



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

## ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

## DERIVACE A INTEGRACE FRAKČNÍHO ŘÁDU V PID REGULÁTORECH POHONŮ S PMSM

FRACTIONAL-ORDER DERIVATIVES AND INTEGRALS IN PID CONTROLLERS OF PMSM DRIVES

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Vít Hromek

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Lukáš Zezula

BRNO 2024

# Bakalářská práce

bakalářský studijní program **Automatizační a měřicí technika**

Ústav automatizace a měřicí techniky

**Student:** Vít Hromek

**ID:** 240349

**Ročník:** 3

**Akademický rok:** 2023/24

**NÁZEV TÉMATU:**

## Derivace a integrace frakčního řádu v PID regulátorech pohonů s PMSM

### POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cílem práce je zlepšit kvalitu regulace proudů a otáček synchronního motoru s permanentními magnety (PMSM) použitím frakčních PID regulátorů.

1. Seznamte se s matematickým modelem a vektorovým řízením PMSM.
2. Vytvořte model vektorově řízeného PMSM v prostředí MATLAB Simulink a provedte návrh parametrů regulátorů proudů a otáček.
3. Seznamte se s přístupy derivace a integrace frakčního řádu, jejich použitím v PID regulaci a metodami ladění parametrů.
4. Namísto klasických PID regulátorů použijte frakční PID a provedte návrh parametrů těchto regulátorů.
5. Seznamte se s kritérii pro hodnocení kvality regulace.
6. Porovnejte kvalitu regulace proudů a otáček pomocí klasických PID a pomocí frakčních PID regulátorů.

### DOPORUČENÁ LITERATURA:

- [1] S. K. Sul, Control of electric machine drive system. Hoboken, N.J.: Wiley-IEEE Press, 2011. ISBN 978-0-470-59079-9.
- [2] P. Shah and S. Agashe, "Review of fractional PID controller," Mechatronics, vol. 38. Elsevier BV, pp. 29–41, Sep. 2016. doi: 10.1016/j.mechatronics.2016.06.005.

**Termín zadání:** 5.2.2024

**Termín odevzdání:** 22.5.2024

**Vedoucí práce:** Ing. Lukáš Zezula

**Ing. Miroslav Jirgl, Ph.D.**  
předseda rady studijního programu

### UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

## **ABSTRAKT**

Tato bakalářská práce se zaměřuje na řízení synchronního motoru s permanentním magnetem (PMSM) frakčním řádem PI regulátoru (FOPI).

Za pomoci vektorového řízení jsou proudové složky odvázeny ("decoupling") a řízeny individuálně. Na tyto proudové složky jsou pak navrženy PI regulátory, které jsou v pozdější části práce nahrazeny FOPI regulátory a je vyhodnocena kvalita regulace za pomoci kvadratického integrálního kritéria a ITAE kritéria. Obdobně je navržena regulátor frakčního řádu i pro regulaci otáček.

Poslední část práce je zaměřena na vykreslení výsledků pro různé parametry.

Ke zlepšení kvality regulace proudů a otáček za pomoci frakčního řádu oproti klasickému regulátoru nedošlo.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Permanentní magnetický synchronní motor (PMSM), Vektorové řízení, Frakční PID regulátor (FOPID), MATLAB Simulink, Regulace proudu, Regulace otáček, Matematické modelování, Integrace frakčního řádu, Kvalita regulace

## **ABSTRACT**

This bachelor thesis focuses on the control of a permanent magnet synchronous motor (PMSM) with a fractional order PI controller (FOPI).

Using vector control, the current components are decoupled ("decoupling") and controlled individually. PI controllers are then designed on these current components, which are replaced by FOPI controllers in the later part of the paper, and the quality of the control is evaluated using the quadratic integral criterion and the ITAE criterion. Similarly, a fractional order controller is also used for speed control.

The last part of the work is focused on plotting the results for different parameters.

There is no improvement in the quality of current and speed control using fractional order controller over the conventional controller.

## **KEYWORDS**

Permanent magnet synchronous motor (PMSM), Vector control, Fractional PID controller (FOPID), MATLAB Simulink, Current control, Speed control, Mathematical modeling, Fractional-order integration, Quality of control,

HROMEK, Vít. *Derivace a integrace frakčního řádu v PID regulátorech pohonů s PMSM*.  
Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a ko-  
munikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2024. Vedoucí práce:  
Ing. Lukáš Zezula

## Prohlášení autora o původnosti díla

<b>Jméno a příjmení autora:</b>	Vít Hromek
<b>VUT ID autora:</b>	240349
<b>Typ práce:</b>	Bakalářská práce
<b>Akademický rok:</b>	2023/24
<b>Téma závěrečné práce:</b>	Derivace a integrace frakčního řádu v PID regulátorech pohonů s PMSM

Prohlašuji, že svou závěrečnou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucí/ho závěrečné práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené závěrečné práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této závěrečné práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

podpis autora\*

---

\*Autor podepisuje pouze v tištěné verzi.

## PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Lukáši Zedulovi za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Modelování</b>	<b>10</b>
1.1 Matematický model PMSM . . . . .	10
1.2 Přenos proudové smyčky dynamického systému . . . . .	13
<b>2 Návrhy regulátorů</b>	<b>19</b>
2.1 Návrh regulátoru proudové smyčky . . . . .	19
2.2 Průběhy regulované proudové smyčky . . . . .	21
2.3 Návrh regulátoru otáček . . . . .	22
2.4 Průběhy regulované otáčkové smyčky . . . . .	24
<b>3 Frakční řád PID</b>	<b>27</b>
3.1 Úvod do počtů s frakčními řády . . . . .	27
3.2 Metody ladění PID regulátorů s frakčním řádem . . . . .	28
3.3 Použitý nástroj FOMCON . . . . .	29
3.4 Implementace FOPI regulátorů a hodnocení kvality regulace . . . . .	30
3.5 Regulace otáček frakčním řádem . . . . .	30
3.6 Regulace proudové složky Q frakčním řádem . . . . .	33
3.7 Regulace proudové složky D frakčním řádem . . . . .	36
3.8 Výsledky netypického signálu . . . . .	39
<b>Závěr</b>	<b>44</b>
<b>Literatura</b>	<b>45</b>

# Seznam obrázků

1.1	Model PMSM realizovaný v prostředí MATLAB Simulink. . . . .	12
1.2	Seznam parametrů simulovaného motoru . . . . .	12
1.3	Schéma zpětnovazební proudové smyčky . . . . .	14
1.4	Maticový regulátor proudů. . . . .	15
1.5	Vlivy změn parametrů $R_s, L_d$ a $L_q$ na průběhy proudových složek při skoku $i_q$ . . . . .	17
1.6	Vlivy změn parametrů $R_s, L_d$ a $L_q$ na průběhy proudových složek při skoku $i_d$ . . . . .	18
2.1	Reakce proudové smyčky na jednotkový skok $i_d$ složky o velikosti 50 A	21
2.2	Reakce proudové smyčky na jednotkový skok $i_q$ složky o velikosti 50 A	22
2.3	Schéma zpětnovazební otáčkové smyčky . . . . .	23
2.4	Okno nastavení v nástroji Control System Designer . . . . .	24
2.5	Odezva systému na požadavky $\omega_e$ rovno 500, 1000 a 1500 rad/s. . . . .	25
2.6	Clamping antiwindup zapojení. . . . .	25
2.7	Detail grafu 2.5 . . . . .	26
3.1	Zobrazení průběhu v celém čase a hodnotovém rozsahu . . . . .	31
3.2	Detailní zobrazení přechodného děje z obrázku 3.1 . . . . .	32
3.3	Zobrazení kvality regulace pro jednotlivé $\lambda$ . . . . .	33
3.4	Zobrazení průběhu v čase do pěti milisekund a v plném hodnotovém rozsahu . . . . .	33
3.5	Detailní zobrazení přechodného děje z obrázku 3.4 . . . . .	34
3.6	Detailní zobrazení přechodného děje pro delší časový rozsah . . . . .	35
3.7	Zobrazení kvality regulace pro jednotlivé $\lambda$ . . . . .	35
3.8	Zobrazení průběhu Q složky v celém čase a hodnotovém rozsahu . . . . .	36
3.9	Zobrazení průběhu v celém čase a hodnotovém rozsahu . . . . .	37
3.10	Detailní zobrazení přechodného děje z obrázku 3.9 . . . . .	38
3.11	Zobrazení kvality regulace pro jednotlivé $\lambda$ . . . . .	39
3.12	Zobrazení celého průběhu - netypický signál . . . . .	39
3.13	Detailní zobrazení v čase 0.5 s - netypický signál . . . . .	40
3.14	Detailní zobrazení v čase 1 s - netypický signál . . . . .	40
3.15	Detailní zobrazení v čase 1.5 s - netypický signál . . . . .	41
3.16	Detailní zobrazení v čase 3.5 s - netypický signál . . . . .	41
3.17	Detailní zobrazení v čase 4.5 s - netypický signál . . . . .	42
3.18	Detailní zobrazení v čase 6 s - netypický signál . . . . .	42
3.19	Kvalita regulace - netypický signál . . . . .	43



# Úvod

Elektromotory jsou velmi komplexní a komplikované systémy, které mají mnoho jak řídicích, tak poruchových vstupů, které je snaha simulovat. Mezi jedny z hlavních poruchových faktorů, které jsou řešeny i v této práci, jsou například parazitní indukčnosti cívek, které vznikají samotnou rotací motoru.

Synchronní motory s permanentními magnety (PMSM) jsou jednou z klíčových technologií zejména v elektromobilitě, a to z důvodu jejich vysoké účinnosti, výkonu a vynikajících dynamických vlastností.

Mezi jedny z možných přístupů řízení patří tzv. "vektorové" řízení, známé také jako FOC (Field-Oriented Control), které umožňuje přesnou regulaci točivého momentu a rychlosti motoru. Třífázové proudy elektromotorů jsou transformovány do dvoufázového systému, což zjednodušuje jejich řízení. FOC rozděluje proudy do dvou složek: magnetizační  $i_d$  a točivého momentu  $i_q$ , což umožňuje jejich nezávislou regulaci.

Řízení elektromotorů je stále aktuální téma a neustále dochází k objevům nových přístupů řízení těchto motorů. Pro kvalitní řízení je třeba dobře nastavený regulátor, který kompenzuje poruchy. Existuje řada typů regulátorů, avšak mezi základní typy regulátorů pro spojitě řízení patří regulátory P (proporční složka), PI (proporční a integrační složky) a PID (proporční, integrační a derivační složka).

Jednou z moderních metod řízení je řízení frakčním řádem PID (FOPID) regulátorů, které je v této práci popsáno a srovnáno s řízením pomocí klasických, tedy celočíselným, PID regulátorů.

Cíle práce jsou rozděleny do tří částí. První část práce se zabývá seznámením a vytvořením matematického modelu PMSM v prostředí MATLAB Simulink, které je řízeno pomocí vektorového řízení. Druhá část je věnována návrhům regulátorů proudových složek D a Q, a návrhem regulátoru otáček. V třetí části je pak popsán frakční řád, jeho použití v PID regulátorech a metody ladění. Dále jsou zde implementovány regulátory s frakčním řádem, seznámení s hodnocením kvality regulace a porovnání výsledků regulátorů frakčních řádů s regulátory klasických řádů.

# 1 Modelování

V této části je popsán úvod do problematiky modelování synchronního motoru s permanentními magnety. Při tvorbě matematického modelu PMSM jsou uvažovány následující zjednodušující předpoklady, které Neborak definoval v [2] jako:

- Průběh magnetické indukce ve vzduchové mezeře je sinusový
- Motor je symetrický: odpor, indukčnosti a příspěvky od permanentních magnetů jsou totožné v každé fázi
- Ztráty v železe jsou zanedbány
- Tlumící účinky materiálu rotoru se zanedbávají
- Nulový vodič není připojen

Následující sekce popisuje matematický model PMSM v časové doméně.

## 1.1 Matematický model PMSM

Napěťové rovnice popisující chování PMSM v referenčním rámci rotoru zmiňuje Sul v [1] jako:

$$\begin{aligned}u_d &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_e L_q i_q \\u_q &= R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_e L_d i_d + \lambda_{pm} \omega_e,\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde:

$u_d, u_q$	[V]	napětí v referenčním rámci rotoru d-q
$i_d, i_q$	[A]	proudy v referenčním rámci rotoru d-q
$R_s$	[ $\Omega$ ]	odpor statorové fáze
$L_d, L_q$	[H]	indukčnosti v referenčním rámci rotoru d-q
$\lambda_{pm}$	[Wb]	tok od permanentních magnetů
$\omega_e$	[rad/s]	elektrická úhlová rychlost.
$t$	[s]	čas

Soubor rovnic (1.1) lze zapsat ve tvaru (1.2), ve kterém jsou osamostatněny derivace proudů:

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{u_d + \omega_e L_q i_q - R_s i_d}{L_d} \quad \frac{di_q}{dt} = \frac{u_q - \omega_e L_d i_d - R_s i_q - \omega_e \lambda_{pm}}{L_q}.\tag{1.2}$$

Magnetické toky od přímé a kvadraturní složky proudu lze poté vyjádřit jako:

$$\lambda_d = L_d i_d + \lambda_{pm} \quad \lambda_q = L_q i_q.\tag{1.3}$$

Rovnice popisující mechanické chování PMSM (převod proudů na točivý moment a moment na úhlovou rychlost) lze poté vyjádřit jako:

$$T_e = \frac{3}{2}Pp(\lambda_{pm}i_q + (L_d - L_q)i_d i_q) \quad J \frac{d\omega_m}{dt} = T_e - T_{load} \quad (1.4)$$

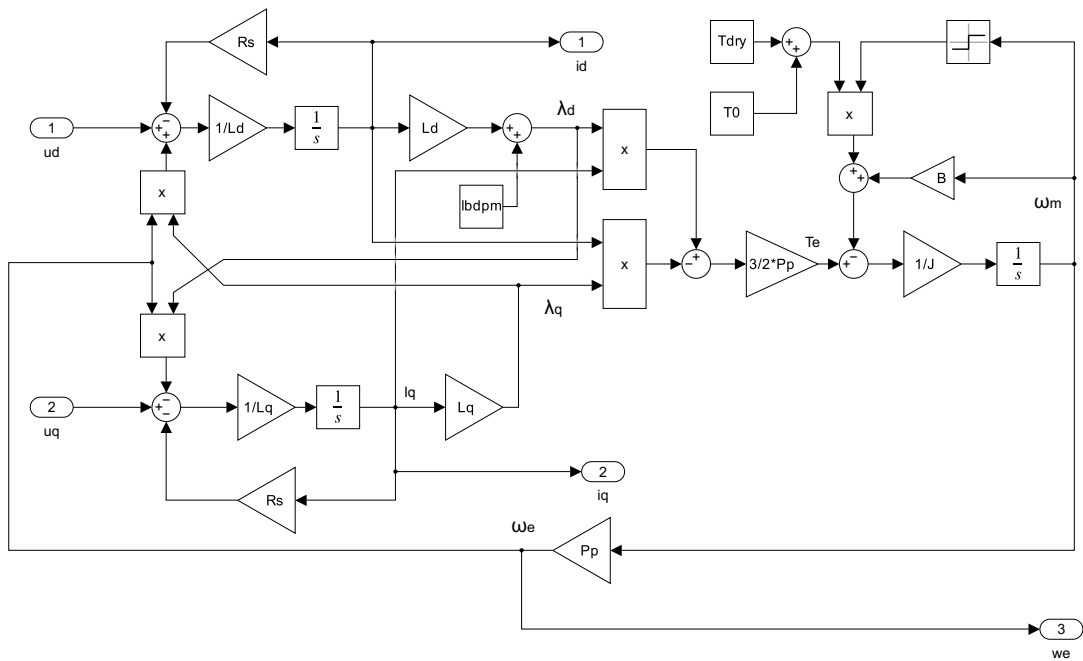
kde  $T_{load} = \text{sign}(\omega_m)T_{dry} + B\omega_m + T_0$  a význam proměnných a konstant je následující:

$T_e$	[Nm]	elektromechanický točivý moment
$Pp$	[-]	počet pólových dvojic
$J$	[kg·m <sup>2</sup> ]	moment setrvačnosti
$\omega_m$	[rad/s]	mechanická úhlová rychlost
$T_{load}$	[Nm]	zátěžný moment (brzdny moment)
$\lambda_d, \lambda_q$	[Wb]	tok od d a q složky proudu
$T_{dry}$	[Nm]	suché tření
$B$	[Nm·s/rad]	koeficient vizkózního tření
$T_0$	[Nm]	přídavný zátežný moment

Ekvivalentně lze rovnici popisující elektromagnetický moment vyjádřit i s použitím toků  $\lambda_d$  a  $\lambda_q$  jako  $T_e = \frac{3}{2}Pp(\lambda_d i_q - \lambda_q i_d)$ . Elektrickou a mechanickou úhlovou rychlost lze poté přepočítat skrze počet pólových dvojic:

$$\omega_e = Pp \cdot \omega_m \quad (1.5)$$

Výše popsaný model byl realizován v prostředí MATLAB Simulink. Obrázek 1.1 zachycuje realizaci modelu PMSM v tomto prostředí. Do modelu se parametry předávají pomocí proměnné masky. Na výstupu č. 3 v pravé dolní části dostáváme elektrickou úhlovou rychlost. Dále je možné vidět křížové zapojení mezi D a Q složkou, které neutralizujeme v proudovém regulátoru decouplingem (viz 1.4).



Obr. 1.1: Model PMSM realizovaný v prostředí MATLAB Simulink.

V simulaci byly použity následující parametry:

$R_s = 112,1$	$[m\Omega]$	odpor statorové fáze
$L_d = 1751$	$[\mu H]$	indukčnost v přímé ose
$L_q = 1696$	$[\mu H]$	indukčnost v kvadrurní ose
$\lambda_{pm} = 5,522$	$[mWb]$	tok od permanentních magnetů
$P_p = 10$	$[-]$	počet pólových dvojic
$J = 0,0112$	$[kg \cdot m^2]$	moment setrvačnosti
$T_{dry} = 0,22619$	$[Nm]$	suché tření
$B = 0,0014643$	$[Nm \cdot s/rad]$	koeficient viskózního tření
$T_0 = 2$	$[Nm]$	zátěžný moment

Obr. 1.2: Seznam parametrů simulovaného motoru

## 1.2 Přenos proudové smyčky dynamického systému

Aby bylo možné odvodit přenosy v proudové smyčce z diferenciálních rovnic (1.2) popisujících chování d-q proudů, je uvažováno, že elektrická úhlová rychlost je pomalu se měnící parametr s přibližně konstantní hodnotou na krátkém časovém okamžiku:

$$\omega_e(t) \approx \text{konst.} \quad t_0 \leq t < t_1, \quad (1.6)$$

kde časový interval  $t_1 - t_0$  zaobaluje pouze několik vzorkovacích period. Platnost (1.6) umožňuje mimo jiné realizaci kaskádního řízení úhlové rychlosti, které je běžnou součástí vektorového řízení PMSM [1]. Potom lze diferenciální rovnice (1.2) vyjádřit ve tvaru lineárního časově-invariantního systému jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \frac{L_q \omega_e}{L_d} \\ -\frac{L_q \omega_e}{L_d} & -\frac{R_s}{L_d} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix}}_{\vec{i}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\omega_e}{L_q} \lambda_{pm} \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \quad (1.7)$$

Systém (1.7) lze poté převést do Laplaceova obrazu následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}(t)}{dt} &= A\vec{i}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{x} \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{d\vec{i}(t)}{dt} \right\} &= A\mathcal{L} \{ \vec{i}(t) \} + B\mathcal{L} \{ \vec{u}(t) \} + \mathcal{L} \{ \vec{x} \} \\ p\vec{I}(p) &= A\vec{I}(p) + B\vec{U}(p) + \frac{1}{p}\vec{x} \\ \vec{I}(p) &= \underbrace{(pI - A)^{-1}B\vec{U}(p)}_{S(p)} + \underbrace{(pI - A)^{-1}\frac{1}{p}\vec{x}}_{\vec{V}(p)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Matice systému bez působení poruch  $S(p)$  a matice poruch bez působení akčního zásahu od regulátoru  $V(p)$  jsou poté spočteny jako:

$$S(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_d} \frac{(p + \frac{R_s}{L_q})}{p^2 + (\frac{R_s}{L_d} + \frac{R_s}{L_q})p + \frac{R_s^2}{L_d L_q} + \omega_e^2} & \frac{1}{L_d} \frac{\omega_e}{p^2 + (\frac{R_s}{L_d} + \frac{R_s}{L_q})p + \frac{R_s^2}{L_d L_q} + \omega_e^2} \\ -\frac{1}{L_q} \frac{\omega_e}{p^2 + (\frac{R_s}{L_d} + \frac{R_s}{L_q})p + \frac{R_s^2}{L_d L_q} + \omega_e^2} & \frac{1}{L_q} \frac{(p + \frac{R_s}{L_q})}{p^2 + (\frac{R_s}{L_d} + \frac{R_s}{L_q})p + \frac{R_s^2}{L_d L_q} + \omega_e^2} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

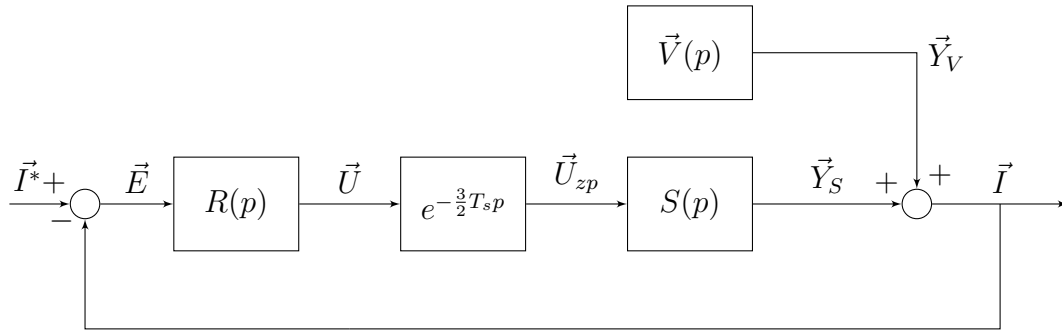
$$\vec{V}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_d p} \frac{\lambda_{pm} \omega_e^2}{p^2 + (\frac{R_s}{L_d} + \frac{R_s}{L_q})p + \frac{R_s^2}{L_d L_q} + \omega_e^2} \\ -\frac{1}{L_q p} \frac{\lambda_{pm} \omega_e (p + \frac{R_s}{L_d})}{p^2 + (\frac{R_s}{L_d} + \frac{R_s}{L_q})p + \frac{R_s^2}{L_d L_q} + \omega_e^2} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Pro řízení výše popsaného systému je poté využita maticová struktura regulátoru, která má následující tvar:

$$R(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) & R_{12}(p) \\ R_{21}(p) & R_{22}(p) \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Diagram, který zobrazuje řízení proudů PMSM motoru maticovým regulátorem  $R(p)$

je znázorněn na obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Schéma zpětnovazební proudové smyčky

Jak lze vypočítat v obrázku 1.3, regulační smyčka obsahuje dopravní zpoždění  $1,5 T_s$ , které je tvořeno diskretizací regulátorů (zpoždění o  $0,5 T_s$ ) a konečnou dobou výpočtu algoritmu v řídicích jednotkách (zpoždění o  $1 T_s$ ). Aby bylo možné provádět ladění parametrů regulátorů v uzavřené smyčce, lze dopravní zpoždění aproximovat. V prvotní myšlence bylo pro návrh regulátorů dopravní zpoždění aproximováno Padého rozvojem [3] jako  $e^{-\frac{3}{2}T_s p} \approx \frac{1-\frac{3}{4}T_s p}{1+\frac{3}{4}T_s p}$ . Tento přístup však nebyl dostatečně přesný a vedl na návrh, který nezajistil stabilitu uzavřené smyčky otáček. Z toho důvodu bylo využito definice systému bez aproximace dopravního zpoždění a návrh regulátoru otáček byl realizován za pomoci MATLAB Control System Designeru. Signály v diagramu na obrázku 1.3 mají poté následující význam:

- $\vec{E}$  Regulační odchylka proudů
- $\vec{U}$  Akční veličina napětí
- $\vec{U}_{zp}$  Zpožděná akční veličina napětí
- $\vec{Y}_S$  Výstupní proud z matice systému
- $\vec{Y}_V$  Výstupní proud z matice poruchy

Při analýze zpětnovazebního zapojení je podstatné vypočítat, jak se řídicí a poruchové signály propagují na výstup regulované soustavy. Z obrázku 1.3 poté vyplynou následující definice matice poruch  $F_u(p)$  a matice přenosů řízení  $F_w(p)$ :

$$\begin{aligned} F_u(p) &= F_v(p)\vec{V}(p) = (I + S(p)R(p))^{-1}\vec{V}(p) \\ F_w(p) &= S(p)R(p)(I + S(p)R(p))^{-1}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Vzhledem k vysoké komplikovanosti vzniklých přenosů je zde konkrétně nevypisují. Nicméně, při uvážení požadavku na autonomnost platného při řízení MIMO systémů [3] (hodnoty na vedlejších diagonálách  $F_w(p)$  musí být nulové tzn.  $F_{w12}(p) = F_{w21}(p) = 0$ ) lze jednoznačně stanovit regulátory  $R_{12}(p)$  a  $R_{21}(p)$ , které závisejí na

$R_{11}(p)$  a  $R_{22}(p)$ . Matice regulátoru (1.11) poté přejde do tvaru:

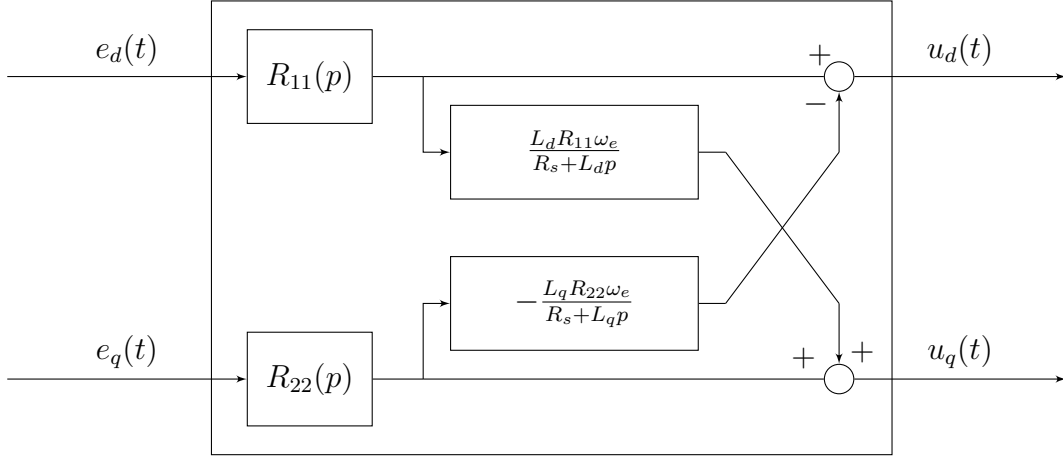
$$R(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) & -\frac{L_q \omega_e}{R_s + L_q p} R_{22}(p) \\ \frac{L_d \omega_e}{R_s + L_d p} R_{11}(p) & R_{22}(p) \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Pokud zanedbáme dopravní zpoždění a uvážíme závislosti  $R_{12}(p) = f(R_{22}(p))$  a  $R_{21}(p) = f(R_{11}(p))$  obdržíme značně zjednodušenou matici poruch a přenosů řízení, které nabývají následujícího tvaru:

$$F_u(p) = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\lambda_{pm} \omega_e^2}{L_d} p + \frac{\lambda_{pm} \omega_e^2 R_s}{L_d^2}}{p^4 + \frac{L_q R_{11} + L_d R_s + 2L_q R_s}{L_d L_q} p^3 + \frac{L_q L_d^2 \omega_e^2 + 2L_d R_s^2 + R_{11} L_d R_s + L_q R_s^2 + L_q R_{11} R_s}{L_d^2 L_q} p^2 + \frac{(R_{11} + R_s)(R_s^2 + L_d L_q \omega_e^2)}{L_d^2 L_q} p} \\ -\frac{\frac{\lambda_{pm} \omega_e}{L_q} p^2 + \frac{R_s \lambda_{pm} \omega_e (L_d + L_q)}{L_d L_q^2} p + \frac{R_s^2 \lambda_{pm} \omega_e}{L_d L_q^2}}{p^4 + \frac{L_d R_{22} + 2L_d R_s + L_q R_s}{L_d L_q} p^3 + \frac{L_q L_d^2 \omega_e^2 + 2L_q R_s^2 + R_{22} L_q R_s + L_d R_s^2 + L_d R_{22} R_s}{L_d L_q^2} p^2 + \frac{(R_{22} + R_s)(R_s^2 + L_d L_q \omega_e^2)}{L_d L_q^2} p} \end{pmatrix}$$

$$F_w(p) = \begin{pmatrix} \frac{R_{11}}{L_d p + R_{11} + R_s} & 0 \\ 0 & \frac{R_{22}}{L_q p + R_{22} + R_s} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Všimněte si, že speciální struktura regulátoru efektivně realizuje odváznění proudových složek, což se také shoduje s poznatky prezentovanými v [4]. Akční zásahy od proudového regulátoru jsou poté realizovány dle následujícího obrázku:



Obr. 1.4: Maticový regulátor proudů.

V obrázku 1.4 je využívána hodnota úhlové rychlosti spočtena v každém kroku. Konkrétními návrhy proudových regulátorů se zabývá následující sekce (2.1).

Parametry typicky závisí na provozním bodě, tzn. s teplotou roste odpor a s proudem se mění indukčnosti vlivem magnetické saturace. Robustnost návrhu při změnách parametrů  $L_d, L_q$  a  $R_s$  simulovaného motoru je ukázána na obrázcích 1.5 a 1.6. Zde si vykresluje reakci systému na jednotkový skok pro každý parametr se změnou až o  $\pm 50\%$  od námi nastavené hodnoty.

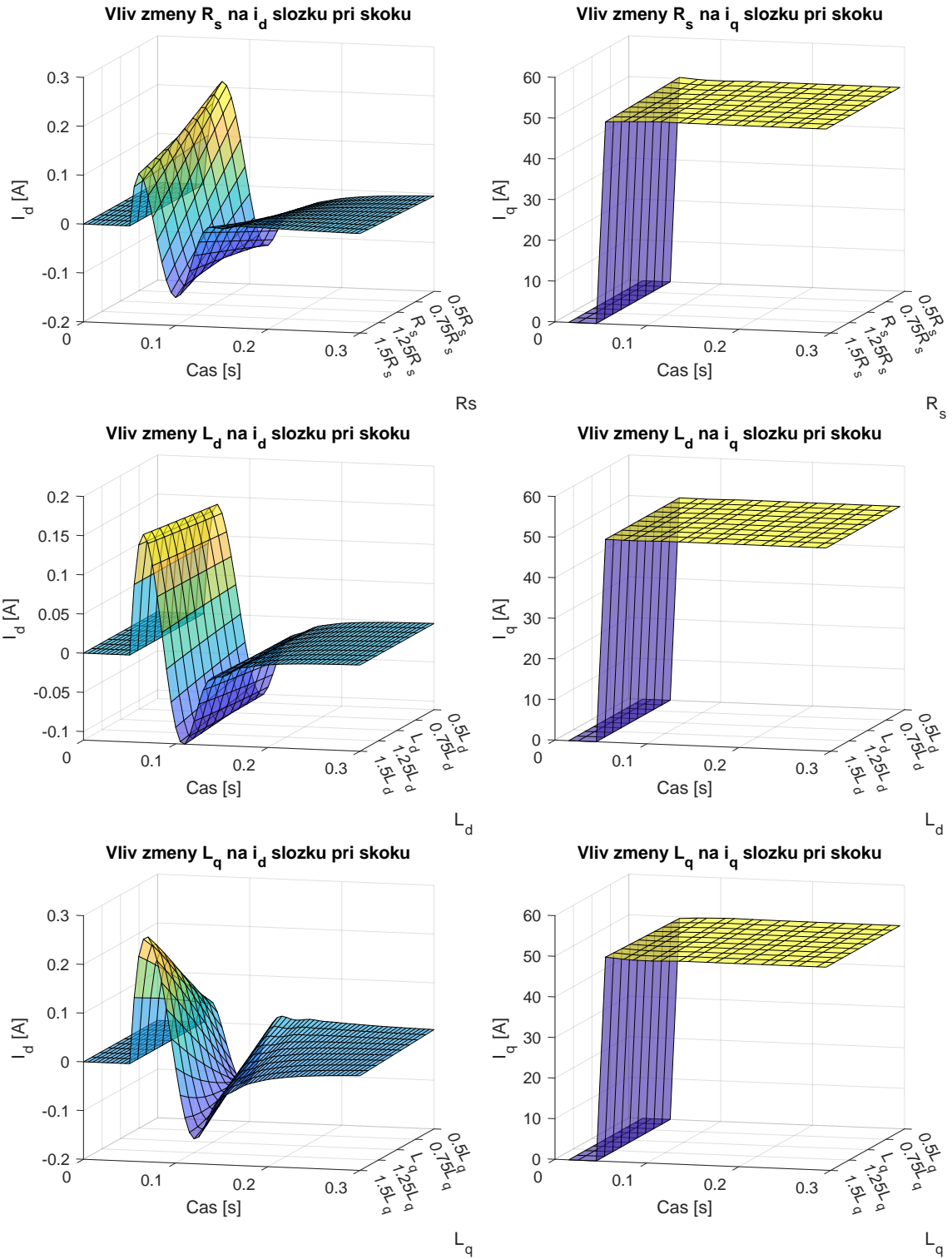
Na obrázku 1.5 zkoumáme pouze skok  $i_q$  složky rovné  $50A$ , kdežto na obrázku 1.6 roztáčíme motor pomocí  $i_q$  složky a v moment ustálení otáček poté posíláme požadavek  $i_d = -50A$  a opět zkoumáme, jak nám tato změna ovlivňuje systém s různě nastavenými parametry.

Z grafů 1.5 můžeme vidět rostoucí kmit  $i_d$  s poklesem  $R_s$  a naopak rostoucí kmit  $i_d$  při rostoucí indukčnosti  $L_q$ .

U grafů 1.6 pozorujeme vliv  $i_d$  na již ustálenou  $i_q$  složku. Jemné kmity můžeme pozorovat při vyšší indukčnosti  $L_d$ , nebo nižší indukčnosti  $L_q$ , které nám ovlivňují ustálení samotné  $i_d$  složky.

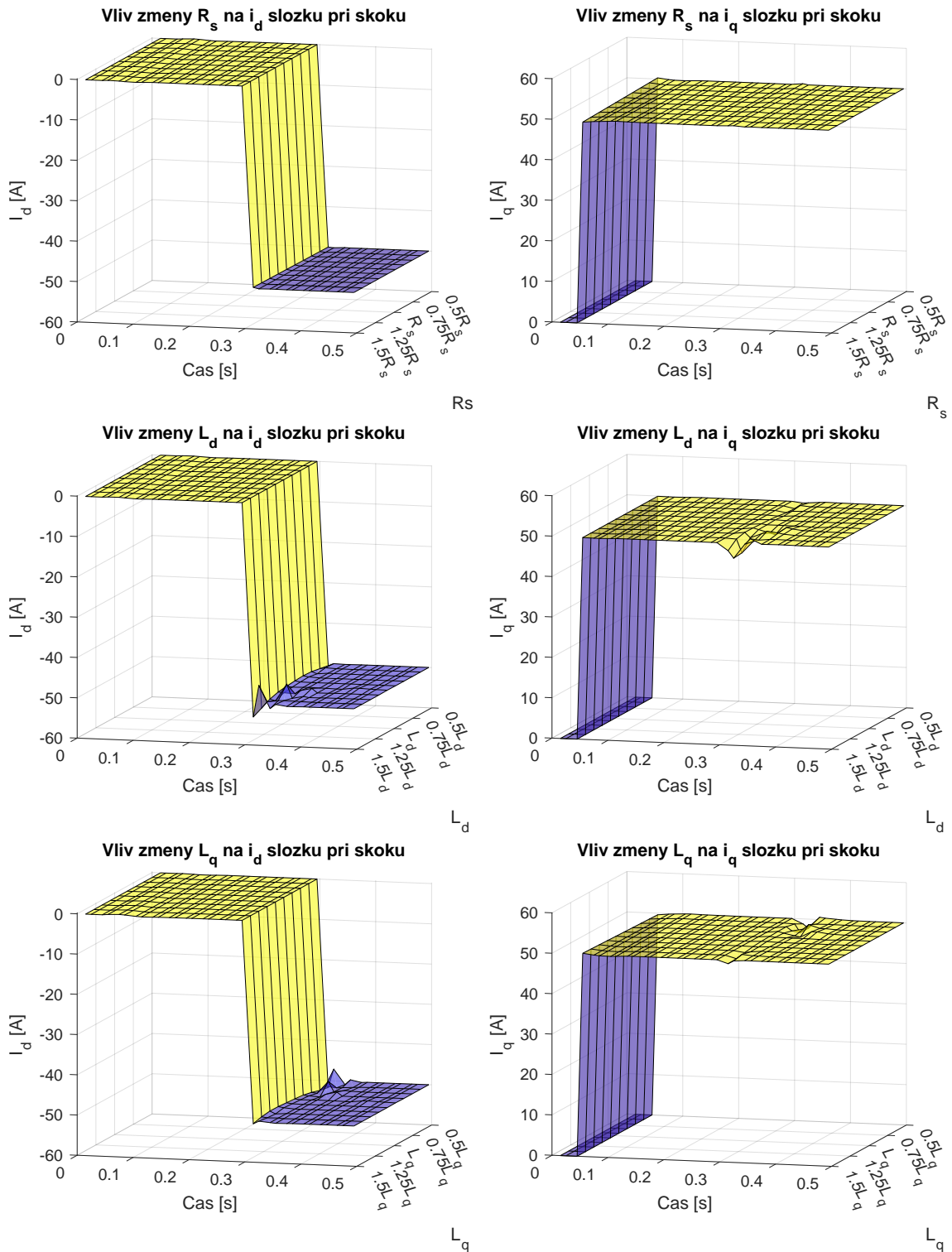


Skok  $i_q^* = 50 \text{ A}$ ,  $i_d^* = 0 \text{ A}$



Obr. 1.5: Vlivy změn parametrů  $R_s$ ,  $L_d$  a  $L_q$  na průběhy proudových složek při skoku  $i_q$

Skok  $i_q^* = 50 \text{ A}$  a následně  $i_d^* = -50 \text{ A}$



Obr. 1.6: Vlivy změn parametrů  $R_s$ ,  $L_d$  a  $L_q$  na průběhy proudových složek při skoku  $i_d$

## 2 Návrhy regulátorů

Pro naše řešení budeme potřebovat navrhnout regulátor proudu 2.1 a následně regulátor otáček 2.13.

### 2.1 Návrh regulátoru proudové smyčky

Pro proudovou smyčku jsem se rozhodl navrhnout PI regulátor tvarováním frekvenčních charakteristik [3]. Pro PI jsem se rozhodl po analýze limitních stavů 2.1, protože tento typ regulátoru v kombinaci se speciální strukturou prezentovanou na obrázku 1.4 výše zajistí nulovou ustálenou regulační odchylku při skoku proudů. Přenos regulační odchylky si spočítáme z přenosu řízení  $F_w(p)$  1.14.

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} F_e(p) &= \lim_{p \rightarrow 0} (1 - F_w(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{L_d p + R_{11} + R_s - R_{11}}{L_d p + R_{11} + R_s} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{L_d p + R_s}{L_d p + K_{11} \frac{T_{11} p + 1}{p} + R_s} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{L_d p^2 + R_s p}{L_d p^2 + K_{11} T_{11} p + K_{11} + R_s p} = \\ &= \frac{0}{K_{11}} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Tento výpočet ustálené odchylky je pro prvek  $F_{w11}(p)$  z matice přenosu řízení  $F_w(p)$  1.14, ale obdobně se dostaneme k nulové ustálené odchylce i pro prvek  $F_{w22}(p)$ .

Pro náš návrh regulátoru je třeba si vyjádřit frekvenční přenos otevřené smyčky z přenosu v Laplaceově obrazu. Platí poté vztah mezi Laplaceovým operátorem  $p$  a frekvencí  $\omega$ :  $p = j\omega$ , kde  $j$  je imaginární jednotka, matici přenosů otevřené smyčky lze po odvažení proudových složek vyjádřit jako:

$$F_0(p) = \begin{pmatrix} R_{11}(p) \frac{1}{R_s (\frac{L_d}{R_s} p + 1)} e^{-\frac{3}{2} T_s p} & 0 \\ 0 & R_{22}(p) \frac{1}{R_s (\frac{L_q}{R_s} p + 1)} e^{-\frac{3}{2} T_s p} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Při návrhu PI regulátoru nahradíme obecné tvary  $R_{11}(p)$  a  $R_{22}(p)$  konkrétní strukturou PI, tedy:

$$R_{11}(p) = K_{11} \frac{T_{11} p + 1}{p} \quad R_{22}(p) = K_{22} \frac{T_{22} p + 1}{p}. \quad (2.3)$$

Přenosy otevřené smyčky (2.2) jsou poté vyjádřeny jako:

$$F_0(p) = \begin{pmatrix} K_{11} \frac{T_{11} p + 1}{p} \frac{1}{R_s (\frac{L_d}{R_s} p + 1)} e^{-\frac{3}{2} T_s p} & 0 \\ 0 & K_{22} \frac{T_{22} p + 1}{p} \frac{1}{R_s (\frac{L_q}{R_s} p + 1)} e^{-\frac{3}{2} T_s p} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

V 2.4 vykompenzujeme póly pomocí dosazení za  $T_{11} = \frac{L_d}{R_s}$  a  $T_{22} = \frac{L_q}{R_s}$  a tím dostaneme zjednodušený přenos:

$$F_0(p) = \begin{pmatrix} \frac{K_{11}}{R_s p} e^{-\frac{3}{2} T_s p} & 0 \\ 0 & \frac{K_{22}}{R_s p} e^{-\frac{3}{2} T_s p} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Následnou náhradou Laplaceova operátoru  $p = j\omega$  obdržíme:

$$F_0(j\omega) = \begin{pmatrix} \frac{K_{11}}{R_s j\omega} e^{-\frac{3}{2} T_s j\omega} & 0 \\ 0 & \frac{K_{22}}{R_s j\omega} e^{-\frac{3}{2} T_s j\omega} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Můžeme vidět, že tvary jednotlivých složek v (2.6) jsou si podobné, a proto můžeme dále počítat namísto s  $K_{11}$  a  $K_{22}$  pouze s obecným zesílením  $K$ . Obdržíme poté amplitudu a fázi ve tvaru:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} T_s \omega \quad |F_0(j\omega)| = \frac{K}{\omega R_s}. \quad (2.7)$$

Navrhujeme poté regulátor s fázovou bezpečností  $PM = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ .

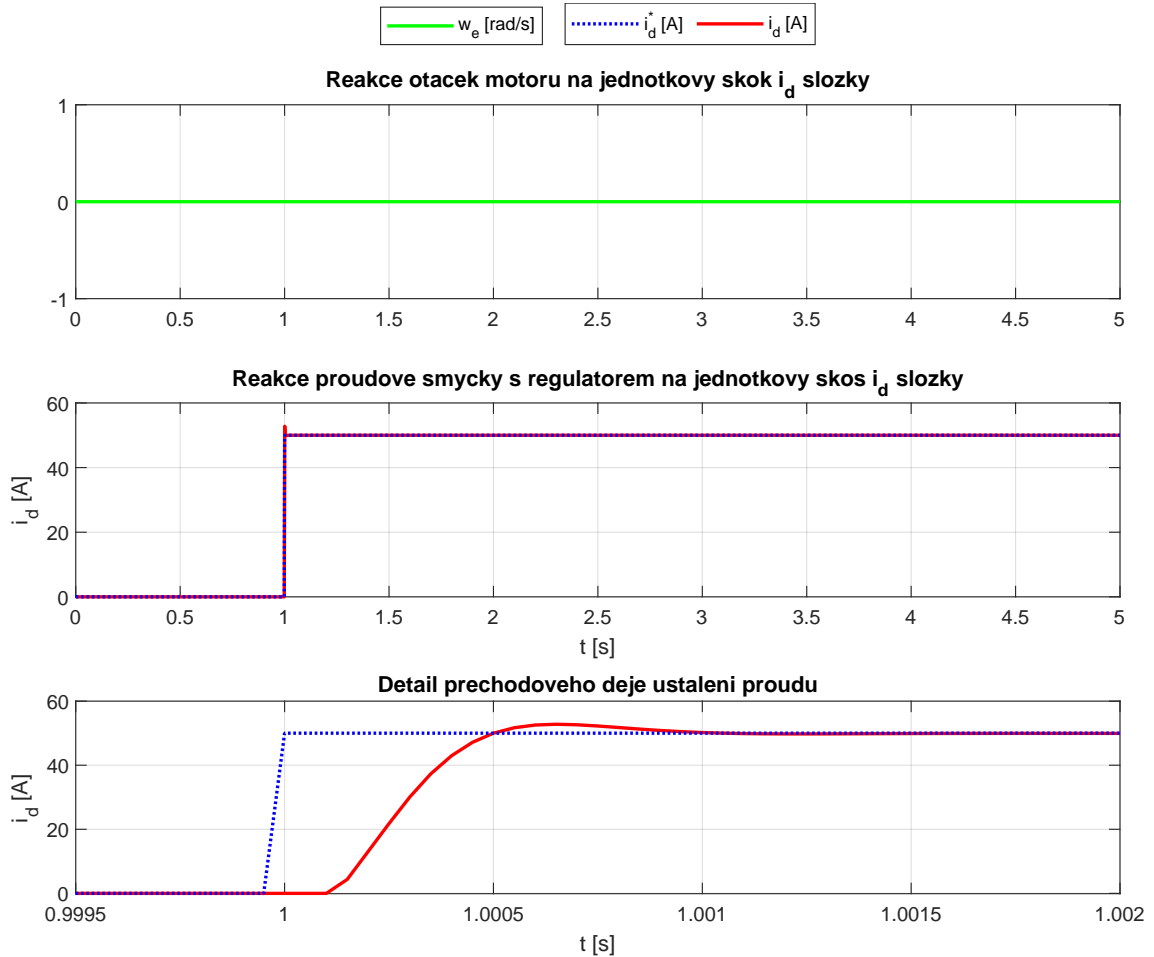
$$\begin{aligned} |F_0(j\omega)| = 1 &\Leftrightarrow K = R_s \omega_r \\ PM = \pi + \varphi &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} T_s \omega_r \\ \Rightarrow \omega_r &= \frac{\pi}{9 T_s} \Rightarrow K = R_s \frac{\pi}{9 T_s}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde  $\omega_r$  je frekvence řezu a dosazením do  $R_{11}(p)$  a  $R_{22}(p)$  dostaneme:

$$\begin{aligned} R_{11}(p) &= R_s \frac{\pi}{9 T_s} \frac{\frac{L_d}{R_s} p + 1}{p} = \frac{\pi}{9 T_s} L_d \left( 1 + \frac{1}{\frac{L_d}{R_s} p} \right) \\ R_{22}(p) &= R_s \frac{\pi}{9 T_s} \frac{\frac{L_q}{R_s} p + 1}{p} = \frac{\pi}{9 T_s} L_q \left( 1 + \frac{1}{\frac{L_q}{R_s} p} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2.2 Průběhy regulované proudové smyčky

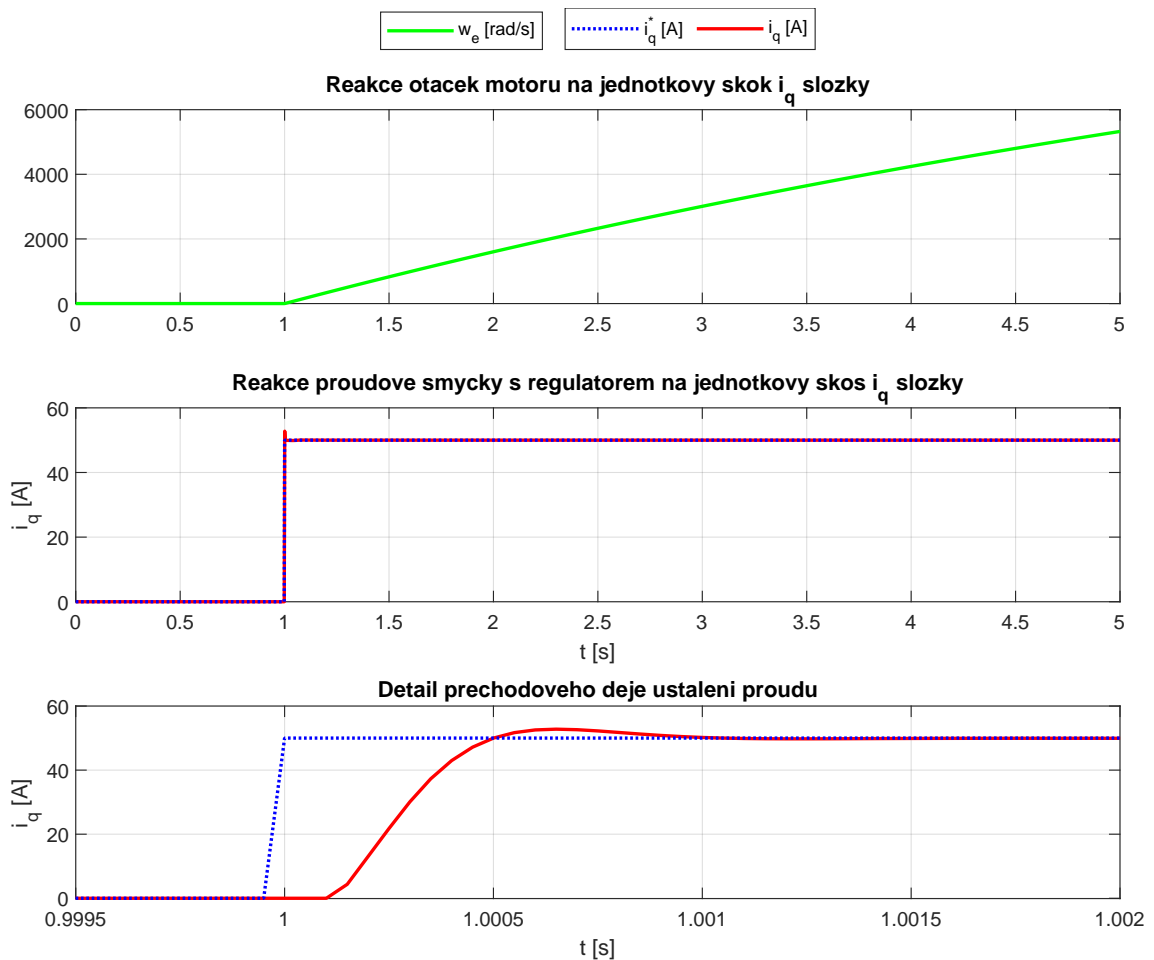
Po dosazení 2.1 do modelu 1.4 v MATLAB Simulink jsem si nechal vykreslit reakci systému na vstupní proud  $i_d = 50A$  (2.1) a  $i_q = 50A$  (2.2).



Obr. 2.1: Reakce proudové smyčky na jednotkový skok  $i_d$  složky o velikosti 50 A

V případě 2.1, kdy je jednotkový skok 50 A na  $i_d$  složce, jsou otáčky hřídele  $\omega_e$  nulové. To znamená, že  $i_d$  složky v našem způsobu řízení nemá vliv na otáčky motoru, a proto můžeme uvažovat  $i_d^* = 0$  při řízení otáček.

Naopak  $i_q$  složka je ta, co řídí otáčky. Důkazem je i graf 2.2, kde je vidět lineární nárůst rychlosti  $\omega_e$ .



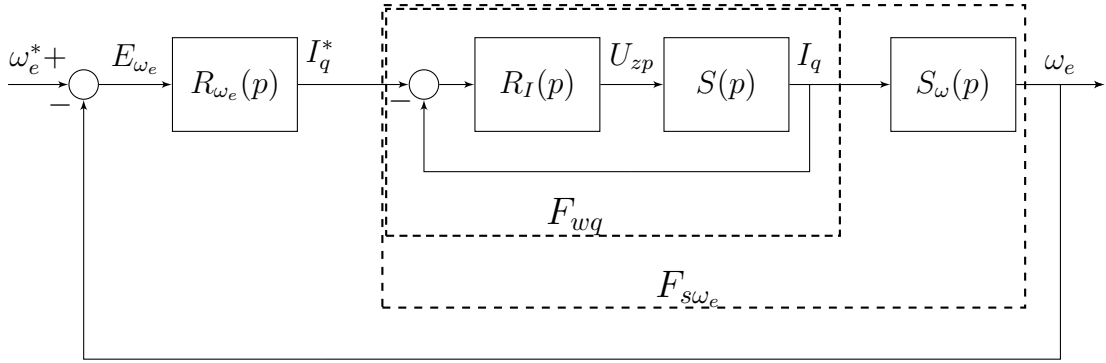
Obr. 2.2: Reakce proudové smyčky na jednotkový skok  $i_q$  složky o velikosti 50 A

V grafech 2.1 a 2.2 je vidět přibližný detail přechodového děje ustálení proudů.

## 2.3 Návrh regulátoru otáček

Při návrhu otáčkového regulátoru vycházíme z upraveného schématu 1.3. Na obrázku 2.3 můžeme vidět proudovou zpětnovazební smyčku  $F_{wq}$  a přenos systému otáček  $F_{s\omega_e}$ . Počítáme zde již pouze s proudovou složkou  $i_q$ , protože v naší regulační smyčce považujeme příspěvek k momentu od  $D$  složky proudu za poruchu a návrh řízení se opírá pouze o  $Q$  složku. To je možné vidět i na obrázcích 1.5 a 1.6.

Signály s bloky v diagramu na obrázku 2.3 mají následující významy:



Obr. 2.3: Schéma zpětnovazební otáčkové smyčky

$\omega_e^*$	Žádaná hodnota otáček
$E_{\omega_e}$	Regulační odchylka otáček
$R_{\omega_e}(p)$	Otáčkový regulátor
$I^*$	Žádaná hodnota proudu
$R_I(p)$	Proudový regulátor
$F_{wq}$	Přenos řízení proudové smyčky
$U_{zp}$	Zpožděná akční veličina napětí
$S(p)$	Řízený systém (PMSM)
$S_{\omega}(p)$	Převod na elektromechanický točivý moment
$\omega_e$	Výstupní otáčky (= elektrická úhlová rychlost)

Složka  $S_{\omega}$  vychází z elektromechanického točivého momentu 1.1 oprostěného o  $i_d$ :

$$S_{\omega} = \frac{3 P p^2 \lambda_{pm}}{2 J} \frac{1}{p} \quad (2.10)$$

Z výpočtu regulátorů proudů (2.7) známe přenos otevřené smyčky  $F_0$  (v této části značíme jako  $F_{0q}$ )

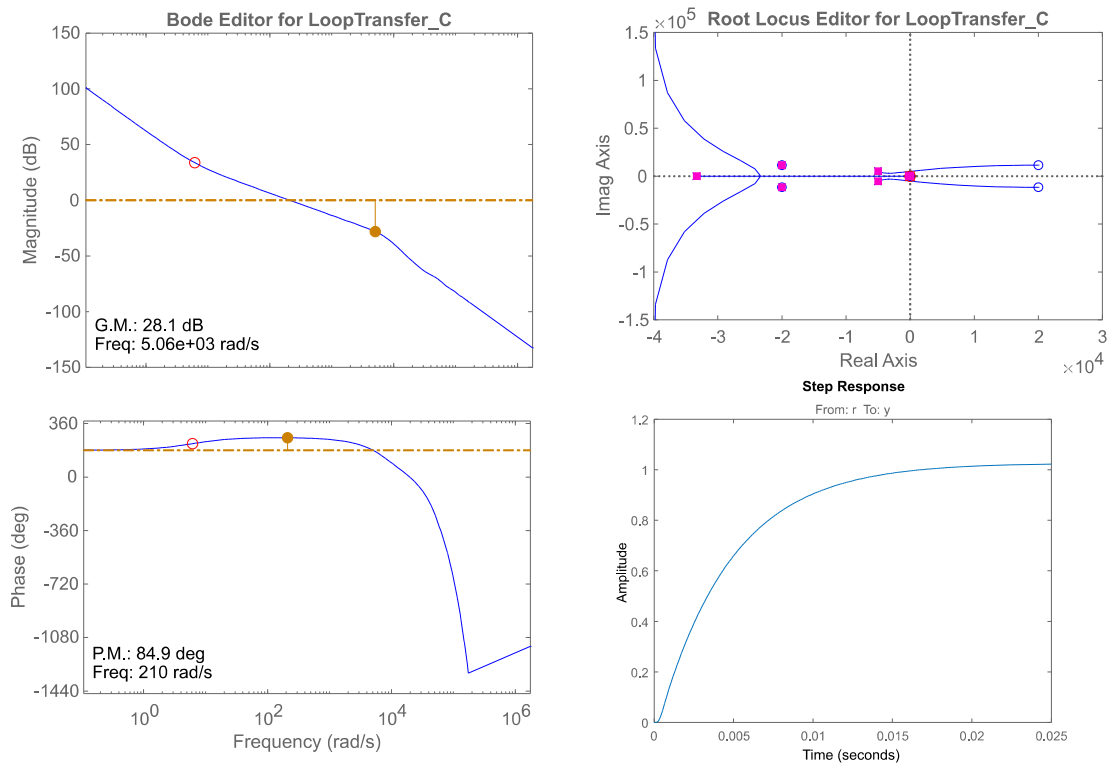
$$F_{0q} = \frac{R_s \frac{\pi}{9T_s}}{R_s p} \cdot e^{-\frac{3}{2}T_s p} = \frac{\pi}{9T_s} \frac{1}{p} \cdot e^{-\frac{3}{2}T_s p} \quad (2.11)$$

a tedy i přenos řízení pro proudovou smyčku  $F_{wq} = F_{0q}/(1 + F_{0q})$ . V diagramu 2.3 máme  $F_{wq}$  reprezentováno jako zpětnovazební smyčku s bloky  $R_I(p)$  a  $S(p)$ . Následným dosazením dostaneme soustavu, na kterou navrhujeme regulátor.

$$F_{s\omega_e} = F_{wq} \cdot \frac{3 P p^2 \lambda_{pm}}{2 J} \frac{1}{p} \quad (2.12)$$

Pro návrh regulátoru jsme použili Control System Designer (nástroj volaný příkazem "sisotool" v prostředí MATLAB) a zvolili regulátor tak, aby nedošlo k překmitu, fázová bezpečnost, aby byla alespoň 60 stupňů a zároveň, aby doba náběhu byla do

jednotek milisekund. V kořenovém hodografu je možné vidět přídavné póly a nuly, kterými Designer aproximoval dopravní zpoždění.



Obr. 2.4: Okno nastavení v nástroji Control System Designer

Tímto nastavením dostáváme PI regulátor 2.13:

$$K_p = 2.8378$$

$$T_i = \frac{1}{6.155}$$

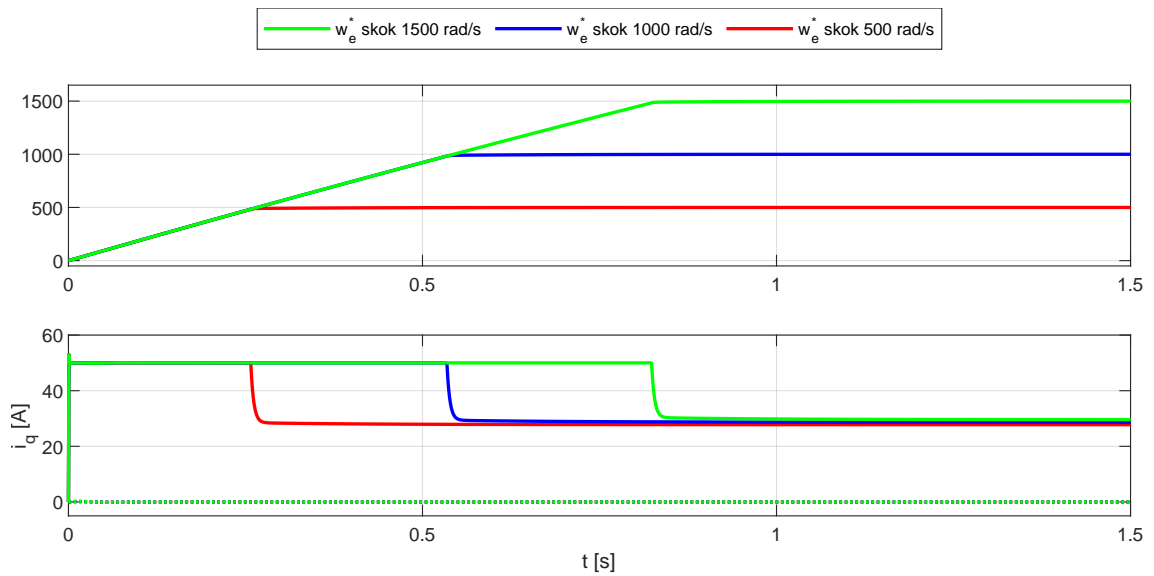
$$R_{\omega_e}(p) = P + \frac{I}{p} = K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{1}{p}$$

$$R_{\omega_e}(p) = 2.8378 + \frac{17,4667}{p} \quad (2.13)$$

## 2.4 Průběhy regulované otáčkové smyčky

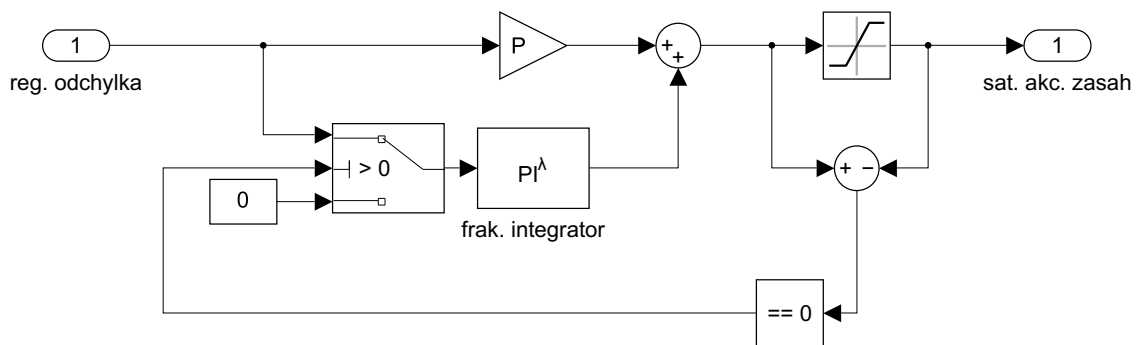
Průběhy pro požadované úhlové rychlosti  $\omega_e^*$  můžeme vidět na 2.5. Požadavky byly na 500 rad/s, 1000 rad/s a 1500 rad/s.





Obr. 2.5: Odezva systému na požadavky  $\omega_e$  rovno 500, 1000 a 1500 rad/s.

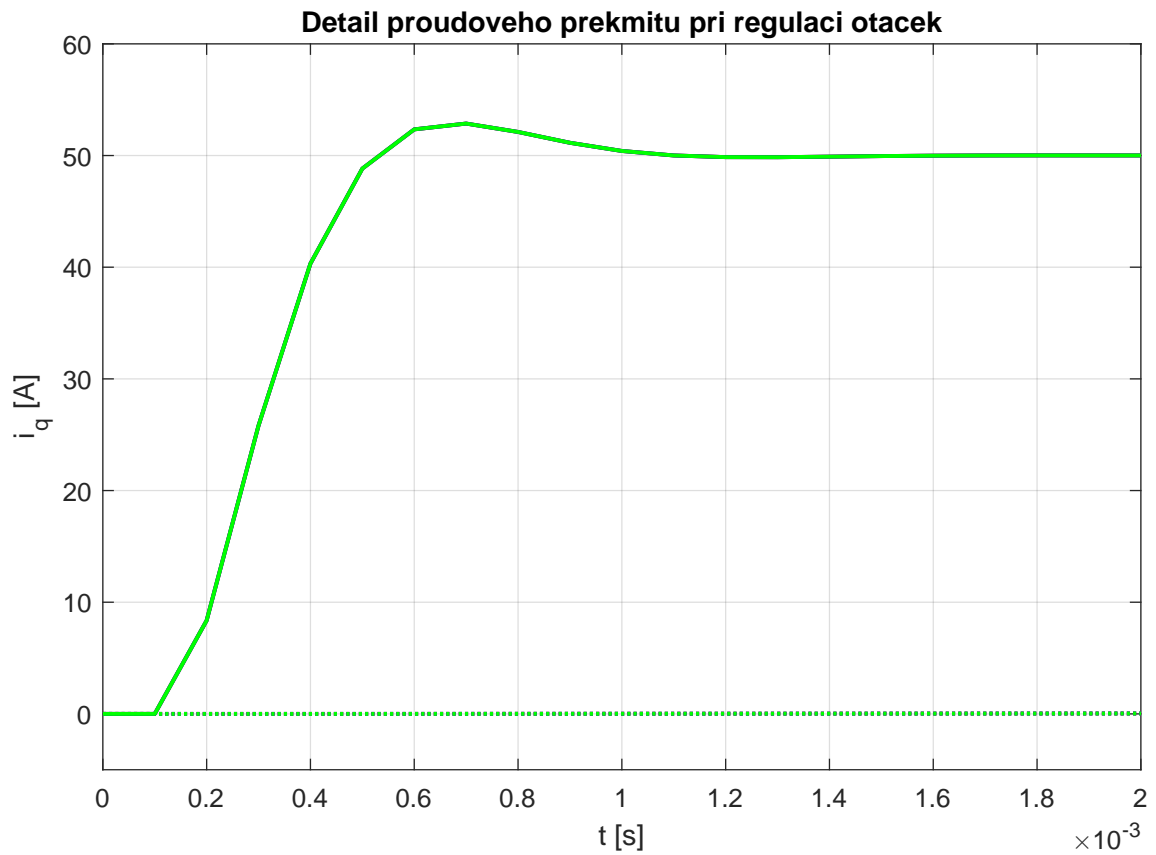
V grafech 2.5 můžeme vidět, že z důvodu zasaturování výstupu proudu nejsme schopni dosáhnout rychlejšího náběhu otáček. Toto zastřešení proudu nám dále určuje sklon nárůstu  $\omega_e$ . V případě, že by nedošlo k saturaci proudu, systémem by protékalo příliš velké množství proudu, které by mohlo reálný fyzický motor poničit přehřátím. Tato saturace nám však způsobuje windup jev (naintegrovaní příliš velké hodnoty) a tím dochází u řízení k překmitu požadovaných otáček. To řešíme následným clamping antiwindup zapojením 2.6.



Obr. 2.6: Clamping antiwindup zapojení.

Z grafu lze dále vyčíst, že proud je tak dlouho dodáván do systému, dokud soustava nedosáhne požadované rychlosti otáčení. Po dosažení požadované hodnoty otáček, dojde ke snížení proudu na hodnotu kolem 30 A, to je proud potřebný

na udržení konstantních (požadovaných) otáček. Tuto hodnotu ovlivňujeme hlavně zátěžným momentem, který je z fyzikální podstaty přítomen v každém motoru.



Obr. 2.7: Detail grafu 2.5

V grafu 2.7 zobrazujeme první dvě milisekundy, kde můžeme vidět proudový překmit.

## 3 Frakční řád PID

PID regulace s frakčním řádem je varianta tradičního PID regulátoru, která je rozšířená pro složitější systémy. Tradiční PID regulátor pracuje s celočíselnými řády, zatímco PID regulace s frakčním řádem umožňuje použití diferenciálních a integrálních operátorů s neceločíselnými řády.

Tato metoda se často používá v situacích, kdy tradiční PID regulace není schopna dosáhnout požadovaného výkonu, zejména u systémů s pomalými nebo proměnnými dynamikami. PID regulace s frakčním řádem může být užitečná při modelování a řízení komplexních systémů, jako jsou například biologické, chemické nebo termodynamické procesy, kde jsou dynamiky často neklasické. Neklasické dynamiky se obvykle vyskytují v systémech, které nejsou dobře modelovatelné lineárními nebo konvenčními diferenciálními rovnicemi. [5]

Mezi další výhody patří schopnost modelovat složité dynamiky, přizpůsobivost nestacionaritě a vyšší přesnost.

Mezi výhody patří robustnost, tedy odolnost vůči šumu, menší citlivost na změny parametrů a menší náchylnost k oscilacím, nebo nestabilitě. Naopak jako hlavní nevýhoda je komplikovanost návrhu parametrů regulátoru.

Pro popsání frakčních řádů a nadefinování matematických operací, ke kterým dochází při počítání těchto řádů si vysvětlíme dle [6].

### 3.1 Úvod do počtů s frakčními řády

Počítání s frakčním řádem je obecná generalizace integrace a diferenciace na operátor s neceločíselným řádem  ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ , kde  $a$  a  $t$  označují limity operace a  $\alpha$  označuje frakční řád takový, že:

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_a^t (dt)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Obvykle se očekává  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ale může se jednat i o komplexní číslo [7]. Existuje mnoho definic frakčního diferintegrálu. Jednou z často používaných je Riemann-Lioviellova definice [9]:

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - m + 1}} d\tau \quad (3.2)$$

pro  $m - 1 < \alpha < m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , kde  $\Gamma(\cdot)$  je Gamma funkce [8] (někdy také označovaná jako Eulerův integrál druhého druhu). Mezi výhody této metody patří její relativně jednoduchá definice a snadná aplikovatelnost. Mezi nevýhody pak patří numerická

nestabilita a složitější numerický výpočet, tedy při numerických výpočtech může vést k nepřesnostem a trvat déle v porovnání s ostatními metodami. Dále se používá Grünwald-Letnikova definice:

$${}_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad (3.3)$$

kde  $\lceil \cdot \rceil$  označuje celočíselnou část. Zde je definice méně příznivá pro analytické operace, ale výhodou této metody je její algoritmický charakter, díky kterému se používá v numerických metodách.

Na základě konceptu odvozeného v [6] může být lineární časově invariantní systém s frakčním řádem reprezentován následujícím stavovým modelem:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Více je možné si o počtech s frakčními řády přečíst v těchto literaturách [9], [10], [11], [12].

## 3.2 Metody ladění PID regulátorů s frakčním řádem

Při ladění frakčních řádů PID regulátorů měníme pět parametrů namísto klasických tří. V našem případě pro PI regulátor neladíme derivační složku  $K_d$  a  $\mu$ , které tuto složku váhuje. Zatím neexistuje žádná univerzální metoda ladění, která by byla použitelná pro všechny aplikace. Ladící metody dle Valerio a Costa [14] lze rozdělit na 3 kategorie:

- Metody podle pravidel
- Analytické metody
- Numerické metody

Mezi návrhové metody, které se řídí pravidly patří třeba Ziegler-Nichols metoda. Zesílení  $K_p$  a  $K_I$  jsou získány klasickým postupem,  $\lambda$  a  $\mu$  jsou získány z nelineárních rovnic a počítány ze specifikací fázové a amplitudové bezpečnosti. Parametr  $K_D$  je počítán metodou Astrom-Hagglund pro určitou fázovou bezpečnost.

Pro analytické ladění je třeba nejprve získat požadované specifikace pro regulovaný systém, pak řešit rovnice pro získání parametrů regulátoru na základě těchto specifikací a nakonec porovnat výkon navrženého frakčního PID regulátoru s výkonem klasického PID regulátoru pomocí simulací, nebo experimentů.

Numerické metody pracují na základě výpočtů rovnic, které pak porovnávají výsledky mezi jednotlivými běhy programu a vyhodnocují nejlepší výsledek dle požadavků. Mezi požadavky může být: doba náběhu, překmit, doba ustálení, metoda nejmenších čtverců atp. [5]

V naší práci volíme něco mezi analytickým a numerickým přístupem ladění, neboť systém simulujeme a výstupy si necháváme vykreslovat, ale zároveň hodnotíme výsledky na základě kritérií kvality regulace, které spadají spíše do numerických metod.

### 3.3 Použitý nástroj FOMCON

Název tohoto nástroje je zkratkou pro "Fractional-Order Modeling and Control". FOMCON je freeware rozšíře pro MATLAB, určený pro modelování a řízení LTI SISO systémů s frakčními řády. Mezi hlavní funkce a vlastnosti patří:

- Modelování s frakčním řádem - umožňuje modelovat dynamiku systémů s FO pomocí diferenciálních rovnice nebo přenosových funkcí.
- Návrh regulátorů s frakčními řády - pro řízení systémů se speciálními dynamikami.
- Analýza vlastností - stabilita, výkon a citlivost regulovaných systémů.
- Simulace - chování systémů s FO, za různých podmínek a pro ověření návrhů regulátorů.

Součástí balíčku je i knihovna bloků do MATLAB Simulink, kterou mi používáme v naší práci, konkrétně blok "Fractional PID controller". (viz [6])

Pro výpočet frakčních řádů používá nástroj vyladěný Oustaloupův rekurzivní filtr, který je nadefinovaný pro  $s^\alpha$  následovně [13]:

$$s^\alpha \approx \left(\frac{d\omega_h}{b}\right)^\alpha \left(\frac{ds^2 + b\omega_h s}{d(1-\alpha)s^2 + b\omega_h s + d\alpha}\right) G_p, \quad (3.5)$$

kde  $\omega_b$  značí dolní limit frekvence a  $\omega_h$  značí horní limit frekvence, dále platí:

$$\begin{aligned} G_p &= \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k}, \\ \omega_k &= \left(\frac{b\omega_h}{d}\right)^{\frac{\alpha+2k}{2N+1}}, \\ \omega'_k &= \left(\frac{d\omega_b}{b}\right)^{\frac{\alpha-2k}{2N+1}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Hodnoty konstant  $d$  a  $b$  doporučuje autor manuálu pro nástroj FOMCON [6], jako  $b = 10$  a  $d = 9$ . Řád aproximace a limitní frekvence je možné si zvolit pro každý blok. My používáme aproximaci 7. řádem a  $[\omega_b, \omega_h] = [0.01, 10000]$ .

## 3.4 Implementace FOPI regulátorů a hodnocení kvality regulace

Pro každý PI regulátor v původním schématu jsme nahradili bloky FOPI regulátorů ("FOPI" je zkratka pro "Fractional Order Proportional Integral"), které mají tvar  $R_{FOPI} = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda}$ .

Abychom byli schopní pozorovat rozdílné reakce, máme v systému vždy pouze jeden FOPI regulátor, kterému měníme již zmíněný parametr  $\lambda$  a následně si vykresluje reakci pro danou regulovanou veličinu  $(\omega_e, i_q, i_d)$ .

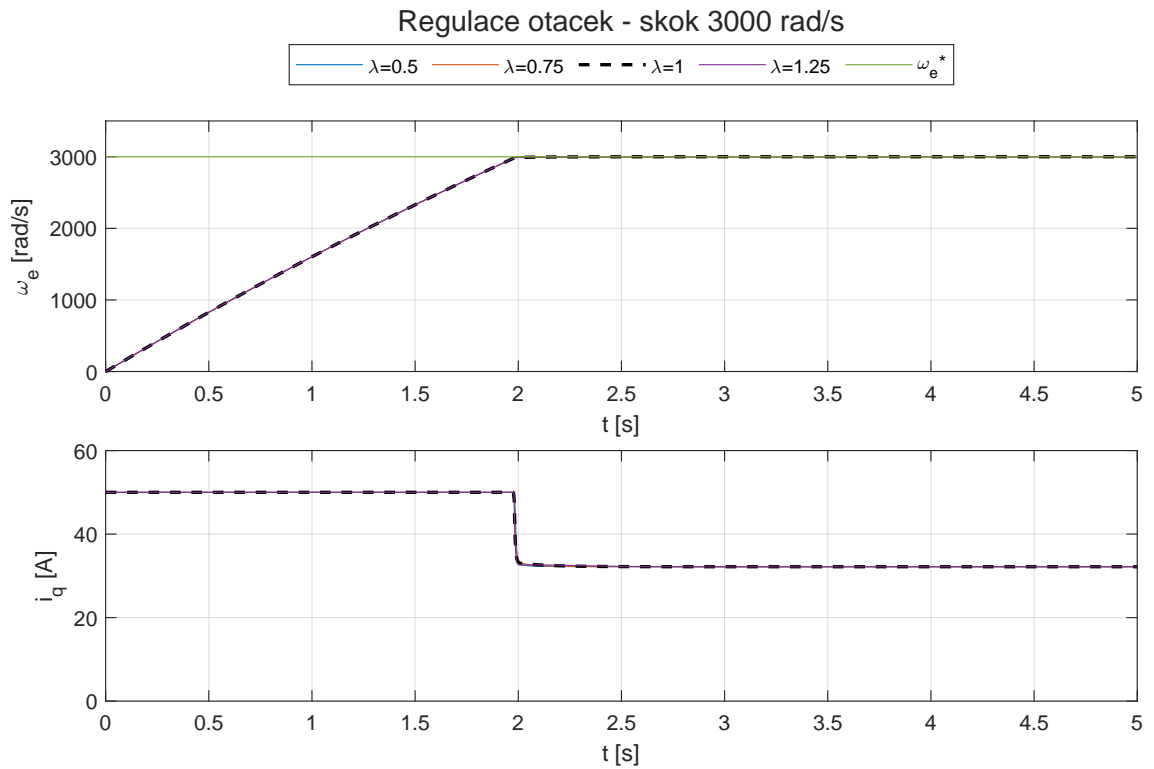
Na všech grafech v následující kapitole znázorňující průběhy, je vždy zobrazen průběh pro několik  $\lambda$ . Průběh, který je značen černou čárkovanou čarou je vždy náš původní navržený regulátor bez frakčního řádu, a jedná se tedy vždy o  $\lambda = 1$ .

Kvalitu regulace posuzujeme na základě analýzy dynamických vlastností regulačního obvodu a to konkrétně dle kvadratického integrálního kritéria ( $J_K$ ) a ITAE kritéria ( $J_{ITAE}$ ) (zkratka pro "Integral of Time multiplied by Absolute value of Error") [3]. Výhodou ITAE kritéria je násobení odchylky časem, čímž váhujeme rychlost ustálení přechodného děje, který je pro řízení motorů důležitý. Tato kritéria jsou nadefinovány následovně:

$$J_K = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)]^2 dt$$
$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} |e(t) - e(\infty)| t dt$$

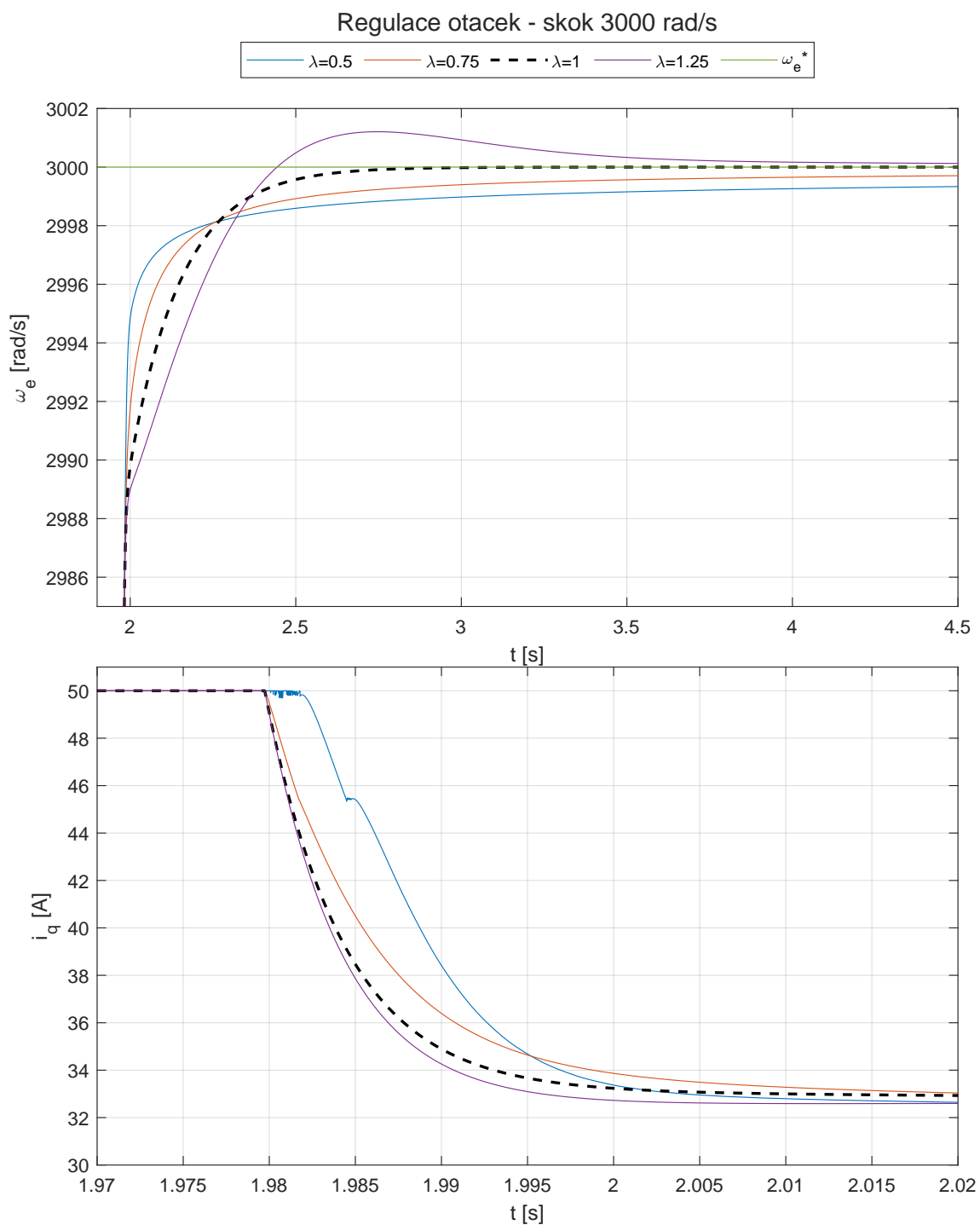
## 3.5 Regulace otáček frakčním řádem

Při této regulaci využíváme již zmíněné clamping antiwindup zapojení 2.6 a regulujeme na požadovanou hodnotu  $\omega_e^* = 3000 \text{ rad/s}$ . Z důvodu již zmíněného zasaturování proudové složky  $Q$  při řízení otáček, můžeme vidět na 3.1 pozvolný náběh. Zde nejsou žádné rozdíly mezi normální a frakčním řádem. Rozdíl je vidět kolem druhé vteřiny simulace, kterou si zobrazujeme na detailnějším obrázku 3.2.



Obr. 3.1: Zobrazení průběhu v celém čase a hodnotovém rozsahu

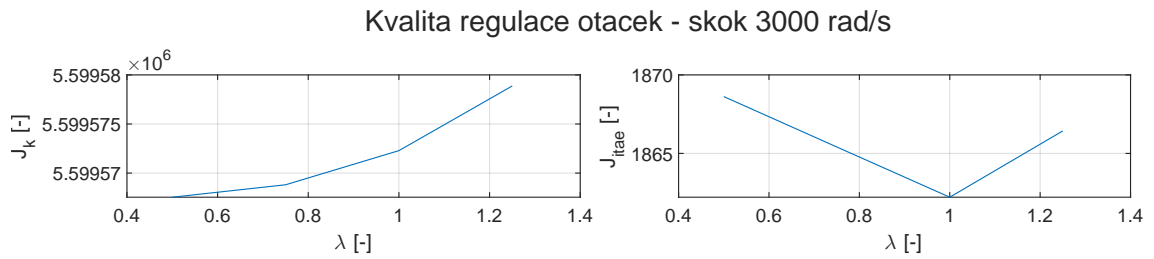
Na obrázku 3.2 můžeme v prvním okně vidět detail ustálení. V tomto případě  $\lambda = 1$  má nejrychlejší ustálení, které se projeví v ITAE kritériu, což je vidět v grafu 3.3 v pravém okně ( $J_{itae}$ ). Dále si zde můžeme všimnout překmitu pro  $\lambda = 1.25$  a pomalejšího ustálení pro  $\lambda = 0.5$



Obr. 3.2: Detailní zobrazení přechodného děje z obrázku 3.1

Kdybychom však hodnotili kvalitu regulace pouze na základě kvadratického integrálního kritéria, prohlásili bychom, že nejlépe regulujeme při  $\lambda = 0.5$ .

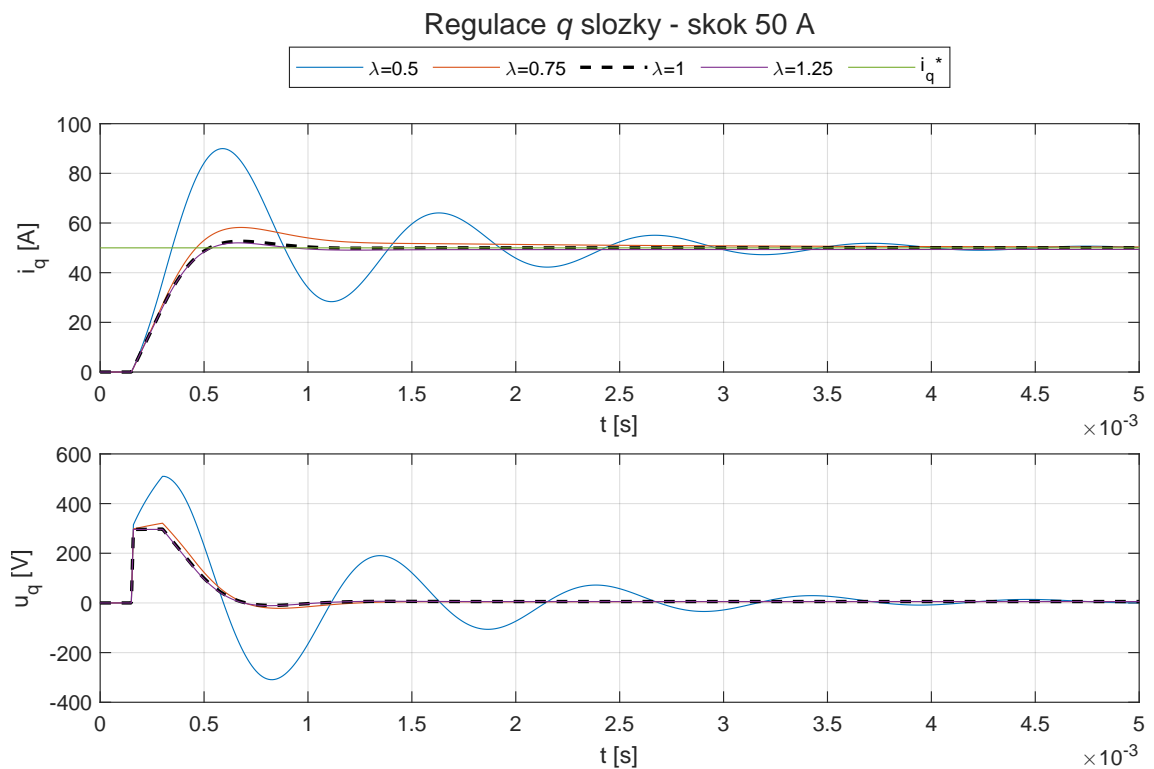




Obr. 3.3: Zobrazení kvality regulace pro jednotlivé  $\lambda$

### 3.6 Regulace proudové složky Q frakčním řádem

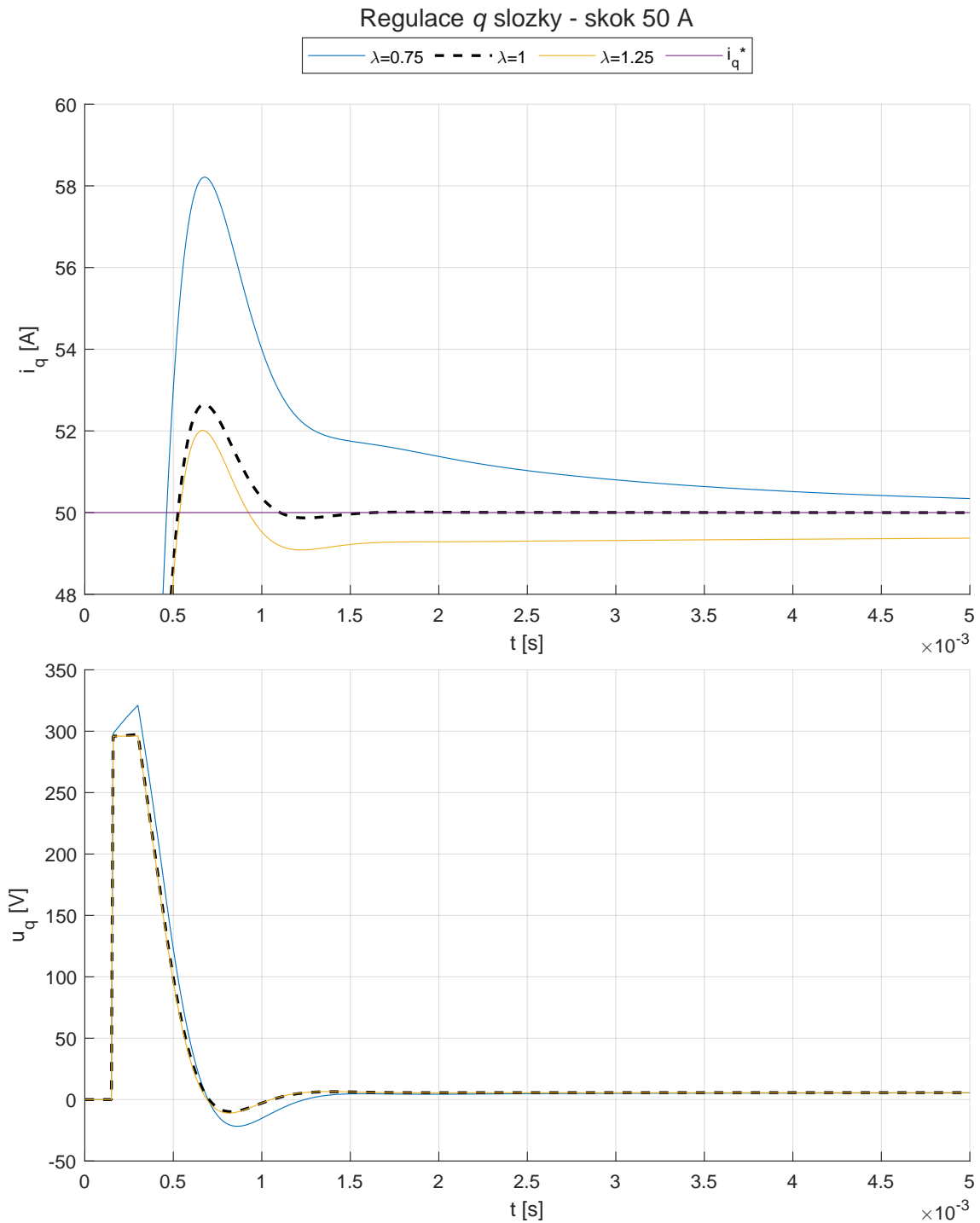
Jako další, jsme nahradili PI regulátor pro řízení proudu  $i_q$ . V grafu 3.4 si zobrazujeme průběh pouze do pěti milisekund, protože zde vidíme nejlépe odpověď jednotlivých  $\lambda$  na proudový skok.



Obr. 3.4: Zobrazení průběhu v čase do pěti milisekund a v plném hodnotovém rozsahu

Na obrázku 3.4 vidíme kmitavý děj pro  $\lambda = 0.5$ , a protože pro nás kmitavý

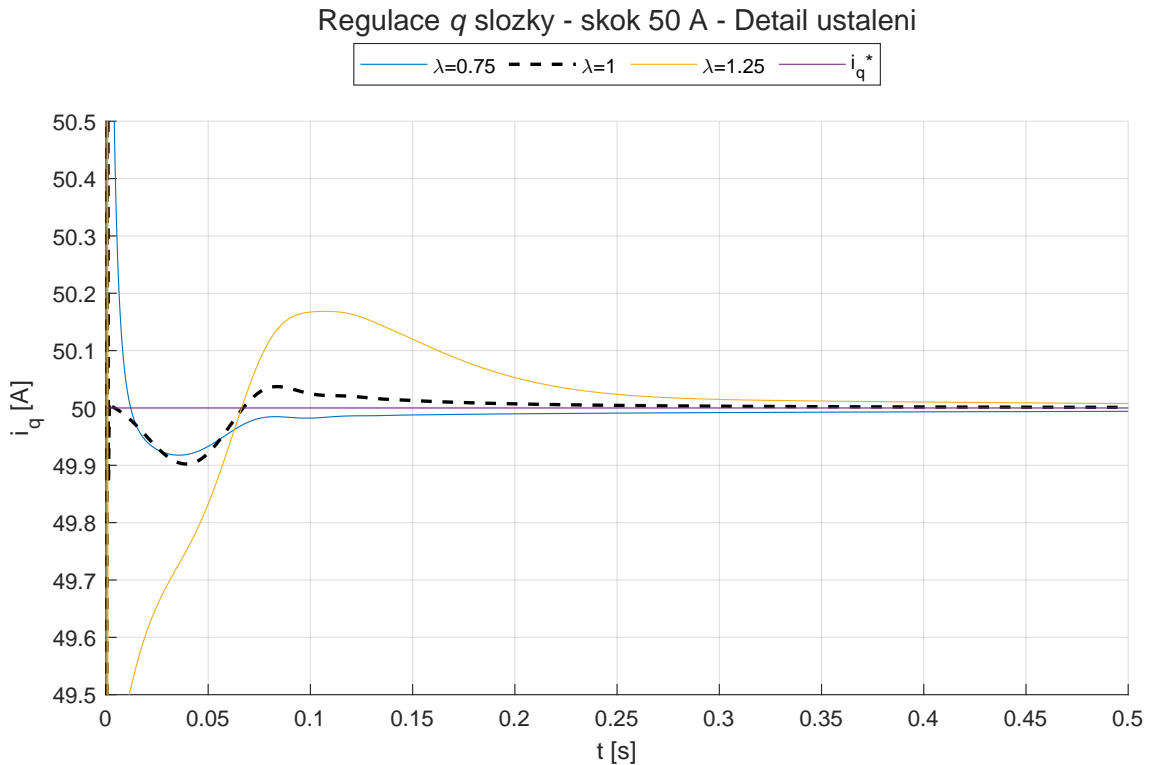
děj není chtěný, tak si průběh pro tuto  $\lambda$  nevykreslíme ani v detailnějších grafech 3.6 a 3.5.



Obr. 3.5: Detailní zobrazení přechodného děje z obrázku 3.4

Na obrázku 3.5, si můžeme všimnout, že k ustálení na požadovanou hodnotu do pěti milisekund dochází pouze pro  $\lambda = 1$ . V následujícím grafu 3.6 si proto

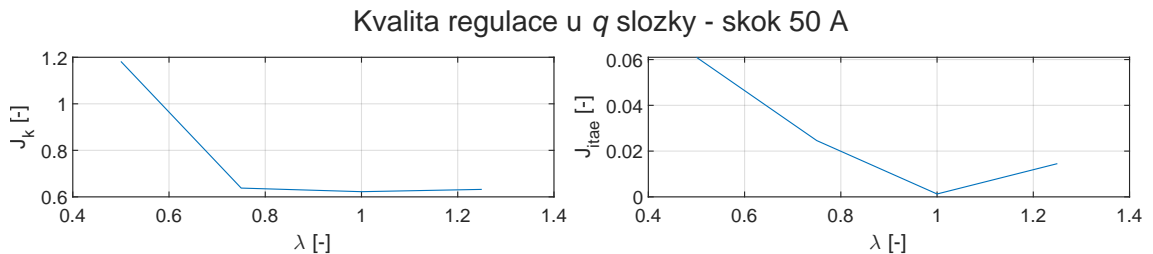
zobrazujeme detailnější průběh, co se amplitudy týká, ale na delším časovém úseku a to konkrétně do půl vteřiny, tedy stonásobek oproti předchozímu grafu 3.5..



Obr. 3.6: Detailní zobrazení přechodného děje pro delší časový rozsah

Na tomto grafu 3.6 si můžeme všimnout, že ještě před ustálením průběh  $\lambda = 1.25$  lehce překmitne a až následně se ustálí, což z předchozího grafu není možné vyčíst.

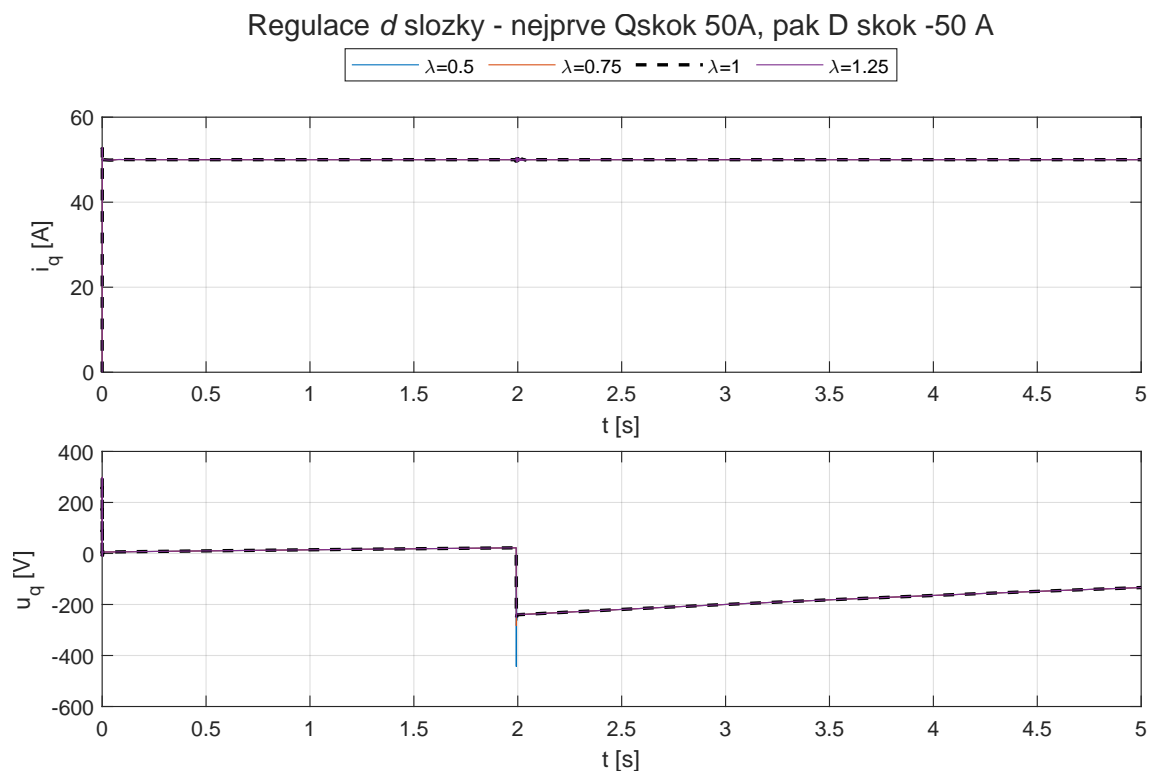
Co se hodnoty kvality regulace týká, tak z grafu 3.7 vidíme, že ani pro jedno z kritérií hodnocení kvality regulace pro námi nastavený regulátor na čistý skokový požadavek proudové složky  $Q$  není vhodné frakční řád použít.



Obr. 3.7: Zobrazení kvality regulace pro jednotlivé  $\lambda$

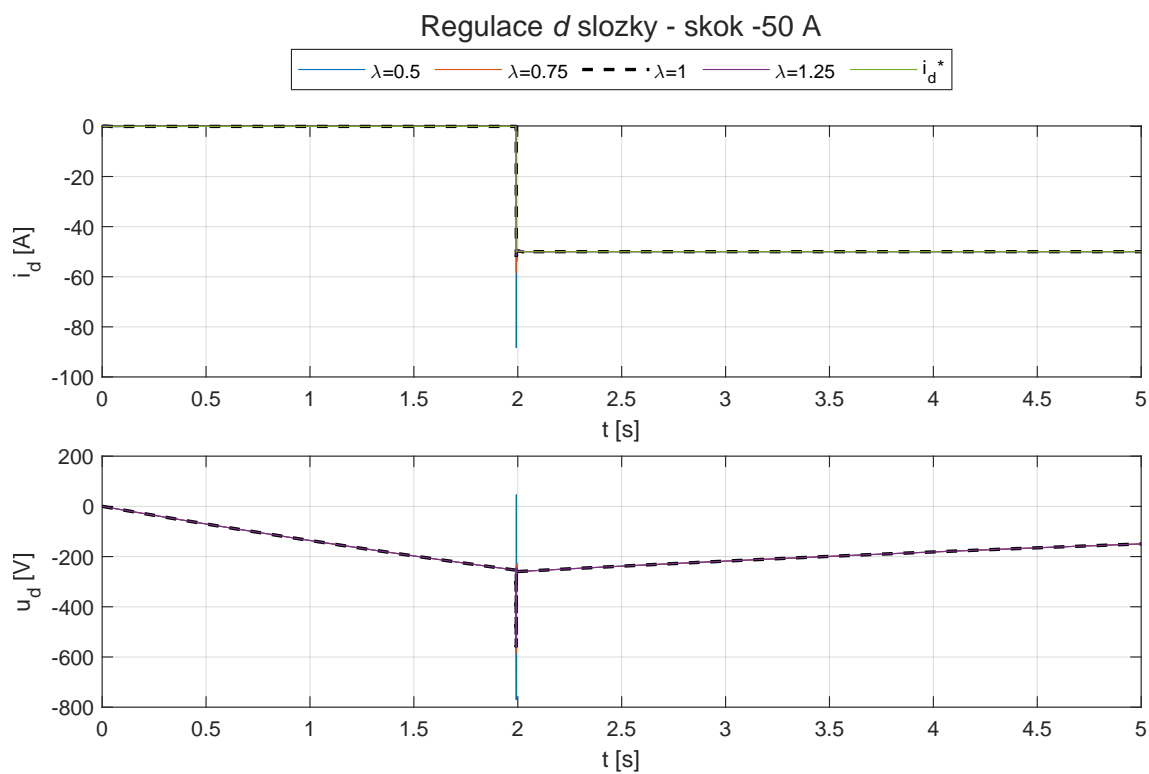
### 3.7 Regulace proudové složky D frakčním řádem

Jako v případě 1.6, nejdříve roztočíme motor pomocí  $i_q$  na požadovanou hodnotu otáček  $\omega_e$  a pak pošleme požadavek na proudovou složku  $i_d = -50A$ .



Obr. 3.8: Zobrazení průběhu Q složky v celém čase a hodnotovém rozsahu

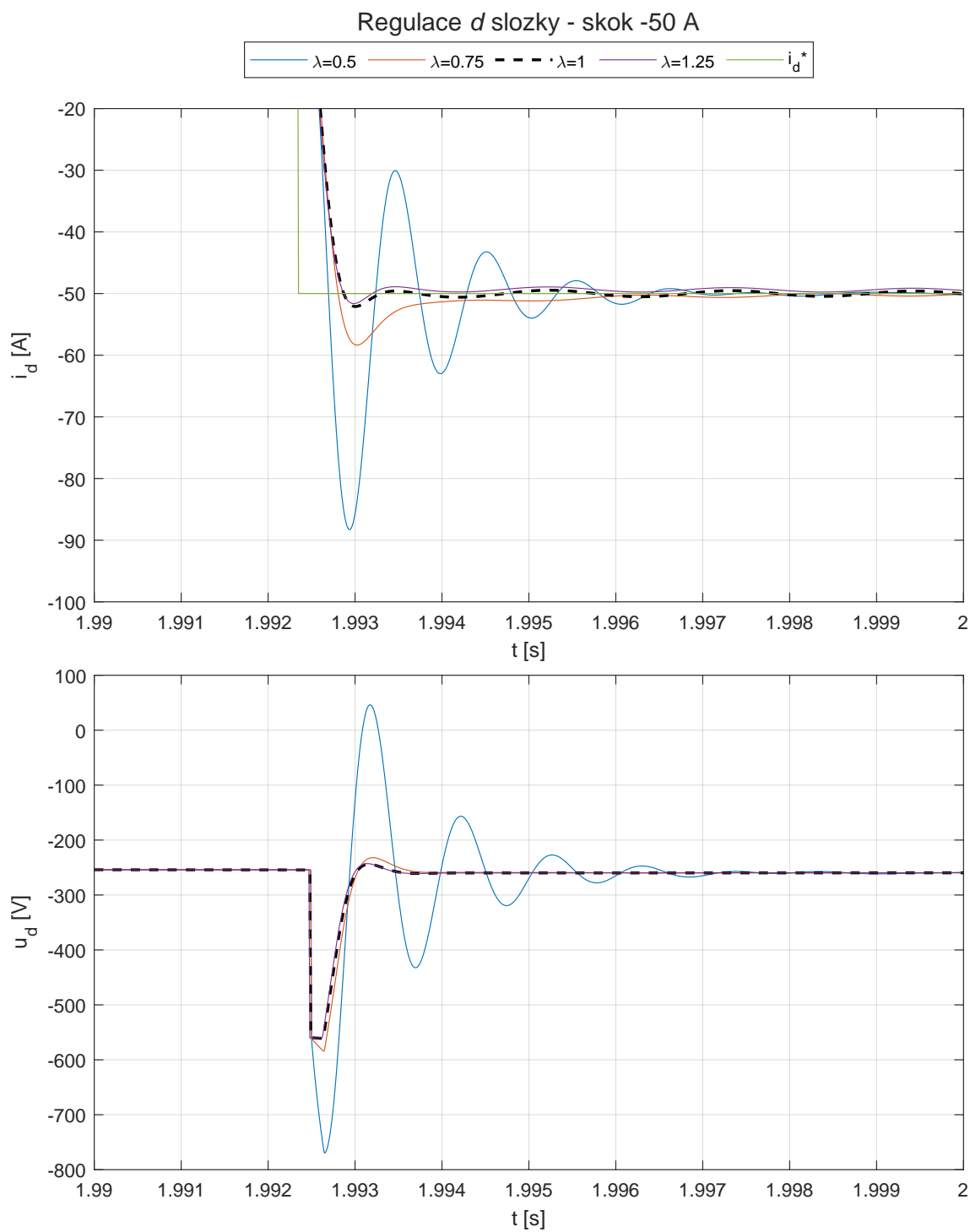
Zde v 3.8 není třeba vykreslovat detail, neboť náběh na požadovanou hodnotu je stejný jako v předchozí podkapitole "Regulace proudové složky Q frakčním řádem". Jediný rozdíl je v čase kolem druhé vteřiny, kdy je zapnut požadavek na  $i_d$  složku a to způsobí lehký rozkmit i již ustálené složky  $i_q$ . Více k vlivu proudové D složky na proudovou složku Q v 1.6.



Obr. 3.9: Zobrazení průběhu v celém čase a hodnotovém rozsahu

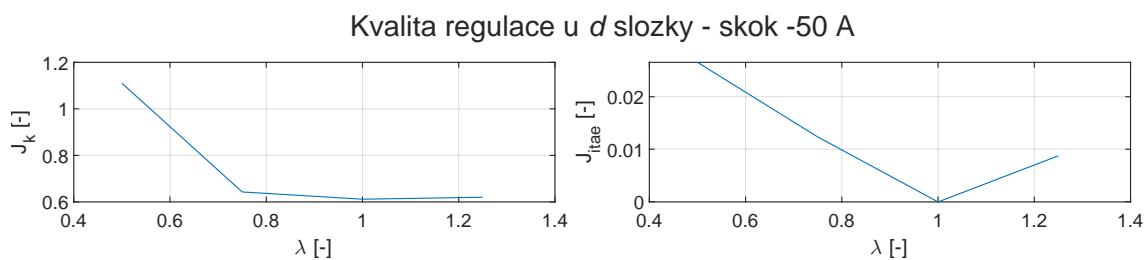
Opět si zde na 3.9 ukazujeme průběh celého amplitudového rozsahu, ale i celého časového rozsahu. To z toho důvodu, že pozorujeme vliv proudové složky  $Q$ .

V detailním zobrazení 3.10 si můžeme ukázat již jednotlivé  $\lambda$ , které reagují na požadavek  $i_d = -50A$ . Opět je zde velmi kmitavý průběh pro  $\lambda = 0.5$ .



Obr. 3.10: Detailní zobrazení přechodného děje z obrázku 3.9

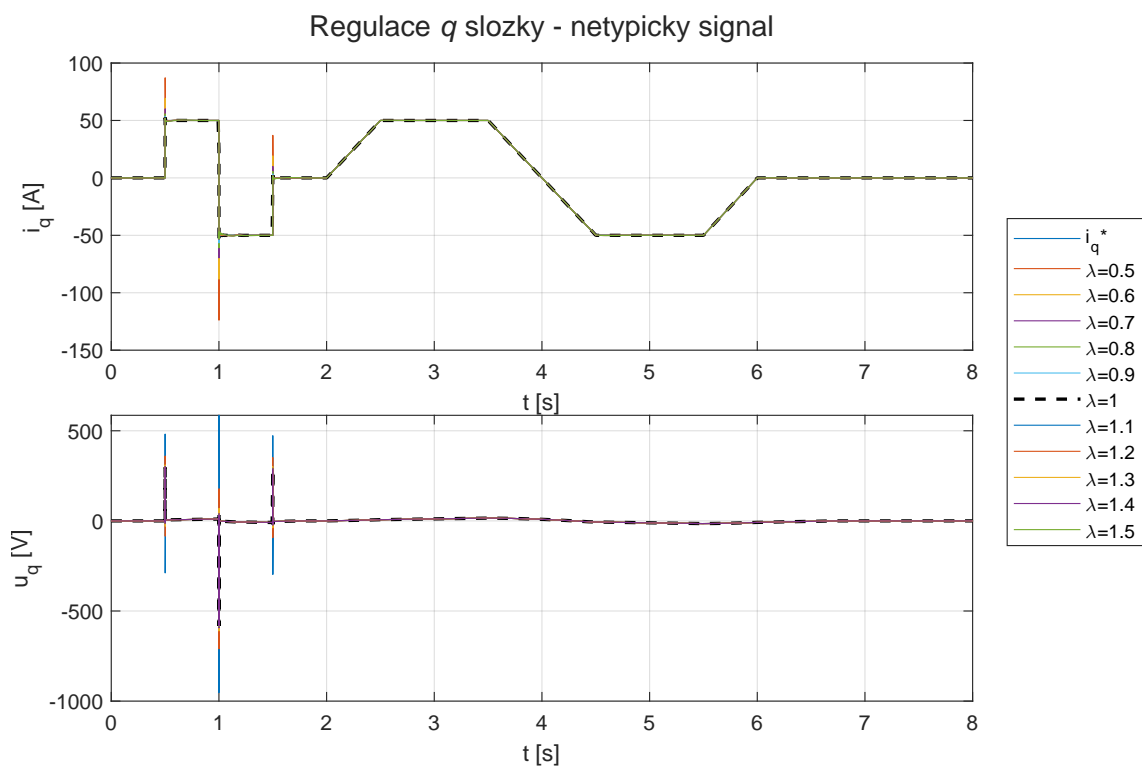
V grafech 3.11 kritériích hodnocení kvality je jednoznačně vidět, že námi navržený regulátor je jednak rychlejší, ale i méně kmitavý.



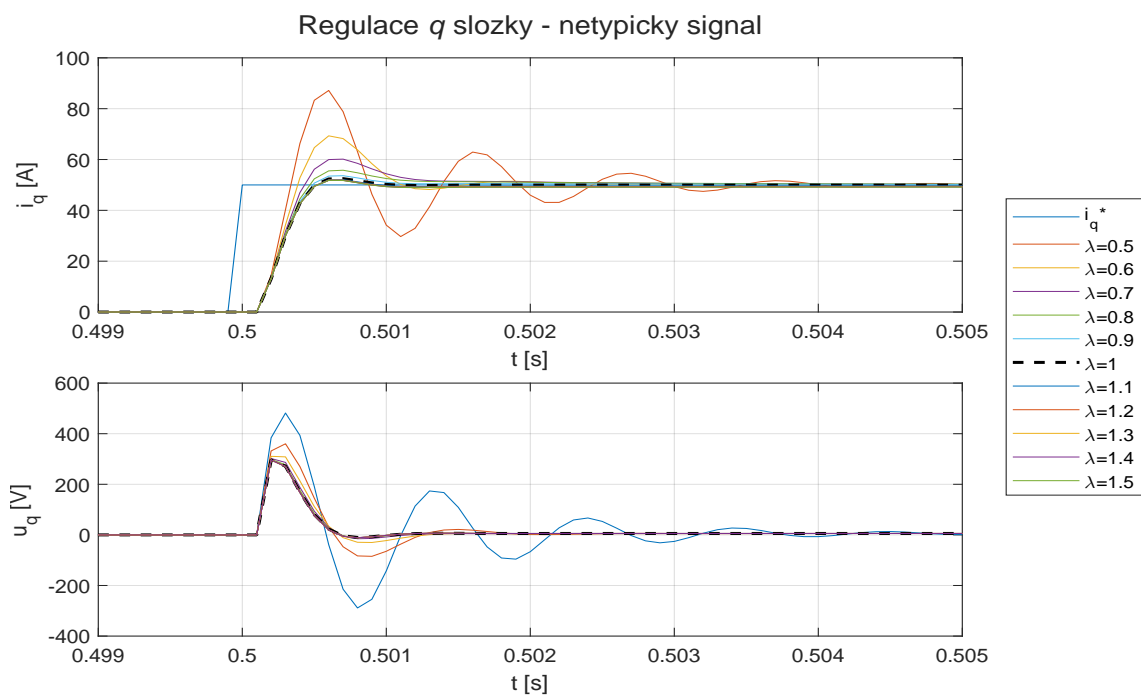
Obr. 3.11: Zobrazení kvality regulace pro jednotlivé  $\lambda$

### 3.8 Výsledky netypického signálu

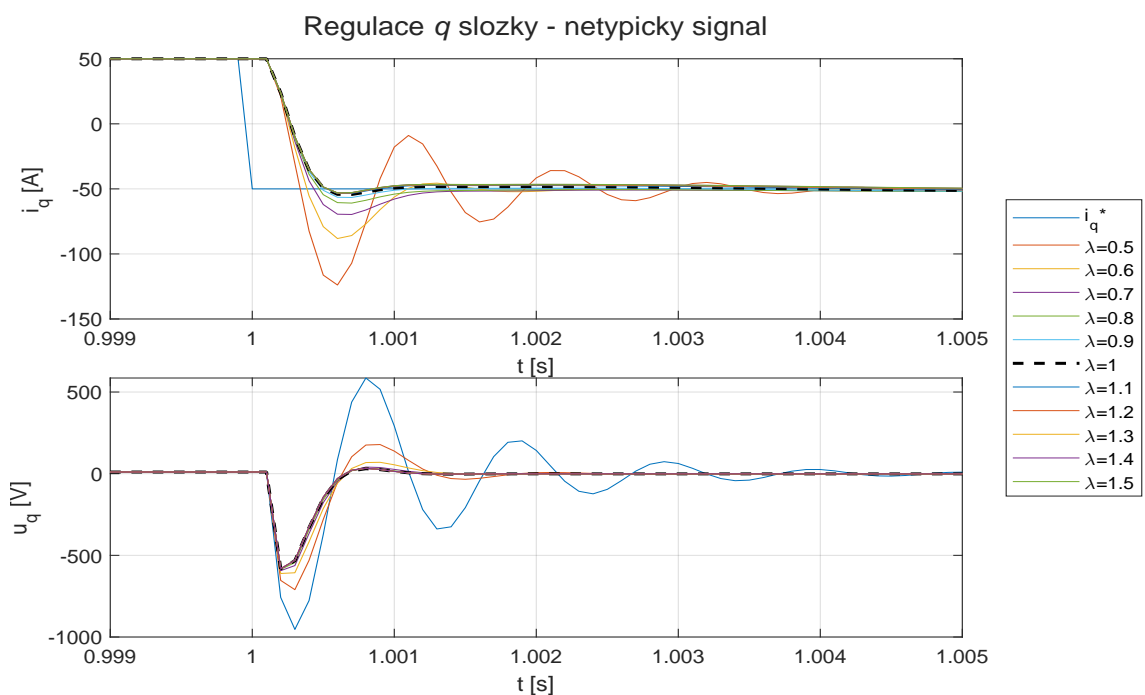
Jako poslední část této práce bych rád ukázal srovnání různých  $\lambda$  pro regulaci proudové složky  $Q$  pro signály typu skok, záporný jednotkový skok (změna směru) a rampa. Rozdíl od průběhu 3.4 je v množství a velikostech zobrazených  $\lambda$ .



Obr. 3.12: Zobrazení celého průběhu - netypický signál

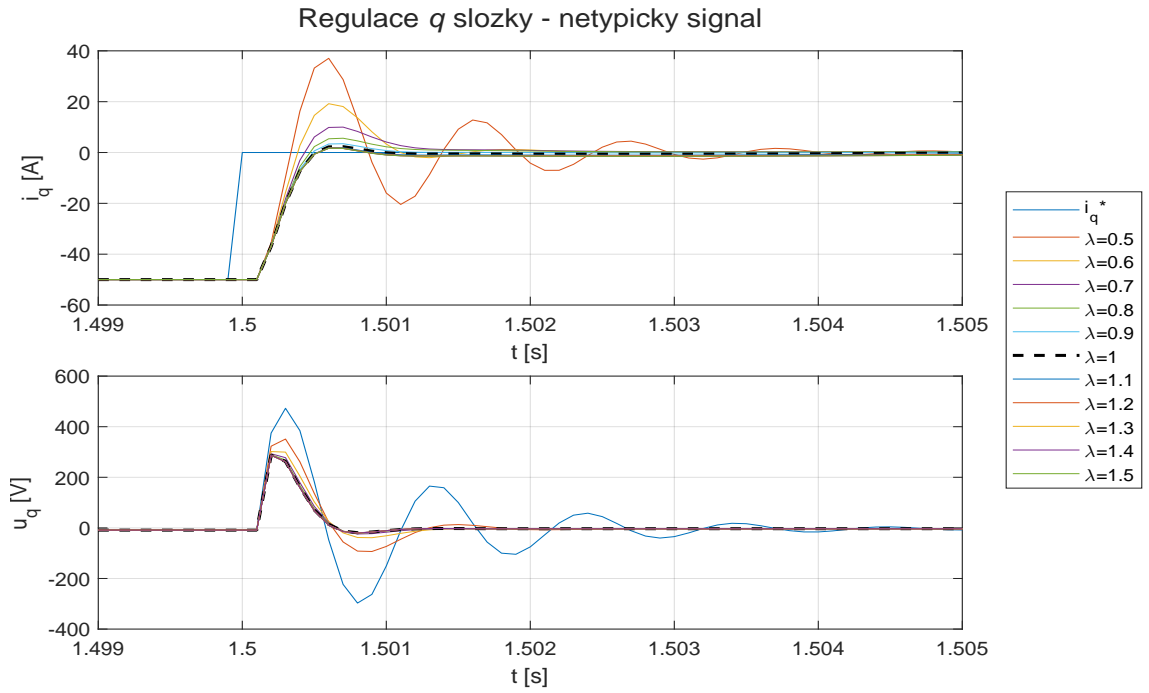


Obr. 3.13: Detailní zobrazení v čase 0.5 s - netypický signál

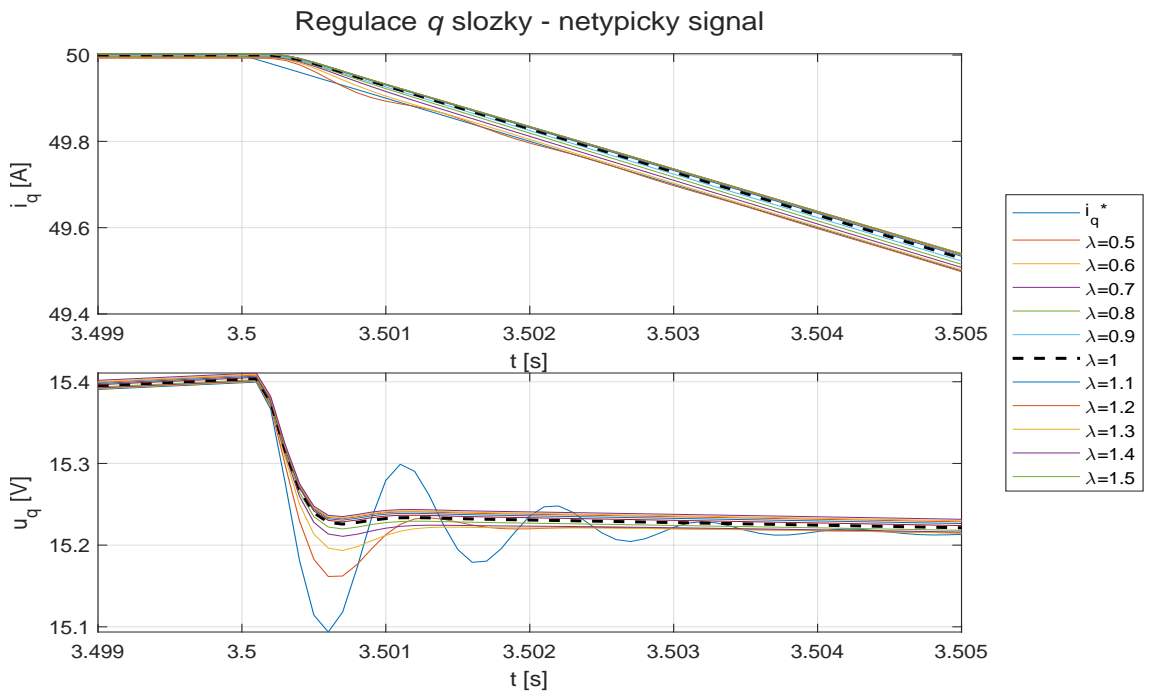


Obr. 3.14: Detailní zobrazení v čase 1 s - netypický signál

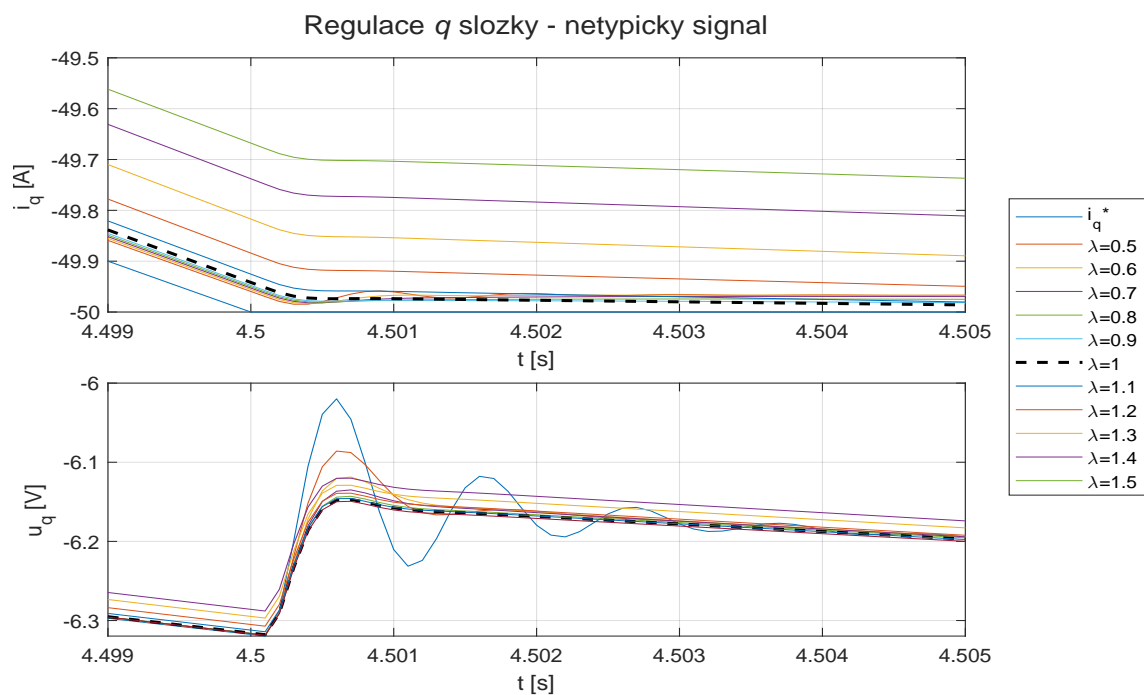




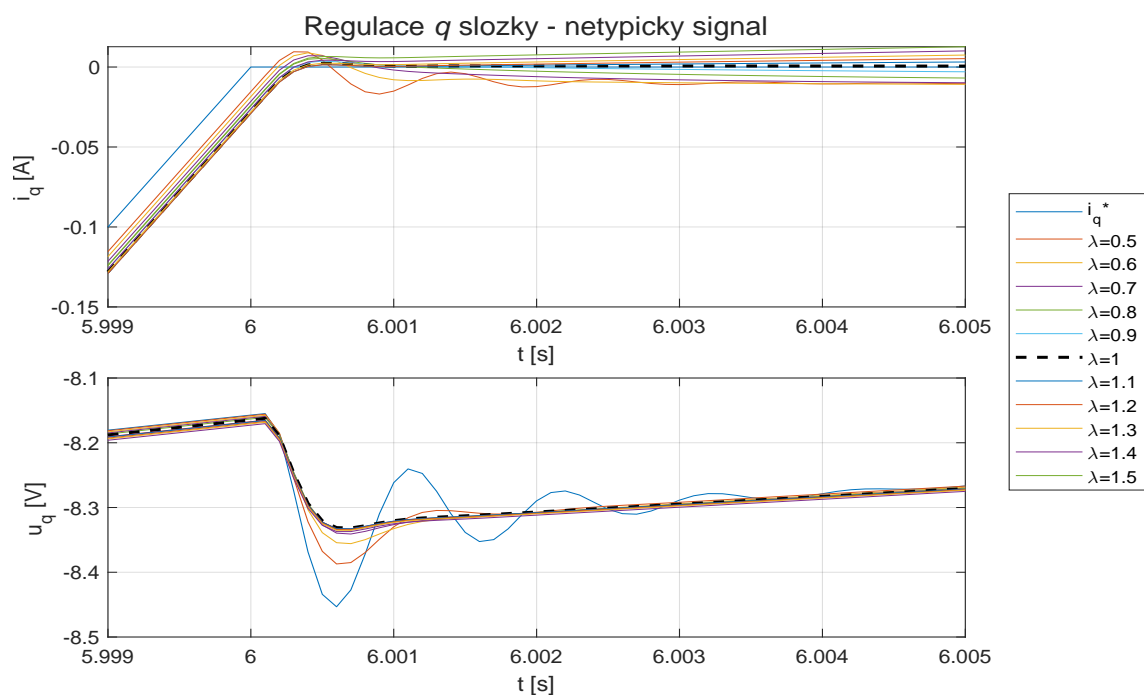
Obr. 3.15: Detailní zobrazení v čase 1.5 s - netypický signál



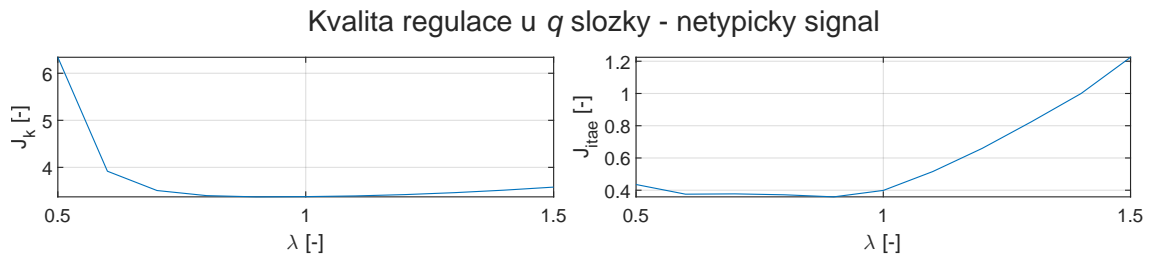
Obr. 3.16: Detailní zobrazení v čase 3.5 s - netypický signál



Obr. 3.17: Detailní zobrazení v čase 4.5 s - netypický signál



Obr. 3.18: Detailní zobrazení v čase 6 s - netypický signál



Obr. 3.19: Kvalita regulace - netypický signál

Účelem celé podkapitoly bylo zobrazit průběhy pro více různých  $\lambda$ . Z důvodu však velkého množství čar nejsou grafy dostatečně přehledné. Při bližším zkoumání jsem našel frakční řady, které vykazovaly rychlejší dobu ustálení, ale pomalejší dobu náběhu. Konkrétně se jednalo o  $\lambda = 1.1$  a  $\lambda = 1.2$ .

# Závěr

V práci byl představen matematický model PMSM a jeho vymodelování v prostředí MATLAB Simulink 1.1.

Na tento systém byl navržen PI regulátor proudů ( $i_d$  a  $i_q$ ) metodou tvarování frekvenčních charakteristik pro fázovou bezpečnost 60 stupňů a následně vykreslení reakce systému po implementaci tohoto regulátoru do systému (viz 2.1 a 2.2). Pro návrh regulátoru bylo použito tzv. "decoupling"1.4, který se postaral o odvazbení proudových složek tak, aby je bylo možné řídit každou zvlášť.

Regulátor otáček byl navrhnout za pomoci nástroje Control System Designer, jehož nastavení je zobrazeno na obrázku 2.4. Reakce systému na požadavek jednotkového skoku je možné vidět na 2.5 a 2.7. V rámci tohoto návrhu bylo implementováno do Simulink "clamping antiwindup"zapojení, které je možné vidět na obrázku 2.6.

Popis frakčních řádů je možné najít na začátku třetí kapitoly, kde je také popsán použitý nástroj FOMCON, který velmi usnadnil implementaci FOPI regulátoru do systému Simulink.

Kvalita regulace je hodnocena pomocí kvadratického integrálního kritéria a ITAE kritéria, která je možné vidět vykreslená na grafech 3.3, 3.7 a 3.11.

Vykreslení průběhů regulace otáček při reakci na jednotkový skok je možné vidět na grafech 3.1 a 3.2. Vykreslení průběhů regulace proudové složky Q při reakci na jednotkový skok je možné vidět na grafech 3.4 a 3.5. Obdobně pak pro proudovou složku D na obrázcích 3.9 a 3.10.

V poslední části jsou pak vykresleny reakce jednotlivých  $\lambda$  pro různé požadované signály, jako je jednotkový skok, nebo rampa.

Na základě pozorování průběhů a hodnocení kvality regulace tato práce poukazuje na to, že regulace frakčním řádem v námi nastaveném motoru a na námi požadované signály nemá smysl, protože klasický PI regulátor vykazuje rychlejší reakce a menší odchylku.

Věřím, že volbou jiné návrhové metody FOPI regulátoru lze získat výsledky, které vykážou lepší chování. Frakční řády jsou velmi komplexní a relativně mladým vědním oborem, regulátory těchto řádů mají bezpochyby větší možnosti než klasické PID regulátory.

# Literatura

- [1] S. K. Sul, Control of electric machine drive system. Hoboken, N.J.: Wiley-IEEE Press, 2011. ISBN 978-0-470-59079-9.
- [2] NEBORÁK, Ivo. Modelování a simulace elektrických regulovaných pohonů. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2002. ISBN 80-248-0083-7.
- [3] Blaha, Petr. Řízení a regulace I: Základy regulace lineárních systémů - spojitě a diskrétní (v. 1.3.9).
- [4] G. Xingye, L. Chuang, Z. Yuefei and W. Kai, "Analysis and dynamic decoupling control schemes for PMSM current Loop," 2016 IEEE International Conference on Aircraft Utility Systems (AUS), Beijing, China, 2016, pp. 570-574, doi: 10.1109/AUS.2016.7748115.
- [5] P. Shah and S. Agashe, "Review of fractional PID controller," Mechatronics, vol. 38. Elsevier BV, pp. 29–41, Sep. 2016. doi: 10.1016/j.mechatronics.2016.06.005.
- [6] Tepljakov, Aleksei & Petlenkov, Eduard & Belikov, Juri. (2011). FOMCON: a MATLAB toolbox for fractional-order system identification and control. International Journal of Microelectronics and Computer Science. 2. 51-62.
- [7] Y. Q. Chen, I. Petras, and D. Xue, "Fractional order control - a tutorial," in Proc. ACC '09. American Control Conference, 2009, pp. 1397–1411.
- [8] Weisstein, Eric W. "Gamma Function." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>
- [9] C. A. Monje, Y. Chen, B. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, Fractional order Systems and Controls: Fundamentals and Applications, ser. Advances in Industrial Control. Springer Verlag, 2010.
- [10] K. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, 1993.
- [11] I. Podlubny, Fractional differential equations, ser. Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1999.
- [12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Volume 204 (North-Holland Mathematics Studies). New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006.

- [13] D. Xue, Y. Chen, and D. P. Atherton, *Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB (Advances in Design and Control)*, 1st ed. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [14] Valerio D , da Costa JS . A review of tuning methods for fractional PIDs. 4th IFAC workshop on fractional differentiation and its applications, FDA, 10; 2010