Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

GeoGebra v aplikacích

GeoGebra in applications

Autor:	Ing. Dagmar Ličková
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	7504T055 / Učitelství fyziky pro střední školy 7504T000 / Společný základ učitelských oborů 7504T089 / Učitelství matematiky pro střední školy
Forma studia:	Kombinovaná
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	25. června 2017

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracovala samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci 25. 6. 2017 .... Lichová

podpis studenta

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora	Ing. Dagmar Ličková
Název práce	GeoGebra v aplikacích
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2017
Abstrakt	Diplomová práce se zabývá tvorbou aplikací ve volně šiřitelném softwaru GeoGebra a má sloužit jako návod pro ty, kteří mají již základní povědomí o GeoGebře jako takové a umí s ní pracovat alespoň na základní úrovni, a chtěli by si zvýšit stupeň práce v ní. Obsahuje popisy a návody, jak vytvářet aplikace k vybraným problémům, se kterými se můžeme setkat nejen v pedagogické činnosti v rámci výuky.
Klíčová slova	GeoGebra, aplikace, příkazy, funkce, Mohrova kružnice
Počet stran	76
Počet příloh	1
Jazyk	Český

Bibliographical identification:

Autor’s first name and surname	Ing. Dagmar Ličková
Title	GeoGebra in applications
Type of thesis	Master
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.
The year of presentation	2017
Abstract	Diploma thesis deals with the creation of applications in GeoGebra free software and should serve as a guide for those who already have basic knowledge about GeoGebre and can work with it at least on a basic level, and would like to increase the level of work in it. It contains descriptions and instructions on how to create applications for selected issues that we can encounter not only in pedagogical activities within the classroom.
Keywords	GeoGebra, applications, commands, functions, Mohr's circles
Number of pages	76
Number of appendices	1
Language	Czech

OBSAH:

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

	Písmena latinské abecedy
E	Modul pružnosti v tahu
GI	GeoGebra instituci
IGI	Mezinárodní GeoGebra instituce
T_{ε}	Tenzor přetvoření [-]
T_{σ}	Tenzor napjatosti [MPa]

	Písmena řecké abecedy
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Zkos [-]
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Hlavní deformace [-]
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Deformace [-]
μ	Poissonova konstanta[-]
ν	Obecné napětí [MPa]
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hlavní normálové napětí [MPa]
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normálové napětí [MPa]
σ_{ρ}	Normálové napětí na obecné skloněné ρ o úhel α [MPa]
τ_{max}	Maximální smykové napětí [MPa]
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}$	Smykové napětí [MPa]
τ_{ρ}	smykové napětí na obecné skloněné ρ o úhel α [MPa]
φ	úhel udávající polohu hlavních rovin [deg]

SEZNAM TABULEK

SEZNAM OBRÁZKŮ

1. ÚVOD

Matematika je často vnímána mezi žáky a studenty jako obtížný předmět, mnozí se jí už předem bojí. To je významná výzva pro učitele matematiky, jak se s tímto problémem vypořádat a jak naučit své žáky lásce a hlavně pochopení tohoto předmětu.

V době když generace mých rodičů, dnešních padesátníků a šedesátníků, navštěvovala základní nebo střední školu, tak neměla dovoleno používat kalkulačky, které sice v té době již existovaly, ale byly spíše symbolem luxusu než šikovnou učební pomůckou. Byly k dostání pouze v Tuzexu nebo dovezeny za velký obnos peněz z kapitalistické ciziny. Z toho důvodu je vlastnil málokdo, a tudíž by bylo krajně nespravedlivé, aby si jeden nebo dva žáci ve třídě takto usnadňovali práci při výpočtech matematických úkolů. Notebooky nebo počítače pro osobní potřebu byly pouze vizí vzdálené budoucnosti a internet patřil do oblasti sci-fi, popřípadě mohl být součástí moderní pohádky na dobrou noc.

Za časů mé povinné školní docházky byly již kalkulačky zařazeny mezi běžné učební pomůcky a staly se tak standardní součástí obsahu školních batohů. Učili jsme se s nimi pracovat již na prvním stupni základní školy. Co se týká počítačů, notebooků a mobilů, tak ty již byly na trhu k dostání, avšak finančně nebyly dostupné pro velkou část rodin. Navíc technické parametry tehdejší výpočetní techniky byly ubohé ve srovnání s dnešními možnostmi.

Žáci, kteří navštěvují základní školu dnes, se narodili do doby, kdy výše zmíněné výdobytky moderní doby patří mezi běžnou součást našich pracovišť i domácností. Proto je pedagogové používají při výuce, a to nejen v předmětu matematiky, a museli tomu přizpůsobit i způsob vyučování. Využívání moderní techniky je bráno dětmi jako přirozená věc, a to že by jim byl odepřen přístup k těmto technologiím, především však o možnosti práce s kalkulačkou, by bylo pro ně těžko pochopitelné.

Existuje mnoho softwarů a aplikací, které jsou využitelné při výuce. Jedním z nich program GeoGebra, hodící se nejenom pro výuku matematiky a geometrie, ale i fyziky, hudební výchovy (možnost tvorby zvuků), výtvarné výchovy (možnost vkládání obrázků) a mnoha dalších. GeoGebra (geo = geometrie, gebra = algebra) je volně šiřitelný software, proto jeho aplikace na školách není závislá na finančních možnostech konkrétního vzdělávacího zařízení. Navíc daný program je k dispozici i v jazyce českém.

Diplomová práce má sloužit jako návod pro ty, kteří mají již základní povědomí o GeoGebře jako takové a umí s ní pracovat alespoň na základní úrovni, a chtěli by si zvýšit stupeň práce v ní. Obsahuje popisy a návody, jak vytvářet aplikace k vybraným problémům, se kterými se můžeme setkat nejen v pedagogické činnosti v rámci výuky.

2. GEOGEBRA

GeoGebra (geo = geometrie, gebra = algebra) je volně šiřitelný software, který vznikl v roce 2001 na univerzitě v Rakousku v rámci závěrečné práce Markuse Hohenwarterema věnující se propojení programů Cabri [7] a Geometer's Sketchpad [8]. Od té doby došlo k rozsáhlému rozšíření možností využití, na kterých se v současné době podílejí týmy programátorů a překladů a na celém světě.

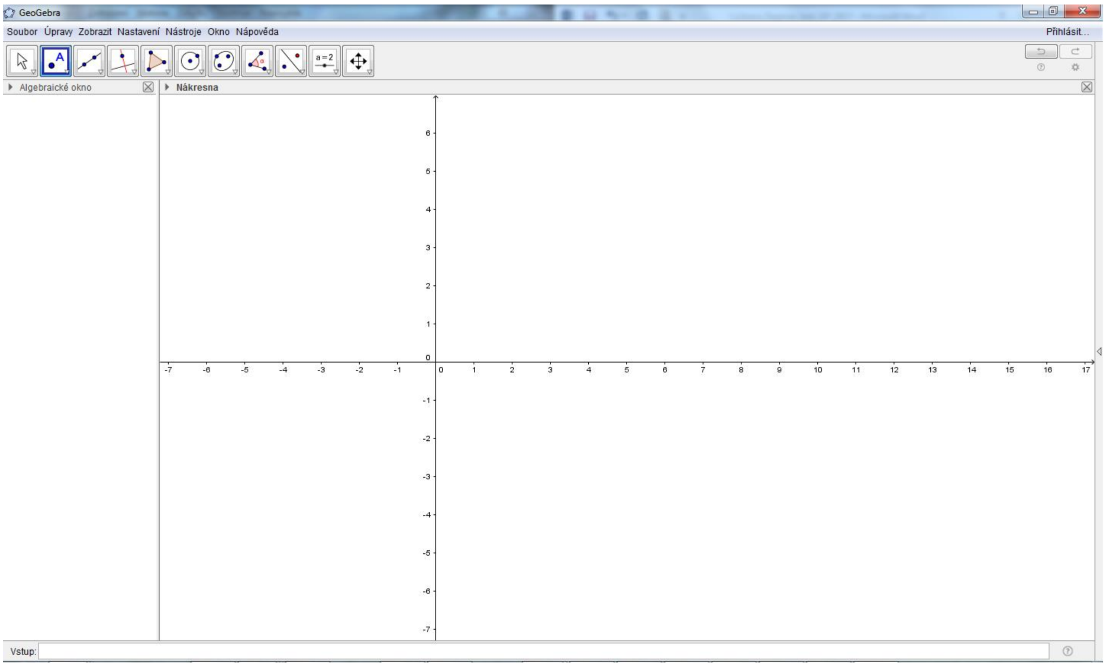
Výhodou GeoGebry je její intuitivní ovládání, které je podpořeno českou jazykovou mutací včetně úvodního manuálu, proto se tato práce nebude zabývat základy softwaru. Pro úplné začátečníky lze doporučit následující literaturu: [14][15]. Pokud chce ale uživatel využívat pokročilejší funkce, musí většinou využít příručky či diskuzní fóra v cizím jazyce, převážně anglickém.

Současná verze GeoGebry je 6 [10]. Předchozí verze 5.0 [9] je ale neustále rozšířená mezi uživateli a poskytuje klasické prostředí (viz Obr. 1), ovšem jsou zde nově přidány funkce pro kreslení 3D grafů, pravděpodobnostní kalkulačka a nabízí plně rozvinutou možnost CAS[1]. Nejnovější verze 6, která se neustále zdokonaluje, již nabízí nový design (viz Obr. 2) uzpůsobený požadavkům současných uživatelů. Zaručuje kompatibilitu s operačními systémy Windows, macOS, Linux a iOS. Lze ji spustit také pohodlně přes tablety, smatphony či pracovat online na internetu. Je to velmi výhodné, protože používání mobilních technologií podporuje spolupráci, neboť simuluje osobní komunikaci mezi studenty, která je důležitá v moderním procesu výuky a učení. Vzhledem k tomu, že v GeoGebře jsou kombinovány různé možnosti (algebra, grafika, tabulky a podobně), tak GeoGebra je komplexní program, který má pozitivní dopady na výuku matematiky.

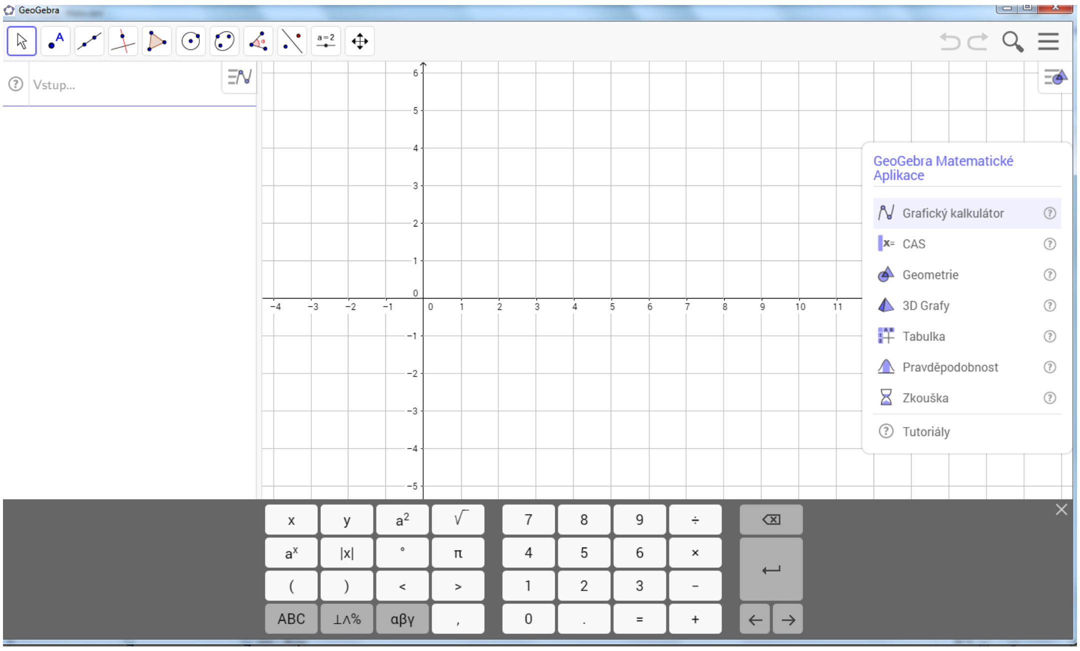
Přehled příkazů GeoGebry využitých v diplomové práci je uveden v tištěné příloze 10.1. Seznam příkazů se neustále rozrůstá. Jestliže se příkaz nenachází v českém obsahu, pak lze doporučit prostudovat anglický originál [22].

1 CAS neboli Computer Algebra System slouží k symbolickým výpočtům. [20]

Instalace je velice intuitivní a v případě jakýchkoli problémů jsou k dispozici podrobné instrukce [11].



Obr. 1 Klasické prostředí GeoGebra 5.0



Obr. 2 Nový design - GeoGebra 6

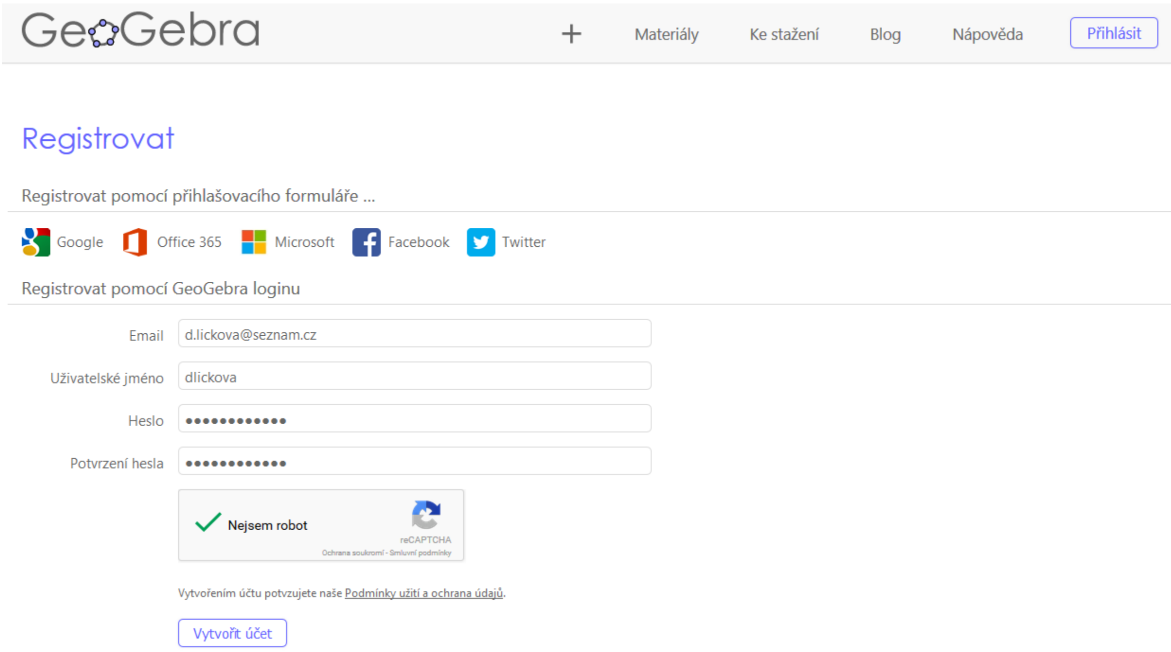
Na oficiálních stránkách GeoGebry https://www.geogebra.org se lze dočíst o četných oceněních, ať už evropských, či světových. Jmenujme například Archimedes Prize, která se udílela v roce 2016 v německém Hamburgu. Jedná se o cenu renomovaných matematiků a fyziků. Předává se každý lichý rok fyzikům a v sudé roky matematikům.

O softwaru GeoGebra byly napsány i odborné články [12]. Výzkumy například srovnávají využití matematických softwarů ve výuce geometrie či funkcí. Mnoho autorů se shoduje na tom, že výuka za pomocí dynamické geometrie má na žáky pozitivní vliv a vykazují větší motivaci k pochopení daného problému [2], [6]. Najdou se také ale výzkumy, které došly opačným závěrům [3]. Nelze tedy generalizovat tvrzení, že výuka za pomocí moderních prostředků je pro studenty i učitele vždy tou nelepší volbou. Je důležité, aby učitel volil vhodné přístupy a aplikace při výuce jednotlivých problémů. Diplomová práce Veroniky Havelkové z roku 2012 [4] přináší rešerši a porovnání článků, a to především při využití programu ve školním prostředí.

Zajímavostí je založení časopisu s názvem North American GeoGebra Journal [13], jenž byl poprvé vydán v roce 2012 na University of New England. Jde o severoamerický vzdělávací časopis publikující články o využívání softwaru GeoGebra ve výuce matematiky na všech úrovních vzdělávání. Časopis poskytuje médium, pomocí něhož lze prezentovat, diskutovat, kritizovat a osvojit si široké spektrum zkušeností v matematické výchově. Časopis vydává příspěvky týkající se jakéhokoli aspektu využití GeoGebry. Hlavním kritériem přijetí článku je, že materiál by měl přispět k poznání v této oblasti. Typy příspěvků jsou: výzkumné práce, aktivity pro vyučování v třídách a applety v GeoGebře.

2.1 Sdílení informací na internetu

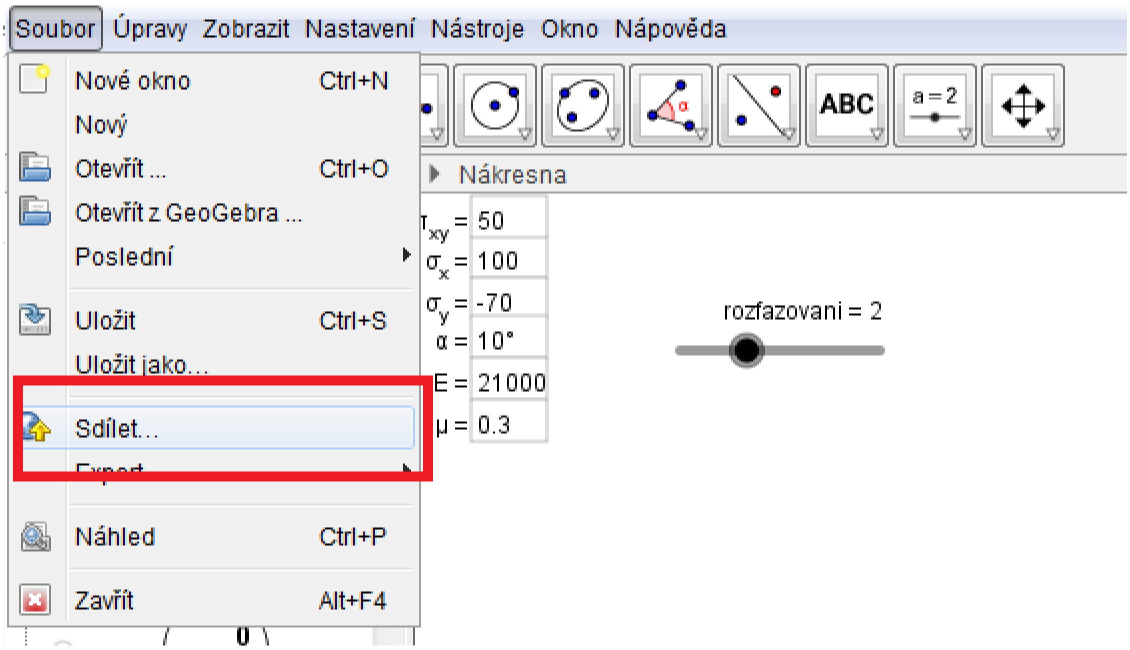
GeoGebra umožňuje založení vlastního profilu [16], na který si každý smí vkládat své materiály a ty následně sdílet s uživateli celého světa. Do svého portfolia lze vkládat i texty, obrázky, videa, pdf soubory a mnoho dalšího. Díky tomu můžeme využívat statisíce výukových materiálů, které lze případně modifikovat dle našich požadavků. Zřízení účtu není časově náročné. Stačí se jen zaregistrovat (viz Obr. 3).



Obr. 3 Registrační formulář GeoGebry

Po registraci se lze zapojit do skupin či sledovat příspěvky a materiály od vybraných účastníků. Svým způsobem tento systém připomíná matematický Facebook, což studenti velmi ocení. V rámci skupiny probíhají diskuze, hodnocení nebo testování se navzájem. Skupiny fungují jako virtuální učebna pro žáky, kdy se podpoří jejich vzájemná spolupráce. Můžeme zde vkládat testy a provádět jejich následné hodnocení a podobně. Podrobný návod v jazyce českém je samozřejmě k dispozici [17]. Je to také vhodná alternativa pro ty, kteří nemají k dispozici své webové stránky, ale zároveň chtějí být v neustálém spojení se svými studenty.

GeoGebra soubory nahrajeme na profil dle Obr. 4. Poté se jen přihlásíme na svůj účet a zařadíme do příslušné složky neboli knihy. Výhodou je, že máme všechny soubory na jednom místě v přehledné a dostupné formě.



Obr. 4 Sdílení souboru na internetu

Aplikace, které vnikly a jsou popsány v diplomové práci, umístím na svůj profil dlickova. Zároveň podklady vztahující se k Mohrově kružnici budou k dispozici na mých webových stránkách http://homel.vsb.cz/~lic098/7.cviceni_VZM.html, jež slouží především studentům Vysoké škole báňské – Technické univerzitě v Ostravě, jako zdroj výukových materiálů k předmětům Pružnost a pevnost I. a Vlastnosti a zkoušení materiálu.

Nejen při počátečním bádání nad uchopením GeoGebry, jako výukovým materiálem, lze učitelům jednoznačně doporučit prostudování již vzniklých aplikací nebo pracovních listů.

2.2 GeoGerba instituce

GeoGebra instituci (GI) zakládají skupiny uživatelů, nejčastěji vysokoškolští či středoškolští pedagogové. Tyto místní GI jsou podporovány a koordinovány mezinárodním GeoGebra institucí (IGI). Abyste mohli založit místní oficiálně akreditovanou GI, musíte zaslat přihlášku IGI. GI se snaží usnadnit vzájemné budování a sdílení znalostí komunity v souvislosti s používáním GeoGebry.

GI má za úkol nabízet školení a online kurzy pro učitele a budoucí školitele GeoGebry, uděluje certifikáty, pořádá workshopy a roadshow do vzdálenějších oblastí, podporuje místní uživatele prostřednictvím webu, emailu nebo Facebooku. Také se podílí na vývoji a výzkumu softwaru, propaguje GeoGebru, pořádá soutěže, píše články a podobně.

V České republice existují dva GI. První z nich sídlí v Českých Budějovicích [19] a druhý v Ostravě [18]. Před založením ostravského institutu v rámci VŠB – TUO se začala GeoGebra přednášet na Hornicko-geologické fakultě v rámci předmětu Matematika na počítači a základy programování v akademickém roce 2012/2013. Od té doby zaznamenala rozkvět a začaly se množit interaktivní výukové materiály v rámci výuky celoškolského pracoviště matematiky a deskriptivní geometrie.

Ostravský GeoGebra institut nabízí wokshopy a kurzy. Například workshop, který se konal v Olomouci 31. května až 2. června 2017 na Univerzitě Palackého na katedře matematické analýzy. Kurzy jsou většinou zpoplatněny částkou 800 Kč za účastníka. Navíc se její členové podílejí od roku 2012 na konferenci Czech-Polish Conference.

Modern Mathematical Methods in Engineering (3mi), kde v rámci sborníků najdeme praktické rady a tipy z GeoGebra workshopů aplikovatelné i při běžné výuce na všech typech škol. Letošní konference se uskutečnila 7. až 9. června v polském Rybníku blízko u českých hranic. Další konference se budou konat v rakouském Linzi na univerzitě Johannese Keplera od 18. do 20. července. V nedaleké Varšavě na univerzitě společenských věd a humanitních oborů pořádají srpnovou konferenci pod názvem Východozápadní konference o matematické výchově 2017. Cílem je odbourávání bariér mezi matematikou a společenskými vědami. Konference se pořádají také na americkém kontinentu. Na stránkách http://events.geogebra.org/ jsou k nahlédnutí aktuální informace o pořádaných konferencích.

2.3 GeoGebra součástí Microsoft Office

Na oficiálních stránkách Microsoft Office (https://store.office.com/) je nabízen Doplněk pro PowerPoint 2013 Service Pack 1 nebo novější, PowerPoint 2016 for Mac, PowerPoint Online, Word 2013 nebo novější a Word 2016 for Mac. Poskytovatelem je IGI. Po instalaci máme možnost pouštět aplikace přímo z rozhraní Wordu i PowerPointu.

3. APLIKACE NA FUNKCE

Celou středoškolskou matematikou se prolínají funkce, proto si v kapitole 3 popíšeme příkazy vztahující se k funkcím a vytvoříme několik ukázkových aplikací. K určení průběhu funkce lze doporučit následující nástroje GeoGebry [21]:

- ***Graf funkce:*** vykresluje se automaticky po zadání funkce.
- ***Předdefinované funkce:*** funkce lze generovat automaticky například: NormalniRozdeleni[<Střední Hodnota>, <Směrodatná odchylka>, x], NahodnyPolynom[<Stupeň>, <Minimum pro koeficienty>, <Maximum pro koeficienty>] a podobně.
- ***Definiční obor:*** v GeoGebře neexistuje příkaz, proto je zapotřebí analytického přístupu, ale jako vodítko může posloužit vykreslený graf funkce.
- ***Obor hodnot:*** díky příkazu Invertovat[<Funkce>] získáme inverzní funkci, díky které snadno určíme obor hodnot zkoumané funkce.
- ***Parita:*** parita funkce se řeší vykreslením grafu $-f(x)$ a $f(-x)$ a následným porovnáním s $f(x)$. Druhou variantou je výpis uvedených funkcí v okně CAS nebo využít příkazu Zjednodusit[<Funkce>], který zkoumanou funkci upraví do základního tvaru.
- ***Limity v krajních bodech intervalu:*** vyčíslí se pomocí příkazů Limita[<Funkce>, <Hodnota>], LimitaZleva[<Funkce>, <Hodnota>] nebo LimitaZprava[<Funkce>, <Hodnota>].
- ***Průsečíky s osami:*** lze řešit hned několika způsoby například: Prusecik[<Objekt>, <Objekt>], Koreny[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>], NuloveBody[<Polynom>].
- ***Monotónnost funkce:*** vyřešíme pomocí derivace funkce: Derivace[<Funkce>] a následně najdeme průsečíky s osou x. Nebo můžeme použít příkaz Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>].
- ***Konvexnost, konkávnost a inflexní body:*** získáme jednoduše pomocí druhé derivace funkce. V případě, že je vstupní funkce mnohočlen (polynomiální funkce), existuje příkaz InflexniBod[<Mnohočlen>].
- ***Asymptoty:*** vyšetříme příkazem Asymptota[<Funkce>]. Získáme jak asymptoty bez směrnice, tak i se směrnicí.
- ***Vyšetření funkce jen na intervalu $I \in < a, b >$:*** využijeme příkazu Funkce[<Funkce>, <Počáteční hodnota>, <Koncová hodnota>].

V následující tabulce jsou uvedeny základní tvary funkcí a jejich předpis do programu GeoGebra. Na posledních dvou řádcích jsou uvedeny složitější funkce:

Tabulka 1 Zápis vybraných funkcí do GeoGebry

Zadáno	Geogebra
$x^2, x^3, \ldots, (x^2+1)^2, \ldots$	x^2,x^3,…,(x^2+1)^2…
$\lvert x \rvert$	abs(x)
$\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^5}, \sqrt[3]{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$	x^(1/2),x^(1/3),(x)^(5/3),(x+pi/6)^(1/3)
π, e^{-2x}, e^{x^2}, e	pi,exp(-2*x),exp(x^2),exp(1)
$\ln(x), \ln(x^2), \ln^2(x)$	log(x), log(x^2), (log(x))^2
$\log(x), \log(x^2), \log^2(x)$	log(10,x), log(10,x^2), (log(10,x))^2
$\sin(x^2), \sin^2(x)$	sin(x^2), (sin(x))^2
$\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\mathrm{arccotg}(x)$	asin(x), acos(x), atan(x), acot(x)
$\sqrt[3]{\sin(3x-1)+2} - \ln(x^3+4)$	(sin(3*x-1)+2)^(1/3)-log(x^3+4)
$\dfrac{\sqrt[5]{e^{8x+6}-1}}{2^x+8}$	((exp(8*x+6)-1)^(1/5))/(2^x+8)

Na procvičení zadávávání funkcí může posloužit applet s názvem Průběhy funkcí, který je umístěn na mém GeoGebra profilu:

Zapište do Geogebry následující funkce, určete jejich extrémy.

1.	$f(x) = \dfrac{5\sin(2x) - \sqrt{3-x}}{1+2^x} + \dfrac{\ln^2(-3x+2)}{-x^3-2}$
2.	$f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\sin^2(x) - \dfrac{8\left(e^{1-x} + \frac{1}{2}x\right)}{e^x} + 12$
3.	$f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{5}x - 3\right) + \dfrac{2\lvert x+1-3^x\rvert}{x^3 - \sqrt{x+3}} + 2$
4.	$f(x) = \cos(2x - x^2 + 9) + \ln\left(\dfrac{2x+3}{3x+1}\right) + 5x + 10$
5.	$f(x) = \left(2x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 + 14\right)e^{-x+\frac{1}{4}x^2} + \sqrt[3]{x} - 20$
6.	$f(x) = 10\dfrac{\sin(\pi x^2)}{\log\sqrt{3^{2x+8}+4} - 5} + e^{\frac{4}{5x}}$
7.	$f(x) = \dfrac{7\sqrt[3]{\log(x^2+3) - 4}}{\left\lvert \frac{e^{\frac{1}{x}+1}}{3+\sin(\pi+x)} \right\rvert - 2} + \dfrac{1}{\mathrm{tg}(x)+1}$
8.	$f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\ln^2(x-6)^7}{2x^3 + 5\sin\sqrt{\frac{e+x}{e^x}}} + 10\left(\cos(x + \dfrac{\pi}{3})\right)$
9.	$f(x) = 4\sqrt{\dfrac{\ln(e^{x+3}+5)+3}{\frac{3x}{\pi}} + \sin^2(x^2) + 5}$
10.	$f(x) = \sin\left(\left(3 + \sqrt{\dfrac{\log(\frac{x}{e^4}) + 2}{\mathrm{arctg}(\frac{x}{4})}}\right)^3 + 6\right) - x$

11.	$f(x) = x^3\left(\arcsin(x^3) + \arccos(x^5)\right)^4 - x^3\sqrt{(1-x^2)}$
12.	$f(x) = x\ln\dfrac{\sqrt{2+2x^2} - x}{\sqrt{2+2x^2} + x} + \log(x + \sqrt{1+x^2})$
13.	$f(x) = \dfrac{x^3}{10}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + \log\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$
14.	$f(x) = \dfrac{e^{\sin(x)+\cos(x)} + 3^{5x-x^2}}{\mathrm{arctg}^2\, x}$
15.	$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^4}{1+x^2}} + \left\lvert \dfrac{4^{x+3} + \cos(\pi + x)}{100^x + e^{\sqrt{x^2+x+1}}} \right\rvert$
16.	$f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{3^x - \sin^2 x}{x^{\cos x^2}}}$
17.	$f(x) = \dfrac{(x\,\mathrm{tg}\,x)^2 - \sin x^2}{\frac{5}{x} - x}$
18.	$f(x) = \dfrac{\frac{e^{x^2-x+1}}{x^9} - \ln(10 - \sin x)}{50}$
19.	$f(x) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x + \cos x}{e - x}\right) + \ln(x^4 - 2)^2$
20.	$f(x) = \dfrac{\sin(x+\pi)\,\mathrm{tg}(x-\pi)}{\mathrm{cotg}(x+\pi) - \cos(x-\pi)}\ln(x+\pi)^2$

Řešení je umístěno zde: homel.vsb.cz/~lic098/files/prubeh.rar

Obr. 5 Funkce k procvičení

V kapitole 3.1 vytvoříme aplikaci na znázornění monotonie, konvexnosti a konkávnosti, kde si popíšeme význam zaškrtávacího tlačítka, jehož hlavní funkcí je zobrazovat a skrývat vybrané objekty. Kapitola 3.2 nás seznámí s tlačítkem, možností vkládat do nákresny obrázky a s příkazem NahodneMezi[<Minimum (celé číslo)>, <Maximum (celé číslo)>], generující náhodná celá čísla ze zadaného uzavřeného intervalu. V kapitole 3.3 sestavíme aplikaci na extremální úlohu, kde si vypíšeme možnosti, jak danou úlohu interpretovat v GeoGebře.

Nyní si shrneme základní definice vztahující se k funkcím, které byly a budou použity v diplomové práci [1]:

Definice funkce jedné proměnné

Říkáme, že na množině D reálných čísel je definována funkce f jedné proměnné, je-li dán předpis, podle kterého je každému číslu $x \in D$ přiřazeno právě jedno reálné číslo y. Množinu D nazýváme definičním oborem funkce. Množina H všech čísel y, která dostaneme pro všechna $x \in D$, nazýváme oborem hodnot dané funkce. Číslo x se nazývá nezávisle proměnná (argument), číslo y nazýváme funkční hodnotou nebo závisle proměnnou.

Definice funkce sudé

Funkci $f(x)$ definovanou v oboru D symetrickém podle počátku soustavy souřadnic nazýváme sudou, jestliže pro všechna *x* z tohoto oboru platí $f(-x) = f(x)$.

Definice funkce liché

Funkci $f(x)$ definovanou v oboru D symetrickém podle počátku soustavy souřadnic nazýváme lichou, jestliže pro všechna *x* z tohoto oboru platí $f(-x) = -f(x)$.

Definice funkce periodické

Funkci $f(x)$ definovanou v D, nazýváme periodickou**,** existuje-li takové číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D$ je i $(x + p) \in D$ a platí $f(x+p) = f(x)$. Nejmenší kladné číslo *p*, které splňuje $f(x+p) = f(x)$, nazýváme periodou funkce**.**

Definice monotónnosti funkce

Nechť je dána funkce $f(x)$ v intervalu I a libovolná čísla x_1, x_2 z intervalu I taková, že $x_1 < x_2$. Říkáme, že funkce $f(x)$ je v intervalu I:

- rostoucí, jestliže platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- klesající, jestliže platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- neklesající, jestliže platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- nerostoucí, jestliže platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Všem čtyřem typům říkáme monotónní funkce. Rostoucí a klesající funkce jsou ryze monotónní.

Definice ohraničenosti funkce

Funkce $f(x)$ se nazývá shora ohraničená v oboru D, jestliže existuje takové číslo K, že pro všechna $x \in$ D platí $f(x) \leq$ K. Funkce $f(x)$ se nazývá zdola ohraničená v oboru D, jestliže existuje takové číslo K, že pro všechna $x \in$ D platí $f(x) \geq$ K. Funkce ohraničená shora i zdola se nazývá ohraničená.

Definice spojité funkce

Nechť funkce $f(x)$ je definována v některém okolí bodu a. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že pro všechna x z okolí $(a - \delta, a + \delta)$ bodu a patří funkční hodnoty $f(x)$ do okolí $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ bodu $f(a)$.

Definice funkce prosté

Říkáme, že funkce $f(x)$ je prostá na intervalu I právě tehdy, když různým hodnotám $x_1 \neq x_2$ z intervalu I odpovídají různé hodnoty $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definice derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0

Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$ A, říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci. Číslo A nazýváme derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme je nejčastěji některým ze symbolů: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$. Píšeme

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.Funkce, která má v bodě x_0 derivaci, se nazývá diferencovatelná v bodě x_0.

Definice tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0

Tečnou grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T $[x_0, f(x_0)]$ rozumíme přímku procházející tímto bodem a mající směrnici $k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Neexistuje-li tato limita, resp. je-li nevlastní nebo funkce $f(x)$ není v bodě x_0 spojitá, řekneme, že v bodě T tečna neexistuje.

Definice rostoucí a klesající funkce v bodě x_0

Funkci nazýváme rostoucí v bodě x_0 , existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f(x) > f(x_0)$.

Funkci nazýváme klesající v bodě x_0 , existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f(x) > f(x_0)$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f(x) < f(x_0)$.

Věty

- Je-li $f'(x_0) > 0$, potom je funkce $f(x)$ rostoucí v bodě x_0.
- Je-li $f'(x_0) < 0$, potom je funkce $f(x)$ klesající v bodě x_0.
- Má-li derivace funkce $f(x)$ v každém bodě intervalu (a,b) kladnou (resp. zápornou) hodnotu, je v tomto intervalu rostoucí (resp. klesající).

Definice lokálního maxima funkce v bodě x_0

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální maximum, existuje-li takové okolí bodu x_0, že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \leq f(x_0)$. Platí-li vztah $f(x) < f(x_0)$, říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Definice lokálního minima funkce v bodě x_0

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum, existuje-li takové okolí bodu x_0, že pro všechna $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \geq f(x_0)$. Platí-li vztah $f(x) > f(x_0)$, říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Definice stacionárního bodu

Stacionárním bodem funkce $f(x)$ nazýváme všechna čísla x_0 z definičního oboru funkce *f*, ve kterých je $f'(x_0)=0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta (postačující podmínka existence lokálního extrému)

Nechť $f'(x_0)=0$ a nechť v bodě x_0 existuje druhá derivace. Je-li $f''(x_0)<0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum. Je-li $f''(x_0)>0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Definice konvexnosti a konkávnosti funkce

Jestliže v každém bodě x intervalu I je funkce $f(x)$ konvexní (resp. konkávní), říkáme, že je konvexní (resp. konkávní**)** v intervalu I**.**

Věta o konvexnosti a konkávnosti funkce

Je-li $f''(x_0)>0$ (resp. $f''(x_0)<0$), je funkce $f(x)$ v bodě x_0 konvexní (resp. konkávní).

Definice inflexního bodu funkce

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci. Přechází-li graf funkce z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou nebo naopak, nazýváme bod x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$.

Věta o inflexním bodu funkce

Je-li x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$ a má-li $f(x)$ v tomto bodě druhou derivaci, pak $f''(x_0)=0$.

Definice asymptoty se směrnicí

Nechť je dána funkce $f(x)$ definovaná v nekonečném intervalu. Nechť bod P se po grafu této funkce pohybuje do nekonečna (tedy $x\to-\infty, x\to+\infty$). Asymptotou se směrnicí funkce $f(x)$ nazýváme přímku, jejíž vzdálenost od bodu P se při pohybu bodu P po grafu blíží k nule.

Definice asymptoty bez směrnice

Přímku, která má rovnici $x=a$ nazýváme asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$**,** jestliže funkce $f(x)$ má v čísle a nevlastní limitu nebo nevlastní limitu zleva nebo nevlastní limitu zprava.

3.1 Aplikace na znázornění monotonie, konvexnosti a konkávnosti

Cílem aplikace na znázornění monotonie, konvexnosti a konkávnosti je vytvořit přehlednou pomůcku na důkladné pochopení probírané problematiky. Pracovní list bude obsahovat rozbor funkce $f(x) = \frac{1}{5}\sin^2(x)\cos^2(\mathrm{x} + \pi)$ na intervalu $x \in < -3{,}3 >$.

Podproblém: nejprve je nutné nadefinovat správně zadanou funkci tak, aby odpovídala zadání. Pomůckou při sestavovaní funkce je Tabulka 1.

Řešení: do vstupu zapíšeme zadanou funkci ve tvaru f(x) = 1/5*sin(x)^2*cos(x + pi)^2.

Podproblém: jelikož je funkce $f(x)$ omezená na intervalu $x \in < -3{,}3 >$, tak ji omezme.

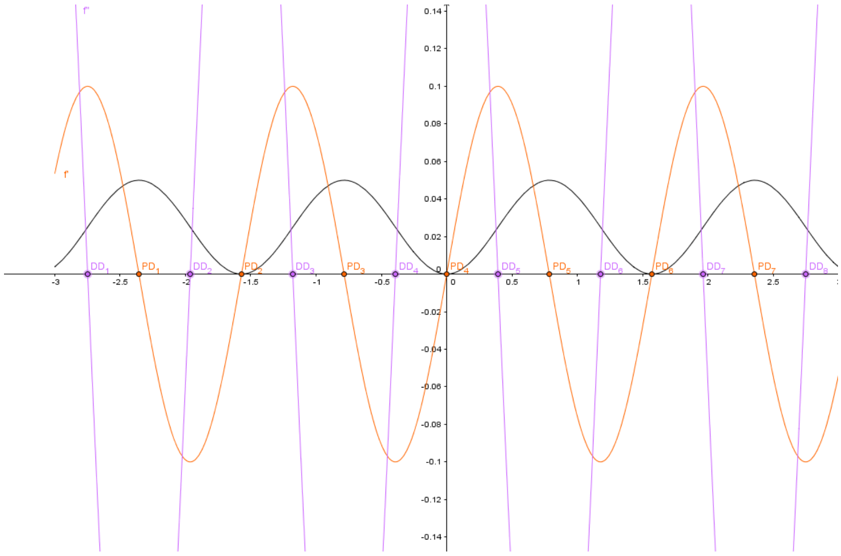
Řešení: omezení na intervalu provedeme pomocí příkazu Funkce[<Funkce>, <Počáteční hodnota>, <Koncová hodnota>], čili Funkce[f, -3, 3].

Podproblém: jak najdeme první a druhou derivace na zadaném intervalu?

Řešení: první a druhá derivace funkce se vytvoří pomocí příkazu derivace Derivace[<Funkce>] a na intervalu $x \in < -3{,}3 >$ se vykreslí díky příkazu Funkce[<Funkce>, <Počáteční hodnota>, <Koncová hodnota>] z předchozího bodu.

Podproblém: dále potřebujeme zjistit všechny nulové body první a druhé derivace.

Řešení: jde vlastně o to, najít průsečíky derivací s osou x. Máme několik možností, jak úkol zvládnout. První variantou je příkaz NuloveBody[<Polynom>], ale my nemáme zadaný polynom, čili tato možnost není přípustná. Další možností je použít Koreny[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>] nebo příkaz Prusecik[<Objekt>, <Objekt>]. Výsledek je znázorněn na Obr. 6.



Obr. 6 Barevné sjednocení nulových bodů první a druhé derivace

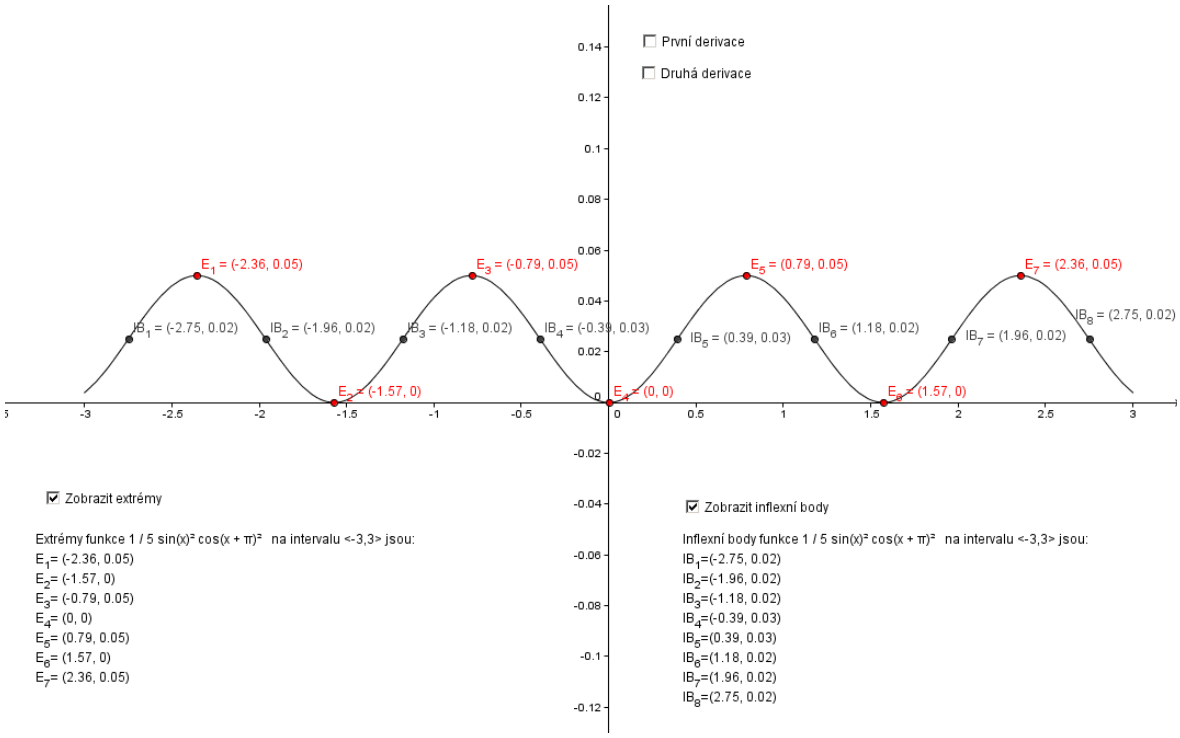
---

Podproblém: pokud bychom zachovali na nákresně všechny grafy, byl by výsledný dojem celkem nepřehledný. Nejjednodušším řešením by bylo objekty prostě skrýt. Ale můžeme pomocí nástrojů GeoGebry skrývat objekty podmíněně?

Řešení: GeoGebra poskytuje takzvané Zaškrtávací tlačítko (v panelu nástrojů). Tento prvek umožňuje skrýt jeden nebo více objektů. Pro přehlednost jsou vytvořena dvě zaškrtávací tlačítka pro první i druhou derivaci, která zobrazují funkční předpis a graf funkce.

Podproblém: extrémy funkce zjistíme jednoduše pomocí příkazu Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]. Ale zadaná funkce není mnohočlen, čili nelze pro inflexní body využít příkaz InflexniBod[<Mnohočlen>]. Jak vyřešíme nastalou situaci?

Řešení: inflexní body získáme jako body o souřadnicích, které jsou závislé na nulových bodech druhé derivace, například IB_1= (x(DD_1), f(x(DD_1))). Podobně jako u derivací vytvoříme zaškrtávací tlačítka na zobrazení extrémů a inflexních bodů (viz Obr. 7)



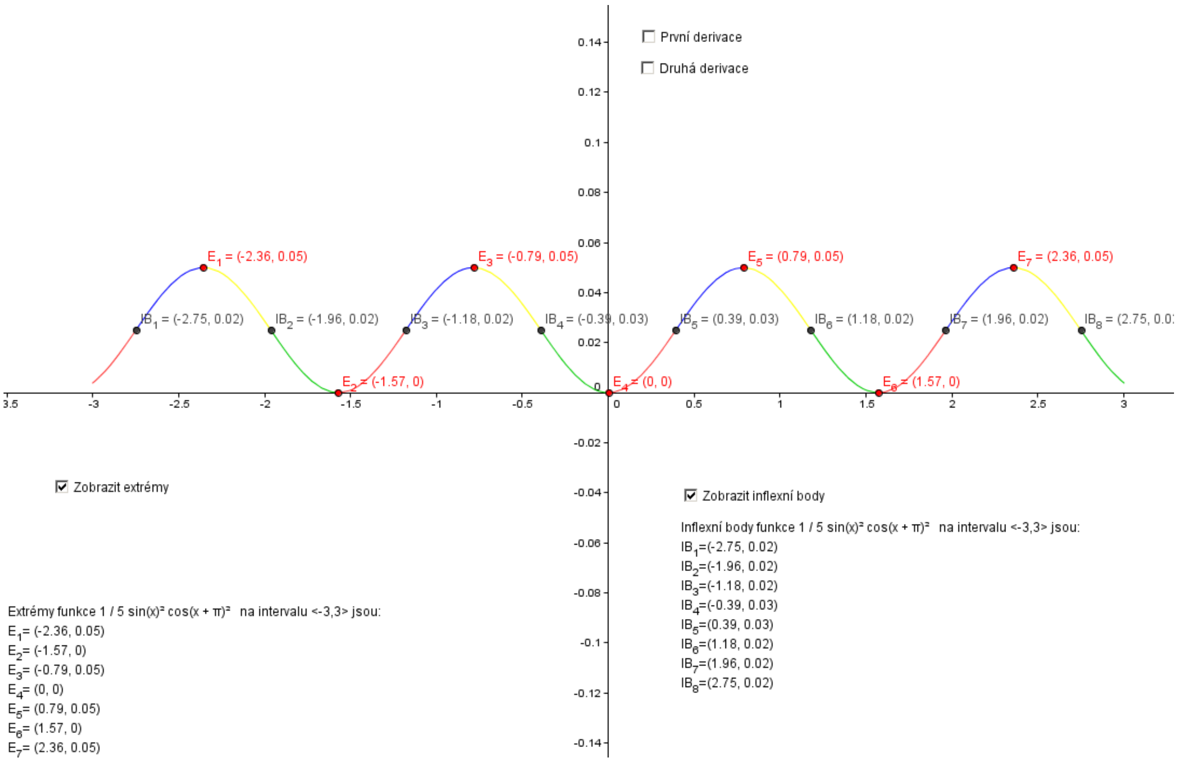
Obr. 7 Vytvoření zaškrtávacích tlačítek

Podproblém: pro názornost budeme chtít rozdělit graf na čtyři části podle Tabulky 2. Jakým způsoben toho docílíme?

Tabulka 2 Volba barev při rozdělení grafu zkoumané funkce

Barva	**Popis**
Červená	Rostoucí konvexní část funkce
Modrá	Rostoucí konkávní část funkce
Zelená	Klesající konvexní část funkce
Žlutá	Klesající konkávní část funkce

Řešení: před tímto krokem si zaškrtněme zaškrtávací políčko extrému a inflexního bodu, ostatní zůstanou skryty. Mezi každým extrémem a inflexním bodem se bude měnit barva (extrém mění funkci z rostoucí na klesající a naopak, inflexní bod pak z konvexní na konkávní a naopak). Nadefinujeme si funkce pomocí funkce Funkce[<Funkce>, <Počáteční hodnota>, <Koncová hodnota>] a meze volíme pomocí x-ových souřadnic krajních bodů funkce. Nově vzniklou funkci obarvíme příslušnou barvou (viz Obr. 8).

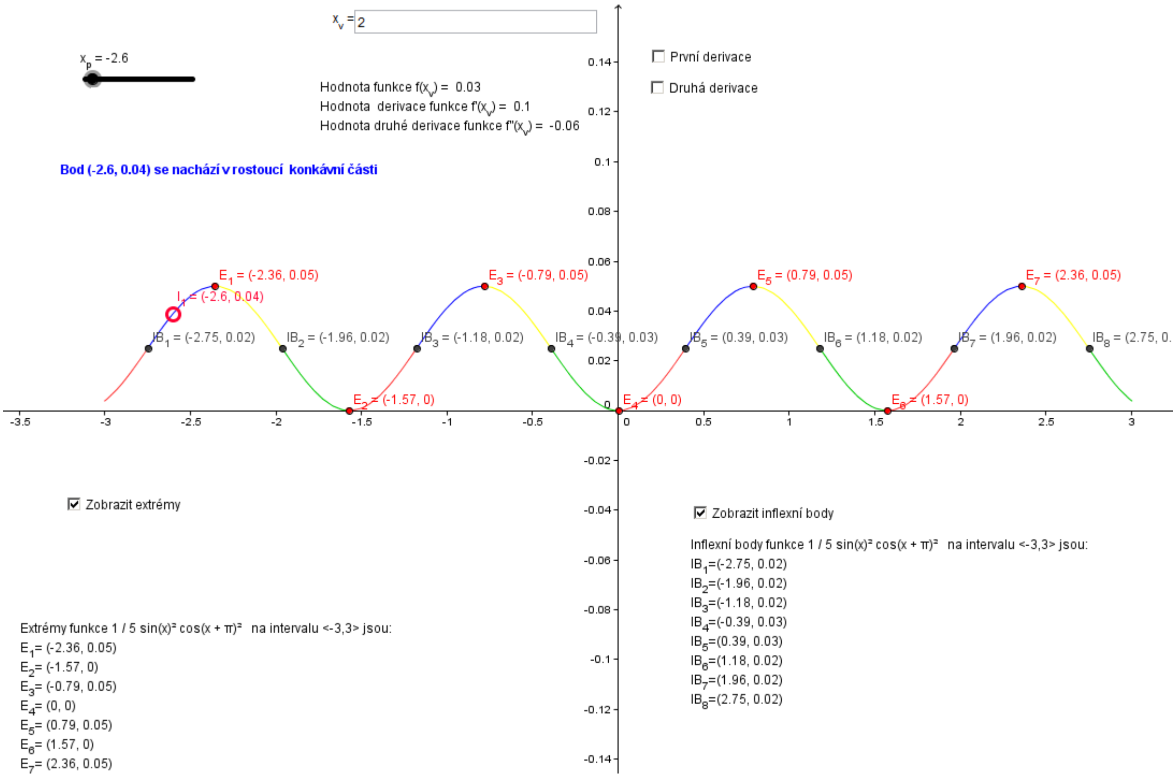


Obr. 8 Barevné rozdělené zkoumaného grafu podle požadovaných vlastností

Podproblém: můžeme vytvořit bod na funkci a v závislosti na jeho poloze uživateli sdělit, ve které části grafu nachází (dle Tabulky 2)?

Řešení: ano. Vytvořme bod I_1, který je závislý na posuvníku x_p a leží na zkoumané funkci: I_1 = (x_p, f(x_p)). Dále si vytvoříme čtyři texty: Bod I_1se nachází v rostoucí konkávní části, Bod I_1 se nachází v klesající konkávní části, Bod I_1 se nachází v rostoucí konvexní části a Bod I_1 se nachází v klesající konvexní části. Barevnost textů sjednotíme v souladu s Tabulkou 2. Opět pomocí podmíněného zobrazení nastavíme viditelnost textu v závislosti na poloze bodu I_1, například pro rostoucí konvexní část funkce: -3 ≤ x_p ≤ x(IB_1) ⋁ x(E_2) ≤ x_p ≤ x(IB_3) ⋁ x(E_4) ≤ x_p ≤ x(IB_5) ⋁ x(E_6) ≤ x_p ≤ x(IB_7).

Pro úplnost doplníme textové pole pro výpočet hodnot funkce a obou derivací. Výsledný efekt appletu je znázorněn na Obr. 9. Pozor, tato aplikace je plně funkční jen v aktuální verzi GeoGebra 6, v nižších verzích se může stát, že kořeny derivací zmizí a tím pádem i inflexní body.



Obr. 9 Výsledek znázornění monotonie, konvexnosti a konkávnosti

3.2 Aplikace funkce hrou

I když se dnešní doba rychle mění a s ní i nová generace dětí, stále zůstává v platnosti jedna věc – děti si rády hrají. Proto následující aplikace jsou utvořeny na bázi hry a ujistí studenty v určování předpisů nejrůznějších funkcí. Princip spočítá v tom, že se vytvoří libovolný předpis funkce (například kvadratické) a student má určit její předpis. Pakliže ho zapíše správně, program ho pochválí a může pokračovat dále vygenerováním nového funkčního předpisu.

Tvorbu aplikace si ukážeme na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{x-a}$, kdy student hledá v racionální lomené funkci neznámou hodnotu a, a$\in \{-3, -2, \ldots, 3\}$.

Podproblém: pomocí jakého příkazu můžeme náhodně generovat celá čísla z vybraného intervalu?

Řešení: pomocí příkazu NahodneMezi[<Minimum (celé číslo)>, <Maximum (celé číslo)>] generujeme náhodná celá čísla ze zadaného uzavřeného intervalu. Například a = NahodneMezi[-3, 3], čili $a \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$.

Podproblém: na nákresně se vždy bude objevovat základní funkce $g(x) = \frac{1}{x}$ a hledaná funkce $f(x) = \frac{1}{x-a}$. Pro přehlednost lze nastavit jinou barvu a styl čáry než pro funkci $g(x)$. Jak ale v rámci jednoho otevření aplikace zajistit generování nových funkcí $f(x)$ v závislosti na změně hodnoty a?

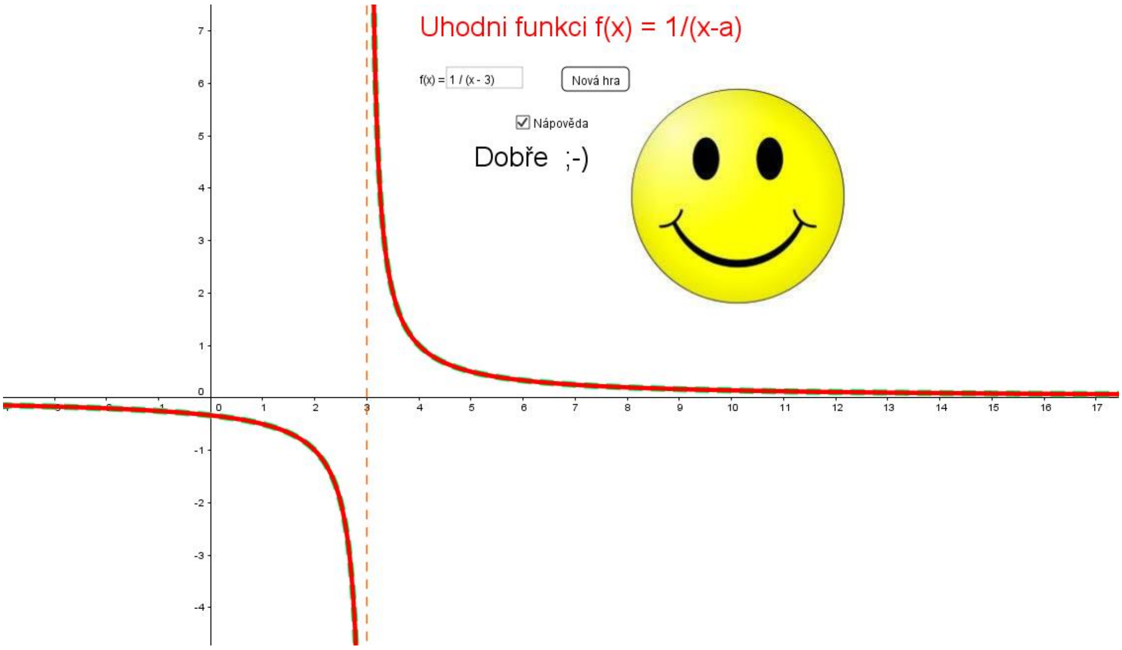
Řešení: k vyřešení problému využijeme nástroj Tlačítko. Pojmenujeme ho Nová hra a do skriptu jednoduše zapíšeme f(x) = 1 / (x – a). Tím se nám po každém stisknutí tlačítka vygeneruje nová hodnota a.

Podproblém: v neposlední řadě je potřeba zajistit možnost vkládání odpovědí a jejich následné vyhodnocení.

Řešení: pro vložení odpovědi využijeme textové pole propojené s funkcí $g(x)$. Vyhodnocení provedeme pomocí textu, který se bude podmíněně zobrazovat. V případě špatné odpovědi si k textu nastavíme podmínku f $\neq$ g a u textu se správnou odpovědí f = = g. Pro efekt můžeme přidat i obrázek. Obrázek musí být ve formátu .jpg, .jpeg., .png, .gif, .bmp, .svg. (viz Obr. 10)

Podproblém: co když si student nebude vědět rady? Jak mu pomoci?

Řešení: přidáme nápovědu ve formě zaškrtávacího tlačítka Nápověda. U zkoumané funkce $f(x)$ je vhodné vykreslit přímku x = a.



Obr. 10 Výsledná podoba hry Uhodni funkci

Protože existuje celá řada funkcí, tak pro úplnost vytvořme názorné aplikace zobrazující dvacet typů vybraných funkčních předpisů (viz Tabulka 3). Všechny jsou umístěny na GeoGebra profilu dlickova v knize Uhodni funkci.

Snadno lze vytvořit vyšší stupeň obtížnosti hledáním více než jedné neznámé hodnoty. Stačí pouze přidat další příkaz NahodneMezi.

Tabulka 3 Varianty aplikace Uhodni funkci na GeoGebra profilu dlickova

Číslo	**funkce**	$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$	**nápověda**
1	$f(x) = \dfrac{1}{x-a}$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $x = a$
2	$f(x) = \dfrac{1}{x} + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $y = a$
3	$f(x) = \dfrac{a}{x}$	$a = 1, \dots 7$	Zobrazení bodu $\left(1, f(1)\right)$
4	$f(x) = ax^2$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení bodu $\left(1, f(1)\right)$
5	$f(x) = x^2 + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou y
6	$f(x) = x^2 + ax$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou x
7	$f(x) = x^3 + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou y
8	$f(x) = (x-a)^3$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou x
9	$f(x) = \lvert x-a \rvert$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou x
10	$f(x) = \lvert x \rvert + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou y
11	$f(x) = \sqrt{x-a}$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $x = a$
12	$f(x) = \sqrt{x} + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $y = a$
13	$f(x) = a\sqrt{x}$	$a = 1, \dots 7$	Zobrazení bodu $\left(1, f(1)\right)$
14	$f(x) = \tan(x) + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou y
15	$f(x) = \mathrm{cotg}(x) + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $y = a$
16	$f(x) = \mathrm{e}^x + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $y = a$
17	$f(x) = a\mathrm{e}^x$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení průsečíku s osou x
18	$f(x) = \ln(x-a)$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $x = a$
19	$f(x) = \cos(xa)$	$a = 1, \dots 7$	Zobrazení hodnoty 2π na osu x
20	$f(x) = \cos(x) + a$	$a = -3, \dots 3$	Zobrazení přímky $y = a$

3.3 Extremální úlohy

V poslední kapitolce o funkcích vytvoříme komplexní aplikaci na extremální úlohu z již známých příkazů a nástrojů, kde se propojí obě nákresny. Výsledné řešení může posloužit jako inspirace při zpracovávání slovních úloh a podobně.

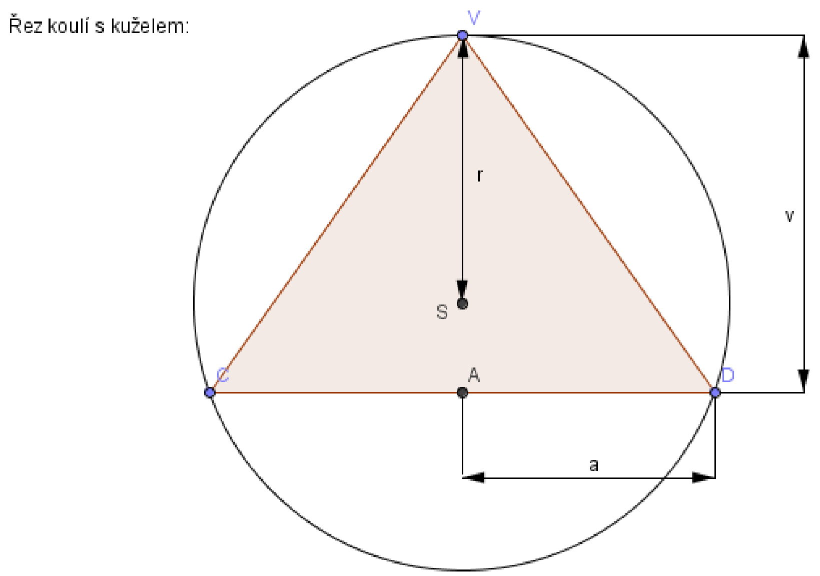
Zadání extremální úlohy

Aranžérka potřebuje z polystyrénové koule o poloměru *r* vyřezat kuželovou podložku pod květiny. Určete poloměr podstavy kužele a (a jeho výšku *v*) tak, aby se na výrobu podložky použilo co nejvíce polystyrénu. [24]

Je evidentní, že je nejprve potřeba sestavit ze zadání funkci, kterou budeme následně maximalizovat. Proto celou úlohu vyřešíme nejprve analyticky a poté si ukážeme možnosti, jak danou úlohu interpretovat v GeoGebře.

Analytické řešení:

Rozbor



Obr. 11 Řez koulí s kuželem

Co je dáno:

- Poloměr koule $r = |SV|$.

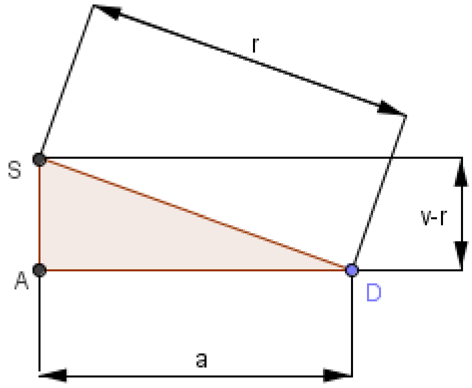
Co hledáme:

- Výšku kužele $v = |AV|$.
- Poloměr podstavy kužele $a = |AD|$.

Jak hledáme:

- Tak, aby byl objem kužele maximální.

V pravoúhlém trojúhelníku ADS platí:



$$a^2 = r^2 - (v-r)^2$$
$$a^2 = r^2 - (v^2 - 2vr + r^2)$$
$$a^2 = -v^2 + 2vr$$

Objem kuželu V se spočítá tímto vztahem:

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 v$$

Sestavení funkce

Dosadíme $a^2 = -v^2 + 2vr$ do objemu V:

$$V = \frac{1}{3}\pi(-v^2 + 2vr)v$$

Nalezení extrému hledané funkce

Hledáme maximum funkce V(v) a to pomocí derivace:

$$V'(v) = \frac{1}{3}\pi(-3v^2 + 4vr)$$

Najdeme stacionární body, což jsou nulové body derivace:

$$V'(v) = 0$$
$$\frac{1}{3}\pi(-3v^2 + 4vr) = 0$$
$$3v^2 = 4vr$$
$$v = \frac{4}{3}r$$

Extrém funkce tedy je:

$$v\_max = \frac{4}{3}r$$

Vyšetření monotónnosti funkce V(v):

v	*(0,v_max)*	*v_max*	*(v_max,r)*
V'(v)	+	0	-
V(v)	rostoucí	maximum	klesající

Pro hodnotu $v = \frac{4}{3}r$ má funkce *V(v)* maximum.

Výpočet ostatních hodnot

- Poloměr podstavy kužele *a*:

$$a = \sqrt{-v^2 + 2vr}$$

$$a = \sqrt{-\frac{16}{9}r^2 + 2\frac{4}{3}r^2}$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$$

- Objem kuželu *V*:

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 v$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{8}{9}r^2\ \frac{4}{3}r$$

$$V = \frac{32}{81}\pi r^3$$

- Objem koule *K*:

$$K = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Procentuální vyjádření objemu kužele v kouli:

$$x = \frac{V}{K} \cdot 100\%$$

$$x = \frac{\frac{32}{81}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot 100\%$$

$$x = \frac{8}{27} \cdot 100\%$$

$$x \approx 29{,}63\%$$

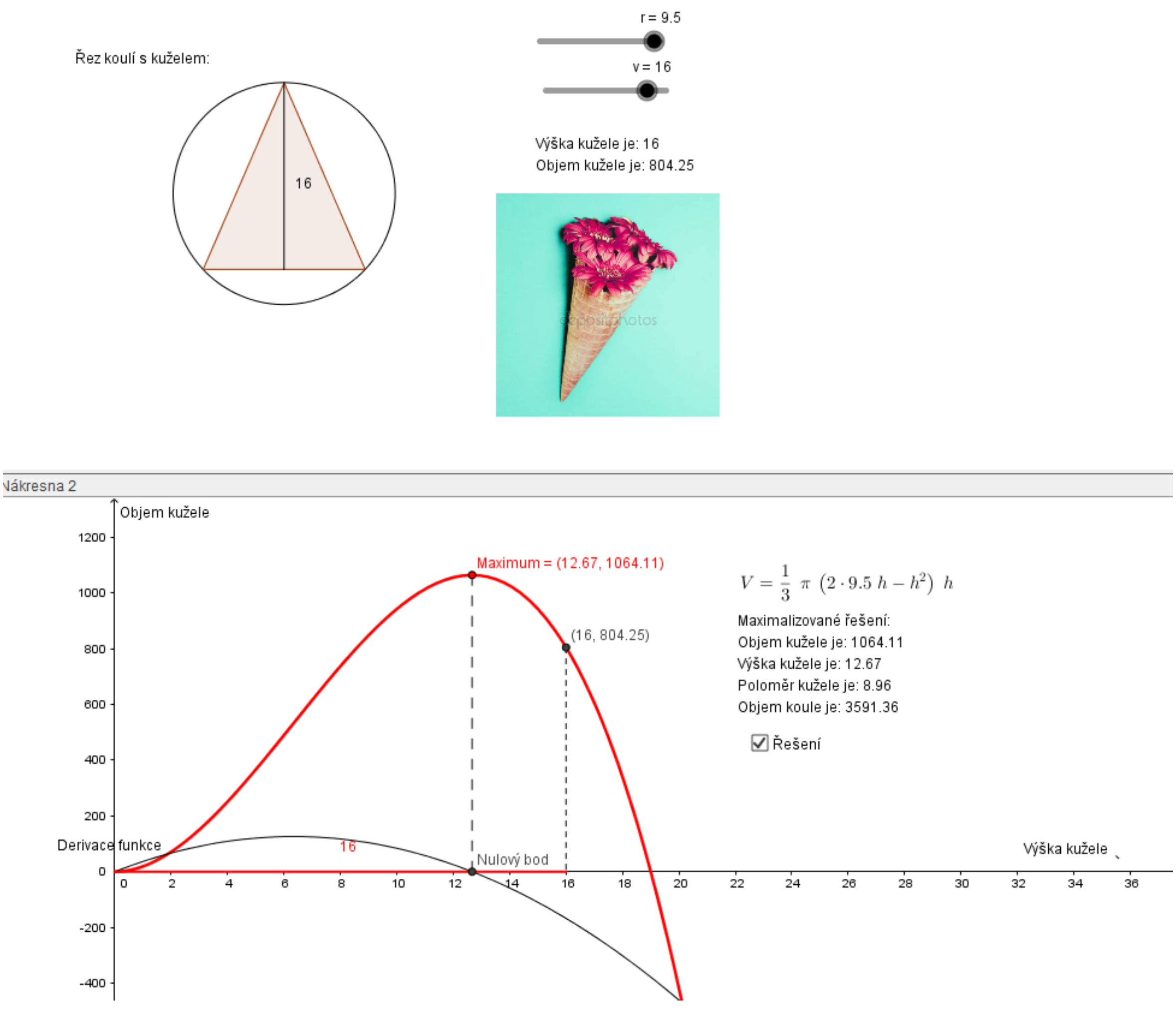
Závěr

Aby zbyl co nejmenší odpad polystyrénu, aranžérka vyřeže z koule o poloměru r kužel o poloměru $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$ a výšce $v = \frac{4}{3}r$. Kužel pak bude mít 29,63% objemu z celé z koule polystyrénu.

Ukažme si nyní, jak interpretovat řešení úlohy v GeoGebře pomocí nástrojů popsaných v předchozím textu. Výšku kužele a poloměr koule zadáme pomocí posuvníků. Vytvoříme funkci objemu, na které najdeme extrém. Dále určíme první derivaci funkce, včetně nulového bodu. Následně můžeme vypisovat zjištěné hodnoty, které nás budou zajímat pomocí textového pole či vytvořit zaškrtávací tlačítko na skrývání pomocné první derivace a nulového bodu.

Podproblém: jak bychom mohli vzniklou aplikace oživit po vizuální stránce?
Řešení: například vložením obrázku s motivem květin. Další možností je vytvoření řezu koulí s vyřezaným jehlanem (Obr. 11).

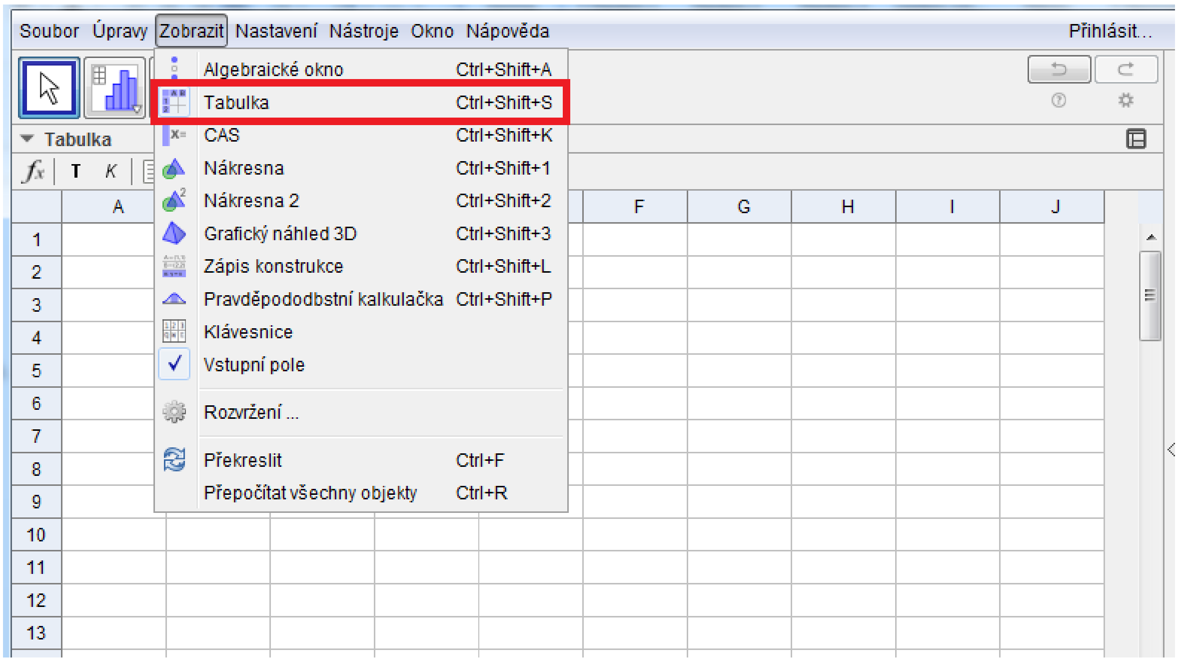
Výsledný efekt je znázorněn na Obr. 12. Dalším modifikacím se samozřejmě meze nekladou.



Obr. 12 Ukázka extremální úlohy

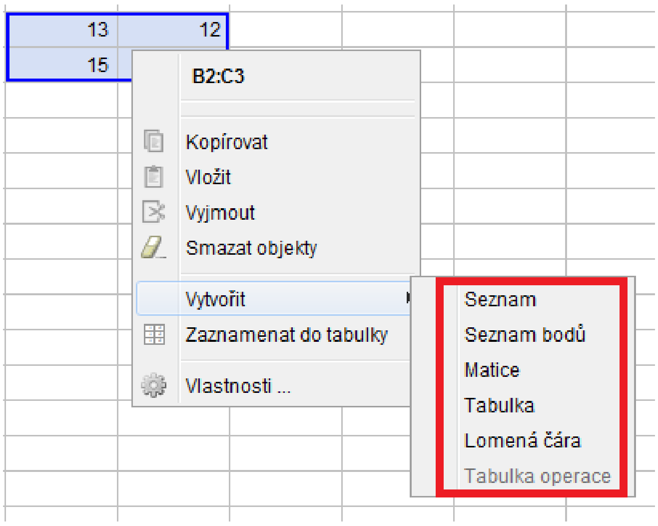
4. MOŽNOSTI TABULKY V GEOGEBŘE

Okno tabulky (viz Obr. 13) nabízí funkce obodobné například Excelu a práce s ní se příliš neliší. Vyvoláme ho stiskem kláves Ctrl + Shift + S nebo dle Obr. 13. Tabulka umožňuje pracovat i s dalšími objekty GeoGebry. Pomocí horní lišty  nastavujeme typ písma, zarovnání, barvu pozadí a ohraničení buněk. S buňkami můžeme provádět matematické operace tak, že do nich nejprve zapíšeme symbol = (stejně jako v Excelu a jiných podobných tabulkových kalkulátorech). Do buněk tabulky lze vkládat jakékoli objekty GeoGebry, fungují zde i příkazy a funkce.



Obr. 13 Spuštění okna Tabulka

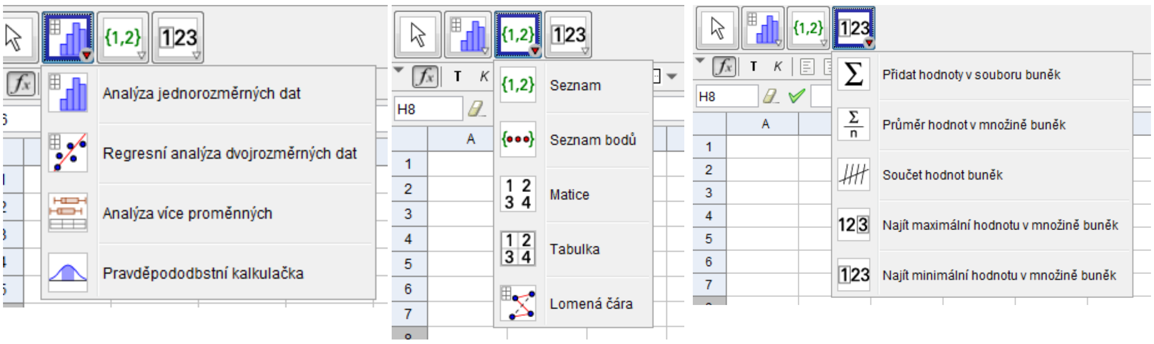
Když do buněk zapíšeme hodnoty, označíme je a stiskneme pravé tlačítko, pak je můžeme exportovat:



Obr. 14 Možnosti exportu z tabulky

Tabulka nabízí i možnost importu dat: klikneme do prázdné buňky a pomocí pravého tlačítka myši vybereme možnost Importovat datový soubor. Soubor může být ve formátu .txt, .dat nebo .csv. Data lze i zkopírovat a klasicky vložit.

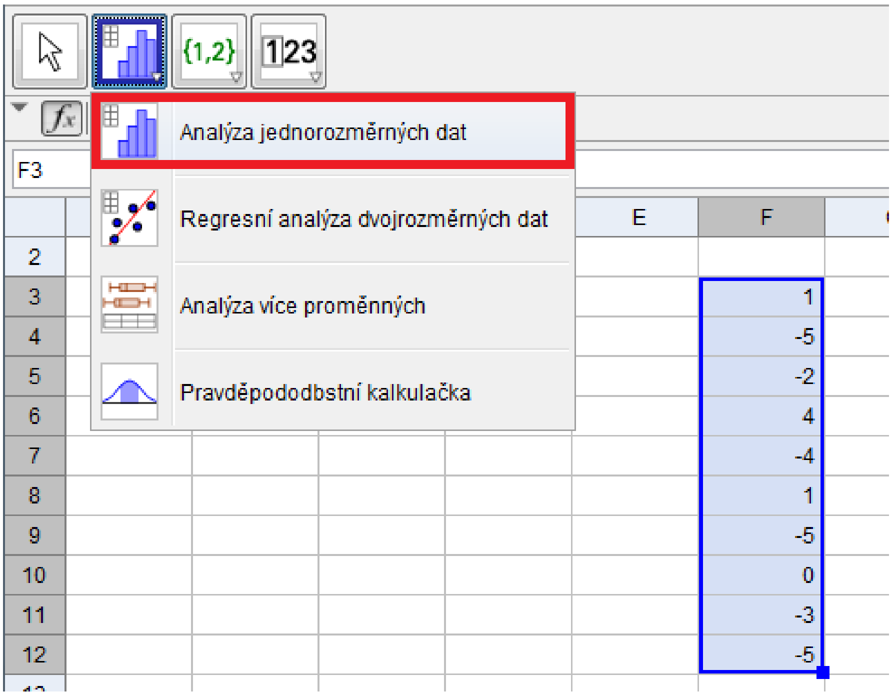
Práci s tabulkou ulehčují ikony na panelu nástrojů ukrývající nástroje tabulky (viz Obr. 15). První ikonka je klasické ukazovátko. Druhá ukrývá analýzu jednorozměrných dat (viz kapitola 4.1), regresní analýzu dvojrozměrných dat (viz kapitola 4.2), analýzu více proměnných (obdobné analýze jednorozměrných data s tím rozdílem, že zpracovává najednou vícerozměrná data) a pravděpodobnostní kalkulačku (viz kapitola 4.3). Pod třetí ikonkou se skrývá export dat shodný s předchozím obrázkem. Poslední ikona slouží k určení sumy, průměru a nalezení maxima i minima u vybraných buněk.



Obr. 15 Panel nástrojů tabulky

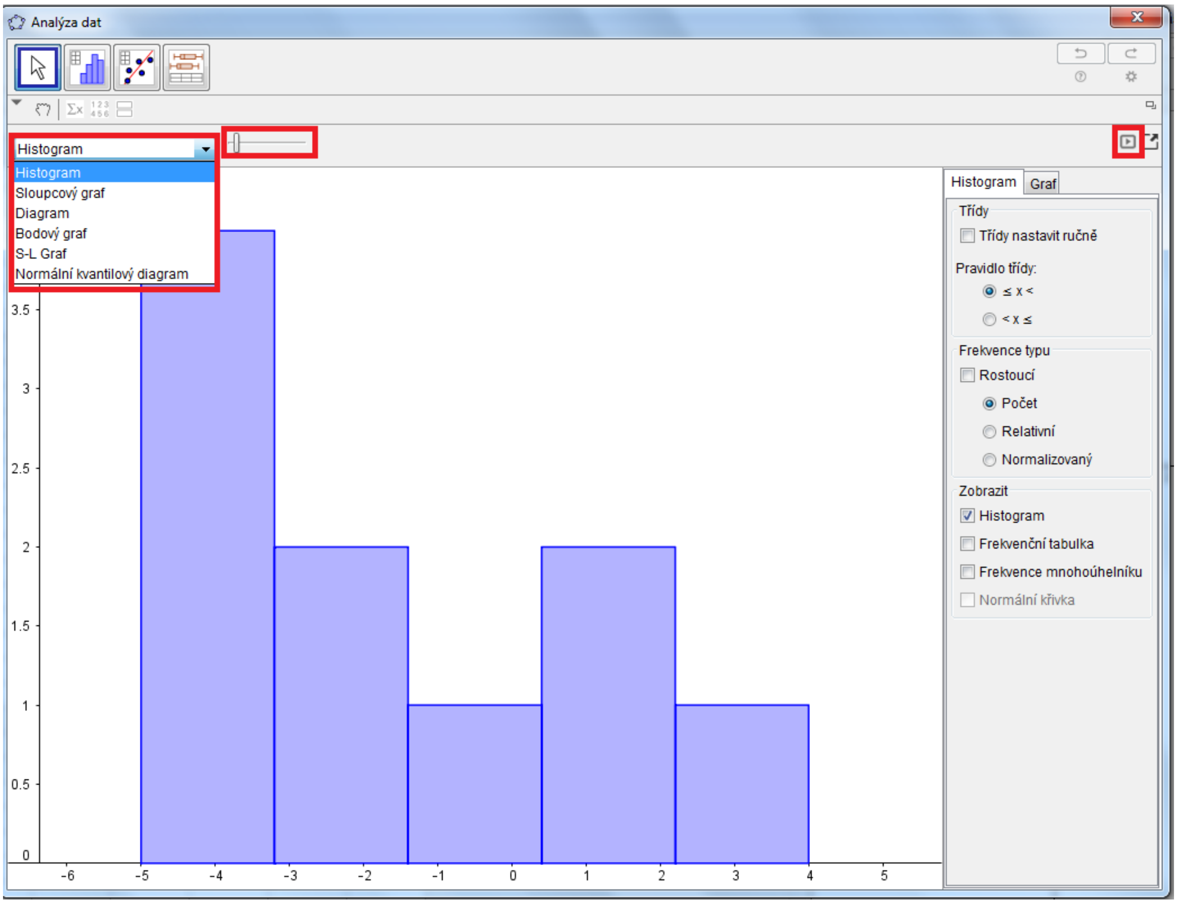
4.1 Analýza jednorozměrných dat

Analýza jednorozměrných dat nabízí široké spektrum možností jak analyzovat data. Ukažme si možnosti práce na náhodně vygenerovaném souboru dat pomocí funkce =NahodneMezi[-5, 5], kterou napíšeme do libovolné buňky a stáhneme myší dolů. Vygenerujeme tedy celá čísla od -5 do 5. Data označíme a zvolíme Analýzu jednorozměrných dat:



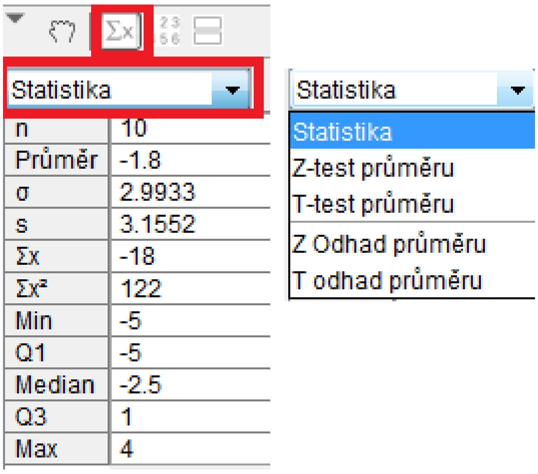
Obr. 16 Analýza jednorozměrných dat

Dále klikneme na kolonku analyzovat a tím vytvoříme histogram. Posuvníkem  dynamicky nastavujme počet tříd v histogramu. Symbolem šipky  určíme ručně třídy s volbou začátku a šířky. V rolovacím okně si můžeme zvolit i jiný typ grafu – sloupcový graf, diagram, bodový graf, S-L graf a normální kvantilový diagram (viz Obr. 17).



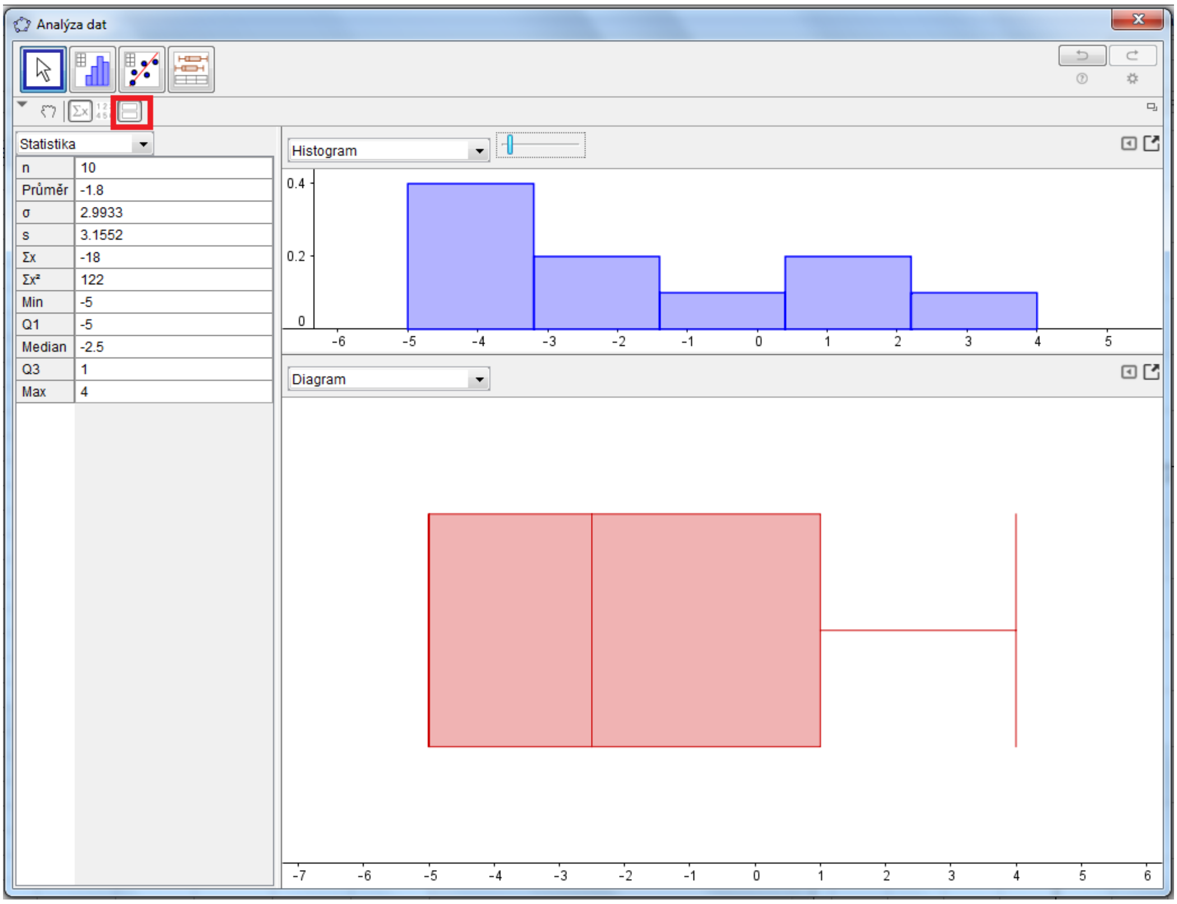
Obr. 17 Histogram z analýzy dat

Kolonka $\sum x$ znázorní základní charakteristiky souboru. Po rozkliknutí rolovacího okna Statistika lze vybrat možnost testování hypotézy o střední hodnotě či intervalových odhadů:



Obr. 18 Základní statistiky a hypotézy

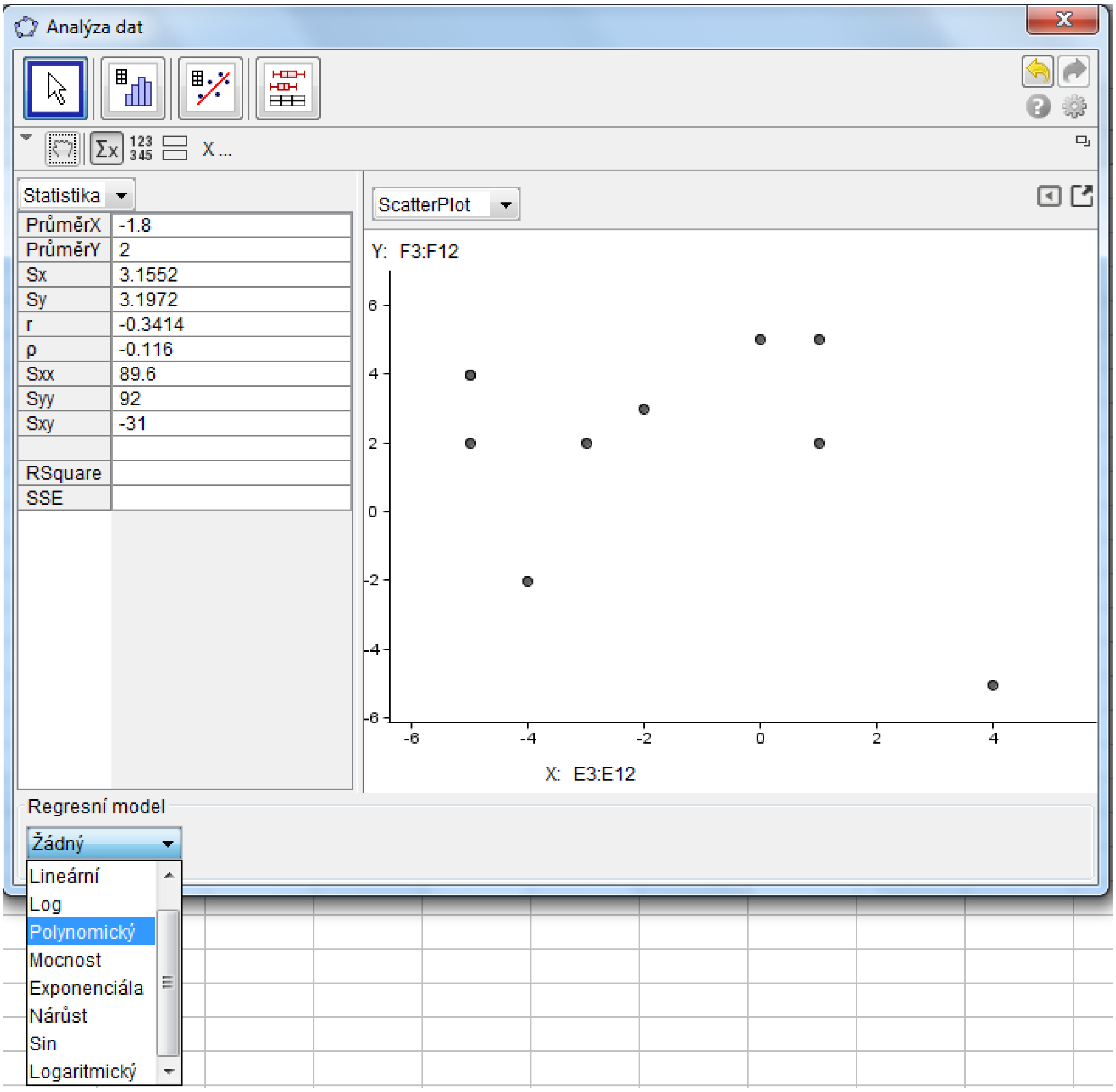
Vedle $\sum x$ je ikona $\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{matrix}$, která ukáže analyzovaná data. Díky poslední ikonce dvou obdélníků získáme možnost vykreslení dvou typů zvolených grafů:



Obr. 19 Možnost zobrazení dvou typů grafů při analýze dat

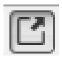
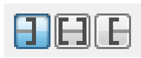
4.2 Regresní analýza dvojrozměrných dat

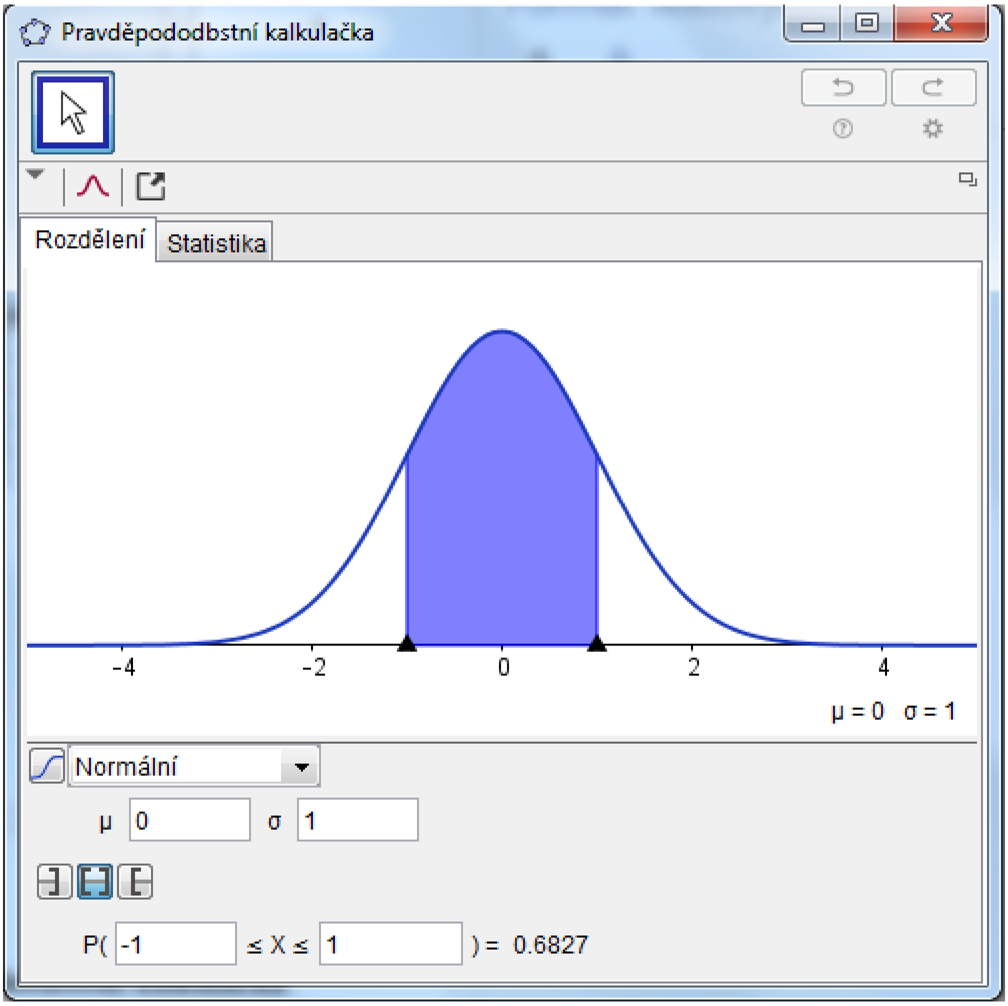
Ukažme si možnosti práce na náhodně vygenerovaném souboru dvojrozměrných dat pomocí funkce =NahodneMezi[-5, 5], kterou napíšeme do libovolné buňky a stáhneme myší dolů. Vygenerujeme tedy dva sloupce celých čísel od -5 do 5. Data označíme, zvolíme Regresní analýzu dvojrozměrných dat a získáme klasický bodový graf (viz Obr. 20). V okně se objeví ikonky totožné s ikonami v jednorozměrné analýze dat. Nově ale přibývá X... zaměňující hodnoty x za y. Máme možnost volit z následujících regresních modelů: lineární, logaritmický, polynomický až devátého stupně, mocninný, exponenciální nebo sinový.



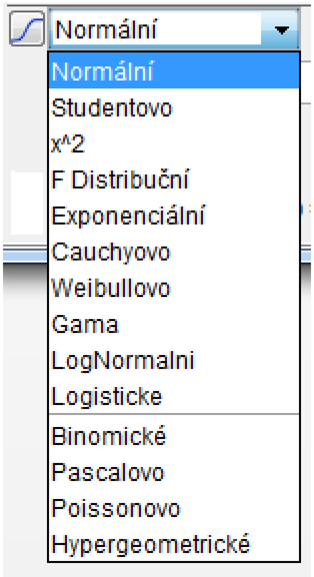
Obr. 20 Regresní analýza dvojrozměrných dat

4.3 Pravděpodobnostní kalkulačka

Pravděpodobnostní kalkulačku (viz Obr. 21) lze spustit i mimo tabulku pomocí kláves Ctrl+Shft+P. Rozbalovací okno Normální nabízí celou řadu spojitých i diskrétních rozdělení, ze kterých můžeme volit (viz Obr. 22). Ikona  překryje vybrané rozdělení normální křivkou,  slouží k exportu dat,  zobrazí distribuční graf funkce,  určují výpočet pravděpodobnosti zleva, oboustranně či pravostranně. Záložka Statistika v pravděpodobnostní kalkulačce skrývá možnost provádět t-testy, z-testy a testy dobré shody.



Obr. 21 Pravděpodobnostní kalkulačka



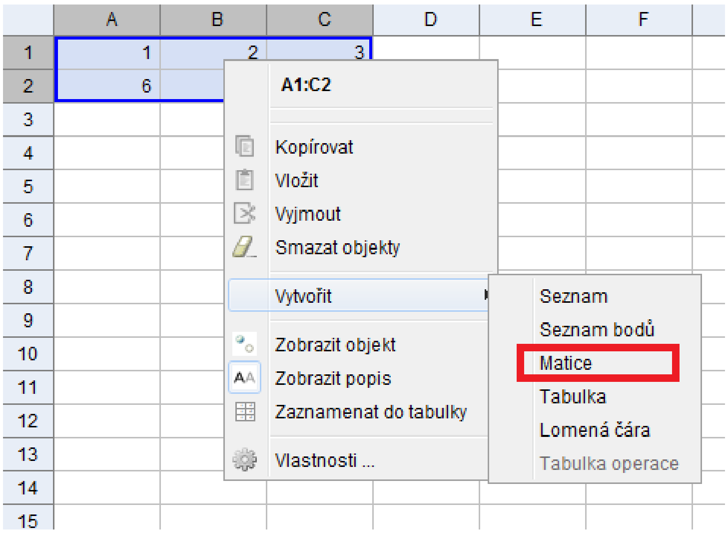
Obr. 22 Typy rozdělení v pravděpodobnostní kalkulačce

Ve středoškolské matematice se studenti často seznamují s rovnoměrným rozdělením ve formě házení kostkou, tak že házejí kostkou a zapisují si výsledky. Dojdou k závěru, že pravděpodobnost padnutí jednoho čísla je 1/6, čili každé číslo padne se stejnou pravděpodobností jako to druhé. Na GeoGebratube najdeme již vytvořené aplikace na danou problematiku například na profilu Petra Schreiberová. Kdybychom si představili, že tyto aplikace ještě nebyly zveřejněny a popsány, tak bychom je jednoduše vytvořili podle výše zmiňovaných návodů.

5. MATICE A ROVNICE

V rámci tvorby aplikací zaměřených na matice a rovnice se seznámíme s následujícími nástroji GeoGebry [21]:

- ***Matice:*** matice se zapisuje do složených závorek, jednotlivé řádky se také zapisují do složených závorek a oddělí se čárkou. Lze ji také vytvořit z pohledu tabulky, kdy se čísla zapíší do jednotlivých buněk, a pomocí pravého tlačítka myši vytvoříme matici:



Obr. 23 Vytvoření matice z tabulky

- ***Determinant[<Matice>]:*** vypočítá determinant zadané matice.
- ***Invertovat[<Matice>]:*** vypočítá inverzní matici.
- ***Hodnost[<Matice>]:*** vypočítá hodnost matice.
- ***NastavitBarvuPozadi[<Objekt>, "<barva>"]:*** díky příkazu můžeme v tabulce podbarvit pozadí buněk pro větší přehlednost a efektivitu.
- ***SchodovityTvar[<Matice>]:*** upraví matici do schodovitého tvaru.
- ***NVyresit[<Rovnice>]:*** tento příkaz je dostupný pouze v CAS a určí numerické řešení rovnice s neznámou x.
- ***NVyresit[<Rovnice>, <Proměnná>]:*** tento příkaz je dostupný pouze v CAS a určí numerické řešení rovnice s neznámou proměnnou.
- ***NVyresit[<Seznam rovnic>, <Seznam proměnných>]:*** tento příkaz je dostupný pouze v CAS a určí numericky řešení dané soustavy rovnic s danými neznámými.

- ***NVyresitODE[<Seznam derivací>, <Počáteční souřadnice x>, <Seznam počátečních souřadnic y>, <Koncová souřadnice x>]:*** tento příkaz je dostupný v CAS a určí numericky řešení dané soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Jeho jednodušší varianty lze najít mimo CAS, například příkaz ***VyresitODE[<f'(x, y)>]***.
- ***Kdyz[<Podmínka>, <Pak>, <Jinak>]:*** pokud je splněna *Podmínka*, vytvoří příkaz objekt *Pak*. V opačném případě se vytvoří příkaz *Jinak*. Jedná se o klasický podmíněný příkaz.

Nyní si shrneme základní definice, které byly a budou použity v kapitole o maticích a rovnicích [1]:

Definice hodnosti matice

Největší počet lineárně nezávislých řádků dané matice nazýváme hodností této matice.

Definice determinantu matice

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Determinantem matice A nazýváme reálné číslo D a značíme D = $det|A|$, které definujeme pro řád $n = 1$: $D = a_{1,1}$ a pro řád $n > 1$: označíme-li D_{1k} determinant řádu $n-1$, který dostaneme z determinantu D vynecháním 1. řádku a k-tého sloupce, pak $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \mathrm{D}_{1k}$.

Definice inverzní matice

Inverzní maticí k čtvercové matici A nazýváme (pokud existuje) takovou matici A^{-1} stejného typu, pro kterou platí $A A^{-1} = A^{-1} A = E$, kde E je jednotková matice.

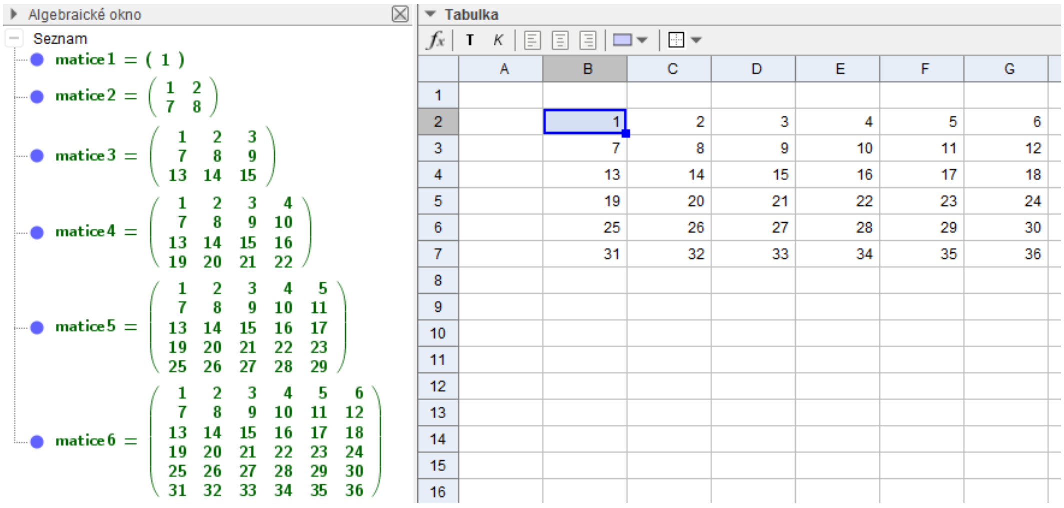
Frobeniova věta

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy. Označíme-li společnou hodnost h pak: je-li h = n, má soustava jediné řešení, je-li h < n, má soustava nekonečně mnoho řešení, která můžeme vyjádřit pomocí $n - h$ neznámých, které nahradíme parametry $t_1, t_2, \dots, t_{n-h}$. Homogenní soustava má vždy nulové (triviální) řešení $\boldsymbol{k} = (0,0,\dots,0)$.

5.1 Aplikace na inverzní matici

Vytvořme aplikaci, která vypočítá inverzní matici ze zadané čtvercové matice až šestého řádu. Řád matice i její prvky budou pro uživatele měnitelné.

Pomocí tabulky si vytvoříme šest čtvercových matic od řádu jedna do řádu šest (viz Obr. 24).



Obr. 24 Vytvoření šesti základních matic

Podproblém: nyní budeme chtít, aby si uživatel sám zvolil, jaký řád a jakou matici chce řešit.

Řešení: vytvořme posuvník Řád v intervalu od 1 do 6 s krokem 1. Aby se uživateli zobrazila jen zvolená matice, tak vytvoříme novou matici7, do které v závislosti na posuvníku Řád, umístíme zvolenou matici (například pro Řád = 1 bude matice7 = matice1). Do vstupu tedy zapíšeme matice7 = Kdyz[Řád $\stackrel{?}{=}$ 1, matice1, Kdyz[Řád $\stackrel{?}{=}$ 2, matice2, Kdyz[Řád $\stackrel{?}{=}$ 3, matice3, Kdyz[Řád $\stackrel{?}{=}$ 4, matice4, Kdyz[Řád $\stackrel{?}{=}$ 5, matice5, matice6]]]]].

Podproblém: ke všem maticím ale neexistují inverzní matice. Jak zjistíme, jestli je matice7 regulární či singulární?

Řešení: pomocí příkazu Hodnost[matice7]. Když je hodnot matice nulová, tak se jedná o singulární matici a naopak.

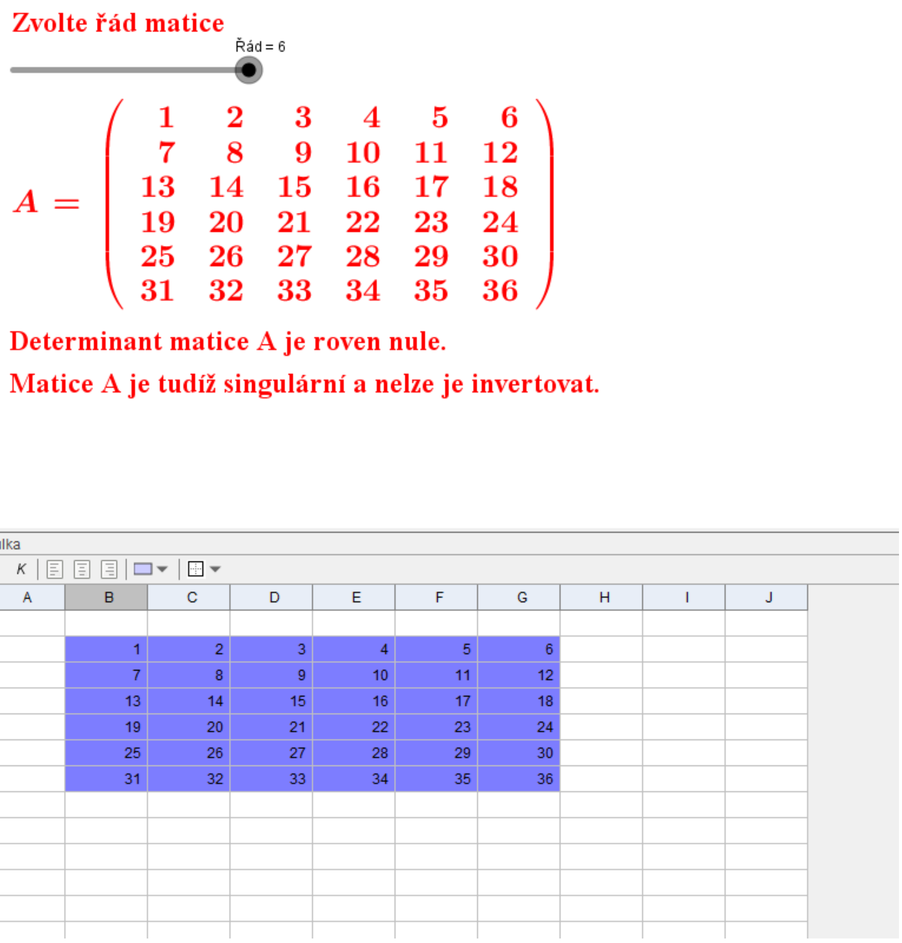
Podproblém: jak vytvoříme inverzní matici z matice7 pouze k regulární matice?

Řešení: využijeme podmíněného příkazu: kdyz[hodnost ≠ 0,Invertovat[matice7]]. Informujeme uživatele o výsledné matici, provedeme podmíněně zobrazeným textem.

Podproblém: pro lepší přehlednost budeme chtít podbarvit ty buňky v tabulce.

Řešení: ke splnění problému nám poslouží příkaz NastavitBarvuPozadi[<Objekt>, "<barva>"], kde objekt je pozice ošetřené buňky a barva se zadává jako text. Příkaz akceptuje více než sto anglických výrazů pro barvy. Například obarvení buňky B4 na světle modrou barvu: NastavitBarvuPozadi[B4,lightblue]. Nebo můžeme použít ikonku na změnu barvu (viz kapitola 4)

Výsledný efekt je znázorněn na Obr. 25.



Obr. 25 Aplikace na inverzní funkce

5.2 Řešení soustav rovnic

GeoGebra poskytuje mnoho cest, jak vyřešit soustavu rovnic. Pro nejjednodušší soustavu dvou lineárních rovnic můžeme využít grafické i analytické řešení, které si ukážeme na následujícím příkladu:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \ , \end{aligned}$$

kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Vytvořme tedy aplikaci, které vypočítá zadanou soustavu s variabilními konstantami.

Začneme vytvořením proměnných konstant, kdy máme několik možností realizace: posuvník, textové pole či tabulka, kterou si zvolíme.

Podproblém: jak nejlépe zapsat konstanty do tabulky?

Řešení: ideálně ve formě matice:

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4		a	b	c	
5		d	e	f	
6					
7					
8					

Obr. 26 Zápis konstant do matice.

Podproblém: z tabulky si vytvoříme matici soustavy *A* i matici rozšířenou *B*. Jak určíme, jestli má zvolená soustava rovnice řešení?

Řešení: využijeme Frobeniovu větu a pomocí příkazu Hodnost[<Matice>] vypočítáme hodnosti obou matic a opět pomocí podmíněně zobrazeného textu uživatele informujeme o řešitelnosti zvolené soustavy rovnic.

Podproblém: pokud má soustava rovnic řešení, jak ho nejjednodušeji určíme?

Řešení: nejjednodušší je úprava matice rozšířené *B* do schodovitého tvaru pomocí příkazu SchodovityTvar[<Matice>], kdy čísla v posledním sloupci jsou naše výsledky *x* a *y*. Jestliže je hodnost schodovité matice menší než počet neznámých, pak má soustava rovnic nekonečně mnoho řešení.

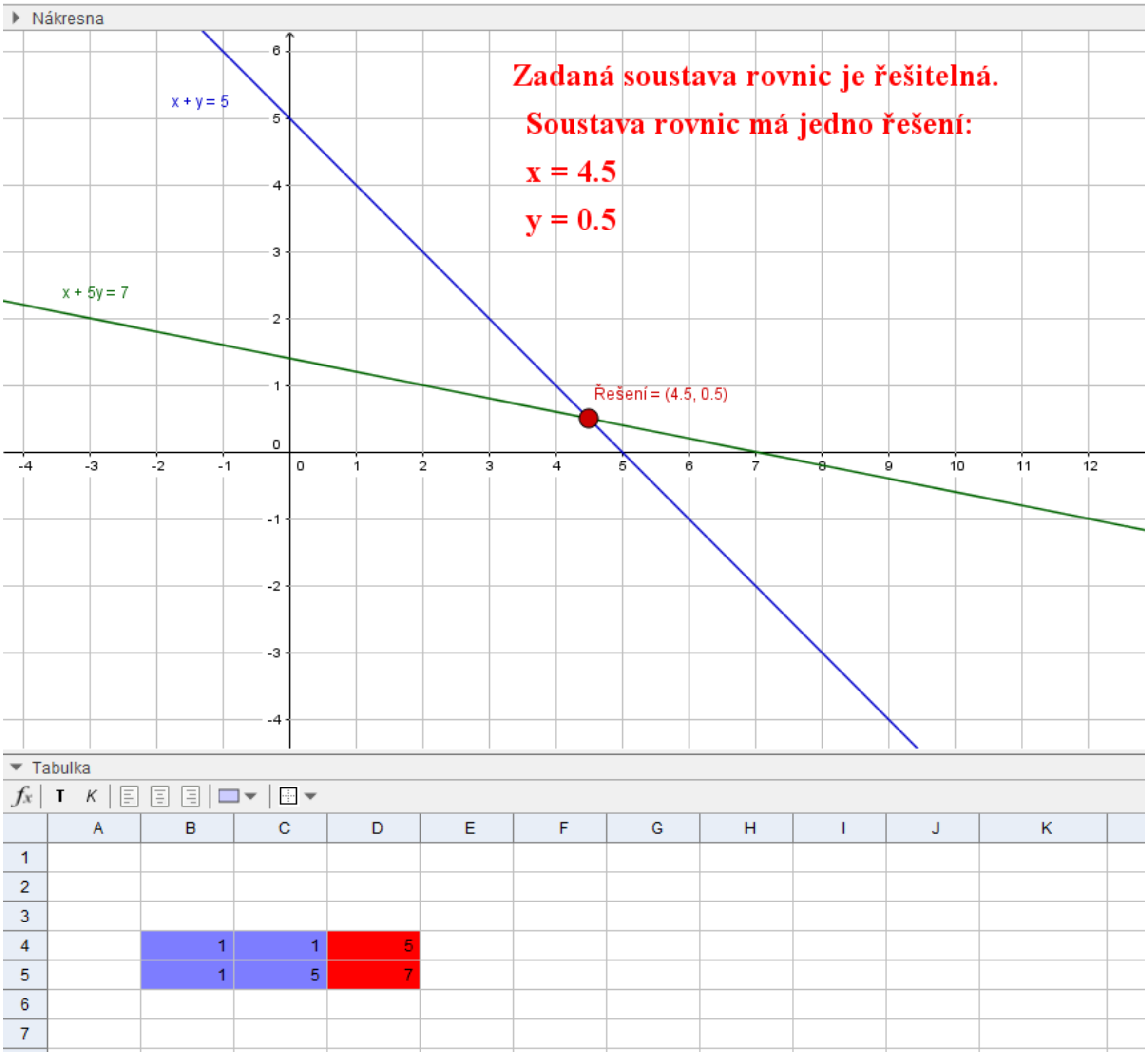
Podproblém: o výsledku referujeme uživateli pomocí textu. Jak ale z matice vypsat jen vybraný prvek?

Řešení: máme-li matici *A* a chceme vypsat prvek na prvním řádku a druhém sloupci, pak do vstupního pole stačí zapsat A(1,2).

Podproblém: na začátku jsme si řekli, že provedeme grafické řešení. Jak na něj?

Řešení: soustavu rovnic lze interpretovat jako dvě přímky, které snadno vykreslíme. První definujeme jako B4*x+C4*y=D4 a druhou B5*x+C5*y=D5 (viz Obr. 26). Bodem určíme průsečík dvou přímek a pojmenujeme ho řešení.

Výsledek je znázorněn na následujícím obrázku. Nyní se aplikace dá dle potřeby přepracovat na řešení soustav m lineárních rovnic o n neznámých.



Obr. 27 Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Při řešení nelineárních i lineárních rovnic a jejich soustav existují jednouché příkazy v prostředí CAS uvozené slovem NVyresit. Jejich aplikace je uvedena v Tabulce 4.

- ***NVyresit[<Rovnice>]:*** tento příkaz je dostupný pouze v CAS a určí numerické řešení rovnice s neznámou x.
- ***NVyresit[<Rovnice>, <Proměnná>]:*** tento příkaz je dostupný pouze v CAS a určí numerické řešení rovnice s neznámou proměnnou.
- ***NVyresit[<Seznam rovnic>, <Seznam proměnných>]*** tento příkaz je dostupný pouze v CAS a určí numericky řešení dané soustavy rovnic s danými neznámými.

Tabulka 4 Příklady řešení rovnic v GeoGebře

Zadaní rovnic	Řešení v GeoGebře
$x^2 + 8x + 5 = 0$	NVyresit[x^2+8x+15=0] → {x = -5, x = -3}
$y^2 + 8y + 5 = 0$	NVyresit[y^2+8y+15=0,y] →{y = -5, y = -3}
$e^x x + 8x = 8e^x$	NVyresit[exp(x)x+8x=8exp(x)] →{x = 7.98}
$x + y = 8$ $x + y + 3z = 9$ $y - z = 8$	NVyresit[{x+y=8,x+y+3z=9,y-z=8}, {x,y,z}] → {x = -0.33, y = 8.33, z = 0.33}
$5^x + 6^y = 11$ $4^x + 8^y = 12$	NVyresit[{5^x+6^y=11,4^x+8^y=12}, {x,y}] →{x = 1, y = 1}

Tvar čísla můžeme upravit pomocí příkazů Vycislit, StandartniTvar a podobně (viz kapitola 6).

GeoGebra je také účinný nástroj pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Stačí jen v prostředí CAS pracovat s příkazem NVyresitODE určující numericky řešení dané soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Jeho jednodušší varianty lze najít mimo CAS, například příkaz VyresitODE[<f'(x, y)>].

Na závěr kapitoly si řekněme, že v GeoGebře jdou řešit i nerovnice, ale maximálně pro dvě neznáme, a to pouze graficky. Výsledek pak vidíme na nákresně GeoGebry.

6. APLIKACE NA ROVINNOU NAPJATOST

Rovinná neboli dvojosá napjatost je základním stavebním kamenem mechaniky tuhého tělesa. S touto problematikou se studenti setkávají na středních průmyslových školách a později na technických vysokých školách. Konkrétně na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě Ostrava na fakultě strojní se jedná o předměty Vlastnosti a zkoušení materiálu v prvním ročníku a následně Pružnost a pevnost v ročníku druhém. Bohužel se často setkávám s nepochopením dané látky a s neuspokojivými výsledky domácích prací, a to nejen u kombinovaných, ale i prezenčních studentů. Proto jsem se rozhodla vytvořit aplikaci v několika modifikacích tak, aby posloužila jako názorná pomůcka při výuce a podpůrný materiál při samostudiu studentů.

V rámci tvorby aplikací zaměřených na problematiku rovinné napjatosti se seznámíme s následujícími nástroji GeoGebry [21]:

- ***Geometrické objekty:*** bod, úsečka, vektor, kružnice.
- ***Obecné objekty:*** číslo, úhel, matice.
- ***Posuvník:*** lze jím ovládat hodnotu čísla či úhlu v daném rozsahu s daným krokem a má následující vlastnosti - název, interval [min, max], krok (s jakým se mění číslo nebo úhel), orientaci (vodorovně, svisle), šířka (v pixlech) a pro animaci potom rychlost a způsob, jakým se mají hodnoty příslušné proměnné opakovat.
- ***Textové pole:*** propojuje hodnotu textového pole s vybraným objektem.
- ***Text:*** pomocí nástroje text lze vytvořit statický, dynamický či smíšený text. Dynamický text znamená, že zobrazuje změny hodnot u objektu, který do textu vložíme. Je zde i možnost vytvářet text ve formátu LaTex[2].
- ***NastavitPopisek[<Objekt>, <Text>]:*** umožňuje zobrazení libovolného popisku vybraného objektu.
- ***round(<x>):*** zaokrouhlí hodnotu *x* na celé číslo.
- ***round(<x>, <y>):*** zaokrouhlí hodnotu *x* na *y* desetinných míst.
- ***Kdyz[<Podmínka>, <Pak>]:*** pokud je splněna *Podmínka*, vytvoří příkaz objekt *Pak*, v opačném případě vznikne nedefinovaný objekt.

2 LaTex je balík maker programu Tex umožňující autorům textů sázet a tisknout svá díla ve velmi vysoké typografické kvalitě, přičemž autor používá profesionály předdefinovaných vzhledů dokumentu. [23]

- ***Kdyz[<Podmínka>, <Pak>, <Jinak>]:*** pokud je splněna *Podmínka*, vytvoří příkaz objekt *Pak*. V opačném případě se vytvoří příkaz *Jinak*. Jedná se o klasický podmíněný příkaz.
- ***%x, %y, %z:*** jedná se o x-ovou, y-ovou či z-ovou souřadnici vybraného bodu.
- ***Vzdalenost[<Bod>, <Objekt>]:*** udává vzdálenost mezi vybraným bodem a objektem. Alternativou příkazu je vzdálenost mezi dvěma přímkami: Vzdalenost[<Přímka>, <Přímka>].
- ***KonstrukcniKrok[]:*** výstupem je číslo aktuálního kroku konstrukce.
- ***KonstrukcniKrok [<Objekt>]:*** výstupem je číslo konstrukčního kroku, ve kterém byl vytvořen daný objekt.
- ***Maximum[]:*** příkaz má několik modifikací, můžeme hledat maximum a stejné varianty přináší příkaz uvozený slovem ***Minimum***.
  - Maximum ze dvou zadaných čísel a, b: ***Maximum[<Číslo a>, <Číslo b>]***.
  - Maximum ze seznamu čísel: ***Maximum[<Seznam>]***, který se zapisuje ve složených závorkách jako matice. Jestliže jsou vstupem příkazu nečíselné objekty, pracuje příkaz Maximum s čísly, která jsou přiřazena k těmto objektům. Např. výsledkem příkazu ***Maximum[{seznam úseček}***] je délka nejdelší úsečky.
  - Maximum z intervalu: ***Maximum[<Interval>]***, kdy je výsledkem horní mez intervalu (výsledek je shodný jak pro uzavřený, tak i pro otevřený interval).
  - Maximum z funkce na daném intervalu***: Maximum[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]***. Výstupem je bod – maximum funkce na daném intervalu. Funkce by měla mít pouze jedno maximum na daném intervalu.
- ***Vycislit[<Výraz>, <Platné číslice>]:*** příkaz lze použít jen v rozhraní CAS a je určen k vyčíslení výrazu na požadovaný počet platných číslic.
- ***StandardniTvar[<Číslo>, <Přesnost>]:*** příkaz lze použít jen v rozhraní CAS a je určen k vyjádření čísla v exponenciálním tvaru s danou přesností.
- ***ZiskatCas[<Formát>]:*** argument *Formát* je text, ve kterém fungují jako zástupné symboly následující znaky uvozené zpětným lomítkem (\) (viz Tabulka 5):

Tabulka 5 Výběr argumentů příkazu ZiskatCas[<Formát>]

Formát	Popis výstupu
d	Den v měsíci s uvozující nulou (01 – 31)
D	Zkrácený zápis dne v týdnu (po - ne)
j	Den v měsíci bez uvozující nuly (01 – 31)
l	Plný zápis dne v týdnu (pondělí – neděle)
z	Číslo dne v roce (0 až 365)
W	Číslo týdne v roce
F	Plný zápis měsíce v roce (leden až prosinec)
m	Měsíc v roce s uvozující nulou (01 až 12)
n	Měsíc v roce bez uvozující nuly (1 až 12)
Y	Plný zápis čísla roku (např. 1999, 2000)
y	Poslední dvoučíslí roku (např. 99, 00)
G	Aktuální hodina (0 až 23)
i	Aktuální minuta (01 až 59)
s	Aktuální sekunda (01 až 59)
P	Aktuální časové pásmo v závislosti na Greenwich (např. +01:00)

V kapitolách 6.3 až 6.6 je popsán postup tvorby čtyř alternativ appletů, které májí za úkol:

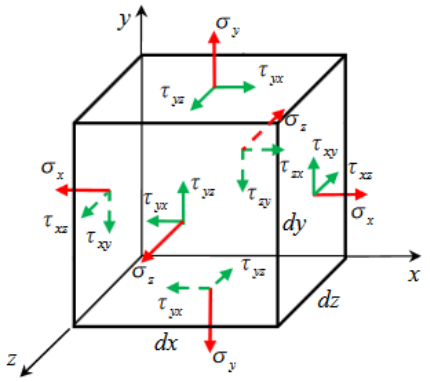
- sestrojit Mohrovu kružnici v závislosti na zadaném tenzoru napjatosti T_σ (viz kapitola 6.3),
- rozfázovat konstrukci Mohrovy kružnice do kroků s vysvětlujícími texty jak pomocí posuvníku, tak i navigačního panelu (viz kapitola 6.4),
- vypsat pomocí textu veličiny, které získáme z Mohrovy kružnice (viz kapitola 6.5),
- vytvořit anglické mutace již vzniklých českých verzí (viz kapitola 6.6).

V kapitolách 6.1 a 6.2 jsou stručně připomenuty základní pojmy, na jejichž základě je aplikace vytvořena.

6.1 Napětí a deformace v bodě tělesa

Mechanické napětí je míra intenzity působících vnitřních a vnějších sil. Základní jednotkou napětí je Pa = N/m^2, ale v technické praxi se užívá MPa = N/mm^2. Obecné napětí ν je dáno podílem působící síly na plochu, tečné napětí τ je dáno podílem tečné složky síly na plochu a normálové napětí σ je dáno podílem normálové složky síly na plochu.

Bod tělesa si lze představit jako elementární krychli (viz Obr. 28). Na stěnách krychle obecně působí normálové a smykové napětí. Smyková napětí se indexují tak, že první index je směr normály k rovině a druhý index označuje směr, se kterým je napětí rovnoběžné.



Obr. 28 Napětí na elementární krychli [5]

Stav napjatosti v bodě tělesa je dán celkem devíti složkami napětí, třemi normálovými $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ a šesti smykovými $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$. Tenzorem napjatosti T_σ nazveme veličinu, která určuje stav napjatosti v bodě tělesa. Tenzor napjatosti lze zapsat maticově:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \qquad (6.1.1)$$

kde každý řádek odpovídá jedné rovině elementární krychle. Tenzor napjatosti je tenzor druhého řádu a je symetrický. Symetrii zajišťuje platnost zákona o sdruženosti smykových napětí: Smykové složky tenzoru napjatosti, působící na dvou navzájem kolmých rovinách směrem k hraně nebo od ní, jsou vždy stejné velikosti:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}\ , \qquad (6.1.2)$$

obecně lze napjatost v bodě tělesa definovat pomocí šesti složek napětí.

Hlavní napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ je maximální normálové napětí, a tudíž jsou všechna smyková napětí nulová $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\ \mathrm{MPa}$. Roviny, na kterých působí hlavní napětí, se nazývají hlavní roviny tenzoru napjatosti, pro které lze tedy psát tenzor ve tvaru:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{6.1.3}$$

Obdobně lze pracovat i s deformacemi. Působením vnitřních a vnějších sil mění každé těleso svůj tvar. Deformace je bezrozměrná fyzikální veličina a rozlišuje se poměrná deformace ε a zkos (úhlová deformace) γ. Poměrná deformace je poměr změny délky ku její původní hodnotě. Zkos lze definovat jako odpovídající změnu úhlu mezi dvěma úsečkami, jež byly před deformací tělesa vzájemně kolmé.

Tenzor přetvoření T_ε lze vyjádřit obdobně jako tenzor napjatosti (6.1.3) a má také stejné vlastnosti:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \tag{6.1.4}$$

Mezi napětím a deformací existuje závislost, kterou popisuje obecný Hookeův zákon v pružné oblasti:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2\tau_{xy}(1+\mu)}{E} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2\tau_{yz}(1+\mu)}{E} \\ \gamma_{xz} &= \frac{2\tau_{xz}(1+\mu)}{E}, \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

kde E je modul pružnosti v tahu a μ je Poissonova konstanta.

Rovněž u deformací lze zavést pojem hlavní deformace - $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, kde hlavní deformace jsou extrémy poměrných deformací a zároveň zkosy jsou nulové. Tenzor přetvoření má následují tvar:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \tag{6.1.6}$$

kde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

6.2 Rovinná napjatost

U rovinné napjatosti platí stejné zákonitosti jako u prostorové (viz kapitola 6.1) a vzniká tehdy, pokud je třetí hlavní napětí je nulové:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0 \text{ MPa}. \tag{6.2.1}$$

Jestliže jsou obě hlavní napětí kladná (tahová) či záporná (tlaková), pak:

$$|\sigma_1| > |\sigma_2|, \tag{6.2.2}$$

když je jedno hlavní napětí kladné a druhé záporné:

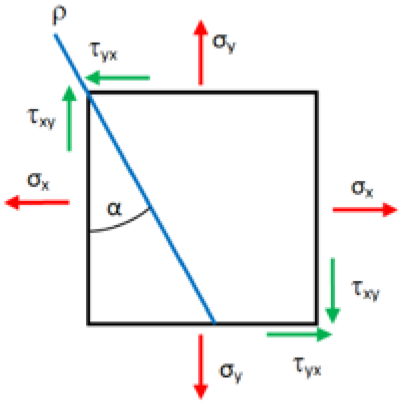
$$\sigma_1 > \sigma_2. \tag{6.2.3}$$

Tenzor napjatosti pro rovinnou napjatost má tvar:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}. \tag{6.2.4}$$

Tenzor přetvoření pro rovinnou napjatost má stejný tvar jako (6.1.6), jelikož existuje deformace ve třetím směru, i když je v něm zároveň nulové napětí. To si lze demonstrovat například na plastelíně, kterou budeme natahovat ve dvou rovinných směrech. Při pokusu pozorujeme, že se nám během zatěžování postupně tenčí i ve směru, ve kterém jsme ji nenatahovali.

Graficky lze rovinnou napjatost vykreslit na elementárním čtverci takto:



Obr. 29 Napětí na elementárním čtverci [5]

Dále nás zajímá napětí na obecně skloněné rovině ρ o úhel α:

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha) - \tau_{xy}\sin(2\alpha) \tag{6.2.5}$$

$$\tau_\rho = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\alpha) + \tau_{xy}\cos(2\alpha). \tag{6.2.6}$$

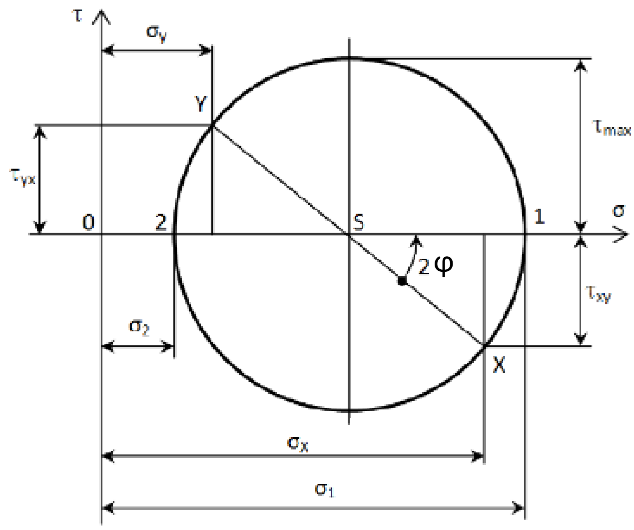
V praxi je často potřeba znát polohu hlavních rovin, tudíž určit úhel α tak, aby σ_ρ byla maximem a zároveň $\tau_\rho = 0$ MPa. Je tedy nutné parciálně derivovat σ_ρ podle α. Jelikož je zvykem označovat úhel udávající polohu hlavních rovin $\varphi\epsilon < 0°, 45° >$ pak:

$$2\varphi = \operatorname{atan}\left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right| \tag{6.2.7}$$

Rovnice (6.2.5) a (6.2.6) udávají v souřadnicovém systému $\sigma - \tau$ souřadnice bodu, jehož poloha je pro napjatost určená složkami $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, závislá pouze na úhlu α. Jestliže se převede $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ z rovnice (6.2.5) na levou stranu a rovnice (6.2.5) a (6.2.6) se umocní a sečtou, pak se získá analytický rovnice kružnice ve tvaru:

$$\left(\sigma_\rho - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\rho^2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2. \tag{6.2.8}$$

Grafickému znázornění rovnice (6.2.8) se říká Mohrova kružnice:

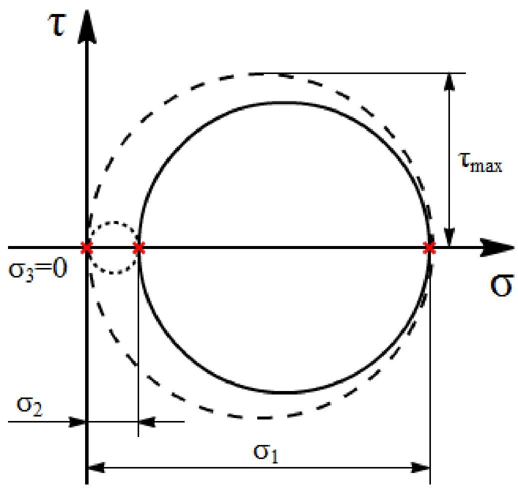


Obr. 30 Mohrova kružnice [5]

Z Obr. 30 lze jednoduše určit velikosti hlavních napětí:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{6.2.9}$$

Menší problém nastává u určení maximálního smykového napětí rovinné napjatosti $\tau_{\max}$. Je totiž nutné brát v potaz, že třetí hlavní napětí σ_3 je rovno nule a uvědomit si, že ve skutečnosti existují hned tři Mohrovy kružnice a poloměr největší z nich je pak maximální smykové napětí:



Obr. 31 Tři Mohrovy kružnice rovinné napjatosti

$$\tau_{max} = max\left\{\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right|\right\}. \tag{6.2.10}$$

6.3 Tvorba aplikace – vykreslení Mohrovy kružnice

Cílem je sestrojit Mohrovu kružnici v závislosti na zadaném tenzoru napjatosti T_σ. Popis tvorby aplikace je členěn do jednotlivých podproblémů (červeně) a jejich řešení (modře).

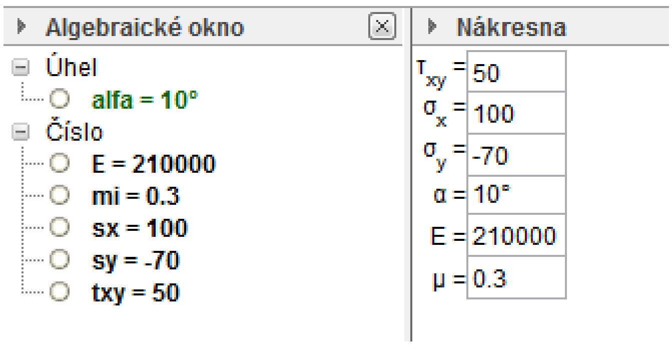
Podproblém: jakým způsobem zapisovat dynamicky vstupní hodnoty.

Řešení: lze využít posuvník, tabulku nebo textové pole, které zvolíme. Šířka byla nastavena na velikost 4 (vlastnosti – styl) a objekt byl upevněn.

Podproblém: lze do textového pole přidat jednotku stupně?

Řešení: ano, pomocí připsání slova deg.

Na Obr. 32 jsou uvedeny vstupní údaje včetně jejich pojmenování.



Obr. 32 Vstupní údaje pro rovinnou napjatost

Podproblém: lze změnit popis os včetně jednotek?

Řešení: ano, jednoduše přes vlastnosti nákresny.

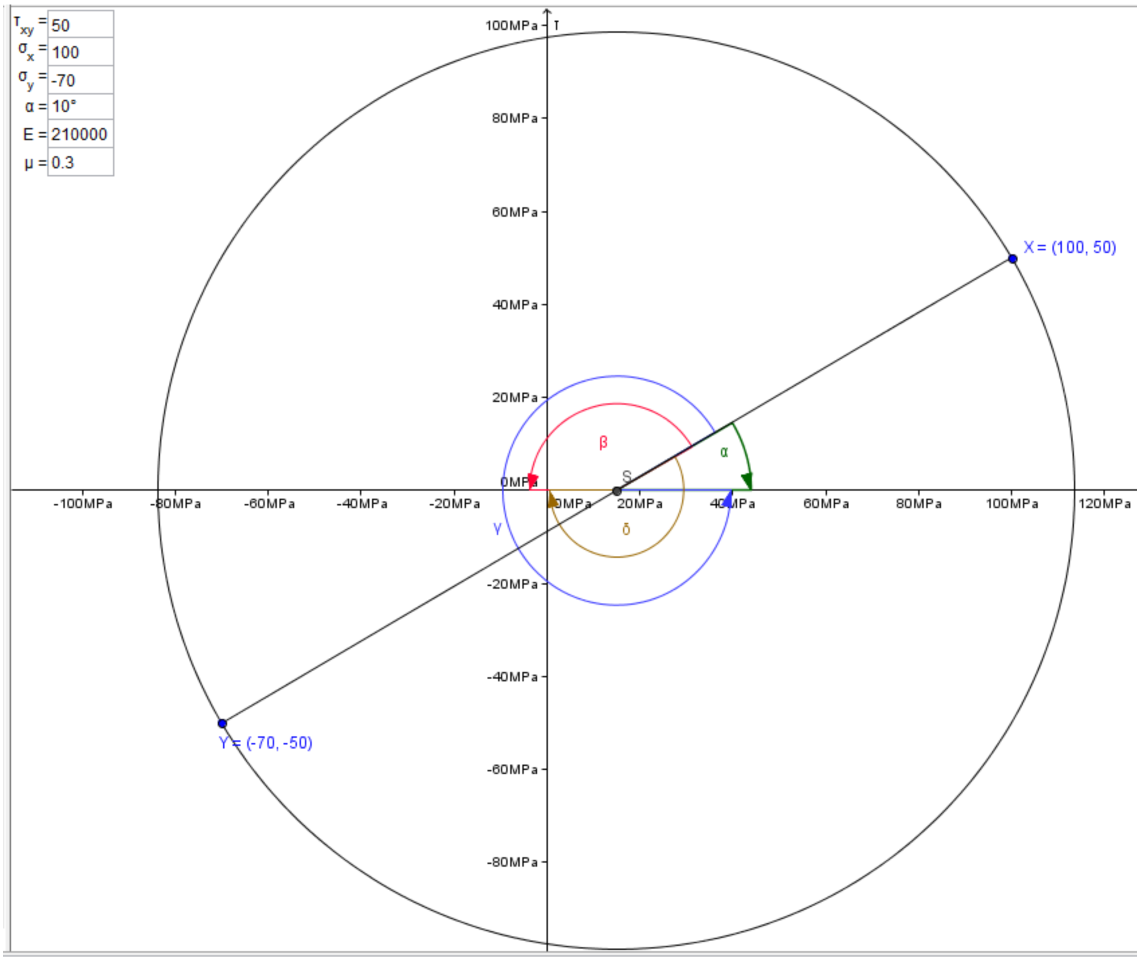
Podproblém: jak vynést body $X(\sigma_x, \tau_{xy})$ a $Y\ (\sigma_y, -\tau_{xy})$ pro vykreslení Mohrovy kružnice v závislosti na vstupních hodnotách, které jsou vypsané v textovém poli.

Řešení: souřadnice bodu se nastaví v jeho základních vlastnostech (bod X (sx, txy), bod Y (sy, -txy)).

Podproblém: nalezení středu Mohrovy kružnice a její vykreslení.

Řešení: úsečkou se spojí body X a Y. V průsečíku úsečky a osy normálového napětí se nachází střed S. Kružnice se poté vykreslí se středem S a bodem X.

Podproblém: orientovaný úhel 2φ, který udává polohu hlavních rovin, má počátek na úsečce SX a konec na ose x (orientace úhlu se nastaví ve vlastnostech – označení). Je potřeba si uvědomit, že obecně mohou nastat čtyři situace (viz Obr. 33). Jak tedy nastavíme zobrazení úhlu odpovídající našemu zadání?



Obr. 33 Možnosti vyznačení polohy hlavních rovin

Řešení: úhly větší než 90° nevyhovují podmínce $2\varphi \epsilon < 0°, 90° >$, proto se u všech čtyř úhlů ve vlastnostech – pro pokročilé - nastaví $\alpha \leq 90°$ apod.

Podproblém: pomocí standardních nastavení špatně odečítáme hodnotu úhlu 2φ. Jak zapíšeme velikost úhlu zaokrouhlenou na dvě desetinná místa?

Řešení: pomocí příkazu NastavitPopisek. V základním nastavení úhlu se zatrhne zobrazit popisek, přejde se do kolonky skriptování – po aktualizaci a nastaví se (pro úhel alfa): NastavitPopisek[α,"2φ="round(α*10^2)/10^2]. Daná syntaxe znamená, že pro úhel α se vždy zobrazí popisek v uvozovkách (zde je možno napsat cokoli). Příkaz round(<x>) zaokrouhlí hodnotu x na celé číslo, ale pokud je požadováno zaokrouhlení na dvě desetinná místa, tak se původní hodnota vynásobí stem a po zaokrouhlení stem opět stem vydělí. Nebo můžeme využít příkazu round(<x>, <y>), zaokrouhlující hodnotu x na y desetinných míst.

Podproblém: jak zjistit velkosti hlavních napětí?

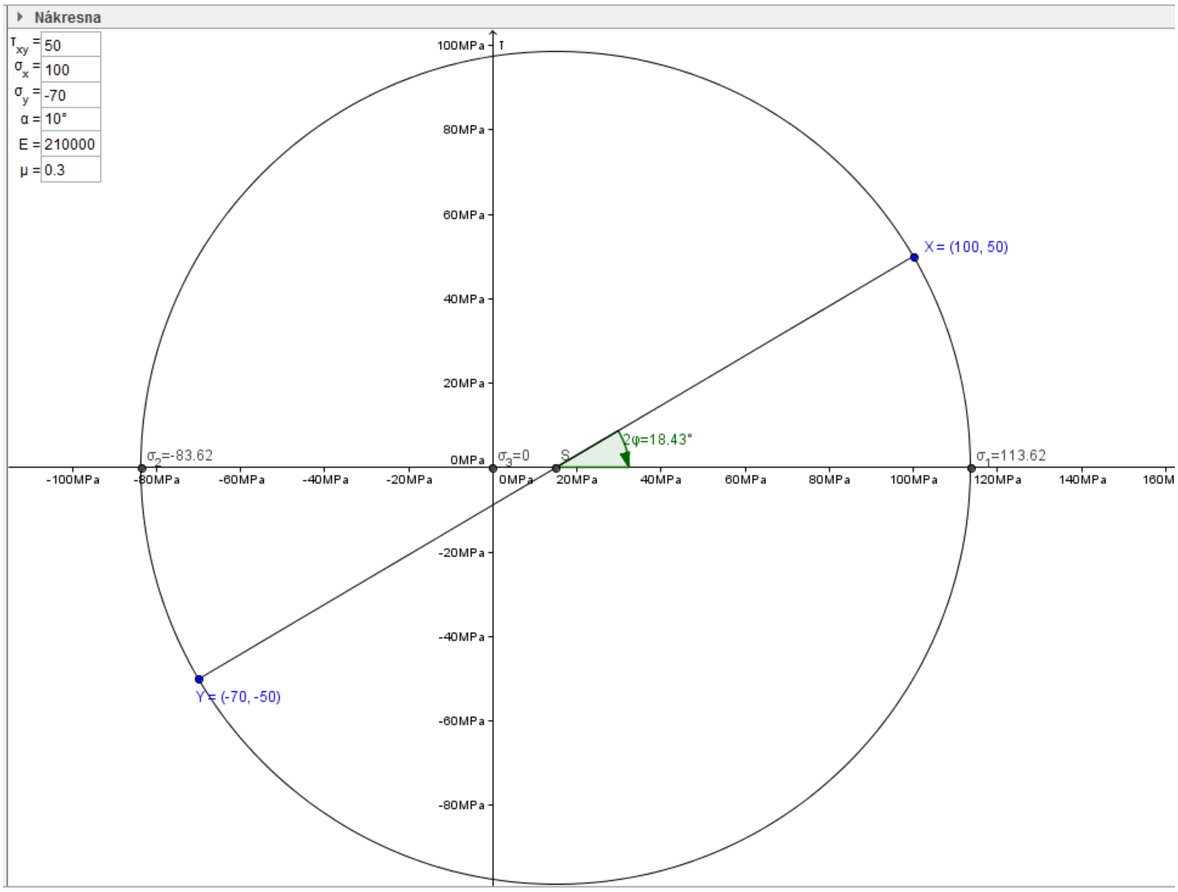
Řešení: aplikací vztahu (6.2.9) do vstupu získáme hodnoty hlavních napětí (označme s1, s2).

Podproblém: jak stanovit, které hlavní napětí je první a které je druhé tak, aby bylo vyhověno podmínkám (6.2.2) a (6.2.3)?

Řešení: v GeoGebře můžeme použít podmíněný příkaz když: s11=Kdyz[(s1 < 0) ∧ (s2 < 0), s2, s1], s22=Kdyz[(s1 < 0) ∧ (s2 < 0), s1, s2]. Popis syntaxe pro první hlavní napětí s11 je ten, že když je s1 a s2 menší než nula, pak s11 přiřaď s2, jinak s11 přiřaď s1.

Podproblém: jak vyznačit v Mohrově kružnici hlavní napětí?

Řešení: pomocí bodů a jeho popisku. Udělejme na průsečících kružnice s osou x dvojnásobné body (na jednom průsečíku jsou dva). Na jednom z bodů se nastaví popisek σ_2=%x (%x znamená, že se zobrazí x-ová souřadnice bodů) a na druhém dvojnásobném bodu se nastaví popisek σ_1=%x. Pro zobrazení správného bodu se zvolí pro pokročilé – podmínky zobrazení objektu: s11 > s22 respektive s11 < s22. Stejný postup se opakuje i na druhé dvojici bodů. Výsledný efekt je vyznačen na následujícím obrázku:



Obr. 34 Zobrazení hlavních napětí

Poznámka: další variantou zjištění hlavních napětí s1 a s2 z předchozího podproblému je výpis x-ových souřadnic bodů I, II průsečíků kružnice a osy x tak, že se do vstupu zadá s1=x(I), s2=x(II).

Podproblém: jak určit napětí na obecné skloněné ρ o úhel α?

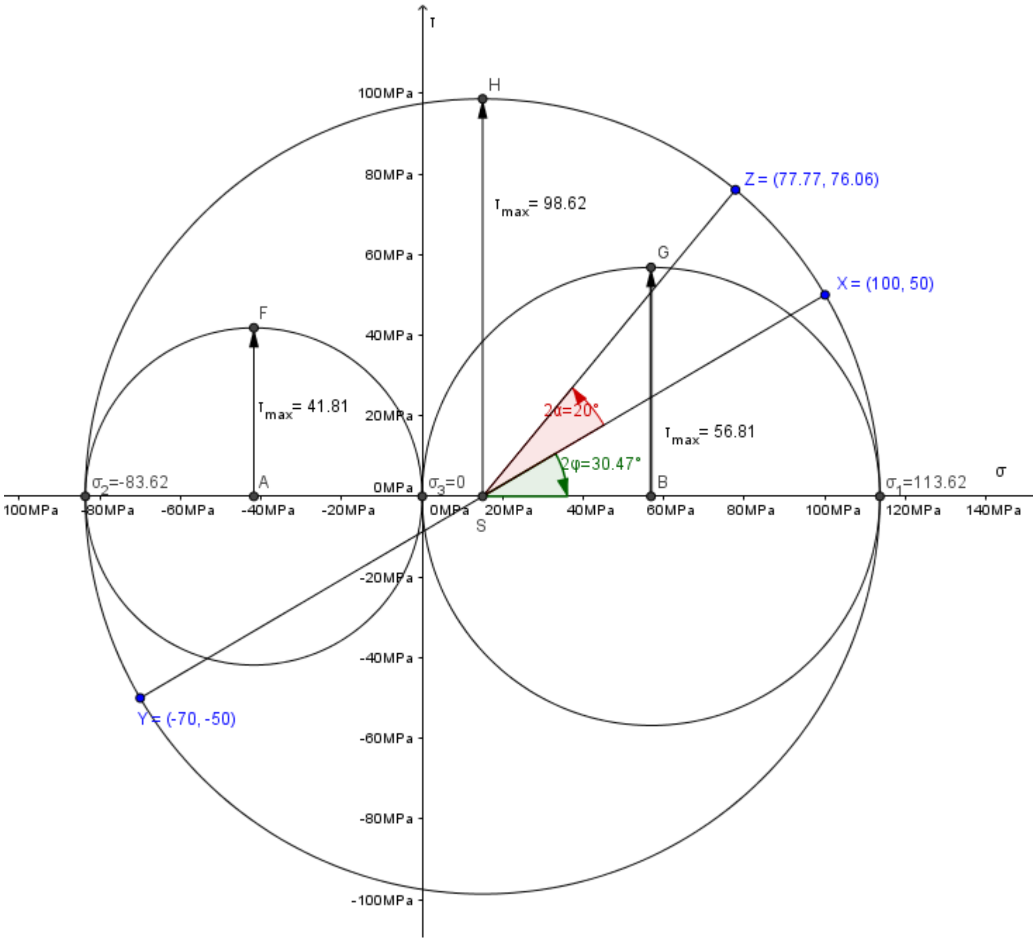
Řešení: vynášení úhlu 2α se provede pomocí rotace bodu X o úhel 2α proti směru hodinových ručiček. Tím získáváme bod *Z* (σ_ρ, τ_ρ). Úhel je orientovaný, má počátek na úsečce SX. Zobrazení je řešeno na stejném principu jako úhel 2φ s tím, že se zde neřeší čtyři varianty, nýbrž nastává vždy jen jedna situace.

Podproblém: jelikož existují hned tři Mohrovy kružnice (třetí hlavní napětí je nulové), tak je narýsujeme.

Řešení: nejprve uděláme bod o souřadnici $\sigma_3(0,0)$ reprezentující třetí hlavní napětí. Středy kružnic se nachází ve středech úsečky $\sigma_2\sigma_3$ a $\sigma_1\sigma_3$. Poloměr kružnice je $\left|\frac{\sigma_2\sigma_3}{2}\right|$ a $\left|\frac{\sigma_1\sigma_3}{2}\right|$.

Podproblém: vyznačit maximální smyková napětí τ_{max}, neboli zakótovat poloměry všech tří Mohrových kružnic včetně jejich velikosti.

Řešení: zakótování provedeme pomocí vektoru. Jelikož dolní index obsahuje více než jeden znak, je potřeba využít značení pomocí popisku (τ_m_a_x=) a tím pádem je nutno zvolit syntaxi jako u úhlu 2φ: skriptování – po aktualizaci a nastaví se: NastavitPopisek[u,"τ_m_a_x= "round(Vzdalenost[A, F]*10^2)/10^2]. Nově jsme využili příkaz Vzdalenost, pomocí něj se na nákresně vyobrazí velikost maximální smykového napětí dané kružnice:



Obr. 35 Zobrazení tří Mohrových kružnic

Podproblém: výsledné maximální smykové napětí je jen jedno. Nastavme tedy jen τ_{max} dle (6.2.10).

Řešení: ve vlastnostech vektoru, v kolonce pro pokročilé, se nadefinuje podmínka zobrazení daného objektu pro všechny tři případy. Například pro kružnici o poloměru |SH|: Vzdalenost[H, S] $\stackrel{?}{=}$ Vzdalenost[A, F] + Vzdalenost[B, G], kde $\stackrel{?}{=}$ (popřípadě = =) označuje ve skriptovacím jazyce klasický symbol rovnosti.

Pomocí předcházejícího postupu se vytvořila Mohrova kružnice. Vzniklou aplikaci jsem umístila na svůj GeoGebra profil i webovské stránky (viz kapitola 2.1). GeoGebra dále umožňuje uživateli zobrazit historii všech provedených kroků: ctrl+shift+l.

6.4 Tvorba aplikace – rozfázování Mohrovy kružnice

Pokud bychom chtěli úlohu rozfázovat, tak to lze realizovat pomocí posuvníku nebo předvolby nákresny. Vysvětleme si nejprve aplikaci posuvníku v otázkách a odpovědích.

Podproblém: jakým způsobem můžeme posuvníkem rozkrokovat úlohu?

Řešení: při vytváření posuvníku, který pojmenujme rozfazovani, si pomocí intervalu nastavíme, na kolik kroků chceme danou konstrukci rozdělit. Zvolme tedy minimum 1 a maximum 4 s krokem 1. Všechny prvky, které se mají zobrazit v kroku rozfazovani=1, navolíme v jeho pokročilých vlastnostech: rozfazovani $\stackrel{?}{=}$ 1. Když se má daný objekt objevit v prvním a všech dalších krocích: rozfazovani $\geq$ 1. Tento způsob aplikujeme na všechny objekty.

Podproblém: umožňuje GeoGebra díky posuvníku zobrazovat objekty, které vytvoříme až po jeho tvorbě?

Řešení: ano. Například by bylo dobré vkládání textů s vysvětlením ke každému kroku, ať uživatelé vědí, co se v dané fázi konstrukce událo. Při nastavení textu se postupuje stejně jako v přechozím podproblému. Výsledný efekt je na Obr. 36.

Podproblém: v tuto chvíli musí uživatel ručně posouvat posuvníkem, aby zobrazil jednotlivé fáze úlohy. V GeoGebře můžeme nastavit automatickou animaci posuvníku. Jaké možnosti nám animace posuvníku nabízí?

Řešení: zatržení funkce animace posuvníku v základních vlastnostech a navolení animace v kolonce posuvník (viz Obr. 37) se v nákresně objeví symbol „Play“ a „Stop“. Rychlost jedna znamená, že animace v rozsahu intervalu posuvníku trvá 10 sekund. GeoGebra zůstává plně funkční i během aktivní animace. Můžeme tak provádět změny v konstrukci i během přehrávání animace. Lze si také zvolit způsob opakování animačního cyklu [16]:

⇔ Oscilující

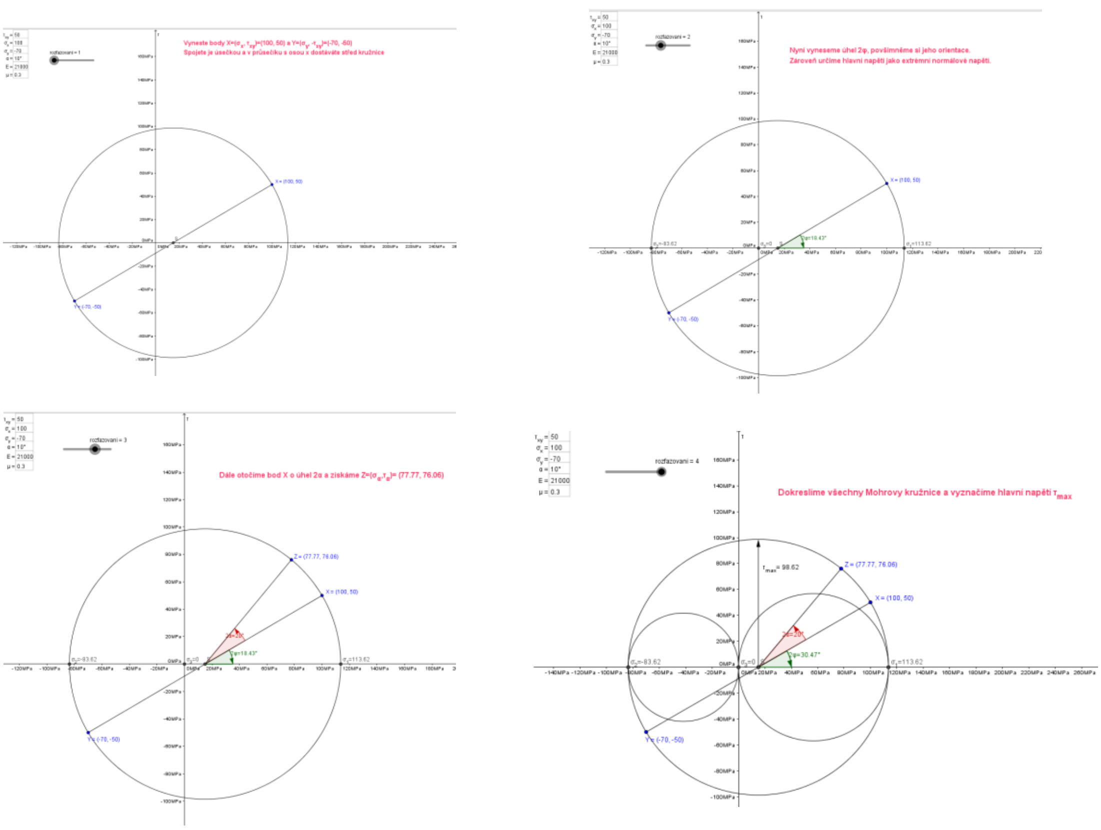
Cyklus animace střídá režimy Rostoucí a Klesající.

⇒ Rostoucí

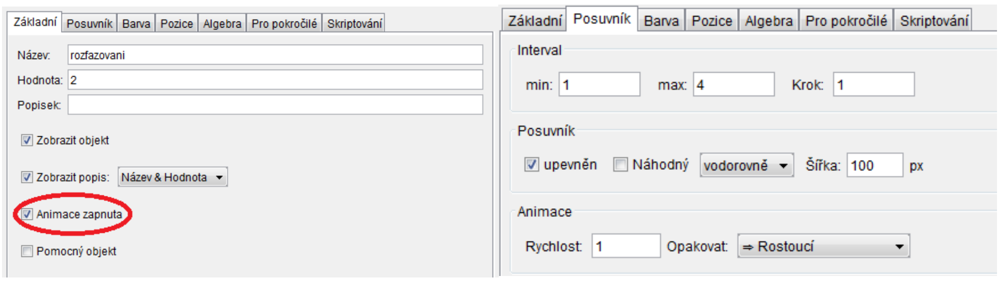
Hodnota na posuvníku se pouze zvyšuje. Po dosažení maximální hodnoty se posuvník vrátí skokem zpět na minimální hodnotu a pokračuje v animaci.

⇐ Klesající

Hodnota na posuvníku se pouze snižuje. Po dosažení minimální hodnoty se vrátí skokem zpět na maximální hodnotu a pokračuje v animaci.



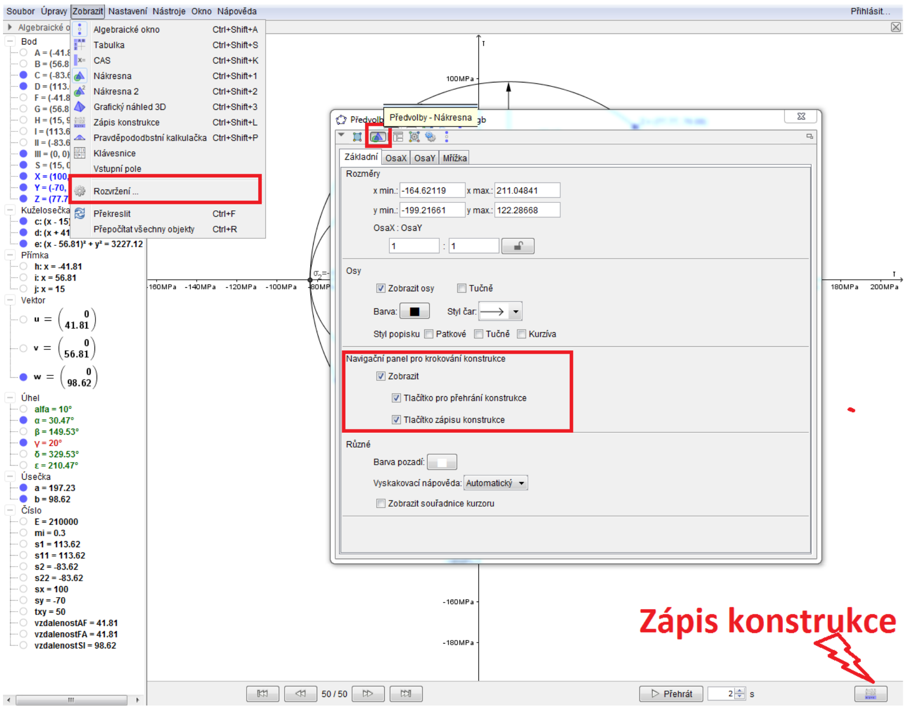
Obr. 36 Postupné zobrazení Mohrovy kružnice pomocí posuvníku



Obr. 37 Možné nastavení posuvníku

Podproblém: GeoGebra nabízí také rozfázování pomocí navigačního panelu pro krokování konstrukce. Jak ho můžeme zobrazit?

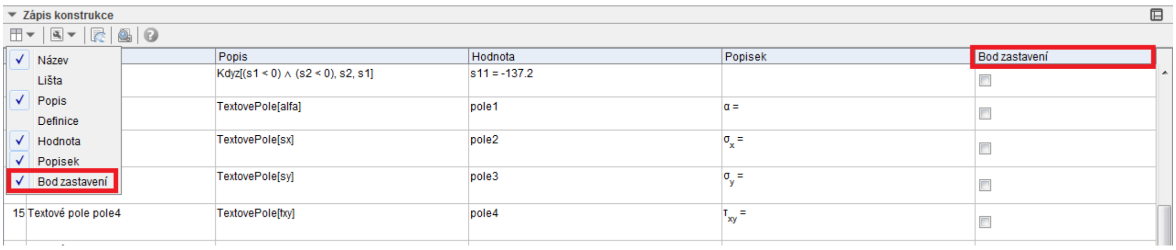
Řešení: v hlavním nabídkovém okně se zvolí Zobrazit – Rozvržení – Předvolby nákresny – Zobrazit navigační panel pro krokování konstrukce a na nákresně se nově objeví navigační panel (viz Obr. 38). Druhou možností je kliknou do nákresny pravým tlačítkem myši a zvolit možnost Navigační panel.



Obr. 38 Předvolba nákresny

Podproblém: otázkou zůstává, jak se pracuje s navigačním panelem a jak nastavím čtyři fáze úlohy stejně jako u posuvníku?

Řešení: pro nastavení čtyř fází se musí rozkliknou Zápis konstrukce (viz Obr. 38) a zde zobrazit body zastavení (viz Obr. 39). Pomocí sloupce Bod zastavení v zápisu konstrukce lze některé konstrukční kroky definovat jako body zastavení. Tím dojde k seskupení několika konstrukčních kroků. Tato skupina konstrukčních kroků poté bude při procházení konstrukce pomocí navigačního panelu zobrazena najednou.



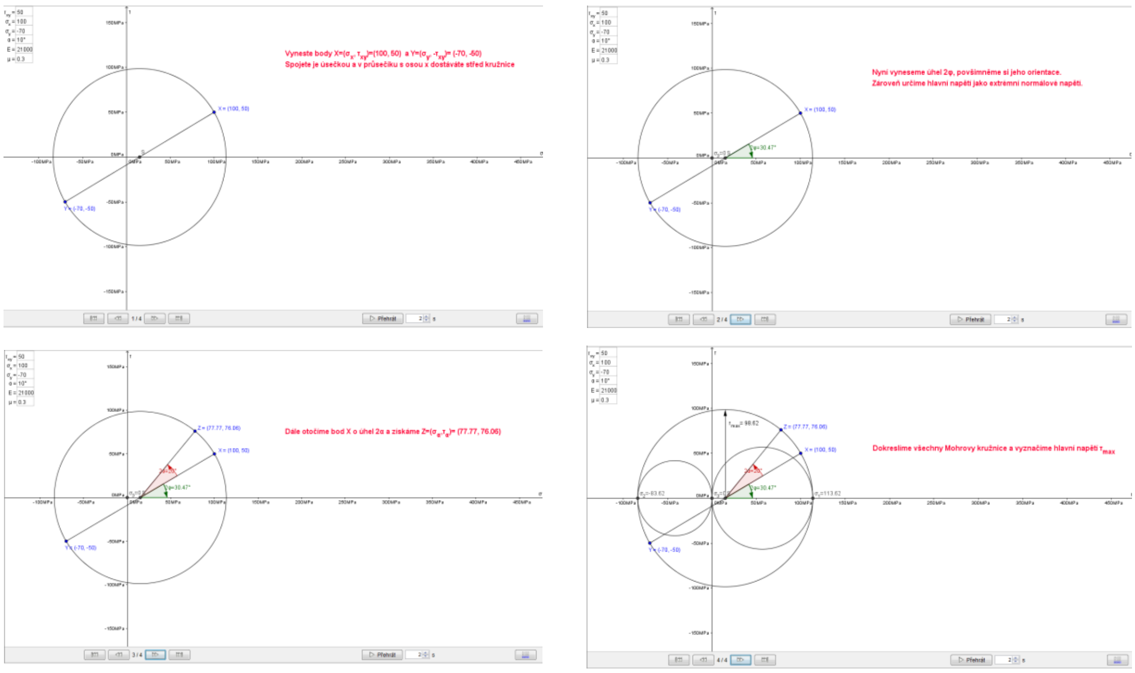
Obr. 39 Zobrazení bodů zastavení

Podproblém: co když jsme nevytvořili konstrukci v pořadí, v jakém ji chceme prezentovat?

Řešení: pořadí jednotlivých kroků v zápisu konstrukce se dá jednoduše přeuspořádat pomocí myši, čehož se například využije při vkládání pomocných textů jako u posuvníku. Komentáře vložíme před body zastavení.

Podproblém: problémem nyní je, že texty které se v dané fázi zobrazí, tak v dalším kroku nezmizí. Lze nastavit komentáře tak, aby se v daném kroku objevil jen ten, který daný krok popisuje?

Řešení: ano. Podmínku jejich zobrazení nastavíme pomocí funkce KonstrukcniKrok[]. Výstupem funkce f=KonstrukcniKrok[] je aktuální hodnota f konstrukčního kroku, proto ji zařadíme v zápisu konstrukce hned na druhé místo. Povšimněme si, že se hodnota f mění v závislosti na poloze navigačního panelu. Poté se nastaví podmínky zobrazení textu v závislosti na konstrukčním kroku f. Jestliže je první bod zastavení na pozici konstrukčního kroku 23, pak se pro první text nastaví f==23 v podmínkách zobrazení objektu. Jestliže bychom požadovali zobrazení všech pomocných textů po celém odkrokování, pak se nastaví f==23 $\wedge$ f>55, což je hodnota posledního konstrukčního kroku. Výsledný efekt je vyobrazen na Obr. 40

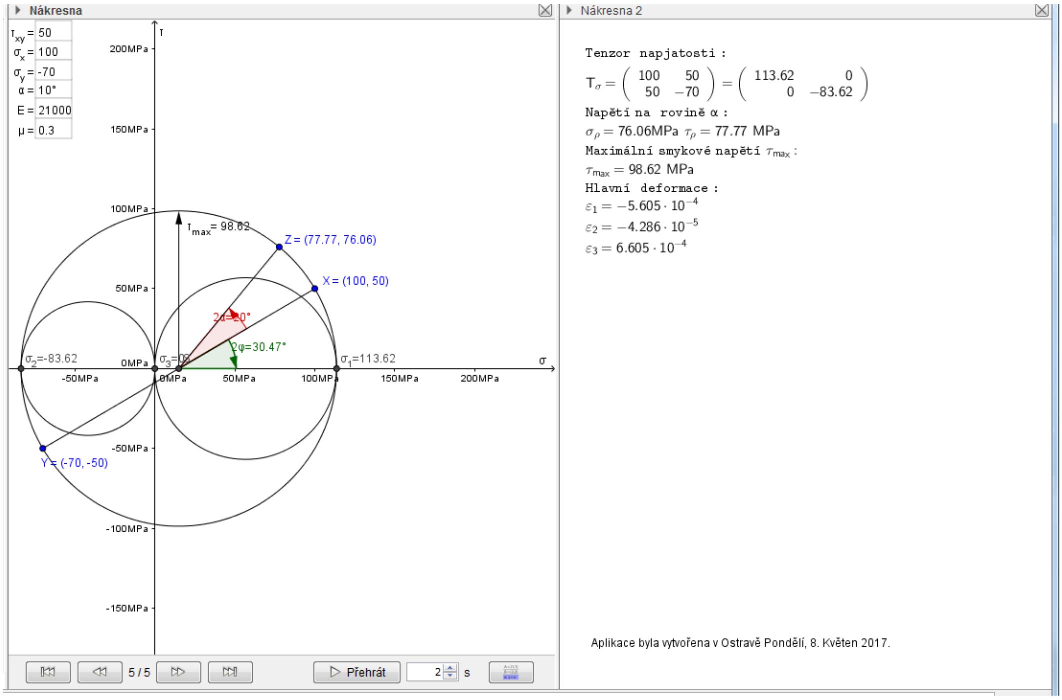


Obr. 40 Postupné zobrazení Mohrovy kružnice pomocí navigačního panelu

---

6.5 Tvorba aplikace – výpis hodnot

V neposlední řadě můžeme vypisovat výsledné hodnoty přímo do nákresny pomocí vložení textu (viz Obr. 41). Popišme si nyní proces vedoucí ke kýženému výsledku.



Obr. 41 Výsledná Mohrova kružnice s výpisem hodnot

Podproblém: kolik GeoGebra poskytuje nákresen a jak je zobrazíme?

Řešení: GeoGebra umožňuje práci ve dvou nákresnách, které mezi sebou „komunikují“ – jsou propojené. Druhá nákresna je skryta na horní liště v kolonce Zobrazit – Nákresna 2.

Podproblém: jak se v GeoGebře vytvoří matice, která je potřebná pro zápis tenzoru napjatosti?

Řešení: matice se zapisuje do složených závorek, jednotlivé řádky se také zapisují do složených závorek a oddělí se čárkou. Zadaný tenzor napjatosti tedy zadáme jako: zadani = {{sx, txy}, {txy, sy}} a tenzor obsahující hlavní napětí je vysledek = {{s11, 0}, {0, s22}}.

Podproblém: dále nás zajímá velikost normálového a smykového napětí na rovině ρ. Máme jinou možnost, než ho spočítat pomocí vztahů (6.2.5) a (6.2.6)?

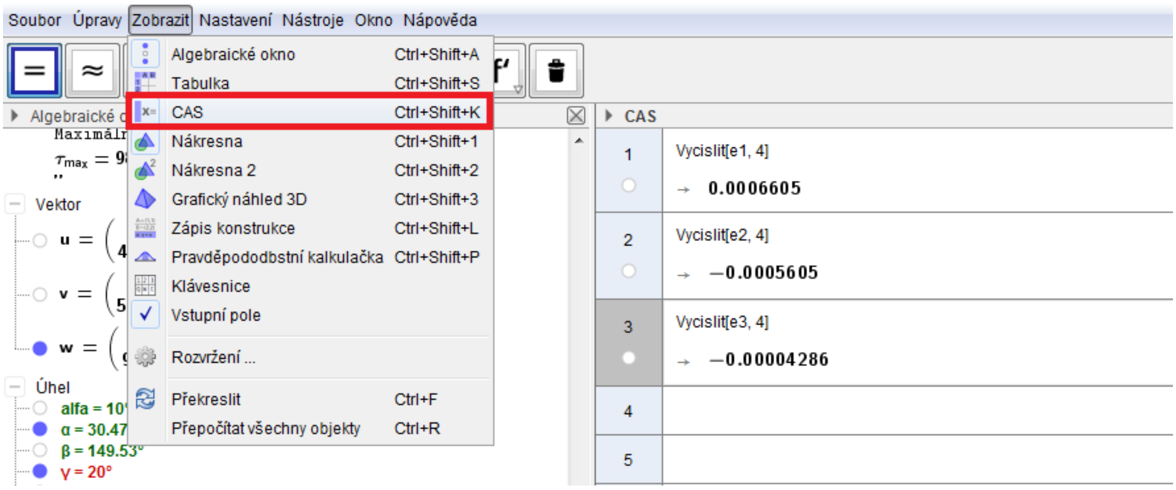
Řešení: ano. Napětí na rovině ρ je skryto v souřadnicích bodu Z, které lze získat velmi snadno: τ_ρ=y(Z) a σ_ρ=x(Z).

Podproblém: jak již víme, tak existují tři Mohrovy kružnice a každá z nich má své maximální smykové napětí. Jak můžeme efektivně určit výsledné maximální smykové napětí τ_{max}?

Řešení: maximální smykové napětí je maximální hodnota z ypsilonových souřadnic vektorů u, v a w, které reprezentují poloměry tří Mohrových kružnic. K nalezení příslušného maxima poslouží příkaz Maximum[<Seznam>]: tmax= Maximum[{ y(u), y(v), y(w) }]. Seznam se zapisuje do složených závorek – stejně jako matice.

Podproblém: v neposlední řadě nás zajímá velikost hlavních deformací (6.1.7): e1 = 1 / E (s11 - mi s22), e2 = 1 / E (s22 - mi s11), e3 = 1 / E (0 - mi (s11+s22)). Problém je, že hodnoty hlavních deformací jsou řádově v deseti tisícinách a při standartním zaokrouhlení na dvě desetinná místa získáme pouze nulu. Jak tedy zaokrouhlíme různá čísla na odlišný počet desetinných míst?

Řešení: k vyřešení problému slouží buď příkaz Vycislit[<Výraz>, <Platné číslice>], jenž je aktivní jen v rozhraní CAS (viz Obr. 42). Druhou možností je vytvoření textu přetažením e1, e2 a e3 do algebraického okna a ve vlastnostech textu se posléze nastaví zaokrouhlování na čtyři desetinná místa.

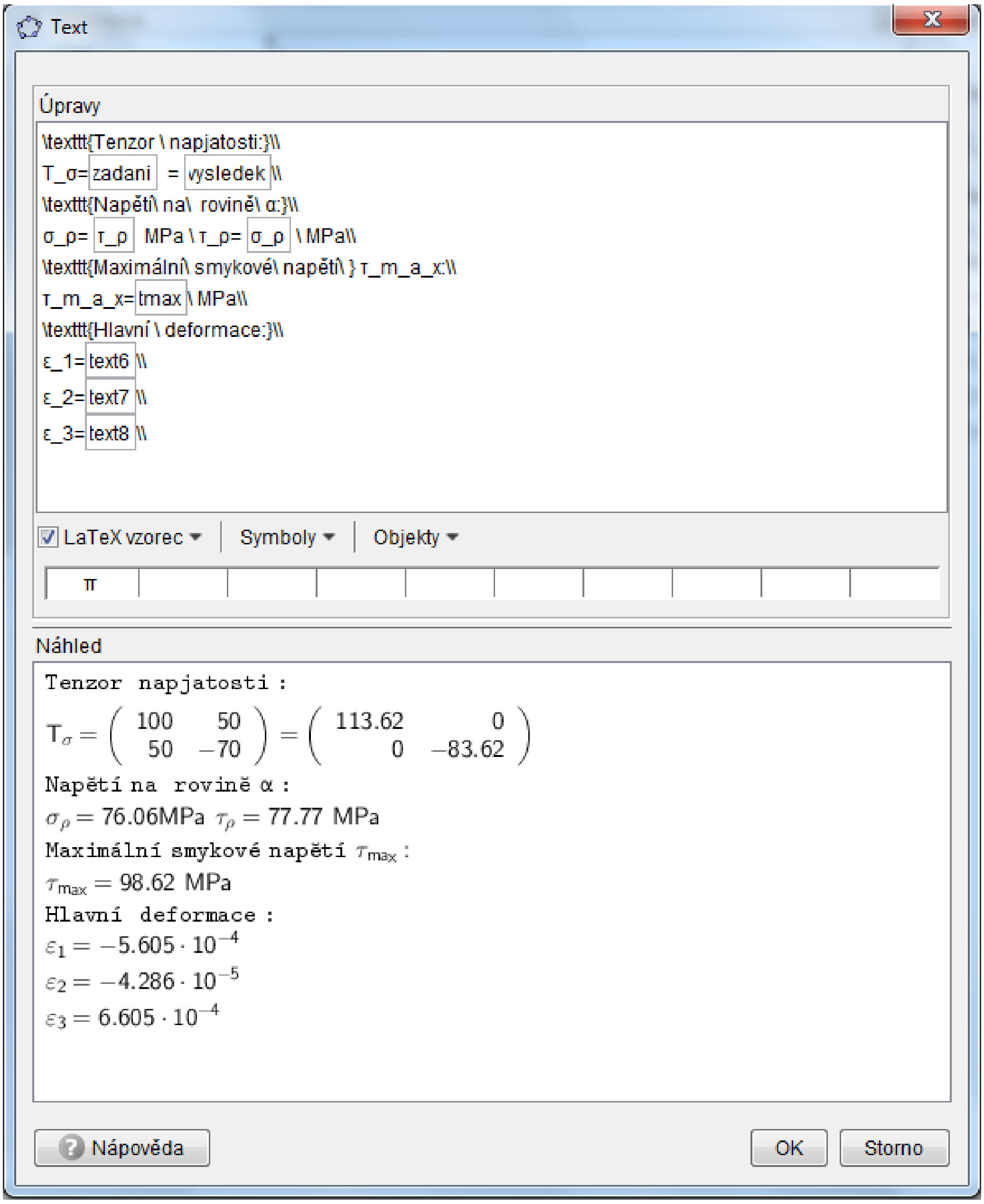


Obr. 42 Rozhraní CAS

Podproblém: bývá zvykem zapisovat hodnoty poměrných deformací v exponenciálním tvaru. Umožňuje některý z nástrojů GeoGerby toto nastavení?

Řešení: ano, pomocí příkazu v CAS: StandardniTvar[<Číslo>, <Přesnost>], kde je číslo kladné. Jelikož hlavní deformace mohou být obecně i záporné, je potřeba nastavit podmínku: Kdyz[e1>0, StandardniTvar[e1, 4],-StandardniTvar[-e1, 4]] a obdobně u dalších deformací. Jednoduchým přetažením výsledku pomocí pravého tlačítka myši z okna CAS do algebraického okna získáme požadovaný tvar výsledku hlavních deformací.

Pro přehlednost si zobrazíme výsledky na druhou nákresnu, ve které si vytvoříme výsledné textové pole (viz Obr. 43). Povšimněme si využití syntaxe v jazyce LaTex. Na závěr přidáme poslední bod zastavení a aplikace je hotova.



$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 50 & -70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113.62 & 0 \\ 0 & -83.62 \end{pmatrix}$$

$\sigma_\rho = 76.06\text{MPa}\ \tau_\rho = 77.77\ \text{MPa}$

$\tau_{max} = 98.62\ \text{MPa}$

$\varepsilon_1 = -5.605 \cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_2 = -4.286 \cdot 10^{-5}$

$\varepsilon_3 = 6.605 \cdot 10^{-4}$

Obr. 43 Výpis hodnot z Mohrovy kružnice

Vylepšení appletu poskytuje příkaz ZiskatCas[<Formát>]. Argument Formát je text, ve kterém fungují jako zástupné symboly následující znaky uvozené zpětným lomítkem (\) (viz Tabulka 5). Například: ZiskatCas["Aplikace byla vytvořena v Ostravě \l, \j\S \F \Y."]

6.6 Tvorba aplikace – překlad do angličtiny

V dnešní době jsou kladeny na studenty stále větší nároky na jazykovou vybavenost a do České republiky přijíždí studovat stále více zahraničních studentů, proto si vytvoříme u všech tří komentovaných aplikací i česko - anglickou verzi.

U verze postupného zobrazení Mohrovy kružnice pomocí posuvníku (viz Obr. 36) stačí jen vložit zaškrtávací tlačítko pojmenované English, přeložit pomocné texty a ty pak zobrazit v závislosti na zaškrtávacím tlačítku v sekci Pro pokročilé – podmínky zobrazení objektu.

Modifikaci postupného zobrazení Mohrovy kružnice pomocí navigačního panelu (viz Obr. 40) provedeme tak, že vložíme přeložené české texty a vše ručně nastavíme v souladu s popisem v kapitole 6.4.

Podproblém: jelikož ruční nastavování v navigačním panelu není ideální řešení, pokud bychom později chtěli provádět další modifikace, tak se pokusme popsat elegantnější automatické řešení našeho problému.

Řešení: poslouží nám příkaz KonstrukcniKrok[<Objekt>], který udává číslo konstrukčního kroku vybraného objektu. Anglický text se umístí vždy nad český text, který je nad bodem zastavení. V sekci Pro pokročilé – Podmínky zobrazení objektu u prvního českého textu se zapíše f $\stackrel{?}{=}$ KonstrukcniKrok[text1] + 1 $\wedge$ English $\stackrel{?}{=}$ 0, kde English $\stackrel{?}{=}$ 0 znamená nezaškrtnuté zaškrtávací tlačítko English (je také možno místo 0 psát False). U prvního anglického textu je analogická syntaxe: f $\stackrel{?}{=}$ KonstrukcniKrok[text5] + 2 $\wedge$ English $\stackrel{?}{=}$ 1.

Nakonec se upraví aplikace z kapitoly 6.5 obdobně jako výše dvě popsané.

6.7 Souhrn aplikací na Mohrovu kružnici

V kapitole 6.3 až 6.6 byly vytvořeno celkem 7 variant aplikací týkajících se Mohrovy kružnice – česká a anglická mutace:

Tabulka 6 Soupis aplikací na svůj GeoGebra profilu dlickova

Česká verze – kniha Mohrova kružnice	Česko - anglická verze – kniha Mohr's circle
Mohrova kružnice zobrazení	Mohr's circle 0
Mohrova kružnice – rozfázování posuvníkem	Mohr's circle 1
Mohrova kružnice – zobrazení pomocí navigačního panelu	Mohr's circle 2
Výsledná Mohrova kružnice s výpisem hodnot	Mohr's circle 3

7. ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývá tvorbou aplikací ve volně šiřitelném softwaru GeoGebra. Obsahuje popisy a návody, jak vytvářet applety k vybraným problémům, se kterými se můžeme setkat nejen v pedagogické činnosti v rámci výuky. Text je členěn tak, že v úvodu kapitoly jsou vždy vyjmenovány a stručně popsány příkazy, se kterými se v rámci řešené problematiky seznámíme. Dále je napsána formulace problému s nutným fyzikálním či matematickým podkladem. Následuje samotná tvorba aplikace členěna do podproblémů (značeno červeně) a jejich řešení (zvýrazněno modře).

Třetí kapitola si klade za cíl prozkoumat příkazy vztahující se k funkcím, které se prolínají celou středoškolskou matematikou. Jsou zde vytvořeny aplikace na znázornění monotonie, konvexnosti a konkávnosti funkce, dále applet uhodni funkci a ukázka na zpracování slovních úloh v GeoGebře na příkladu extremální úlohy.

Čtvrtá kapitola prozkoumává možnosti práce s tabulkou, jež je součástí softwaru. Práce se příliš neliší od jiných, běžně používaných, tabulkových programů. Výhodně zde můžeme statisticky zpracovávat data.

Následně je práce zaměřena na možnost řešení rovnic a práci s maticemi, které lze výhodně zpracovávat pomocí tabulky.

Poslední sada aplikací je zaměřena na rovinnou napjatost (viz kapitola 6), kdy je cílem sestrojit Mohrovu kružnici v nejrůznějších modifikacích:

Česká verze – kniha Mohrova kružnice	Česko - anglická verze – kniha Mohr’s circle
Mohrova kružnice zobrazení	Mohr’s circle 0
Mohrova kružnice – rozfázování posuvníkem	Mohr’s circle 1
Mohrova kružnice – zobrazení pomocí navigačního panelu	Mohr’s circle 2
Výsledná Mohrova kružnice s výpisem hodnot	Mohr’s circle 3

Veškeré aplikace, které vznikly v rámci diplomové práce, jsou umístěny na mém GeoGebra profilu dlickova. Uživatelé si je mohou jednoduše stáhnout a v případě potřeby modifikovat dle popsaných návodů.

8. PODĚKOVÁNÍ

Děkuji RNDr. Pavlu Calábkovi, Ph.D. za odborné vedení. Jeho zkušenosti a rady byly cenným podkladem pro vypracování mé diplomové práce. Děkuji také všem členům katedry Aplikované mechaniky Vysoké školy báňské – Technické univerzitě Ostrava, kteří mi vyšli ve všem vstříc při mém souběžném studiu na Univerzitě Palackého v Olomouci. Dále všem ostatním, kteří se i sebemenší radou podíleli na mé diplomové práci.

9. SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] BURDA, Pavel. *Matematika I*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 802481199-5.

[2] ERBAS, Ayhan Kursat a Arzu Aydogan YENMEZ. The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons. Computers & Education [online]. 2011, 57(4), 2462-2475 [cit. 2017-05-08]. DOI: 10.1016/j.compedu.2011.07.002. ISSN 03601315. Dostupné z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0360131511001503

[3] FUNKHOUSER, Charles. The Effects of Computer-Augmented Geometry Instruction on Student Performance and Attitudes. Journal of Research on Technology in Education [online]. 2002, **35**(2), 163-175 [cit. 2017-05-08]. DOI: 10.1080/15391523.2002.10782377. ISSN 15391523. Dostupné z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15391523.2002.10782377

[4] HAVELKOVÁ, Veronika. GeoGebra ve vzdělávání matematice. Praha, 2012. Diplomová. Univerzita Karlova. Vedoucí práce Jaroslav Zhouf.

[5] HALAMA, Radim, Ludmila ADÁMKOVÁ, František FOJTÍK, Karel FRYDRÝŠEK, Michal ŠOFER, Jaroslav ROJÍČEK a Martin FUSEK. Pružnost a pevnost. Ostrava, 2011. Dostupné také z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/pruznost_a_pevnost.pdf

[6] SARRACO, Lauren. The Effects of Using Dynamic Geometry Software in the Middle School Classroom . [online]. In: . 2005, s. 20 [cit. 2017-05-08]. DOI: 10.1.1.83.4732. Dostupné z: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.83.4732&rep=rep1&type=pdf

INTERNETOVÉ ZDROJE:

[7] Cabri: maths software for students. 3D geometry and algebra sofware. Learn mathematics with Cabri. [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://www.cabri.com/

[8] Home - The Geometer's Sketchpad Resource Center [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://www.dynamicgeometry.com/

[9] Release Notes GeoGebra 5.0 - GeoGebra Příručka. GeoGebra Příručka [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_5.0

[10] Ke stažení - GeoGebra. GeoGebra [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/download

[11] Reference:GeoGebra Installation - GeoGebra Příručka. GeoGebra Příručka [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://wiki.geogebra.org/en/Reference%3AGeoGebra_Installation?note=cs

[12] Publications - GeoGebraWiki. GeoGebra [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Publications

[13] North American GeoGebra Journal [online]. 2012 [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://www.geogebrajournal.com/index.php/ggbj

[14] Příručka - GeoGebra. GeoGebra [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/cs/Příručka

[15] GGB_strucny_pruvodce.pdf [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://www.gymkrom.cz/web/ict/materialy/GGB_strucny_pruvodce.pdf

[16] GeoGebra [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://www.geogebra.org

[17] GeoGebra Skupiny – GeoGebraBook [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/WLQa2iUM#material/rKtfcg9c

[18] GeoGebra institut Ostrava [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://ggi.vsb.cz/

[19] GeoGebra Institut v Českých Budějovicích [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~ggi/GeoGebra_Institut/Uvod.html

[20] Kategorie: CAS Specifický příkaz – GeoGebra příručka [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z:https://wiki.geogebra.org/cs/Kategorie:CAS_Specifick%C3%BD_p%C5%99%C3%ADkaz

[21] Kategorie: Příkazy – GeoGebra příručka [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://wiki.geogebra.org/cs/Kategorie:P%C5%99%C3%ADkazy

[22] Category: Commands – GeoGebra Manual [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://wiki.geogebra.org/en/Category:Commands

[23] LaTeX – A document preparation system [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: https://www.latex-project.org/

[24] M1_extrem.pdf [online]. [cit. 2017-05-08]. Dostupné z: http://homel.vsb.cz/~mor74/www/dokumenty/M1_extrem.pdf

10. SEZNAM PŘÍLOH

10.1 Příkazy GeoGebry použité v diplomové práce [21]

%x, %y, %z

Asymptota[<Funkce>]

Derivace[<Funkce>]

Determinant[<Matice>]

Extrem[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]

Funkce[<Funkce>, <Počáteční hodnota>, <Koncová hodnota>]

Hodnost[<Matice>]

InflexniBod[<Mnohočlen>]

Invertovat[<Funkce>]

Invertovat[<Matice>]

Kdyz[<Podmínka>, <Pak>]

KonstrukcniKrok [<Objekt>]

KonstrukcniKrok[]

Koreny[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]

Limita[<Funkce>, <Hodnota>]

LimitaZleva[<Funkce>, <Hodnota>]

LimitaZprava[<Funkce>, <Hodnota>]

Maximum[<Číslo a>, <Číslo b>]

Maximum[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]

Maximum[<Interval>]

Maximum[<Seznam>]

Maximum[]

Maximum[{seznam úseček}]

Minimum[<Číslo a>, <Číslo b>]

Minimum[<Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x>]

Minimum[<Interval>]

Minimum[<Seznam>]

Minimum[]

Minimum[{seznam úseček}]

NahodneMezi[<Minimum (celé číslo)>, <Maximum (celé číslo)>]

NahodnyPolynom[<Stupeň>, <Minimum pro koeficienty>, <Maximum pro koeficienty>]

NastavitBarvuPozadi[<Objekt>, "<barva>"]

NastavitPopisek[<Objekt>, <Text>]

NormalniRozdeleni[<Střední Hodnota>, <Směrodatná odchylka>, x]

NuloveBody[<Polynom>]

NVyresit[<Rovnice>]

NVyresit[<Rovnice>, <Proměnná>]

NVyresit[<Seznam rovnic>, <Seznam proměnných>]

NVyresitODE[<Seznam derivací>, <Počáteční souřadnice x>, <Seznam počátečních souřadnic y>, <Koncová souřadnice x>]

Prusecik[<Objekt>, <Objekt>]

round(<x>)

round(<x>, <y>)

SchodovityTvar[<Matice>]

StandardniTvar[<Číslo>, <Přesnost>]

Vycislit[<Výraz>, <Platné číslice>]

VyresitODE[<f'(x, y)>]

Vzdalenost[<Bod>, <Objekt>]

Vzdalenost[<Bod>, <Objekt>]

ZiskatCas[<Formát>]

Zjednodusit[<Funkce>]