Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra kybernetiky

Početní operace na počítadlech jako rozšiřující učivo výuky informatiky

Diplomová práce

Autor: Martin Tulis

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství pro střední školy – informatika

Vedoucí práce: PhDr. Michal Musílek, Ph.D.

Hradec Králové duben 2017

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Bc. Martin Tulis**
Studijní program:	N1101 – Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy Učitelství pro střední školy – informatika
Název práce:	Početní operace na počítadlech jako rozšiřující učivo výuky informatiky
Název práce v AJ:	Arithmetic Operations Using the Abacuses as Extension of the Informatics Curriculum
Cíl a metody práce:	Cílem teoretické části práce je popsat historický vývoj počítadel a dalších mechanických pomůcek umožňujících nebo usnadňujících provádění základních početních operací po dlouhá staletí, až do nástupu elektronických kalkulátorů a počítačů. Cílem praktické části práce příprava pracovních listů, které žáky seznámí stručně s historií a současností používání počítadel ve výuce a v praktickém životě v různých částech světa. Cílem empirické části bude zjištění povědomí veřejnosti o počítadlech, jejich historii a možnostech použití formou ankety.
Garantující pracoviště:	Katedra informatiky Přírodovědecké fakulty UHK
Vedoucí práce:	PhDr. Michal Musílek, Ph.D.
Oponent:	doc. RNDr. Štěpán Hubálovský, PhD.
Datum zadání práce:	25. 4. 2016
Datum odevzdání práce:	27. 4. 2017

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové dne 27. 4. 2017 Bc. Martin Tulis

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce PhDr. Michalu Musílkovi, Ph.D. a doc. RNDr. Ľubomíru Šnajderovi, PhD.za cenné rady, připomínky a čas, který mi při konzultacích věnoval.

Anotace

Tulis, M. *Početní operace na počítadlech jako rozšiřující učivo výuky informatiky*. Hradec Králové, 2017. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí práce Michal Musílek. 111 s.

Teoretická části práce popisuje historický vývoj počítadel a dalších mechanických pomůcek umožňujících nebo usnadňujících provádění základních početních operací po dlouhá staletí, až do nástupu elektronických kalkulátorů a počítačů. Cílem praktické části práce byla příprava pracovních listů, které žáky seznámí stručně s historií a současností používání počítadel ve výuce a v praktickém životě v různých částech světa s důrazem na japonský soroban a ruský sčot a naučí je provádět pomocí počítadel základní čtyři početní operace. Pozornost je také věnována prohloubení znalostí v oblasti číselných soustav. Empirická část mapuje povědomí veřejnosti o počítadlech, jejich historii a možnostech použití formou ankety.

Klíčová slova

Historie informatiky, počítadlo, vrubovky, liny, sčot, abakus, soroban, suan-pan, logaritmy, logaritmické pravítko

Anotation

Tulis, M. *Arithmetic Operations Using the Abacuses as Extension of the Informatics Curriculum*. Hradec Králové, 2017. Diploma thesis at Faculty of Sciece University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Michal Musílek. 111p.

The theoretical part of the thesis is to describes the historical development of counters and other mechanical devices enabling or facilitating perform basic arithmetic operations for centuries, until the was come of electronic calculators and computers. The aim of the practical part preparation worksheets (or workbooks), which pupils teach a brief history and current use of calculators in the classroom and in everyday use in various parts of the world with emphasis on Japanese soroban and Russian Schoty and teach is done using counters four basic arithmetic operation. Thesis are focused also on deepen the knowledge of number systems. Empirical findings probed of the counters, their history and possibilities of use with forms.

Key words:

History of Science, counter, tally stick, lines, Schoty, abacus, soroban, suan-pan, logarithms, slide rule

Obsah

Úvod

Počítání je protkáno celou historií lidstva, kdy již pravěcí lidé primitivními způsoby porovnávaly množství ukořistěné potravy. S rozvojem řeči docházelo k dalšímu rozvoji matematických dovedností, jejichž postupný vývoj nezadržitelně pokračoval.

S postupným rozvojem matematiky, ale i dalších vědeckých oborů, se zvyšovala náročnost provádění výpočtů. Každý podnět, matematická krize, rozvoj ostatních oborů nebo války, tento pokrok umocňovaly a tím navyšovaly požadavky na početní úkony. Tento nárůst požadavků na početní úkony je naopak podnětem k rozvoji numerace a aritmetiky, které dávají nástroje v podobě algoritmů a početních pomůcek pro splnění těchto nároků.

Dnes všechny výpočty provádíme na výkonných kalkulačkách, počítačích a neuvědomujeme si, že podobné výpočty byly v minulosti brzdou obchodu, ale především vědeckého pokroku. Snahou všech pokrokových učenců bylo hledat způsoby jak výpočty a matematické operace zjednodušit a především urychlit. Mylně bychom si mohli myslet, že tyto snahy byly doménou pouze některé dobové etapy, jako středověku nebo sedmnáctého století. Jsou součástí celé historie matematiky, a dokonce zakladatelé zcela nového technického oboru – informatiky. Dnes stejně jako zítra budou vyvíjeny stále dokonalejší a rychlejší počítače s procesory zvládajících tisíce výpočtů za jedinou sekundu.

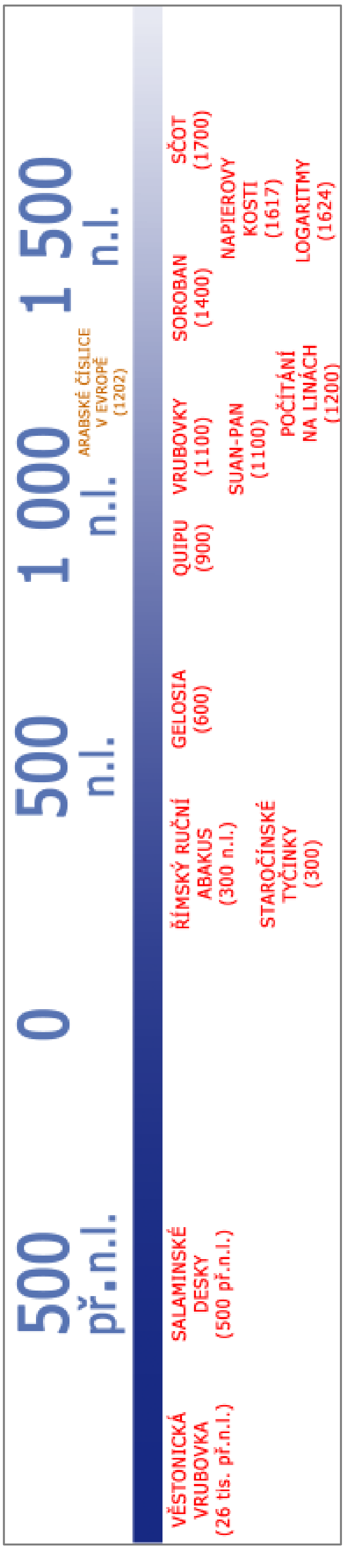
Cílem teoretické části diplomové práce je popsat historický vývoj počítadel a dalších mechanických pomůcek umožňujících nebo usnadňujících provádění základních početních operací. Empirická část ověří strukturovaným rozhovorem povědomí dospělé veřejnosti o početních pomůckách a možnostech jejich využití. Dále formou dotazníkového průzkumu zjistí rozsah zařazení početních pomůcek do výuky na základních a středních školách v České i Slovenské republice. Cílem praktické části práce je vytvořit pracovní listy seznamující žáky s historií početních pomůcek a s prováděním základních početních operací na sorobanu a sčotu.

1 Početní pomůcky v historii matematiky

Ve středověké Evropě se až do 10. století výhradně používaly římské číslice a zlomky. To znemožňovalo provádět početní operace pomocí zápisu. Běžně se pro znázornění čísel používaly prsty, které bylo možné snadno použít i pro operace sčítání a odčítání. Pro složitější operace, násobení a dělení, se výpočty prováděly na abaku či linách a výsledky se následně zapisovaly, ne zřídka slovním zápisem. Zastánci tohoto přístupu jsou později nazýváni podle svého počítadla abacisté.

Díky obchodníkům z Orientu, ale také v důsledku porážky islámu na Pyrenejském poloostrově, proniká nejpozději v 10. století desítková soustava a indo-arabské číslice (přímý předchůdce dnes používaných číslic) postupně přes Španělsko do Evropy. Nejstarším evropským rukopisem s arabskými číslicemi je *Codex Vigilanus,* z roku 976 nalezený v severním Španělsku. Tento rukopis ještě neobsahoval nulu, ta se nejprve nahrazovala vynecháním pozice na příslušném řádu, později byla symbolizována tvarem kroužku. Podoba číslic se ještě dlouho vyvíjela a k její ustálení napomohl až knihtisk v druhé polovině 15. století. (Balada, 1959)

Pro širší rozšíření nového početního systému výrazně napomohly latinské překlady arabských matematiků, šlo především o al-Chwárízmího *Aritmetický traktát* a také Leonardova Fibonacciho Pisánského spis *Kniha o*



Obrázek 1: Časová osa početních pomůcek

počítání[1] *(Liber abaci)* vydaného roku 1202 v Itálii. Ve spisech nejsou popisovány pouze způsoby zápisu nových čísel, ale i početní operace s nimi pomocí zápisu – algoritmu[2], tedy přesnému postupu, kterým lze vyřešit daný typ úlohy. Matematikům, kteří tyto postupy znali a používali, se proto říká algoritmikové. Jejich počet od 11. století postupně narůstal, přes všechny snahy i přes rozvoj výroby a rostoucí dostupnost papíru od 12. století, byl proces šíření indo-arabských číslic a počítání s nimi velice pozvolný. Ještě v roce 1299 měli kupci ve Florencii zakázáno v účetnictví používat nové číslice a všechny záznamy museli zapisovat pouze slovy. (Bečvářová, 2001), (Francová, 2010)

Takzvané *počítání na cifry* začalo počítání na linách vytlačovat až na konci 15. století. S odstupem staletí můžeme říct, že v Evropě jednoznačně vyhráli algoritmikové, ale východně (Rusko, Čína, Japonsko) převládli abacisté, kdy byla počítadla běžně rozšířena až do nástupu elektronických kalkulaček ve 20. století.

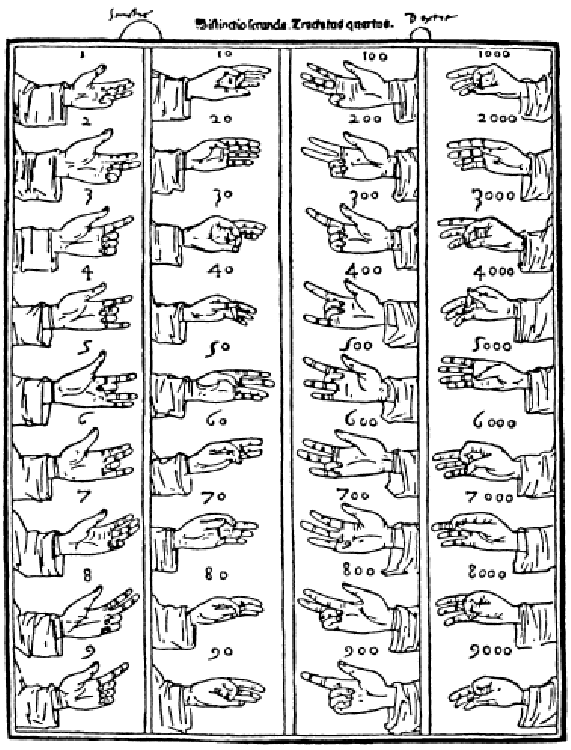
[1] V literatuře je původní název *Liber abaci* často překládán jako „Kniha o abaku“, jak Sigler (2002) dokazuje, kniha se nevěnuje abaku, ale nauce počítání s novým způsobem zápisu číslic, proto je vhodnější překlad „Book of Calculation“, tedy „Kniha o počítání“.

[2] Algoritmus- pojem vznikl podle latinského přepisu al-Chwárízmího, který početní algoritmické postupy poprvé sepsal ve svém Aritmetickém traktátu.

2 Primitivní početní pomůcky

2.1 Počítání na prstech

Zařazení metody počítání na prstech do práce zabývající se početními pomůckami se může zdát zbytečné, ale není tomu tak, už význam slova *digitus =prst*, svědčí o opaku. Prsty jsou nejstarší a nejpřirozenější početní pomůckou, kterou naši předci dokázali bez potíží užívat, stále jsme toho svědky u primitivních kmenů například v Oceánii či Amazonii. (Folta, 2004) Nutnost konkrétního znázornění počtu na prstech popisuje cestovatel Samuškin u sibiřských Čukčů. Když u jedné osady napočítal 128 sobů, zeptal se hospodáře, kolik sobů má ve stádě. Ten stádo nikdy nepočítal, proto se zul a šel stádo spočítat. Vrátil se za tři hodiny s odpovědí „6 lidí a osm prstů“ (6x20 + 8 =128). Protože mu při počítání stáda početně nestačila jeho rodinu, musel přivést ještě dva obyvatele vedlejší jurty.



Obrázek 2: Počítání na prstech
Luca Pacioli: Summa de Arithmetica..., Benátky 1494

Počítání na prstech bylo známo již Řekům, kteří jej hojně užívali pro jednoduchost a názornost. Od Řeků dovednost převzali Římané, kteří na prstech počítali do 10 000.[3] (Bečvářová, 2001) První učenec, který popsal způsoby počítání na prstech byl roku 725 benediktinský mnich Beda Venerabilis ve svém díle *Chronica maiora*.

„Řekneš-li jedna, musíš ohnout na levé ruce malíček a jeho poslední článek položit na dlaň. U dvojky musíš vedle položit prsteník. U trojky obdobně prostředník. U čtyřky

[3] V Britském muzeu v Londýně jsou uloženy římské početní známky z 1. st. vyrobené ze slonoviny s vyobrazenými prsty znázorňující hodnoty 1 až 15. (Bečvářová, 2001 str. 231)

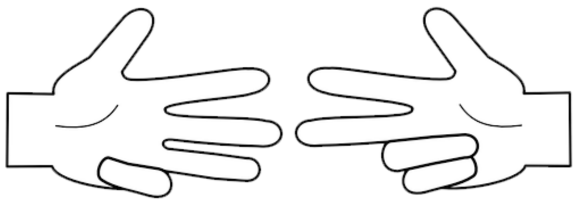
musíš znovu napřímit malíček. U pětky také prsteník. U šestky musíš narovnat také prostředník, ale pak zase ohnout prsteník na dlaň. U sedmičky narovnej všechny prsty a ohni jen malíček nad zápěstí. U osmičky polož prsteník vedle. U devítky polož vedle prostředník.“ (Naumann, 2009 str. 42)

Pro znázornění jednotek tak stačili pouze tři prsty levé ruky. Pro znázorňování desítek pak sloužily na levé ruce zbylé dva prsty. Pro vyšší řády, tedy stovky a tisíce, sloužily prsty pravé ruky. S podobným popisem se setkáváme o mnoho století později v díle Luca Paciliho *„Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*“ (1494) a také z perského slovníku ze 16. století *„Farhangi Djihangiri“*, který roku 1823 přeložil do francouzštiny Sylvestre de Sacy. Počítání na prstech popsal ve své početnici pro kupce také Petrus Apianus jako komentář k dílu *„Addition“* (1527).

Dnes jsou prsty především první a základní početní pomůckou každého dítěte při jeho objevovaní čísel a budování základních představ o číslech a množství. Prsty jsou konkrétním i abstraktním modelem[4], na kterém se dítě učí základní operace sčítání a odčítání. Dovednost násobení na prstech byla ve středověku mezi kupci běžně rozšířená a využívaná, postupně ji však začaly vytlačovat novější početní pomůcky a postupy. (Bečvář, 2001)

[4] Problematice konkrétního a abstraktního modelu v matematice se věnuje např. František Kuřina (2015)

Základní násobení na prstech



Příklad:

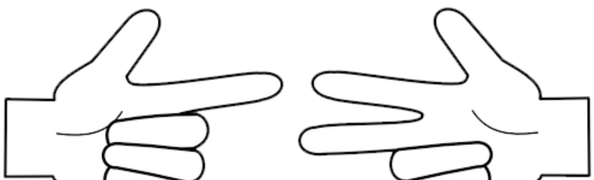
$14 \cdot 13 = 182$

Na prstech znázorníme jednotky činitelů.
Z paměti $10 \cdot 10 = 100$, *následně vyřešíme řád desítek – sečteme vztyčené prsty a vynásobíme deseti* $(4+3)\cdot 10 = 70$. *Nakonec zbývá vyřešit řád jednotek – vynásobíme mezi sebou vztyčené prsty* $4 \cdot 3 = 12$.
Výsledek $100 + 70 + 12 = \mathbf{182}$

Důkaz: $a = a_1 \cdot 10 + a_2; b = b_1 \cdot 10 + b_2; a, b \in \mathbb{N}$

$$\overbrace{a_1 \cdot 10 \cdot b_1 \cdot 10}^{\text{„stovky“}} + \overbrace{a_1 \cdot 10 \cdot b_2}^{\text{„desítky“}} + \overbrace{a_2 \cdot b_1 \cdot 10}^{\text{„desítky“}} + \overbrace{a_2 \cdot b_2}^{\text{„jednotky“}} =$$

$$= \boldsymbol{a_1 \cdot b_1 \cdot 100 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot 10 + a_2 \cdot b_2}$$



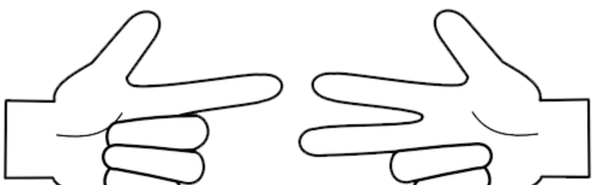
Příklad:

$7 \cdot 8 = 56$

Na prstech znázorníme jednotky činitelů zmenšené o 5.
Sečteme vztyčené prsty a vynásobíme deseti $(2+3)\cdot 10 = 50$. *Dále mezi sebou vynásobíme prsty skrčené* $3 \cdot 2 = 6$.
Výsledek $50 + 6 = \mathbf{56}$

Důkaz: $a, b \in \mathbb{N}$

$$\overbrace{\big((a-5) + (b-5)\big) \cdot 10}^{\text{„desítky“}} + \overbrace{(10-a)\cdot(10-b)}^{\text{„jednotky“}} =$$
$$10a + 10b - 100 + 100 - 10b - 10a + ab = \boldsymbol{ab}$$



Příklad:

$17 \cdot 18 = 306$

Násobení čísel větších jak 15 je náročnější, musíme kombinovat předchozí dva způsoby.
Z paměti $10 \cdot 10 = 100$, *následuje přidaný krok – sečteme jednotky a vynásobíme deseti* $(7+8)\cdot 10 = 150$. *Dále pokračujeme– sečteme vztyčené a vynásobíme deseti* $(2+3)\cdot 10 = 50$. *Na závěr vynásobíme mezi sebou skrčené prsty* $2 \cdot 3 = 6$ *a provedeme součet.*
Výsledek $100 + 150 + 50 + 6 = \mathbf{306}$

Důkaz: $a = a_1 \cdot 10 + a_2; b = b_1 \cdot 10 + b_2; a, b \in \mathbb{N}$

$$\overbrace{a_1 \cdot 10 \cdot b_1 \cdot 10}^{\text{„I.krok“}} + \overbrace{(a_2 + b_2) \cdot 10}^{\text{„II.krok“}} +$$

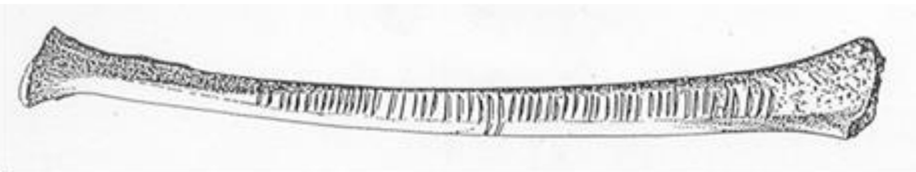
$$+ \overbrace{(a_2 - 5 + b_2 - 5) \cdot 10}^{\text{„III.krok“}} + \overbrace{(10 - a_2) \cdot (10 - b_2)}^{\text{„IV.krok“}} =$$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdot 100 + 10a_2 + 10b_2 + 10a_2 + 10b_2 - 100 +$$
$$+100 - 10a_2 - 10b_2 + a_2 \cdot b_2 =$$
$$= a_1 \cdot b_1 \cdot 100 + (b_2 + a_2) \cdot 10 + a_2 \cdot b_2 =$$

$$= \boldsymbol{a_1 \cdot b_1 \cdot 100 + (\overbrace{a_1}^{=1} \cdot b_2 + a_2 \cdot \overbrace{b_1}^{=1}) \cdot 10 + a_2 \cdot b_2}$$

2.2 Vruby do dřívek, vrubovky

Vrubovky jsou považovány za nejstarší důkaz matematické činnosti lidstva. 19. srpna 1936 byla prof. Absolonem nalezena *Věstonická vrubovka*[5], jejíž stáří bylo později určeno na 28 tisíc let. 18 cm dlouhá vřetení kost mladého vlka obsahuje 55 vyrytých zářezů, z nichž dva jsou výrazně protáhlé. Absolon interpretoval znázorněné zářezy jako násobky pěti a tedy předpoklad znalosti pětkové soustavy. S tímto argumentem mnoho odborníků nesouhlasí a považují jej za vyvrácený. (Folta, 2004) Naopak se shodují, že je-li Věstonická vrubovka záznamem kvantit, jedná se o dvě skupiny zářezů znázorňující dvě porovnávaná množství. Podobně jako malé dítě neznající sčítání bude při porovnání počtu kuliček dvou různých barev používat jedno-jednoznačné přiřazení (bijekci) až do vyčerpání jedné z hromádek. Tak v momentě, kdy nebude možné tyto dvě porovnávaná množství přenášet, nebo budou na vzdálených místech, je nutné pro potřebnou bijekci najít zprostředkovatele – vrubovku. Každé množství se zaznamenávalo od středového prodlouženého vrubu na jednu nebo druhou stranu. Člověk pomocí vrubovky mohl názorně a mechanicky řešit porovnávací proces, který mu jeho omezený intelekt nedovoloval.



Obrázek 3: Věstonická vrubovka

Zdroj: is.mendelu.cz

Zářezy do dřívek různých tvarů a velikostí či do jiných materiálů jako prostá technika pro záznam číselného údaje byla běžně používána až do 20. století. Asi nejrozšířenější a na venkově ještě běžně vídané bylo vyrývání počtu vyháněného dobytka na pastvu do dřevěných ohrad. Pečlivě vyvedené zářezy byly počasí i dalším vlivům odolné a pro potřeby chovatelů zcela dostačující.

[5] Věstonická vrubovka není jediným nalezeným artefaktem tohoto typu. Z dalších jmenujme kost s vruby od osady Ishango (stáří cca 10 tis. let) nebo paviání kost z pohoří Lemombo (stáří cca 35 tis. let)

Se zářezy či vruby do dřívek se však setkáváme i v oblasti obchodu, finančnictví a účetnictví. Ifrah (Ifrah, 1989 str. 100) dokládá příklad používání dřívek s vruby z francouzského venkova, kdy bylo používání dřívek s vruby zcela běžné v pekárnách při prodeji chleba na dluh. Do dvou malých k sobě přiložených destiček dřeva (tzv. tailles) pekař udělal zářez, vždy když si zákazník vzal bochník chleba na dluh. Jedno dřívko si ponechal pekař, druhé si vzal zákazník. Zúčtování a platba poté probíhala ve stanovený den, obvykle jednou týdně. Reklamace nebyla na místě, obě dřívka obsahovala totožné zářezy, nebylo tedy možné žádný zářez přidat či ubrat, aniž by to druhá strana nepoznala. Ještě před 1. světovou válkou si stejným způsobem skláři zaznamenávali množství vypitého piva, které splatili až ve výplatní den[6].

V jisté době se důvěryhodnost dřívek a jejich používání natolik rozšířila, že jim byla dokonce přisouzena právní průkaznost. Ve 12. století začala používat Anglická státní pokladna dřívka (tzv. exchequer tallies) pro své oficiální účetnictví i obchodování, za řezání vrubů do jilmových dřívek byli zodpovědní znalci. Pro znázornění obnosů užívaly různé šířky a způsoby zářezů – rozlišovaly se vruby, řezy, polovruby, plné vruby a šikmé vruby. K úplnému zrušení *tallies* přistoupila Anglická státní pokladna až roku 1826. (Naumann, 2009)

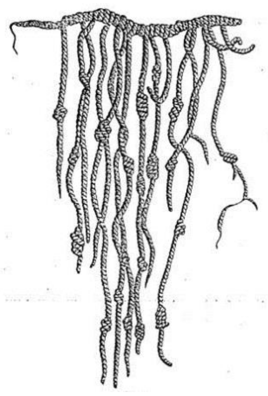
V literatuře se můžeme setkat i s dalšími výrazy jako tabulin, rabuše či rováš, vždy se stejným významem. Dnes se nám používání těchto výrazů dochovalo pouze v podobě idiomů *pít na rováš* (pít na dluh), *má u mne vroubek* (má u mne dluh), *připsal mu to na vrub* (je za to zodpovědný).

[6] Zdroj: expozice muzea Huť Jakub Tasice, národní památka.

2.3 Provazce a uzly

Použití provazců v matematice je poprvé popisováno již Staré Indii v knize *Šalvasútra* „Pravidla provazece“ (cca 6. stol. př. l.) Kniha je důležitým dokladem tehdejších matematických dovedností, kdy za využití provazců a bambusových tyčí tvoří pravidla pro stavbu oltářů. Zde se jedná o použití provazce k měrným účelům, nikoli k záznamu údajů. Naopak používání uzlového písma v Číně dokládá Laotse v 6. století př.n.l., který nabádá k návratu uzlů z provazců a užívání jich jako písmen. (Balada, 1959 str. 37)

Uzlové písmo spojeno s kulturou Inků je dodnes z velké části nerozluštěno a zahaleno tajemstvím. Správa a vytváření *quipu* (kipu), jak se inské písmo nazývá, byla svěřována královskému úředníkovi, tzv. *quipucamoyic – „strážce uzlů“. Quipu* je důmyslný systém jednoho hlavního provazu a k němu navázaného různého počtu pomocných provázků. Na tyto pomocné provázky různé barvy, tloušťky i materiálu jsou poté navazovány nejrůznější typy a velikosti uzlů. Zda má barva a materiál pomocných provázků další sémantické význam (např. bílá pro peníze, žlutá pro zlato…) je středem výzkumů, stejně tak, zdali je písmo použitelné pouze pro číselné a statistické účely, nebo je plnohodnotným písmem. Dnes jsou z písma *quipu* rozluštěny číselné záznamy, víme, že Inkové používali poziční desítkovou soustavu včetně nuly; nejvyšší nalezený zapsaný řád v *quipu* byl 10 tisíc. (Juškevič, 1978)



Obrázek 4: Uzlové písmo quipu

Zdroj: en.wikipedia.org

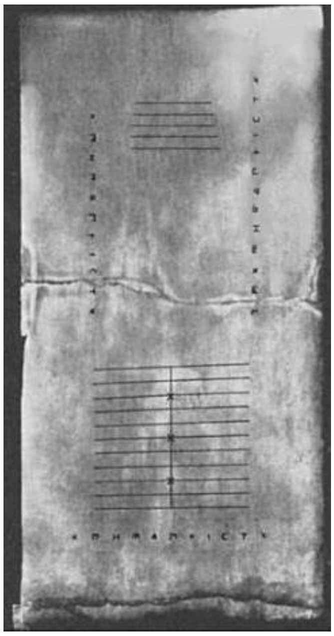
V roce 2005 Gary Urton zveřejnil teorii, že je *quipu* založeno na binární soustavě. Poté rozluštil první nenumerický element, název zaniklého města *Puruchuco.*

S dalšími systémy provazců se můžeme setkat ve Staré Číně, kde především pro potřeby účetnictví a archivnictví údajně zavedl císař Shen Nung. Dále se jisté formy objevují například u tibetských mnichů, sibiřských šamanů či dalších náboženství (židovství, katolický růženec…). Jistě do provazového písma můžeme počítat i „řemeslné uzle" používané řemeslníky k označování svých výrobků. Například v Německu se až do 20. století používali mlynářské uzly, kterými mlynáři zavazovali pytle s moukou a označovali množství, kvalitu a její druh při dodávkách do pekáren. (Naumann, 2009 str. 45)

3 Početní desky a počítadla

3.1 Početní desky a tyčinky

Nejstarší objevenou počítací deskou je Salamínská deska (nebo také tabule) objevená v roce 1846 nedaleko řeckého ostrova Salamína. Archeologové ji datují do třetího století př.n.l., další výzkumy ale naznačují, že se podobné desky používaly i o 200 let dříve. Přestože se podobné desky obvykle vyráběly ze dřeva, je Salamínská deska o velikosti 1,5m x 0,75m a tloušťce 4,5cm vyrobena z mramoru. Na desce jsou vyryty tři skupiny znaků a dvě skupiny rovnoběžných čar, umožňujících posunování kaménků.



Obrázek 5: Snímek Salamínské desky, dnes uložené v Národním muzeu v Aténách
Zdroj: www.en.wikipedia.org

Čínské tyčinky

Rozvoj pozičního zápisu čísel dal možnost rozvoji celé aritmetice. V Číně se všechny složitější výpočty prováděli na počítací desce pomocí tyčinek. Staročínské tyčinky byly vyrobeny ze dřeva (především bambusu), pro zámožnější obchodníky ze slonoviny nebo kovů. Samotná velikost tyčinek se postupně dobou zkracovala z 15 na 9 cm a nebyly silnější než ½ centimetru. Předpokládá se, že tyčinky byly vykládány na rovinaté desky velkých rozměrů. Žádné dochované prameny však nedokládají, že by tyto počítací desky měly nějakou předepsanou podobu, tvar či velikost.

Podoba staročínských tyčinkových cifer byla poměrně stálá a vydržela asi tisíc let. Podrobně byla popsaných v traktátu *Sunzi suan jing*[7], kde je vysvětleno používání dvou podob číslic podle řádu:

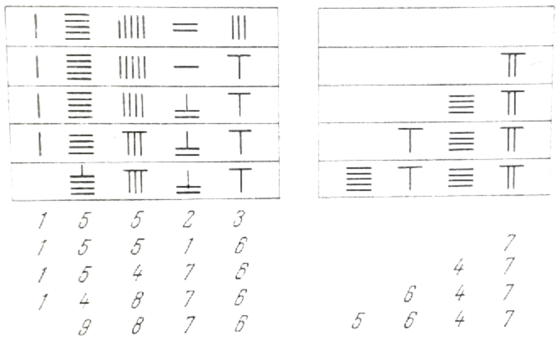
[7] *Sunzi suan jing* – je matematikcý traktát sepsaný kolem 3.-5. stol.n.l.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
liché řády (1, 100, ...)	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
sudé řády (10, 1000, ...)	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Obrázek 6: Zápis číslic pomocí tyčinek

Zdroj: (Hudeček, 2008)

Juškevič (1978) podává příklad sčítání pomocí tyčinek:



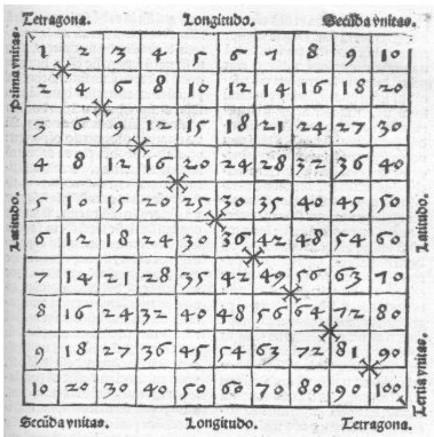
9 876 + 5647 = 15 523

Postup od zdola nahoru: Nejprve jsou obě čísla vyjádřena tyčinkami vedle se, tísíce druhého sčítance přičteme k tisícům prvního, dostaneme 14 876, z druhého 647. Postupně stvoky, desítky i jednotky druhého sčítance přičítáme k mezisoučtu prvního.

Počítání s tyčinkami je přímočaré a lze jej v průběhu výpočtu snadno měnit a opravovat. To umožňuje bez zvláštních obtíží provádět výpočty od nejvyššího řádu.

Kromě výpočtu pomocí desek či jiných pomůcek se samozřejmě kladl důraz i na počítání z paměti. Znalost malé násobilky do 9x9 byla základní součást matematického vzdělání už v 8. století před naším letopočtem. Nalezené tabulky malé násobilky psané lakem na dřevěných destičkách, jsou datovány do prvního století n. l.

Všechny algoritmy i početní pomůcky pro násobení, vycházely z předpokladu, že počtář dovede používat malou násobilku. Učitelé vyžadovali, aby žáci dovedli stanovit součiny čísel od 1x1 do 9x9, ale počtáře středověku a raného novověku je požadavek na zapamatování si těchto součinů příliš veliký, a proto byly sestavovány přehledné tabulky malé násobilky (viz obrázek 7).



Obrázek 7: Multiplikační tabulka, Boethius: Arithmetica boetii, 1488

3.2 Abakus

Obrázek 8: Rekonstrukce římského hliněného abaku (cca 300 n.l.) Zdroj: www.en.wikipedia.org

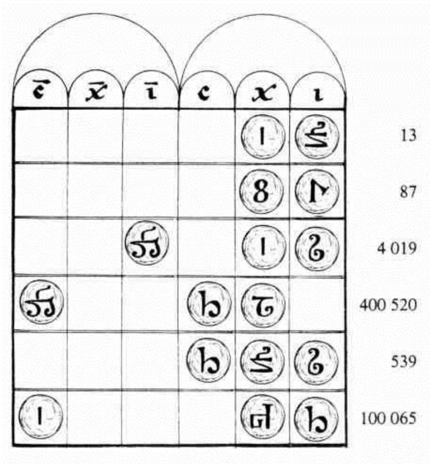
Vynález abaku bylo chybně připisováno Pythagorovi a pojmenováno po něm ozdobné zakončení sloupců – *arcus Pythagorei.* Abaku (*abakion = plochá deska)* jistě používali již staří Řekové, kteří jej prostřednictvím Foiničanů převzali od Egypťanů (Kolman, 1968). Po rozpadu říše římské (395 n.l.) však byla znalost zapomenuta a později znovu objevována. Staří Řekové nejprve používali pouze ploché kameny rovnoměrně pokryté pískem, do kterých zakreslily potřebné rýhy. Poté začali pro výrobu abaku používat opracované dřevěné desky rozdělené až 30 vyrytými sloupci. První tři sloupce se používali pro počítání se zlomky, zbylé pro počítání s přirozenými čísly. Vyznačování čísel prováděli počtáři pokládáním potřebného počtu kaménků (mušliček, či jiných předmětů) tzv. *calculi* do jednotlivých sloupců symbolizujících číselné řády. (Naumann, 2009 stránky 46-50)

Pro Evropu abaku znovu objevil, zdokonalil a v díle *„Pravidla o počítání na abaku"* *(„Regule de abaco computi")* popsal mnich Gerbert (později papež Silvestr II., cca 940-1003). Oproti ostatním pokládal do příslušného sloupce jediný žeton – *apex (*plurál *apices;* nebo také *caracteres),* tedy početní známku opatřenou symboli reprezentující daný počet. Apices byly nejčastěji vyráběny z měkkého dřeva nebo kúry, ale například Richer z Remeše[8] používal apices z rohoviny.

Další podrobný popis abaku podává v 11. století zřejmě Gerbertův žák Bernelius v dílě *„Liber abaci".* Bernelius podrobně popisuje nejtěžší opraci na abaku – dělení

[8] Richer z Remeše (nar. 940-950, zemřel po r. 997), žák Gerberta

dvěma způsoby, bez použití rozdílů a s nimi. Dělení bez rozdílů je podobný dnešnímu způsobu, druhý způsob Bernelius ukazuje na příkladu: (Bečvář, 2001)



Obrázek 9: Znázornění Gerbertova abaku z roku cca 1030

Zdroj: www.maa.org

Berneliusův příklad dělení s doplňkem:

$\mathbf{668}:\mathbf{6}$ $\textit{je možné dělit s použitím rozdílu}\ 10-6$
$= 4\ \textit{následovně}: 600:10 = \mathbf{60}, 60\cdot 4$
$= 240, 200:10 = \mathbf{20}, 20\cdot 4 = 80, 60+40+80$
$= 180, 100:10 = \mathbf{10}, 10\cdot 4 = 40, 80+40$
$= 120, 100:10 = \mathbf{10}, 10\cdot 4 = 40, 20+40 = 60, 60:10$
$= \mathbf{6}, 6\cdot 4 = 24, 20:10 = \mathbf{2}, 2\cdot 4 = 8, 8+4+8$
$= 20, 20:10 = \mathbf{2}, 2\cdot 4 = 8, 8:6$
$= 1\ \textit{zbytek}\ 2. \textit{Součet vyznačených podílů}\ 60+20$
$+10+10+6+2+2+1 = \mathbf{111}\ \boldsymbol{zbytek}\ \mathbf{2}$

Adelhard z Bathu i Radulph z Laonu v pozdějších spisech o abaku hovoří o dělení s doplňkem jako o železném a bez dopňku jako o dělení zlatém.

Nemožnost záměny jednotlivých označených známek apices se zdála být nevýhodná, proto se postupně vracelo k neoznačeným *calculi.* Význam apices pro rozvoj matematiky spočívá především v šíření nejbližších předchůdců moderních evropských číslic, přestože se po další staletí jejich podoba dotvářela a zjednodušovala. (Juškevič, 1978 stránky 399-341)

3.3 Liny

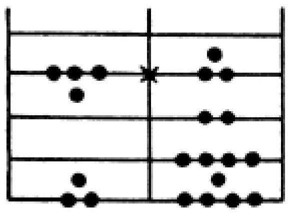
Na rozdíl od abaku se ve střední a západní Evropě rozšířil systém s linkami horizontálními, tzv. „počítání na linách“ (čti lajnách). Od 12. až do konce 15. století. (Balada, 1959 str. 48)

Obrázek 10: Židovský lichvář počítající na linách (dřevoryt J. Breua, počátek 16. stol) Zdroj: (Bečvářová, 2001 str. 230)

Výhodou počítání na linách byla nepotřeba jakékoli pomůcky či desky, stačilo načrtnout soustavu rovnoběžných linek na tabuli nebo na stůl. Každá linka byla určena pro jeden konkrétní řád. Známky (kaménky nebo mince, také se pouze malovaly) se umisťovaly přímo na linky, nebo do mezery mezi linkami. Známka umístěna do mezery symbolizovala pět jednotek příslušného řádu. Juškevič (1978 str. 359) uvádí, že počítání na linách bylo rozšířeno i mezi chudší a méně vzdělané obyvatelstvo, které se dovedlo jednoduchá pravidla pro počítání na linách naučit i bez znalosti čtení a psaní.

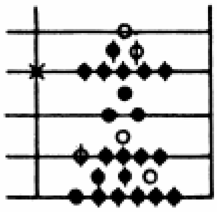
Na každé lince mohlo být umístěno nejvýše čtyři známky, byl-li počet vyšší, pět známek se odebralo a jedna známka se přidala do následující mezery. Podobně mohla být v každé mezeře pouze jedna známka, byl-li počet vyšší, známky se odebraly a za každé dvě odebrané známky z mezery se jedna známka přidala na následující linku (tj. přenos do vyššího řádu). Vždy se postupovalo od nejnižšího řádu k vyššímu. (Bečvářová, 2001)

Sčítání na linách

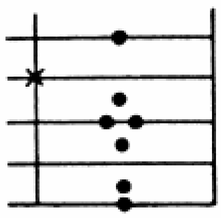


Příklad:
3 507 + 7 249 = 10 756

První sčítanec se zanese na levou část liny, druhý na pravou část.

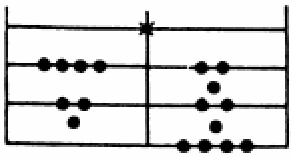


Všechny známky se přesunou do pravé části. Od nejnižšího řádu se provádějí úpravy – přenosy do vyšších řádů.

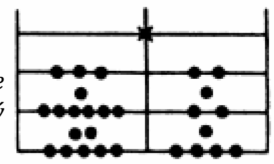


Po dokončení úprav a všech přenosů do vyšších řádů čtu na pravé straně výsledek
= **10 756**

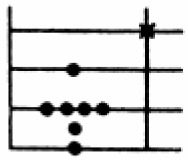
Odčítání na linách



Příklad:
$425 - 279 = 146$
První sčítanec se zanese na levou část liny, druhý na pravou část.



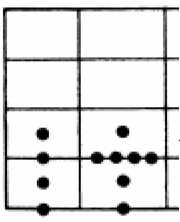
V levé části se provede od nejvyššího řádu „přenos do nižšího řádu", tak aby na levé straně byl vždy vyšší počet známek



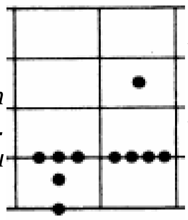
Po přesunu známek do levé části se provedou případné úpravy a čte se výsledek = **146**

Násobení na linách

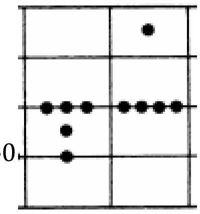
Násobení se obvykle převádělo na opakované sčítání, nebo se násobilo po jednotlivých řádech, kdy si počtář vždy vystačil s malou násobilkou. Dělení se naopak převádělo na opakované odčítání. Obě operace byly náchylné na chybu a vyžadovaly preciznost při častých přesunech známek.



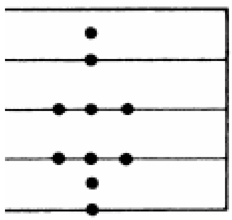
Příklad:
$66 \cdot 96 = 6\,336$
Při násobení po řádech je potřeba více sloupců. Oba činitelé se zanesou do prvních dvou.



III. sloupec:
$6 \cdot 6 = 36$
IV. sloupec:
$6 \cdot 90 = 540$

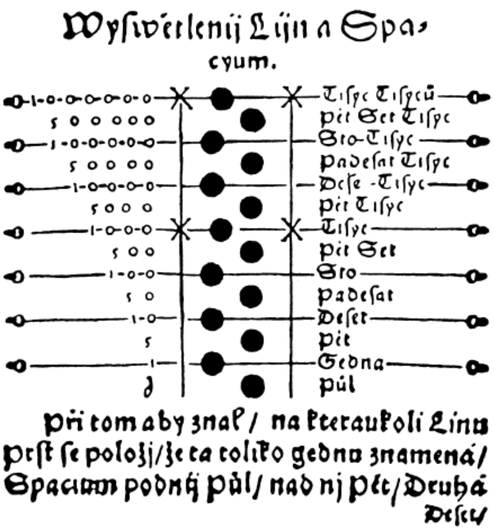


V. sloupec:
$60 \cdot 6 = 360$
VI. sloupec:
$60 \cdot 90 = 5400$



VII. sloupec:
součet všech součinů jednotlivých řádů
$36 + 540 + 360 + 5400 = 6\,336$

Pořadí součinů jednotlivých řádů (tj. sloupců III.-VI.) je libovolné. Počet sloupců je závisle na počtu cifer činitelů součinu.

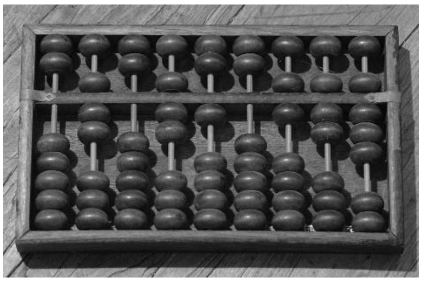


Obrázek 11: Schéma počítání na linách použité v české učebnici
Zdroj: (Bečvářová, 2001 str. 237)

Počítání na linách je v průběhu 16. století stále popisováno i v řadě učebnic (například učebnice A. Riese, nebo J. Köbela), kdy jsou na základním schématu zobrazovány indicko-arabskými číslicemi hodnoty $\frac{1}{2}$, 1, 5,10, …, 1 000 000 společně se slovním označením (viz obr. 9).

3.1 Čínský suanpan

Suanpan (psáno také suan-pan, suan pan nebo souanpan) je čínské počítadlo, jehož první zmínky lze nalézt již v pramenech z roku 190 n.l. za vlády dynastie Han. Konkrétní podoba a použití je nám však známa až z 16. století.



Obrázek 12: Činský suanpan
Zdroj: www.en.wikipedia.org

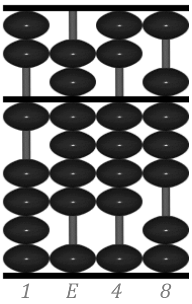
Počítadlo suanpan obsahuje alespoň sedm sloupců, rozdělených na dvě části a umožňujících pomocí posuvných kamenů znázorňovat jednotlivé cifry. V horní části počítadla se nacházejí dva kameny (nazývané také jako nebeské korále), v dolní je kamenů pět (nazývaných zemskými nebo vodními korály). Takovéto rozložení kamenů umožňuje počítání v desítkové, ale i v šestnáctkové (hexadecimální) soustavě. Zastoupení obou soustav bylo potřebné z důvodu jejich prolínání, kdy se při obchodování střetávala stále více používaná desítková soustava s tradičními čínskými jednotkami hmotnosti v hexadecimální soustavě (1 *jin* = 16 *liang*) i staročínskou měnou stále v některých částech Číny používanou a platnou.

Tradiční suanpany byly vyráběny výhradně z tvrdého a kvalitního dřeva. Dnešní moderní modely jsou vyráběny za použití kovů a plastů a navíc obsahuji *„nulovací tlačítko"*, které za pomocí pružiny rychle uvede počítadlo do původního stavu.

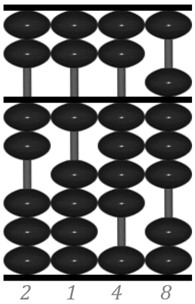
Používání suanpanu bylo na čínských školách běžné ještě do devadesátých let 20. st. Poté jej plně nahradily dostupné kalkulačky zvládajících kromě základních operací i další (např. trigonometrické) funkce. Podobně byla v letech 2002-2004 nahrazena zkouška pro účetní a další finanční pracovníky z ovládání suanpanu, zkouškou z účetnictví vedeného v počítačové podobě.

Kromě sčítání, odčítání a násobení a dělení je možné provádět na suanpanu i druhé a třetí odmocniny.

Sčítání na suanpanu (HEXA)

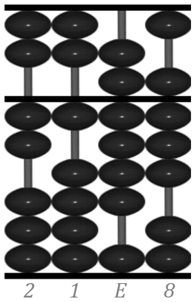


Příklad:
$1E48 + 3A9$
$= 21F1$
Větší sčítanec se zanese do libovolné části počítadla.



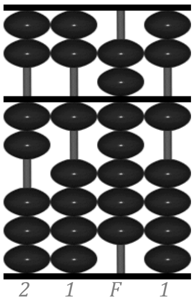
Od nejvyššího řádu začínáme přičítat druhého sčítance s přenosem do vyššího řádu.

$E + 3 = 11$



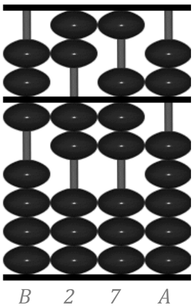
Pokračujeme přičítáním další cifry sčítance v dalším sloupci.

$4 + A = E$

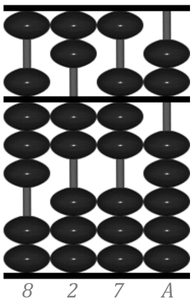


Poslední přičítání s přenosem do vyššího řádu
$8 + 9 = 11$
Výsledek
$= \boldsymbol{21F1}$

Odčítání na suanpanu (HEXA)

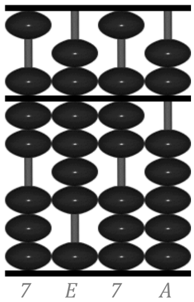


Příklad:
$B27A - 349E$
$= 7DDC$
Menšenec zaneseme do libovolné části počítadla.



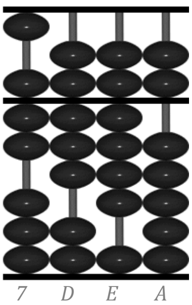
Od nejvyššího řádu začínáme odečítat menšitele.

$B - 3 = 8$



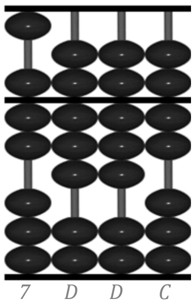
Odečítáme další řád s přechodem do vyššího řádu

$12 - 4 = E$



Odečítáme další řád s přechodem do vyššího řádu

$17 - 9 = E$

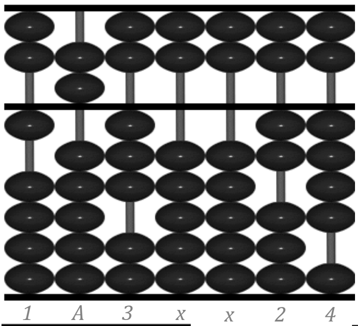


Poslední odečtení řádu opět s přechodem do řádu vyššího
$17 - 9 = E$
A výsledek
$= \boldsymbol{7DDC}$

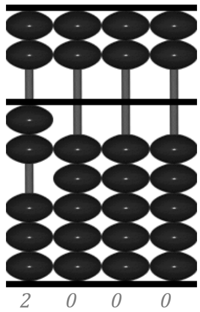
<u>*Poznámka:*</u>

Všechny operace na suanpanu jsou předvedeny pouze v šestnáctkové (hexadecimální) soustavě. Při provádění výpočtů v soustavě desítkové je používána pouze jedna řada kamenů v horní části počítadla a princip výpočtu je tak totožný se sorobanem prezentovaný v následující kapitole.

Násobení na suanpanu (HEXA)

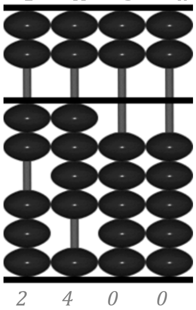


Příklad:
$1A3 \cdot 24$
$= 3AEC$
Oba činitele poznamenáme do levé části počítadla.



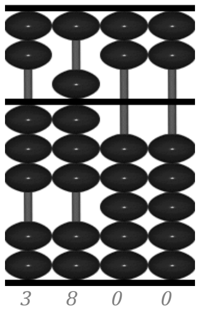
Násobíme postupně po řádech.

$1 \cdot 2 = 2$



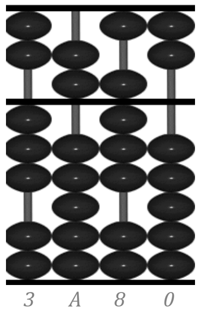
Následný součin.

$1 \cdot 4 = 4$



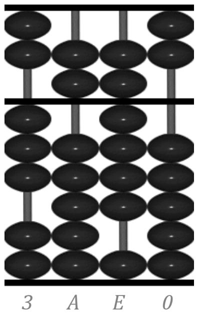
Přičítáme další součin, pozor na správně zvolený sloupec.

$A \cdot 2 = 14$



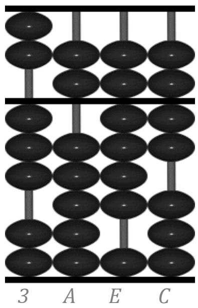
Stejným způsobem pokračujeme u dalšího součinu

$A \cdot 4 = 28$



Pozor na zvolení správného sloupce.

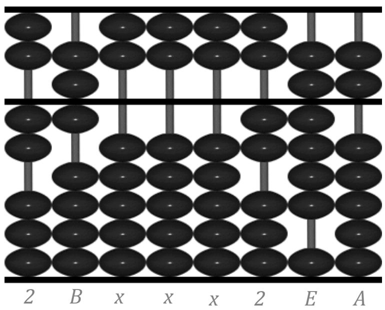
$3 \cdot 2 = 6$



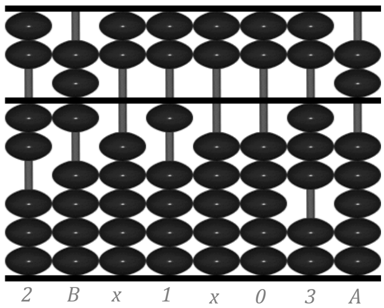
Posledním součinem je
$3 \cdot 4 = C$

Čteme výsledek
$= \boldsymbol{3AEC}$

Dělení na suanpanu (HEXA)

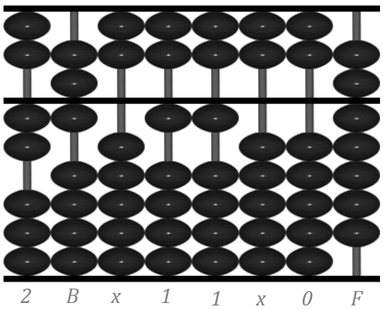


Příklad:
$2EA : 2B$
$= 11\ (zb. F)$
Dělitele zaznamenáme na levou, dělence na pravou stranu počítadla.



Do středu počítadla poznamenáme výsledek celočíselného dělení.
$2E : 2B = 1$
Od nejvyšších řádů dělence odečteme daný počet násobků dělitele

$$\begin{array}{r} 2EA \\ \underline{-2B} \\ 3A \end{array}$$



Pokračujeme dalším celočíselným dělením, výsledek zaznamenáme do středu počítadla.
$3A : 2B = 1$
Od dělence odečteme daný počet násobků dělitele
$3A - (1 \cdot 2B) = F$
F v pravé části počítadla je již menší než dělitel a je tedy zbytkem po dělení. Ve střední části počítadla čteme výsledek $=$ **11** $(\boldsymbol{zb. F})$

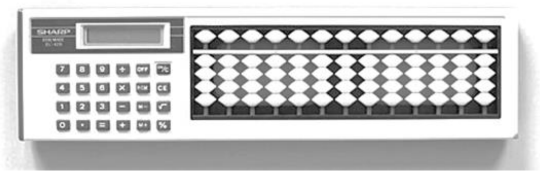
3.2 Japonský Soroban

Obrázek 13: Soroban s devíti sloupci
Zdroj www.en.wikipedia.org

Z Číny se suan-pan při obchodování a dovozu zboží dostalo přes Korejský poloostrov do Japonska asi ve 14. století, ale největšího rozšíření se v Japonsku dočkalo až v 17. století, kdy bylo počítadlo upravováno a zjednodušováno. Postupně byl odstraněn jeden kámen z horní i dolní části počítadla, tak aby počítadlo vyhovovalo počítání v desítkové soustavě a neobsahovalo nadbytečné kameny. Konečnou dnešní podobu (s 1+4 kameny) získal soroban až kolem roku 1850.

V horní části počítadla je jediný kámen (*go-dama)* mající hodnotu pět, ve spodní části jsou kameny čtyři (*ichi-dama*), každý mající hodnotu jedna. Kameny jsou uspořádány do lichého počtu sloupců, jejichž počet se liší velikostí počítadla. Sorobany standartní velikosti mají třináct sloupců, jejich počet se však může pohybovat u nejmenších počítadel od 9 sloupců do 31 sloupců největších sorobanů umožňujících počítat s řádově většími čísly. Každý třetí sloupec je označený tečkou, která při počítání ulehčuje orientaci v množství sloupců a může sloužit i jako desetinná čárky. (Gullberg, 1997)

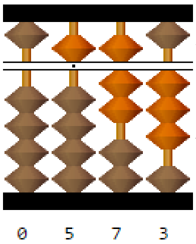
Pro tradiční výrobu se používalo především dřevo (ratan, bambus) a samotné kameny ve tvaru dvojitého kužele byly také ze dřeva, nebo i z kamene či mramoru.



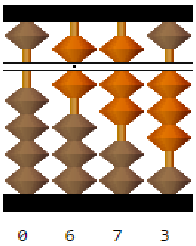
Obrázek 14: Moderní soroban firmy Sharp
Zdroj. www.sharp.com

Počítání na sorobanu je na japonských základních školách stále součástí výuky matematiky a pravidelně jsou pořádány soutěže v rychlosti a umění ovládání sorobanu. Dovedné ovládání sorobanu musí prokázat i každý zájemce o práci ve veřejných úřadech získáním alespoň třetí ze šesti úrovní mistrovství, které ověřuje Japonská komora obchodu a průmyslu. Všeobecnou rozšířenost a oblíbenost sorobanu i v 21. století dokazují moderní sorobany kombinované s kalkulačkami nebo počítačovými klávesnicemi firmy Sharp.

Sčítání na sorobanu

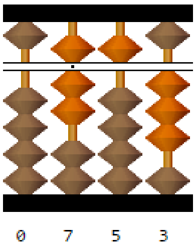


Příklad:
$188 + 573 = 761$
Větší sčítanec se zanese do libovolné části počítadla



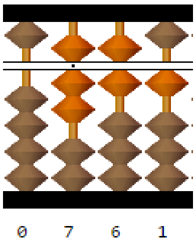
Od nejvyššího řádu začínáme přičítat druhého sčítance.

5+1=6



Do následujícího sloupce přičítáme další cifru druhého sčítance s přenosem do vyššího řádu

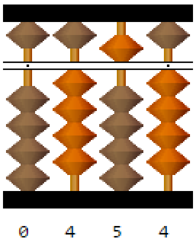
7+8=15



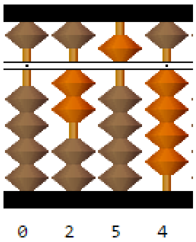
Stejným způsobem přičítáme poslední cifru 8, opět s přenosem do vyššího řádu.

Výsledek $=$ **761**

Odčítání na sorobanu

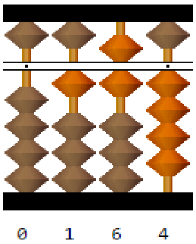


Příklad:
$454 - 298 = 156$
Menšenec se zanese do libovolné části počítadla.



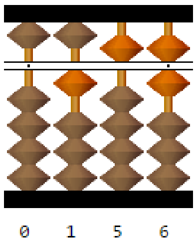
Od nejvyššího řádu začínáme odečítat menšitele.

$4 - 2 = 2$



V následujícím sloupci odečítáme další cifru menšitele s přenosem do vyššího řádu

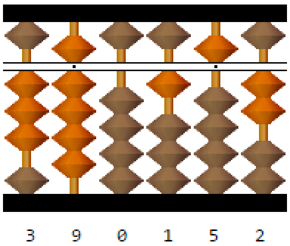
$15 - 9 = 6$



Stejným způsobem odečítáme poslední cifru, opět s přenosem do vyššího řádu.

Výsledek $=$ **156**

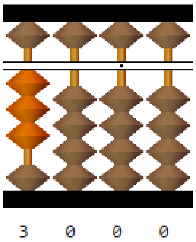
Násobení na sorobanu



Příklad:

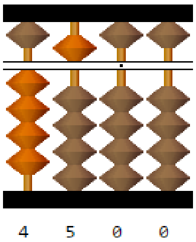
$39 \cdot 152 = 5\,928$

Oba činitelé se poznamenají na začátku počítadla a oddělí se volným sloupcem.



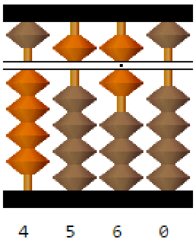
Násobíme postupně po řádech.

$3 \cdot 1 = 3$



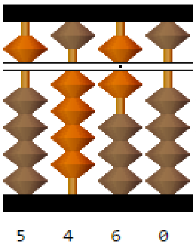
Přenos do vyššího řádu

$3 \cdot 5 = 15$



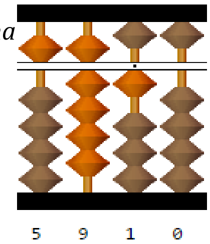
Další součin

$3 \cdot 2 = 6$



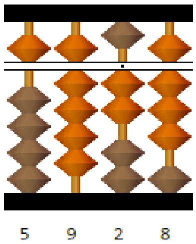
Pozor na správně zvolený sloupec.

$9 \cdot 1 = 9$



Přenos do vyššího řádu!

$9 \cdot 5 = 45$



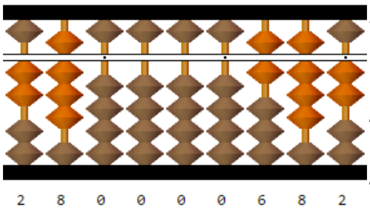
Po posledním součinu

$9 \cdot 2 = 18$

Výsledek

$= \mathbf{5928}$

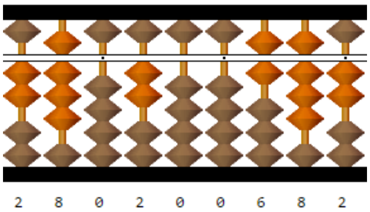
Dělení na sorobanu



Příklad:

$682 : 28 = 24\ (10)$

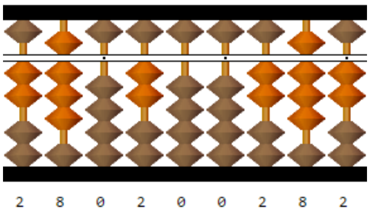
Dělitel se poznamená na levou, dělenec na pravou stranu počítadla.



Začínáme celočíselným dělením

$68 : 28 = 2$

Dvojku zaznamenán doprostřed

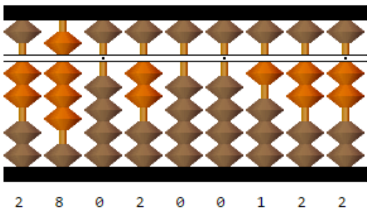


Postupně s „2“ násobíme dělitele

$2 \cdot 2 = 4$

A odčítáme od děleného čísla

$6 - 4 = 2$



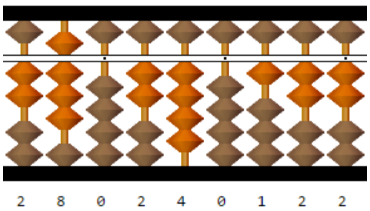
Pokračujeme

$2 \cdot 8 = 16$

Odečítáme:

$8 - 16 = 2$

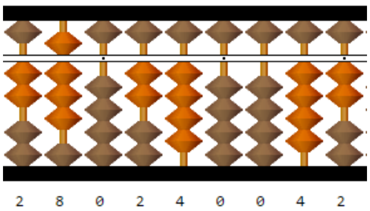
(přenos do vyššího řádu)



Celočíselně dělíme

$122 : 28 = 4$

Získáváme „4“ a zaznamenáváme ji.



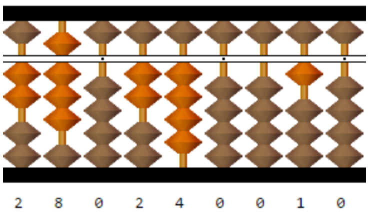
Opět

$4 \cdot 2 = 8$

Odečítáme:

$2 - 8 = 4$

(přenos do vyššího řádu)



Poslední krok

$4 \cdot 8 = 32$

Odečítáme:

$2 - 32 = 0$

(přenos do vyššího řádu)

$= \mathbf{24}\ (\boldsymbol{zb.}\,\mathbf{10})$

3.3 Ruský Sčot

Obrázek 15: Ruský tradiční sčot
Zdroj: www.en.wikipedia.org

Oproti předchozím druhům akuků se ruský sčot (*sčotnaja doska, schoty)* na první pohled liší horizontálním uspořádáním kamenů. Přesto je zřejmě jeho předchůdcem suanpan, který do Ruska přivezli čínští obchodníci v průběhu 17. století a postupně se jeho podoba vyvinula v nový druh počítadla.

Kolem roku 1820, při návratu z Napoleonova tažení v Rusku, přivezl Jean-Victor Pocelet sčot do Francie pod názvem *boulier-compteur*. V západní Evropě však byly od 16. století na vzestupu algoritmické metody, sčot tak Pocelet Francii představil pouze jako „exotickou" zvláštnost a učební – demonstrační pomůcku.

Hoppe (1952) popisuje velké rozšíření sčotů v administrativních oborech v 50. a 60. letech v ČSR, kdy se nedostatek počítacích strojů střetl s rostoucí decentralizací podniků i zaváděním systému hospodaření dle rozpočtů. Pro široké zastoupení sčotů v účtárnách, skladech a dalších kancelářích podle sovětského vzoru bylo nutné rychle vycvičit velké množství počtářů-sčotařů. Z toho důvodu vznikla brožura *Sčot, nejlevnější počítací stroj pro každého* (Kreihansel, 1950) a kniha *Kancelářské počty na sčotu* (Hoppe, 1952).

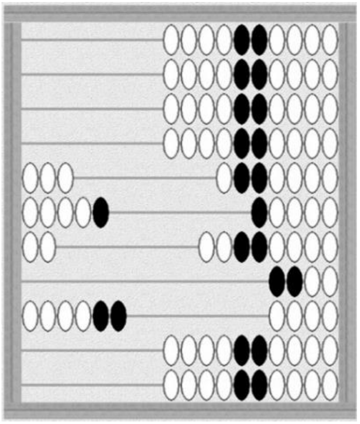
Popularita a masovost sčotu začala pozvolně klesat až po roce 1974 dostatečným rozšířením a dostupností kalkulaček, přesto počítání na sčotech vydrželo na sovětských školách až do roku 1990. Sčoty byly rozšířeny po celém Sovětském svaze, v Turecku se upravený sčot nazýval *coulba* a v Arménii *choreb.*

Počet drátů (tj. řádů) sčotu se může lišit, obvyklý rozsah je 11 až 13 řádů. Na každém drátu je umístěno po deseti kamenech, z nichž dva prostřední (5. a 6.) jsou pro rychlejší čtení počtu kamenů barevně odlišené. Jeden z drátů[9] obsahuje pouze čtyři

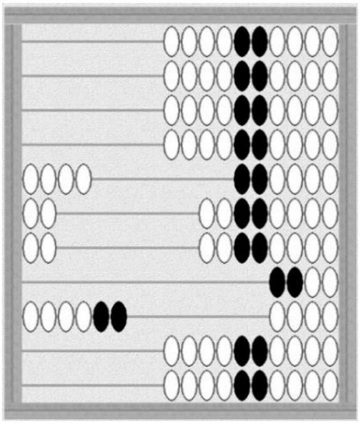
[9] Na některých sčotech je tento drát vynechán a desetinná čárka je znázorněna větší mezerou mezi dráty jednotek a desetin.

kameny, symbolizující čtvrtiny. Tento drát lze samozřejmě použít při počítání se čtvrtinami (v Rusku často používáno při finančních výpočtech[10]), ale jeho význam je i v zastoupení desetinné čárky, kdy viditelně rozděluje počítadlo na celočíselnou a desetinou část. Aby nedocházelo k nechtěným přesunům kamenů, jsou všechny dráty mírně zakřiveny.

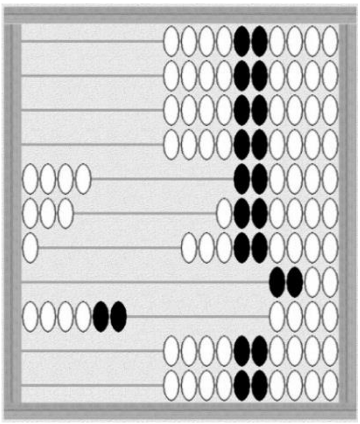
Sčítání na sčotu



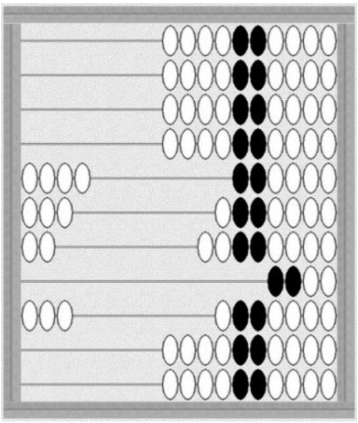
Příklad:
352,6 + 79,7
= 432,3
Větší z sčítanců zaneseme na počítadlo.



Přičítáme 7 desítek. V řádu desítek nemáme dostatek kamenů – provedeme přenos do vyššího řádu. Přičteme 1 stovku a odečteme tři desítky.
$10 - 3 = +7$



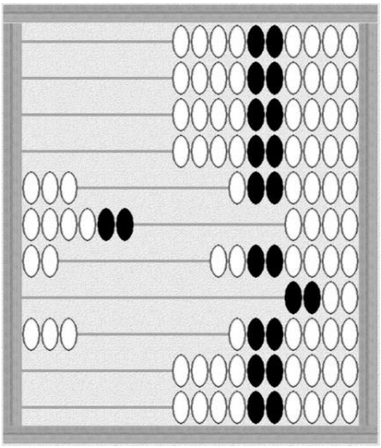
Stejným způsobem přičítáme 9 jednotek. Pro nedostatek jednotek provádíme přenos do vyššího řádu. Přičteme 1 desítku a odečteme 1 jednotku.
$10 - 1 = +9$



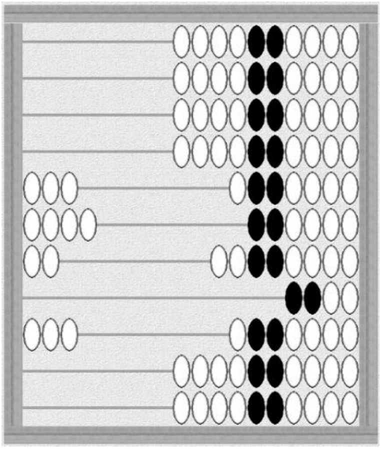
Na závěr přičítáme 7 desetin opět s přenosem do vyššího řádu. Přičteme 1 jednotku a odečteme 3 desetiny.
$10 - 3 = +7$
Výsledek
$= \mathbf{432,3}$

[10] Rubl se dělil: 1 rubl = 100 kopějek, 1kopějka = 4 polušky. Jedno a dvoupoluškové mince (často označovány jako ¼ kopějka a ½ kopějka) byly používány do roku 1916.

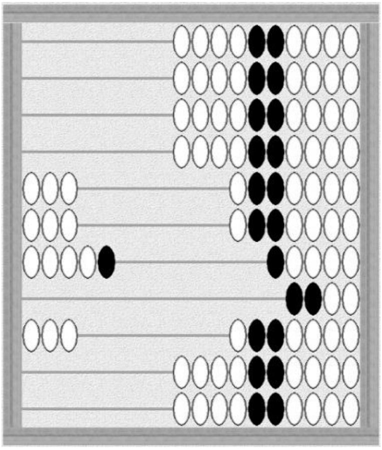
Odčítání na sčotu



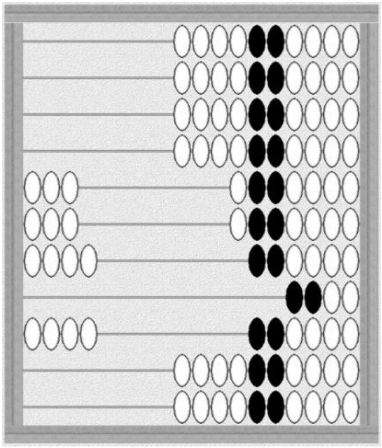
Příklad:
$362{,}3 - 27{,}9 = 334{,}4$
Menšenec zaneseme na počítadlo.



Odečítáme dvě desítky.

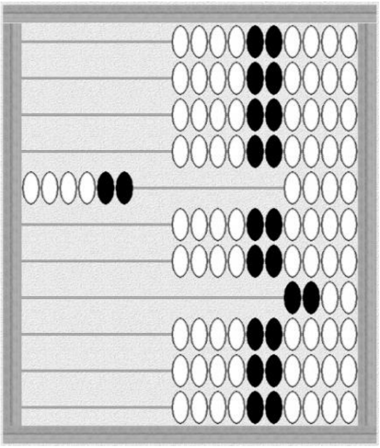


Odečítáme 7 jednotek. Musíme provést přenos do vyššího řádu. Odečteme 1 desítku a přičteme 3 jednotky.
$-10 + 3 = -7$

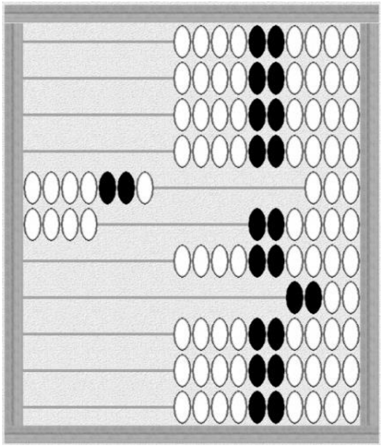


Odečítáme 9 desetin. Provedeme přenos do vyššího řádu. Odečteme 1 desítku a přičteme 3 jednotky.
$-10 + 1 = -9$
Výsledek $= \mathbf{-334{,}4}$

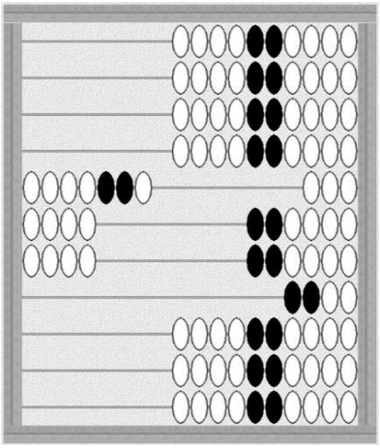
Postupné násobení na sčotu



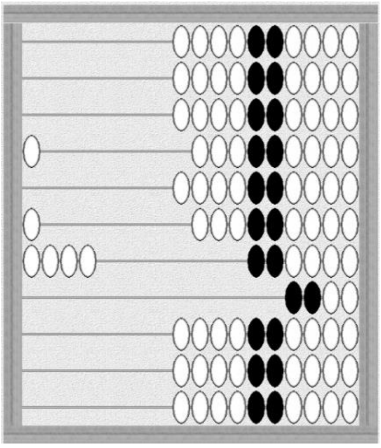
Příklad:
$37{,}2 \cdot 29{,}8$
$= 1\,108{,}56$
Postupně provádíme jednotlivé součiny a sčítáme na počítadle.
$30 \cdot 20 = 600$



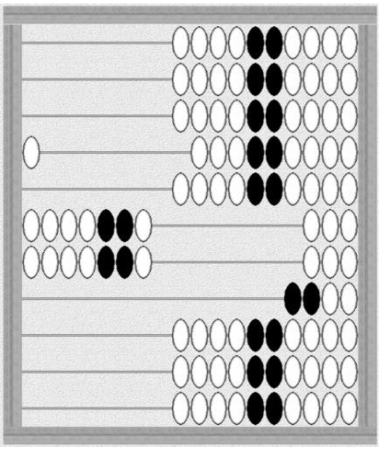
Pokračujeme dalším součinem
$7 \cdot 20 = 140$
A přičítáme jej k předchozímu výsledku
$600 + 140$
$= 740$



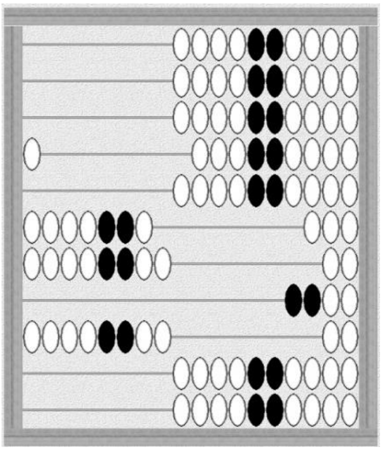
Další součin
$0{,}2 \cdot 20 = 4$
Opět přičítáme k předchozímu výsledku
$740 + 4 = 744$



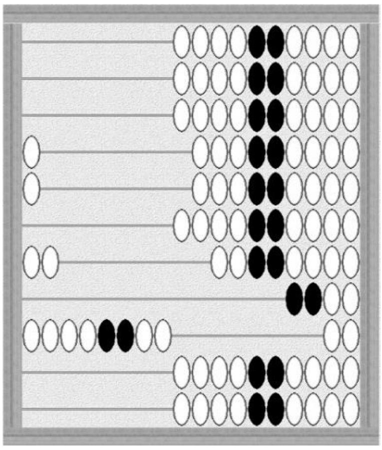
Stejným způsobem provádíme součiny další cifry
$30 \cdot 9 = 270$
Opět přičítáme k předchozímu výsledku s přenosem do vyššího řádu
$744 + 270$
$= 1\,014$



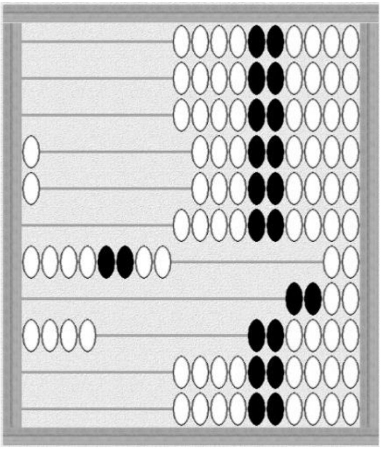
Další součin
$7 \cdot 9 = 63$
Opět přičítáme k předchozímu výsledku
$1\,014 + 63$
$= 1\,077$



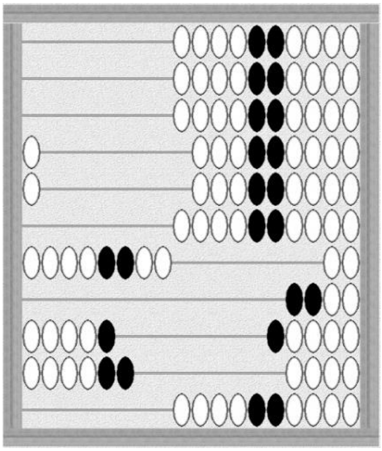
Pokračujeme součinem
$0{,}2 \cdot 9 = 1{,}8$
Opět přičítáme k předchozímu výsledku
$1\,077 + 1{,}8$
$= 1\,078{,}8$



Následují součiny s poslední cifrou
$30 \cdot 0{,}8 = 24$
Opět přičítáme k předchozímu výsledku s přechody do vyšších řádů
$1\,078{,}8 + 24 = 1\,102{,}8$



Pokračujeme součinem
$7 \cdot 0{,}8 = 5{,}6$
Opět přičítáme k předchozímu výsledku s přechodem do vyššího řádu
$1\,102{,}8 + 5{,}6 = 1\,108{,}4$

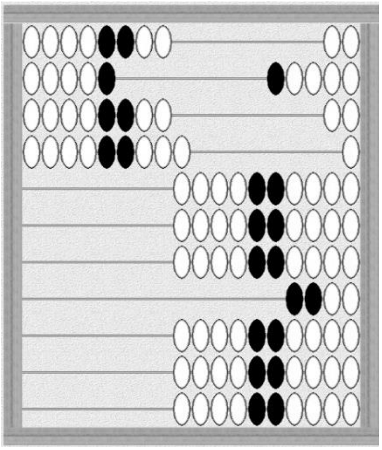


Poslední součin
$0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$
Opět přičítáme k předchozímu výsledku a čteme výsledek
$1\,108{,}4 + 0{,}16 = \mathbf{1\,108{,}56}$

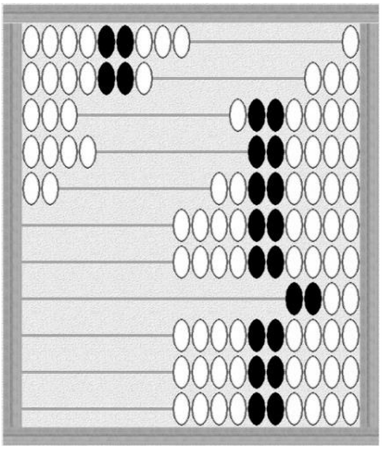
Poznámka k násobení:

Nutno poznamenat, že zdatní sčotaři nenásobí tímto postupným způsobem, ale výpočty si výrazně urychlují častým počítáním z paměti. S tím je spojeno i zaokrouhlování činitelů součinu, např. $67 \cdot 7$, lze rychle z paměti vypočítat jako$70 \cdot 7 = 490$ a poté odečíst $3 \cdot 7 = 21$. Další častou metodou je půlení, kdy součin $12 \cdot 32$ lze rozložit na $(6 \cdot 32) \cdot 2$, kdy z paměti $6 \cdot 32 = 192$ a na sčotu snadné vynásobení 2. Tato dovednost rychlých výpočtů a řádových odhadů se dnes používáním elektronických kalkulaček vytrácí.

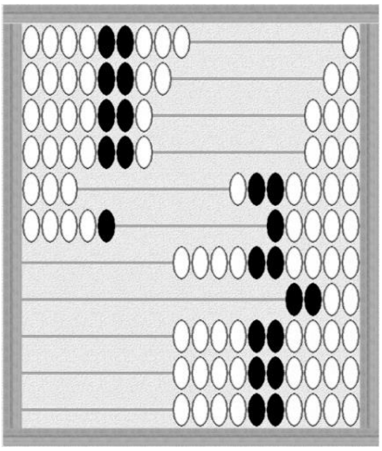
Násobení na sčotu s tabulkami[11]



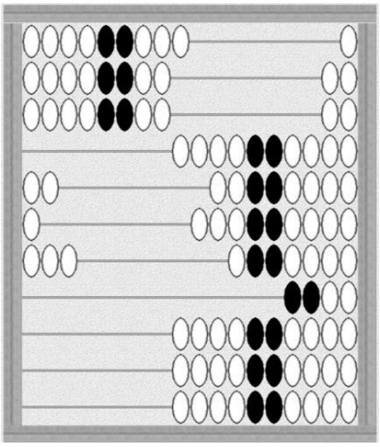
Příklad:
3 451 · 2 863
= 9 880 213
Menší z činitelů vyhledáme v tabulkách. Na počítadlo zaneseme součin 2 863 · 3 = 8 589
Uvědomme si, že násobíme tisíci, tedy = 8 589 000.



Pokračujeme součinem dalšího řádu
2 863 · 4 = 11 452 a přičteme jej k předchozímu s posunutím o jeden řád.
8 589 000
+1 145 200
= 9 734 200

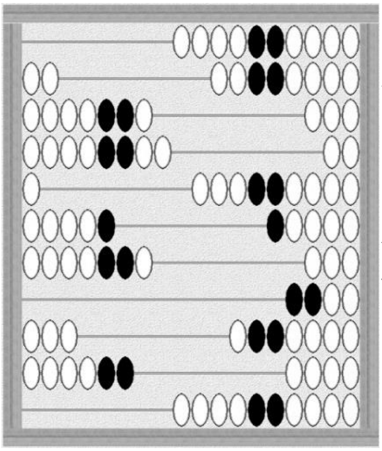


Součin dalšího řádu je
2 863 · 5 = 14 315. Opět jej přičteme k předchozímu s posunutím o jeden řád.
9 734 200
+ 143 150
= 9 877 350

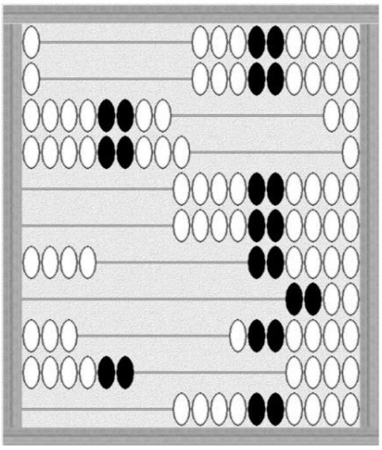


Součin posledního řádu je
2 863 · 1 = 2 863. Opět jej přičteme k předchozímu s posunutím o jeden řád. Výsledek
9 877 350
+ 2 863
= **9 880 213**

Dělení na sčotu postupným odečítáním

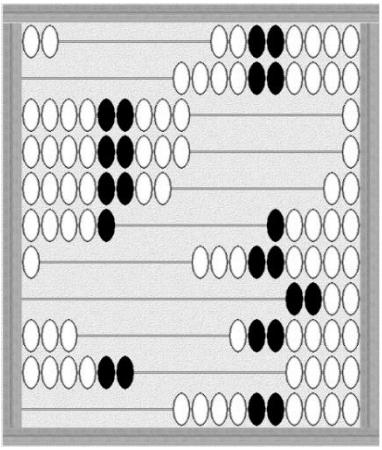


Příklad:
278 157,36
: 89 153
= 3,12
Dělence zaneseme na počítadlo.



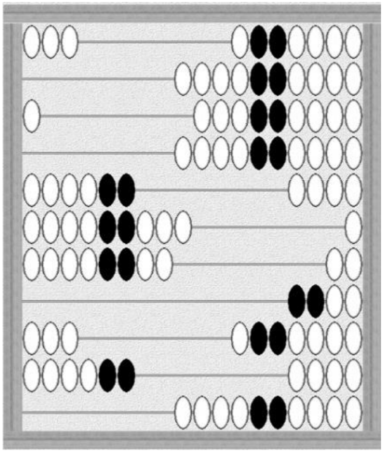
Postupně odečítáme dělitele. Každé odečtení zaznamenáme jedním kamenem na nejvyšším řádu.
278 157,36
− 89 153
= 189 004

[11] Při součinu, kdy jsou oba činitelé větší než je rozsah tabulek je nutné jeden z činitelů rozdělit a výpočet provést odděleně. Například 78 350, rozdělím na 78 000 a 350, v tabulkách pak vyhledám číslo 78 a všechny nalezené součiny poté násobím 1000, následně vyhledám součiny s číslem 350. Po získání všech součinů je sčítám obvyklým způsobem.



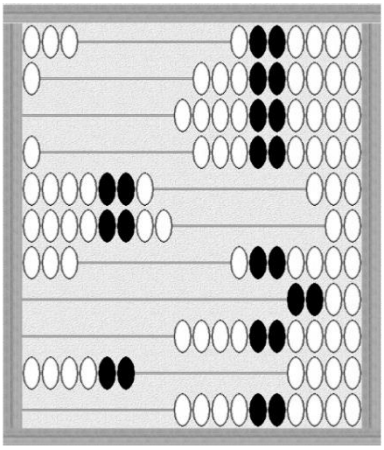
Zaznamenáme druhým kamenem odečtení dělitele. Od předchozího výsledku odečítáme opět dělitele.

$$189\,004{,}36$$
$$-\ 89\,153$$
$$=99\,851{,}36$$



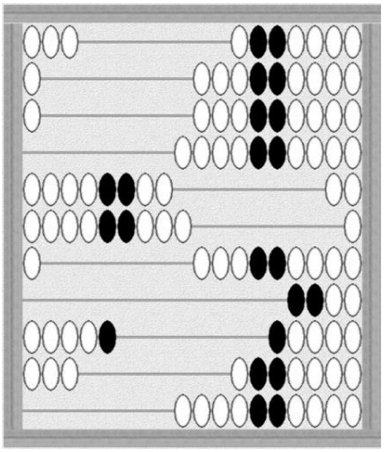
Zaznamenáme třetí odečtení dělitele a provedeme jej.

$$99\,851{,}36$$
$$-\ 89\,153$$
$$=10\,698{,}36$$



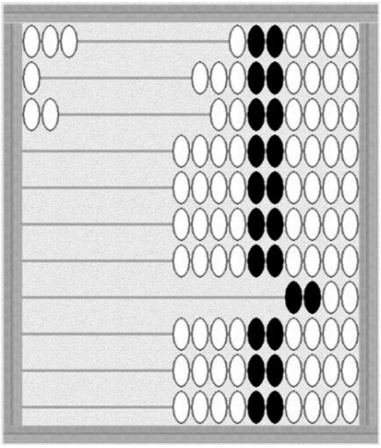
Poslední výsledek je již menší než dělitel, proto odečteme dělitele o jeden řád zmenšeného. Odečtení zaznamenáme na druhém nejvyšším drátu.

$$10\,698{,}36$$
$$-\ 8\,915{,}3$$
$$=1\,783{,}06$$



Výsledek je opět menší než dělitel, pro-to odečteme dělitele o jeden řád zmenšeného. Odečtení zaznamenáme na třetím nejvyšším drátu.

$$1\,783{,}06$$
$$-\ 891{,}53$$
$$=891{,}53$$



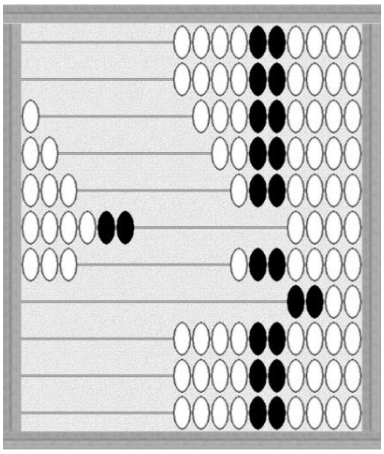
Odečtení zaznamenáme na třetím nejvyšším drátu.

$$891{,}53$$
$$-\ 891{,}53$$
$$=0$$

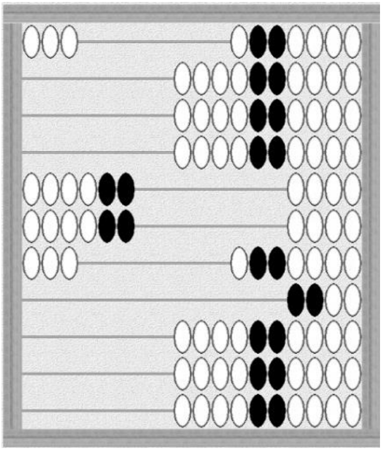
V horní části počítadla čteme zaznamenaný výsledek

$$=\mathbf{3{,}12}$$

Dělení na sčotu s tabulkami



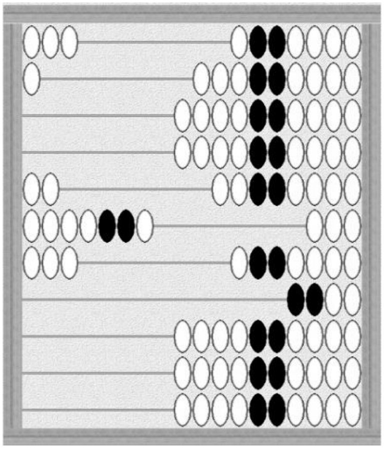
Příklad:
12 363 : 39 = 317
Dělence zaneseme na počítadlo.
V tabulkách vyhledáme dělitele 39



Odpovídající cifru 117 odečteme od dělence.

$$12\,363 - 11\,7 = 663$$

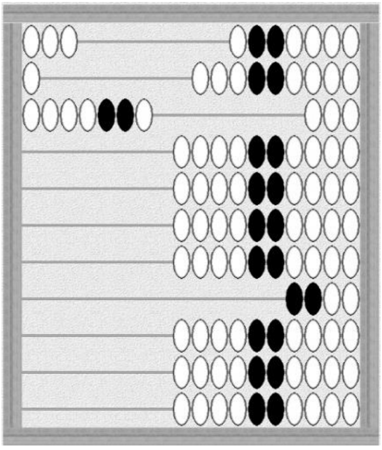
Vyhledaný násobek zaznamenáme v horní části počítadla



V tabulkách opět vyhledáme odpovídající násobek a odečteme jej.

$$663 - 39 = 273$$

Do horní části zaznamenáme násobek.



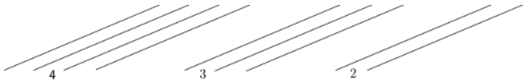
V tabulkách opět vyhledáme odpovídající násobek a odečteme jej.

$$273 - 273 = 0$$

Zaznamenáme násobek a čteme výsledek

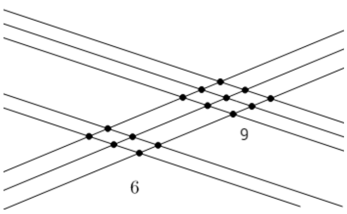
$= \mathbf{317}$

3.4 Grafické násobení

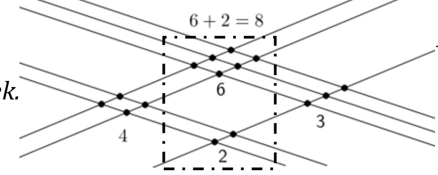


Obrázek 16: Zápis čísla 432 pomocí přímek

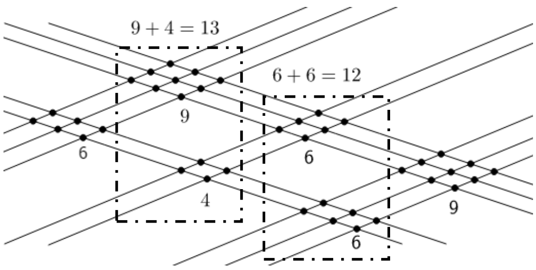
Metoda se zřejmě vyvinula ve středověké Číně. Její princip spočívá v zápisu čísla pomocí přímek, kdy je každý řád prezentovaný skupinou přímek daného počtu. Součin dvou takto prezentovaných čísel je dán součtem jednotlivých průsečíků přímek. Výhoda této metody tkví v její názornosti, matematicky se jedná o základní algoritmus násobení řádů obou činitelů součinu a jejich následný součet. (Balková, a další, 2012 str. 210)



Příklad:
$23 \cdot 3 = 69$
Každý činitel součinu znázorním pomocí přímek. Výsledek je znázorněn průsečíky přímek $=$ **69**



Příklad:
$23 \cdot 21 = 483$
Prostřední řád je dán součtem dvou součinů. Výsledek je znázorněn průsečíky přímek $=$ **483**



Příklad:
$23 \cdot 323 = 69$
Při součtu průsečíků provádíme nezbytný přenos do vyššího řádu. Výsledek $=$ **7 429**

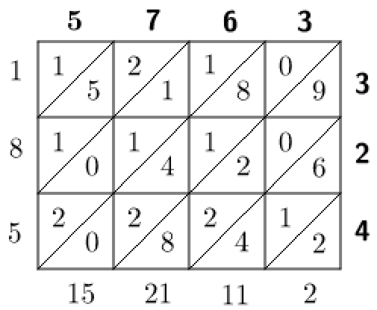
3.5 Gelosia

Přestože je *gelosia* spíše algoritmem tak jej pro jeho názornost a grafickou podobu zařazujeme v této práci mezi ostatní početní pomůcky.

Obrázek 17: Arabský popis algoritmu
Zdroj: (Bečvářová, 2001 str. 248)

Algoritmus vznikl zřejmě v Indii ještě před objevením nuly, tedy asi před 6. stoletím n.l. (Juškevič, 1978 str. 176) Nelze to však s jistotou tvrdit a je možné, že se metoda nezávisle vyvíjela na více místech. V arabské matematice popisuje metodu al-Marrakushi v traktátu *„Talkhīṣ ʿamal al-ḥisāb"* (Přehled o početních operacích) z konce 13. stol. V Evropě neznámý autor v Anglii nalezeném latinském pojednání *Tractatus de minutis philosophicis et vulgaribus* přibližně z roku 1300. A nakonec v čínské matematice Wu Jing v díle *Jiuzhang suanfa bilei Daquan* dokončeném roku. 1450 Často je chybně přisuzováno autorství popisu Al-Chwárizmímu nebo Fibonaccimu. (Chabert, 1999 stránky 21-26)

Luca Pacioli metodu nazval „multiplicare *gelosia*[12]" *(= žárlivost)*, pro podobnost čtvercové početní sítě s žaluziemi, za kterými bohatí měšťané ze žárlivosti schovávali své ženy. Samotný algoritmus popisuje například Al-Kaši ve spise *„Miftach al-muchitija" (1456).* (Balada, 1959 stránky 56-57)



Příklad:
5 763 · 324
= 1 867 212
Činitelé součinu zapíšeme na horní a pravý okraj sítě.

Do připravených polí vepisujeme výsledky součinů jednotlivých řádů. Desítky nad diagonálu, jednotky pod ní.

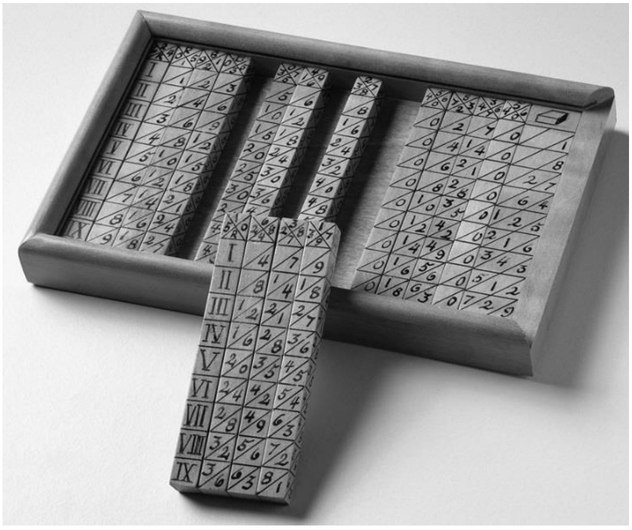
Po zapsání všech součinů provedeme součet cifer jednotlivých diagonálách. Po přenosech do vyšších řádů je výsledek
= 1 867 212

---

[12] Další název používaný pro podobnost početní sítě s dlaždicemi je *„multiplicare per garicola"* nebo *„multiplicare per quadrilatero".*

3.6 Napierovy kosti

Napier sám svoji sadu hůlek zhotovených často ze slonoviny nazýval *početní tyče*, v literatuře se ale setkáváme s názvy *Napierovy kosti, kostky, nebo hůlky.* Poprvé je popisuje ve spise *Rabdologiae Sev Numerationis per Virgulas duo* publikovaném již posmrtně v roce 1617. V úvodu Napier vysvětluje, že důvodem pro vydání této práce jsou pochvalné zprávy od přátel a zjištění, že se jeho číslované tyče začínají široce využívat i v zahraničí.



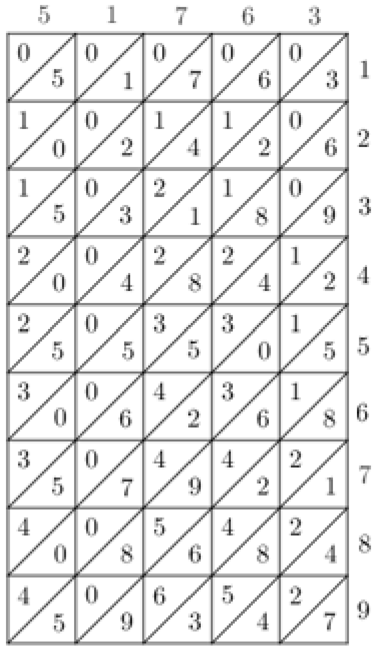
Obrázek 18: Jedna z variant Napierových kostí
Zdroj: www.deutsches-museum.de

Princip této početní pomůcky je založený na výše popsaném algoritmu *gelosia,* kdy očíslované tyče znázorňují početní síť, ve které jsou již předepsané všechny číslice. Vhodným nastavením tyčí se sestavují potřební činitelé daného součinu a dle algoritmu *gelosia* sčítají číslice v úhlopříčkách.

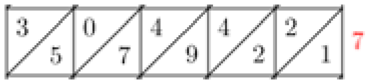
Základní Napierovy kosti se skládají z devíti tyčí, které jsou horizontálně rozděleny na deset řádků. V prvním řádku nalezneme čísla 1 až 9, v druhém pak jejich dvojnásobky, a tak dále až do desátého řádku, kde nacházíme desetinásobky, tedy čísla 10 až 90. Samotný zápis čísla je totožný se zápisem v *gelosii*, tedy desítky se píší nad diagonálu, jednotky naopak pod ní.

Zásadní nevýhodu této pomůcky – nutnost si poznamenávat mezivýpočty – se Nepier snažil řešit pomocí *Multiplicationis Promptuarium,* tedy druhou sadou hůlek, která se pokládala křížem přes první sadu tyčí a pomáhala při diagonálních součtech a přenosech do vyšších řádů. (Preclík, 2001)

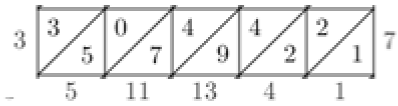
Násobení na Napierových kostech

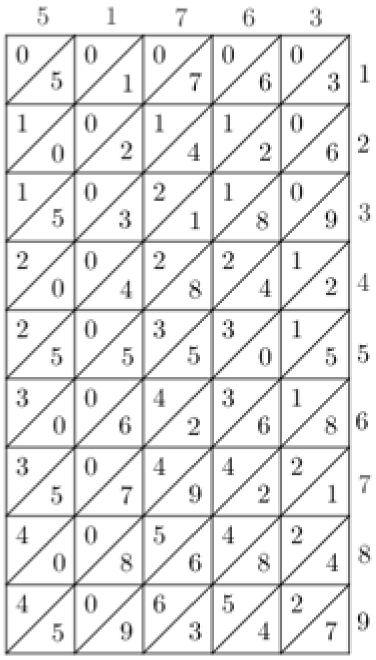


Příklad:
51 763 · 7
= 362 341
Na sloupcích nastavíme v prvním řádku větší z činitelů součinu.

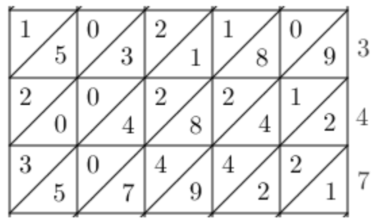


Provedeme součet v diagonálách a po provedení přenosů do vyšších řádů čteme výsledek:
= 362 341

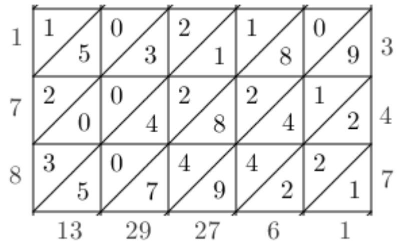




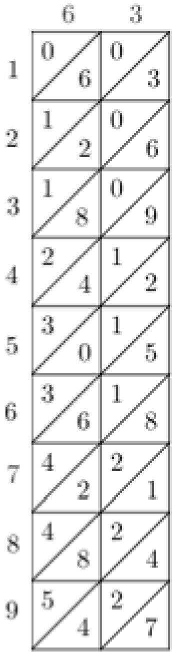
Příklad:
51 763 · 347
= 17 961 741
Na sloupcích nastavíme v prvním řádku větší z činitelů součinu.



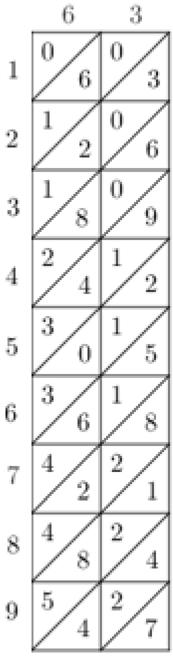
Provedeme součet v diagonálách a po provedení přenosů do vyšších řádů čteme výsledek:
= 362 341



Dělení pomocí Napierových kostí



Příklad:
325 765 : 63
= 5 170 ($zb.$ 55)
Na prvním řádku sloupců nastavíme dělitele.



63
126
189
252
315
378
441
504
967

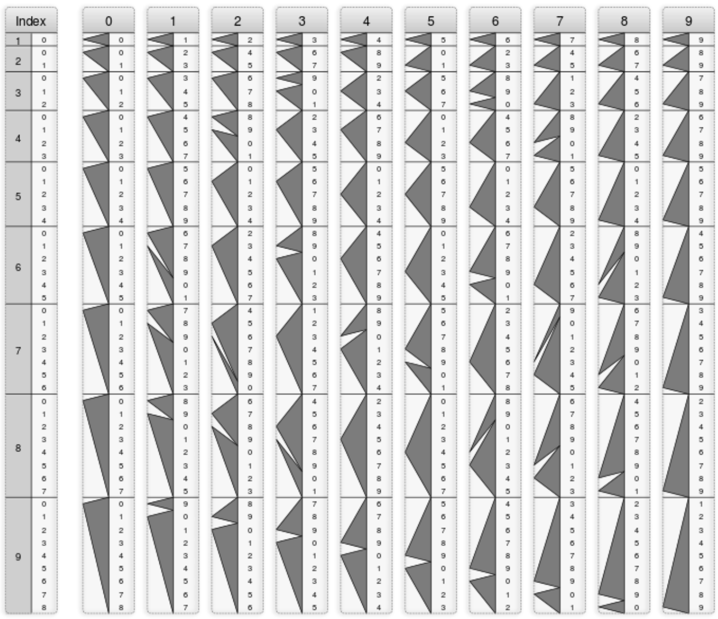
Vpravo si vypíšeme všechny násobky čísla 63 podle tabulky.

Provádíme výpočet za využití násobků čísla 63:

325 765: 63 = **5 170** (***zb.* 55**)
<u>−315</u>
10 765
<u>−6 3</u>
4 465
<u>−4 41</u>
55

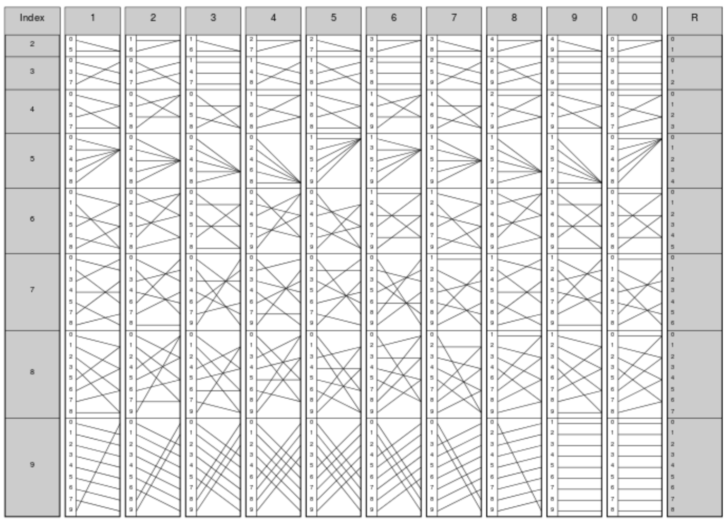
3.7 Genaille–Lucasovy hůlky

V roce 1891 francouzský železniční inženýr Henry Genaille na základě poznámek Eduarda Lucase upravil Napierovy kosti tak, aby při sčítání diagonál nebylo přenosů do vyšších řádů potřeba. Dosáhl toho větším počtem číselných řad zobrazených na tyčích a grafickým znázorněním přenosů do vyšších řádů.



Obrázek 19: Celá sada Genaille-Lucasových tyčí
Zdroj: www.en.wikipedia.org

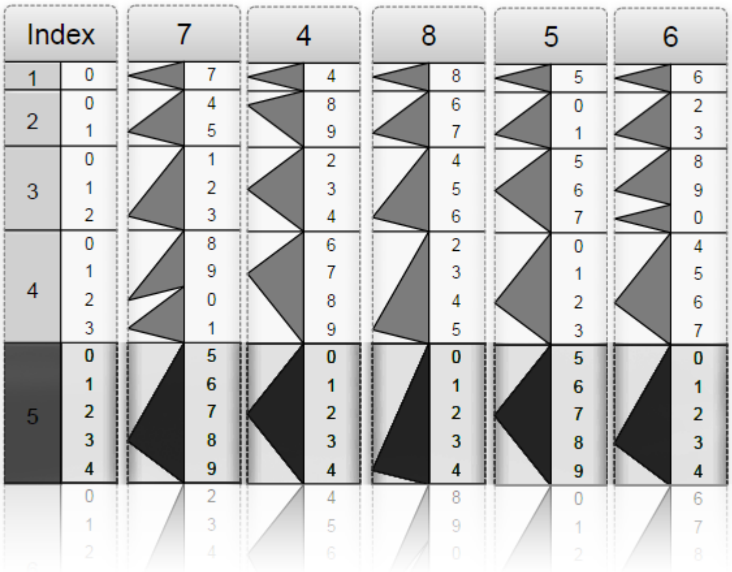
Tyto tyče bylo možné použít pouze pro násobení, modifikované – dělící tyče vznikly záhy. Jejich schéma (obrázek 20) je o poznání složitější a navíc musela být přidána ještě jedna „*zbytková*" tyč.



Obrázek 20: Schéma Genaille-Lucasovi tyčí upravených pro dělení
Zdroj: www.en.wikipedia.com

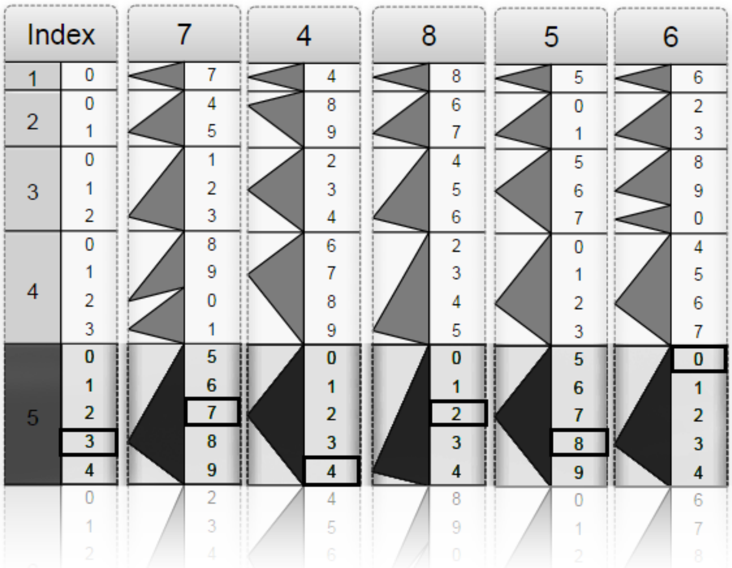
V době vzniku Genaille-Lucasových hůlek se již dostatečně rozšiřovaly mechanické početní kalkulátory, a tak byly hůlky považovány pouze za matematickou hříčku, případně didaktickou pomůcku.

Násobení pomocí Genaille-Lucasových tyčí



Příklad:
74 856 · 5
= 374 280
Prvního činitelel součinu vyjádřím pomocí tyčí. Násobíme číslem 5, proto budeme pracovat s tímto řádkem.

Dle grafického znázornění postupujeme od nejnižšího řádu k nejvyššímu. Čteme výsledek **= 374 280**
.



4 Logaritmy

Objev logaritmů byl důsledkem rozvoje astronomie, která kladla stále větší požadavky na početní úkony. Násobení, dělení a umocňování velkých „astronomických“ čísel byla časově velice náročné, a tak nezávisle vznikaly snahy tyto operace zjednodušovat a především urychlovat.

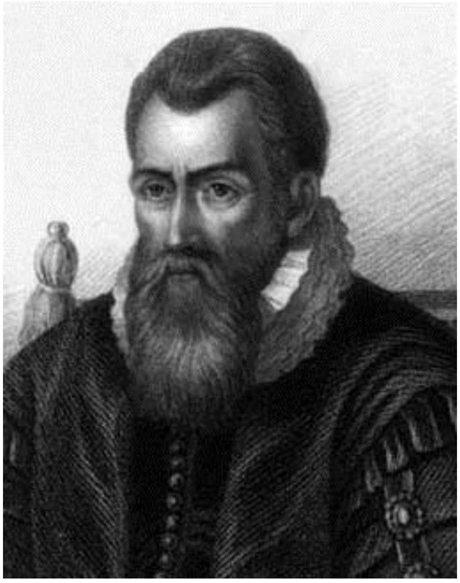
Jedním (a zřejmě prvním), kdo pro zjednodušení svých výpočtů logaritmy používal byl švýcarský matematik, hodinář a astronom **Jost Bürgi,** (1552–1632).

Bürgi po roce 1571 zřejmě pracoval s bratry Habrechtovými na orloji ve Štrasburku, kde vrchním hodinářem a zároveň Bürgiho učitelem byl švýcarský matematik Konrad Dasypodius. Poté působil jako správce hvězdárny a dvorní astronom u lankraběte Viléma IV. Hesensko Kasselského, až jej roku 1604 císař Rudolf II. pozval do Prahy, kde se setkává také s Tychem de Brahe a Johanesem Keplerem.

Sestrojil mnoho hodinářkách, astronomických a mechanických přístrojů, řada se jich dochovala do dnešních dnů[13]. Odlišně a nezávisle na Johnovi Napierovi, vymyslel tabulku progresí, kterou dnes chápeme jako tabulku logaritmů. Burgi začal tabulky sestavovat asi v roce 1600, pro neakademické vzdělání a neznalost latiny je však nezveřejnil. Učinil tak až po nátlaku a pomoci Keplera v roce 1620 v díle *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* (Bürgi, 1620).

[13] Například kovový sextant, sestrojený přímo pro Keplera, dnes uložený v Technickém muzeu v Praze

Druhým objevitelem je **John Napier (Neper),** (1550–1617)



John Napier z Merchistonu byl skotským matematikem, fyzikem, astronomem a astrologem. Jeho rodina vlastnila panství Merchiston a mladý Napier získal vzdělání na univerzitě St. Andrews a při cestách po Evropě.

Kromě matematiky, kterou považoval za svůj koníček se věnoval teologii. Jako první začal používat pojem logaritmus spojením dvou starořeckých slov Logos, což znamená proporce a Arithmos, tedy číslo. Je možné, že se Napier při objevování logaritmů inspiroval metodou *prosthaphaeresis,* kterou ve svých pracích častou používal Tycho de Brahe. Své výsledky Napier publikoval roku 1614 ve spisu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Tento spis neušel pozornosti britskému matematikovi Henry Briggsovi, který po jeho prostudování poslal Napierovi 10. března 1615 dopis:

„Napiere, pane z Markinstonu, zaměstnal jste mi hlavu i ruce vašimi novými a obdivuhodnými logaritmy. Doufám, dá-li bůh, že se toto léto setkáme, protože jsem nikdy neviděl knihu, která by tolik potěšila a vzbudila moji zvědavost.“

Briggs v dalším dopise zaslaném před jejich setkáním navrhl, aby Napier uvažoval logaritmy se základem deset. Napierova odpověď zněla, že měl stejný nápad, ale kvůli neutěšenému zdravotnímu stavu a dalších závažných důvodů nemohl začíst s novou konstrukcí tabulek.

Briggs Napiera ve Skotsku dvakrát naštěvuje a vytváří základ tabulek dekadických logaritmů, tak jak je známe dnes. Tabulky ovšem nedokončil, publikoval pouze jejich dokončenou část a výzvu ostatním matematikům, aby jeho dílo dokončili.

4.1 Logaritmické tabulky

Logaritmické tabulky vznikaly v 16. století pro ulehčení základních početních operací – násobení, dělení, umocňování a odmocňování, které byly časově nejnáročnější a v astronomii nejčastější. Rozšířením kalkulaček a počítačů pozbývá tento účel na platnosti, přesto se s logaritmickými tabulkami setkáváme i v dnešních středoškolských tabulkách.

Tyto tabulky (Mikulčák, 2007) obsahují kromě samotných tabulek mantis logaritmů i definice a pravidla pro počítání s logaritmy včetně potřebných vzorců.

Tabulky dekadických logaritmů

Pro provádění početních operací za pomoci dekadických logaritmických tabulek vycházíme z definice dekadického logaritmu:

$$\log 1 = 0;$$
$$\log 10 = 1;$$
$$\log 10^c = c.$$

Dále platí:

$1 \leq n_0 < 10 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \log n_0 < 1.$
Každé kladné n lze zapsat jako $n = n_0 \cdot 10^c$, kde $1 \leq n_0 < 10$ a c je celé číslo, pak platí:

$\log n = \log(10^c \cdot n_0) = \log 10^c + \log n_0 = c + m,$
kde $m = \log n_0$ a $0 \leq m < 1.$

Z výše uvedeného vyplývá, že každý dekadický logaritmus je součtem celého čísla c a čísla m. Číslo c nazýváme **charakteristikou logaritmu** a udává řád první platné číslice daného čísla n. Číslo m se nazývá **mantisa logaritmu** a tvoří desetinnou část logaritmu daného čísla**.**

Miliony	Statisíce	Desetitisíce	Tisíce	Sta	Desítky	Jednotky	Desetiny	Setiny	Tisíciny	Deseti tisíciny	Sta- tisíciny	Miliontiny	Poloha cifry
+6	+5	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	Charakteristika

Tabulka 1: Řády číslic v dekadické soustavě a charakteristika logaritmu

Logaritmus čísla

Příklad:
$$\mathbf{log\,6\,750 \doteq 3{,}829\,304}$$

$$c = 3$$
$$m = 8\,293$$
$$\log 6\,750 \doteq 0{,}m + c$$
$$\mathbf{log\,6\,750 \doteq 3{,}829\,3}$$

Nejvyšší řád čísla 6 750 jsou tisíce, charakteristika je tedy rovna $c = 3$. *V tabulkách vyhledáme mantisu čísla 675,* $m = 8\,293$. *Po přičtení charakteristiky čteme výsledek* $\doteq$ $\mathbf{3{,}829\,3}$

Příklad:
$$\mathbf{log\,6{,}75 \doteq 0{,}829\,304}$$

$$c = 0$$
$$m = 8\,293$$
$$\log 6{,}75 \doteq 0{,}m + c$$
$$\mathbf{log\,6{,}75 \doteq 0{,}829\,3}$$

Nejvyšší řád čísla 6 750 jsou jednotky, charakteristika je tedy rovna $c = 0$. *V tabulkách vyhledáme mantisu čísla 675,* $m = 8\,293$, *číslo se od předchozího příkladu liší pouze řádem, mantise je tedy shodná. Po přičtení charakteristiky čteme výsledek* $\doteq$ $\mathbf{0{,}829\,3}$

Příklad:
$$\mathbf{log\,0{,}075 \doteq 0{,}829\,304}$$

$$c = -2$$
$$m = 8\,751$$
$$\log 0{,}075 \doteq 0{,}m + c$$
$$\mathbf{log\,0{,}075 \doteq -1{,}124\,9}$$

Nejvyšší řád čísla 0,075 jsou setiny, charakteristika je tedy rovna $c = -2$. *V tabulkách vyhledáme mantisu čísla 75,* $m = 8\,751$. *Po přičtení charakteristiky čteme výsledek* $\doteq$ $\mathbf{-1{,}124\,9}$

Oprava čtvrté platné číslice:

Příklad:

$$\mathbf{\log 32,25 \doteq 1,508\,530}$$

$$c = 1$$

$$m = 5\,079$$

$$\log 32{,}25 \doteq 0, m + c$$

$$\log 32{,}20 \doteq 1{,}507\,9\ (oprava\ 7)$$

$$\mathbf{\log 32,25 \doteq 1,508\,6}$$

Nejvyšší řád čísla 0,075 jsou desítky, charakteristika je tedy rovna $c = 1$. V tabulkách vyhledáme mantisu čísla 322, $m = 507\,9$. V tomto případě vyhledáme opravu pro čtvrtou platnou číslici – v opravném sloupci číslu 5 odpovídá 7. Po přičtení charakteristiky čteme výsledek $\doteq \mathbf{-1,124\,9}$

Hledání hodnoty čísla x

Příklad:

$$\mathbf{\log x \doteq 1,913\,1}$$

$$m = 9\,128$$

$$\begin{array}{r} 9131 \\ \underline{-9128} \\ 3 \end{array}$$

$$x \doteq 8{,}18\ (oprava\ 5)$$

$$\mathbf{x \doteq 8,185}$$

V tabulkách vyhledáme mantisu $9\,131$*, nejbližší menší mantise je čísla* 818*,* $m = 9\,128$*. Rozdíl těchto mantis je roven* 3 *v opravném sloupci odpovídá číslu 5 nebo 6. Po započtení opravy čteme výsledek* $\doteq \mathbf{-8,185}$

Součin

Příklad:

$$\mathbf{2\,750 \cdot 3\,115 = 8\,566\,250}$$

$$\log 2\,750 \doteq 3{,}439\,3$$

$$\log 3\,115 \doteq 3{,}493\,5$$

$$\log 2\,750 \cdot \log 3\,115 =$$

$$= 3{,}439\,3 + 3{,}493\,5 = 6{,}9328$$

$$\log x \doteq 6{,}932\,8$$

$$\begin{array}{r} 9328 \\ \underline{-9325} \\ 3 \end{array}$$

$$x \doteq 856\ (oprava\ 6)$$

$$\mathbf{x \doteq 8\,566\,000}$$

Pomocí logaritmických tabulek vyjádříme čísla $log\ 2\,750 \doteq 3{,}439\,3$ *a* $log\ 3\,115 \doteq 3{,}493\,5$*.*
Dle definice, kdy logaritmus součinu je roven součtu logaritmů.
Nejbližší menší mantisu logaritmu součinu vyhledáme v tabulkách. Rozdíl těchto mantis je roven 3 *- v opravném sloupci odpovídá číslu 6. Po započtení opravy čtvrté platné číslice čteme výsledek* $\doteq$ **8 566 000.**

Výsledná charakteristika je dána součtem charakteristik obou činitelů $+3 + 3 = +6$

Podíl

Příklad:

$$\mathbf{2\,310 \div 128 = 18{,}046\,88}$$

$$\log 2\,310 \doteq 3{,}363\,6$$

$$\log 128 \doteq 2{,}107\,2$$

$$\log 2\,310 - \log 128 \doteq$$

$$\doteq 3{,}363\,6 - 2{,}107\,2 \doteq 1{,}256\,4$$

$$\log x \doteq 1{,}256\,4$$

$$\begin{array}{r} 2564 \\ \underline{-2553} \\ 11 \end{array}$$

$$x \doteq 1805\ (oprava\ 5)$$

$$\boldsymbol{x \doteq 18{,}05}$$

Pomocí logaritmických tabulek vyjádříme čísla $log\ 2\,310 \doteq 3{,}363\,6$ a $log\ 128 \doteq 2{,}107\,2$.
Dle definice, kdy logaritmus podílu je roven rozdílu logaritmů.
Nejbližší menší mantisu logaritmu podílu vyhledáme v tabulkách. Rozdíl těchto mantis je roven 11 - v opravném sloupci odpovídá číslu 5.
*Po započtení opravy čtvrté platné číslice čteme výsledek $\doteq$ **18,05.***

Výsledná charakteristika je dána rozdílem charakteristik obou činitelů $+3 - 2 = +1$

Umocnění

Příklad:

$$\mathbf{17{,}52^2 = 306{,}950\,4}$$

$$\log 17{,}52 \doteq 1{,}243\,5$$

$$2 \cdot \log 17{,}52 = 2 \cdot 1{,}243\,5 = 2{,}487$$

$$\log x \doteq 2{,}487\,0$$

$$\begin{array}{r} 4870 \\ \underline{-4857} \\ 13 \end{array}$$

$$x \doteq 3069\ (oprava\ 9)$$

$$\boldsymbol{x \doteq 306{,}9}$$

Pomocí logaritmických tabulek vyjádříme čísla $log\ 17{,}52 \doteq 1{,}243\,5$.
Dle definice, kdy logaritmus druhé mocniny je roven dvojnásobku logaritmů.
Nejbližší menší mantisu logaritmu druhé mocniny vyhledáme v tabulkách. Rozdíl těchto mantis je roven 13 - v opravném sloupci odpovídá číslu 9.
*Po započtení opravy čtvrté platné číslice čteme výsledek $\doteq$ **306,9.***

Výsledná charakteristika je dána dvojnásobkem charakteristiky základu mocniny $2 \cdot (+1) = +2$

Odmocnění

Příklad:

$$\mathbf{\sqrt[3]{2\,312} \doteq 13{,}222\,98}$$

$$\log 2312 \doteq 3{,}364\,0$$

$$\frac{\log 2\,312}{3} = \frac{3{,}364\,0}{3} \doteq 1{,}121\,3$$

$$\log 1{,}121\,3 = x$$

$$\begin{array}{r} 1213 \\ \underline{-1206} \\ 7 \end{array}$$

$$x \doteq 1322\ (oprava\ 2)$$

$$\boldsymbol{x \doteq 13{,}22}$$

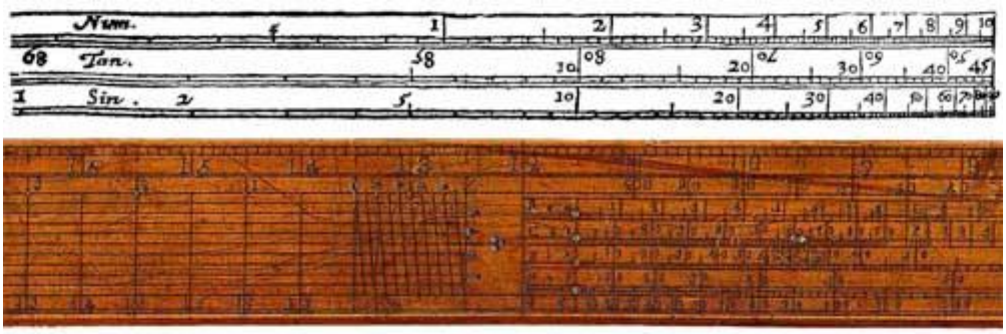
Pomocí logaritmických tabulek vyjádříme základ $log\ 2\,312 \doteq 3{,}364\,0$.
Dle definice, kdy logaritmus třetí odmocniny je roven třetiny logaritmů.
*Nejbližší menší mantisu logaritmu třetí odmocniny vyhledáme v tabulkách. Rozdíl těchto mantis je roven 7 - v opravném sloupci nejblíže odpovídá číslu 2. Po započtení opravy čtvrté platné číslice čteme výsledek $\doteq$ **306,9.***

Výsledná charakteristika je dána třetinou charakteristiky základu odmocniny $\frac{+3}{3} = +1$

4.1.1 Historie logaritmického pravítka

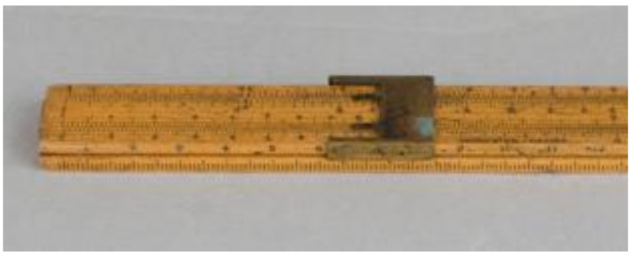
Podnět pro sestrojení logaritmického pravítka byl zcela shodný s podnětem pro vynálezy ostatních počítacích pomůcek i logaritmických tabulek – zjednodušení a urychlení numerických výpočtu. Pravítko snadnou manipulací omezuje nutnost vyhledávání v logaritmických tabulkách a urychluje jednotlivé početní operace.

Mezi první uživatele logaritmického pravítka můžeme zařadit Edmunda Guntera (1561 - 1626). Gunter pro své výpočty nesestrojil žádnou mechanickou pomůcku, vystačil si pouze s logaritmicky rozdělenou stupnicí, na kterou při svých výpočtech nanášel pomocí **kružítka** délky jednotlivých logaritmů.



Obrázek 21: Nahoře Gunterův návrh pravítka z roku 1624, dole Gunterovo dřevěné pravítko
Zdroj: (The Logarithms and Rules, 2011)

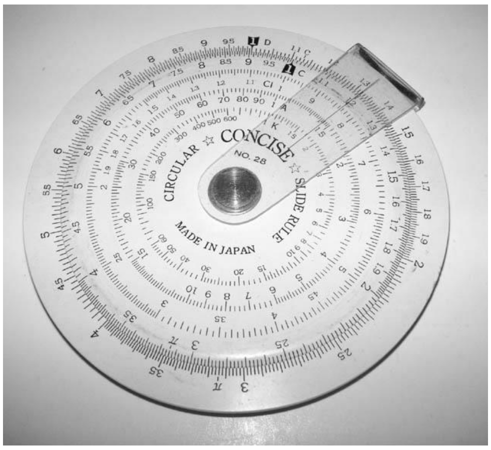
První mechanickou početní pomůcku využívající vlastnosti logaritmů sestrojil již v roce 1624 anglický matematik William Oughtred (1574 - 1660). „Circles of Proportion“, jak nazval svůj vynález, byla soustava soustředných, navzájem se otáčejících kruhů s vynesenými stupnicemi Napierových logaritmů. Jednoznačně určit, kdo je vynálezcem kruhového logaritmického pravítka není možné, protože v roce 1629 Richard Delamain (1600-1644) představil své kruhové logaritmické pravítko králi a o tři roky později podrobně popsal v díle *Grammelogia*. Oba matematikové se o autorství vynálezu přeli až do své smrti, aniž by se dočkali rozsouzení.



Obrázek 22: Mannheimovo logaritmické pravítko
Zdroj: (The Logarithms and Rules, 2011)

V polovině 17. století Edmund Wingate, inspirovaný Gunterem, představuje veřejnosti rovné logaritmické pravítko s posuvnou ryskou. Wingatovo pravítko dále zdokonaluje mladý francouzský důstojník Victor Mayer Amédée Mannheim (1831–1906), který zahájil svoji vojenskou kariéru u dělostřelectva jako důstojník. Vojenskou slávu a respekt si vybudoval především svým zájmem o matematiku a techniku, kdy výrazně zpřesnil náročné balistické výpočty používané u dělostřelectva. V roce 1850 dává rovnému logaritmickému pravítku současnou podobu, která je považována za normu pro francouzské dělostřelectvo, následně se rozšiřuje i do armád dalších zemí a vědeckých kruhů.

Za velký rozvoj logaritmických pravítek stojí nejen vojenské využití, ale i počátek průmyslové revoluce. Díky průmyslové výrobě se zvýšila přesnost, kvalita a množství vyráběných pravítek. Prvním průmyslově vyráběným pravítkem ve velkém množství je pravítko (někdy zvané *„soho"*) Jamese Watta. (The Logarithms and Rules, 2011)



Obrázek 23: Moderní kruhové logaritmické pravítko
Zdroj: www.en.wikipedia.org

Logaritmická pravítka se široce užívala až do sedmdesátých let dvacátého století, kdy dovednost počítat na logaritmickém pravítku patřila mezi základní dovednosti všech inženýrů a techniků napříč obory. Poté je začaly rychle vytlačovat elektronika a počítače, přesto je v letadlech jako *„nouzové počítadlo"* spotřeby paliva a dalších parametrů nalezneme v modifikované podobě dodnes.

4.1.2 Popis logaritmického pravítka

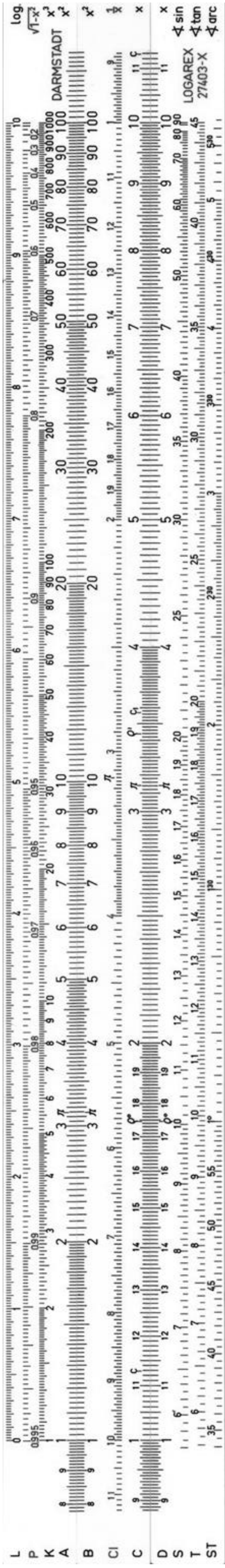
Díky rozsáhlému uplatnění v praxi se výuka počtů na logaritmickém pravítku stala součástí výuky na středních všeobecně vzdělávacích a odborných školách i v prvním semestru vybraných škol vysokých. Jako studijní podklady vyšlo hned několik učebnic a příruček. Některé jako překlad sovětských autorů, např. (Semendjajev, 1954), jiné od autorů českých (Pleskot, 1960), (Čihák, 1959).

Logaritmické pravítko se skládá ze tří základních dílů:

1) Pevná část pravítka (někdy nazývána jako základní část nebo vlastní pravítko)
2) Šoupátko – posuvná střední část pravítka
3) Běhoun – průhledný posuvný rámeček s ryskou

Na pevné části pravítka i na šoupátku jsou vyneseny stupnice (škály). Počet stupnic se může dle typu pravítka různit, ale čtyři základní stupnice má každé pravítko shodné, jsou obvykle označené písmeny A, B, C, D. Dodatkovými stupnicemi jsou kubická (T), logaritmická (log), exponenciální (log-log), Pythagorova (P), zvratná (R), sinusová (sin) a tangentová (tg). Tyto dodatkové stupnice jsou na pravítku umístěny podle jeho typu, určení či výrobce.

Na stupnicích D a C, které jsou děleny shodně, jsou naneseny logaritmy čísel 1–10 v poměru přizpůsobeném základní délce 250 mm. Počátek stupnic je na pravítku označen číslicí 1. Správnost a přesnost snadno ověříme výpočtem: z logaritmických tabulek plyne log 1 = 0. Na stupnici se vynese délka 0x250 mm = 0 mm. Proto počátek stupnice označen číslicí 1. Podobně bychom určili polohu čísla 2 na stupnici ve vzdálenosti 75,1 mm a dalších čísel, včetně desetinných, až do čísla 10, kdy log 10 = 1, proto 1x250mm.



Obrázek 24: Detail moderního logaritmického pravítka

Na horních stupnicích A a B jsou vyneseny logaritmy čísel 1–100 opět v měřítku odpovídajícím 250 mm. Jednotlivé polohy čísel na stupnici jsou vyznačeny stejným způsobem jako na stupnicích C a D.

Dle typu logaritmického pravítka jsou na některých stupnicích vyznačeny zvláštní značky – konstanty. Nejběžnějšími jsou:

1. Konstanta $\boldsymbol{\pi}$

Ludolfovo číslo s hodnotou 3,1415 bývá obvykle značeno na dolní i horní stupnici pravítka (A, D).

2. Konstanta C

Konstanta C vychází ze vzorce pro výpočet plochy kruhu a je dána předpisem $C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \doteq 1{,}128$. Slouží k rychlému výpočtu plochy kruhu vydělením průměru kruhu konstantou C a následným umocněním výsledku na druhou.

3. Konstanty C_1 a M

Konstanta C_1 je dána vztahem $\sqrt{\frac{40}{\pi}}$, je tedy $\sqrt{10}$krát větší než konstanta C. Používá se zejména při výpočtu objemu válce.

Konstanta M je převrácená hodnota čísla π, $M = \frac{1}{\pi} = 0{,}318$. Na některých typech pravítek je značena jako stonásobek, tedy $M = \frac{100}{\pi} = 318$. V praxi se často využívá pro zjednodušení výpočtu plochy válcových těles.

4. Konstanty $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho'}$, $\boldsymbol{\rho''}$

Konstanta ρ vznikla ze vzorce pro kruhový oblouk $l = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha$ a její hodnota je $\rho = \frac{\pi}{180} = 0{,}01744$. Stejně jako ρ', ρ'' se tedy používá pro výpočty arcusu úhlů.

4.1.3 Stupnice logaritmického pravítka

Na horních stupnicích se nacházejí čísla od 1 do 100, na spodních od 1 do 10. Přesto lze na pravítku samozřejmě počítat s čísly libovolné velikosti. Libovolně velké číslo se na pravítku vyhledává bez ohledu na polohu desetinné čárky, proto lze například číslo 425 vyhledat stejně jako číslo 0,425 nebo 4,25. Obdobně i výsledek udává pouze cifry a řád výsledku je nutné následně určit stejným způsobem jako při práci pouze s logaritmickými tabulkami.

Čtení čísel na stupnicích C a D

Interval mezi čísly 1 a 2 je dělený na 10 dílů a každý díl opět na deset dílků. Každý dílek tedy značí jednu setinu.

Interval mezi čísly 2,3,4 je dělený na 10 dílů a každý díl opět na pět dílků. Každý dílek značí dvě setiny.

Další intervaly mezi čísly 4,5,6,7,8,9 a 10 jsou děleny na 10 dílů a každý díl opět na polovinu. Každý dílek značí pět setin.

V intervalu mezi čísly 1,2 můžeme přesně číst čtyřciferná čísla v ostatních intervalech pouze čísla tříciferná. Víceciferná čísla je nutné zaokrouhlovat.

Intervaly	Počet dílů	Počet dílků	1 dílek		Přesné čtení cifer
⟨1,2⟩	10	10	0,01		4
⟨2,3⟩, ⟨3,4⟩	10	5	0,02		3
⟨4,5⟩, ⟨5,6⟩, ⟨6,7⟩, ⟨7,8⟩, ⟨8,9⟩, ⟨9,10⟩	10	2	0,05		3

Tabulka 2: Intervaly a přesnost stupnic C a D

Čtení čísel na stupnicích A a B

Podobný princip čtení čísel platí i na stupnicích A a B, jen s odlišným dělením.

Intervaly	Počet dílů	Počet dílků	1 dílek		Přesné čtení cifer
⟨1,2⟩	10	5	0,02		3
⟨2,3⟩, ⟨3,4⟩, ⟨4,5⟩	10	2	0,05		3
⟨5,6⟩, ⟨6,7⟩, ⟨7,8⟩, ⟨8,9⟩, ⟨9,10⟩	10	1	0,1		3
⟨10,20⟩	10	5	0,2		2
⟨20,30⟩, ⟨30,40⟩, ⟨40,50⟩	10	2	0,5		2
⟨50,60⟩, ⟨60,70⟩, ⟨70,80⟩, ⟨80,90⟩, ⟨90,100⟩	10	1	1		1

Tabulka 3: Intervaly a přesnost stupnic A a B

4.1.4 Základní operace

Početních operací, které lze na logaritmickém pravítku provést, je celá řada. Možnost provedení konkrétních operací je závislé na typu pravítka a stupnic, které jsou na něm vyznačeny. Mezi základní operace, které lze provést na každém pravítku patří násobení, dělení, umocňování a odmocňování.

Násobení

U násobení na logaritmickém pravítku využíváme základní vlastnosti logaritmů, kdy logaritmus součinu je součet logaritmů jednotlivých činitelů, tedy:

$$\log(ac) = \log a + \log b$$

Při násobení na stupnicích C, D (analogicky i na stupnicích A, B) vypadá postup následovně. Prvního z činitelů vyhledáme na stupnici D, pomocí běhounu dáme nad něj počátek stupnice C (tj. 1). Rysku běhounu posuneme na druhého činitele, který se nachází na stupnici C a pod ryskou běhounu na stupnici D čteme výsledek.

V příručkách a učebnicích bývá jako popis konstrukce výpočtu použit následující stručný popis. Ryska běhounu se zde označuje písmenem b a za každým číslem je písmeno označující, na které stupnici jej hledáme.

Příklad:
$2 \cdot 3 = 6$
Stručný postup:
1) b na 2D;
2) 1C pod b;
3) b na 3C
4) pod b výsledek **6D**

Slovní postup:
1) rysku běhounu umístíme na 2 stupnice D;
2) 1 stupnice C umístíme pod rysku běhounu;
3) Běhoun přesuneme na 3 stupnice C;
4) Pod ryskou běhounu přečteme na stupnici D výsledek 6;

Příklad:
$20 \cdot 30 = 600$
Stručný postup:
1) b na 2D;
2) 1C pod b;
3) b na 3C
4) pod b výsledek **6D**

Z vlastností logaritmů víme, že logaritmy čísla 2 a 20 mají shodnou mantisu a liší se pouze charakteristikou. Postup výpočtu se nebude od předchozího lišit.
Výsledek součinu je dán součtem mantis a řád výsledku je dán součtem charakteristik = **600**

$2 \cdot 3 = 6$ $log\, 2 + log\, 3 = log\, 6$ $0{,}30103 + 0{,}47712 = 0{,}77815$	$20 \cdot 30 = 600$ $log\, 20 + log\, 30 = log\, 600$ $1{,}30103 + 1{,}47712 = 2{,}77815$
$char.\!: (0) + (0) = (0)$	$char.\!: (+1) + (+1) = (+2)$

Příklad:
$2,4 \cdot 1,8 = 4,32$

Stručný postup:
1) *b* na 2,4D;
2) 1C pod *b*;
3) *b* na 1,8C
4) pod *b* výsledek **4,32D**

Slovní postup:
1) rysku běhounu umístíme na 2,4 stupnice D;
2) 1 stupnice C umístíme pod rysku běhounu;
3) Běhoun přesuneme na 1,8 stupnice C;
4) Pod ryskou běhounu přečteme na stupnici D výsledek =**4,32**

Dělení

Při dělení dvou čísel na stupnicích C a D postupně vyhledáme na stupnici D dělence a pomocí běhounu umístíme nad něj dělitele na stupnici C. Běhoun přesuneme na počátek stupnice C, kde pomocí běhounu na stupnici D čteme výsledek podílu. Analogicky provádění dělení na horních stupnicích A,B.

Příklad:
$4\,815 : 18,5 = 260,3$

Stručný postup:
1) *b* na 4,815D;
2) 1C pod *b*;
3) *b* na 1,85C
4) pod *b* výsledek **2,6D**

Určení řádu výsledku:

$$4815 : 18,5 = 260$$
$$(+3) - (+1) = (+2)$$

Výsledek, který vidíme na stupnici pravítka je výsledek bez správného určení řádu, ten musíme určit pomocí charakteristik. Výsledná charakteristika je $(+2)$, výsledek tedy= **260.**

Umocňování

Logaritmické pravítka umožňuje velice rychle zjistit druhou mocninu libovolného čísla. Na stupnici D vyhledáme bez ohledu na polohu desetinné čárky základ mocniny. Rysku běhounu přesuneme na vyhledané číslo a na stupnici A čteme druhou mocninu daného čísla. Pro správný výsledek nesmíme zapomenout určit řád výsledku. Z vlastnosti logaritmu $\log a^b = b \cdot \log a$ plyne, že při druhé mocnině se charakteristika výsledku bude rovnat dvojnásobku charakteristiky čísla.

U pravítek, které obsahují kubickou stupnici (T), lze shodným způsobem určovat na stupnicích D a T třetí mocninu (odmocninu) libovolného čísla.

Příklad:
$31^2 = 961$

Stručný postup:
1) *b* na 3,1D;
2) pod *b* výsledek **9,6A**

Určení řádu výsledku:

$$31^2 = 961$$
$$(+1) \cdot 2 = (+2)$$

Charakteristika druhé mocniny je dána dvojnásobkem charakteristiky základu mocniny. Výsledná charakteristika tohoto příkladu je $(+2)$, výsledek tedy $=$ **960.**

Odmocňování

Přestože se jedná o opačnou operaci k umocňování, nalezení odmocniny libovolného čísla na logaritmickém pravítku je o poznání složitější. Prvním krokem je rozdělení základu odmocniny od desetinné čárky na dvojice čísel. Následně na stupnici A vyhledáme číslo odpovídající hodnotě první dvojice a umístíme rysku běhounu na toto číslo. Na stupnici D čteme pod ryskou běhounu výsledek. Počet cifer výsledku odpovídá počtu dvojic čísel základu před desetinnou čárkou.

Příklad:

$$\sqrt{375621} \doteq 614$$

$$\sqrt{37|56|21} \doteq 614$$

Stručný postup:
1) *b* na 37,56A;
2) pod *b* výsledek **6,14D**

Určení řádu výsledku:

$$\sqrt{37|56|21} \doteq 614$$

Řád odmocniny neurčujeme pomocí charakteristiky základu, ale podle počtu dvojic cifer před desetinnou čárkou – počet dvojic je roven 3, tedy i počet cifer výsledku druhé odmocniny je 3 a výsledek je = **614.**

Příklad:

$$\sqrt{37562{,}1} \doteq 614$$

$$\sqrt{3|75|62{,}1} \doteq 614$$

Stručný postup:
1) *b* na 3,76A;
2) pod *b* výsledek **1,94D**

Určení řádu výsledku:

$$\sqrt{3|75|62{,}1} \doteq 194$$

Řád odmocniny neurčujeme pomocí charakteristiky základu, ale podle počtu dvojic cifer před desetinnou čárkou – počet dvojic (i neúplných) je roven 3, tedy i počet cifer výsledku druhé odmocniny je 3 a výsledek je = **194.**

5 Empirická část

V empirické části diplomové práce budu prezentovat výsledky dvou průzkumů. První průzkum ve formě strukturovaného rozhovoru je zaměřený na zjištění povědomí veřejnosti o počítadlech, jejich historii a možnostech jejich použití. Druhé dotazníkové šetření je zaměřené na využívání početních pomůcek ve výuce.

Vymezení výzkumného cíle a stanovení hypotéz

Hlavním cílem mého výzkumu je analýza znalostí a povědomí veřejnosti v oblasti historie počítadel a početních operací. Druhým hlavním cílem je zjistit způsoby využití početních pomůcek ve výuce na základních i středních školách a jejich začlenění do ŠVP.

Pro naplnění cílů výzkumu byly stanoveny hypotézy, které jsou v závěrečné části vyhodnoceny a ověřeny.

H1: Povědomí veřejnosti o způsobech použití počítadel je nízké.

H2: Počítadla a početní pomůcky nejsou ve výuce na základních a středních školách využívány.

Metodologie výzkumu

- Výzkumný soubor

  Výzkumný soubor prvního šetření ve formě strukturovaného rozhovoru byla náhodně vybraná dospělá veřejnost ve městech Jihlava, Hradec Králové a Košice.

  Výzkumný soubor pro dotazníkové šetření je tvořen vyučujícími, kteří odpověděli na můj dotazník rozeslaný do vybraných škol v České i Slovenské republice.

  Celkem se šetření zúčastnilo a řádně odevzdalo výsledky celkem 22 základních škol, 17 středních škol a 60 respondentů z řad veřejnosti.

- Realizace

  Výzkum jsem vedl osobně ve výše jmenovaných městech. Výsledky šetření jsem zanášel do připravených záznamových archů. Výzkum jsem prováděl v období od března do dubna 2017.

- Použité metody

  Kvantitativní dotazník je sestaven z 5 (respektive 6) stručných otázek zkoumajících začlenění početních pomůcek do výuky. Výsledky jsou vyhodnoceny pomocí tabulek a grafů s využitím programu MS Excel 2010. Vzor dotazníku je součástí příloh bakalářské práce.

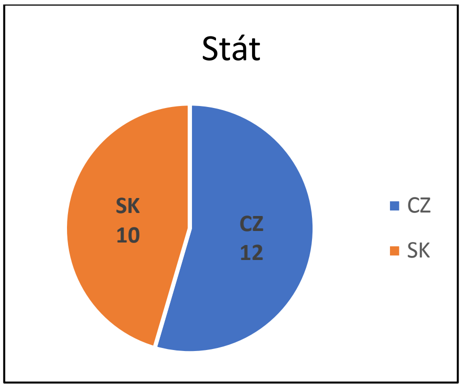
  Dotazník umožňuje poměrně snadné a ekonomické shromáždění dat od většího počtu dotazovaných. U otevřených otázek musíme počítat s velkým počtem rozdílných odpovědí i s častějším neuvedením žádné odpovědi, uzavřené otázky se vyhodnocují mnohem jednodušeji.

  Strukturovaný rozhovor jsem vypracoval z důvodu osobnějšího přístupu, velké škále možných odpovědí, a především většímu procentu relevantních odpovědí. Rozhovory jsem vedl osobně s náhodně vybranou dospělou veřejností. Výsledky jsem zanášel do připravených archů a poté byly vyhodnoceny za pomocí programu MS Excel 2010. Osnova strukturovaného rozhovoru je součástí příloh diplomové práce.

  Při strukturovaném rozhovoru tazatel postupuje dle předem připravených otázek v přesném pořadí. Na rozdíl od dotazníkového průzkumu je vysoká míra návratnosti a úplnosti (správnosti) vyplnění. Z důvodu časové náročnosti je vhodnější pro menší počet respondentů.

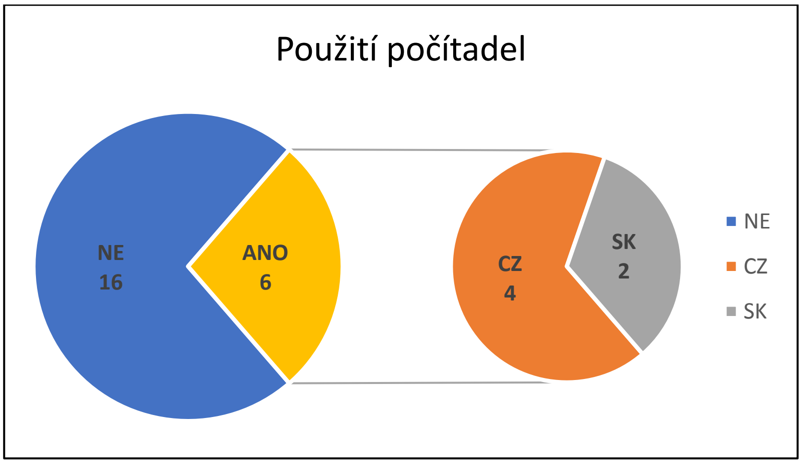
5.1 Vyhodnocení dotazníkového průzkumu ZŠ

Prezentované výsledky vycházejí z dotazníkového průzkumu konaného v období března a dubna 2017. Řádně vyplněný dotazník odevzdalo celkem 22 oslovených učitelů z různých základních škol v České a Slovenské republice.



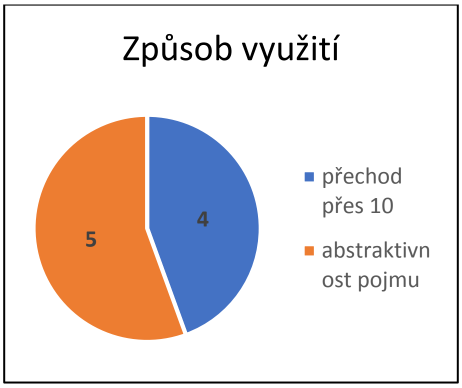
Graf 1: Počet škol dle státu

Zcela vyplněný dotazník odevzdalo 10 učitelů ze slovenských základních škol a 12 učitelů ze základních škol českých.



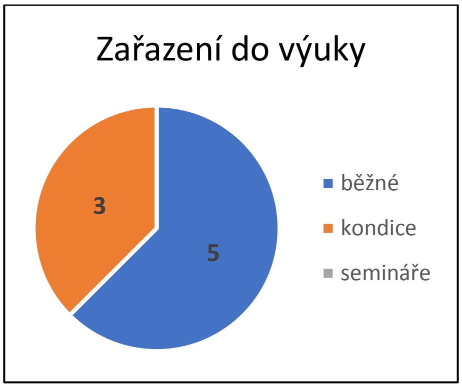
Graf 2: Využití počítadel na ZŠ

Základní otázka, zda učitelé využívají při své výuce počítadla vyznívá jednoznačně, 72 % učitelů počítadla nevyužívá. Šest škol (čtyři české, dvě slovenské) počítadla nějakým způsobem do výuky zařazuje.



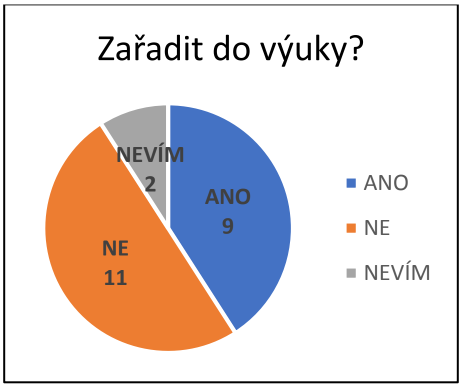
Graf 3: Způsob využití počítadel na ZŠ

Všechny odpovědi lze shrnout do dvou matematických témat. Prvním je přechod přes desítku, krokování a další metody spojené s tímto tématem. Druhou část odpovědí jsem nazval abstraktivnost pojmu, tedy přenesení žákových konkrétních početních představ na počítadlo.



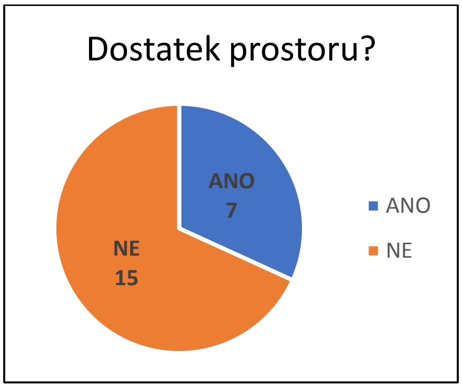
Graf 4: Zařazení počítadel do výuky

Učitelé, kteří využívají počitadla při své výuce, tak obvykle v rámci běžných hodin nebo v kombinaci běžných hodin a kondic (doučování). Odpověď používání počítadel v rámci hodiny pro žáky s IVP jsem zařadil do kategorie kondice.



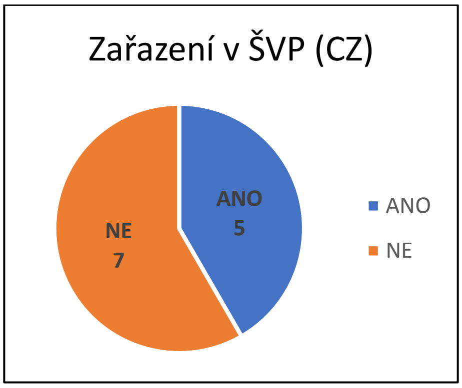
Graf 5: Vhodnost zařazení do výuky

Názor na prospěšnost a smysl zařazení počítadel do výuky je téměř rovnoměrně rozdělený. Pro devět učitelů je počítadlo ve výuce přínosem. Jedenáct učitelů žádné přínosy počítadla nespatřují a jeho zařazení do výuky by nepodpořili.



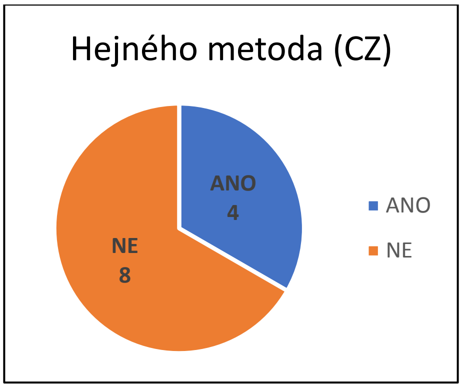
Graf 6: Dostatek prostoru pro zařazení do výuky

Začlenění počítadel do výuky je spojeno s časovým požadavkem. Zde dvě třetiny oslovených učitelů základních škol spatřují zásadní nedostatek. Jen 7 učitelů je přesvědčeno, že mají dostatek prostoru pro zařazení počítadel do výuky.



Graf 7: Zařazení v ŠVP

Z českých škol, které se průzkumu zúčastnily, jich pět má použití počítadel zmíněno ve svém školním vzdělávacím plánu. Z porovnání s celkovým počtem českých škol zařazujících počítadla do výuky je patrné, že ne všechny školy své školní vzdělávací plány zcela naplňují.

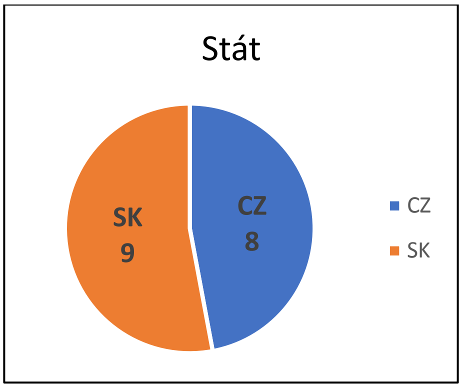


Graf 8: Matematika dle Hejného

Ze školních vzdělávacích plánů (a dalších dostupných dokumentů na webu školy) čtyři české základní školy na prvním stupni vyučují matematiku dle metody profesora Hejného. Jednou z metodických pomůcek této metody je počítadlo, proto právě tyto školy počítadla do výuky zařazují.

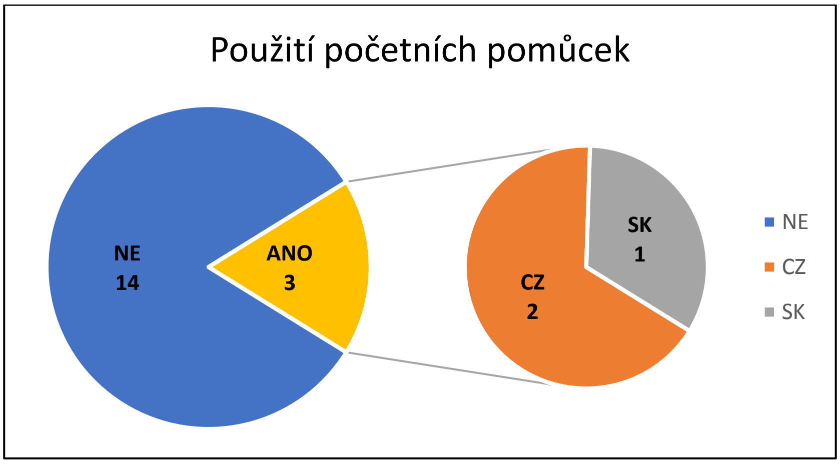
5.2 Vyhodnocení dotazníkového průzkumu SŠ

Prezentované výsledky vycházejí z dotazníkového průzkumu konaného v období března a dubna 2017. Řádně vyplněný dotazník odevzdalo celkem 17 oslovených učitelů z různých středních škol v České a Slovenské republice.



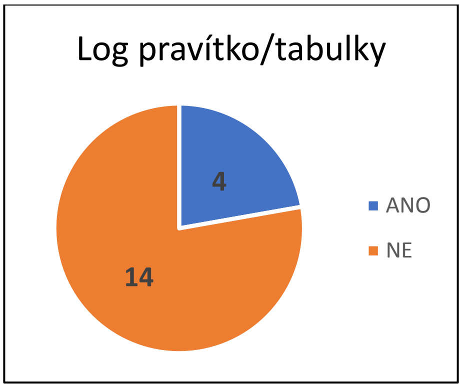
Graf 9: Počet škol dle státu

Řádně a zcela vyplněný dotazník odevzdalo celkem 17 středoškolských učitelů, devět ze Slovenska a osm z České republiky.



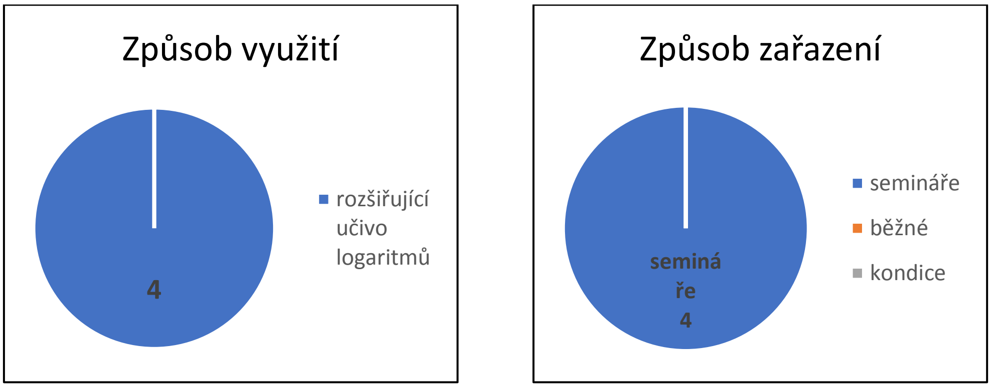
Graf 10: Použití početních pomůcek ve výuce

Na otázku, zda učitelé využívají ve své výuce početní pomůcky odpověděli pouze tři učitelé kladně, dva z Česka a jeden ze Slovenska.



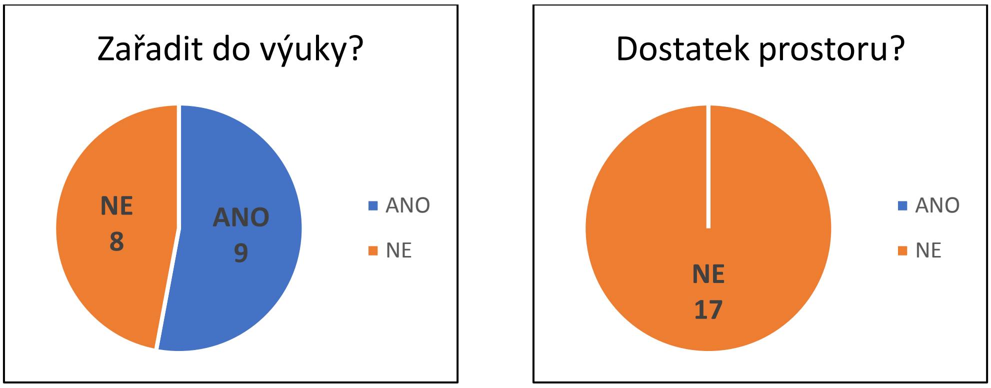
Graf 11: Využití logaritmických pravítek nebo tabulek

Čtyři učitelé zařazují do svých hodin použití logaritmických tabulek nebo logaritmického pravítka.



Graf 12: Způsoby využití a zařazení do výuky

Jediným tématem, kde učitelé některé z početních pomůcek používají je rozšiřující učivo logaritmů v rámci (volitelných) rozšiřujících matematických seminářů.

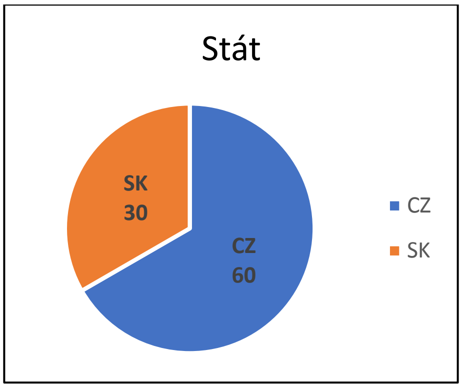


Graf 13: Vhodnost zařazení a dostatek prostoru ve výuce

Názor na prospěšnost a smysl zařazení početních pomůcek a počítadel není jednotný. Pro devět učitelů je počítadlo ve výuce přínosem. Osm učitelů žádné přínosy nespatřují a zařazení do výuky by nepodpořili. Všichni z oslovených učitelů se shodli, že pro zařazování početních pomůcek a počítadel do výuky není dostatek časového prostoru.

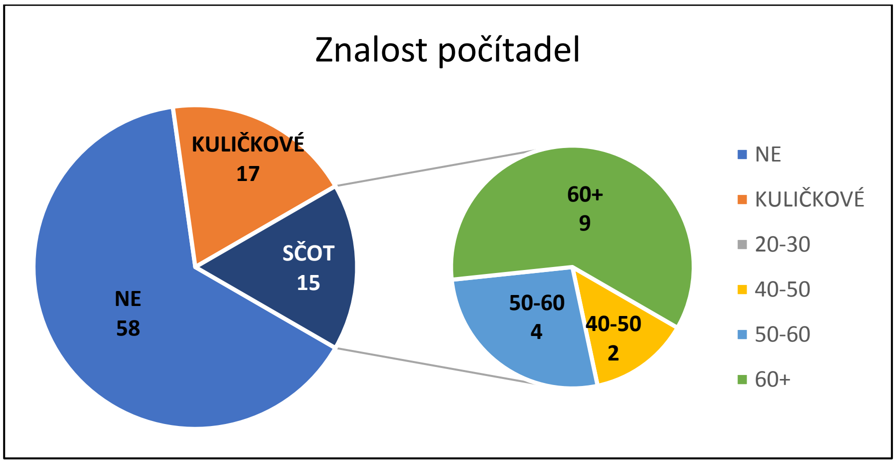
5.3 Vyhodnocení strukturovaného rozhovoru s veřejností

Prezentované výsledky vycházejí ze strukturovaného rozhovoru konaného v období března a dubna 2017. Řádně na rozhovor odpovědělo 90 oslovených dospělých respondentů z Hradce Králové, Jihlavy a Košic



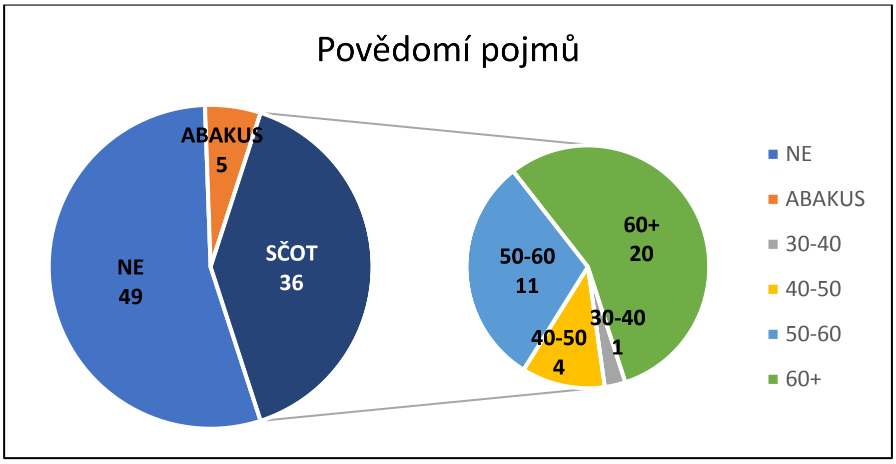
Graf 14: Počet respondentů dle státu

Rozložení vychází z plánu, kdy bylo osloveno 30 respondentů z každého města – Jihlavy, Hradce Králové a Košic.



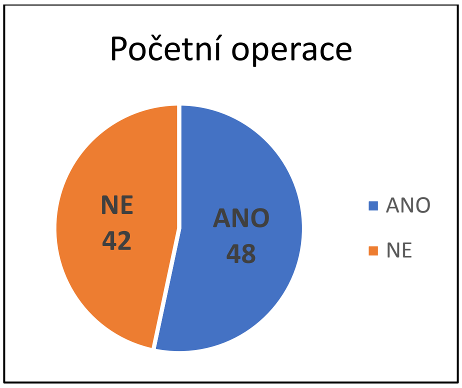
Graf 15: Znalost počítadel

Sedmnáct respondentů na otázku, zda znají nějaké počítadlo, na kterém lze provádět výpočty, uvedlo kuličkové počítadlo. Sčot uvedlo patnáct respondentů, u této odpovědi v grafu uvádím i věkovou strukturu, nejvíce krát tuto odpověď uvedli respondenti ve skupině 60+.



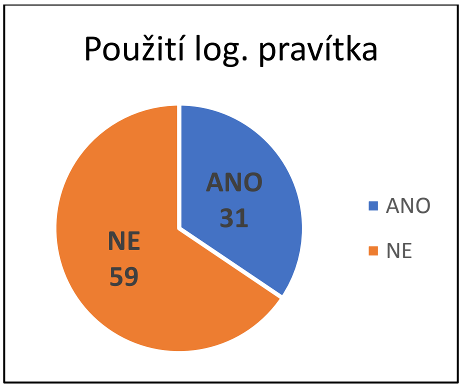
Graf 16: Povědomí pojmů

Povědomí o pojmu abakus mělo pět respondentů, o pojmu sčot respondentů 36. Nejvíce těchto respondentů bylo opět z věkové kategorie 60+. Ostatní pojmy respondenti (49) neznali.



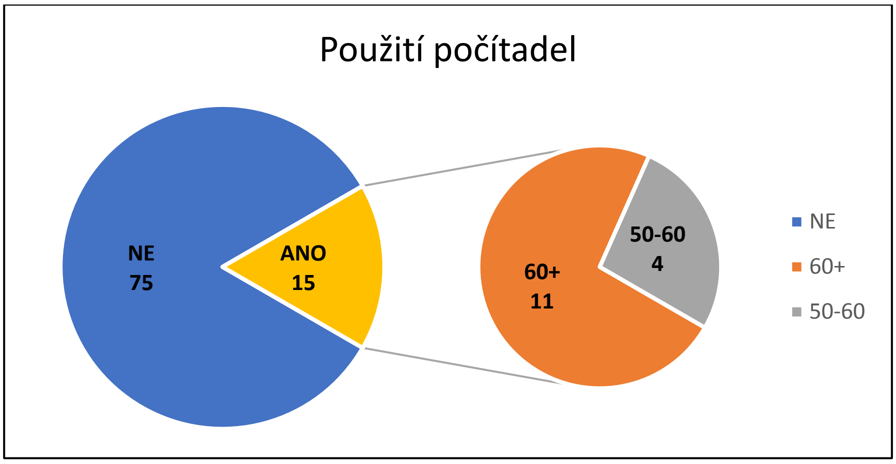
Graf 17: Znalost početních operací

Uvést některé početní operace, které lze na počítadlech provést dovedlo 48 respondentů. Ostatní uvedly že žádnou početní operaci neznají, nebo neví, která by šla provést na počítadle.



Graf 18: Znalost použití log. pravítka

K čemu slouží logaritmické pravítko dokázalo popsat 31 respondentů. 59 respondentů uvedlo, že neví, nebo uvedli nesprávnou odpověď.



Graf 19: Znalost použití počítadel

S některým z počítadel či početní pomůckou se v životě setkalo 15 respondentů, všichni z věkové kategorie 50+.

5.4 Diskuse

Strukturovaný rozhovor s dospělou veřejností byl prováděn s cílem odpovědět na hypotézu **H1:** *Povědomí veřejnosti o způsobech použití počítadel je nízké.*

	Znalost počítadel	Povědomí pojmů	Použití log. pravítka
ANO	35,6%	45,6%	34,4%
NE	64,4%	54,4%	65,6%

Pouze třetina z dotázaných respondentů dokázala jmenovat nějaký druh počítadla či početní pomůcky, na které lze provádět matematické výpočty. 45,6% respondentů měla povědomí některém z jmenovaných počítadel, zejména o sčotu. U obou otázek měla na odpovědí vysoký vliv věková struktura dotázaných. Průzkum ukázal, že starší lidé mají o počítadlech výrazně větší povědomí. 60%, respektive 56%, všech kladných odpovědí u prvních dvou otázek tvořila věková skupina respondentů straších 60 let.

Celkem 60+	Znalost počítadel	Povědomí pojmů
20	9	20
100%	45%	100%

Výrazně vyšší počet kladných odpovědí u věkové kategorie 60+ lze vysvětlit širokým užíváním sčotů v 50 a 60. letech minulého století. Celkově nízké povědomí o počítadlech a početních pomůckách je důsledkem historického preferování algoritmických postupů ve střední a západní Evropě. Hypotézu **H1** můžeme považovat za potvrzenou

Hypotéza **H2:** *Počítadla a početní pomůcky nejsou ve výuce na základních a středních školách využívány*; byla ověřována prostřednictvím dvou dotazníkových průzkumů na základních i středních školách v České a Slovenské republice.

	Základní školy			**Střední školy**		
	Celkem škol	Zařazeno do výuky	**%**	Celkem	Zařazeno do výuky	**%**
Celkem	22	6	**27,3%**	17	3	**17,6%**
CZ	12	4	**33,3%**	8	2	**25%**
SK	10	2	**20%**	9	1	**11,1%**

Z 22 dvou oslovených základních škol využívá ve výuce počítadla čtvrtina z nich (27,3%). Při rozdělení dle států, je v Česku rozšíření 33,3% a na Slovensku pouze 20%. Zařazování počítadel do výuky na základní škole považuje pouze 40,9% učitelů, přitom 50% je přesvědčena o jejím neopodstatnění. Jako hlavní překážku považuje 68% učitelů nedostatek času a prostoru ve výuce.

Větší procento rozšíření na českých základních školách lze vysvětlit postupným zaváděním Hejného metody výuky matematiky, která počítadla doporučuje jako metodické pomůcky.

Z oslovených středních škol využívá počítadla či početní pomůcky pouze 17,6% z nich a to pouze v rámci rozšiřujících seminářů. Všichni oslovení učitelé se shodli, že nedostatek prostoru ve výuce jim nedovoluje početní pomůcky do výuky začlenit.

Vzhledem k 27,3% využití na základních a 17,6% využití počítadel na středních školách lze považovat hypotézu **H2** za potvrzenou.

Oba dotazníkové průzkumy i strukturovaný rozhovor s veřejností nelze z důvodu malého statistického souboru považovat za jednoznačně průkazné, přesto mohou posloužit pro vytvoření představy o povědomí veřejnosti, názorech učitelů, rozsahu učiva v jednotlivých školách a aktuálních směrů ve výuce.

6 Praktická část

Cílem praktické části diplomové práce je příprava pracovních listů, které žáky stručně seznámí s historií početních pomůcek a naučí je základní početní operace pomocí japonského sorobanu a ruského sčotu

Samotné pracovní listy mohou být použity jako základní učivo v hodinách informatiky, ale lze je úspěšně využít i v hodinách matematiky nebo seminářů. Lze je také použít jako doplňující či rozšiřující učivo pro rychlejší žáky.

Pracovní listy jsou děleny do tří tematických celků. Prvním je list Historie početních pomůcek, kde žáci mají za úkol podle indicií vyhledat na internetu potřebné informace, vyhodnotit a zapsat od pracovního listu. Druhým celkem jsou početní operace na sorobanu. Žáci se naučí nejen zanášet a číst čísla z počítadla ale provádět sčítání a odčítání včetně přenosů do vyšších řádů a také operace násobení a dělení. Posledním, třetím celkem jsou početní operace na sčotu. Žáci se podobně jako na sorobanu naučí provádět všechny základní početní operace, ale navíc budou pracovat s a početními tabulkami, které se pro urychlení výpočtů na sčotu využívají. Každý pracovní list obsahuje pre-list s vymezením výukových cílů a očekávaných výstupů a samotný pracovní list s výkladem a sadou úloh.

Seznam listů:

1) **1A** Historie početních pomůcek
2) **2A** Sčítání na sorobanu
3) **2B** Odčítání na sorobanu
4) **2C** Násobení na sorobanu
5) **2D** Dělení na sorobanu
6) **3A** Sčítání na sčotu
7) **3B** Odčítání na sčotu
8) **3C** Násobení na sčotu
9) **3D** Dělení na sčotu

Závěr

Cílem teoretické části diplomové práce bylo popsat historický vývoj počítadel a dalších mechanických pomůcek umožňujících nebo usnadňujících provádění základních početních operací. Teoretická část byla členěna do 4 hlavních kapitol věnujících se početním pomůckám v historii a vzestupu algoritmiků v středozápadní Evropě, primitivním početními pomůckám jako jsou vrubovky, či provazce a způsoby jejich používání. Všechny používané početní pomůcky byly popsány a byly prezentovány způsoby provádění základních početních operací s důrazem na čínský suanpan, japonský soroban a ruský sčot.

Poslední kapitola teoretické části je věnována revolučnímu objevu v historii matematiky, ale i výpočetní techniky, logaritmům. Kromě historického vývoje objevu je prakticky předvedena práce s logaritmickými tabulkami a provádění výpočtů pomocí logaritmického pravítka.

V empirické části práce se snažím potvrdit dvě hlavní hypotézy:

- Povědomí veřejnosti o způsobech použití počítadel je nízké.
- Počítadla a početní pomůcky nejsou ve výuce na základních a středních školách využívány.

Hypotézy jsou ověřoval pomocí dotazníkového šetření v celkem 29 školách v České i Slovenské republice a strukturovaném rozhovoru s dospělou veřejností ve třech městech – Jihlavě Hradci Králové a Košicích. Výsledky obou průzkumů prokázaly pravdivost hypotéz. Pojem abakus znalo pouze 5 procent dotázaných respondentů a s použitím některé z početních pomůcek se setkalo 17 procent respondentů. Počítadla do své výuky nějakou formou zařazuje 27 procent dotázaných základních škol 18% škol středních.

Praktická část práce je tvořena devíti pracovními listy, které žáky seznamují s historií počítadel a početních pomůcek, a především se základní obsluhou a početními operaci počítadel soroban a sčot.

Vytyčené cíle ve všech částech práce se mi podařilo splnit a obě dané hypotézy jsem potvrdil.

Historie početních pomůcek

Cíl pracovního listu:

Získat povědomí o početních pomůckách v historii.

Očekávaný výstup:

Žák bude mít povědomí o typech početních pomůcek, způsobu použití a době jejich rozšíření.

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, počítač s internetem

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a potřebné údaje a informace samostatně dohledává na internetu.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

1A

Pracovní list

HISTORIE POČÍTADEL

1

Ve Věstonicích se nenalezla pouze světoznámá Věstonická Venuše, ale i početní pomůcka _____________, kterou roku 1936 objevil profesor Absolon. Její stáří bylo přibližně určeno na___________let. Pomocí tohoto nástroje s největší pravděpodobností naši předci _____________množství.

Obrázek:______.

Víš že, …
se používaly často při obchodování a prodeji na dluh, třeba v pekárně nebo hospodě. Do dvou malých k sobě přiložených destiček dřeva pekař udělal zářez, vždy když si zákazník vzal bochník chleba na dluh. Jedno dřívko si ponechal pekař, druhé si vzal zákazník. Zúčtování a platba poté probíhala ve stanovený den, obvykle jednou týdně

2

Kultura Inků jejichž říše se rozkládala _________ _______je zahalena mnoha tajemství. Je to způsobeno i tím, že dodnes nebylo rozluštěno jejich _________písmo nazývané_____________. Toto písmo se používalo až do zániku říše v____ _______, kdy ji zničili________________.

Obrázek:______.

Víš že, …
Správa a vytváření písma bylo svěřováno pouze královskému úředníkovi, tzv. *quipucamoyic – „strážci uzlů“*

3

Početní desky již používaly staří Řekové, Římané dokonce používaly přenosné ruční ___________, které lze datovat do roku 300n.l. Po rozpadu říše Římské však užívání těchto desek ustalo.

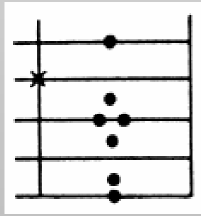
Obrázek:______.

Víš že, …
Velký vliv na matematiku v Evropě měl Islám, který svojí rozpínavostí šířil arabské vědomosti do světa.

4

Ve střední a západní Evropě bylo rozšířenější počítání na __________. To se vyznačovalo horizontálnímu uspořádáním linek, do kterých se pokládaly početní známky (např.:____________). Známka umístěna ___________symbolizovala pět jednotek příslušného řádu.

Jaké číslo je znázorněno?



__________________________.

5

V Číně se naopak používalo počítadlo_________ _______. Skládá se ze _________ částí s různými počty kamenů: _______a______. Navíc lze provádět výpočty i v ________________soustavě, která se dříve v Číně používala.

Obrázek:______.

Víš že, …
První zmínky o čínském počítadlo pocházejí již z roku 190 n.l. Konkrétní podoba je známá z 16. století. Až do roku 2004 museli všichni čínští účetní skládat zkoušku z ovládání počítadla.

6

Z Číny se počítadlo v 17. století rozšířilo i do Japonska, kde změnili počet kamenů na ______a _______. Nazvali jej _________________.____Mezi hlavní výrobní materiály všech počítadel patřily ____________________.

Obrázek:______.

Víš že, …
Firma Sharp stále vyrábí moderní japonská počítadla v kombinovaná například s kalkulačkami nebo počítačovými klávesnicemi.

7

Od 17. století se ve východní Evropě postupně rozšířilo počítadlo ___________. Jeho kameny byly ________________uspořádány podobně jako na při počítání na________. Nejvíce byl rozšířený v _________________, ale v 50.-70. letech i v Československu.

Obrázek:______.

Víš že, …
Čtveřice kamenů na jednom z drátu slouží pro počítání s čtvrtinami. Ruská mince kopějka se dělila na 4 polušky. Jedno a dvoupoluškové mince (označovány jako ¼ kopějka a ½ kopějka) byly používány do roku 1916.

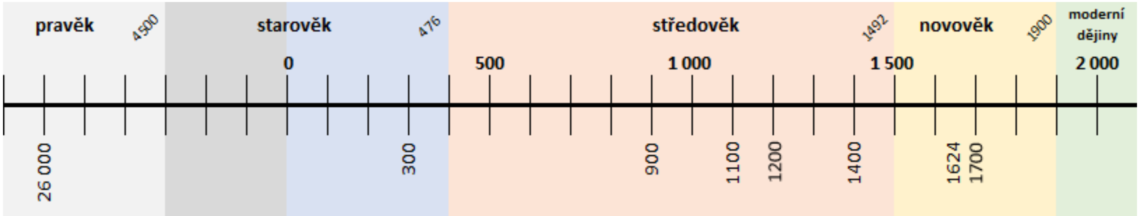
8

V 17. století byla revolucí v matematice objev dvou matematiků: ___________ a___________.
Objevené___________ výrazně urychlily všechny výpočty té doby a následně daly vzniknout matematické pomůcce___________________.

Obrázek:______.

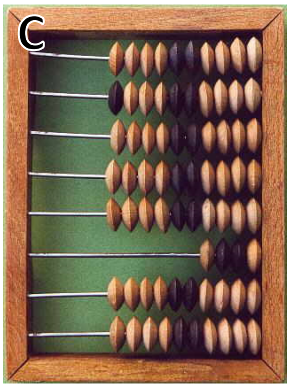
9

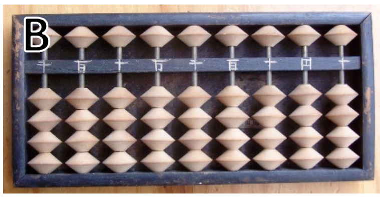
Doplňte časovou osu:

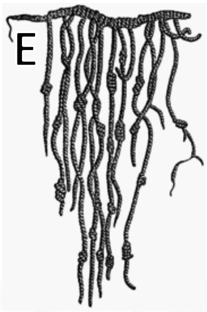


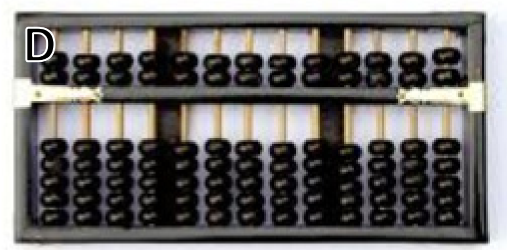
*****

Přiřaďte obrázky k jednotlivým úkolům.

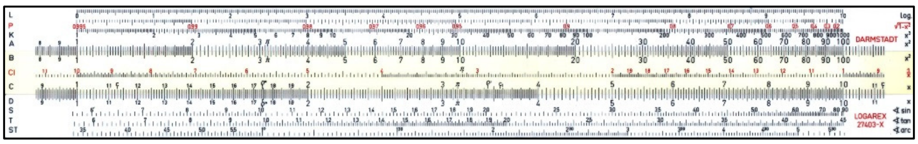








G



Jak se mi dařilo:

____

____

____

Sčítání na sorobanu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci sčítání na sorobanu.

Očekávaný výstup:

Žák dovede vynášet a číst čísla na počítadle; dovede provádět operaci sčítání na sorobonu včetně přenosu do vyšších řádů.

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, soroban nebo počítač s internetem

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

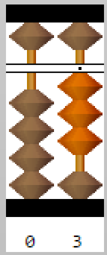
2A

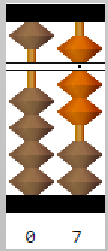
Pracovní list

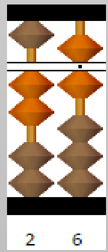
SČÍTÁNÍ NA SOROBANU

1

Čísla se na počítadle znázorňují pomocí kamenů, kdy každý kamen představuje jednotku daného řádu, kameny v horní části počítadla představují jednotek pět.

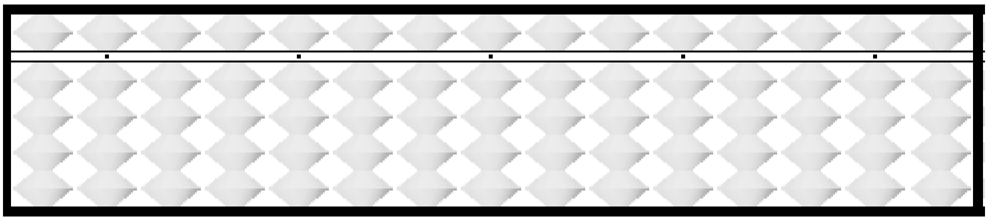






Znázorni na počítadle následující čísla:

3	**5**	**9**	**10**
14	**25**	**59**	**108**



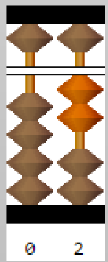
Víš že, …
Simulátor sorobanu dostupný online nalezneš na:

http://www.sorobanexam.or

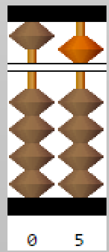
Víš že, …
Soroban se v Japonsku, kam jej přivezli obchodníci z Číny, používá již od 14. století. Japonští žáci se i dnes na sorobanu učí počítat a účastní se mnohých soutěží.

2

Sčítání se provádí přidáním daného počtu kamenů. Může se ale stát, že nebudu mít dostatek kamenů pro přidání:

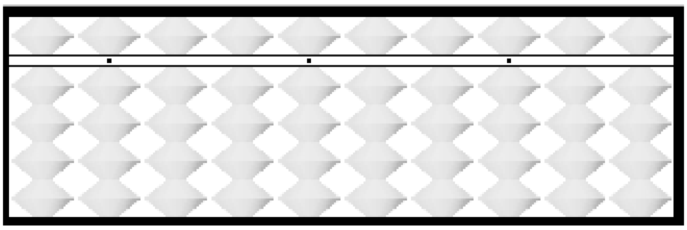


+ 3 =



Proveď na počítadle tyto součty:

2 + 2 3 + 2 2 + 4 3 + 6

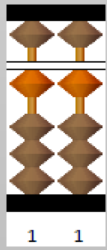


Proč to tak je, …
Tato operace je přechodem přes pětku. Potřebuji přidat 3 kameny, ale volné mám pouze dva. Přičítám 3 a zjistím kolik zbývá do 5 = zbývají 2. Dva kameny tedy odeberu a jeden pětkový kámen přidám. (-2 + 5 = 3)

3

Sčítání se provádí přidáním daného počtu kamenů. Může se ale stát, že nebudu mít dostatek kamenů pro přidání:

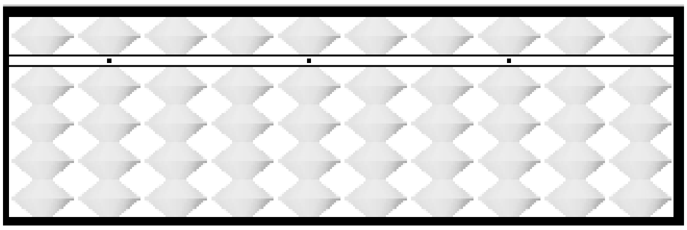
+ 9 =



Proč to tak je, ...
Při přenosu do vyššího řádu, tedy přechod přes desítku se provádí stejným způsobem. Potřebuji přidat 9 kamenů, ale volné mám pouze dva. Přičítám 9 a zjistím kolik zbývá do 10 = zbývá 1. Jeden kamen tedy odeberu a jeden desítkový (tj. kámen vyššího řádu) kámen přidám. (-1 + 10 = 9)

Proveď na počítadle tyto součty:

6 + 5   9 + 3   15 + 7   39 + 9



4

Při sčítání víceciferných čísel se vždy postupuje od cifry nejvyššího řádu.

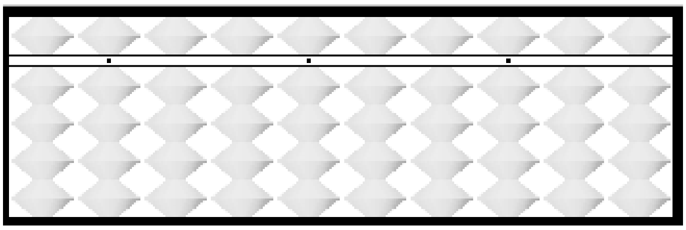
+ 13 =
(nejdříve přičteme 1 desítku, +10)

+ 3 =
(poté přičteme 3 jednotky, +3)

Proč to tak je, ...
Při sčítání víceciferných čísel postupujeme od nejvyššího řádu. V případě potřeby provedeme přenos do vyššího řádu. Nejdříve přičteme jeden desítkový kámen. Dále potřebuji přidat 3 kameny, ale volný mám pouze jeden. Přičítám 3 a zjistím kolik zbývá do 5 = zbývá 2. Dva kameny tedy odeberu a jeden pětkový kámen přidám. (-2 + 5 = 3)

Proveď na počítadle tyto součty:

42 + 15   128+17   352+37



Jak se mi dařilo:

____

____

____

Odčítání na sorobanu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci odčítání na sorobanu.

Očekávaný výstup:

Žák dovede provádět operaci odečítání na sorobonu včetně přenosu do vyšších řádů.

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, soroban nebo počítač s internetem

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

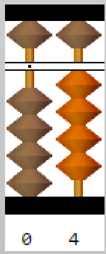
2B

Pracovní list

ODČÍTÁNÍ NA SOROBANU

1

Odčítání provádíme odebráním daného počtu kamenů.



- 3 =

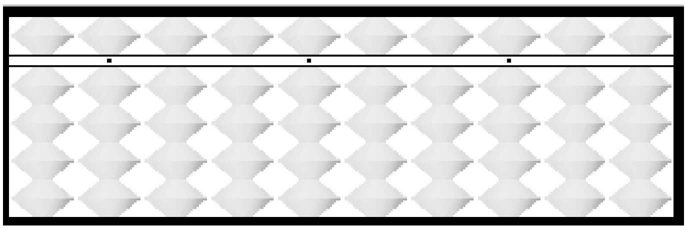
Víš že, …
Simulátor sorobanu dostupný online nalezneš na:

http://www.sorobanexam.or

Víš že, …
Každý státní úředník v Japonsku musí prokazovat dovednost počítat na sorobanu.

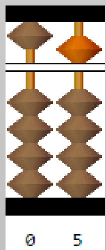
Znázorni na počítadle následující čísla:

4–2 7–1 8–5 12–2

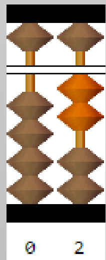


2

Odčítání provádíme odebráním daného počtu kamenů. Může se ale stát, že nebudu mít dostatek kamenů pro odebrání:



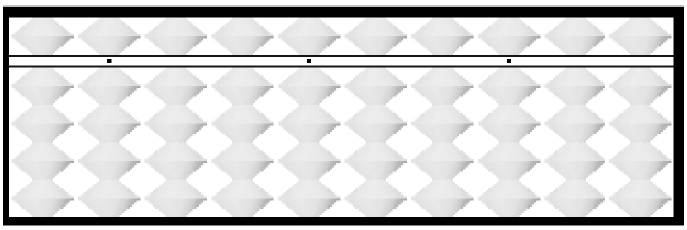
- 3=



Proč to tak je, …
Tato operace je přechodem přes pětku. Potřebuji odebrat 3 kameny, přitom žádné jednotkové kameny nemám k dispozici. Odečítám 3 a zjistím kolik zbývá do 5 = zbývají 2. Dva kameny tedy přidám a jeden pětkový kámen odeberu. (+2 – 5 = -3)

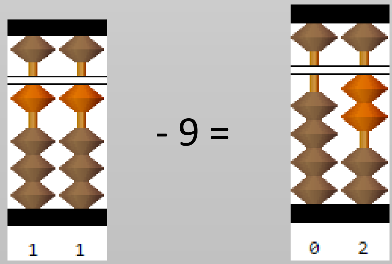
Proveď na počítadle tyto součty:

5–2 7–4 6–3 9–7



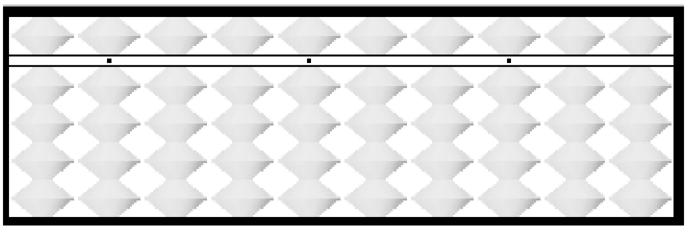
3

Odčítání provádíme odebráním daného počtu kamenů. Může se ale stát, že nebudu mít dostatek kamenů pro odebrání:



Proveď na počítadle tyto součty:

13 – 5   24 – 7   31 – 6   38 – 9

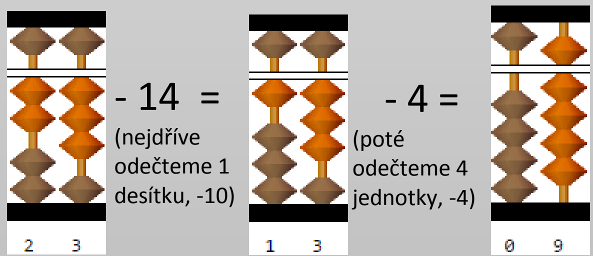


Proč to tak je, …

Přenosu do vyššího řádu, tedy přechod přes desítku se provádím i při odčítání stejným způsobem. Potřebuji odebrat 9 jednotkových kamenů, ale volný mám pouze jeden. Odečítám 9 a zjistím kolik zbývá do 10 = zbývá 1. Jeden kamen tedy přidám a jeden desítkový (tj. kámen vyššího řádu) kámen odeberu. (+1 – 10 = -9)

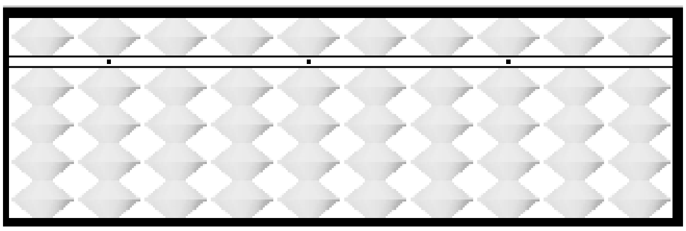
4

Při sčítání víceciferných čísel se vždy postupuje od cifry nejvyššího řádu.



Proveď na počítadle tyto součty:

42–15   128–39   352–124



Proč to tak je, …

Při odečítání víceciferných čísel postupujeme vždy od nejvyššího řádu. Pokud je potřeba, provedeme přenos do vyššího řádu. Nejprve odečtu desítky, poté jednotky. Potřebuji odebrat 4 kameny, ale volné mám pouze 3. Odečítám 4 a zjistím kolik zbývá do 10 = zbývá 6. Přidám tedy jeden pětkový a jeden jednotkový kámen a jeden desítkový (tj. kámen vyššího řádu) kámen odeberu.

Jak se mi dařilo:

____

____

____

Násobení na sorobanu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci násobení na sorobanu.

Očekávaný výstup:

Žák dovede provádět operaci násobení na sorobonu.

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, soroban nebo počítač s internetem

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

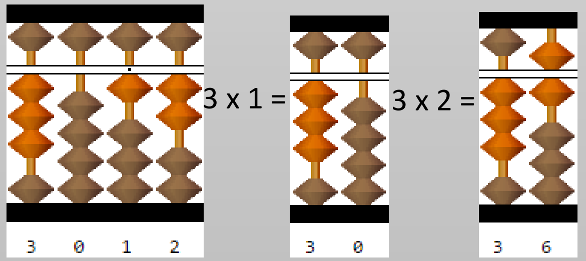
2C

Pracovní list

NÁSOBENÍ NA SOROBANU

1

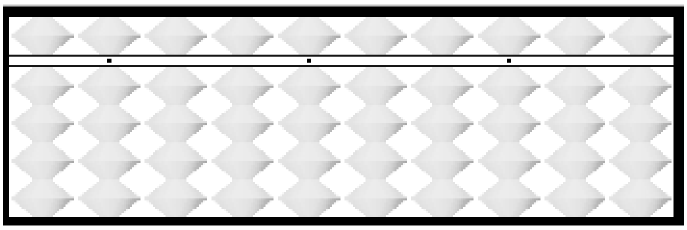
Soroban nám při násobení umožňuje zaznamenávat mezivýsledky a ihned je sčítat. Zadání se zaznamenává do levé části počítadla.



Proč to tak je, …
Od nejvyššího řádu postupně násobíme jednotlivé cifry. Výsledky těchto součinů ihned sčítám s ohledem na řády. Nejprve násobím 3 x 1 a výsledek 3 zaznamenávám do sloupce desítek, dále 3 x 2 = 6, výsledek 6 jednotek přičítám k předchozímu výsledku součinu.

Proveď na počítadle tyto součiny:

4 x 11 2 x 34 31 x 3 21 x 4

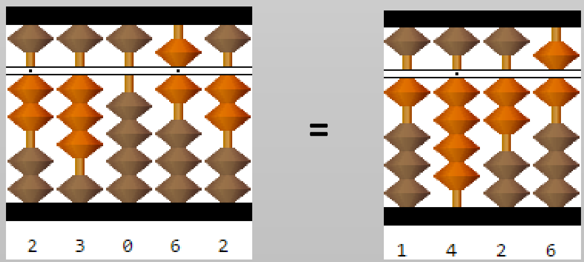


Víš že, …
Násobení a sčítání jsou operace tzv. **komutativní**, to znamená, že nezáleží na pořadí jejich činitelů (členů).

Platí to i pro odčítání a dělení?

2

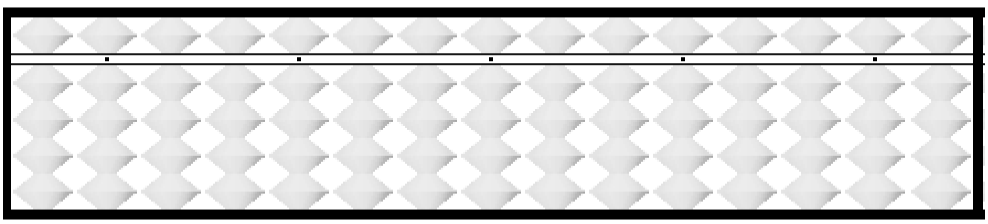
Při víceciferných číslech je postup zcela stejný, jen roste počet jednotlivých součinů, které průběžně sčítáme.



Proč to tak je, …
Od nejvyššího řádu postupně násobíme jednotlivé cifry. Výsledky těchto součinů ihned sčítám s ohledem na řády. Nejprve násobím 2 x 6 (tj. 20x60) a výsledek 12 stovek (1200 = 1 tisícový a 2 stovkové kameny) zaznamenám.
Dále 2 x 2 (20x2) jsou 4 desítky, které přičtu k předchozímu výsledku. 3 x 6 je 18 desítek a poslední součin 3 x 2 je šest jednotek. Všechny výsledky průběžně sčítám v pravé části počítadla.

Proveď na počítadle tyto součiny:

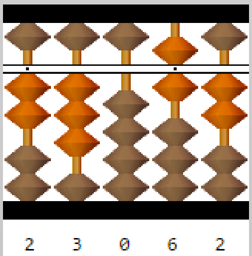
48 x 31 25 x 168 137 x 1 472



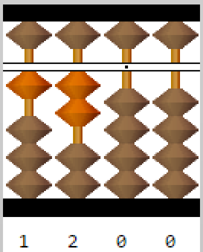
*****

Krok po kroku:

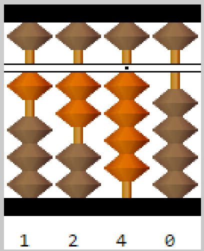
Zadání zaznamenané vlevo počítadla.



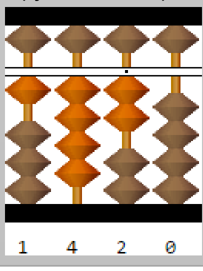
2x6=12 stovek zaznamenáme vpravo.
(tj. 20x60=1200)



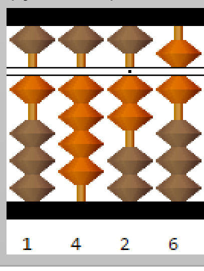
2x2=4 desítky přičteme k předchozímu.
(tj. 20x2=40)



3x6=18 desítek přičteme k předchozímu.
(tj. 3x60=180)



3x2=6 jednotek přičteme k předchozímu.
(tj. 3x2=6)

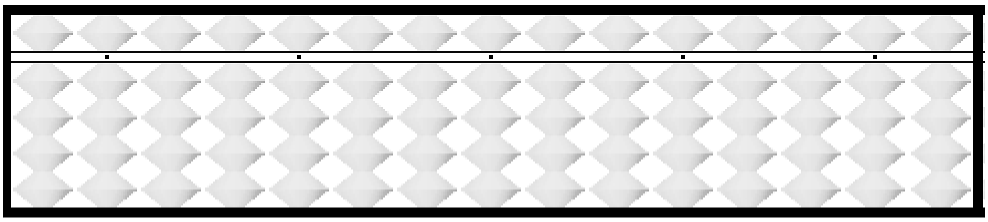


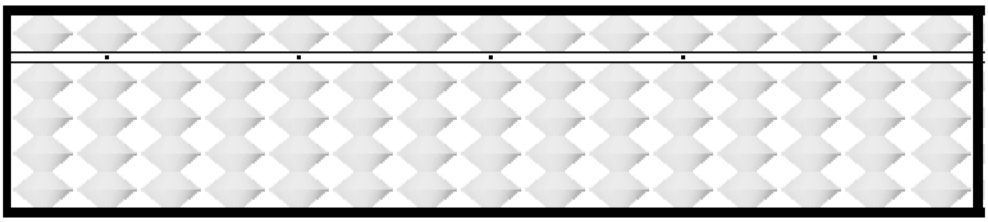
Výsledek =
1200+40+180+6
= 1426

4

Proveď na počítadle tyto součiny:

12 756 x 75 147   **365 789 x 753 654**





Jak se mi dařilo:

____

____

____

Dělení na sorobanu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci dělení na sorobanu.

Očekávaný výstup:

Žák dovede provádět operaci dělení na sorobonu.

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, soroban nebo počítač s internetem

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

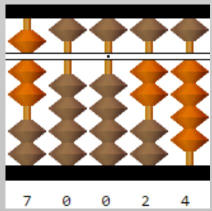
2D

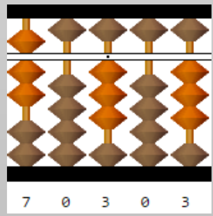
Pracovní list

DĚLENÍ NA SOROBANU

1

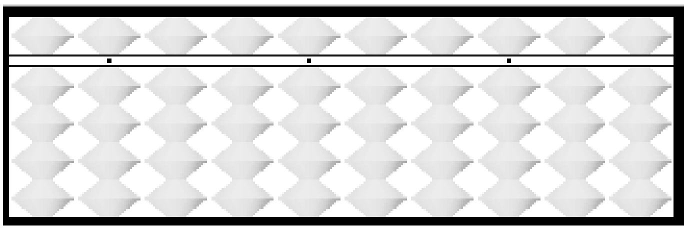
Dělení na sorobanu je složitější operací vyžadující již určitý cvik.

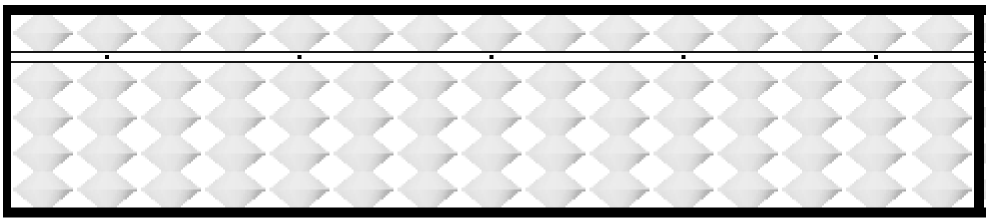




Proveď na počítadle tyto součiny:

231:7 **865:16**





Proč to tak je, …
Dělence zaznamenám vpravo, dělitele vlevo. Provedu celočíselné dělení 24:7=3. Trojku poznamenám doprostřed, násobím trojku dělitelem, 3x7=21 a odečítám od dělence, 24-21=3. Výsledek je již menší než dělitel, je tedy zbytkem. Výsledek dělení je zaznamenaná trojka uprostřed.

Víš že, …
Dělení bylo ve středověku považováno za jeden z nejobtížnějších matematických úkonů a dovedli jej jen počtářští mistři.

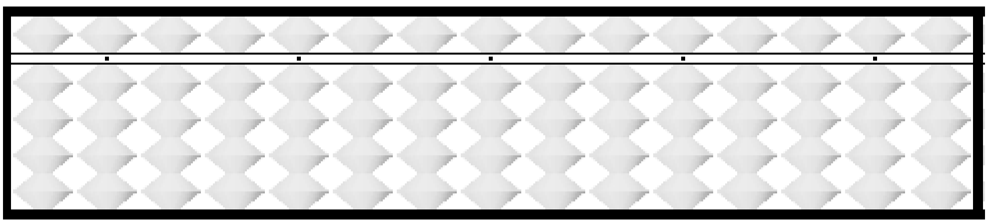
2

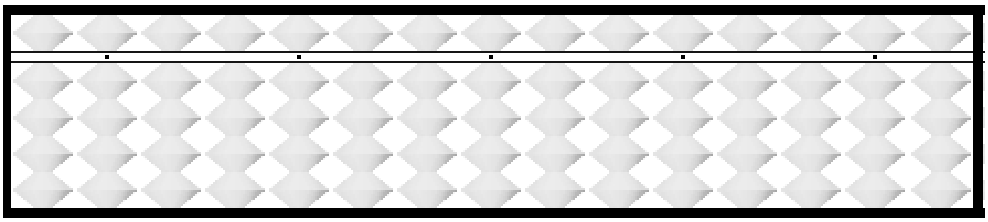
Postup při dělení víceciferných čísel je zcela shodný a opakuje až do okamžiku, kdy je zbytek menší než dělitel.

Proveď na počítadle tyto součiny:

13 762:37 **338 796:152**

.::TIP::.
Pro postup krok po kroku se podívej na druhou stranu pracovního listu.

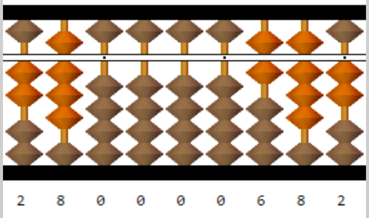




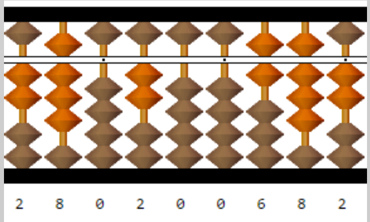
*****

Krok po kroku:

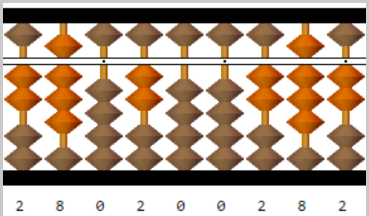
Dělitele zaznamenám na levou, dělence na pravou stranu počítadla.



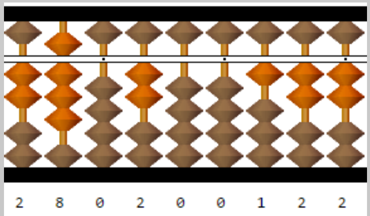
Začínám celočíselným dělením 68:28=2. Dvojku zaznamenám doprostřed.



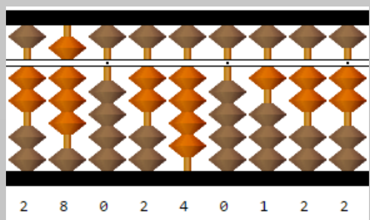
S touto dvojkou postupně násobím dělitele, 2x2=4 a odečítám od nejvyššího řádu děleného čísla, 6-4=2.



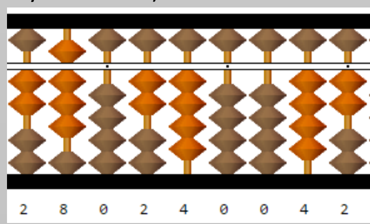
Pokračuji 2x8=16 a odečítám 8-16=2 (přenos do vyššího řádu).



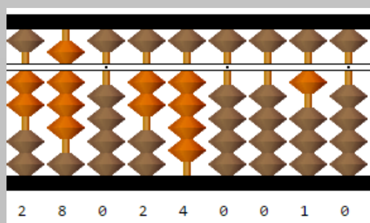
Opět celočíselně dělím 122:28=4. Čtyřka zaznamenám doprostřed.



Pokračuji násobením 4x2=8. Odečítám 2-8=4 (přenos do vyššího řádu).



Poslední násobení 4x8=32. Odečítám 2-32=0 (přenos do vyššího řádu).



V pravé části počítadla mi zůstává zbytek 10. Ve střední části čtu výsledek 24.
= 24 (zb.10)

Jak se mi dařilo:

____

____

____

Sčítání na sčotu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci sčítání na sčotu.

Očekávaný výstup:

Žák dovede vynášet a číst čísla na počítadle; dovede provádět operaci sčítání na sčotu včetně přenosu do vyšších řádů.

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, sčot nebo počítač s internetem

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

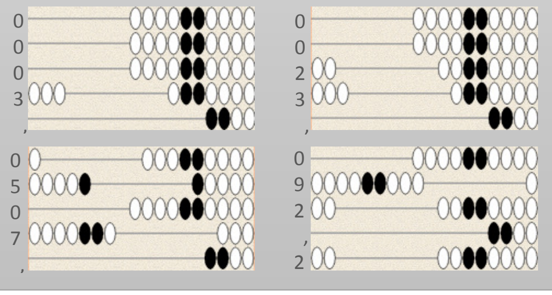
3A

Pracovní list

SČÍTÁNÍ NA SČOTU

1

Čísla se na počítadle znázorňují pomocí kamenů, kdy každý kamen představuje jednotku daného řádu.



Znázorni na počítadle následující čísla:

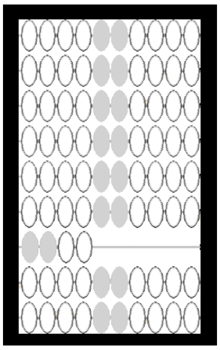
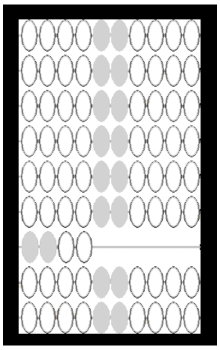
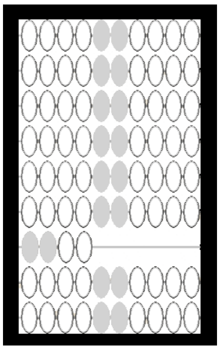
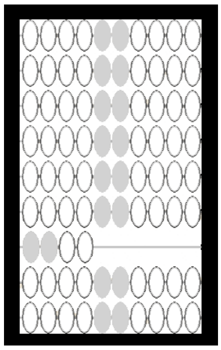
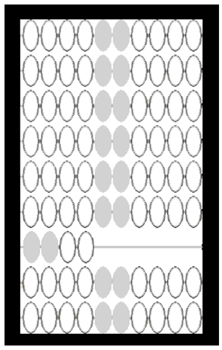
164 **3 762** **362 425** **465,23** **90,03**

Víš že, ...
Simulátor sčotu dostupný online nalezneš na:

www.musilek.eu/michal

Víš že, ...
Tyč pouze se čtyřmi kameny je určena pro počítání se čtvrtinami, to proto, že se ruská mince kopějka rovná 4 poluškám.

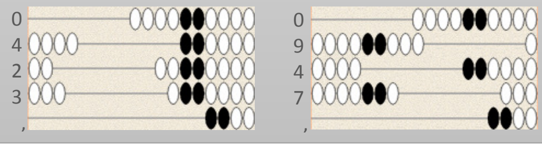
Také ale viditelně nahrazuje desetinou čárku.

2

Sčítání se provádí přidáním daného počtu kamenů.

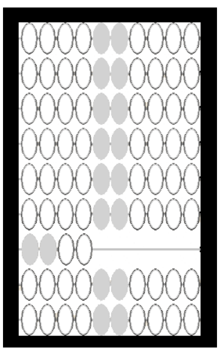
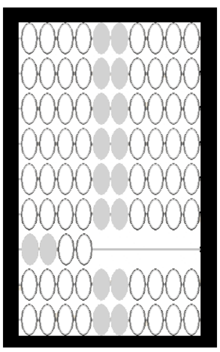
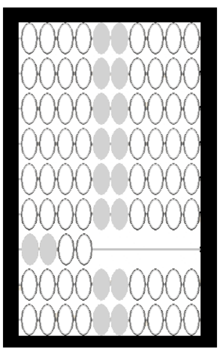
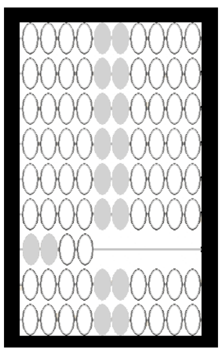
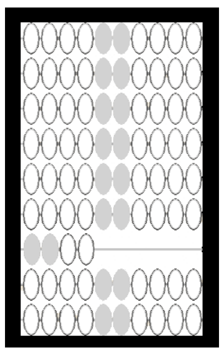
+ 524



Proveď na počítadle tyto součty:

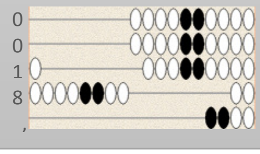
32+47 **567 + 232** **11,21+0,55** **1,45+0,5**

Proč to tak je, ...
Od nejvyššího řádu postupně přidávám kameny k levé straně počítadla. Po přesunu všech kamenů čtu v levé časti počítadla výsledek.

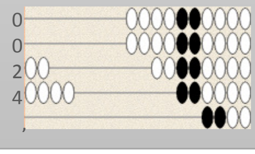






3

Sčítání se provádí přidáním daného počtu kamenů. Může se ale stát, že nebudu mít dostatek kamenů pro přidání:



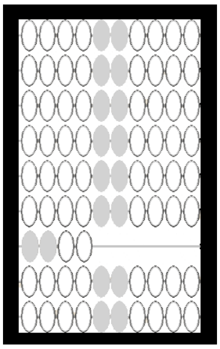
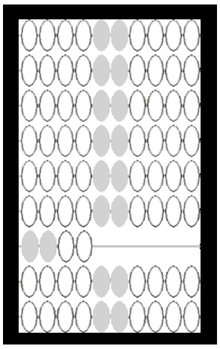
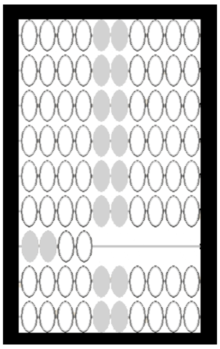
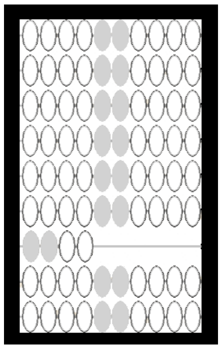
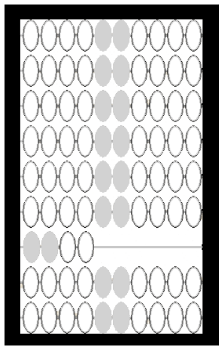
+ 6 =



Proč to tak je, …
Jedná se o přenos do vyššího řádu, tedy přechod přes desítku. Potřebuji přidat 6 kamenů, ale volné mám pouze dva. Přičítám 6 a zjistím kolik zbývá do 10 = zbývá 4. Čtyři kamen tedy odeberu a zároveň jeden desítkový (tj. kámen vyššího řádu) kámen přidám. (-4 + 10 = +6)

Proveď na počítadle tyto součty:

27+15 384+447 354+146 123+8 423

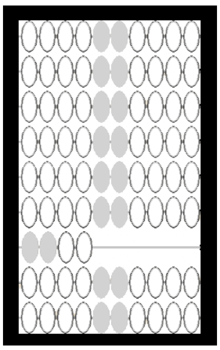
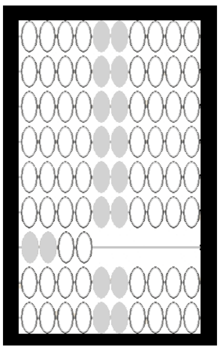
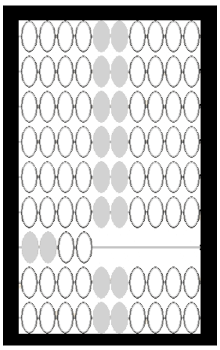
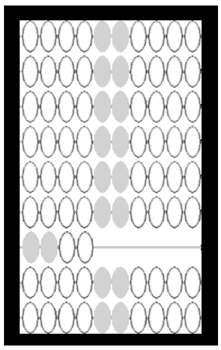
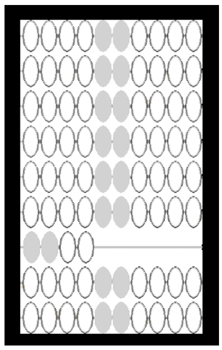






4

Sčítání desetinných čísel je zcela obdobné…

Proveď na počítadle tyto součty:

5,72+0,45 0,32+1,68 99,99+0,2

Jak se mi dařilo:

____

____

____

Odčítání na sčotu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci odčítání na sčotu.

Očekávaný výstup:

Žák dovede provádět operaci odčítání na sčotu včetně přenosu do vyšších řádů.

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, sčot nebo počítač s internetem

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

3B

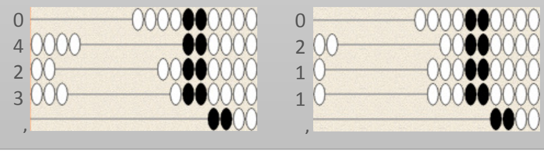
Pracovní list

ODČÍTÁNÍ NA SČOTU

1

Odčítání se provádí postupným odebráním daného počtu kamenů. Vždy začínáme od nejvyššího řádu.

– 212 =



Víš že, …
Simulátor sčotu dostupný online nalezneš na:

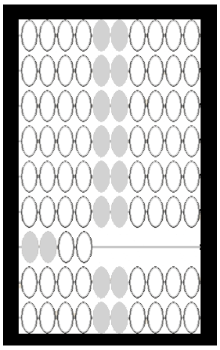
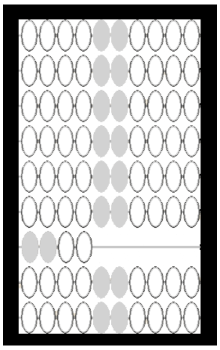
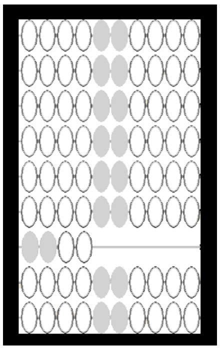
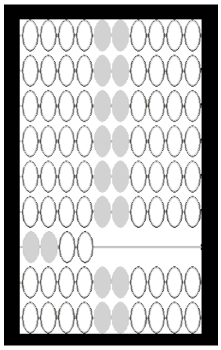
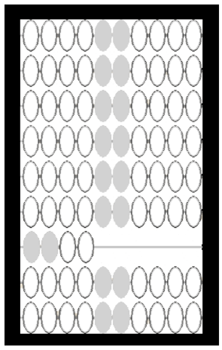
www.musilek.eu/michal

Víš že, …
Předchůdce sčotu do Ruska přivezli čínští obchodníci v průběhu 17. století.

Běžně se sčot používal až do osmdesátých let 20. století.

Proveď na počítadle tyto rozdíly:

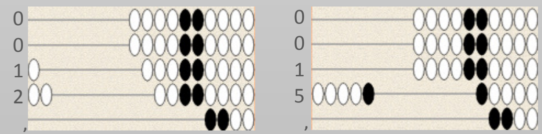
164–32 **74–62** **654–124**

2

Odčítání se provádí odebráním daného počtu kamenů. Může se ale stát, že nebudu mít dostatek kamenů pro odebrání:

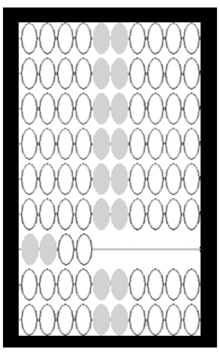
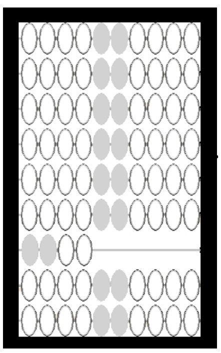
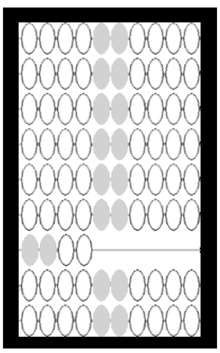
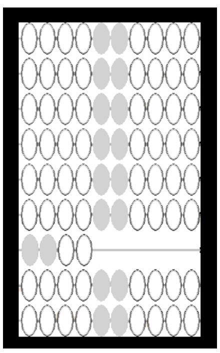
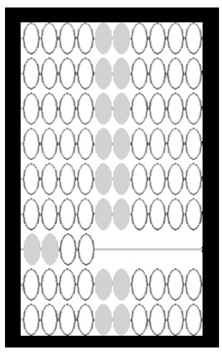
– 7 =



Proveď na počítadle tyto rozdíly:

32–3 **567–9** **54–8**

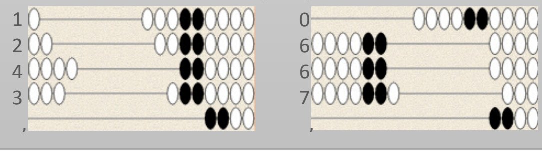
Proč to tak je, …
Jedná se o přenos do vyššího řádu, tedy přechod přes desítku. Potřebuji odebrat 7 kamenů, ale volné mám pouze dva. Odečítám 7, zjistím kolik zbývá do 10 = zbývá 3. Tři kameny tedy přidám a zároveň jeden desítkový (tj. kámen vyššího řádu) kámen odeberu. (–4 + 10 = +6)

3

Odčítání se provádí odebráním daného počtu kamenů. Při víceciferných číslech postupuji od nejvyššího řádu:

–576 =



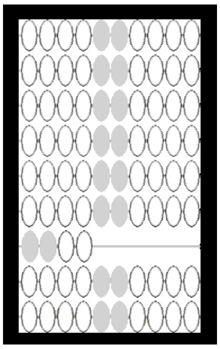
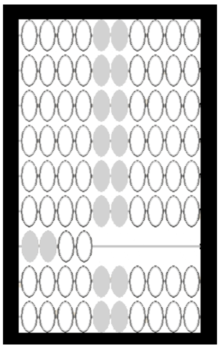
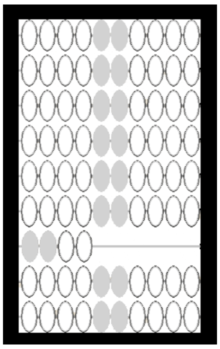
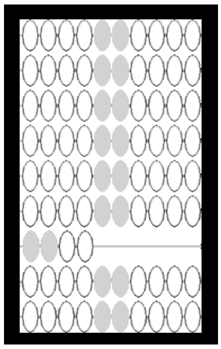
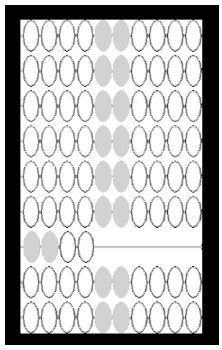
Proč to tak je, …

Od nejvyššího řádu postupně provádím odečítání, tedy 2–5=7 (s přenosem do vyššího řádu), dále 4–7=7 a 3–6=7 (také s přenosem do vyšších řádů).

V levé části počítadla čtu konečný výsledek **=667**

Proveď na počítadle tyto rozdíly:

27–15 384–199 354–146 8 423–768

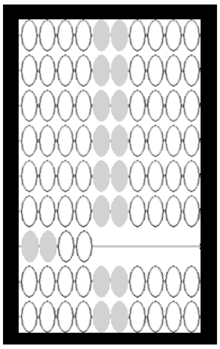
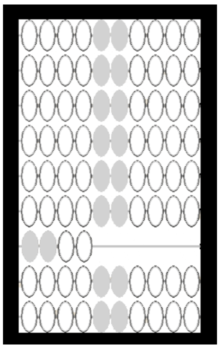
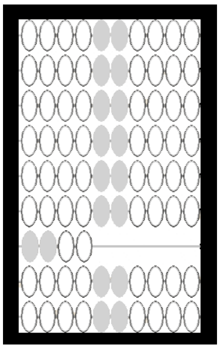
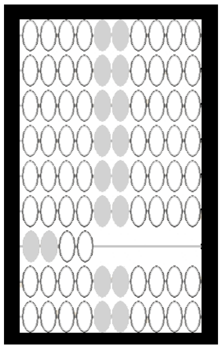
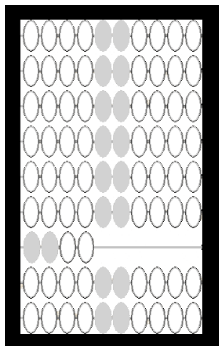






4

Odčítání desetinných čísel je zcela obdobné…

Proveď na počítadle tyto rozdíly:

5,12–0,45 2,32–1,68 1–0,82

Jak se mi dařilo:

____

____

____

Násobení na sčotu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci násobení na sčotu.

Schopnost orientovat se v matematických tabulkách.

Očekávaný výstup:

Žák dovede provádět operaci násobení na sčotu včetně násobení s pomocí tabulek

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, sčot nebo počítač s internetem, tabulky.

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

3C

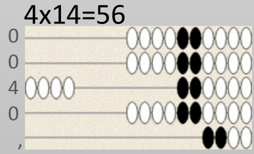
Pracovní list

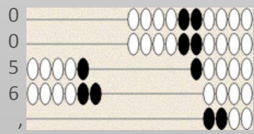
NÁSOBENÍ NA SČOTU

1

Postupné násobení se provádí postupným sčítáním jednotlivých součinů.

4x14=56





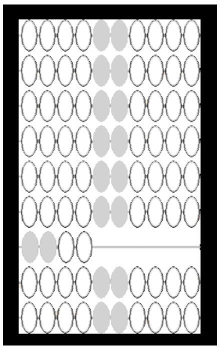
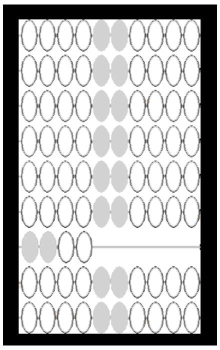
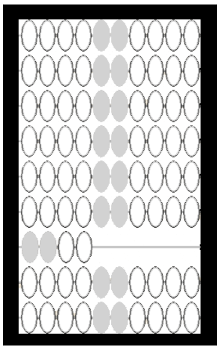
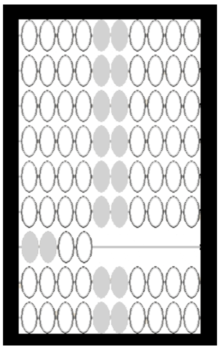
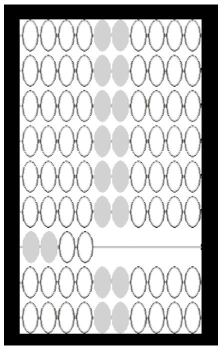
Proveď na počítadle tyto rozdíly:

7x25 3x869 48x3 752x8

Proč to tak je, …

Postupně od nejvyššího řádu provádím součiny a na sčotu je sčítám. 4x1=4 desítky (tj. 4x10=40) a zanesu je na počítadlo. Další součin 4x4=16 jednotek, přičtu je k předchozím součinům.

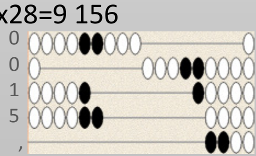
V levé části počítadla čtu výsledek **=56.**

2

Postupné násobení víceciferných čísel se nijak neliší, všechny součiny postupně sčítáme s ohledem na příslušné řády:

327x28=9 156



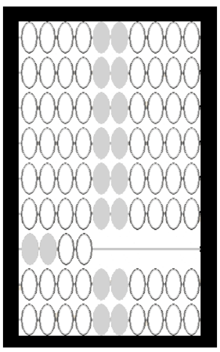
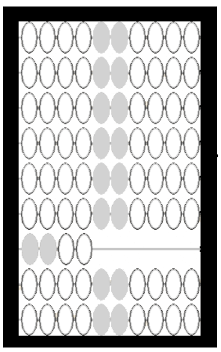
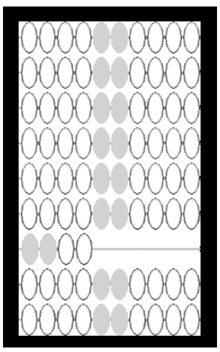
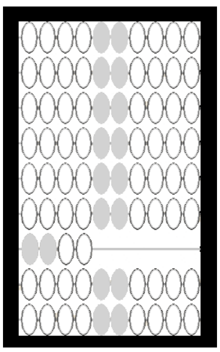
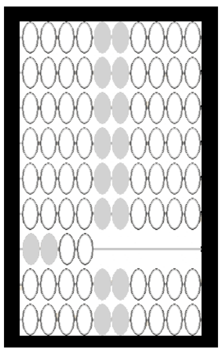
Proveď na počítadle tyto rozdíly:

68x751 159x3 495 12 481x746 823

Proč to tak je, …

Krok po kroku sčítám jednotlivé součiny. 3x2=6 tisícovek, přičítám další součiny 3x8=24 stovek, 2x2=4 stovky, 2x8=16 desítek, 7x2=14 desítek a 7x8=56 jednotek.

Po sečtení všech součinů čtu v levé části počítadla výsledek **=9 156.**

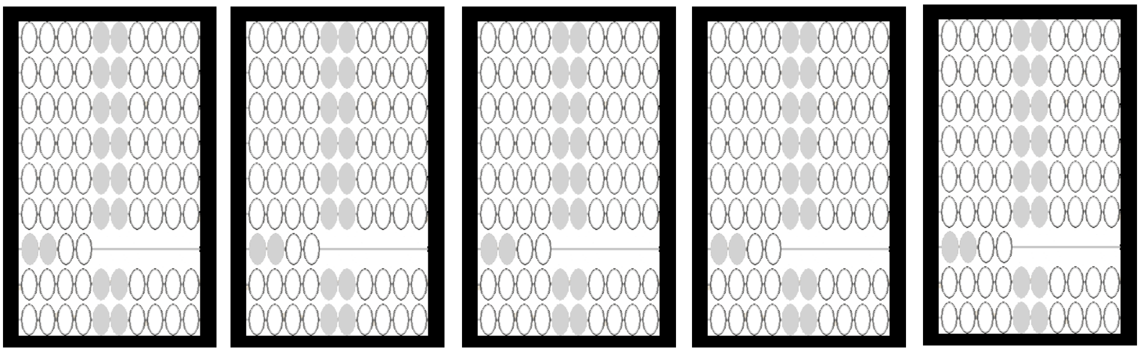






3

Násobení desetinných čísel je zcela obdobné…

Proveď na počítadle tyto součiny:

2,7x14,6 **0,14x74** **6,05x77,8** **8,59x64**

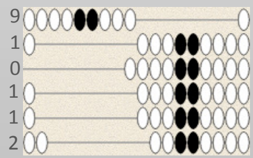


4

Pro urychlení násobení na sčotu se často používali početní tabulky.

3 824x238=910 112

3 824x2=7 348
3 824x3=11 472
3 824x8=30 592

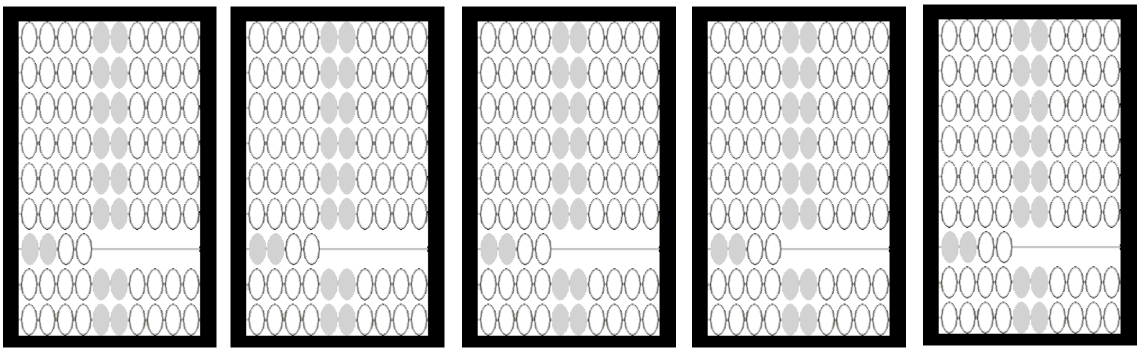


Proč to tak je, …
V tabulkách vyhledám vhodnější z činitelů, 3 824. Následně dohledávám násobky a s ohledem na jejich řády je sčítám na počítadle.

Po sečtení všech součinů čtu v levé části počítadla výsledek **=910 112.**

Proveď na počítadle tyto rozdíly:

4 852x965 **2 649x3 446** **8 623x79 461**



Jak se mi dařilo:

____

____

____

Dělení na sčotu

Cíl pracovního listu:

Zvládnout operaci dělení na sčotu.

Schopnost orientovat se v matematických tabulkách.

Očekávaný výstup:

Žák dovede provádět operaci dělení na sčotu včetně dělení s pomocí tabulek

Prostředky a pomůcky:

Pracovní list, sčot nebo počítač s internetem, tabulky.

Metodický a didaktický komentář:

Žákům rozdáme pracovní list. Žák postupuje dle pracovního listu a provádí operace na počítadle nebo na počítačovém simulátoru.

Předpokládané znalosti:

základní znalosti a dovednosti v oboru celých čísel

Klíčové kompetence:

Kompetence k řešení problému – žák samostatně řeší problémy, zvolí vhodný způsob řešení problematiky, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problému, případně najde a opraví svou chybu

Kompetence k učení – operuje s termíny, znaky a symboly; učí se novým postupům

Kompetence pracovní **–** používá účinně materiály a nástroje; vhodně organizuji svoji práci

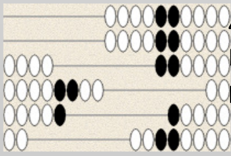
3D

Pracovní list

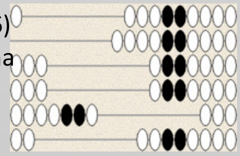
DĚLENÍ NA SČOTU

1

Postupné násobení se provádí postupným sčítáním jednotlivých součinů.

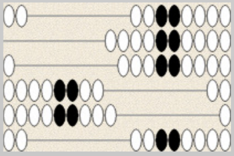


4 852:148=32 (zb. 116)
Dělence zaneseme na počítadlo.



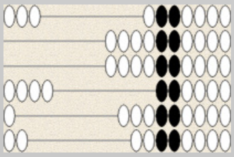
Od nejvyššího řádu postupně odečítáme dělitele. Každé odečtení zaznamenáme na nejvyšší tyči počítadla.

4 852
–1 48
3 372



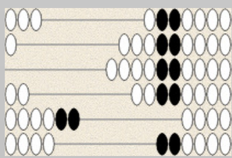
Opakuji odečtení a znamenám jej.

3 372
–1 48
1 892



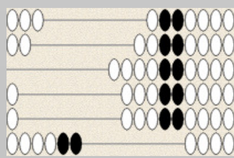
Opakuji odečtení a znamenám jej na nejvyšší tyči.

1 892
–1 48
412



Odečítám dělitele o řád zmenšeného. Odčítání zaznamenám o řád níže.

412
–148
264



Poslední zbytek je již menší než dělitel. Na horních tyčích čtu výsledek **=32 (zb. 116)**

264
–148
116

Pokud chci vyjádřit výsledek jako desetinné číslo mohu pokračovat v dělení.

Dělitele opět o řád zmenším a pokračuji v odčítání. Odčítání zaznamenám o řád níž.

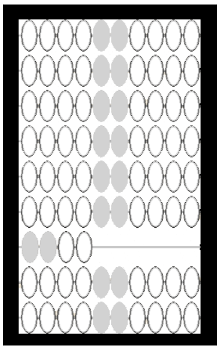
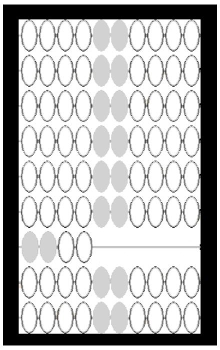
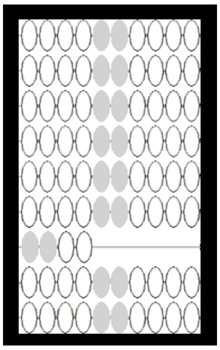
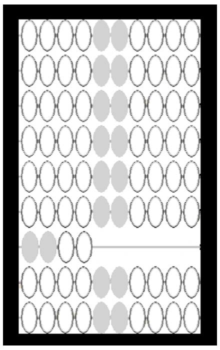
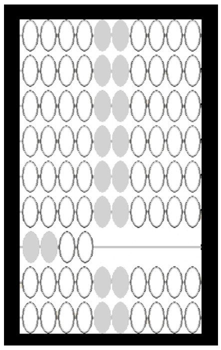
116
–14,8
101,2

A pokračuji až do požadované přesnosti výsledku, nebo kdy bude zbytek nula.

2

Proveď na počítadle tyto podíly:

27 654:716 **852 167:475**

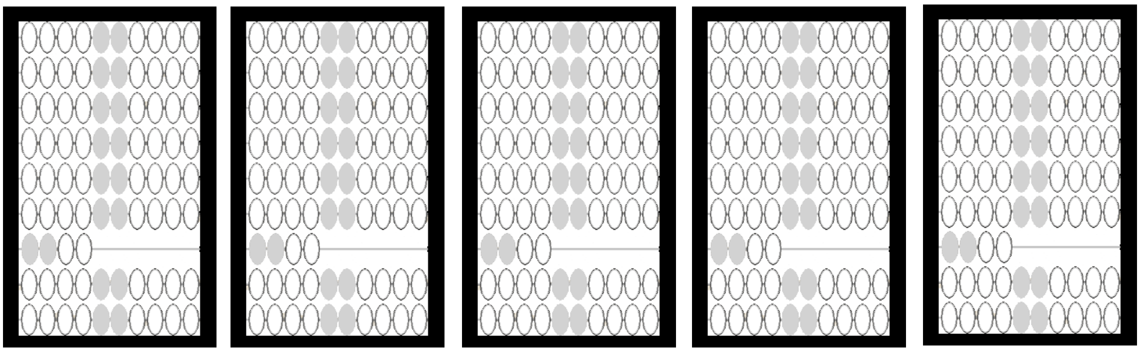






3

Dělení desetinných čísel je zcela obdobné…

Proveď na počítadle tyto podíly:

486,3:42,7 **0,84:0,21** **6 514:378,21**

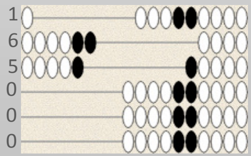


4

Pro urychlení dělení na sčotu se často používali početní tabulky.

3 927:238=16,5

3 927	1 547	119,0
−2 38	−1 428	−119,0
1 547	119	0

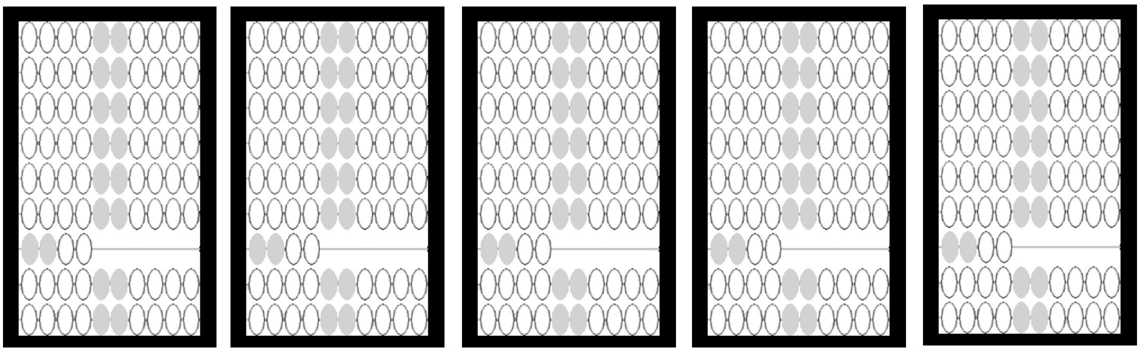


Proč to tak je, …
V tabulkách vyhledám dělitele 238. Od nejvyššího řádu poté postupně odečítáme násobky dělitelů od dělence nebo jeho zbytku. Násobky zaznamenám na nejvyšší tyče počítadla.

Po sečtení všech součinů čtu na nejvyšších tyčích výsledek **=16,5**

Proveď na počítadle tyto podíly:

254 852:1 965 **1 768 623:79 461,5**



Jak se mi dařilo:

____

____

____

Závěr

Cílem teoretické části diplomové práce bylo popsat historický vývoj počítadel a dalších mechanických pomůcek umožňujících nebo usnadňujících provádění základních početních operací. Teoretická část byla členěna do 4 hlavních kapitol věnujících se početním pomůckám v historii a vzestupu algoritmiků v středozápadní Evropě, primitivním početními pomůckám jako jsou vrubovky, či provazce a způsoby jejich používání. Všechny používané početní pomůcky byly popsány a byly prezentovány způsoby provádění základních početních operací s důrazem na čínský suanpan, japonský soroban a ruský sčot.

Poslední kapitola teoretické části je věnována revolučnímu objevu v historii matematiky, ale i výpočetní techniky, logaritmům. Kromě historického vývoje objevu je prakticky předvedena práce s logaritmickými tabulkami a provádění výpočtů pomocí logaritmického pravítka.

V empirické části práce se snažím potvrdit dvě hlavní hypotézy:

- Povědomí veřejnosti o způsobech použití počítadel je nízké.
- Počítadla a početní pomůcky nejsou ve výuce na základních a středních školách využívány.

Hypotézy jsou ověřoval pomocí dotazníkového šetření v celkem 29 školách v České i Slovenské republice a strukturovaném rozhovoru s dospělou veřejností ve třech městech – Jihlavě Hradci Králové a Košicích. Výsledky obou průzkumů prokázaly pravdivost hypotéz. Pojem abakus znalo pouze 5 procent dotázaných respondentů a s použitím některé z početních pomůcek se setkalo 17 procent respondentů. Počítadla do své výuky nějakou formou zařazuje 27 procent dotázaných základních škol 18% škol středních.

Praktická část práce je tvořena devíti pracovními listy, které žáky seznamují s historií počítadel a početních pomůcek, a především se základní obsluhou a početními operaci počítadel soroban a sčot.

Vytyčené cíle ve všech částech práce se mi podařilo splnit a obě dané hypotézy jsem potvrdil.

Jmenný rejstřík

Seznam obrázků

Seznam grafů

Seznam příloh

Citovaná literatura

Balada, František. 1959. *Z dějin elementární matematiky.* Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1959.

Balková, Ľubomíra a Škarada, Čeněk. 2012. Násobíme chytře? *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 57, 2012, 3.

Bečvář, Jindřich. 2001. *Matematika ve střední Evropě.* Praha : Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-232-5.

Bečvářová, Martina. 2001. Středověké početní algoritmy. [autor knihy] Jindřich Bečvář. *Matematika ve středověké Evropě.* Praha : Prometherus, 2001.

Bürgi, Jost. 1620. Aritmetische vnd Geometrische Progress Tabulen, sambt gründlichem vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen, vnd verstanden werden sol. Praha, 1620.

Čihák, Vlastimil. 1959. *Logaritmické pravítko stavebního technika.* 2., přeprac. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1959.

Folta, Jaroslav. 2004. *Dějiny matematika I.* Praha : Národní technické muzeum Praha, 2004. ISBN 80-239-4031-7.

Francová, Ladislava. 2010. *Vývoj číselných soustav.* Hradec Králové : Centrum talentů M&F&I, 2010.

Gullberg, Jan. 1997. *Mathematics: From the Birth of Numbers.* New York : W.W. Norten, 1997. ISBN 9780393040029.

Hoppe, Jiří. 1952. *Kancelářské počty na sčotu.* Praha : Průmyslové vydavatelství, 1952.

Hudeček, Jiří. 2008. *Matematika v devíti kapitolách.* Praha : Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008.

Chabert, Jean-luc. 1999. *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip.* Berlin : Springer-Verlag, 1999. 978-3-540-63369-3.

Ifrah, George. 1989. *Universalgeschichte der Zahlen.* New York : Campus, 1989. ISBN 9783593341927.

Juškevič, Adolf Pavlovič. 1978. *Dějiny matematiky ve středověku.* Praha : Academia, 1978.

Kepler, Johanes. 1627. Rudolphine tabulae. Praha, 1627.

Kolman, Arnošt. 1968. *Dějiny matematiky ve starověku.* Praha : Academia, 1968.

Kreihansel, Vojtěch. 1950. *Sčot, nejlevnější počítací stroj pro každého.* Praha : Průmyslové vydavatelství, 1950.

Kuřina, František. 2015. *Dítě, škola a matematika.* 2. vydání. Praha : Portál, 2015. 978-80-262-0901-0.

MF, MŠMT, MPO. 2007. Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách. [Online] 12 2007. [Citace: 5. 3 2014.] http://www.msmt.cz/uploads/soubory/zakladni/SP_SBFG_2007_web.pdf.

Mikulčák, Jiří. 2007. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy.* 4. vyd. Praha : Prometheus, 2007.

Naumann, Friedrich. 2009. *Dějiny informatiky.* Praha : Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1730-7.

O'Connor, J. J. a Robertson, E. F. 2010. Burgi biography. *Biography of Jost Burgi.* [Online] School of Mathematics and Statistics, University st. Andrews, Květen 2010. [Citace: 2016. Listopad 18.] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Burgi.html.

Pleskot, Václav. 1960. *Logaritmické pravítko: určeno pro posluchače všech fakult ČVUT.* 1. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1960.

Preclík, Jan. 2001. Počítače: cesta od pravěku do konce 19. století. [autor knihy] Jindřich Bečvář a Eduard Fuchs. *Matematika v proměnách věků II.* Praha : Prometheus, 2001.

SDPTV 4. **1958.** Praha : autor neznámý, 1958, stránky 84-88.

Semendjajev, Konstantin Adoľfovič. 1954. *Logaritmické pravítko: učební pomůcka pro nejširší okruh čtenářů z řad pracujících i školní mládeže.* 1. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1954.

Sigler, L., E. 2002. *Fibonacci's Liber abaci: A Translation into Modern English of Leonardo.* New York : Springer, 2002. ISBN 0-387-95419-8.

The Logarithms and Rules. **Dalakov, Georgi. 2011.** . : ., 2011. History of Computers and Computing, Calculating tools, Logarithms.

Dotazník pro ZŠ

1) Zařazujete použití počítadel do své výuky?

2) Jakým způsobem a v jakém rozsahu je využíváte?

3) Zařazujete počítadla do běžné výuky nebo do rozšiřujících hodin (semináře, kondice, doučování)?

4) Je zařazení počítadel do výuky prospěšné a má smysl?

5) Je pro zařazení počítadel do výuky dostatek prostoru?

Dotazník pro SŠ

1) Využíváte ve své výuky počítadla nebo jiné početní pomůcky?

2) Provádíte ve výuce výpočty s použitím logaritmických pravítek nebo tabulek.

3) Jakým způsobem a v jakém rozsahu je využíváte?

4) Zařazujete tyto početní pomůcky do běžné výuky nebo do rozšiřujících hodin (semináře, kondice, doučování)?

6) Je zařazení počítadel do výuky prospěšné a má smysl?

7) Je pro zařazení počítadel do výuky dostatek prostoru?

Strukturovaný rozhovor pro veřejnost

1) Znáte nějaké počítadlo, na kterém lze provádět výpočty?

2) Znáte pojmy sčot, soroban, suan-pan?

3) Víte, jaké početní operace lze na takovýchto počítadlech provádět?

4) Víte, k čemu slouží logaritmické pravítko?

5) Setkal jste se s logaritmickým pravítkem nebo nějakým jiným počítadlem (ve škole, v zaměstnání atd.)?