

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Impulzní počáteční úloha pro obyčejné  
diferenciální rovnice



**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**  
Vedúci diplomovej práce: **prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.**  
Vypracoval: **Bc. Šimon Dedinský**  
Študijný program: B1103 Aplikovaná matematika  
Študijný obor Aplikace matematiky v ekonomii  
Forma štúdia: Prezenčná  
Rok odovzdania: 2016

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKÁCIA

**Autor:** Bc. Šimon Dedinský

**Názov práce:** Impulzní počáteční úloha pro obyčejné diferenciální rovnice

**Typ práce:** Diplomová práce

**Pracovisko:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedúci práce:** prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

**Rok obhajoby práce:** 2016

**Abstrakt:** Cieľom tejto diplomovej práce je vyšetrenie chovania modelu impulzného oscilátora, ktorý má tvar diferenciálnej rovnice s impulzmi. Takýto model je možné vyšetovať metódami z teórie diferenciálnych rovníc, kde sa využívajú hlavne poznatky z riešenia lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc, či separovaných diferenciálnych rovníc. Ďalej sa takáto problematika bude riešiť aj pomocou teórie dynamických systémov. Dynamické systémy budeme riešiť najskôr bez impulznej podmienky a následne aplikujeme na systémy, v ktorých sa budú objavovať impulzy.

**Kľúčové slová:** Impulzná diferenciálna rovnica, Počiatočná úloha, Dynamický systém, Impulz, Impulzný efekt, Trajektória, Nespojité cyklus, Harmonický oscilátor

**Počet strán:** 69

**Počet príloh:** 0

**Jazyk:** Slovenský

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Bc. Šimon Dedinský

**Title:** Impulsive initial problem for ordinary differential equations

**Type of thesis:** Master's

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

**The year of presentation:** 2016

**Abstract:** The aim of this thesis is to investigate the behaviour of the model of impulsive oscillator, which has the form of a differential equation with impulses. Such a model may be assessed by methods of the theory of differential equations, which it is possible to use mainly knowledge of linear homogeneous differential equations or separated differential equations. Furthermore, such problems will be resolved by the theory of dynamical systems. Firstly we deal dynamical system with no pulse conditions and then apply to the systems in which impulses will arise.

**Key words:** Impulsive differential equations, Initial Value Problem, Dynamical system, Impulse, Impulsive effect, Trajectory, Discontinuous cycle, Harmonic oscillator

**Number of pages:** 69

**Number of appendices:** 0

**Language:** Slovak

## Prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu spracoval samostatne pod vedením pani prof. RNDr. Ireny Rachůnkovej, DrSc. a všetky použité zdroje som uviedol v zozname literatúry.

V Olomouci dňa .....

.....

podpis

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Kmitanie a kmity</b>	<b>10</b>
1.1 Netlmené kmitanie . . . . .	11
1.2 Tlmené kmitanie . . . . .	15
<b>2 Planárne dynamické systémy</b>	<b>20</b>
2.1 Dynamické systémy generované sústavou 2 autonómnych ODR prvého rádu . . . . .	20
2.2 Sústava 2 lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientmi . . . . .	24
2.3 Planárny Hamiltonov systém . . . . .	32
2.4 Trajektórie riešení dynamických systémov . . . . .	32
2.4.1 Periodické trajektórie a ich stabilita . . . . .	33
<b>3 Popis matematického modelu</b>	<b>37</b>
3.1 Systém s impulzmi vo fixnom momente . . . . .	39
3.2 Systém s impulzmi v premenlivom čase . . . . .	39
3.3 Impulzné dynamické systémy . . . . .	40
<b>4 Pohyb impulzívneho oscilátora</b>	<b>41</b>
4.1 Príklady oscilátorov . . . . .	43
4.1.1 Príklad 1 . . . . .	43
4.1.2 Príklad 2 . . . . .	49
4.1.3 Príklad 3 . . . . .	57
4.1.4 Príklad 4 . . . . .	61
<b>Záver</b>	<b>67</b>
<b>Literatúra</b>	<b>69</b>

# Zoznam obrázkov

1.1	Netlmené kmitanie . . . . .	12
1.2	Netlmené harmonické kmity . . . . .	13
1.3	Vektorové zobrazenie kmitavého pohybu . . . . .	15
1.4	Tlmený harmonický oscilátor . . . . .	16
1.5	Aperiodický pohyb tlmeného harmonického oscilátora . . . . .	17
1.6	Tlmené harmonické kmity . . . . .	18
2.1	Štyri rôzne fázové portréty . . . . .	26
2.2	Transformácia $x = Py$ . . . . .	31
4.1	Impulzný efekt . . . . .	42
4.2	Fázový portrét rovnice z (4.3) bez impulzu . . . . .	45
4.3	Trajektória riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúca v bode $(x_0, I)$ . . . . .	46
4.4	Trajektória riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúca vo vnútri oblasti $D_1$ . . . . .	46
4.5	Trajektórie riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúce v bode $(x_0, \frac{I}{2})$ . . . . .	47
4.6	Trajektórie riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúce v bode $(x_0, y_0) \in D_2$ a $(x_0, y_0) \neq (x_0, \frac{I}{2})$ . . . . .	48
4.7	Trajektórie riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúce v bode $(x_0, y_0) \in D_3$ . . . . .	49
4.8	Fázový portrét systému (4.7) . . . . .	51
4.9	Nespojitý orbitálne asymptoticky stabilný limitný cyklus systému (4.8), kde $\Delta y^* = I_0$ . . . . .	57
4.10	Nespojitý orbitálne asymptoticky stabilný limitný cyklus systému (4.25), $\Delta y^* = -y^* e^{-\Delta} + \sqrt{(y^*)^2 e^{-2\Delta} + I_0^2}$ . . . . .	60
4.11	Nespojitý asymptoticky stabilný limitný cyklus systému (4.28) . . . . .	66

## **Pod'akovanie**

Rád by som poďakoval vedúcej diplomovej práce pani prof. RNDr. Irene Rachůnkovej, DrSc. za jej odborné vedenie, metodickú pomoc a cenné rady, ktoré mi pomohli pri tvorbe tejto práce. Ďalej by som chcel poďakovať svojej rodine a priateľom za preukázanú podporu.

# Úvod

Impulzy v diferenciálnych rovniciach sa používajú na opis okamžitej zmeny v správaní sa určitého systému. Práve impulzy môžu pomôcť pri popisovaní rôznych biologických procesov, pretože dokážu presnejšie popísať odchýlky. Ďalej diferenciálne rovnice môžu byť použité pre modelovanie dynamiky mnohých reálnych javov. Veľa evolučných procesov sa vyznačuje práve tým, že v určitom časovom okamžiku podliehajú náhlym zmenám aktuálneho stavu. Takéto procesy podliehajú krátkodobým odchýlkam, ktorých trvanie je zanedbateľné v porovnaní s dobou trvania celého procesu. V dôsledku toho, je prirodzené predpokladať, že tieto odchýlky budú nastávať okamžite, to znamená, že diferenciálne rovnice, ktoré podliehajú impulznému efektu, sú použité ako prirodzený opis pozorovaných javov.

Prvá kapitola tejto práce sa venuje kmitavému pohybu a kmitom a to z fyzikálneho pohľadu. Podklady pre túto kapitolu boli naštudované a prevzaté z [6, 9]. Oboznámi nás s pojmami ako je kmit či harmonické kmitanie. Taktiež poukazuje na skladbu a odvodenie základnej rovnice kmitania harmonického oscilátora a riešenie takejto rovnice. Toto je ukázané zvlášť pre netlmené kmitanie a zvlášť pre tlmené kmitanie. Obidva prípady sa objavia v poslednej kapitole.

V druhej kapitole je rozoberaná už teória planárnych dynamických systémov. Pre lepšie pochopenie je táto teória zameraná na dynamické systémy s dimenziou rovnou 2. Ozrejmime si základne pojmy ako je dynamický systém či fázový portrét a taktiež základne existenčné vety potrebné pre riešenie takýchto systémov [3, 7]. Sústreďuje sa pritom na dynamické systémy generované sústavou 2 autonómnych



obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu, pretože práve takéto sa objavajú v pri vyšetrowaní modelov v poslednej kapitole. Pozornosť budeme venovať aj planárnemu Hamiltonovému systému. Záver tejto kapitoly sa venuje trajektóriám riešení dynamických systémov a ich stabilite.

Samotný popis modelu s impulzmi je spomenutý v tretej kapitole, kde je ukázaný model vo všeobecnosti [5, 8]. Ďalej popisuje priebeh celého riešenia, ktoré podlieha impulznému efektu. Následne rozdeľuje systémy s impulzmi na systémy s impulzmi vo fixnom momente, v premenlivom čase a na impulzné dynamické systémy, ktorým je venovaný aj zvyšok tejto práce.

Posledná kapitola sa nakoniec venuje už pohybu impulzného oscilátora. Poukazuje na štyri príklady oscilátorov. V prvom príklade je uvedený prípad netlmeného kmitania s impulznou podmienkou. Nasledujúce tri príklady predstavujú už tlmené kmitanie, no v každom sa mení impulzná podmienka, čo nám dáva aj rôzne výsledky. Každý jeden príklad oscilátora najskôr vyšetrujeme bez impulznej sily a následne analógiou riešime prípad, kedy sa v danom systéme objavuje impulz. Všetky pohyby sú znázornené graficky na konci každého z príkladov.

Táto práca poukazuje hlavne na podrobné odvodenie a popis chovania impulzných oscilátorov, či už sa jedná o tlmené alebo netlmené kmitanie. Navyše dokazuje existenciu asymptoticky stabilných nespojitých limitných cyklov.

# Kapitola 1

## Kmitanie a kmity

V reálnom živote sa stretávame s rôznymi technickými javmi ako napríklad kmity nosníkov či hriadeľov, ale aj kmitov na molekulovej úrovni, čo môže predstavovať napríklad kmitanie molekúl alebo pohyb atómov v kryštálovej mriežke. Pre lepšie pochopenie takýchto javov je dôležitý práve kmitavý pohyb. Kmity zdroja, teda nejakej časti pružného prostredia, sa budú šíriť týmto prostredím a to vďaka pružným vlastnostiam tohto prostredia. To nám zapríčiňuje existenciu a šírenie vlnenia. Vlnenia, ktoré sa skladajú rovnako ako kmity hmotného bodu, sa budú šíriť od rôznych zdrojov práve prostredím. Nastávajú pritom javy, ktoré sú charakteristické pre vlnové procesy, ako skladanie (interferencia), lom a ohyb (difrakcia) vlnenia. V tejto kapitole sú použité teoretické poznatky z [6, 9].

Fyzikálny jav, pri ktorom dochádza k opakujúcim sa zmenám určitej fyzikálnej veličiny, nazývame kmit. Kmity môžeme deliť podľa povahy veličiny a to na mechanické, pri ktorých môže meniacu veličinu predstavovať napríklad výchylka gitarovej struny, výchylka fyzikálneho kyvadla alebo výchylka určitej časti mechanického zariadenia. Ďalej sú to kmity elektrické, ktoré sú chápané ako zmeny intenzity magnetického či elektrického poľa alebo zmeny elektrického napätia alebo prúdu.

Kmitavý pohyb, pri ktorom hmotný bod neprekročí určitú konečnú vzdialenosť od rovnovážnej polohy sa v mechanike hmotného bodu bude označovať pojmom kmit. Rovnovážna poloha je poloha, v ktorej sú sily pôsobiace na daný hmotný bod v rovnováhe, teda výslednica síl je rovná nule. Hmotný bod by bol pri takejto polohe v pokoji. Pohyb, pri ktorom sa po uplynutí určitého časového okamžiku  $T$  (periódy) hmotný bod dostáva do tej istej polohy, budeme označovať

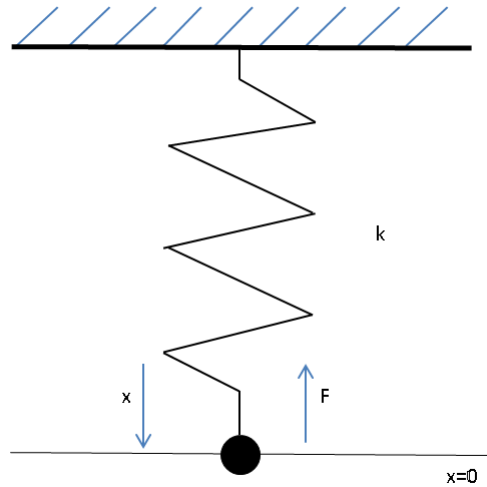
ako periodický kmitavý pohyb. Navyše takýto pohyb má rovnaký rýchlosť aj zrýchlenie. Kmitavý pohyb nemusí byť len pohyb po priamke. Môže to byť aj pohyb po zložitej, ale vždy tej istej krivke. Harmonický kmitavý pohyb bude pohyb, ktorý je matematicky popísaný jednou harmonickou funkciou.

Najjednoduchším prípadom harmonického kmitavého pohybu je pohyb po priamke za pôsobenia návratnej sily, ktorá je priamo úmerná výchylke. Takúto kmitajúcu sústavu budeme nazývať lineárny harmonický oscilátor. Ak budeme uvažovať odpor prostredia (tlmenie), tak budeme hovoriť o pohybe ktorý je tlmený. Naopak ak odpor prostredia nebudeme zohľadňovať, tak budeme hovoriť o netlmenom pohybe. Pokiaľ by na oscilátor pôsobila nejaká vonkajšia periodická sila, dostali by sme nútený lineárny harmonický oscilátor spolu s vynútenými kmitmi. Na rozdiel od toho kmity, ktoré prebiehajú bez vplyvu vonkajších nútiacich síl budeme nazývať vlastné kmity.

## 1.1 Netlmené kmitanie

Uvažujme sústavu, ktorú tvorí ideálna pružina na ktorej je upevnený hmotný bod o hmotnosti  $m$  podľa obr. 1.1. Budeme predpokladať, že pre deformáciu pružiny (predĺženie, alebo stlačenie) platí Hookov zákon a deformácia pružiny je priamo úmerná pôsobiacej sile. Budeme ďalej predpokladať, že podložka je ideálna a to v tom zmysle, že proti pohybu v horizontálnom smere nepôsobí žiadna sila trenia.

Nech sa teleso pri nedeformovanej pružine nachádza v počiatku súradnicovej osi. V tejto polohe na teleso v smere súradnicovej osi nebude pôsobiť žiadna sila a takúto polohu voláme rovnovážna poloha. Ak ho posunieme o vzdialenosť  $x$ , pružinu tým natiahneme a na teleso bude pôsobiť sila v opačnom smere, ako sme pružinu deformedovali. Zložku tejto sily v smere osi  $x$  vyjadruje rovnica  $F = -kx$ , kde  $k > 0$ . Takúto silu voláme návratná sila a konštanta  $k$  je silová konštanta alebo tiež tuhosť pružiny. Ak teleso uvoľníme, sila mu udelí zrýchlenie a potenciálna energia natiahnutej pružiny sa premení na kinetickú energiu telesa. Po prechode rovnovážnou polohou teleso začne pružinu stláčať. Kinetická energia sa premení na potenciálnu energiu stlačenej pružiny, situácia sa opakuje a teleso začne vykonávať periodický pohyb po priamke.



Obr. 1.1: Netlmené kmitanie

Takáto sústava predstavuje lineárny harmonický oscilátor. Ukážeme totiž, že výchylka  $x$  z rovnovážnej polohy je harmonickou funkciou času a teda tento lineárny oscilátor je harmonický.

Tento pohyb bude popísaný rovnicou

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

kde  $-kx = F_p$  predstavuje silu pružnosti, ktorej veľkosť je úmerná okamžitej výchylke a pôsobí vždy proti tejto výchylke. Túto rovnicu prepíšeme do tvaru

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0,$$

a zavedieme substitúciu  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , čím dostávame rovnicu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (1.1)$$

Je evidentné, že rovnica (1.1) je lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu a riešenie takejto rovnice hľadáme v tvare

$$x = e^{\lambda t}.$$

Po dosadení a úprave dostávame charakteristickú rovnicu

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

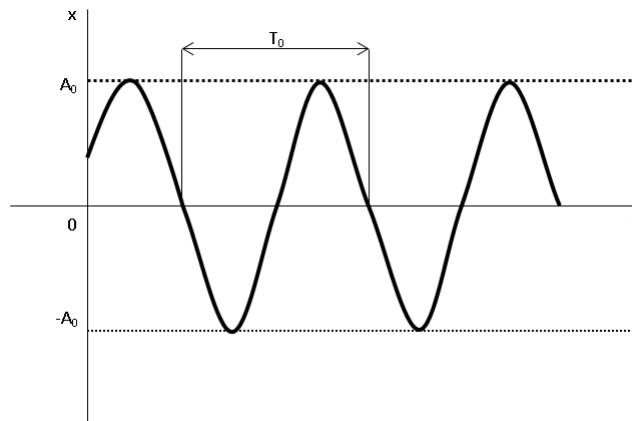
z ktorej vyplývajú komplexne združené korene  $\lambda_1 = i\omega$  a  $\lambda_2 = -i\omega$ . Z teórie lineárnych diferenciálnych rovníc [1, 2, 4] vyplýva, že ak rovnici vyhovujú dve riešenia, riešením je aj ich lineárna kombinácia a všeobecné riešenie pohybovej rovnice pre pohyb za pôsobenia návratnej sily má tvar

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

Z matematiky vieme, že  $C_1$  a  $C_2$  sú vo všeobecnosti združené komplexné čísla. Výchylka  $x$  je však reálne číslo. Využijeme  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  a zavedieme substitúcie  $C_1 + C_2 = A_0 \cos \varphi$ ,  $i(C_1 - C_2) = -A_0 \sin \varphi$ . Po vykonaní elementárnych úprav dostávame reálny tvar všeobecného riešenia pohybovej rovnice pre harmonický oscilátor

$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.2)$$

kde  $x$  predstavuje okamžitú výchylku v čase  $t$ ,  $A_0$  je maximálna výchylka alebo aj amplitúda kmitov, argument  $(\omega t + \varphi)$  je fáza kmitu a  $\varphi$  je fázová konštanta. Fázová konštanta je fáza v čase  $t = 0$ . Obidve konštanty  $A_0$  a  $\varphi$  vyplývajú z počiatočných podmienok, ktorými sú obyčajne výchylka a rýchlosť v čase  $t = 0$ . Časový priebeh harmonického kmitania je na obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Netlmené harmonické kmity

Fyzikálny význam konštanty  $\omega$  spočíva v tom, že keď zväčšíme čas v rovnici (1.2), o  $\frac{2\pi}{\omega}$ , tak dostaneme

$$x = A_0 \cos \left( \omega \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right) = A_0 \cos (\omega t + 2\pi + \varphi) = A_0 \cos (\omega t + \varphi).$$

Časový interval  $T_0$  rovný  $\frac{2\pi}{\omega}$  je doba, za ktorú sa výchylka opakuje, teda je to perióda kmitov. Platí

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Frekvencia kmitov  $f_0$  je počet kmitov za časovú jednotku

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

odtiaľ

$$\omega = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Je dobré poznamenať, že frekvencia kmitania nijako nezávisí na tom, ako veľmi sme pružinu natiahli a teda aká veľká je amplitúda kmitov. Závisí len od hmotnosti kmitajúceho telesa a silovej konštanty pružiny. Veličinu  $\omega$  nazývame uhlová frekvencia (tiež kruhová frekvencia) pohybu; jej jednotka v sústave SI je radián za sekundu, fyzikálny rozmer je  $s^{-1}$ .

Riešenie rovnice (1.1) môžeme rovnako dobre vyjadriť aj v tvare  $x = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . Pri daných počiatočných podmienkach sa pritom len zmení hodnota fázovej konštanty o  $\frac{\pi}{2}$ .

Vyjadrime teraz rýchlosť a zrýchlenie telesa. Pre rýchlosť dostávame

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}A_0 \cos(\omega t + \varphi) = -A_0\omega \sin(\omega t + \varphi) = A_0\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

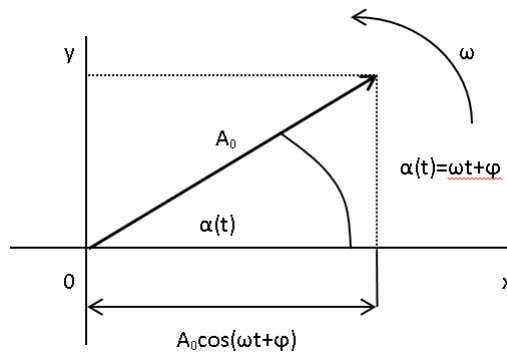
a pre zrýchlenie

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-A_0\omega \sin(\omega t + \varphi)) = -A_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Vidíme, že rýchlosť predbieha výchylku vo fáze o  $\frac{\pi}{2}$  a zrýchlenie predbieha výchylku vo fáze o  $\pi$ .

Mnohé úlohy, hlavne skladanie kmitov, sa značne zjednodušia, ak kmitavý pohyb zobrazíme priemetom koncového bodu rotujúceho vektora. Podľa obrázku 1.3 zvolíme na priamke  $x$  počiatočný bod a umiestnime v ňom počiatok vektora

otáčajúceho sa uhlovou rýchlosťou  $\omega$  v naznačenom smere. Nech veľkosť vektora je  $A_0$  a nech uhol, ktorý rotujúci vektor zvieral s osou  $x$  v čase  $t = 0$  je  $\varphi$ . Potom priemet vektora do priamky  $x$  sa rovná práve  $A_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , čo je výraz pre časovú závislosť výchylky pri harmonickom kmitavom pohybe. Vektorové zobrazenie sa dá výhodne použiť pri skladaní kmitov.



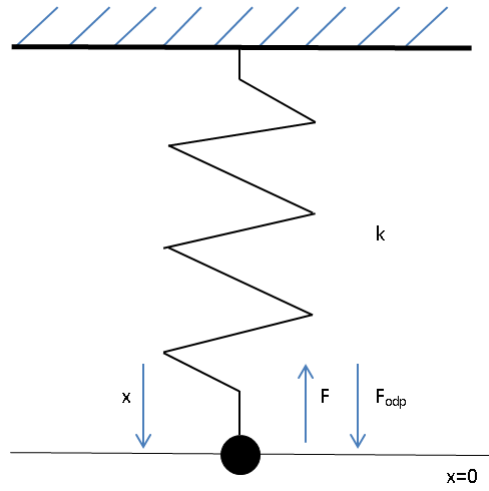
Obr. 1.3: Vektorové zobrazenie kmitavého pohybu

## 1.2 Tlmené kmitanie

Amplitúda ani energia netlmeného harmonického oscilátora od času nezávisia a pohyb takéhoto oscilátora by trval stále. Pri kmitaní reálnych objektov sa vždy viac, alebo menej stretávame s odporom prostredia a s trením. Kmity pri pôsobení trenia postupne zanikajú alebo napriek počiatočnej výchylke, alebo rýchlosti vôbec nevzniknú.

Predpokladajme, že odpor prostredia je priamo úmerný rýchlosti  $F_{odp} = -rv$ , kde  $r > 0$ . Sila odporu prostredia smeruje proti rýchlosti, čo vyjadruje znamienko mínus v tomto výraze. Ak pôsobiaca návratná sila je priamo úmerná výchylke pohybová rovnica má tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}.$$



Obr. 1.4: Tlmený harmonický oscilátor

Zaved'eme substitúcie

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\lambda = \frac{r}{m}.$$

Novú konštantu  $\lambda$  nazývame koeficient útlmu. Konštantu  $\omega$  je vlastná uhlová frekvencia, t.j. uhlová frekvencia netlmeného harmonického oscilátora. Po úprave dostávame pohybovú rovnicu v tvare

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \quad (1.3)$$

Riešenie rovnice hľadáme v tvare  $x = Ce^{ut}$ . Po dosadení tejto funkcie do predchádzajúcej rovnice dostávame charakteristickú rovnicu

$$u^2 + 2\lambda u + \omega^2 = 0,$$

ktorej riešením je

$$u_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Dvom hodnotám  $u$  odpovedá všeobecné riešenie rovnice (1.3) v tvare lineárnej kombinácie

$$x = C_1 e^{u_1 t} + C_2 e^{u_2 t} = e^{-\lambda t} (C_1 e^{t\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}).$$

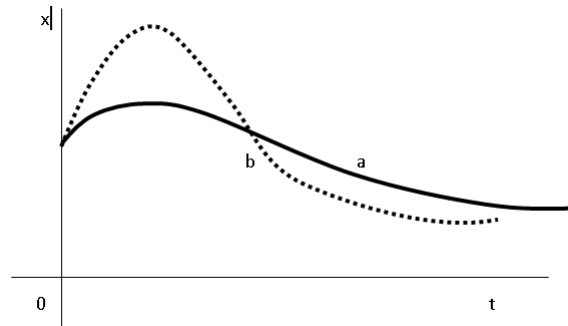
Podľa veľkosti tlmenia môžu nastať tri prípady:



- Tlmenie je veľké a  $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ , potom obidve riešenia charakteristickej rovnice  $u_{1,2}$  sú reálne čísla a  $x$  nemá žiadnu periodickú zložku. Teoreticky za čas  $t \rightarrow \infty$  sa teleso dostane znovu do rovnovážnej polohy  $x = 0$ . Grafický priebeh závislosti  $x = x(t)$  je krivka (a) na obrázku 1.5. Pri takomto veľkom tlmení o pohybe hovoríme, že je to aperiodický pohyb. Kmitanie vôbec nenastane.
- Tlmenie je také, že  $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ . V takomto prípade z matematiky vyplýva, že riešením rovnice (1.3) je funkcia  $x = e^{-\lambda t}$  a aj funkcia  $x = te^{-\lambda t}$ . Všeobecné riešenie je ich lineárnou kombináciou a má tvar

$$x = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t).$$

Tento pohyb nazývame medzný aperiodický pohyb. Zodpovedá mu krivka (b) na obrázku 1.5.



Obr. 1.5: Aperiodický pohyb tlmeného harmonického oscilátora

- Tlmený kmitavý pohyb nastáva len pri malom tlmení, ak  $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ . Potom

$$\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = i \pm \nu, \quad \nu = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Všeobecné riešenie pohybovej rovnice má tvar

$$x = A_0 e^{-\lambda t}(C_1 e^{i\nu t} + C_2 e^{-i\nu t}).$$

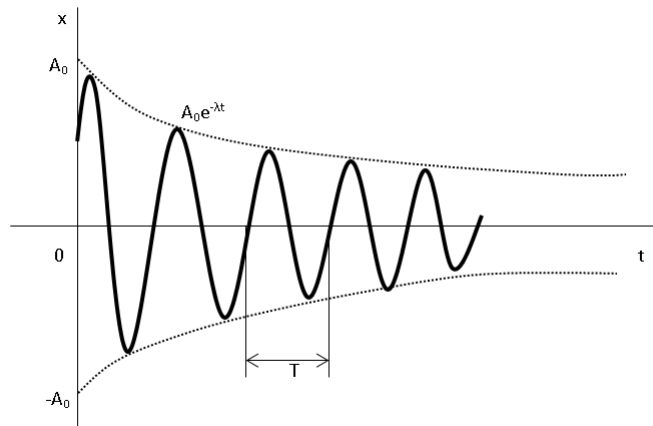
Podobným postupom ako v prípade harmonického oscilátora dospejeme substitúciou a úpravou k reálnemu tvaru všeobecného riešenia

$$x = A_0 e^{-\lambda t} \cos(\nu t + \varphi).$$

Uhlová frekvencia  $w$  je menšia, ako uhlová frekvencia pri netlmenom kmitaní tej istej sústavy a mení sa aj amplitúda, ktorá s časom exponenciálne klesá

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (1.4)$$

Priebeh kmitania a zmeny amplitúdy je ukázaný na obrázku 1.6.



Obr. 1.6: Tlmené harmonické kmity

Prísne vzaté nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde  $T$  môžeme hovoriť iba ako o časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou.

Periódou tlmených kmitov je

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}.$$

Platí  $T > T_0$ , kde  $T_0$  je perióda vlastných kmitov. Ak je tlmenie malé, perióda sa prakticky rovná perióde netlmených kmitov. Zväčšovaním tlmenia perióda narastá.

Podiel amplitúd dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek označujeme  $\sigma$  a nazývame útlm.

$$\sigma = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\lambda t}}{A_0 e^{-\lambda(t+T)}} = e^{\lambda T}$$

Prirodzený logaritmus útlmu je logaritmický dekrement útlmu  $\delta = \ln \sigma = \lambda T$ .

Zo závislosti amplitúdy na čase (1.4) vidíme, že amplitúda kmitov sa zmenší  $e$ -krát za časový interval rovnajúci sa  $\frac{1}{\lambda}$ . Potom prevrátená hodnota logaritmického dekrementu útlmu vyjadruje počet kmitov, počas ktorých sa amplitúda kmitov zmení  $e$ -krát. Čím väčší je logaritmický koeficient útlmu, tým menší je počet kmitov potrebný na určité zníženie amplitúdy.

Vplyvom trenia dochádza k disipácii energie, mechanická energia kmitavého pohybu sa mení na energiu tepelnú a pohyb postupne zaniká. Ak v kmitajúcej sústave chceme pohyb udržať, musíme sústave vhodným spôsobom dodávať energiu. Na druhej strane práve tlmenie využívame v technickej praxi na odstránenie nežiadúcich vibrácií.

Cieľom práce je vyšetrenie štyroch modelov impulzívnych oscilátorov. K tomu využijeme metódy z teórie planarných dynamických systémov (bez impulzov) [7]. Metódy následne upravíme pre prípady, kedy na dynamické systémy pôsobia impulzy.

# Kapitola 2

## Planárne dynamické systémy

Matematický model, ktorý sa mení v čase podľa určitých pravidiel, nazývame dynamickým systémom. Vývoj dynamického systému môžeme sledovať nepretržite, alebo v oddelených časových okamžikoch. Pri nepretržitom sledovaní hovoríme o spojitom dynamickom systéme, zatiaľ čo v druhom prípade používame termín diskretný dynamický systém. Ďalej sa budeme zaoberať len spojitými dynamickými systémami a prevedieme výber z teórie v [3] a [7] potrebnej pre štúdium impulzných oscilátorov v kapitole 4.

### 2.1 Dynamické systémy generované sústavou 2 autonómnych ODR prvého rádu

**Definícia 2.1.1.** Nech  $G$  je otvorená podmnožina priestoru  $\mathbb{R}^2$  a vektorová funkcia  $\varphi(t, \mathbf{x})$  zobrazuje množinu  $\mathbb{R} \times G$  do  $G$ . Ďalej nech  $\varphi \in C(\mathbb{R} \times G)$  a má nasledujúce vlastnosti:

- $\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$  pre každé  $\mathbf{x}^0 \in G$ ;
- $\varphi(t + s, \mathbf{x}^0) = \varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x}^0))$  pre každé  $t, s \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{x}^0 \in G$ ;
- pre každé  $t \in \mathbb{R}$  existuje k zobrazovaniu  $\varphi(t, \cdot)$  inverzné zobrazovanie a je rovné  $\varphi(-t, \cdot)$ .

Potom zobrazovanie  $\varphi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$  nazývame *tok*.

Pre každé pevné  $t \in \mathbb{R}$  nazveme zobrazovanie

$$\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$$

dynamický systém v  $\mathbb{R}^2$ . Priestor  $R^2$  nazveme *fázovým priestorom*.

Budeme uvažovať sústavu dvoch autonómnych obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)). \end{cases}$$

Odtiaľ  $f_1, f_2$  sú funkcie 2 reálnych premenných. Ekvivalentne je možné takúto sústavu zapísať v tvare vektorovej funkcie

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (2.1)$$

Najskôr si pripomenieme niektoré pojmy a vzťahy z teórie diferenciálnych rovníc

**Definícia 2.1.2.** *Riešením rovnice (2.1) na intervale  $J \subset \mathbb{R}$  rozumieme vektorovú funkciu  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  takú, že  $\mathbf{x} \in C^1(J)$  splňuje rovnicu (2.1) pre každé  $t \in J$ .*

Ďalej budeme predpokladať, že  $0 \in J$ .

Rovnica (2.1) má obvykle nekonečne mnoho riešení. Preto kladieme na riešenia ďalšie podmienky, ktoré upresnia, aké riešenia mám zrovna na mysli. Základná podmienka, ktorou môžeme špecifikovať jednotlivé riešenia rovnice (2.1) je počiatková podmienka (Cauchyho) tvaru

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0 \quad (2.2)$$

kde bod  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$  je tzv. počiatkový bod riešenia. Podmienku (2.2) ekvivalentne zapisujeme

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.3)$$

**Definícia 2.1.3.** Úloha (2.1), (2.3) sa nazýva počiatková (Cauchyho) úloha.

Ide o úlohu nájsť riešenie rovnice (2.1) na intervale  $J \subset \mathbb{R}$ , splňujúce podmienku (2.3). Také riešenie budeme označovať  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ . Podľa definície 2.1.2 a vzorca (2.3) vektorová funkcia  $\varphi$  splňuje nasledujúce rovnosti

$$\varphi'(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}^0)), \quad \forall t \in J, \quad (2.4)$$

$$\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0. \quad (2.5)$$

**Veta 2.1.1.** (Základná veta o existencii a jednoznačnosti) Nech  $G$  je otvorená podmnožina v  $\mathbb{R}^2$  obsahujúca  $\mathbf{x}^0$ . Ďalej nech  $\mathbf{f} \in C^1(G)$ . Potom úloha (2.1), (2.3) má jediné riešenie  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  definované na maximálnom intervale  $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0}) \subset \mathbb{R}$  obsahujúcim 0.

Ďalej budeme predpokladať, že funkcia  $\mathbf{f}$  v rovnici (2.1) splňuje podmienky vety 2.1.1, t.j.  $\mathbf{f} \in C^1(G)$ . Tím zaručíme existenciu jedinej vektorovej funkcie  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ , ktorá bude spĺňať (2.4) pre  $\mathbf{x}^0 \in G$  a  $J = I_{\mathbf{x}^0}$ .

Pre pevne zvolené  $\mathbf{x}^0 \in G$  je vektorová funkcia  $\varphi(\cdot, \mathbf{x}^0)$  zobrazením z  $J$  do  $\mathbb{R}^2$  a môžeme ju zapisovať v tvare

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (\varphi_1(t, x_1^0, x_2^0), \varphi_2(t, x_1^0, x_2^0)).$$

Veta 2.1.1 zaručuje, že riešenie  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  úlohy (2.1), (2.3) je definované na intervale  $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0})$ , ktorý je vo všeobecnosti len podintervalom v  $\mathbb{R}$ . Teda  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  nemusí byť definované pre každé  $t \in \mathbb{R}$ . Takéto zobrazenie nespĺňa ale podmienky nasledujúcej vety

**Veta 2.1.2.** (Generovanie dynamického systému) Nech  $\mathbf{x}^0$  je ľubovoľný bod z otvorenej množiny  $G$  v  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(G)$  a nech  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je riešením úlohy (2.1), (2.3) na  $\mathbb{R}$ . Predpokladajme, že  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  ako vektorová funkcia 3 premenných  $t, x_1^0, x_2^0$  zobrazuje množinu  $\mathbb{R} \times G$  do  $G$ .

Potom  $\varphi$  je tok. Ďalej pre každé pevné  $t \in \mathbb{R}$  je zobrazenie  $\varphi(t, \mathbf{x}^0) : G \rightarrow G$  dynamický systém v  $\mathbb{R}^2$ .

Ak je ale  $G = \mathbb{R}^2$ , a teda funkcia  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , potom je možné transformovať premenné  $t$  tak, že po takejto transformácii platí  $I_{\mathbf{x}^0} = \mathbb{R}$  pre každé  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ . Transformovaná rovnica potom generuje dynamický systém v zmysle vety 2.1.2.

Pre ďalšiu orientáciu v problematike zadefinujeme niekoľko základných pojmov potrebných k definícií fázového portréту diferenciálnej rovnice (2.1).

**Definícia 2.1.4.** Graf riešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina bodov  $(t, \varphi(t, \mathbf{x}^0))$ , kde  $t \in I_{\mathbf{x}^0}$ .

Je zrejmé, že graf riešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je hladká krivka v priestore  $\mathbb{R}^3$  s parametrickými rovnicami

$$t = t, x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \quad t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

**Definícia 2.1.5.** Trajektória riešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina bodov  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ , kde  $t \in I_{x^0}$

Trajektória riešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je hladká krivka v priestore  $\mathbb{R}^2$  s parametrickými rovnicami

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \quad t \in I_{x^0}.$$

Vidíme, že trajektóriu riešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  dostaneme ako projekciu grafu riešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  do priestoru  $\mathbb{R}^2$ . Takú trajektóriu budeme značiť  $\gamma(\mathbf{x}^0)$ .

**Definícia 2.1.6.** Kritický bod rovnice (2.1) je bod  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$  splňujúci sústavu rovníc

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Pokiaľ bod  $\bar{\mathbf{x}}$  nieje kritický bod, nazývame ho regulárny bod rovnice (2.1).

**Definícia 2.1.7.** Fázový portrét rovnice (2.1) je množina trajektórií všetkých riešení rovnice spoločne so šípkami na trajektóriách, ktoré označujú pohyb bodu  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  na trajektórii pre rastúce  $t$ .

Veľmi dôležitou vlastnosťou kritického bodu je stabilita, ktorú budeme definovať nasledovne. Predpokladajme, že  $G \subset \mathbb{R}^2$  je množina z vety 2.1.1 a  $I_{x^0} = \mathbb{R}$  pre každé  $\mathbf{x}^0 \in G$

**Definícia 2.1.8.** Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  rovnice (2.1) nazveme *stabilný*, ak platí

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

**Definícia 2.1.9.** Zvoľme bod  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  a  $\epsilon > 0$ . Potom množinu bodov  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  splňujúcich rovnosť

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - a_i)^2} < \epsilon$$

nazveme  $\epsilon$ -ové okolie bodu  $\mathbf{a}$ .

**Definícia 2.1.10.** Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  rovnice (2.1) nazveme *nestabilný*, pokiaľ nie je stabilný. Teda ak aspoň pre jedno  $t > 0$  platí

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \wedge \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| \geq \epsilon. \quad (2.7)$$

V aplikáciach má často väčší význam silnejší typ stability definovaný nasledovne

**Definícia 2.1.11.** Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  rovnice (2.1) nazveme *asymptoticky stabilný*, ak je stabilný a navyše platí

$$\exists r > 0 \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0. \quad (2.8)$$

**Definícia 2.1.12.** Množina počiatočných bodov  $\mathbf{x}^0 \in G$  spĺňujúcich podmienku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$$

sa nazýva *oblasť príťažlivosti* kritického bodu  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Oblasť príťažlivosti môže mať veľmi zložitú štruktúru a jej určenie býva zložitý problém. Definícia 2.1.12 hovorí, že ak zvolíme počiatočný bod  $\mathbf{x}^0$  v oblasti príťažlivosti kritického bodu  $\bar{\mathbf{x}}$ , potom graf riešenia  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  konverguje pre  $t \rightarrow \infty$  ku grafu konštantného riešenia  $\bar{\mathbf{x}}$ .

## 2.2 Sústava 2 lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientmi

Uvažujme v (2.1) vektorovú funkciu  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ , kde  $f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ ,  $f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ . Dostávame teda sústavu dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu v tvare

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \end{cases} \quad (2.9)$$

kde  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  sú dané reálne čísla.

Sústavu (2.9) ide ekvivalentne zapísať pomocou matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$



v tvare vektorovej rovnice

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (2.10)$$

s počiatočnou podmienkou v tvare

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (2.11)$$

kde  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \in G$ .

**Veta 2.2.1.** *(O globálnej existencii a jednoznačnosti) Počiatočná úloha (2.10), (2.11) má pre ľubovoľné  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$  jediné riešenie  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  definované na celom  $\mathbb{R}$ . Toto riešenie je tvaru*

$$\varphi(t, \mathbf{x}^0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

pričom  $e^{\mathbf{A}t}$  je maticová funkcia daná nasledujúcou radou

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Maticovú funkciu  $e^{\mathbf{A}t}$  nevieme určiť z matice  $\mathbf{A}$ . Preto využívame teóriu Jordanových kanonických tvarov. Po zavedení substitúcie

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t), \quad (2.14)$$

platí

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}(t),$$

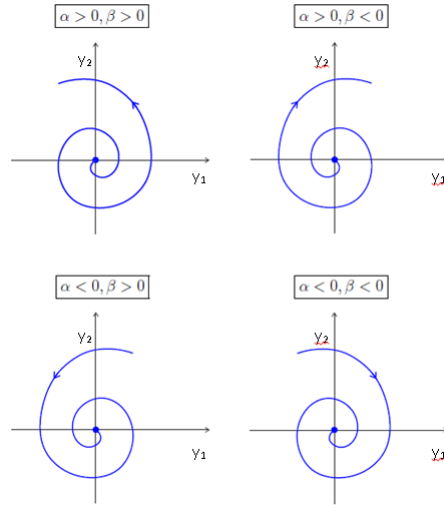
preto

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}(t).$$

To znamená, že rovnica (2.10) je transformovaná na rovnicu

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t), \quad (2.15)$$

s dvojrozmernou konštantnou maticou  $\mathbf{J}$  v Jordanovom kanonickom tvare, ktorá závisí na matici  $\mathbf{A}$ .



Obr. 2.1: Štyri rôzne fázové portréty

Za predpokladu, že vlastné čísla matice  $\mathbf{A}$  sú komplexne združené, t.j.  $a_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , bude Jordanova matica v tvare

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Matice  $\mathbf{J}$  je k matici  $\mathbf{A}$  určená jednoznačne až na poradie čísiel  $\beta$  a  $-\beta$  na vedľajšej diagonále.

Fázový portrét rovnice (2.15) respektíve odpovedajúceho dynamického systému ide jednoducho určiť z hodnôt vlastných čísiel  $a_1$  a  $a_2$  matice  $\mathbf{J}$ .

**Veta 2.2.2.** *Nech  $\mathbf{J}$  je matica s komplexne združenými vlastnými číslami  $a_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , pričom  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ .*

*Potom systém (2.15) má jeden zo štyroch fázových portrétov na obrázku 2.1.*

*Dôkaz.* Kanonickú rovnicu (2.15) môžeme zapísať ekvivalentne v tvare

$$\begin{cases} y_1'(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t), \\ y_2'(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t). \end{cases} \quad (2.17)$$

Ďalej si určíme maticovú funkciu, ktorá bude mať podobu

$$e^{\mathbf{J}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

Pre ľubovoľný bod  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  jediné riešenie tejto sústavy a to v tvare

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{y}^0) = e^{\mathbf{J}t} \mathbf{y}^0 = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Predpokladajme, že bod  $(y_1^0, y_2^0) \neq (0, 0)$ . V tomto prípade je vhodné využiť transformáciu do polárnych súradníc a nájsť tak nový tvar riešenia a rovnice orbity v polárnych súradniciach. Do systému (2.17) zavedieme substitúciu

$$y_1(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y_2(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

ktorá vyjadruje vzťah medzi vektorovou funkciou  $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{y}^0) = (y_1(t), y_2(t))^T$  a novou vektorovou funkciou  $(r(t), \theta(t))^T$ , ktorej prvá zložka  $r(t)$  je kladná na  $\mathbb{R}$ . Pritom pre ľubovoľné pevné  $t \in \mathbb{R}$  je v  $\mathbb{R}^2$  vzťah medzi bodom  $(y_1(t), y_2(t))$ , v ktorom je  $y_1(t) \neq 0$  a bodom  $(r(t), \theta(t))$  charakterizovaný vzorcami

$$y_1^2(t) + y_2^2(t) = r^2(t), \quad \frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \tan \theta(t). \quad (2.20)$$

Pokiaľ zderivujeme prvú rovnicu z (2.19), dostávame

$$2y_1(t)y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t) = 2r(t)r'(t).$$

Po dosadení z (2.17) sa dostávame k rovnici

$$y_1(t)(\alpha y_1(t) - \beta y_2(t)) + y_2(t)(\beta y_1(t) + \alpha y_2(t)) = r(t)r'(t),$$

čo po úprave dáva

$$r'(t) = \alpha r(t). \quad (2.21)$$

Ak je  $y_1(t) \neq 0$ , z druhej rovnice v (2.20) vyplýva, že  $\theta(t) = \arctan \frac{y_2(t)}{y_1(t)} + n\pi$ , pre každé celé číslo  $n$ . Preto platí

$$\theta'(t) = \frac{y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)}{y_1^2(t) + y_2^2(t)}$$

Po dosadení (2.17) a vzhľadom na to, že  $r$ ,  $y_1$  a  $y_2$  majú spojité derivácie, dostávame

$$\theta'(t) = \beta,$$

čo spoločne s (2.21) vedie na systém

$$\begin{cases} r'(t) = \alpha r(t), \\ \theta'(t) = \beta. \end{cases} \quad (2.22)$$

Substitúciou (2.19) je počiatočný bod  $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \neq \mathbf{o}$  transformovaný na bod  $(r_0, \rho_0)$ , kde kladná konštanta  $r_0$  je vzhľadom k (2.20) jednoznačne určená vzorcom

$$r_0 = \sqrt{y_1^{0^2} + y_2^{0^2}}. \quad (2.23)$$

Oproti tomu  $\theta_0$  nieje určená jednoznačne a splňuje podmienku

$$\theta_0 = \arctan \frac{y_2^0}{y_1^0} + n\pi,$$

pre ľubovoľné celé  $n$ . Ďalej budeme preto predpokladať, že  $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ . Potom k bodu  $(y_1^0, y_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  bude bod  $(r_0, \theta_0) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$  jednoznačne určený a počiatočná podmienka prejde na

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.24)$$

Riešenie počiatočnej úlohy (2.22) a (2.24) nachádzame elementárnymi metódami riešení diferenciálnych rovníc ako vektorovú funkciu

$$(r(t), \theta(t))^T = (r_0 e^{\alpha t}, \beta t + \theta_0)^T, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

Parametrické rovnice trajektórie budú mať tvar

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0 \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

Teraz z týchto rovníc odstránime parameter  $t$ . Z druhej rovnice máme  $t = \frac{\theta(t) - \theta_0}{\beta}$  a dosadením do prvej rovnice dostávame nasledovnú rovnicu trajektórie v polárnych súradniciach

$$r = c e^{k\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

pričom konštanty  $c$ , a  $k$  závisia na zložkách  $\alpha$  a  $\beta$  vlastných čísel matice a počiatočnom bode  $(r_0, \theta_0)$ , ktorý je jednoznačne určený z bodu  $(y_1^0, y_2^0)$ . Teda platí

$$k = \frac{\alpha}{\beta}, \quad c = r_0 e^{-k\theta_0}.$$

Trajektória daná rovnicou (2.27) je logaritmická špirála. Jej tvar je určený znamienkom čísla  $k$  a smer šípky na orbite je daný znamienkom čísla  $\beta$ .

- V prípade  $\alpha > 0$  a  $\beta > 0$ . Potom sú funkcie  $r(t)$  a  $\theta(t)$  rastúce a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty.$$

To znamená, že bod  $(y_1(t), y_2(t))$  sa bude vzdďaľovať od počiatku do nekonečna a nekonečne mnoho krát obiehať okolo počiatku proti smere hodinových ručičiek po trajektórii  $\gamma(\mathbf{x}_0)$ .

- V prípade  $\alpha < 0$  a  $\beta > 0$ . Potom platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty.$$

Teda bod  $(y_1(t), y_2(t))$  sa bude približovať k počiatku a nekonečne mnoho krát obiehať okolo počiatku proti smere hodinových ručičiek po trajektórii  $\gamma(\mathbf{x}_0)$ .

- V prípade  $\alpha > 0$  a  $\beta < 0$ . Potom platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = -\infty.$$

V takomto prípade sa bude bod  $(y_1(t), y_2(t))$  sa bude vzdďaľovať od počiatku do mínus nekonečna a nekonečne mnoho krát obiehať okolo počiatku v smere hodinových ručičiek po trajektórii  $\gamma(\mathbf{x}_0)$ .

- V prípade  $\alpha < 0$  a  $\beta < 0$ . Potom platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = -\infty.$$

Bod  $(y_1(t), y_2(t))$  sa bude približovať počiatku a nekonečne mnoho krát obiehať okolo počiatku proti v smere hodinových ručičiek po trajektórii  $\gamma(\mathbf{x}_0)$ .

□

Teda je určený fázový portrét rovnice (2.15). Teraz si ukážeme prechod od rovnice (2.15) k rovnici (2.10) a to za pomoci regulárnej transformačnej matice  $\mathbf{P}$ , ktorú sa vyjadrí z rovnice

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}.$$

Teda matica  $\mathbf{P}$  bude prevádzať fázový portrét rovnice (2.15) na fázový portrét rovnice (2.10) a to tak, že body  $(y_1, y_2)$  fázovej roviny rovnice (2.15) sa transformujú vzájomne jednoznačne na body  $(x_1, x_2)$  fázovej roviny rovnice (2.10). Z toho vyplýva, že aj trajektórie rovnice (2.15) sú jednoznačne transformované na trajektórie rovnice (2.10), pričom smer šípok na trajektóriách zostane zachovaný.

**Veta 2.2.3.** *Pri transformácii (2.14) prejde kritický bod  $\bar{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$  rovnice (2.15) na kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  rovnice (2.10).*

Transformácia (2.14) sa skladá z konečného počtu elementárnych transformácií

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

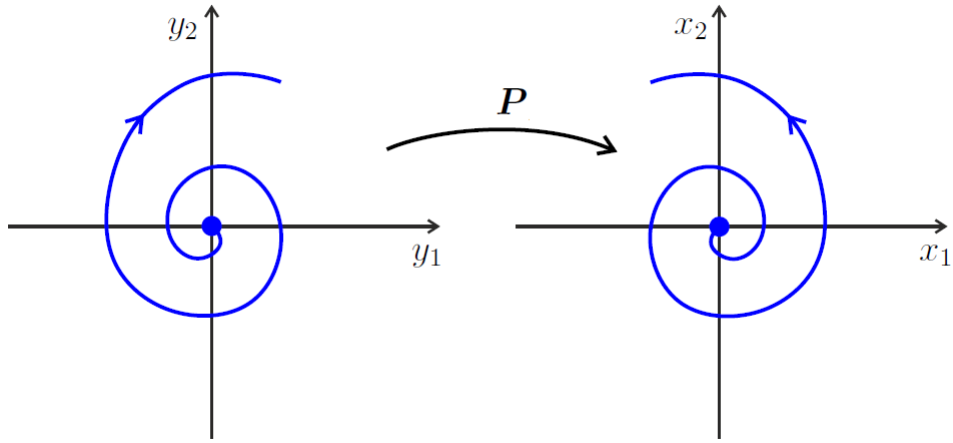
Pretože platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

transformácia (2.14) môže preklopiť graf danej funkcie okolo osy  $y_2$ , vid' obrázok 2.2.

Z toho vyplýva, že špirála vo fázovom portréte rovnice (2.15) prechádza na špirálu vo fázovom portréte (2.10), pričom rotácia riešenia vo fázovom portréte rovnice (2.15) nemusí byť zhodná s rotáciou vo fázovom portréte rovnice (2.10). To znamená, že špirála, ktorá rotuje po smere hodinových ručičiek, sa môže zobrazíť transformáciou (2.14) na špirálu, ktorá ale rotuje proti smere hodinových ručičiek. Smer rotácie na špirále je možné určiť aj priamo z matice  $\mathbf{A}$ , ktorá v prípade komplexných vlastných čísel splňuje podmienku  $(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A} < 0$ , t.j.

$$(a_{11} + a_{22})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$



Obr. 2.2: Transformácia  $x = Py$

To dáva po jednoduchej úprave

$$(a_{11} - a_{22})^2 < -4a_{12}a_{21},$$

a je zrejmé, že platí  $a_{12}a_{21} < 0$ .

Predpokladajme, že platí  $a_{12} < 0$ , zvolíme bod  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$  na kladnej poloose  $x_2$ , teda

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 > 0,$$

a budeme uvažovať riešenie  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  rovnice (2.10), ktoré navyše splňuje podmienku  $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = \mathbf{x}^0$ . Potom z prvej rovnice v sústave (2.9) máme

$$x_1'(0) = a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = a_{12}x_2^0 < 0.$$

Preto bude prvá zložka  $x_1(t)$  riešenia  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  klesať v bode  $t = 0$ , z tohto dôvodu šípka na trajektórii  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  smeruje v bode  $\mathbf{x}^0$  doľava, teda rotácia takejto trajektórie bude v protismere hodinových ručičiek.

V prípade, že  $a_{12} > 0$  a dodržaní predchádzajúceho postupu, dospejeme k záveru, že prvá zložka  $x_1(t)$  riešenia  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  rást' v bode  $t = 0$ , z tohto dôvodu šípka na trajektórii  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  smeruje v bode  $\mathbf{x}^0$  doprava, teda rotácia takejto trajektórie bude v smere hodinových ručičiek.

## 2.3 Planárny Hamiltonov systém

**Definícia 2.3.1.** Nech  $G \subset \mathbb{R}^2$  je otvorená množina a  $H \in C^2(G)$ . Potom systém tvaru

$$\begin{cases} x_1'(t) &= \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad (2.28)$$

sa nazýva *Hamiltonov systém* a funkciu  $H(x_1, x_2)$  nazývame *hamiltonián*.

Funkcia  $H(x_1, x_2)$  má vo fyzikálnych modeloch význam totálnej energie. Nasledujúca veta popisuje základnú vlastnosť systému (2.28)

**Veta 2.3.1.** (*Konzervácia energie*) Nech  $\mathbf{x}^0 \in G$  a  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je riešenie počiatkovej úlohy (2.28), (2.11) na maximálnom intervale  $I_{x^0} \subset \mathbb{R}$ . Potom platí

$$H(\varphi(t, \mathbf{x}^0)) = H(\mathbf{x}^0) \quad \forall t \in I_{x^0}.$$

Táto veta nám hovorí, že funkcia  $H(x_1, x_2)$  zostáva konštantná pozdĺž trajektórie ľubovoľného riešenia systému (2.28). Hovoríme že takýto systém konzervuje energiu a to má za dôsledok, že hladiny hamiltoniánu  $H(x_1, x_2)$  sa skladajú z trajektórií systému (2.28). Zvoľme  $c \in \mathbb{R}$ , a teda hladina  $H_c$  funkcie  $H(x_1, x_2)$  je množina bodov  $(x_1, x_2) \in G$  splňujúcich rovnicu

$$H(x_1, x_2) = c.$$

Nájdenie hladín analyticky nemusí byť vždy jednoduché, preto zvyčajne najskôr hľadáme kritické body, vyšetrujeme okolie týchto bodov, hľadáme hladiny obsahujúce takéto kritické body. Ak je  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G$  kritický bod systému (2.28), potom podľa vety o konzervácii energie hladina obsahujúca tento kritický bod sa skladá z bodov  $(x_1, x_2)$  splňujúcich rovnicu

$$H(x_1, x_2) = H(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

## 2.4 Trajektórie riešení dynamických systémov

V praxi sa môžeme stretnúť s rôznymi typmi trajektórií:



- **Periodická trajektória**, ktorá ma tvar uzavretej krivky, odpovedá periodickému riešeniu systému a nazýva sa cyklus.
- **Homoklinická trajektória**, odpovedajúca riešeniu, ktoré konverguje pre  $t \rightarrow \infty$  aj  $t \rightarrow -\infty$  k tomu istému kritickému bodu.
- **Heteroklinická trajektória**, odpovedajúca riešeniu, ktoré konverguje pre  $t \rightarrow \infty$  k jednému kritickému bodu a pre  $t \rightarrow -\infty$  k inému kritickému bodu.

**Definícia 2.4.1.** Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}}$  systému (2.28) nazveme *stred*, ak existuje okolie  $U$  bodu  $\bar{\mathbf{x}}$ , ktoré obsahuje len periodické trajektórie obiehajúce tento kritický bod.

### 2.4.1 Periodické trajektórie a ich stabilita

Uvažujme rovnicu (2.1), kde  $G \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} \in C^k(G)$ ,  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{x}^0 \in G$ . Nech  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je riešením rovnice (2.1) splňujúce počiatočnú podmienku (2.3), ktoré je definované na maximálnom intervale  $(a_{x^0}, b_{x^0})$ . Ďalej nech  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  je trajektória riešenia  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ . Predpokladajme, že  $\gamma(\mathbf{x}^0) \subset G$ .

**Definícia 2.4.2.** Bod  $\mathbf{y}$  je  $\omega$  – *limitný bod* trajektórie  $\gamma(\mathbf{x}^0)$ , ak existuje postupnosť reálnych čísel  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$  taká, že ak

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = b_{x^0},$$

potom platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, \mathbf{x}^0) = \mathbf{y}$$

**Definícia 2.4.3.** Množina všetkých  $\omega$ -limitných bodov trajektórie  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  sa nazýva  $\omega$  – *limitná množina* trajektórie  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  a označuje sa  $\omega(\mathbf{x}^0)$ .

**Definícia 2.4.4.** Bod  $\mathbf{y}$  je  $\alpha$  – *limitný bod* trajektórie  $\gamma(\mathbf{x}^0)$ , ak existuje postupnosť reálnych čísel  $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$  taká, že ak

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = a_{x^0},$$

potom platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(t_j, \mathbf{x}^0) = \mathbf{y}$$

**Definícia 2.4.5.** Množina všetkých  $\alpha$ -limitných bodov trajektórie  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  sa nazýva  $\alpha$  – *limitná množina* trajektórie  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  a označuje sa  $\alpha(\mathbf{x}^0)$ .

Pre periodickú trajektóriu platí  $\gamma(\mathbf{x}^0) = \omega(\mathbf{x}^0) = \alpha(\mathbf{x}^0)$ .

Pre homoklinickú trajektóriu platí, že existuje kritický bod  $\bar{\mathbf{x}}$  taký, že  $\omega(\mathbf{x}^0) = \alpha(\mathbf{x}^0) = \bar{\mathbf{x}}$ .

Pre heteroklinickú trajektóriu platí, že existujú kritické body  $\bar{x}^1 \neq \bar{x}^2$  také, že  $\omega(\mathbf{x}^0) = \bar{x}^1$ ,  $\alpha(\mathbf{x}^0) = \bar{x}^2$ .

**Definícia 2.4.6.** Periodická trajektória  $\Gamma \subset G$  sa nazýva *limitný cyklus* rovnice 2.1, ak existujú dva body  $x^0, x^1 \in G$ ,  $x^0$  vnútri  $\Gamma$ ,  $x^1$  mimo  $\Gamma$  také, že  $\alpha$ -limitná množina alebo  $\omega$ -limitná množina trajektórií  $\gamma(x^0)$  a  $\gamma(x^1)$  je periodická trajektória  $\Gamma$ .

**Veta 2.4.1.** (*Poincare-Bendixsonova*) Ak je  $\omega(\mathbf{x}^0)$  ohraničená množina v  $G$ , pričom  $\omega(\mathbf{x}^0)$  neobsahuje žiadny kritický bod, potom je  $\omega(\mathbf{x}^0)$  periodická orbita.

Nech  $\varphi(t, \mathbf{p})$  je periodické riešenie rovnice 2.1 s minimálnou periódou  $T$  a nech jeho trajektória je označená  $\Gamma$ . Budeme predpokladať, že  $\Gamma \subset G$  a zvolíme vektor  $\mathbf{v}$  tak, že je lineárne nezávislý na vektore dotýčnice  $\boldsymbol{\tau}$  k trajektórii  $\Gamma$  v bode  $\mathbf{p}$ . Teda

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}'(0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{f}(\mathbf{p}),$$

pričom vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$  sú lineárne nezávislé.

Nech  $L_\epsilon$  je úsečka definovaná predpisom

$$L_\epsilon = \{\mathbf{x} \in G : \mathbf{x} = \mathbf{p} + a\mathbf{v}, 0 \leq |a| \leq \epsilon\}.$$

**Definícia 2.4.7.** Úsečka  $L_\epsilon$  sa nazýva *priečny rez* k periodickej trajektórii v bode  $\mathbf{p}$ .

Nech  $\epsilon > 0$  je tak malé, že  $L_\epsilon$  pretína  $\Gamma$  len v bode  $\mathbf{p}$  a všetky trajektórie pretínajúce  $L_\epsilon$  ju pretínajú v rovnakom smere.

Pretože  $\varphi(T, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$  a riešenie spojite závisí na počiatkovej podmienke, existuje  $\delta > 0$  také, že ak je  $\mathbf{x}^0 \in L_\delta$ , potom existuje najmenšia hodnota  $t = T(\mathbf{x}^0)$ , pre ktorú platí

$$\varphi(T(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^0) \in L_\epsilon.$$

Štartujeme v bode  $\mathbf{x}^0$ , ktorý leží v  $\delta$  okolí  $L_\delta$  bodu  $\mathbf{p}$  a po jednom obehu po trajektórii  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  za čas  $T(\mathbf{x}^0)$  skončíme v  $\epsilon$  okolí  $L_\epsilon$  bodu  $\mathbf{p}$ . Tieto okolia pritom uvažujeme na  $L_\epsilon$ .

**Definícia 2.4.8.** Poincarého zobrazenie  $\Pi$  v okolí periodickej trajektórie  $\Gamma$  je definované predpisom

$$\Pi : L_\delta \longrightarrow L_\epsilon, \mathbf{x}^0 \longrightarrow \varphi(T(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^0).$$

Body pričného rezu  $L_\epsilon$  sú usporiadane takto

$$x^0 = \mathbf{p} + a_0\boldsymbol{\tau} \quad a \quad x^1 = \mathbf{p} + a_1\boldsymbol{\tau}, \quad x^0 \geq x^1,$$

ak  $a_0 \geq a_1$ .

**Veta 2.4.2.** Poincarého zobrazenie  $\Pi$  je v okolí trajektórie  $\Gamma$  monotónne, t.j.

$$x^0 \geq x^1 \implies \Pi(x^0) \geq \Pi(x^1) \quad \text{pre } x^0, x^1 \in L_\delta.$$

Ďalej platí  $\Pi \in C^1(L_\epsilon)$ .

**Veta 2.4.3.** Trajektória  $\gamma(\mathbf{x}^0)$  bodu  $\mathbf{x}^0 \in L_\delta$  je periodická, práve keď  $\mathbf{x}^0$  je pevný bod Poincarého zobrazenia, t.j. ak platí

$$\Pi(\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0.$$

**Definícia 2.4.9.** Periodická trajektória  $\Gamma$  sa nazýva *orbitálne stabilná*, ak

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{dist}(\mathbf{x}^0, \Gamma) < \delta \implies \text{dist}(\varphi(t, \mathbf{x}^0), \Gamma) < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

**Definícia 2.4.10.** Periodická trajektória  $\Gamma$  sa nazýva *orbitálne nestabilná*, ak nie je orbitálne stabilná.

**Definícia 2.4.11.** Periodická trajektória  $\Gamma$  sa nazýva *orbitálne asymptoticky stabilná*, ak je orbitálne stabilná a navyše platí

$$\exists b > 0 : \text{dist}(\mathbf{x}^0, \Gamma) < b \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t, \mathbf{x}^0), \Gamma) = 0.$$

Orbitálne asymptoticky stabilnú periodickú trajektóriu nazývame taktiež stabilným cyklom.

Platí, že  $\Gamma$  je orbitálne asymptoticky stabilná, pokiaľ

$$\exists b > 0 : \text{dist}(\mathbf{x}^0, \Gamma) < b \implies \omega(\mathbf{x}^0) = \Gamma$$

V kapitole 4 budeme rozhodovať o stabilite periodických trajektórií pomocou pevného bodu skalárneho zobrazenia  $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

**Veta 2.4.4.** *Nech  $h \in C^1$  je zobrazenie. Pevný bod  $\bar{\mathbf{x}}$  zobrazenia  $h$  je asymptoticky stabilný ak*

$$|h'(\bar{\mathbf{x}})| < 1,$$

*a je nestabilný ak*

$$|h'(\bar{\mathbf{x}})| > 1.$$

[3]

# Kapitola 3

## Popis matematického modelu

Obsah tejto kapitoly bol spracovaný na základe [5, 8]. Majme  $M$  ako fázový priestor určitého procesu nejakého vývoju, napríklad množina všetkých stavov procesu. Nech  $x(t)$  označuje bod, ktorý opisuje stav daného procesu v čase  $t$ . Predpokladajme, že proces je konečno rozmerný, napríklad je nutné len konečné množstvo parametrov, povedzme  $n$ , na popísanie tohto stavu vo fixnom čase. Za takýchto predpokladov bod  $x(t)$  môže byť interpretovaný pre pevné hodnoty času  $t$ , ako  $n$ -rozmerný vektor Euklidovského priestoru  $\mathbb{R}^n$  a  $M$  môže byť považovaný ako podmnožina  $\mathbb{R}^n$ . Topológiou fázového priestoru  $M$  a reálnej osy  $\mathbb{R}$ , teda  $M \times \mathbb{R}$ , budeme nazývať predĺženým fázovým priestorom uvažovaného procesu vývoja. Nech je takýto proces opísaný ako:

- systém diferenciálnych rovníc

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

- istá množina  $T_t$  v predĺženom fázovom priestore,
- operátor  $A_t$  definovaný na množine  $T_t$ , ktorý je zobrazovaný do množiny  $T'_t = A_t T_t$  v predĺženom fázovom priestore.

Samotný proces má nasledovný priebeh. Bod  $P_t = (t, x(t))$ , ktorý začína v  $(t_0, x_0)$ , sa pohybuje pozdĺž krivky  $\{t, x(t)\}$ , danej riešením systému (3.1),  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ . Tento bod sa teda pohybuje až do momentu  $t = t_1 > t_0$ , v ktorom bod  $(t, x(t))$  narazí na množinu  $T_t$ . V momente  $t = t_1$  sa bod  $P_t$  okamžite zobrazí pomocou operátoru  $A_t$  z  $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$  do  $P_{t_1}^+ = A_{t_1} P_{t_1} = (t_1, x^+(t_1)) \in T'_{t_1}$  a

následne pokračuje pozdĺž krivky  $\{t, x(t)\}$ , opísanej ale systémom (3.1),  $x(t) = x(t, t_1, x^+(t_1))$ . Ďalej sa pohybuje pozdĺž tejto krivky až do momentu  $t_2 > t_1$ , v ktorom bod  $P_t$  opäť stretne množinu  $T_t$ , a v tomto momente operátor  $A_t$  okamžite zobrazí bod  $P_t$  z  $P_{t_2} = (t_2, x(t_2))$  do  $P_{t_2}^+ = A_{t_2}P_{t_2} = (t_2, x^+(t_2)) \in T_{t_2}'$ . Následne pokračuje pohyb pozdĺž krivky  $\{t, x(t)\}$  danej riešením  $x(t) = x(t, t_2, x^+(t_2))$  až do opätovného stretu s množinou  $T_t$  a tak ďalej.[5]

Vyššie uvedené podmienky charakterizujú vývoj procesu, ktorý budeme nazývať impulzným diferenciálnym systémom. Krivku  $\{t, x(t)\}$  opísanú bodom  $P_t$  v predĺženom priestore budeme nazývať integrálnou krivkou a funkciu  $x = x(t)$  danú touto krivkou ako riešenie takéhoto systému.

Pomocou vyššie uvedených podmienok teda môžeme zapísať impulzný systém ako

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = f(t, x), & (t, x) \in T_t, \\ \Delta x|_{(t,x) \in T_t} & = A_t - x. \end{cases} \quad (3.2)$$

Odtiaľ, riešenie systému (3.2) je funkcia  $x = \varphi(t)$ , ktorá splňuje rovnicu (3.1) mimo množiny  $T_t$  a má nespojitosť prvého rádu v bodoch množiny  $T_t$  so skokmi

$$\Delta x = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = A_t \varphi(t-0) - \varphi(t-0). \quad (3.3)$$

Systém (3.2) môže mať tri typy riešení:

- riešenia, ktoré nemajú skok, teda integrálna krivka systému (3.1) nepretnie množinu  $T_t$  alebo priesečníky sú pevné body operátoru  $A_t$ ;
- riešenia sa menia v konečnom počte, teda integrálna krivka pretne množinu  $T_t$  v konečnom počte bodov, ktoré nie sú pevnými bodmi operátoru  $A_t$ ;
- riešenia sa menia spočítateľne mnoho krát, teda integrálna krivka narazí na množinu  $T_t$  v spočítateľnom počte bodov, ktoré nie sú pevnými bodmi operátoru  $A_t$ .

Z riešení, ktorých integrálne krivky pretnú množinu  $T_t$  v spočítateľne veľa bodoch, vyberieme také riešenia, ktoré zostávajú v  $T$  a začínajú v takom čase  $t_1 > t_0$ ,

alebo majú nejaký hromadný bod. Pohyb bodu  $P_t$  pozdĺž trajektórie, ktorá leží v  $T_t$ , začínajúc z  $t_1 > t_0$  je postupnosť skokov bodu  $P_t$  z  $(t_1, x_1)$  do  $(t_1, A_{t_1})$  a následne do  $(t_1, A_{t_1}^2)$  a následne do  $(t_1, A_{t_1}^3)$  a tak ďalej.

Ak má trajektória hromadný bod v  $T_t$ , potom pre  $t$  blížiac sa k  $t_1 > t_0$ , bod  $P_t$  stretne a zároveň opúšťa množinu  $T_t$  spočítateľne veľa krát a teda pohyb nemôže byť predĺžený do momentu  $t = t_1$ . Ak taký pohyb opisuje reálny proces, potom v okolí bodu  $t = t_1$ , sa buď objaví nové riešenie alebo fyzikálna podmienka, ktorá implikuje tento pohyb je nerealistická pre  $t$  blížiac sa k  $t_1$  a mala by byť nahradená inou podmienkou.

Impulzné diferenciálne rovnice môžeme rozlišovať v závislosti na charakteristikách impulzov, čo nám dáva tri rôzne triedy systémov, ktoré popisujú nasledujúce podkapitoly.

### 3.1 Systém s impulzmi vo fixnom momente

Rovnica má nasledovný tvar

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), & t \in (t_k, t_{k+1}), \\ \Delta x(t_k) &= I_k(x(t_k)), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

kde  $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , a pre  $t = t_k$  je  $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ , kde  $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$ .

### 3.2 Systém s impulzmi v premenlivom čase

Rovnica takéhoto systému má nasledovný tvar

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)), & t \neq \tau_k(x(t)), \\ \Delta x(t) &= I_k(x(t)), & t = \tau_k(x(t)), \end{cases} \quad (3.4)$$

kde  $\tau_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  je fázový priestor a  $\tau_k(x(t)) < \tau_{k+1}(x(t))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a  $x \in \Omega$ . Systémy s premenlivými momentmi impulzného efektu zahŕňajú omnoho zložitejšie problémy ako systémy s pevnými momentmi impulzného efektu. Spôsobuje to fakt, že momenty impulzného efektu systému (3.4) závisia na riešení, tj.  $t =$

$\tau_k(x(t))$ , pre každé  $k$ . Preto riešenia, ktoré vyštartujú z rôznych štartovacích bodov, budú mať rôzne body nespojitosti.

### 3.3 Impulzné dynamické systémy

Uvažujme autonómny systém (2.1) a predpokladajme, že sú splnené podmienky vety 2.1.1. Ak položíme  $T_t = \Gamma$ ,  $T'_t = \Gamma_0$ , a  $A : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ , potom impulzný dynamický systém môže byť zapísaný ako

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(x), & x \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{x \in \Gamma} &= A_t - x = I(x). \end{cases} \quad (3.5)$$

Fázový bod takéhoto systému sa pohybuje medzi dvoma po sebe idúcimi priesečníkmi s množinou  $\Gamma$ , pozdĺž jednej z trajektórií diferenciálnej rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

a v momente priesečníku s množinou  $\Gamma$ , bod  $x(t)$  je okamžite zobrazený operátorom  $A$  do bodu  $y = Ax$  z množiny  $\Gamma_0$ . Všeobecne platí, že riešenia impulzných diferenciálnych rovníc sú po častiach spojité funkcie s bodmi nespojitosti na momentoch impulzného efektu.[8]



# Kapitola 4

## Pohyb impulzívneho oscilátora

Správanie oscilátora pod vplyvom impulznej sily musíme skúmať vo viacerých problémoch teórie oscilácií. Takéto problémy vznikajú, napríklad pri skúmaní modelu hodín.

Model pre takýto typ problémov je nespojitým dynamickým systémom, ktorého pohyby sú popísané pomocou lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad \lambda^2 < \omega^2,$$

s impulzným efektom, ktorý nastáva v momente, keď bod  $(x, \dot{x})$  vo fázovej rovine prechádza cez  $x = x_0$ .

Zoberme do úvahy dva hlavné predpoklady o impulznej sile

1. Impulzná sila pôsobí v momente, keď bod  $(x, \dot{x})$  prechádza cez priamku  $x = x_0$  s nezápornou rýchlosťou, ktorá sa zväčší o konštantný impulz

$$m\dot{x}(t+0) - m\dot{x}(t-0) = mI_0 = \text{const.}$$

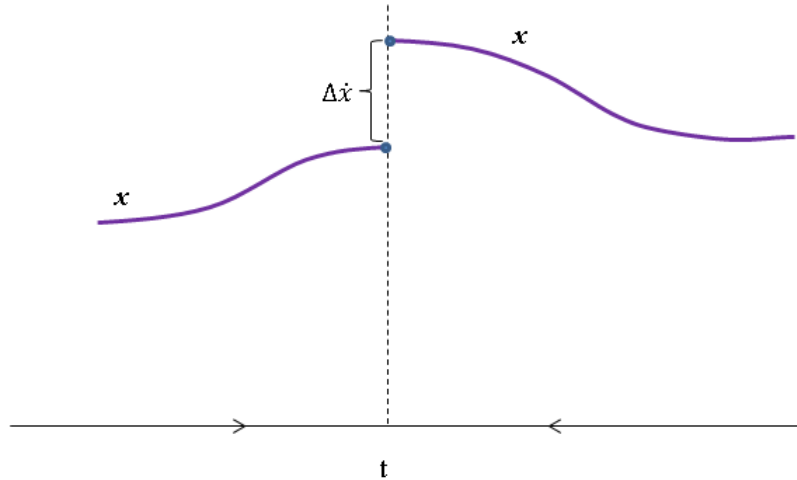
Takúto rovnosť vieme jednoducho odvodiť, vid' obrázok 4.1, kde máme znázornený graf derivácie riešenia  $\dot{x}(t)$ . Derivácia riešenia v čase  $t$  je nespojitá a skok je práve daný rovnosťou  $\Delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t+) - \dot{x}(t-)$ , kde  $\dot{x}(t+)$  a  $\dot{x}(t-)$  predstavujú ľavú a pravú limitu

$$\lim_{h \rightarrow t^+} \dot{x}(h) = \dot{x}(t+0) = \dot{x}(t+),$$

$$\lim_{h \rightarrow t^-} \dot{x}(h) = \dot{x}(t-0) = \dot{x}(t-).$$

Budeme predpokladať, že  $\dot{x}$  je zľava spojitá. Potom dostávame

$$\Delta\dot{x}|_{x=x_0} = \dot{x}(t+) - \dot{x}(t) = I_0. \quad (4.1)$$



Obr. 4.1: Impulzný efekt

2. Impulzná sila pôsobí v momente, keď bod  $(x, \dot{x})$  pretne priamku  $x = x_0$ , pričom kinetická energia sa zväčší o konštantu

$$\frac{m\dot{x}^2(t+)}{2} - \frac{m\dot{x}^2(t)}{2} = mI = \text{const.}$$

Derivácia  $\dot{x}$  je opäť zľava spojitá. Túto rovnicu vynásobíme výrazom  $\frac{2}{m}$  čím dostávame

$$\dot{x}^2(t+) - \dot{x}^2(t) = 2I = \text{const.},$$

ďalej zavedieme substitúciu  $2I = I_0^2$ , preto

$$\dot{x}^2(t+) - \dot{x}^2(t) = I_0^2.$$

Ľavá strana tejto rovnice je rovná rozdielu štvorcov, preto dostávame

$$(\dot{x}(t+) - \dot{x}(t))(\dot{x}(t+) + \dot{x}(t)) = I_0^2.$$

Súčet v druhej zátvorke upravíme do potrebného tvaru a to tak, že ho rozšírime a teda dostávame

$$\Delta\dot{x}(\dot{x}(t+) - \dot{x}(t) + \dot{x}(t) + \dot{x}(t)) = I_0^2,$$

a podobne po ekvivalentnej úprave sa dopravujeme do tvaru

$$\Delta\dot{x}(\Delta\dot{x}(t+) + 2\dot{x}(t)) = I_0^2, \quad (4.2)$$

na ktorý sa budeme ešte odvolávať.

## 4.1 Príklady oscilátorov

Budeme vyšetřovať niekoľko príkladov oscilátorov popísaných diferenciálnymi systémami a impulznými podmienkami. Najskôr budeme študovať príslušný systém bez impulzov a určíme jeho fázový portrét pomocou teórie z kapitoly 2. Potom prejdeme k systému s impulzmi a zameriame sa na štúdium periodických trajektórií. Pripomeňme, že periodické trajektórie systémov bez impulzov sú uzavreté krivky a hovoríme im cykly. V prípade systémov s impulzmi sú periodické trajektórie v dôsledku impulzného skoku nespojité. Budeme ich nazývať nespojitými cyklami. Definície a vety z časti 2.4 budeme aplikovať na dynamické systémy s impulzmi.

### 4.1.1 Príklad 1

Na začiatok si uvedieme pohyb popísaný impulzným systémom

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0, & x \neq x_0 > 0, \\ \Delta\dot{x}|_{x=x_0} = I, & I > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Vidíme, že v systéme (4.3) vystupuje diferenciálna rovnica druhého rádu a taktiež impulzná podmienka.

- Najskôr vyšetříme túto rovnicu bez impulznej podmienky. Rovnicu v (4.3) vieme previesť substitúciou  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}(t)$  na konzervatívny systém v tvare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\omega^2 x_1(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

Systém (4.4) je špeciálnym prípadom Hamiltonovho systému (2.28), ktorý je definovaný v kapitole 2. Zvoľme  $k \in \mathbb{R}$  ako konštantu. Hladina funkcie  $H(x_1, x_2)$  je množina bodov  $(x_1, x_2) \in G$  splňujúcich rovnicu

$$H(x_1, x_2) = k. \quad (4.5)$$

Hladiny hamiltoniánu sa skladajú z trajektórií systému (2.28). Konzervatívny systém (4.4) je teda Hamiltonov a jeho hamiltonián má tvar

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \omega^2 \frac{x_1^2}{2}. \quad (4.6)$$

Ak zvolíme v (4.5)  $k = \frac{c^2}{2}$ , dostávame hladiny hamiltoniánu (4.6) v tvare

$$\frac{x_2^2}{2} + \omega^2 \frac{x_1^2}{2} = \frac{c^2}{2}.$$

Pokiaľ sa vrátíme z pôvodným funkciám dostaneme

$$\dot{x}^2 + \omega x^2 = c^2.$$

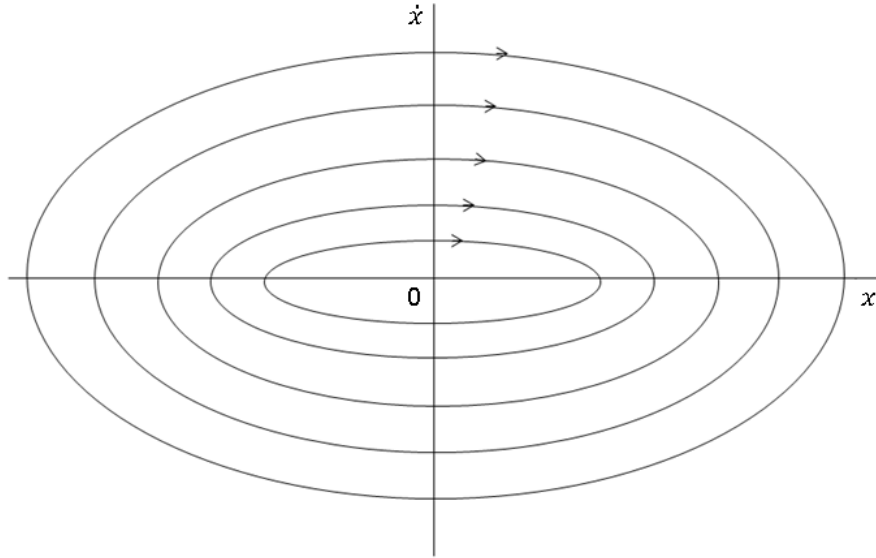
Trajektórie rovnice v (4.3) tvoria zväzok elíps a preto fázový portrét rovnice v (4.3) má tvar ako na obrázku 4.2. Pohyb po ľubovoľnej trajektórii bude vždy periodický, teda riešenie sa bude pohybovať vždy len po jednej a tej istej trajektórii, pretože v tomto prípade neuvažujeme impulznú podmienku, ktorá by zaručovala skoky na iné trajektórie. Všetky trajektórie systému (4.4) sú cykly. Sú orbitálne stabilné, ale nie sú asymptoticky orbitálne stabilné.

Rotácia na trajektóriách prebieha po smere hodinových ručičiek, pretože v matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

systému (4.3) je prvok  $a_{12} = 1 > 0$ .

- Teraz uvažujme priamku  $x = x_0$ , na ktorá bude označovať oblasť, na ktorej budú nastávať impulzné efekty. Pozrime sa teda na pohyb po trajektóriách



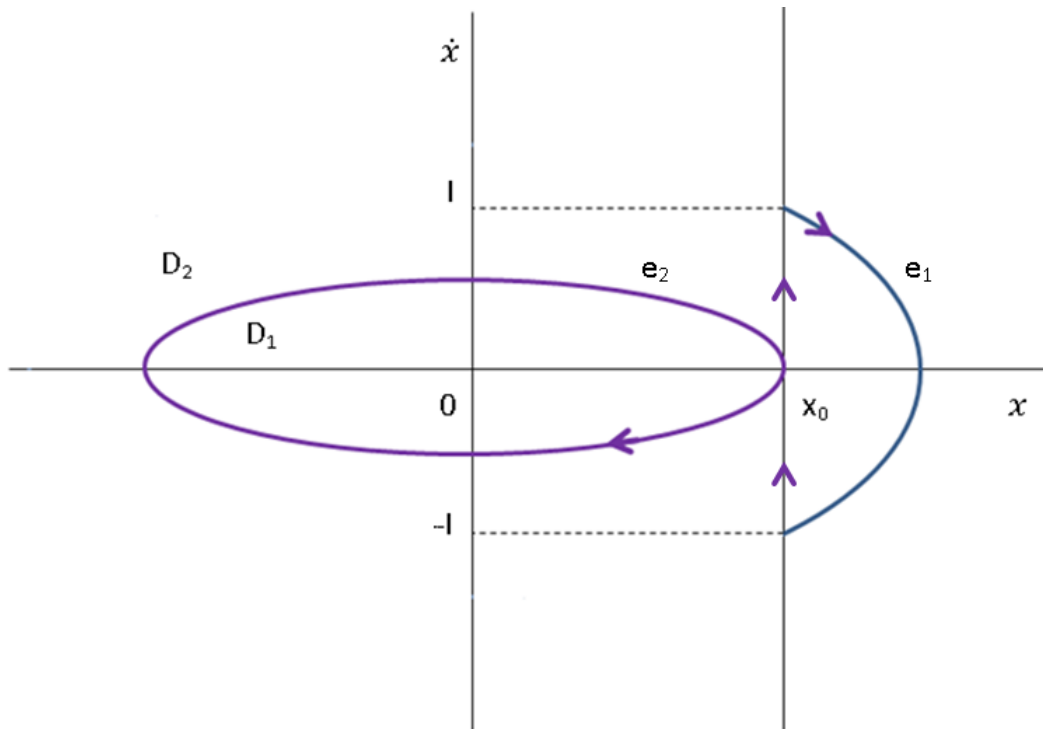
Obr. 4.2: Fázový portrét rovnice z (4.3) bez impulzu

impulzného systému (4.3).

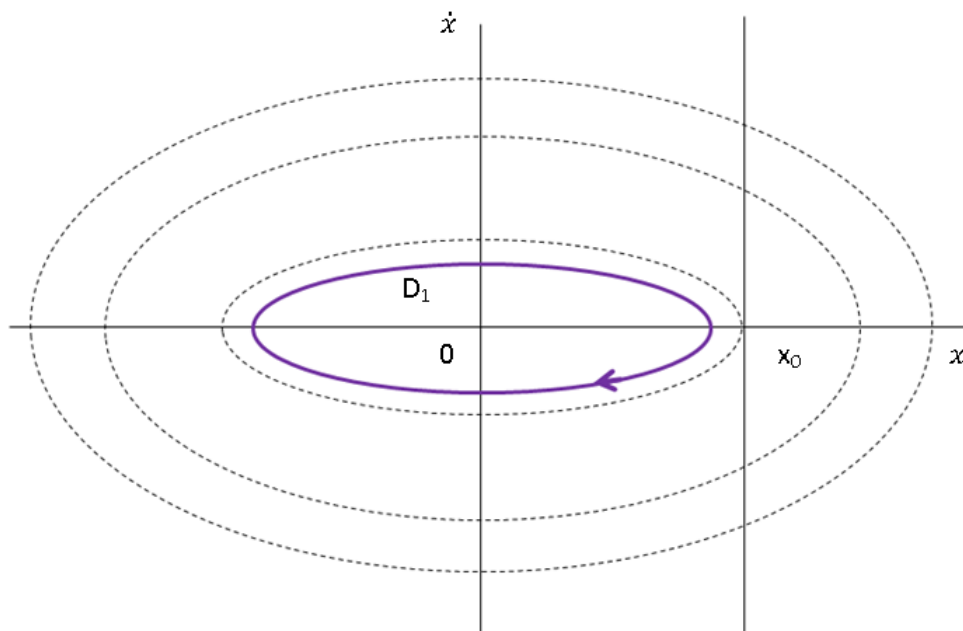
Predpokladajme že riešenie bude štartovať z bodu  $(x_0, I)$ . Potom sa pohyb vykoná po trajektórii prechádzajúcej takýmto bodom, ktorá pozostáva z elipsy  $e_1 : \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 x_0^2$ , ktorá leží v polrovine  $x \leq x_0$ , a z oblúku elipsy  $e_2 : \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = I^2 + \omega^2 x_0^2$  ležiaceho v polrovine  $x > x_0$ . Nakoľko štartujeme v bode  $(x_0, I)$  a pohybujeme sa po elipse  $e_2$ , impulzný efekt nastane až v bode  $(x_0, -I)$ , ktorý sa prejaví skokom z  $e_2$  na  $e_1$ . Riešenie pokračuje ďalej po  $e_1$  až sa vráti do bodu  $(x_0, 0)$ , kde skočí do bodu  $(x_0, I)$  na  $e_2$  a opäť pokračuje po  $e_2$ , vid' obrázok 4.3.

Trajektórie, ktoré prechádzajú cez oblasť  $D_1 : \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 < \omega^2 x_0^2$ , sú uzavreté krivky a pohyb, ktorý tieto krivky popisujú, nieje predmetom impulzného efektu, vid' obrázok 4.4.

Trajektória prechádzajúca cez bod  $(x_0, \frac{I}{2})$  pozostáva z oblúku elipsy  $e_3 : \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \frac{I^2}{4} + \omega^2 x_0^2$ , ktorá leží v polrovine  $x > x_0$ , vid' obrázok 4.5. Riešenie bude štartovať z bodu  $(x_0, \frac{I}{2})$  a pohyb sa vykoná po trajektórii prechádzajúcej takýmto bodom, ktorá pozostáva z elipsy  $e_3$ , impulzný efekt nastane až v bode  $(x_0, -\frac{I}{2})$ , ktorý sa prejaví skokom o  $I$ . To znamená,

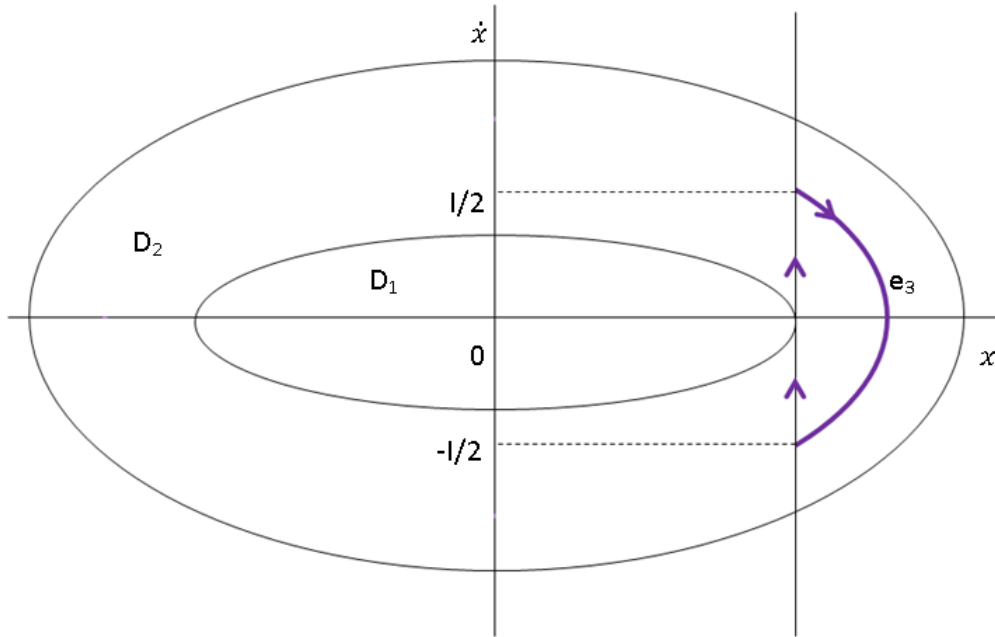


Obr. 4.3: Trajektória riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúca v bode  $(x_0, I)$



Obr. 4.4: Trajektória riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúca vo vnútri oblasti  $D_1$

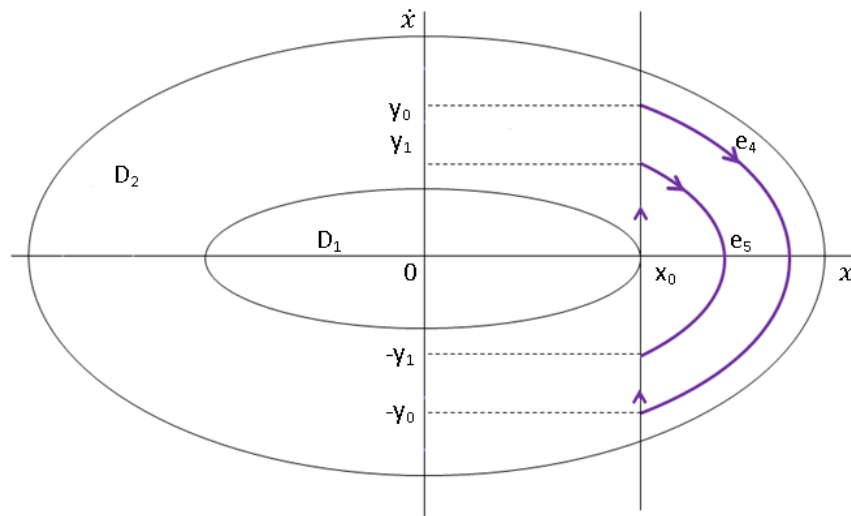
že riešenie sa dostáva do pôvodného štartovacie bodu a pokračuje ďalej. Vidíme, že v takomto prípade nastáva krátky periodický pohyb s menšou periódou ako v predchádzajúcom prípade.



Obr. 4.5: Trajektórie riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúce v bode  $(x_0, \frac{I}{2})$

Trajektória, ktorá začína v oblasti  $D_2 : I^2 > \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 > \omega^2 x_0^2$ , a je rôzna od  $e_3$ , sa skladá z oblúkov dvoch elíps ležiacich v polrovine  $x > x_0$ , teda oblúku elipsy  $e_4 : \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = (y_0 - I)^2 + \omega^2 x_0^2$  a oblúku elipsy  $e_5 : x^2 + \omega^2 x^2 = y_0^2 + \omega^2 x_0^2$ , vid' obrázok 4.5. Tento krát zvolíme za štartovací bod  $(x_0, y_0)$ . Riešenie sa začne pohybovať po elipse  $e_4$  a impulzný efekt nastane v bode  $(x_0, -y_0)$  čo spôsobí skok na elipsu  $e_5$  do bodu  $(x_0, y_1)$ . Pohyb následne pokračuje po tejto elipse až do bodu  $(x_0, -y_1)$ , v ktorom opäť nastáva impulzný efekt a riešenie sa vracia do pôvodného štartovacieho bodu.

Trajektória, ktorá začína v bode  $(x_0, y_0) \in D_3 : I^2 < \dot{x}^2 + \omega^2 x^2$  sa skladá z oblúku elipsy  $e_6 : x^2 + \omega^2 x^2 = y_0^2 + \omega^2 x_0^2$ , ktorá leží v polrovine  $x > x_0$ , a oblúku elipsy  $e_7 : \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = (I - y_0)^2 + \omega^2 x_0^2$  v polrovine  $x < x_0$ . Štartovacím bodom bude  $(x_0, y_0)$ , ktorý ale leží v oblasti  $D_3$ . Riešenie sa

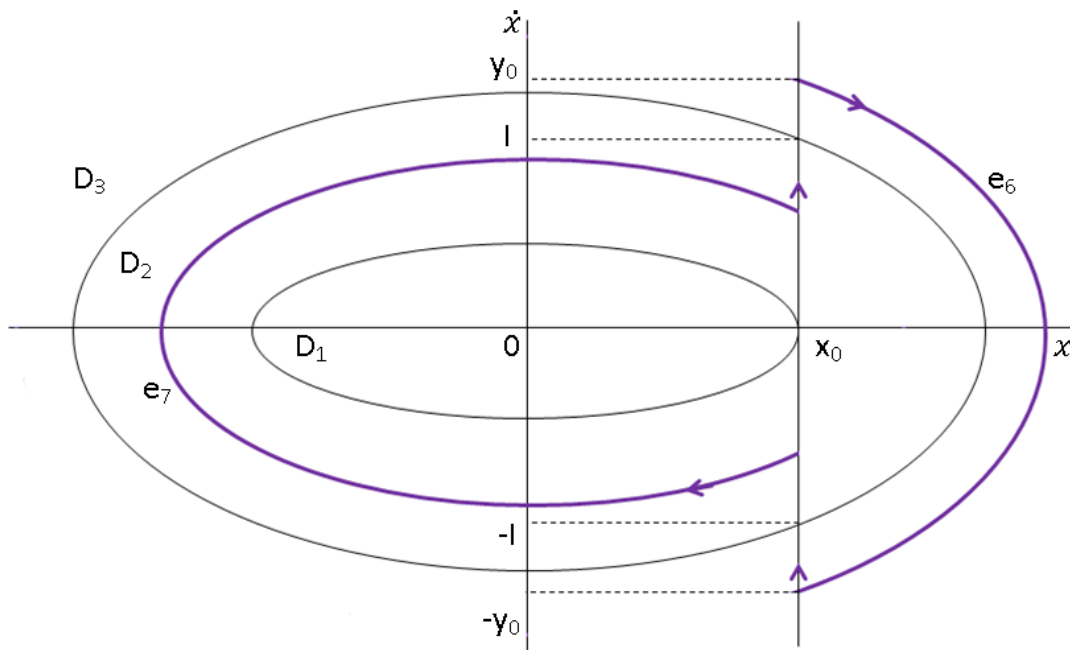


Obr. 4.6: Trajektórie riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúce v bode  $(x_0, y_0) \in D_2$  a  $(x_0, y_0) \neq (x_0, \frac{I}{2})$

začne pohybovať po elipse  $e_6$  a impulzný efekt nastane v bode  $(x_0, -y_0)$  čo spôsobí skok na elipsu  $e_7$  do bodu  $(x_0, -y_1)$ . Takáto elipsa sa už nachádza v oblasti  $D_2$  a pohyb pokračuje po tejto elipse až do bodu  $(x_0, y_1) \in D_2$ , v ktorom opäť nastáva impulzný efekt a riešenie sa vracia do pôvodného štartovacieho bodu.

Všetky pohyby v tomto systéme sú periodické ale s nie rovnakou periódou. Je teda evidentné, že pri rôznych štartovacích bodoch dosahujeme rôznu periodicitu. Všetky trajektórie impulzného systému (4.3) sú nespojité cykly. Sú orbitálne stabilné, ale nie sú orbitálne asymptoticky stabilné.





Obr. 4.7: Trajektórie riešení impulznej rovnice v (4.3), štartujúce v bode  $(x_0, y_0) \in D_3$

### 4.1.2 Príklad 2

Použitím metód z kapitoly 2 je možné skúmať pohyby tlmeného oscilátora s impulznou silou pôsobiacou v momente, keď fázový bod  $(x, \dot{x})$  prechádza priamkou  $x = 0$  s nezápornou rýchlosťou. Ak predpokladáme, že v dôsledku impulzného efektu bude rýchlosť zväčšená o veličinu  $I_0(\dot{x})$ , ktorá závisí na rýchlosti bodu v čase impulzného efektu, potom rovnice pre pohyb oscilátora odvodíme zo systému

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0, & x \neq 0, \\ \Delta\dot{x}|_{x=0} = \begin{cases} I_0(\dot{x}), & \text{pre } \dot{x} \geq 0, \\ 0, & \text{pre } \dot{x} < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.7)$$

Predpokladáme, že  $0 \leq \lambda < \omega$ . Za pomoci substitúcie  $y = \dot{x}$ , čím dostávame nový systém

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2\lambda y - \omega^2x, & x \neq 0, \\ \Delta y|_{x=0} = I(y), \end{cases} \quad (4.8)$$

kde

$$I(y) = \begin{cases} I_0(y), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

- Najskôr sa pozrime ako bude vypadáť fázový portrét za prípadu, že uvažujeme rovnicu zo systému (4.7) bez impulznej podmienky. Je to diferenciálna rovnica druhého rádu, ktorú za pomoci substitúcie  $y = \dot{x}$  prevedieme na systém dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2\lambda y - \omega^2 x. \end{cases} \quad (4.9)$$

Vidíme, že sa jedná o planárny lineárny dynamický systém s konštantou maticou, ktorá v tomto prípade je v tvare

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

K matici  $\mathbf{A}$  nájdeme jej vlastné čísla z charakteristickej rovnice

$$\det(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) = 0 \quad \text{tj.} \quad \begin{vmatrix} -a & 1 \\ -\omega^2 & -2\lambda - a \end{vmatrix} = 0.$$

Odtiaľ dostávame kvadratickú rovnicu pre neznámu  $a$

$$a^2 + 2\lambda a + \omega^2 = 0. \quad (4.10)$$

Pre stopu a determinant matice  $\mathbf{A}$  bude platiť

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} = -2\lambda, \quad \det\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \omega^2.$$

Potom kvadratická rovnica je v tvare (4.10) a vlastné čísla  $a_1$  a  $a_2$  určíme zo vzorca

$$a_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}\mathbf{A} \pm \sqrt{(\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A}}}{2}$$

čím po dosadení a úprave dostávame že,

$$a_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

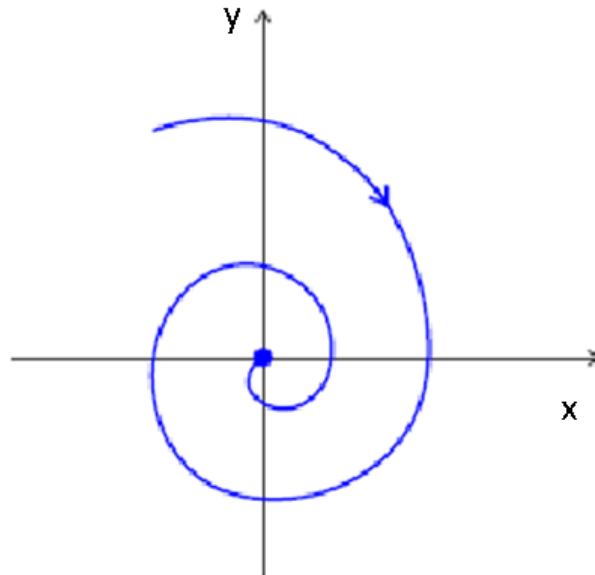
a položíme  $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \nu$ . Jordanova matica príslušná k matici  $\mathbf{A}$  má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\lambda & \nu \\ -\nu & -\lambda \end{pmatrix}$$

Fázový portrét kanonického systému  $\dot{x} = \mathbf{J}\mathbf{x}$ , určíme podľa kapitoly 2. pre prípad  $\alpha = -\lambda < 0$  a  $\beta = -\nu < 0$ . Fázový portrét je zobrazený na obrázku 4.8 a má tvar logaritmickéj špirály. Preto taktiež trajektórie pôvodného systému (4.9) majú tvar špirál, na ktorých pohyb pre  $t \rightarrow \infty$  smeruje k počiatku. Rotácia na špirálach je po smere hodinových ručičiek, pretože diagonálny prvok  $a_{12} = 1$  matice  $A$  je kladný.

- Uvažujme teda už impulzný systém (4.8). Predpokladajme, že pre  $y \geq 0$ , je  $I_0(y) \geq 0$ . To znamená, že impulzným efektom neklesá rýchlosť v bode  $(x(t), y(t))$  pohybujúceho sa po špirále.

Trajektórie pohybov systému (4.8) idú buď do nekonečna alebo k počiatku, alebo tiahnu ku nespojitému limitnému cyklu, ak taký existuje.



Obr. 4.8: Fázový portrét systému (4.7)

Najskôr určíme trajektórie systému (4.9) v kartézskych súradniciach, t.j.

integrálne krivky rovnice

$$ydy + (2\lambda y + \omega^2 x)dx = 0 \quad (4.11)$$

bez impulznej podmienky. Všeobecné riešenie rovnice v (4.7) bez impulzov, je v tvare

$$x(t) = e^{-\lambda t}(C_1 \cos(\nu t + \varphi) + C_2 \sin(\nu t + \varphi)).$$

Takéto riešenie, za pomoci nových integračných konštánt  $C_1 = A \sin \varphi$  a  $C_2 = A \cos \varphi$ , prevedieme na tvar

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\nu t + \varphi), \quad (4.12)$$

kde  $\nu = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ ,  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  a  $\frac{C_1}{C_2} = \tan \varphi$ . Podľa substitúcie  $\dot{x} = y$  dostávame riešenie systému (4.9)

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\nu t + \varphi),$$

$$y(t) = Ae^{-\lambda t}(-\lambda \sin(\nu t + \varphi) + \nu \cos(\nu t + \varphi)).$$

Tieto dve rovnice predstavujú parametrické rovnice s parametrom  $t$ , ktorý je potrebné vyjadriť. Podielom týchto rovníc teda dostávame

$$\frac{y}{x} = -\lambda + \nu \frac{\cos(\nu t + \varphi)}{\sin(\nu t + \varphi)}. \quad (4.13)$$

Uvažujeme riešenie, ktoré štartuje v bode  $(0, y_0)$ . Potom  $x(0) = \sin \varphi = 0$ , teda  $\varphi = 0$ . Ďalej  $y(0) = \dot{x}(0) = A\nu = y_0$ . Vypočítame  $t$  z rovnice (4.13), ktorá ma po úprave tvar

$$\frac{y + \lambda x}{x\nu} = \cot(\nu t),$$

teda

$$\frac{x\nu}{y + \lambda x} = \tan(\nu t)$$

a odtiaľ

$$t = \frac{\arctan\left(\frac{\nu x}{y + \lambda x} + k\pi\right)}{\nu}, \quad k \in Z.$$

Po dosadení do riešenia systému (4.9) dostávame

$$x(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{\nu} \arctan\left(\frac{\nu x}{y+\lambda x}\right)} \sin\left(\arctan\left(\frac{\nu x}{y+\lambda x}\right)\right). \quad (4.14)$$

Z matematiky vieme, že platí nasledujúci vzťah

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

ktorý aplikujeme na riešenie (4.14), čím dostávame

$$x = Ae^{-\frac{\lambda}{\nu} \arctan\left(\frac{\nu x}{y+\lambda x}\right)} \frac{\frac{\nu x}{y+\lambda x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\nu x}{y+\lambda x}\right)^2}}.$$

To po niekoľkých ekvivalentných úpravách dáva

$$(y+\lambda x)^2 \left[1 + \left(\frac{\nu x}{y+\lambda x}\right)^2\right] = A^2 \nu^2 e^{-\frac{2\lambda}{\nu} \arctan\left(\frac{\nu x}{y+\lambda x}\right)}.$$

Zbavením sa mocnín a použitím už známeho vzťahu  $\nu^2 = \omega^2 - \lambda^2$  sa dopracujeme ku konečnému tvaru riešenia systému (4.9)

$$y^2 + 2\lambda xy + \omega^2 x^2 = A^2 \nu^2 e^{-\frac{2\lambda}{\nu} \arctan\left(\frac{\nu x}{y+\lambda x} + k\pi\right)}. \quad (4.15)$$

Vieme, že  $y_0^2 = A^2 \nu^2$ . Preto finálne riešenie je v tvare

$$y^2 + 2\lambda xy + \omega^2 x^2 = y_0^2 e^{-\frac{2\lambda}{\nu} \arctan\left(\frac{\nu x}{y+\lambda x} + k\pi\right)}. \quad (4.16)$$

Y-ové súradnice bodov, v ktorých špirála (4.16) pretne priamku  $x = 0$ , dostávame z (4.16) v tvare

$$y_k^2 = y_0^2 e^{-\frac{2\lambda}{\nu} k\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Teda y-ové súradnice bodov, v ktorých špirála (4.16) pretne polpriamku  $x = 0, y \geq 0$  sú

$$y_k = y_0 e^{-\frac{2\lambda}{\nu} k\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Označme  $\frac{\lambda}{\nu}2\pi = \bar{\Delta}$ .

Pre  $k = 1$  je

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 e^{-\frac{\lambda}{\nu}2\pi} = y_0 e^{-\bar{\Delta}}, \\ y_1^+ &= y_1 + I_0(y_1) = y_0 e^{-\bar{\Delta}} + I_0(y_0 e^{-\bar{\Delta}}). \end{aligned}$$

Pozrime sa na pohyb, ktorý začína v bode  $(0, y_0)$ , po vykonaní jednej otáčky na špirále, sa fázový bod dostáva na priamku  $x = 0, y \geq 0$  s y-vou súradnicou  $y_1$  a potom skočí do bodu tejto priamky s y-vou súradnicou  $y_1^+$ .

Podobne pre  $k = 2$  je

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1^+ e^{-\bar{\Delta}} = (y_1 + I_0(y_1))e^{-\bar{\Delta}}, \\ y_2^+ &= y_2 + I_0(y_2) = y_1^+ e^{-\bar{\Delta}} + I_0(y_1^+ e^{-\bar{\Delta}}). \end{aligned}$$

Po vykonaní ďalšej otáčky na špirále, fázový bod sa dostane na polpriamku  $x = 0, y \geq 0$  s y-vou súradnicou  $y_2$ , a po tomto urobí skok do bodu tejto polpriamky s y-vou súradnicou  $y_2^+$  a tak ďalej.

Označme  $h$  ako zobrazenie polpriamky  $y \geq 0$  dané ako

$$h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad h(y) = ye^{-\bar{\Delta}} + I_0(ye^{-\bar{\Delta}}). \quad (4.17)$$

Ak rozšírime definíciu 2.4.9 na impulzné dynamické systémy vidíme, že  $h$  je Poincarého zobrazenie a pevný bod zobrazenia  $h$  určuje štartovací bod periodickej trajektórie. Tvar funkcie  $h$  z (4.17) ide odvodiť nasledovne. Budeme vychádzať z postupnosti y-vých súradníc

$$\begin{aligned} y_1 = y_0 e^{-\bar{\Delta}} &\Rightarrow y_1^+ = y_1 + I_0(y_1) = y_0 e^{-\bar{\Delta}} + I_0(y_0 e^{-\bar{\Delta}}) = h(y_0), \\ y_2 = y_1^+ e^{-\bar{\Delta}} &\Rightarrow y_2^+ = y_2 + I_0(y_2) = y_1^+ e^{-\bar{\Delta}} + I_0(y_1^+ e^{-\bar{\Delta}}) = h(y_1^+), \\ &\vdots \\ y_{n+1} = y_n e^{-\bar{\Delta}} &\Rightarrow y_{n+1}^+ = h(y_n^+), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pevné body zobrazenia  $h$ , t.j. body  $y_0 \geq 0$  také, že  $h(y_0) = y_0$ , určujú nespojitý cyklus systému (4.8), t.j. periodický pohyb, pozdĺž ktorého nastane

práve jeden impulz v perióde.

Položme

$$\begin{cases} h^1(y) &= h(y), \\ h^2(y) &= h(h(y)), \\ &\vdots \\ h^k(y) &= h(h^{k-1}(y)), \quad k \in N. \end{cases}$$

Ďalšie cykly dostávame ako pevné body zobrazenia  $h^k$ . U takého cyklu nastáva práve  $k$  impulzov v perióde. Orbitálna stabilita nespojitých cyklov systému (4.8) je určená stabilitou pevných bodov zobrazenia  $h^k(y)$ .

O stabilite pevného bodu zobrazenia hovorí veta 2.4.4 z kapitoly 2. Napríklad, nech  $k = 1$  a rovnica

$$ye^{-\bar{\Delta}} + I_0(ye^{-\bar{\Delta}}) = y \quad (4.18)$$

má riešenie  $y = y^*$ . Potom cyklus systému (4.8) bude orbitálne asymptoticky stabilný, pokiaľ bude pevný bod  $y^*$  zobrazenia  $h$  asymptoticky stabilný. To podľa vety 2.4.4 nastane ak  $|\frac{dh}{dy}(y^*)| < 1$ , t.j.

$$\left| 1 + \frac{dI_0}{dy}(y^*e^{-\bar{\Delta}}) \right| e^{-\bar{\Delta}} < 1. \quad (4.19)$$

Podobne cyklus systému (4.8) bude orbitálne nestabilný, pokiaľ bude  $y^*$  nestabilný. To podľa vety 2.4.4 nastane ak  $|\frac{dh}{dy}(y^*)| > 1$ , t.j.

$$\left| 1 + \frac{dI_0}{dy}(y^*e^{-\bar{\Delta}}) \right| e^{-\bar{\Delta}} > 1. \quad (4.20)$$

Špeciálne, nech v systéme (4.8),  $I_0(y) = I_0 > 0$ . Potom má rovnica (4.18) tvar

$$ye^{-\bar{\Delta}} + I_0 = y, \quad (4.21)$$

a má riešenie

$$y^* = \frac{I_0}{1 - e^{-\bar{\Delta}}}.$$

Riešenie  $y^*$  určuje počiatočný bod  $(0, y^*)$  nespojité periodické trajektórie, teda nespojitého cyklu. Tento nespojitý cyklus obsahuje časť zo špirály

$$y^2 + 2\lambda xy + \omega^2 x^2 = y^* e^{-\frac{2\lambda}{\nu} \arctan(\frac{\nu x}{y+\lambda x} + k\pi)}. \quad (4.22)$$

Ukážeme, že v posudzovanom prípade  $I_0(y) = I_0 > 0$  systém (4.8) nemá ostatné limitné cykly. Platí

$$k = 1 \rightarrow h(y) = ye^{-\bar{\Delta}} + I_0,$$

$$k = 2 \rightarrow h^2(y) = h(h(y)) = h(y)e^{-\bar{\Delta}} + I_0 = ye^{-2\bar{\Delta}} + I_0(e^{-\bar{\Delta}} + 1),$$

$$k = 3 \rightarrow h^3(y) = h(h^2(y)) = h^2(y)e^{-\bar{\Delta}} + I_0 = ye^{-3\bar{\Delta}} + I_0(e^{-2\bar{\Delta}} - e^{-\bar{\Delta}} + 1),$$

⋮

Rovnica  $h^k(y) = y$  má teda tvar

$$h^k(y) := ye^{-k\bar{\Delta}} + I_0 \sum_{m=0}^{k-1} e^{-m\bar{\Delta}} = y$$

a jej riešením dostávame

$$y(1 - e^{-k\bar{\Delta}}) = I_0 \sum_{m=0}^{k-1} e^{-m\bar{\Delta}},$$

$$y = I_0 \frac{\sum_{m=0}^{k-1} e^{-m\bar{\Delta}}}{1 - e^{-k\bar{\Delta}}}.$$

Pretože platí nasledovný vzťah

$$\frac{1 - e^{-k\bar{\Delta}}}{1 - e^{-\bar{\Delta}}} = \sum_{m=0}^{k-1} e^{-m\bar{\Delta}}, \quad (4.23)$$

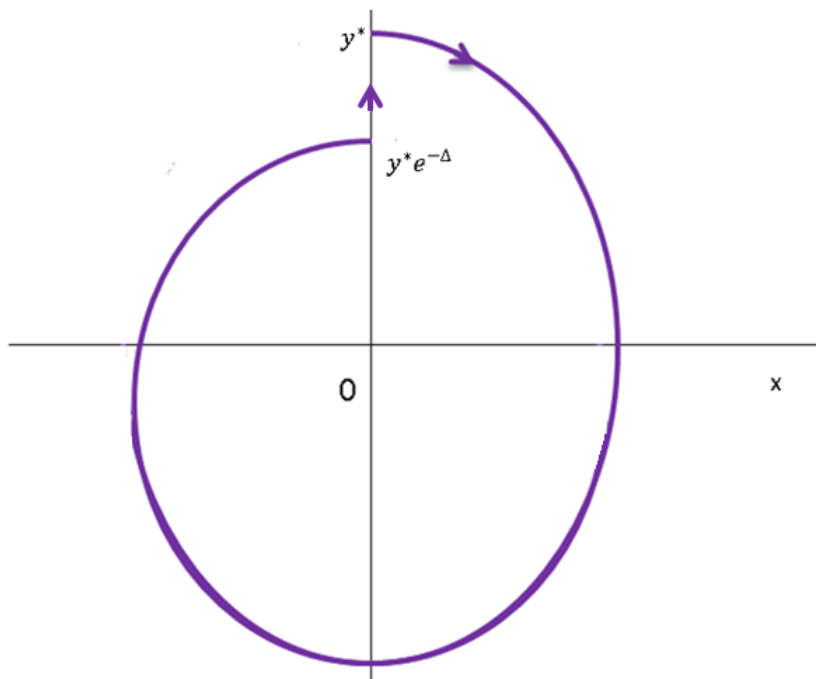
má rovnica  $h^k(y) = y$  jediné riešenie

$$y^* = \frac{I_0}{1 - e^{-\bar{\Delta}}},$$

ktoré je zhodné s riešením rovnice (4.21), pre  $k = 1, 2, \dots$

Pretože je splnená nerovnosť (4.19), je trajektória štartujúca v bode  $(0, y^*)$  nespojitý orbitálne asymptotický stabilný limitný cyklus.





Obr. 4.9: Nespojité orbitálne asymptoticky stabilný limitný cyklus systému (4.8), kde  $\Delta y^* = I_0$

### 4.1.3 Príklad 3

V tomto príklade budeme vyšetrovať, či pre tlmený oscilátor existujú nespojité cykly v prípade, keď impulzný efekt zväčšuje kinetickú energiu o konštantnú hodnotu. Takýto oscilátor je opísaný systémom

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0, & x \neq 0, \\ \Delta\dot{x}|_{x=0} = \begin{cases} I_0(\dot{x}) & \dot{x} > 0, \\ 0 & \dot{x} \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.24)$$

Prepíšme impulznú podmienku do tvaru (4.2)

$$\Delta\dot{x}(\Delta\dot{x} + 2\dot{x}) = I_0^2,$$

a po substitúcii  $y = \dot{x}$  máme  $(\Delta y)^2 + 2y\Delta y - I_0^2 = 0$ . Odtiaľ  $\Delta y = -y \pm \sqrt{y^2 + I_0^2}$ . Pretože kinetickú energiu zväčšujeme, berieme  $\Delta y = -y + \sqrt{y^2 + I_0^2}$  a píšeme

(4.24) ako

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, & \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x - 2\lambda y, & x \neq 0, \\ \Delta y|_{x=0} = \begin{cases} -y + \sqrt{y^2 + I_0^2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.25)$$

Dostávame teda systém podobný systému (4.8) s

$$I_0(y) = -y + \sqrt{y^2 + I_0^2}.$$

Z rovnice (4.18) dostaneme dosadením za  $I_0(ye^{-\bar{\Delta}}) = -ye^{-\bar{\Delta}} + \sqrt{y^2 e^{-2\bar{\Delta}} + I_0^2}$

$$ye^{-\bar{\Delta}} - ye^{-\bar{\Delta}} + \sqrt{y^2 e^{-2\bar{\Delta}} + I_0^2} = y.$$

Dostávame teda rovnicu zobrazenia  $h(y)$  v tvare

$$h(y) := \sqrt{y^2 e^{-2\bar{\Delta}} + I_0^2} = y. \quad (4.26)$$

Po ekvivalentnej úprave dostaneme

$$y^2 e^{-2\bar{\Delta}} + I_0^2 = y^2,$$

a následným riešením tejto rovnice sa dopracujeme k jedinému riešeniu

$$y^* = \frac{I_0}{\sqrt{1 - e^{-2\bar{\Delta}}}}.$$

Odtiaľto, systém (4.24) má limitný cyklus, ktorý obsahuje časť špirály (4.22).

Derivácia funkcie  $I_0(y)$

$$\frac{d}{dy} I_0(y) = -1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + I_0^2}},$$

v bode  $y^*$  odpovedá nerovnosti

$$-1 < \frac{dI_0(y^*)}{dy} < 0,$$

a tak nerovnosť (4.19) platí. Teda limitný cyklus je orbitálne asymptoticky stabilný.

Teraz odvodíme tvar zobrazenia  $h^k$  z (4.27). Platí

$$\begin{aligned}
 k = 1 &\rightarrow h(y) = \sqrt{y^2 e^{-2\bar{\Delta}} + I_0^2}, \\
 k = 2 &\rightarrow h^2(y) = h(h(y)) = \sqrt{(h(y))^2 e^{-2\bar{\Delta}} + I_0^2} = \\
 &= \sqrt{y^2 e^{-4\bar{\Delta}} + I_0^2 (e^{-2\bar{\Delta}} + 1)}, \\
 k = 3 &\rightarrow h^3(y) = h(h^2(y)) = \sqrt{(h^2(y))^2 e^{-4\bar{\Delta}} + I_0^2 (e^{-2\bar{\Delta}} + 1)} = \\
 &= \sqrt{y^2 e^{-6\bar{\Delta}} + I_0^2 (e^{-4\bar{\Delta}} + e^{-2\bar{\Delta}} + 1)}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

a teda rovnica pre pevný bod zobrazenia  $h^k$  má tvar

$$h^k(y) := \sqrt{y^2 e^{-2k\bar{\Delta}} + I_0^2 \sum_{m=0}^{k-1} e^{-2m\bar{\Delta}}} = y,$$

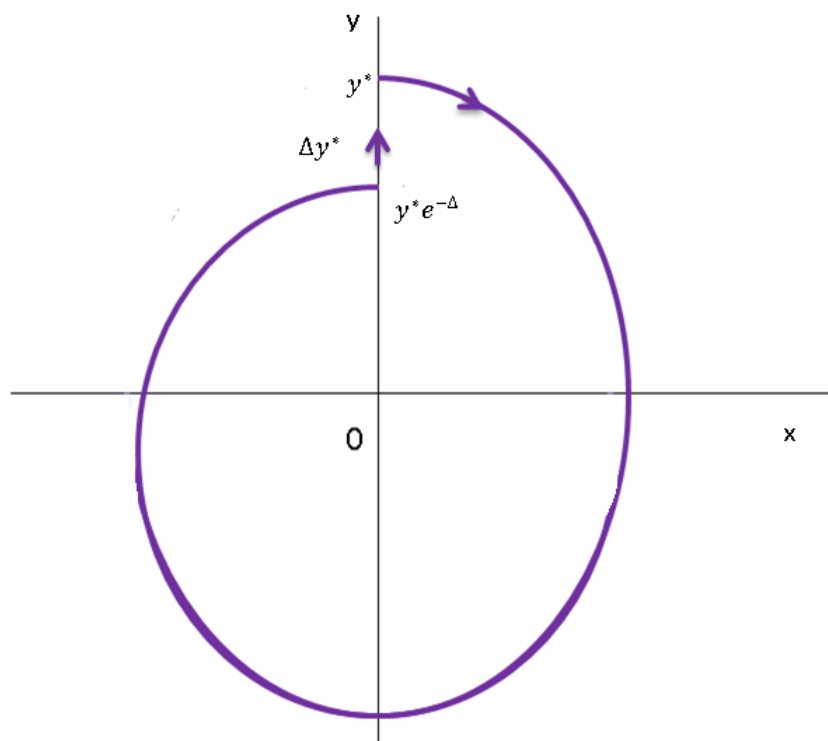
pre  $k = 1, 2, \dots$ . Systém (4.24) nemá iný limitný cyklus, pretože rovnica  $h^k(y) = y$  a jej riešenie dostávame v tvare

$$y^2 = I_0^2 \frac{\sum_{m=0}^{k-1} e^{-2m\bar{\Delta}}}{1 - e^{-2k\bar{\Delta}}}.$$

Pretože aj v tomto prípade môžeme uplatniť vzťah (4.23), dostávame jediné riešenie

$$y^* = \frac{I_0}{\sqrt{1 - e^{-2\bar{\Delta}}}},$$

pre  $k = 1, 2, \dots$ . Teda impulzný systém (4.25) má jediný nespojitý cyklus, ktorý je orbitálne asymptoticky stabilný.



Obr. 4.10: Nespojité orbitálne asymptoticky stabilný limitný cyklus systému (4.25),  $\Delta y^* = -y^*e^{-\bar{\Delta}} + \sqrt{(y^*)^2e^{-2\bar{\Delta}} + I_0^2}$

#### 4.1.4 Príklad 4

Predpokladajme, že v systéme (4.24) sa impulz vyskytuje zakaždým, keď fázový bod pretne priamku  $x = 0$  a ako výsledok impulzu, kinetická energia vzrastie o rovnakú hodnotu  $I_0^2$ . Lineárny oscilátor s takýmito impulznými efektmi môže byť popísaný rovnicou

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0, & x \neq 0, \\ \Delta\dot{x}|_{x=0} = I_0(\dot{x}), \end{cases} \quad (4.27)$$

kde  $I_0(\dot{x})$  má tvar

$$I_0(\dot{x}) = \begin{cases} -\dot{x} + \sqrt{\dot{x}^2 + I_0^2}, & \dot{x} \geq 0, \\ -\dot{x} - \sqrt{\dot{x}^2 + I_0^2}, & \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Rovnako vieme impulzný systém (4.27) previesť na systém

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2x - 2\lambda y, & x \neq 0, \\ \Delta y|_{x=0} = \begin{cases} -y + \sqrt{y^2 + I_0^2}, & y \geq 0, \\ -y - \sqrt{y^2 + I_0^2}, & y < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.28)$$

Aby nedošlo k opakovanému odôvodneniu ako v predchádzajúcom prípade, mali by sme skúmať systéme (4.28) použitím inej metódy, ktorá môže byť taktiež zaujímavá.

V systéme (4.28), zmeníme premenné  $(x, y)$  na  $(a, \varphi)$

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi, \\ y = a(-\lambda \sin \varphi + \nu \cos \varphi), \\ \nu^2 = \omega^2 - \lambda^2. \end{cases} \quad (4.29)$$

Ak  $\sin \varphi \neq 0$ , tak

$$\begin{aligned} \sin \varphi \frac{da}{dt} + a \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= a(-\lambda \sin \varphi + \nu \cos \varphi), \\ (-\lambda \sin \varphi + \nu \cos \varphi) \frac{da}{dt} - a(\lambda \cos \varphi + \nu \sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt} &= \\ &= -2\lambda a(-\lambda \sin \varphi + \nu \cos \varphi) - \omega^2 a \sin \varphi. \end{aligned}$$

Prvú rovnicu tohto systému vynásobíme výrazom  $(\lambda \cos \varphi + \nu \sin \varphi)$  a druhú rovnicu zase výrazom  $\cos \varphi$ . Po sčítaní takto upravených rovníc dostávame s ohľadom na  $\frac{da}{dt}$

$$\frac{da}{dt} = -\lambda a.$$

Naviac, ak opäť vynásobíme prvú rovnicu tohto systému výrazom  $(-\lambda \sin \varphi + \nu \cos \varphi)$  a druhú rovnicu výrazom  $-\sin \varphi$ , potom po sčítaní týchto upravených rovníc s ohľadom na  $\frac{d\varphi}{dt}$  získame

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu,$$

kde  $\varphi \neq k\pi$ . Pretože impulzný skok je realizovaný len smerom hore alebo dolu na osi  $y$  a pre  $x = a \sin \varphi = 0$ , t.j. pre  $\varphi = k\pi$  pretína riešenie systému (4.28) osu  $y$ , teda musia byť vzhľadom k (4.29) dodržané nasledujúce rovnosti

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= (a + \Delta a) \sin(k\pi + \Delta\varphi) = 0, \\ \Delta y &= (a + \Delta a)\nu \cos(k\pi + \Delta\varphi) - \nu a(-1)^k = \Delta a\nu(-1)^k, \end{aligned}$$

kde  $y = a\nu(-1)^k$ . To znamená, že ak  $k$ -párne, tak potom  $y \geq 0$ , ak  $k$ -nepárne, tak potom  $y < 0$  a navyše

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{\Delta y}{\nu}(-1)^k = \begin{cases} (-y + \sqrt{y^2 + I_0^2}) \frac{(-1)^k}{\nu} \\ (-y - \sqrt{y^2 + I_0^2}) \frac{(-1)^k}{\nu} \end{cases} = \begin{cases} (-a\nu(-1)^k + \sqrt{(a\nu)^2 + I_0^2}) \frac{(-1)^k}{\nu} \\ (-a\nu(-1)^k - \sqrt{(a\nu)^2 + I_0^2}) \frac{(-1)^k}{\nu} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -a + \sqrt{a^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}} \\ -a + \sqrt{a^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtiaľ vidíme, že

$$\Delta a|_{\varphi=k\pi} = -a + \sqrt{a^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}}, \quad \Delta\varphi|_{\varphi=k\pi} = 0.$$

Pretože funkcia  $a$  odpovedá vzdialenosti bodu od počiatku, má funkcia  $a$  skok  $\Delta a > 0$ . Takže po zmene premenných (4.29), bude systém (4.28)

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\lambda a, & \frac{d\varphi}{dt} = \nu, & \varphi \neq k\pi, \\ \Delta a|_{\varphi=k\pi} = -a + \sqrt{a^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}}. \end{cases}$$

Periodické riešenia rovnice

$$\begin{cases} \frac{da}{d\varphi} = -\frac{\lambda}{\nu}a, & \varphi \neq k\pi, \\ \Delta a|_{\varphi=k\pi} = -a + \sqrt{a^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}}, \end{cases} \quad (4.30)$$

určujú nespojité cykly v systéme (4.28).

Pozrime sa na existenciu periodických riešení rovnice (4.30) s periódou  $2\pi$ . Túto rovnicu jednoducho vyriešime metódou separácie premenných pre obyčajné diferenciálne rovnice, ktorá je podrobnejšie spracovaná v [1, 2, 4], a takéto riešenie je v tvare

$$a(\varphi) = a_0 e^{-\frac{\lambda}{\nu}(\varphi - \varphi_0)}. \quad (4.31)$$

Označme  $\bar{\Delta} = \frac{\lambda}{\nu}\pi$ . Funkciu  $h(a_0)$  dostaneme tak, že budeme vychádzať z postupnosti vzdialenosti  $\{a_k\}$  od počiatku.

Zvoľme bod  $(0, y_0)$  na kladnej časti osy  $y$ . Tento bod má od počiatku vzdialenosť  $a_0 = \frac{y_0}{\nu}$ . Riešenie bude štartovať v tomto bode a okamžite urobí skok na ose  $y$  hore do bodu  $(0, y_0^+)$ . Vzdialenosť tohto bodu od počiatku bude podľa (4.30)

$$a_0^+ = \sqrt{a_0^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}}.$$

Pohyb pokračuje ďalej po danej trajektórii až do bodu  $(0, y_1)$ , ktorý má podľa (4.31) vzdialenosť

$$a_1 = a_0^+ e^{-\frac{\lambda}{\nu}\pi} = a_0^+ e^{-\bar{\Delta}} = e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{a_0^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}}.$$

V bode  $(0, y_1)$  opäť nastáva skok na ose  $y$  dole do bodu  $(0, y_1^+)$ . Tento bod má podľa (4.30) vzdialenosť od počiatku

$$a_1^+ = \sqrt{a_1^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}} = \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}\right) e^{-2\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2}}.$$

Riešenie následne ďalej pokračuje po danej trajektórii až do bodu  $(0, y_2)$  na kladnej časti osy  $y$ . Tento bod má podľa (4.31) vzdialenosť od počiatku

$$a_2 = a_1^+ e^{-\bar{\Delta}} = e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}\right) e^{-2\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2}},$$

Teda pre pohyb riešenia majúci periódu  $2\pi$ , ( $a_0 = a_2$ ), bude mať rovnica pre pevný bod funkcie  $h(a_0)$  nasledovný tvar

$$k = 1 \rightarrow h^2(a_0) := e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}\right) e^{-2\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2}} = a_0.$$

Táto rovnica má jediné riešenie

$$a_0^* = \frac{I_0 e^{-\bar{\Delta}}}{\nu \sqrt{1 - e^{-2\bar{\Delta}}}}. \quad (4.32)$$

To znamená, že ak zvolíme počiatočný bod  $(0, y_0)$  tak, že  $y_0 = a_0^* \nu$ , tak dostaneme nespojitý asymptoticky stabilný cyklus systému (4.17).

Teraz odvodíme tvar funkcie  $h^k$  pre  $k > 1$ .

$$\begin{aligned} k = 2 \rightarrow h^2(a_0) &= h(h(a_0)) = e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{(h(a_0))^2 e^{-4\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2} (1 + e^{-2\bar{\Delta}} + e^{-4\bar{\Delta}})} = \\ &= e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{I_0^2}{\nu^2}\right) e^{-6\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2} (1 + e^{-2\bar{\Delta}} + e^{-4\bar{\Delta}})} \\ &= e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{a_0^2 e^{-6\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2} (1 + e^{-2\bar{\Delta}} + e^{-4\bar{\Delta}} + e^{-6\bar{\Delta}})} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Odtiaľ vidíme, že rovnica pre pevný bod funkcie  $h^k$  bude v tvare

$$h^k(a_0) = e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{a_0^2 e^{-2(k+1)\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2} \sum_{j=0}^{k+1} e^{-2j\bar{\Delta}}} = a_0.$$

Jej riešenie dostávame v tvare

$$a_0^2 = \frac{\frac{I_0^2}{\nu^2} e^{-2\bar{\Delta}} \sum_{j=0}^{k+1} e^{-2j\bar{\Delta}}}{1 - e^{-2(k+2)\bar{\Delta}}},$$

pre  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Uplatníme vzťah (4.23), vďaka ktorému dostávame jediné riešenie  $a_0 = a_0^*$ , v tvare

$$a_0^* = \frac{I_0 e^{-\bar{\Delta}}}{\nu \sqrt{1 - e^{-2\bar{\Delta}}}}.$$



Preto rovnica (4.30) má jediné riešenie s periódou  $2\pi$

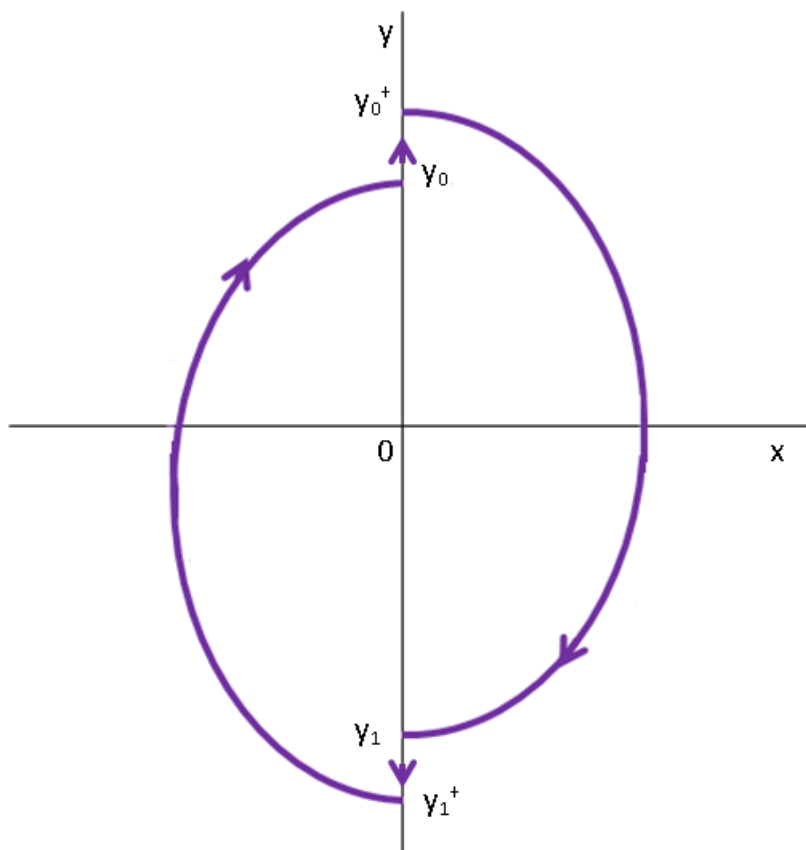
$$a(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{a_0^{*2} + \frac{I_0^2}{\nu^2}} e^{-\frac{\lambda}{\nu}\varphi}, & 0 < \varphi < \pi, \\ \sqrt{\left(a_0^{*2} + \frac{I_0^2}{\nu^2}\right) e^{-2\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2}} e^{-\frac{\lambda}{\nu}(\varphi-\pi)}, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (4.33)$$

Pretože, pre  $a_0 = a_0^*$ , derivácia funkcie  $h(a_0^*)$

$$\frac{dh(a_0^*)}{da} = \frac{a_0^* e^{-4\bar{\Delta}}}{e^{-\bar{\Delta}} \sqrt{\left(a_0^{*2} + \frac{I_0^2}{\nu^2}\right) e^{-2\bar{\Delta}} + \frac{I_0^2}{\nu^2}}} = \frac{a_0^* e^{-4\bar{\Delta}}}{a_0^*} = e^{-4\bar{\Delta}}$$

je z intervalu  $(0, 1)$ , podľa vety 2.4.4 je periodické riešenie (4.33) orbitálne asymptoticky stabilné.

Takže, rovnica (4.28) má jediný asymptoticky stabilný nespojitý limitný cyklus. Odpovedá  $2\pi$ -periodickému riešeniu impulznej rovnice (4.28). Preto taktiež iné periodické riešenia s periódou  $2k\pi$ , pre  $k > 1$ , rovnica (4.28) nemá. Vid' obrázok 4.11.



Obr. 4.11: Nespojité asymptoticky stabilný limitný cyklus systému (4.28)

# Záver

Použitie impulzné obyčajné diferenciálne rovnice poskytuje skvelý náhľad na správanie určitých systémov. Ukazujú totiž ako sa stabilita  $T$ -periodických riešení môže meniť v závislosti od rôznych faktorov. Ďalej sú impulzivne diferenciálne rovnice užitočné aj pre modelovanie určitých biologických procesov.

V tejto práci som rozoberal štyri prípady impulzných oscilátorov. V prvom prípade bol pohyb oscilátora popísaný rovnicou harmonického netlmeného kmitania. Po vyšetrení tohto prípadu som došiel k záveru, že pri rôznych štartovacích bodoch dostávame rôzne pohyby s rôznou periódou. Ďalej všetky trajektórie pohybov predstavujú nespojité cykly, ktoré sú orbitálne stabilné.

V ďalších prípadoch bol už pohyb oscilátora popísaný rovnicou harmonického tlmeného kmitania. Zmena nastala vo fázovom portréte daného systému. Zatiaľ čo v prvom prípade bol fázovým portrétom zväzok elíps, pri týchto oscilátoroch je fázový portrét v tvare logaritmickéj špirály. To nám umožnilo hľadať nespojité limitné cykly. V každom z týchto troch prípadov bola iná impulzná podmienka a teda aj pohyb po špirále fázového portréту bol iný. Došiel som ale k záveru, že vo všetkých troch prípadoch bolo možné nájsť nespojitý asymptoticky stabilný limitný cyklus, ktorý je jediný pre dané prípady. To znamená, že pri všetkých troch modeloch platí nasledujúce: ak nastavíme impulzný oscilátor do počiatočnej pozície určenej pevným bodom zobrazenia  $h$ , bude sa chovať periodicky. Ak ho nastavíme do inej počiatočnej pozície, bude jeho chovanie pre rastúce  $t$  konvergovať k periodickému chovaniu.

Predstavme si situáciu, kedy potrebujeme pre určité účely napočítať zaťaženosť vozovky v nejakom úseku. To je možné namodelovať aj pomocou diferenciálnych rovníc v ktorých by vystupovali impulzy. Teda v konkrétnom mieste vozovky umiestnime vysielateľ signálu, ktorý bude predstavovať oscilátor. Tento oscilátor

bude vysielat' harmonický periodický signál priečne cez celú vozovku. Máme teda model s diferenciálnou rovnicou. Impulzy v tomto prípade budú predstavovať autá, ktoré budú prechádzať cez takýto vysielaný signál. Z elektrotechniky je známe, že prechodom telesa cez vysielaný signál sa naruší amplitúda tohto signálu. Preto aj prechod automobilov bude predstavovať zmenu amplitúdy. Nastavíme hranicu poklesu amplitúdy na určitú kritickú hodnotu, ktorá bude signalizovať prechod auta. Z grafického priebehu takéhoto signálu sme potom schopní vyčítať počet automobilov, ktoré v danom úseku prešli cez skúmanú oblasť.

Je dobré poznamenať, že toto je čisto hypotetická modelová situácia, ktorou som chcel poukázať na to, ako by sa dali aplikovať v praxi diferenciálne rovnice s impulzmi. Pri reálnej aplikácii by sme museli modelovať amplitúdu v riešení rovnice harmonického kmitania. Taktiež by sme sa museli zamyslieť nad náhodou, ktorá by v tomto prípade hrala veľkú úlohu.

Na záver by som chcel zdôrazniť, že tvorba tejto diplomovej práce výrazne rozšírila moje poznatky z teórie diferenciálnych rovníc a dynamických systémov, na ktoré pôsobia impulzné efekty. Nielen, že som mohol za pomoci štúdia potrebnej literatúry preskúmať podrobnejšie túto problematiku, ale som rád, že pomocou takýchto rovníc či systémov som pochopil ich využitie v reálnych procesoch.

# Literatúra

- [1] Diblík, J., Růžičková, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. EDIS, Žilina, 2008.
- [2] Greguš, M., Švec, M., Šeda, V.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. SNTL, Praha, 1985.
- [3] Hale, J., Kocak, H.: *Dynamics and Bifurcations*. Springer, New York, 1991.
- [4] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno, 1995.
- [5] Lakshmikantham, V., Bainov, D.D., Simeonov, P.S.: *Theory of Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [6] Nearing, J.: *Mechanics*. University of Miami, Miami, 2013
- [7] Rachůnková, I., Fišer, J.: *Dynamické systémy 1*. Univerzita Palackého, Olomouc, 2014.
- [8] Samoilenko, A.M., Perestyuk, N.A.: *Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [9] Zill, D.G.: *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, Tenth edition*. Brooks/Cole, Boston, USA, 2013.