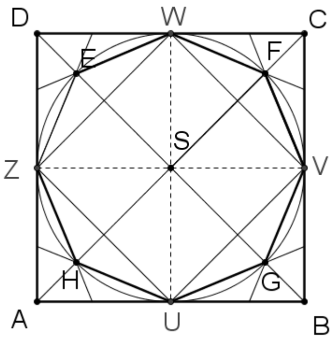
Vzniknou nám čtyři rovnoramenné trojúhelníky ZWD, VWC, UVB a UZA. Vrchol Z přeložíme na vrchol W a tím nám vznikne přehyb, který bude procházet vrcholem D. Nyní vzdálenost DZ i DW přiložíme na stranu ZW. Průsečík obou přehybů nazveme bodem E. Totéž provedeme i s ostatními rovnoramennými trojúhelníky.



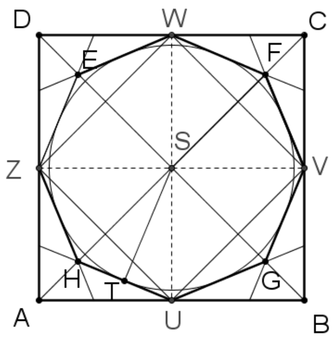
Trojúhelníky ZHU, UGV, VFW a WEZ jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky. Z toho plyne, že osmiúhelník je pravidelný. Skládáním jsme složili pravidelný osmiúhelník $ZHUGVFWE$.

6.5.1 Vlastnosti osmiúhelníku

- Úhly při jednotlivých vrcholech jsou rovny $135°$, proto úhel WVF je $\frac{1}{4}$ pravého úhlu.
- Součet všech vnitřních úhlů je $(n-2) \times 180°$. Součet je tedy $1080°$.
- Osmiúhelník má všechny strany shodné, má osm vrcholů, osm vnitřních shodných úhlů.
- Pro pravidelný osmiúhelník platí, že lze vepsat i opsat kružnici.
- Kružnice opsaná se středem S a poloměrem SW. Kružnice vepsaná se středem S a poloměrem ST.

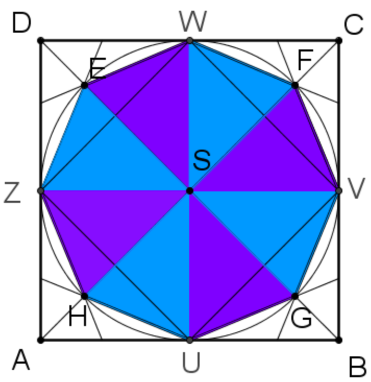


Obrázek 14: Kružnice opsaná pravidelného osmiúhelníku



Obrázek 15Kružnice vepsaná pravidelného osmiúhelníku

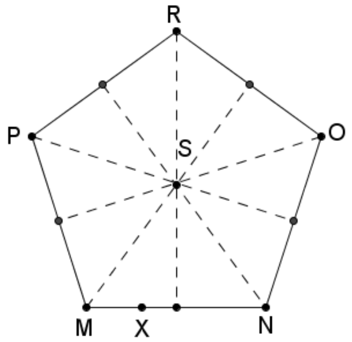
- Osmiúhelník můžeme rozdělit na osm shodných rovnoramenných trojúhelníků.



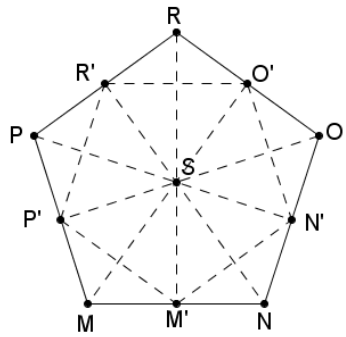
Obrázek 16:Pravidelný osmiúhelník

6.6 Pravidelný desetiúhelník

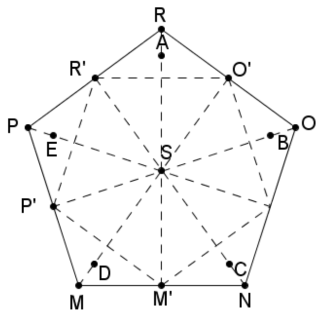
Pravidelný desetiúhelník složíme z pětiúhelníku. Nejprve nalezneme středy stran pětiúhelníku $MNORP$. Přehyb vznikne tak, že bod P přiložím na bod R, a zároveň přehyb bude procházet bodem N. Další přehyby složíme stejným způsobem u všech vrcholů. Vznikne nám tedy pět přehybů. Průsečíky úseček označíme bodem S.



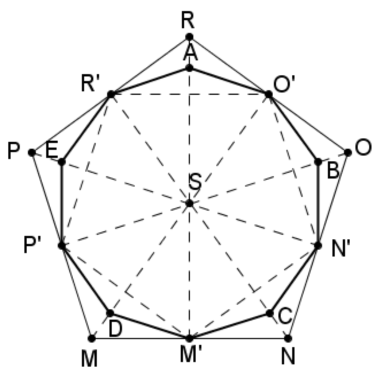
Poté spojíme středy stran pětiúhelníku vždy střed se středem sousedícím, tak aby nám vznikl opět pětiúhelník. Skládáním jsme dostali pětiúhelník $M'N'O'R'P'$.



Nyní použijeme vzdálenost $R'S$ a přiložíme ji na RS a tím nám vznikne bod A. Totéž opakujeme: $O'S$ na OS, SN' na SN, SM' na SM a SP' na SP, abychom získali ostatní vrcholy desetiúhelníku.

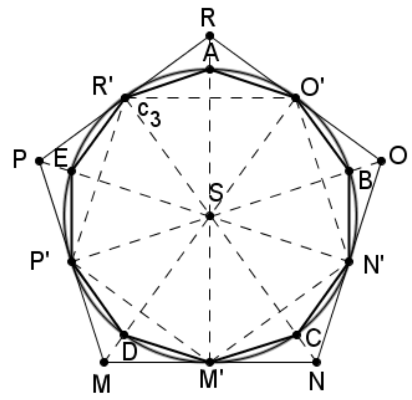


Posledním krokem ke složení desetiúhelníku je vytvoření přehybů mezi body $AO', O'B, BN', N'C, CM', M'D, DP', P'E, ER' a\ R'A$. Dostali jsme pravidelný desetiúhelník $AO'BN'CM'DP'ER'$.

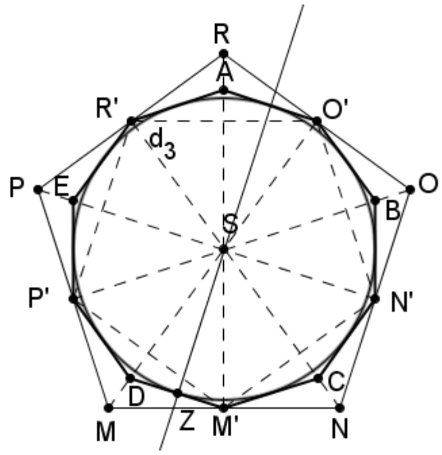


6.6.1 Pozorované vlastnosti desetiúhelníku

- Pravidelný desetiúhelník je mnohoúhelník, který se skládá z deseti rovnoramenných trojúhelníků, deseti shodných vnitřních úhlů, deseti shodných stran a deseti vrcholů.
- V trojúhelníku $P'SE$ je velikost úhlu $P'SE$ rovna 36°, stejně tak i ve zbylých devíti trojúhelnících, neboť součet všech úhlů v trojúhelnících při plném úhlu u vrcholu S je $360°$, tzn. $\frac{360°}{10} = 36°$.
- Velikost úhlu při vrcholech $A, O', B, N', C, M', D, P', E, R'$ je rovna $144°$, poněvadž platí: $(n-2) \times 180°$.
- Pravidelnému desetiúhelníku lze opsat a vepsat kružnici.
- Kružnice opsaná se středem S a poloměrem SC. Kružnice vepsaná se středem S a poloměrem SZ.



Obrázek 17: Kružnice opsaná pravidelného desetiúhelníku

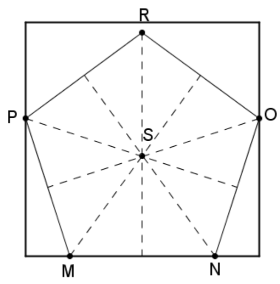


Obrázek 18:Kružnice vepsaná pravidelného desetiúhelníku

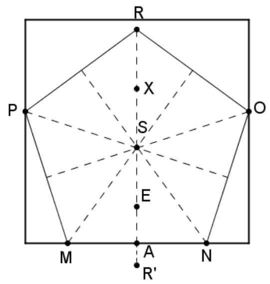
Pokud je n sudé, pak platí, že ke každému vrcholu existuje protější vrchol a ke každé straně protější strana. Počet úhlopříček desetiúhelníku vypočteme ze vzorce $\frac{1}{2}\,\mathrm{n} \times (\mathrm{n}-3)$. Počet úhlopříček desetiúhelníku je tedy 35.

6.7 Pravidelný patnáctiúhelník

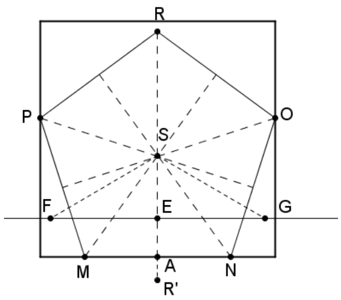
Ke složení patnáctiúhelníku použijeme pětiúhelník. Máme pětiúhelník $MNORP$ se středem S.



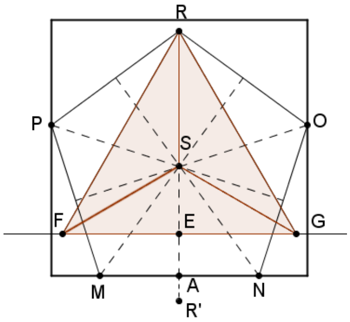
Poté přeložíme délku RS tak, aby protnula stranu MN. Průsečík se stranou MN nazveme A. Bod R přiložíme na bod S, abychom získali polovinu délky RS. Tento bod označíme písmenem X. Vzdálenost XS přiložím na SR', a průsečík nazveme bodem E. Poté bude platit vztah, $|SE| = \frac{1}{2}|RS|$.



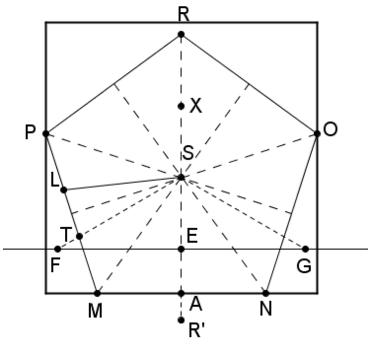
Vytvoříme přehyb, který bude procházet bodem E a bude kolmý na RA. Pomocí velikosti RS získáme body F a G tak, že bod R přiložíme na přehyb, který je kolmý na RA. Platí tedy $|SF| = |SG| = |RS|$.



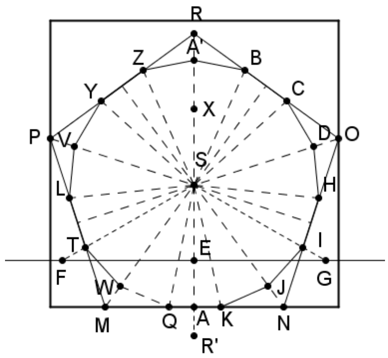
Dalším krokem je spojení bodů R, F a G, čímž nám vznikne rovnostranný trojúhelník. Skládá se ze tří rovnoramenných trojúhelníků, z čehož plyne, že $\sphericalangle RSF = \sphericalangle RSG = \sphericalangle FSG = 120°$.



V pětiúhelníku vidíme pět rovnoramenných trojúhelníků. Platí, že $\sphericalangle MSP = 72°$, neboť plný úhel při vrcholu S je $360°$. Součet vnitřních úhlů pětiúhelníku vypočteme pomocí vztahu $(n-2) \times 180°$, z čehož vyplývá, že součet vnitřních úhlů je $540°$. Bod T je průsečík FS se stranou MP. Přehyb MS přehneme přes osu strany MP a průsečík se stranou MP nazveme bodem L.

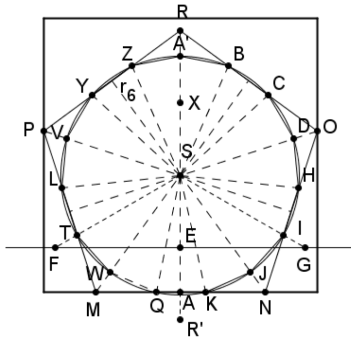


Poté musí platit, že $|ST| = |SL|$. Jedním z posledních kroků k vytvoření patnáctiúhelníku je vytvoření bodu V a W. Vezmeme si vzdálenost ST nebo SL a přiložíme na SP a SM. Nyní spojíme body WT, TL a LV. Stejný postup zopakujeme u zbylých trojúhelníků tak, abychom dostali všechny vrcholy patnáctiúhelníku. Po spojení všech vrcholů jsme získali pravidelný patnáctiúhelník $A'BCDHIJKQWTLVYZ$.

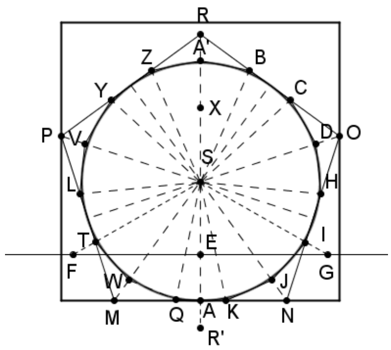


Pravidelný patnáctiúhelník se skládá z patnácti rovnoramenných trojúhelníků. Součet vnitřních úhlů patnáctiúhelníku je $(n-2)\times 180°$, z čehož vyplývá, že součet úhlů je $2340°$. Velikost úhlů při jednotlivých vrcholech je $\frac{2340°}{15} = 156°$

Jako v předchozích pravidelných mnohoúhelnících, tak i u pravidelného patnáctiúhelníku lze vepsat i opsat kružnici. Vepsanou kružnici sestrojíme se středem S a poloměrem SA. Opsanou kružnici sestrojíme se středem S a poloměrem SW.



Obrázek 19 Kružnice opsaná pravidelného patnáctiúhelníku

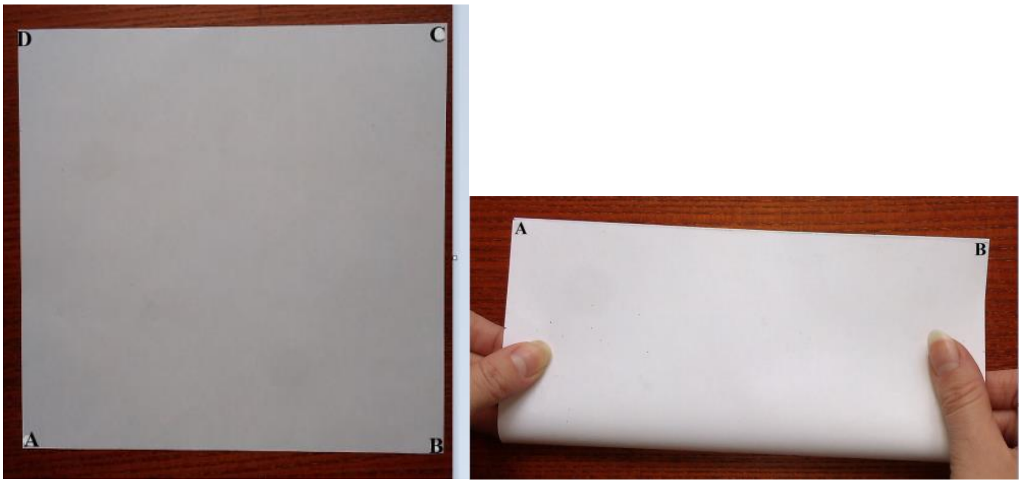


Obrázek 20: Kružnice vepsaná pravidelného patnáctiúhelníku

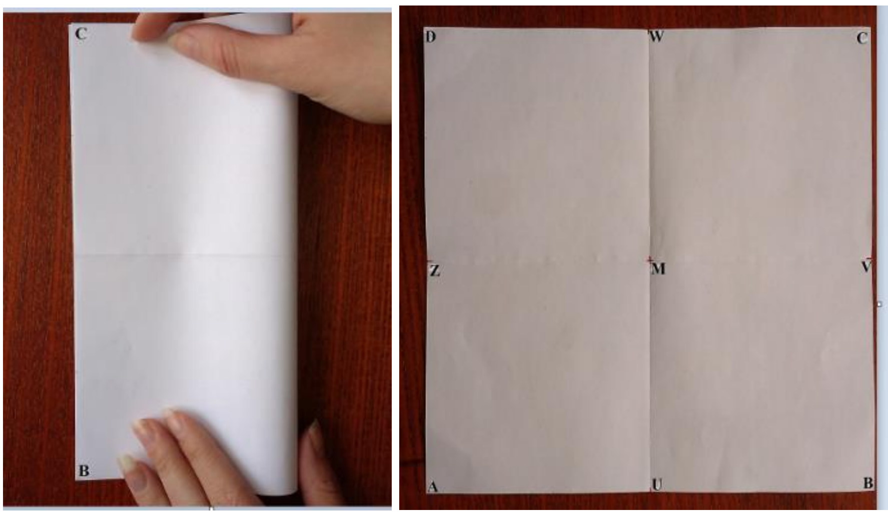
7 Pravidelný sedmiúhelník

Skládáním pravidelného sedmiúhelníku se zabýval Robert Geretschläger ve své práci Skládání pravidelného sedmiúhelníku [2]. Nyní si bez důkazu ukážeme, jak složit pravidelný sedmiúhelník.

Ke složení pravidelného sedmiúhelníku použijeme čtverec $ABCD$. Stranu AB přiložíme na stranu CD, poté stranu BC na stranu AD. Tyto překlady nám nyní vytvoří čtyři stejné čtverce. Průsečík přehybů označíme bodem M. Koncové body přehybů označíme body U, V, W, Z.

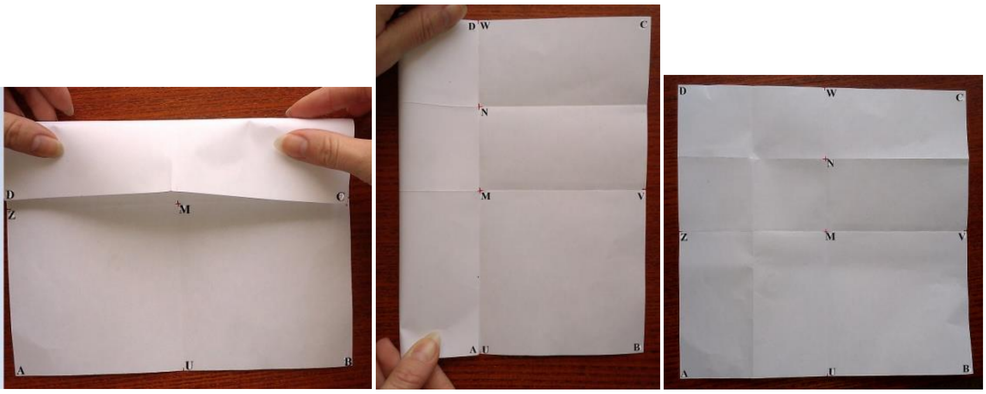


Obrázek 21 - 22



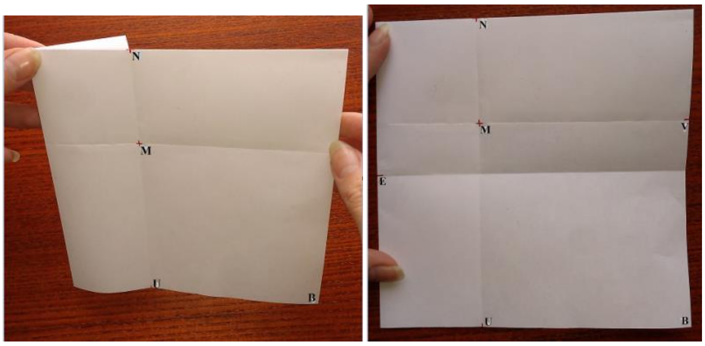
Obrázek 23 - 24

Nyní stranu DC přiložíme na stranu ZV a průsečík přehybů označíme N. Poté stranu DA přiložíme na stranu UW.

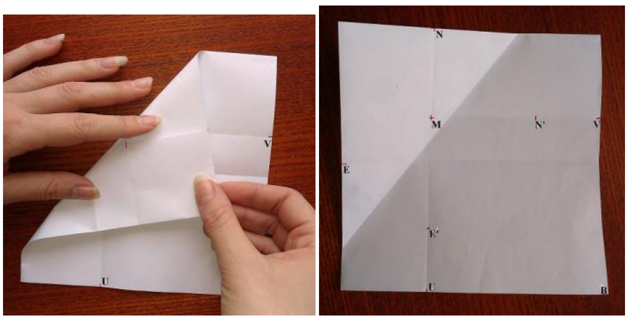


Obrázek 25 - 27

Oba nově vzniklé přehyby přehneme dozadu. Vznikne nám nový menší čtverec. Levou stranu přehneme na polovinu, abychom získali střed této strany, a označíme jej bodem E. Nyní použijeme Huzitův axiom pro body E a N označený č. 6 (viz kapitola 4), a tím nám vzniknou obrazy bodů E, N.

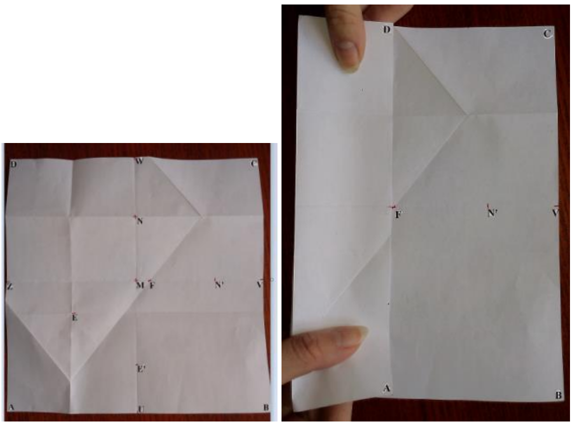


Obrázek 28 - 29



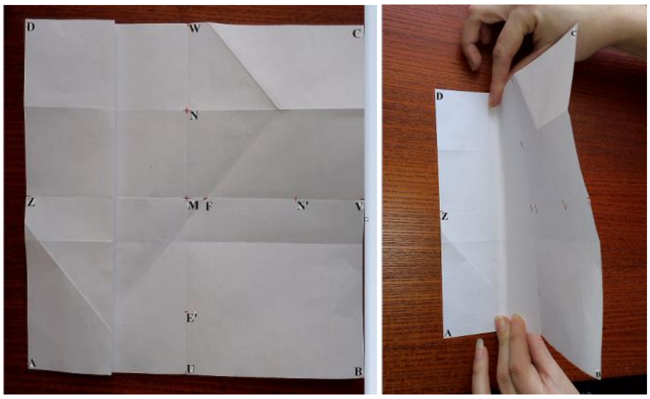
Obrázek 30 - 31

Průsečík přehybu se stranou ZV označíme bodem F. Poté rozložíme zpět na původní čtverec a stranu AD přiložíme na bod F.

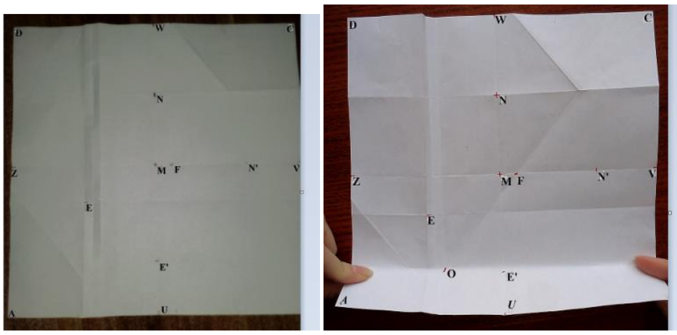


Obrázek 32 - 33

Vznikne nám nový přehyb. Podle *obrázku 35* složíme třetí přehyb. Všechny tři přehyby budou od sebe stejně vzdálené a rovnoběžné. Jak je vidět z obrázku, bod O je průsečík dvou přehybů. Vytvoříme nový přehyb, který bude procházet bodem O, a bude rovnoběžný se stranou AB.

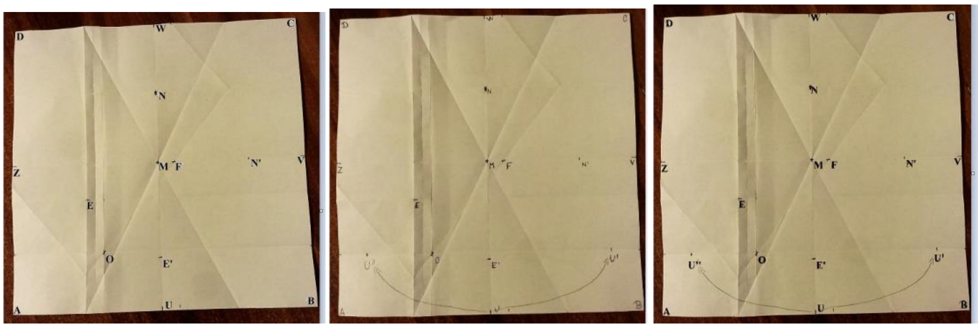


Obrázek 34 -35



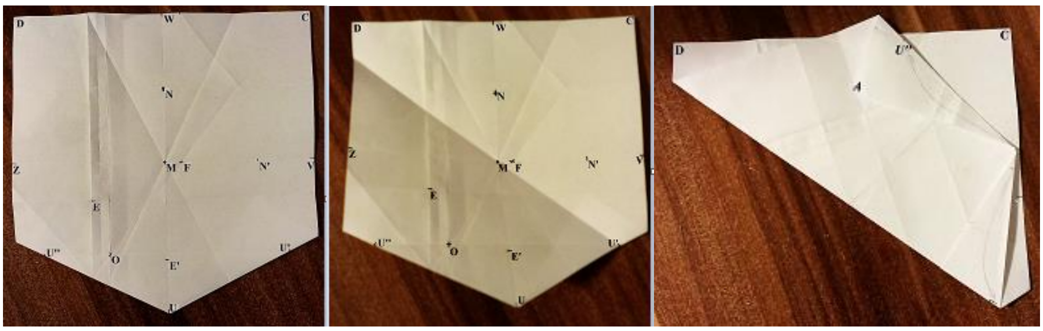
Obrázek 36 - 37

Podle *obrázku 38* složíme dva přehyby tak, aby procházely bodem M. Díky nově vytvořeným přehybům, mohu vytvořit obrazy bodu U.

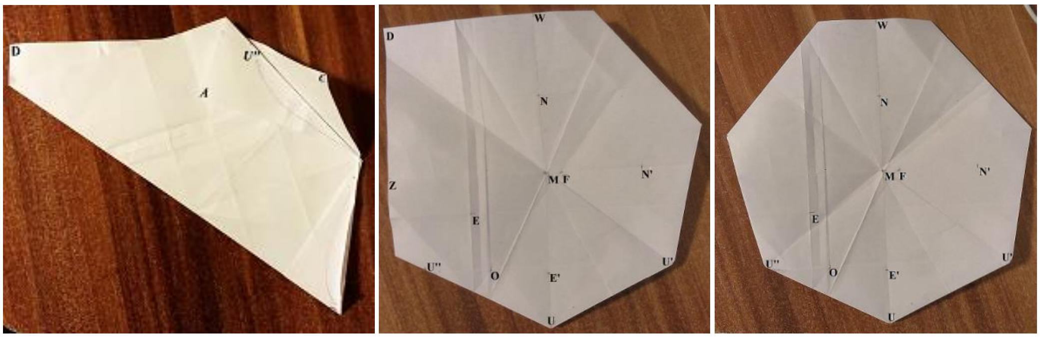


Obrázek 38 - 40

Dalším krokem ke složení sedmiúhelníku je vytvoření přehybů, procházejících body UU' a UU''. Vytvořené přehyby ohneme dozadu. Nyní přehneme tak, aby přehyb procházel body $U'M$. Další dvě strany sedmiúhelníku získáme přeložením papíru podle *obrázku 44*. Vzniklé přehyby ohneme dozadu. Poté rozložíme zpět a vytvoříme přehyb procházející body $U''M$ a zopakujeme stejný postup, jak je viděn *na obrázku 44*.

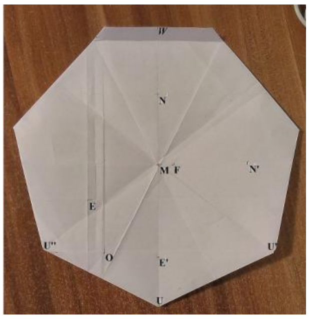


Obrázek 41 - 43



Obrázek 44 - 46

K získání pravidelného sedmiúhelníku nám chybí poslední strana, kterou získáme přeložením papíru horní strany podle *obrázku 47*.



Obrázek 47

8 Příklady k procvičení

1) Pomocí skládání papíru složte pravidelný devítiúhelník.
2) Bez užití pravítka a kružítka složte pravidelný dvanáctiúhelník.
3) Složte pravidelný osmiúhelník, který může být získaný také dělením úhlů daného čtverce na čtyři stejné části.
4) Přeložte pravidelný šestiúhelník tak, aby v něm vznikly stejné pravidelné šestiúhelníky a rovnostranné trojúhelníky.
5) Výšky v rovnostranném trojúhelníku jej dělí na šest shodných trojúhelníků. Dokažte, že velikost jednotlivých úhlů u bodu S, je rovna $\frac{2}{3}$ pravého úhlu.
6) Rozdělte čtverec na tři stejné čtverce.
7) Dokažte, že velikost MN je rovna velikosti XB.
8) Zjistěte, zda lze pravidelný desetiúhelník složit i jiným způsobem.

9 Závěr

V bakalářské práci jsme si dokázali, že obyčejný papír lze využít nejen jako psací potřebu či reklamní leták. Lze jej efektivně využít při výuce matematiky či jiných vzdělávacích předmětů. Příkladem může být origami, které není jen hrou či zábavou, ale zastupuje velice důležitou roli. Díky skládání papíru si mohou žáci daný model složit a lépe pochopit jeho vlastnosti. Motivací ke skládání různých modelů může být pro žáky například i barevný papír. Origami přispívá k manuální zručnosti studentů, jejich fantazii a také rozvíjí jejich myšlení.

Díky znalosti Huzitových axiomů je možné si uvědomit, že skládání papíru překračuje možnosti Euklidovských konstrukcí. S jejich pomocí lze vyřešit antický konstrukční problém - trisekci úhlu. V poslední době narůstá zájem o skládání papíru nejen ve školských zařízeních, ale i ve stavebnictví, průmyslu či v architektuře.

Literatura

[1] Abeho trisekce. *Origami CZ* [online]. [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://www.origami.cz/Geometrie/trisectp.html

[2] GERETSCHLÄGER, Robert. *Folding the Regular Heptagon* [online]. Graz, Austria [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: https://cms.math.ca/crux/v23/n2/page81-88.pdf. Bundesrealgymnasium.

[3] Huzita–Hatoriaxioms - Wikipedia, the free encyclopedia. *Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 2016 [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori_axioms

[4] Malá škola Origami. *Origami CZ* [online]. [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://www.origami.cz/skola.html

[5] Obdélník — Matematika.cz. *Matematika pro střední a základní školy — Matematika.cz* [online]. Nová média, 2014 [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/obdelnik

[6] Origami a geometrie. *Origami CZ* [online]. [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://www.origami.cz/Geometrie/axiomy.html

[7] Origami CZ. *Origami CZ* [online]. [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://www.origami.cz

[8] Papír – Wikipedie. *Wikipedie, otevřená encyklopedie* [online]. 2015 [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pap%C3%ADr

[9] Papír. Filozofická *fakulta MU: Start* [online]. Brno, 2009 [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://www.phil.muni.cz/~lcerna/seminarky/kadrnozkova/papir.html

[10] Papírové umění aneb kouzlo origami. *Lasting.blog.cz* [online]. [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://lasting.blog.cz/1208/papirove-umeni-aneb-kouzlo-origami

[11] Plan. Historie a vývoj origami jako umění. Proč děti jako origami. *Zprávy v českém jazyce* [online]. [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://vyukove-materialy.eu/index.php?newsid=329041

[12] Podrobnosti k Origami. *Origami CZ* [online]. [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://www.origami.cz/podrobnosti.html

[13] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-358-5.

[14] SUNDARA RAO, T, Wooster Woodruff BEMAN a David Eugene SMITH. *Geometric exercises in paper folding*. New York: Dover publications, 1966. ISBN 0486215946.

[15] Technika skládání a jazyk origami. *Origami* [online]. 2008 [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: http://origami.webz.cz/technikaskladani.htm

[16] Trisekce úhlu – Wikipedie. *Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 2016 [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Trisekce_%C3%BAhlu

[17] Vlastnosti, druhy a formáty papírů. *Vlastnosti, druhy a formáty papírů* [online]. 2012, 3-6 [cit. 2016-03-23]. Dostupné z: http://www.strojka.opava.cz/UserFiles/File/_sablony/Technologie_grafiky_I/VY_32_INOVACE_A-02-03.pdf