VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

STATISTICKÁ CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE A JEJÍ VYUŽITÍ PRO ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE Bc. ZDENĚK MŽOUREK
AUTHOR

BRNO 2014

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

STATISTICKÁ CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE A JEJÍ VYUŽITÍ PRO ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLU

STATISTIC CHARACTERISTIC FUNCTION AND ITS USAGE FOR DIGITAL SIGNAL PROCESSING

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE Bc. ZDENĚK MŽOUREK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE prof. Ing. ZDENĚK SMÉKAL, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2014

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií

Ústav telekomunikací

Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor

Telekomunikační a informační technika

Student: Bc. Zdeněk Mžourek ***ID:*** 125559
Ročník: 2 ***Akademický rok:*** 2013/2014

NÁZEV TÉMATU:

Statistická charakteristická funkce a její využití pro zpracování signálu

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cílem diplomové práce je se seznámit s charakteristickou funkcí, používanou ve statistice, a dát ji do souvislosti s definicí a vlastnostmi Fourierovy transformace. Na základě tohoto srovnání navrhnout metodu jak použít charakteristickou funkci pro zpracování signálu. V programu Matlab (nebo jiném vhodném programovém prostředí) vytvořte moduly pro různé typy zpracování a klasifikace jednorrozměrných signálů z vhodně zvolené databáze.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] RENYI, A.: Teorie pravděpodobnosti. Academia 1972.
[2] BILLINGSLEY, P (1995). Probability and Measure (3rd ed.). John Wiley & Sons. ISBN 0-471-00710-2.
[3] LUKACS, E. (1970). Characteristic Functions. London: Griffin.

Termín zadání: 10.2.2014 ***Termín odevzdání:*** 28.5.2014

Vedoucí práce: prof. Ing. Zdeněk Smékal, CSc.
Konzultanti diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Mišurec, CSc.
Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

ABSTRAKT

Cílem této práce je poskytnout základní informace o charakteristické funkci používané ve statistice a porovnat její vlastnosti s Fourierovou transformací používanou v inženýrských aplikací. První část práce je zaměřena teoreticky, jsou zde rozebírány základní pojmy, jejich vlastnosti a vzájemné souvislosti. Druhá část je věnována některým možným aplikacím charakteristické funkce jako je například testování normality dat nebo využití charakteristické funkce v analýze nezávislých komponent. První kapitola popisuje úvod do teorie pravděpodobnosti kvůli sjednocení terminologie a zde uvedené pojmy budou použity k demonstrování zajímavých vlastností charakteristické funkce. Druhá kapitola se věnuje popisu Fourierovy transformace, definici charakteristcké funkce a jejich srovnání. V druhé části textu věnované aplikacím je rozebrána empirická charakteristická funkce jakožto odhad charakteristické funkce daný zkoumanými daty. Jako příklad aplikace je dále popsán jednoduchý test normality. V poslední části jsou rozebrány pokročilejší aplikace charakteristické funkce u metod jako je analýza nezávislých komponent.

KLÍČOVÁ SLOVA

charakteristická funkce, Fourierova transformace, distribuční funkce, matematická statistika, zpracování signálu, empirická charakteristická funkce

ABSTRACT

Aim of this thesis is provide basic information about characteristic function used in statistic and compare its properties with the Fourier transform used in engineering applications. First part of this thesis is theoretical, there are discussed basic concepts, their properties and mutual relations. The second part is devoted to some possible applications, for example normality testing of data or utilization of the characteristic function in independent component analysis. The first chapter describes the introduction to probability theory for the unification of terminology and mentioned concepts will be used to demonstrate the interesting properties of characteristic function. The second chapter describes the Fourier transform, definition of characteristic function and their comparison. The second part of this text is devoted to applications the empirical characteristic function is analyzed as an estimate of the characteristic function of examined data. As an example of application is describe a simple test of normality. The last part deals with more advanced applications of characteristic function for methos such as independent component analysis.

KEYWORDS

characteristic function, Fourier transform, distribution function, mathematical statistics, signal processing, empirical characteristic function

MŽOUREK, Zdeněk *Statistická charakteristická funkce a její využití pro zpracování signálu*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací, 2014. 38 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Zdeněk Smékal, CSc.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Statistická charakteristická funkce a její využití pro zpracování signálu“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno ....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Zde bych chtěl poděkovat prof. Ing Zdeňku Smékalovi, CSc. za vedení diplomové práce a její velmi zajímavé téma. Dále bych rád poděkoval svým rodičům za velkou podporu při studiu a také své přítelkyni za podporu a shovívavost.

Brno ....

(podpis autora)

Faculty of Electrical Engineering
and Communication
Brno University of Technology
Technicka 12, CZ-61600 Brno
Czech Republic
http://www.six.feec.vutbr.cz

Výzkum popsaný v této diplomové práci byl realizován v laboratořích podpořených z projektu SIX; registrační číslo CZ.1.05/2.1.00/03.0072, operační program Výzkum a vývoj pro inovace.

OBSAH

Teoretický úvod

1 PRAVDĚPODOBNOST

Cílem této části je zavést několik základních definic a tvrzení z teorie pravděpodobnosti, na které bude v dalším textu odkazováno. První část je věnována distribuční funkci a poté následuje text, který je zaměřen na hustotu pravděpodobnosti. Třetí odstavec obsahuje potřebné poznámky o konvoluci rozdělení pravděpodobnosti. Poslední část se věnuje momentům a kumulantům.

1.1 Distribuční funkce

Dle [17, 3] se distribuční funkce náhodné veličiny může zavést následovně:

Definice 1.1.1. Je-li X náhodná veličina, pak její distribuční funkce $F(x)$ je definována pro všechna reálná x následujícím předpisem:

$$F_X(x) = P(X \leq x). \tag{1.1}$$

V dalším textu, pokud nebude uvedeno jinak, bude pro distribuční funkci $F_X(x)$ použito stučnější označení $F(x)$. Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X tedy popisuje pravděpodobnost výskytu hodnoty menší nebo rovné hodnotě x.

Věta 1.1.2. *Distribuční funkce $F(x)$ má následující vlastnosti:*

1. *$F(x)$ je neklesající funkce, neboli $F(x+h) \geq F(x)$ pokud $h > 0$,*
2. *$F(x)$ je spojitá zprava pro všechna $x \in \mathbb{R}$,*
3. *$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$,*
4. *$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.*

Z těchto vlastností lze mimo jiné vypozorovat, že se vždy jedná o omezenou funkci. Odvození všech vlastností z věty 1.1.2 lze nalézt například v [17].

Dále dle [15] platí:

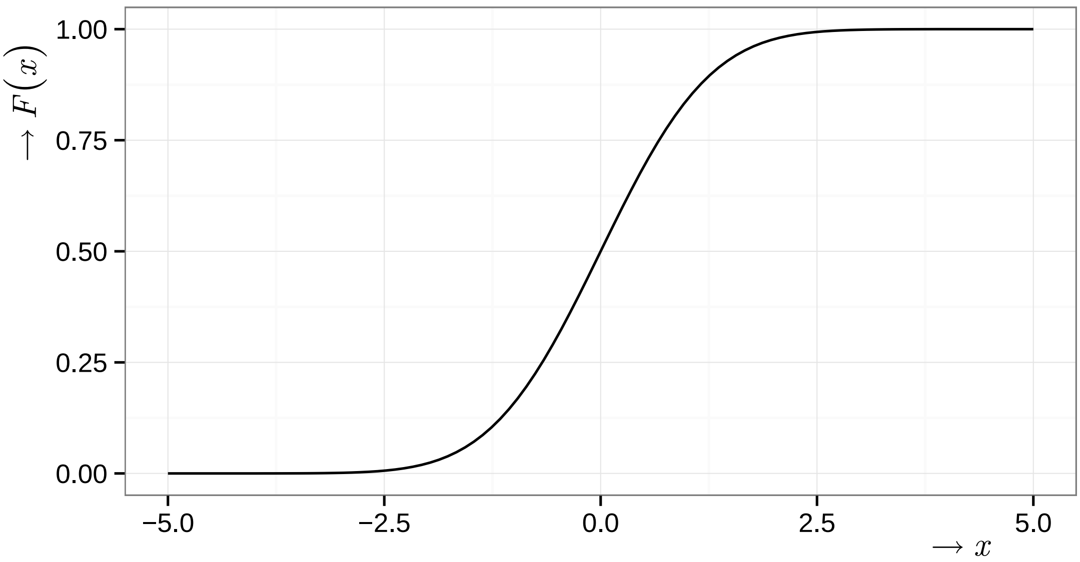
Věta 1.1.3. *Každá distribuční funkce $F(x)$ může být jednoznačně rozložena jako*

$$F(x) = a_1 F_d(x) + a_2 F_{as}(x) + a_3 F_s(x), \tag{1.2}$$

kde $F_d(x)$, $F_s(x)$ a $F_{as}(x)$ jsou distribuční funkce. $F_s(x)$ a $F_{as}(x)$ jsou spojité, navíc $F_{as}(x)$ je spojitá absolutně, $F_s(x)$ je singulární a $F_d(x)$ je skoková funkce. Koeficienty a_1,a_2,a_3 jsou nezáporné a splňují $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Singulární distribuční funkce $F_s(x)$ se používá převážně v teoretických úvahách a v praxi se nepoužívá. Nejčastěji se používá absolutně spojitá nebo skoková distribuční funkce, případně jejich kombinace [15].

Důsledek 1.1.4. *Distribuční funkce $F(x)$ může být složena ze součtu diskrétní a spojité distribuční funkce nebo naopak může být buď čistě spojitá nebo diskrétní.*



Obr. 1.1: Příklad distribuční funkce

Příklad 1.1.1. Jelikož lze v praxi potkat daleko častěji distribuční funkce, kterou jsou buď čistě spojité nebo čistě diskrétní, tak dále bude uveden krátký příklad na distribuci pravděpodobnosti složenou.

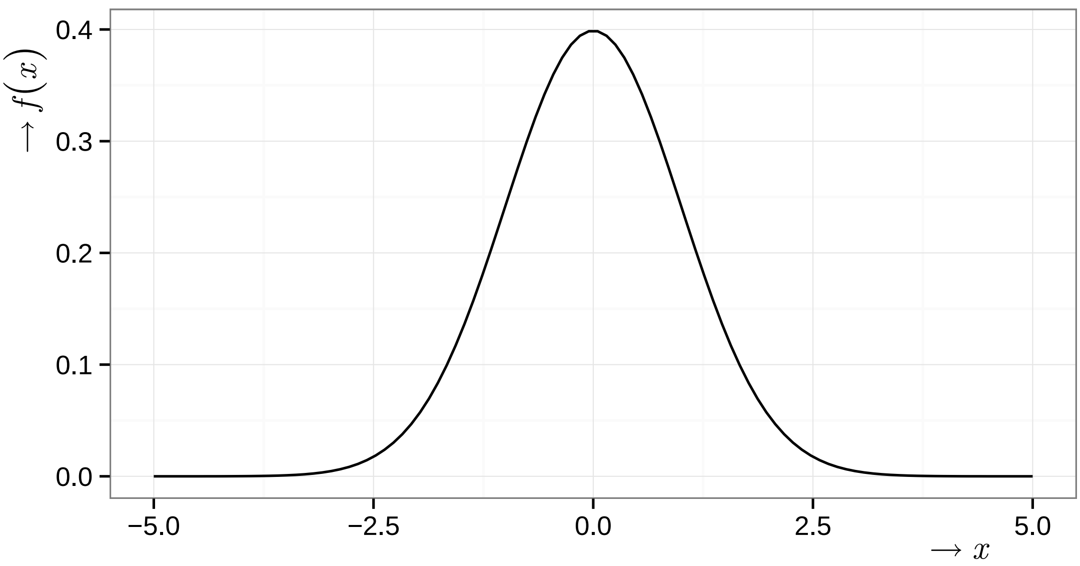
Jako poměrně intuitivní příklad lze uvést distribuční funkci, která popisuje množství dešťových srážek. Množství spadené vody za určitý časový úsek (například za týden) lze vyjádřit jako spojitou spojitou veličinu jejíž rozměr může například $\mathrm{mm/m^2}$. Je ale zřejmé, že neprší každý den, a proto je rozumné předpokládat i nenulovou pravděpodobnost jedné hodnoty, v tomto konrkétním případě $0\ \mathrm{mm/m^2}$. Ostatní kladné hodnoty spadají do intervalů reálných čísel s nenulovou pravděpodobností.

1.2 Hustota pravděpodobnosti

Definice 1.2.1. Nechť je pro absolutně spojitou distribuční funkci $F(x)$ označena její derivace $f(x) = F'(x)$. V bodech, ve kterých distribuční funkce nemá derivaci, $f(x)$ není definovaná. Jestliže $F(x)$ je distribuční funkcí náhodné veličiny X, pak funkce $f(x)$ je také nazývána hustotou náhodné veličiny X nebo také její frekvenční funkcí [17, 15].

Z definice distribuční funkce plyne vyplývají následující vlastnosti hustoty pravděpodobnosti [17]:

1. $f(x) \geq 0$, pro každé $x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.



Obr. 1.2: Příklad hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ náhodné veličiny X

1.3 Konvoluce rozdělení pravděpodobnosti

V praxi se lze velmi často setkat se sčítáním náhodných veličin.

Věta 1.3.1. *Nechť X a Y jsou dvě na sobě nezávislé náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F(x)$ a $G(y)$. Pak pro distribuční funkci $H(z)$ součtu $Z = X + Y$ platí*

$$H(z) = \iint\limits_{x+y<z} \mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)\,\mathrm{d}G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z-x)\,\mathrm{d}F(x). \quad (1.3)$$

Rozdělení s distribuční funkcí $H(z)$ se nazývá konvoluce rozdělení s distribučními funkcemi $F(x)$ a $G(y)$. Distribuční funkce H se také nazývá konvoluce distribučních funkcí F a G.

Pokud jsou distribuční funkce $F(x)$ a $G(y)$ absolutně spojité, pak existují hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ a $g(y)$. Je možné ukázat, že pro tento případ platí

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x)g(y)\,\mathrm{d}y \tag{1.4}$$

Odvození lze nalézt například v [17].

Poznámka 1.3.1. Integrál použitý v (1.3) je takzvaný Lebesgue-Stieltjesův integrál. Jedná se o zobecnění Riemannova a Lebesgueova integrálu, který umožnuje integrovat širší třídu funkcí. Pro vybudování tohoto integrálu se využívá takzvané náhodné míry. Více se lze dočíst například v [3, 1].

1.4 Momenty

Momenty jsou známým pojmem z teorie pravděbodobnosti. Nejznámější jsou střední hodnota a rozptyl. V této části je nejprve zaveden pojem střední hodnoty (což je první moment) a uvedeny některé její vlastnosti. Dále se text věnuje náznaku odvození vytvořující funkce.

1.4.1 Střední hodnota

Střední hodnota $\mathrm{E}[X]$ (někdy se též označuje jako $\mathrm{E}\,X$ nebo $\langle X\rangle$) závisí přirozeně jen na distribuční funkci náhodné veličiny X [17].

Definice 1.4.1. Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Pak

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}F(x). \tag{1.5}$$

Jestliže je distribuční funkce $F(x)$ absolutně spojitá a $f(x)$ je příslušná hustota pravděpodobnosti, pak

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

Z definice plyne, že střední hodnota $\mathrm{E}[X]$ existuje právě tehdy, když integrál (1.6) konverguje. Tento integrál nemusí konvergovat vždy, a tím pádem i střední hodnota nemusí vždy existovat. Jako příklad může sloužit Cauchyho rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$.

Z defince dále plyne, že střední hodnota je lineární operátor neboli platí princip superpozice

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[aX + bY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xaf(x) + ybg(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)\,\mathrm{d}y \\ &= a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y], \end{aligned} \tag{1.7}$$

kde X, Y jsou náhodné veličiny a a, b jsou libovolné konstanty. Detailní odvození lze nalézt například v [9, 18, 3].

1.4.2 Momentová vytvořující funkce

Momentová vytvořující funkce je definována jako

$$M_X(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}],\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Vytvořující funkce tedy existuje, pokud následující integrál absolutně konverguje

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}F(x). \tag{1.9}$$

Vytvořující funkce, která je pro danou náhodnou veličinu alternativním popisem její distribuční funkce, nemusí ale ve všech případech existovat. Takovým případem je například Cauchyho rozdělení.

Z vytvořující funkce lze jednoznačně určit všechny charakteristické údaje o dané distribuční funkci jako jsou například střední hodnota, rozptyl apod.

Jednotlivé momenty lze odvodit pomocí Maclaurinova rozvoje (speciální případ Taylorova rozvoje v bodě nula)

$$M_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{t^n}{n!} \tag{1.10}$$

jako derivace vytvořující funkce okolo otevřeného intervalu okolo bodu $t = 0$, přesněji

$$m_n = \mathrm{E}(X^n) = M_X^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^n M_X}{\mathrm{d}t^n}(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.11}$$

Pro součet dvou nezávislých náhodných veličin X a Y platí:

$$M_{X+Y}(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{t(X+Y)}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}]\mathrm{E}[\mathrm{e}^{tY}] = M_X(t)M_Y(t). \tag{1.12}$$

Z výše uvedeného plyne, že vytvořující funkci součtu nezávislých náhodných veličin lze vyjádřit jako součin vytvořujích funkcí jednotlivých náhodných veličin.

Odvození výše zmíněných rovnic lze nalézt například v [15].

1.5 Kumulanty

Kumulanty jsou alternativou momentům zavedeným v předchozí sekci. V této části se zformuluje vytvořující funkce pro kumulanty a poukáže se na souvislost kumulantů s momenty.

Vytvořující funkce kumulantů je definována jako

$$K_X(t) = \ln M_X(t) = \ln \mathrm{E}[e^{tX}],\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Z toho plyne, že vytvořující funkce kumulantů existuje právě tehdy, když existuje momentová vytvořující funkce [11].

Podobně jako u momentů lze kumulanty odvodit přes Maclaurinův rozvoj

$$K_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{t^n}{n!}. \tag{1.14}$$

Jednotlivé kumulanty pak lze opět zapsat jako derivace jejich vytvořující funkce

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{d}^n K_X}{\mathrm{d}t^n}(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.15}$$

Z vlastností logaritmu a exponencionální funkce lze pro nezávislé náhodné veličiny odvodit následující vzorec:

$$K_{X+Y}(t) = \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{t(X+Y)}] = \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}]\mathrm{E}[\mathrm{e}^{tY}] = \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}] + \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{tX}] = K_X(t) + K_Y(t), \tag{1.16}$$

kde X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, ln zde vyjadřuje přirozený logaritmus.

Z výše uvedeného vzorce plyne, že vytvořující funkce součtu kumulantů nezávislých náhodných veličin lze vyjádřit jako sčítání odpovídajících vytvořujích funkcí. Lze vidět, že tento důsledek také plyne z (1.12) při jejím zlogaritmování.

Jelikož je součet výpočetně méně náročná operace než násobení, tak jejich využití v praxi může být výpočetně výhodnější.

1.5.1 Koeficient špičatosti

Jeden z nejznámějších kumulantů je takzvaný koeficient špičatosti. Jedná se o v pořadí čtvrtý kumulant κ_4. Pomocí tzv. centrálních momentů jej lze vyjádřit jako

$$\kappa_4 = m'_4 - 3{m'_2}^2, \tag{1.17}$$

kde m'_n jsou centrální momenty definované jako

$$m'_k = \mathrm{E}[(X - m_1)^k]. \tag{1.18}$$

Jednou ze zajímavých vlastností koeficientu špičatosti je, že je roven nule, pokud má náhodná veličina normální rozložení pravděpodbnosti. Této vlastnosti se využívá pro porovnávání různých rozložení pravděpodobnosti s normální rozložením. V praxi se této vlastnosti využívá například jako kontrastní funkce u analýzy nezávislých komponent [11, 19].

Dle hodnoty koeficientu špičatosti se distribuce pravděpodobnosti dělí na dva druhy:

subgaussovská distribuce Hodnota koeficientu špičatosti je záporná. Tvar průběhu jejich hustoty pravděpodobnosti je více plochý než u normální distribuce. Zástupci jsou například rovnoměrná distribuce nebo Bernoulliniho distribuce.

supergaussovská distribuce Hodnota koeficientu špičatosti je kladná. Typicky mají ostřejší průběh okolo vrcholu ve srovnání s normální distribucí. Zástupci jsou například Studentova t-distribuce, Poissonova distribuce nebo Laplaceova distribuce.

2 CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE

Cílem této časti je seznámení s charekteristickou funkcí. V prvním odstavci se nachází text věnovaný Fourierově transformaci. Ve druhém je uvedena definice charakteristické funkce a v následující sekci se pokračuje výčtem některých vlastností charakteristické funkce. V další časti se text zaměřuje na rozdíly v terminologii ohledně Fourierovy transformace. V poslední části se pozornost směřuje na srovnání charakteristické funkce s Fourierovou transformací. V poslední části se pak charakteristická funkce dává do souvislosti s momenty a kumulanty.

2.1 Fourierova transformace

Fourierova transformace je velmi známý a užitečný nástroj pro zpracování signálu a řešení problémů spojených s lineárními systémy. V této části textu je uvedena definice charakteristické funkce φ. Poté následuje výčet vlastnosti této funkce. Další odstavec je věnován rozdílům v terminologii ohledně Fourierovy transformace. Předposlední část je zaměřena na různé varianty charakteristické funkce. Poslední dává do souvislosti charakteristickou funkci s momenty a kumulanty.

Nejčastěji je Fourierova transformace definována následovně [5]:

Definice 2.1.1. Nechť je $x(t)$ funkce. Její Fourierova transformace $g(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je pak rovna

$$g(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Proměnná t zde reprezentuje čas, proměnná f kmitočet. Definiční obor funkce $x(t)$ je často označován jako časová oblast, definiční obor transformované funkce $g(f)$ jako kmitočtová oblast.

V případě Fourierovy transformace za určitých podmínek existuje i zpětná transformace.

Definice 2.1.2. Nechť je $x(t)$ funkce. Její zpětná Fourierova transformace $g^{-1}(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je pak rovna

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}f. \tag{2.2}$$

Pro existenci inverzní transformace $\mathcal{F}^{-1}\{x(t)\}$ je nutné, aby funkce $x(t)$ a její transformace $\mathcal{F}\{x(t)\}$ byly absolutně integrovatelné. Pro běžné aplikace se předpokládá, že tato podmínka platí vždy.

Jádro transformace je zde takzvaná komplexní exponencionála $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}$. Pokud se provede substituce $\omega = 2\pi f$, tak jádro transformace bude $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$. Tato změna ovlivní tvar transformace následovně:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}f. \tag{2.4}$$

Výše byla popsána pouze definice Fourierovy transformace a její inverze. V dalších částech textu budou postupně uváděny další vlastnosti Fourierovy transformace ve srovnání s charakteristickou funkcí.

2.2 Definice charakteristické funkce

Definice 2.2.1. Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $F_X(x)$, pak charakteristickou funkci $\varphi(t)$ zavádíme jako

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}Xt}]. \tag{2.5}$$

Pomocí definice střední hodnoty 1.4.1 lze rovnici charakteristické funkce napsat jako

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}xt}\,\mathrm{d}F(x), \tag{2.6}$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Výše použitý integrál se nazývá Fourier-Stieltjesův integrál [17, 14].

Jelikož absolutní hodnota jádra $|\mathrm{e}^{\mathrm{j}xt}| = 1$, pak je charakteristická funkce libovolné distribuční funkce vždy definována pro všechny $t \in \mathbb{R}$ [17].

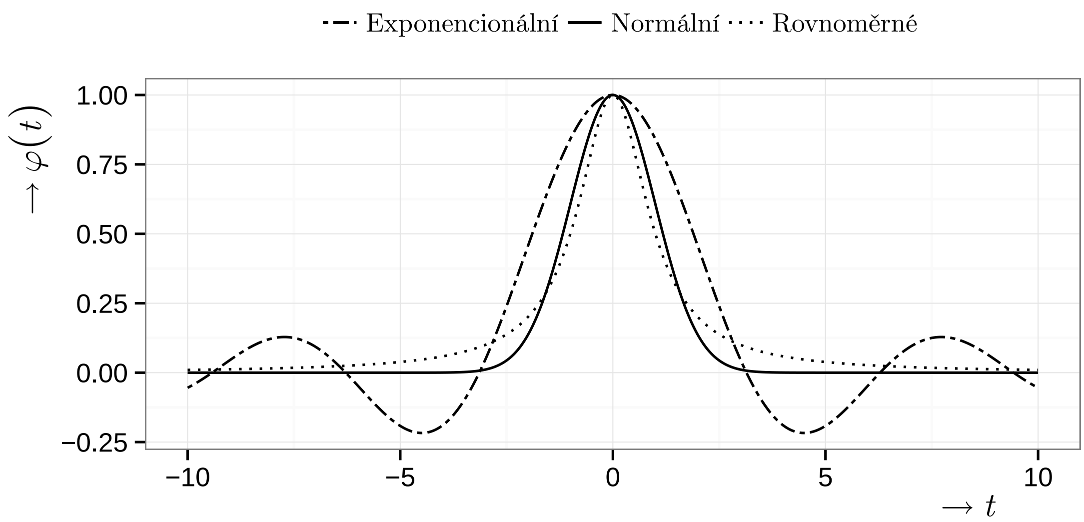
V případě, že náhodná veličina X má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti a nabývá s pravděpodobnostmi p_k hodnot x_k, kde $k \in \mathbb{N}$, tak charakteristickou funkci lze vyjádřit jako

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}x_k t}. \tag{2.7}$$

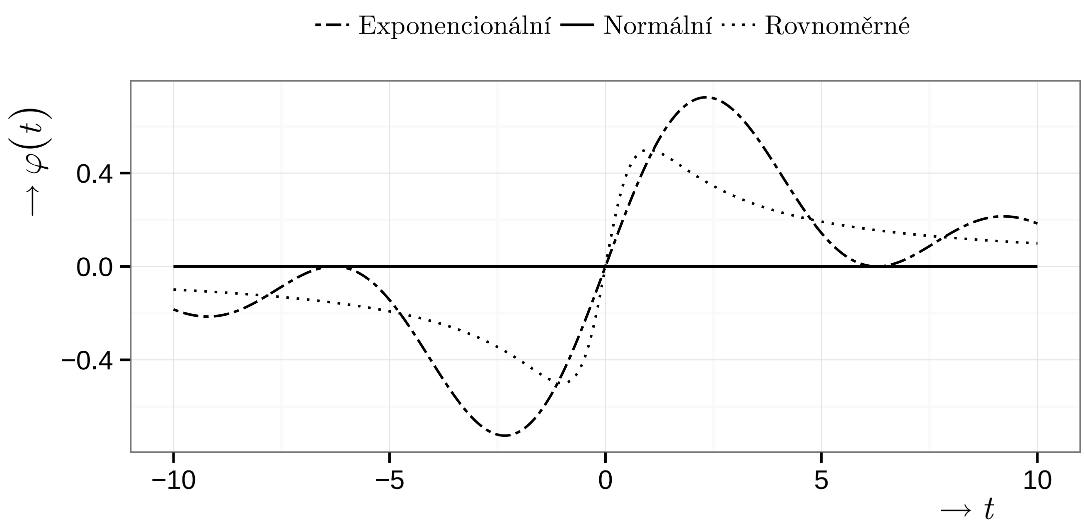
Jestliže je distribuční funkce $F(x)$ absolutně spojitá lze využít vlastnost Stieltjesova integrálu, a výraz zapsat jako

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}xt}F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}xt}\,\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Zde lze už jasně vidět podobnost mezi definicí charakteristické funkce a Fourierovy transformace.



Obr. 2.1: Srovnání reálných průběhů charakteristických funkcí různých rozložení pravděpodobnosti



Obr. 2.2: Srovnání imaginárních průběhů charakteristických funkcí různých rozložení pravděpodobnosti

2.3 Vlastnosti charakteristické funkce

Dále je možné odvodit několik následujích vlastností charakteristické funkce ([15] str. 28)

Věta 2.3.1. *Nechť F(x) je distribuční funkce s charakteristickou funkcí $\varphi(t)$. Pak platí:*

1. $\varphi(0) = 1$,
2. $|\varphi(t)| \leq 1$,
3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.

Následující věta zaručuje, že charakteristická funkce je pro danou distribuční funkci jednoznačná.

Věta 2.3.2. *Nechť $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou distribuční funkce. Funkce $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou identické právě tehdy, když jejich charakterické funkce $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ jsou identické.*

Z předchozí věty plyne, že existuje jednoznačná korespondence mezi chakteristickou a distribuční funkcí. Následující věta poskytuje způsob, jak z charakteristické funkce vypočítat funkci distribuční.

Věta 2.3.3. *Nechť $\varphi(t)$ je charakteristická funkce distribuční funkce $F(x)$. Pak distribuční funkci $F(x)$ lze získat jako*

$$F(a+h) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}th}}{\mathrm{j}t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}ta} f(t) \,\mathrm{d}t \tag{2.9}$$

Pokud je navíc charakteristická funkce absolutně integrovatelná, platí

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}xt} \,\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

Odvození předchozích vět lze nalézt například v [15, 17]. Z této věty plyne, že k charakteristické funkci $\varphi(t)$ lze vždy najít odpovídající distribuční funkci $F(x)$ (jsou vzájemně jednoznačné), a poskytuje návod jak ji najít. Při bližším porovnání rovnic (2.2) a (2.10) lze vidět jistou podobnost, která bude blíže rozebrána v následující sekci.

Dále lze pokračovat ve výčtu vlastností následovně:

Věta 2.3.4. *Každá charakteristická funkce je stejnoměrně spojitá na celé ose reálných čísel.*

Věta 2.3.5. *Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pak charakteristická funkce jejich součtu je rovna součinu charakteristických funkcí jednotlivých náhodných veličin, tj.*

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

Podle věty 2.3.5 lze charakteristickou funkci $\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t)$ součtu náhodných veličin X_k vyjádřit jako součin jednotlivých charakteristických funkcí $\varphi_{X_k}(t)$. Jelikož jsou náhodné veličiny jednoznačně určeny jejich distribuční funkcí, a distribuční funkce jsou dle věty 2.3.2 jednoznačně určeny jejich charakteristickou funkcí, tak lze pro výpočet distribuční funkce součtu několika náhodných veličin použít odpovídající charakteristické funkce.

V sekci 1.3 bylo rozebráno určení distribuční funkce součtu náhodných veličin jako konvoluce jednotlivých distribučních funkcí (1.3) nebo jejich hustot pravděpodobnosti (1.4). Dle věty 2.3.5 a 1.3.1 je vidět, že distribuční funkce součtu náhodných veličin se může spočíst jako součin odpovídajích charakteristických funkcí a pomocí inverzní transformace získat požadovanou distribuční funkci.

Poznámka 2.3.1. Věta 2.3.5 neplatí opačně. Neboli pokud se charakteristická funkce součtu náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ rovná součinu charakteristických funkcí jednotlivých náhodných veličin $\varphi_{X_k}(t)$, pak náhodné veličiny nemusí být nezávislé. Platí slabší podmínka takzvané nekorelovanosti.

Na závěr je uvedena věta dávající do souvislosti momenty s charakteristickou funkcí:

Věta 2.3.6. *Jestliže existuje prvních n momentů $m_k = E[X^k]$ náhodné veličiny X, kde $k \in \{1, \ldots, n\}$, pak příslušná charakteristická funkce $\varphi_X(t)$ má prvních n derivací a platí*

$$\varphi_X^{(k)}(0) = \mathrm{j}^k m_k. \tag{2.11}$$

2.4 Rozdíly v terminologii oproti FT

Nejviditelnějším rozdílem v definici charakteristické funkce (2.2.1) oproti Fourierově transformaci (2.1.1) je obrácené znaménko v jádře transformace [5, 4].

To způsobuje několik menších změn v běžně známých poučkách o Fourierově transformaci. Rozdíly jsou v několika nejpoužívanějších jsou uvedeny níže. V následujícím textu je pro obraz transformované funkce použito značení velkými písmeny podobně jako u náhodných veličin, které ale v následujích rovnostech nevystupují.

2.4.1 Věta o inverzi

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}xu}\mathrm{d}u \tag{2.12}$$

2.4.2 Věta o posunu

$$
\begin{aligned}
x(t-a) &\leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a} X_\omega(\omega) \qquad & f(x-a) &\leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}u\ a} \varphi(u) \\
\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega b_\omega t} x(t) &\leftrightarrow X_\omega(\omega - b_\omega) \qquad & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}bx} f(x) &\leftrightarrow \varphi(u-b)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

2.4.3 Věta o derivaci

$$
\begin{aligned}
(-\mathrm{j}t)^n x(t) &\leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n} X_\omega(\omega) \qquad & (\mathrm{j}x)^n f(x) &\leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} \varphi(u) \\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t) &\leftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n X_\omega(\omega) \qquad & \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) &\leftrightarrow (-\mathrm{j}u)^n \varphi(u)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

2.4.4 Věta o konvoluci

$$
\begin{aligned}
x_1(t) * x_2(t) &\leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega) \qquad & f_1(x) * f_2(x) &\leftrightarrow \varphi_1(u) \varphi_2(u) \\
x_1(t) x_2(t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) \qquad & f_1(x) f_2(x) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \varphi_1(u) * \varphi_2(u)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

2.5 Srovnání s Fourierovou transformací

V předchozím textu si bylo možné všimnout velkého množství podobností mezi Fourierovou transformací a charakteristickou funkcí. V následujícím textu budou shrnuty nejpodstatnější společné vlastnosti a některé detaily budou blíže rozebrány.

Už z definice charakteristické funkce 2.2.1 a definice Fourierovy transformace 2.1.1 je na první pohled vidět souvislost. Při srovnání definičních oborů obou funkcí lze dojít k pozorování, že v případě stejných fyzikálních rozměrů transformovaných funkcí (u CF jde o náhodnou veličinu, u FT o funkci $x(t)$) jsou definiční obory stejné.

To samé už ale nelze říct o oboru hodnot, protože z věty 2.3.6 lze usoudit, že fyzikální rozměr charakteristické funkce je vždy bezrozměrný. K tomuto závěru lze dospět z pozorování vztahu derivace charakteristické funkce a momentů. První moment (střední hodnota) má rozměr stejný jako daná náhodná veličina, druhý moment má jako rozměr kvadrát dané veličiny apodobně. Ze znalosti rozměru definičního oboru charakteristické funkce (je opačný oproti rozměru náhodné veličiny) pak nutně plyne, že charakteristická funkce je bezrozměrná.

Další podobnost s Fourierovou transformací lze vidět u distribuční funkce součtu dvou náhodných veličin, neboli konvoluci distribučních funkcí jednotlivých náhodných veličin. Podobně jako u Fourierovy transformace lze použít charakteristickou funkci k převedení operace konvoluce na součin dvou charakteristických funkcí a pak posléze pomocí inverzní transformace získat odpovídající distribuční funkci.

V případě, že se jedná o diskrétní charakteristickou funkci (2.7), tak je podobně jako u výpočtu klasické Fourieovy transformace možné použít algoritmus výpočtu rychlé Fourierovy transformace, a tím značně urychlit samotný výpočet[1].

Poslední vlastnost, která si zaslouží detailnější pohled, je otázka existence Fourierova integrálu. V případě použití Fourierovy transformace ve fyzikálních nebo inženýrských aplikací se obecně předpokládá splnění podmínek pro existenci dopředné a zpětné Fourierovy transformace. V případě charakteristické funkce není tato otázka tak přímočará. Díky definici 2.2.1 s použitím Fourier-Stieltjesova integrálu existuje charakteristická funkce pro velmi širokou třídu funkcí, ale už nemusí existovat inverzní transformace, která by korespondovala s Fourierovou transformací. To znamená, že nemusí existovat taková transformace, která určí funkci hustoty pravděpodobnosti odpovídající náhodné veličiny.

2.6 Souvislost s momenty a kumulanty

Vztah mezi charakteristickou funkcí a momenty lze vyjádřit jako Taylorův rozvoj charakteristické funkce $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\mathrm{j}t)^k}{k!} \right) \mathrm{d}F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(x^k) \frac{(\mathrm{j}t)^k}{k!}. \tag{2.16}$$

Definice 2.6.1. Nechť $\varphi(t)$ je charakterisckä funkce odpovídajícího rozložení pravděpodobnosti $F_X(x)$. Symbolem $\phi(t)$ je označována druhá charakteristická funkce, která je definována předpisem

$$\phi(t) = \ln \varphi(t). \tag{2.17}$$

Dle věty 2.3.4 a 2.3.1 je charakteristická funkce spojitá a $\varphi(0) = 1$, a proto lze pro jisté okolí δ jednoznačně definovat druhou charakteristickou funkci $\phi(t)$ [15, 7].

Někdy je druhá charakteristická funkce nazývána vytvořující funkcí kumulantů, ale toto označení je nevhodné, protože tato funkce existuje, i když kumulanty neexistují [15]. Podobně lze vyjádřit i kumulanty z takzvané druhé charakteristické rovnice opět za pomoci Taylorova rozvoje jako

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k \frac{(\mathrm{j}t)^k}{k!}. \tag{2.18}$$

Dle věty 2.3.6 lze vidět, že existuje tolik momentů kolik existuje derivací charakteristické funkce. Podobně věta platí i pro kumulanty [22, 11]. Dále lze mezi kumulanty a momenty určit vztah, kdy se kumulanty dají vyjádřit jako součet součinů momentů a naopak [15].

[1] Složitost algoritmu FFT je udávána jako $O(N \log_2 N)$, složitost „obyčejné“ diskrétní FT jako $O(N^2)$

Aplikace

V praxi se lze občas setkat se situací, kdy data podléhají rozložení pravděpodobnosti, které nemusí mít uzavřenou formu. S takovými distribucemi se pracuje daleko obtížněji a zpracování dat dělá obtížnější.

Často ale lze tyto signály popsat odpovídajícími charakteristickými funkcemi, se kterými lze pracovat podstatně jednodušeji [12]. Paradoxně ale přístup pomocí charakteristické funkce není často používáný ve statistických analýzách, možná proto, že charakteristická funkce je funkcí komplexní [21]. Existuje i několik různých aplikací v oblastech číslicového zpracování signálu, které se objevují kvůli potřebě pracovat s modely zahrnující signály s jinou než normální distribucí pravděpodobnosti.

V praxi se nepracuje přímo s charakteristickou funkcí ale s jejími odhady. Jednou z metod jak získat odhad charakteristické funkce je takzvaná empirická charakteristická funkce [12].

3 EMPIRICKÁ CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE

Empirická charakteristická funkce je Fourierovou transformací takzvané empirické distribuční funkce. Empirická charakteristická funkce jako taková má mnoho různých využití v mnoha různých oblastech. Jsou to například testy na stacionaritu a normalitu, testování nezávislosti, testování symetrie a odhad parametrů [13].

3.1 Definice a vlastnosti ECF

Definice 3.1.1. Empirickou charakteristickou funkci definujeme předpisem

$$\hat{\varphi}_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}tX_i}, \tag{3.1}$$

kde $X_i, i \in \{1, \dots, N\}$ je sekvence náhodných veličin s identickou a vzájemně nezávislou distribuční funkcí.

Protože dle věty 2.3.2 platí, že vztah mezi distribucí pravděpodobností a její charakterickou funkcí je jednoznačný, tím pádem by teoreticky měla empirická charakteristická funkce odvozena z experimentálních dat fungovat stejně dobře jako její teoretický protějšek [16].

Následující věty jsou důležité pro pochopení podmínek konvergence empirické charakteristické funkce $\hat{\varphi}$ ke skutečné charakteristické funkci φ [16].

Věta 3.1.2. *Pro $T < \infty$ platí*

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{|t|\leq T}|\hat{\varphi}_n(t)-\varphi(t)|=0\right\}=1. \tag{3.2}$$

Věta 3.1.3. *Nechť $Y_n(t)$ je stochastický proces, který je residuem empirické charakteristické funkce a skutečné charakteristické funkce:*

$$Y_n(t)=\{\hat{\varphi}_n(t)-\varphi(t)\}\sqrt{n}, \quad (-T\leq t\leq T). \tag{3.3}$$

Při $n\to\infty$, $Y_n(t)$ konverguje ke komplexnímu Gaussovskému processu $Y(t)$ s nulovou střední hodnotou. Proces splňuje $Y(t)=Y^*(-t)$ a

$$E\{Y(t)Y(s)\}=\varphi(t+s)-c(t)c(s),$$

kde * značí komplexní sdružení.

Následující věta dává do vztahu empirickou charakteristickou funkci $\hat{\varphi}$ a charakteristickou funkci φ [12].

Věta 3.1.4. *Nechť $\varphi(t)$ je charakteristická funkce, pak pro $E[\hat{\varphi}_N(t)]$ platí*

$$E[\hat{\varphi}_N(t)]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx(i)}]=\varphi(t), \tag{3.4}$$

kde $\{x(1),\ldots,x(N)\}$ jsou vzájemně nezávislé a mají stejnou distribuční funkci.

Dále je možné uvést vztah empirické charakteristické funkce $\hat{\varphi}_N$ a kovarianční matice $\mathbf{R}$ [12].

Věta 3.1.5. *Nechť $\mathbf{R}$ je kovariační matice, pak platí*

$$\mathbf{R}(j,k)=cov(\hat{\varphi}_N(t_j),\hat{\varphi}_N(t_k))=\frac{1}{N}(\varphi(t_j+t_k)-\varphi(t_j)\varphi(t_k)). \tag{3.5}$$

Z centrální limitní věty plyne, že $\hat{\varphi}_N$ slabě konverguje ke komplexnímu normálnímu náhodnému vektoru se střední hodnotou $\varphi(\mathbf{t})$ a rozptylem odpovídajíci kovarianční matici $\mathbf{R}$:

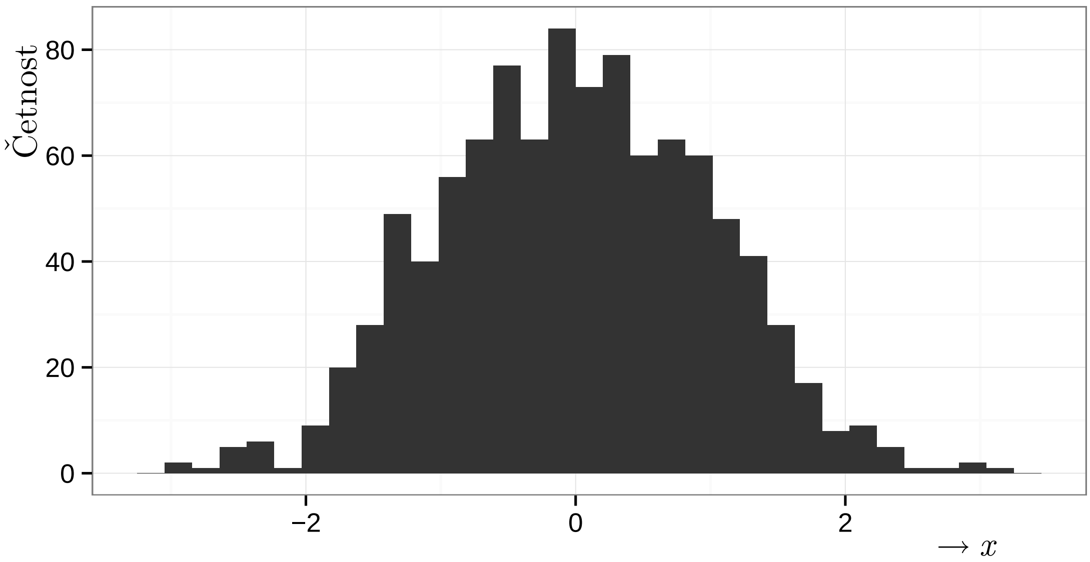
$$\hat{\varphi}_N(\mathbf{t})\sim\mathcal{N}(\varphi(\mathbf{t}),\mathbf{R}). \tag{3.6}$$

Poznámka 3.1.1. Předchozí informace převážně platí pouze pro případ, kdy jsou jednotlivé náhodné veličiny vzájemně nezávislé. Existují varianty empirické charakteristické funkce, které mohou pracovat s případy, kdy jsou náhodné veličiny navzájem závislé, ale tato oblast není detailně prozkoumána. Víc informací lze nalézt například v [23, 13].

3.2 Numerická stabilita a implementace

Na obrázcích 3.2 a 3.3 jsou zobrazeny průběhy reálné a imaginární části empirické charakteristické funkce pro data, která se skládají z náhodně generovaných čísel podle normálního rozdělení.

Na obrázku 3.1 je zobrazen histogram dat, ze kterých se byla vypočítána empirická charakteristická funkce na grafech 3.2 a 3.3.



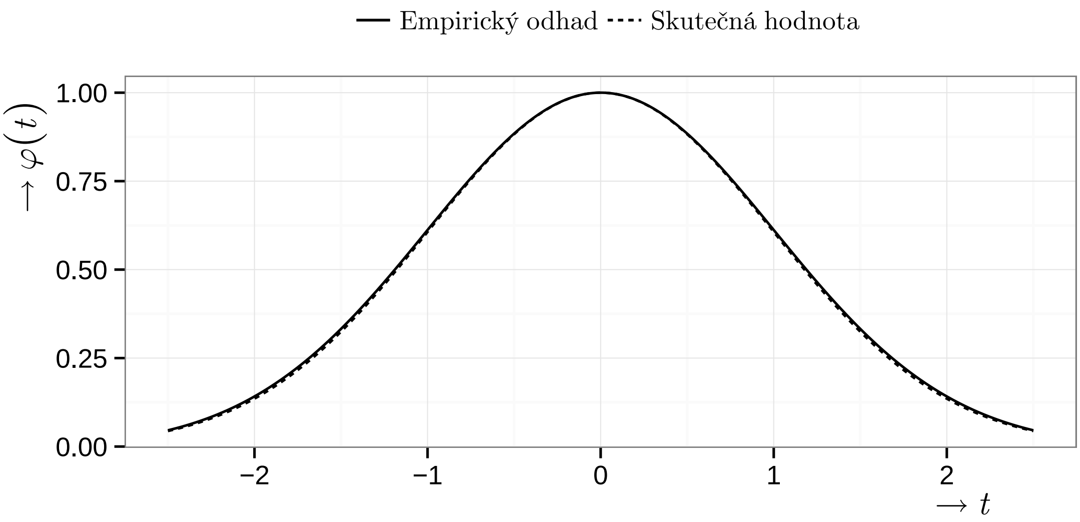
Obr. 3.1: Histogram testovacích dat s normálním rozložením

Na těchto grafech je vidět, že až na drobné odchylky empirická charakteristická funkce odpovídá ideálnímu průběhu. Přesnost této aproximace záleží zejména na počtu vzorků. Na grafech 3.4 a 3.5 je znázorněn průběh empirické charakteristické funkce pro širší oblast s menším počtem vzorků.

Lze vidět, že přesnost aproximace empirické CF se řádově zmenšila.

Totéž lze pro názornost provést například na datech s exponencionálním rozložením. Příslušný histogram je vykreslen na obrázku 3.6. Vypočtené průběhy jsou zobrazeny na obrázcích 3.7 a 3.8. Přesnost aproximace je oproti datům s normálním rozložením se stejným počtem vzorků citelně nižší.

Existují i jiné přístupy výpočtu empirické charakteristické funkce. Jedním z těchto způsobů je například vypočtení ECF z Fourierovy transformace odhadu hustoty pravděpodobnosti. K odhadu hustoty pravděpodobnosti lze použít například neparametrické metody jako jsou jádrové odhady hustoty [12].



Obr. 3.2: Průběh reálné části ECF a CF odpovídající normálnímu rozložení

3.2.1 Implementace

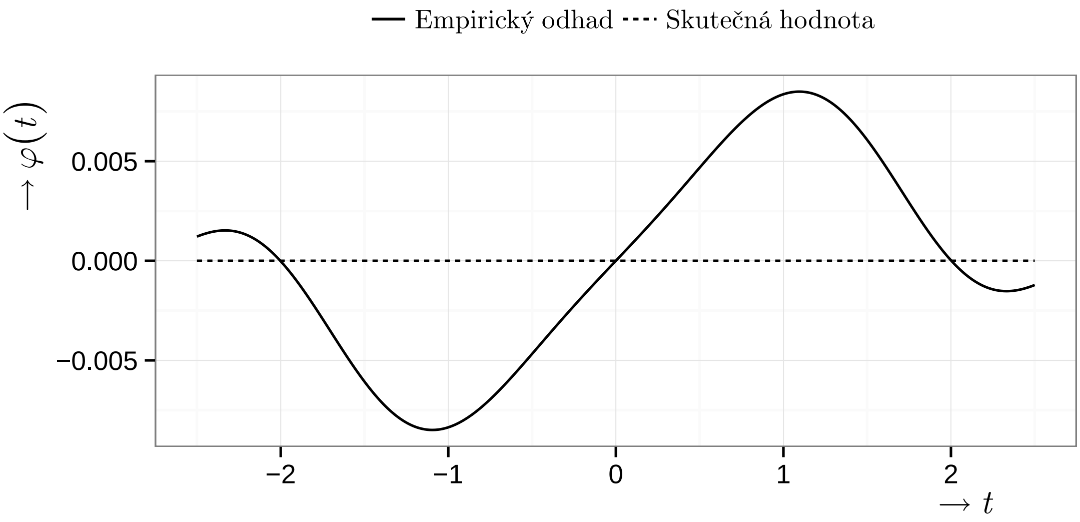
Vzorec (3.1) pro výpočet empirické charakteristické funkce lze jednoduše implementovat pomocí následujícího pseudokódu.

```
φ = 0
foreach  t_i ∈ (t_1, ..., t_N)  do
    foreach  x_j ∈ (x_1, ..., x_M)  do
        φ(t_i)  +=  e^(j t_i x_j)
    end
    φ(t_i)  /=  length((x_1, ..., x_M))
end
```

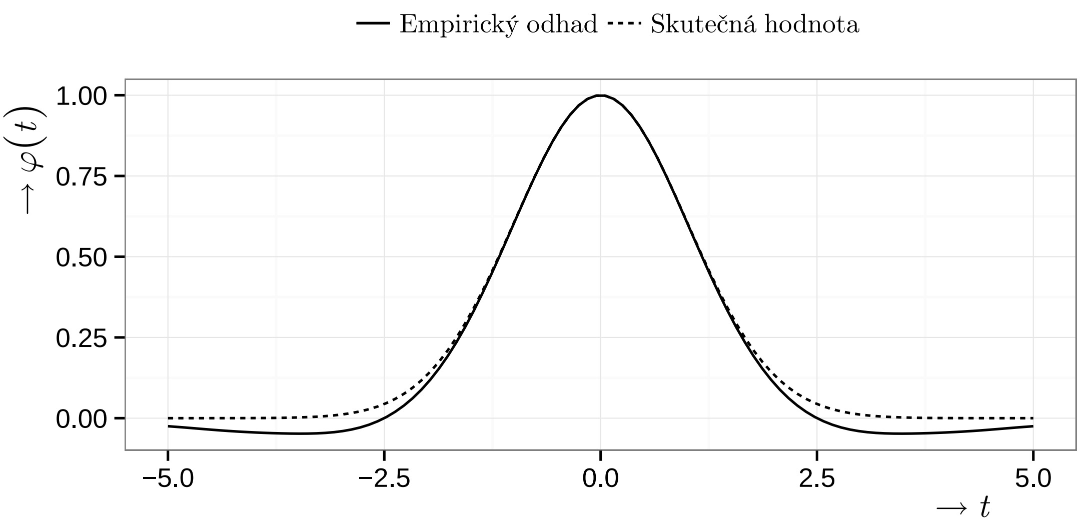
Pseudokód 3.1: Implementace algoritmu pro výpočet ECF

Nejdříve se zinicializuje vektor φ na nulové hodnoty. Poté se pro každou sloužku t_i spočte suma $\sum_{j=1}^{M} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t_i x_j}$, která se následně podělí délkou vektoru $(x_1, \ldots, x_M)$. Tento postup proběhne pro každou složku vektoru φ.

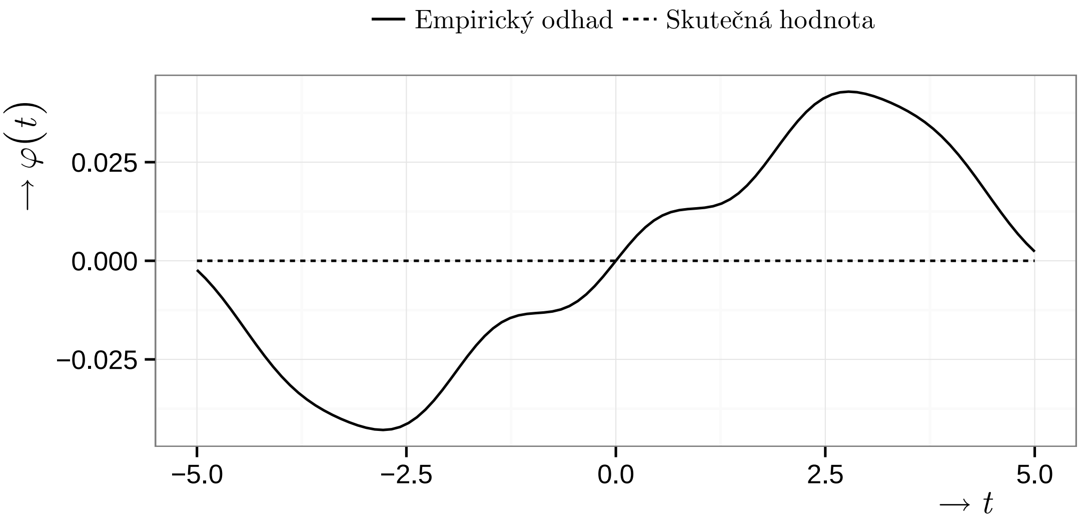
Z pseudokódu lze usoudit, že asymptotická složitost tohoto algoritmu bude $O(N^2)$. Tento algoritmus je poměrně jednoduché implementovat, ale pro některé aplikace nemusí být dostatečně přesný [12].



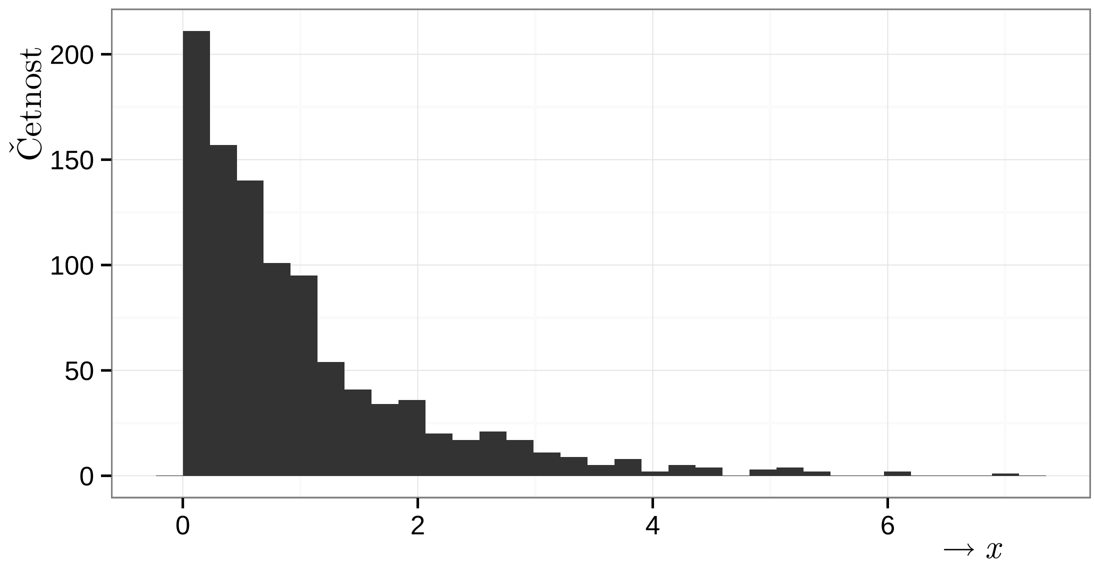
Obr. 3.3: Průběh imaginární části ECF a CF odpovídající normálnímu rozložení



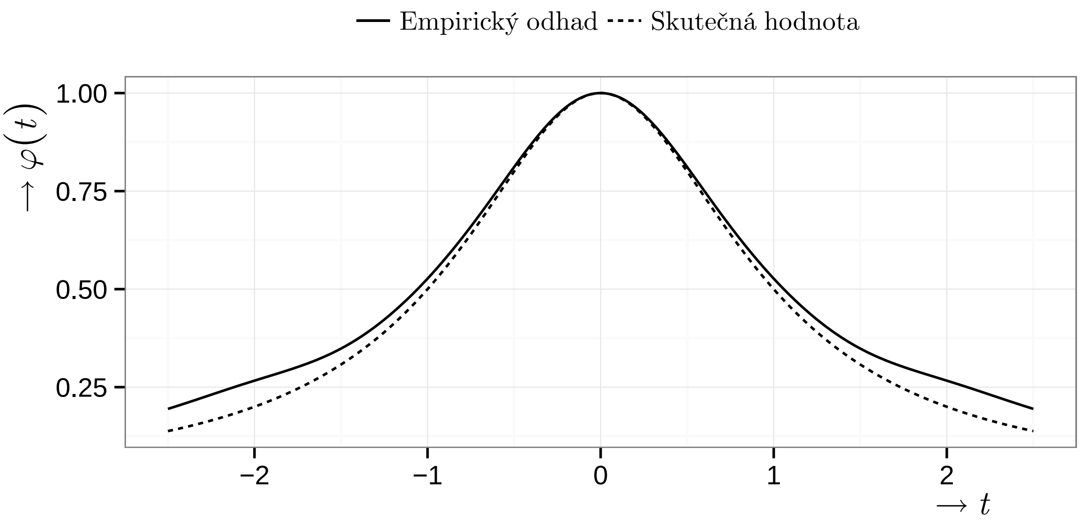
Obr. 3.4: Průběh reálné části ECF a CF odpovídající normálnímu rozložení s větší chybou



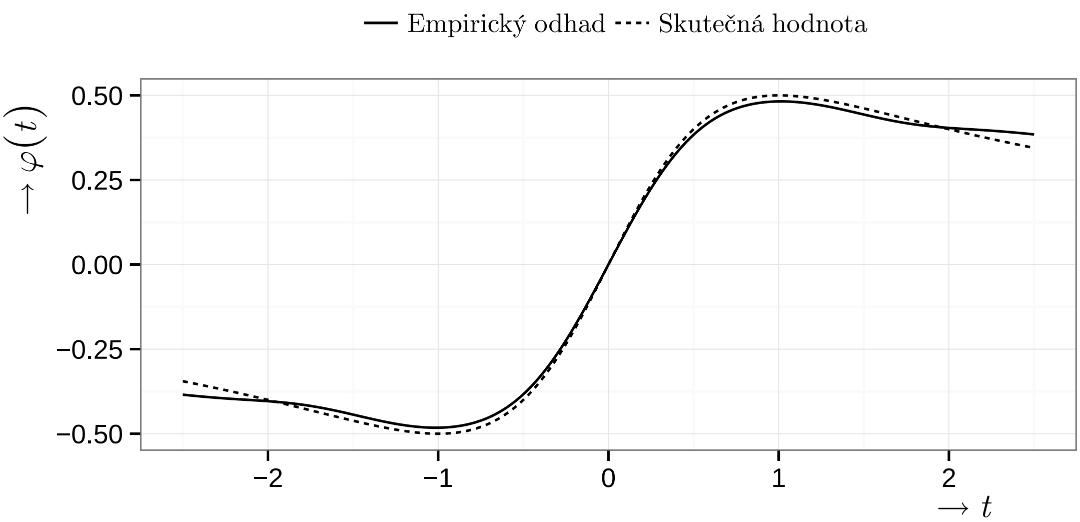
Obr. 3.5: Průběh imaginární části ECF a CF odpovídající normálnímu rozložení s větší chybou



Obr. 3.6: Histogram testovacích dat s exponencionálním rozložením



Obr. 3.7: Průběh reálné části ECF, zkoumaná data mají exponencionálním rozložením



Obr. 3.8: Průběh imaginární části ECF, zkoumaná data mají exponencionálním rozložením

4 TESTOVÁNÍ NORMALITY POMOCÍ ECF

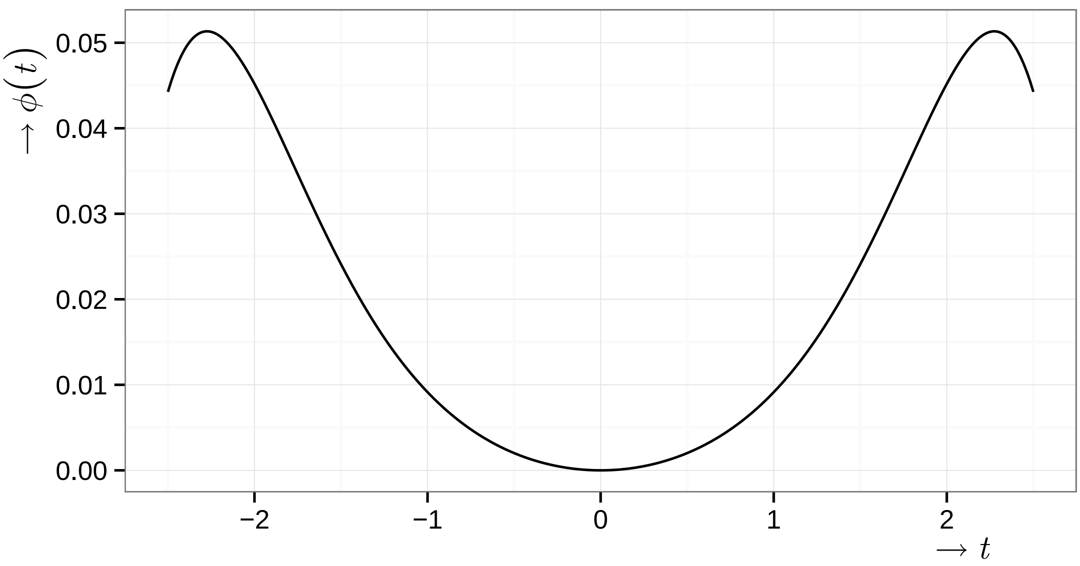
Jako velmi jednoduchý příklad využití empirické charakteristické funkce může například být velmi jednoduchý test zda zkoumaná data podléhají normálnímu rozložení.

Tento test spočívá v porovnání průběhu empirické charakteristické funkce s průběhem charakteristické funkce normálního rozložení pravděpodobnosti, a to odečtením druhé charakteristické funkce normálního rozložení od druhé charakteristické funkce získané pomocí ECF

$$\ln\left|\frac{\hat{\varphi}_N(t)}{\varphi(t)}\right| = \ln|\hat{\varphi}_N(t)| - \ln|\varphi(t)|. \tag{4.1}$$

Absolutní hodnota je použita kvůli komplexnímu charakteru charakteristické funkce.

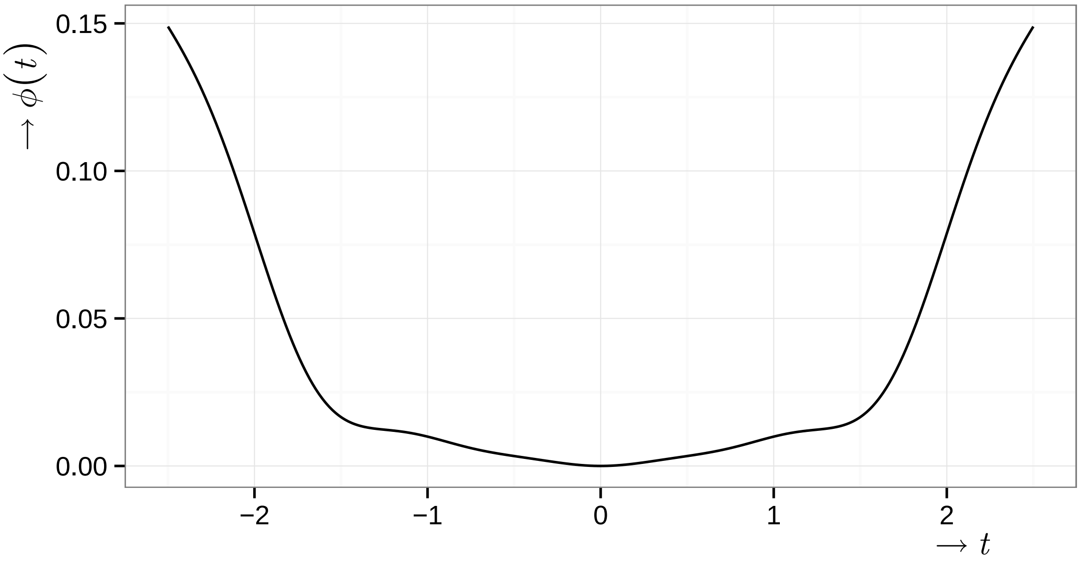
Myšlenka tohoto testu spočívá v tom, že pokud průběh empirické charakteristické funkce odpovídá charakteristické funkci normálního rozložení, pak je výsledná funkce téměř konstatní. Příklad lze vidět na obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Průběh pro test dat s normálním rozložením

Tento postup se nemusí používat jen pro zjišťování normality zkoumaných dat, ale i k ověření zda data neodpovídají i jiným rozložením pravděpodobnosti. Jako příklad může být obrázek 4.2, kde se zkoumá, zda data neodpovídají exponencionálnímu rozložění.

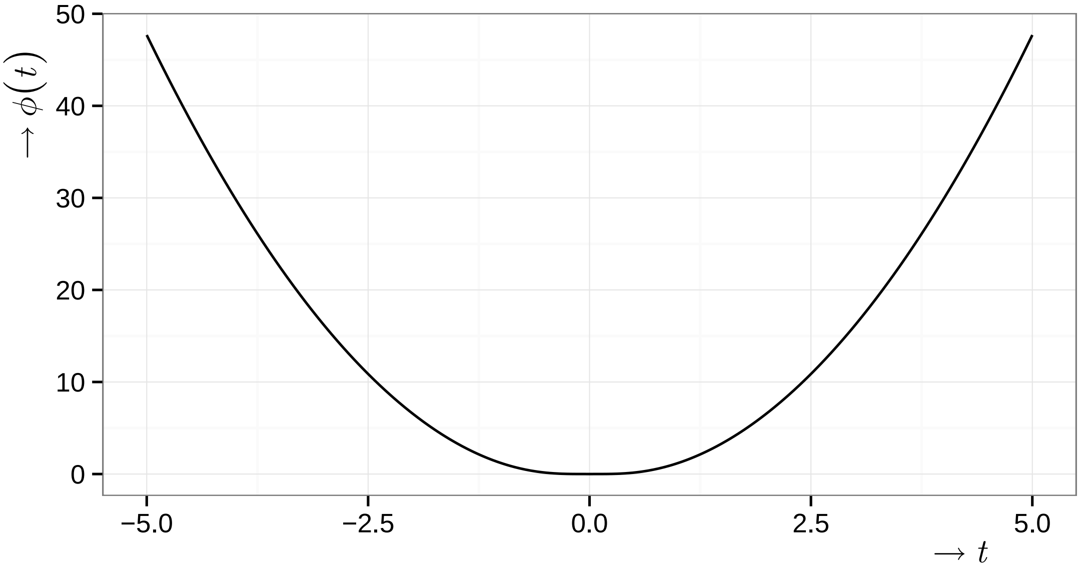
Při testování normality tímto způsobem lze na předchozích příkladech vidět, že rozdíly se pohybují v desetinách. Při zkoumání ideálních průběhů je výsledek (4.1) roven konstatně nule.



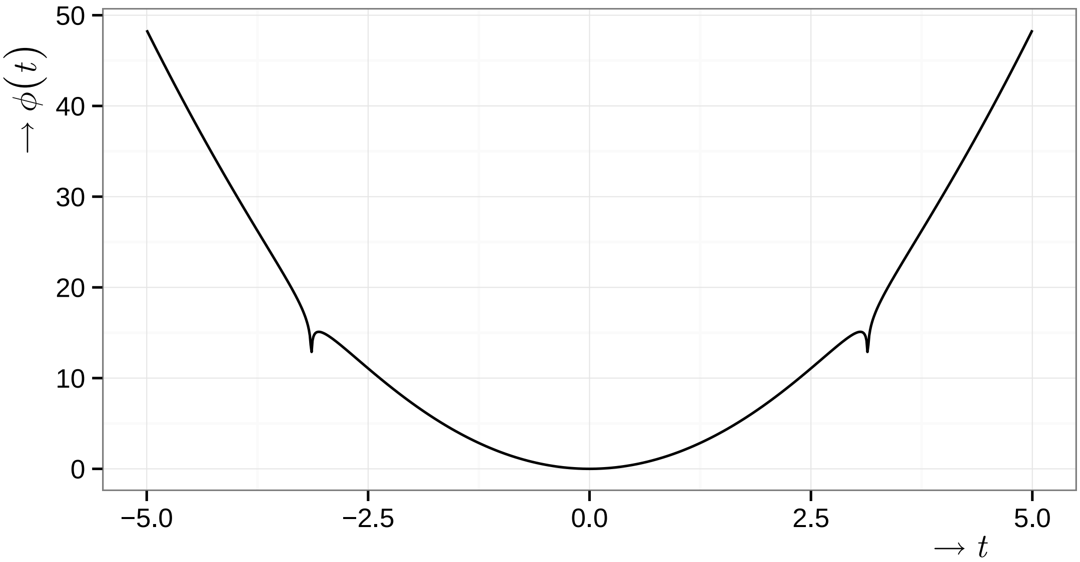
Obr. 4.2: Průběh funkce pro test, zda rozložení dat odpovídá exponencionálnímu rozložení

Na následujících příkladech je znázorněno testování normality dat, které normálnímu rozložení neodpovídají. Na obrázku 4.3 zkoumaná data odpovídají exponencionálnímu rozložení a na obrázku 4.4 rovnoměrnému rozložení.

Z těchto průběhů lze vidět, že se rozdíly pohybují v jednotkách na větší části zkoumaného intervalu, a proto se dá říct, že normálnímu rozložení nepodléhají.



Obr. 4.3: Test, zda data s exponencionálním rozložením odpovídají normálnímu rozložení



Obr. 4.4: Test, zda data s rovnoměrným rozložením odpovídají normálnímu rozložení

5 PŘÍKLADY POKROČILEJŠÍCH APLIKACÍ

5.1 Analýza nezávislých komponent

Analýza nezávislých komponent se zabývá problémem rozkladu signálů, které jsou lineární či nelineární směsí neznámého směšovacího systému. Funguje jako vhodný nástroj pro slepé oddělování zdrojů a dekonvoluci. Hlavní myšlenkou analýzy nezávislých komponent je nalézt takovou souřadnicovou bázi prostoru, ve které jsou data pokud možno co nejvíce na sobě statisticky nezávislá [19]. Narozdíl od analýzy hlavních komponent, která je založena na zkoumání kovariační struktury mezi mnoha signály s Euklidovskou metrikou, používá analýza nezávislých komponent jiné pojmutí nezávislosti, které není ovlivněné použitou metrikou [8, 23]. Aplikuje se na mnoho problémů v řadě oblastí jako je například oddělování zdrojů, data mining .

Při aplikaci této metody se předpokládá, že jednotlivé nezávislé zdroje jsou ve zkoumaných datech jistou směsí danou směšovací maticí. Cílem je najít inverzní matici, která by umožnila jednotlivé zdroje opět oddělit. K vyhodnocování vhodnosti nalezené matice je nutné použít takzvanou kontrastní funkci, která vyhodnocuje míru nezávislosti vzniklých zdrojů a na jejíž základě je možné hledanou matici optimalizovat [19, 11].

Charakteristickou funkci v analýze nezávislých komponent lze napříkald využít dvěma následujícími způsoby – metodou maximální věrohodnosti a maximalizace negaussovskosti.

5.1.1 Metoda maximální věrohodnosti

Metoda maximální věrohodnosti je jednou ze základních metod matematické statistiky, kde jde, zjednodušeně řečeno, o odhad neznámých veličin na základě experimentálních dat. Zároveň je velmi populární metodou pro odhad modelu pro nezávislou analýzu komponent. Ve většině běžných případů se věrohodnostní funkce chová „rozumně“, tj. je to omezená uzavřená forma[1]. V některých případech tomu tak ale nemusí být, a proto je v těchto případech lepší použít Fourierovu transformaci věrohodností funkce, což je vlastně charakteristická funkce [23]. Charakteristická funkce je dle věty 2.3.1 vždy omezená a v případě Fourierovy transformace věrohodnostní funkce tvoří charakteristická funkce uzavřenou formu [6].

V tomto případě se dá využít empirická charakteristická funkce pro odhad parametrů konkrétního systému na základě naměřených dat.

[1] Uzavřená forma je takový výraz, který lze analyticky vyjádřit jako konečný počet elementárních funkcí.

5.1.2 Maximalizace negaussovskosti

Další způsob, který je také často používaný, je maximalizace negaussovskosti. K určení této míry se často používá čtvtý kumulant nebo koeficient špičatosti. Častým problémem těchto statistik je vysoká citlivost vůči odlehlým hodnotám. Alternativním přístupem k této problematice je použití druhé charakteristické funkce. Míru negaussovskosti lze pak v tomto případě chápat jako rozdíl druhé charakteristické funkce dané distribuční funkce a druhé charakteristické funkce distribuční funkce s normálním rozložením [20, 22]. Jestliže není distribuční funkce dané náhodné veličiný známa, tak lze použít k určení charakteristické funkce empirickou charakteristickou funkci. Velikost a znaménko této hodnoty lze využít k určení typu rozložení, tzn. jestli se jedná o takzvané subgaussovské nebo supergaussovské rozložení, což je užitečné při pozdějším zpracování.

5.2 Filtry sledující hustotu pravděpodobnosti

Pro odstranění šumu se používá široká skupina různých filtrů, které si umí pracovat s nelineárními systémy nebo nedeterministickými systémy, které narušuje gaussovský bílý šum. Jako příklad lze uvést rozšířené Kalmanovy filtry [10]. Jelikož tyto systémy pracují s nelinearitou, pak výstup systému a chyba odhadu obecně nemusí být gaussovské. Ukazatelé výkonnosti filtru jsou střední hodnota a rozptyl odhadu chyby.

Filtry, které k používají k optimalizaci odhadu chyby právě střední hodnotu a rozptyl předpokládají, že tento odhad může být považován za gaussovský náhodný proces [25]. Spousta systémů ale tento předpoklad nesplňuje a tím pádem střední hodnota a rozptyl nevyjadřují všechny informace o negaussovském šumu.

Alternativní přístup k této problematice je založen na použití funkcí hustoty pravděpodobnosti, které jsou počítány numericky ze stavového vektoru systému [2, 24]. Zde lze využít koncept takzvané hybridní charakteristické funkce, kterou lze použít pro určení zisku filtru tak, aby hustota pravděpodobnosti chyby odpovídala hustotě pravděpodobnosti zvolené distribuční funkce.

5.2.1 Hybridní charakteristická funkce

Hybridní charakteristická funkce je charakteristickou funkcí hybridního náhodného vektoru. Hybridní náhodný vektor je takový vektor, jehož složky jsou jak spojité náhodné veličiny, tak i diskrétní náhodné veličiny splňující jisté podmínky ohledně jejich pravpdědobností [24, 25].

Závěr

Na začátku práce jsou zavedeny některé základní pojmy teorie pravděpodobnosti, které jsou v pozdějších částech používány a uvedeny do souvislosti s dále používanou charakteristickou funkcí.

V druhé kapitole teoretické části je definována Fourierova transfomace a charakteristická funkce. Dále jsou definovány různé vlastnosti charakteristické funkce, které jsou postupně uváděny do souvislosti s Fourierovou transformací a zavedenými pojmy v kapitole první. Dále je poukazováno na rozdíli v terminologii mezi Fourierovou transformací a charakteristickou funkcí, ale i na podobné způsoby využití jako je uvedeno na příkladu věty o konvoluci. Na závěr kapitoly jsou dány do souvislosti momenty a kumulanty s charakteristickou funkcí.

V části textu věnované aplikacím je rozebírána empirická charakteristcká funkce jako prostřed pro odhad průběhu charakteristické funkce zkoumaných dat. Jsou popsány některé její základní vlastnosti včetně vztahu s dříve definovaou charakteristickou funkcí. Z těchto vlastností plyne, že je možné s empirickou charakteristickou funkcí pracovat stejně jako s teoretickou charakteristickou funkcí při dodržení jistých podmínek. Dále je rozebrána numerická stabilita a složitost implementace. Pro názornost je uveden pseudokód použité implementace.

Jako jedna z možných aplikací je podrobněji rozebírán jednoduchý způsob testování normality dat. Na několika příkladech je ukázáno chování empirické charakteristické funkce při tomto testu.

V poslední části textu jsou naznačeny možné pokročilejší aplikace charakteristcké funkce na příkladu analýzy nezávislých komponent a filtrů sledující hustotu pravděpodobnosti.

LITERATURA

[1] ANDĚL, J. *Statistická analỳza časovỳch řad.* Teoretická knižnice inženỳra. SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1976.

[2] ARULAMPALAM, M. et al. *A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. Signal Processing, IEEE Transactions on.* 2002, 50, 2, s. 174–188. ISSN 1053-587X.

[3] BILLINGSLEY, P. *Probability and measure.* A Wiley-Interscience publication. New York [u.a.] : Wiley, 3. ed edition, 1995. ISBN 0471007102.

[4] BOHMAN, H. *From characteristic function to distribution function via fourier analysis. BIT Numerical Mathematics.* 1972, 12, 3, s. 279–283. ISSN 0006-3835.

[5] BRACEWELL, R. *The Fourier Transform and Its Applications.* McGraw-Hill international editions. New York [u.a.] : McGraw-Hill Education, 1965.

[6] CARRASCO, M.; KOTCHONI, R. Efficient Estimation Using the Characteristic Function. Working papers, HAL, 2013.

[7] EIDINGER, E.; YEREDOR, A. Blind MIMO Identification Using the Second Characteristic Function. In PUNTONET, C. G.; PRIETO, A. (Ed.) *ICA*, 3195 / *Lecture Notes in Computer Science*, s. 570–577. Springer, 2004. ISBN 3-540-23056-4.

[8] ERIKSSON, J.; KANKAINEN, A.; KOIVUNEN, V. Novel Characteristic Function Based Criteria for ICA. In *In Proc. of the 3rd Int. Conf. on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA2001*, s. 108–113, 2001.

[9] GRAY, R. M.; DAVISSON, L. D. *An Introduction to Statistical Signal Processing.* London : Cambridge, 2011.

[10] HAYKIN, S. *Adaptive Filter Theory (2nd Ed.).* Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 1991. ISBN 0-13-013236-5.

[11] HYVÄRINEN, A.; KARHUNEN, J.; OJA, E. *Independent Component Analysis.* Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control Series. : Wiley, 2004. ISBN 9780471464198.

[12] ILOW, J.; HATZINAKOS, D. *Applications of the Empirical Characteristic Function to Estimation and Detection Problems. Signal Process.* March 1998, 65, 2, s. 199–219. ISSN 0165-1684.

[13] KNIGHT, J. L.; YU, J. Empirical Characteristic Function in Time Series Estimation, 2001.

[14] KOLMOGOROV, S. A. N. a. F. *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy.* Praha : SNTL - Praha, 1975.

[15] LUKACS, E. *Characteristic Functions.* Griffin books of cognate interest. : Hafner Publishing Company, 1970.

[16] MURATA, N. Properties Of The Empirical Characteristic Function And Its Application To Testing For Independence. In *Proceedings of 3rd International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, s. 295–300, 2001.

[17] RÉNYI, A. *Teorie pravděpodobnosti: Vysokošk. učebnice ČSR.* : Academia, 1972.

[18] RILEY, K.; HOBSON, M.; BENCE, S. *Mathematical Methods for Physics and Engineering.* : Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139450997.

[19] ROBERTS, S.; EVERSON, R. *Independent Component Analysis: Principles and Practice.* ISBN 9780521792981.

[20] TUFAIL, M.; ABE, M.; KAWAMATA, M. Blind separation of mixed kurtosis signals using local exponential nonlinearities. In *Circuits and Systems, 2005. 48th Midwest Symposium on*, s. 39–42 Vol. 1, 2005.

[21] WARR, R. L. *Numerical Approximation of Probability Mass Functions Via the Inverse Discrete Fourier Transform. ArXiv e-prints.* December 2012.

[22] YEREDOR, A. *Blind channel estimation using first and second derivatives of the characteristic function. Signal Processing Letters, IEEE.* 2002, 9, 3, s. 100–103. ISSN 1070-9908.

[23] YU, J. *Empirical Characteristic Function Estimation and Its Applications. Econometric Reviews.* 2004, 23, 2, s. 93–123.

[24] ZHOU, J.; WANG, H.; ZHOU, D. PDF tracking filter design using hybrid characteristic functions. In *American Control Conference, 2008*, s. 3046–3051, 2008.

[25] ZHOU, J. et al. *Distribution function tracking filter design using hybrid characteristic functions. Automatica.* 2010, 46, 1, s. 101 – 109. ISSN 0005-1098.

Seznam zkratek a veličin

- CF - charakteristická funkce
- ECF - empirická charakteristická funkce
- e - Eulerovo číslo
- E$[X]$ - střední hodnota náhodné veličiny X
- FT - Fourierova transformace
- $F(x)$ - distribuční funkce náhodné veličiny
- $\varphi(t)$ - charakteristická funkce
- $\hat{\varphi}(t)$ - empirická charakteristická funkce
- $\phi(t)$ - druhá charakteristická funkce
- $\mathcal{F}$ - Fourierova transformace
- $\mathcal{F}^{-1}$ - zpětná Fourierova transformace
- $f(x)$ - pravděpodobnostní hustota náhodné veličiny, frekvenční funkce
- ICA - analýza nezávislých komponent
- j - imaginární jednotka
- K_X - vytvořující funkce kumulantů náhodné veličiny X
- κ_k - k-tý kumulant
- ln - přirozený logaritmus
- m_k' - centralizovaný k-tý moment
- M_X - momentová vytvořující funkce náhodné veličiny X
- m_k - k-tý moment
- P - $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, pravděpodobnostní funkce
- $\mathbf{R}$ - kovariační matice
- $\mathbb{R}$ - množina všech reálných čísel
- X, Y, Z - náhodné veličiny