



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

## REDUKOVANÝ MODEL VÍROVÉHO PROUDĚNÍ

REDUCED ORDER MODEL OF SWIRLING FLOW

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. ONDŘEJ URBAN

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. PAVEL RUDOLF, Ph.D.

BRNO 2017



## Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav  
Student: **Bc. Ondřej Urban**  
Studijní program: Strojní inženýrství  
Studijní obor: Fluidní inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### Redukovaný model vírového proudění

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

S využitím metody vlastní ortogonální dekompozice lze provést redukci turbulentního zavířeného proudění se silnými koherentními strukturami do několika desítek vlastních tvarů. Výsledný redukovaný model je posléze základem pro cílené řízení proudění.

#### Cíle diplomové práce:

Cíle diplomové práce:

- řešerše z oblasti aplikace POD a tvorby redukovaného modelu proudění se silnými vírovými strukturami
- aplikace POD na Kármánovu vírovou stezku (laminární proudění), identifikace vlastních tvarů proudění
- tvorba redukovaného modelu proudění pro případ laminární Kármánovy stezky
- aplikace POD na Kármánovu vírovou stezku (turbulentní proudění), identifikace vlastních tvarů proudění
- tvorba redukovaného modelu proudění pro případ turbulentní Kármánovy stezky
- zhodnocení s výhledem tvorby redukovaného modelu proudění pro sací troubu Francisovy turbíny v podoptimálním zatížení

#### Seznam literatury:

NOACK, B.R., M. MORZYNSKI a G. TADMOR. Reduced-Order Modelling for Flow Control. Vienna: Springer, 2011.

BRUNTON, S.L. a B.R. NOACK. Closed-loop turbulence control: Progress and challenges. Applied Mechanics Reviews. 67(5), 1-60.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 7. 11. 2016



doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

V této práci je řešena tvorba a aplikace redukovaných modelů proudění založených na extrakci dominantních struktur ze systému metodou vlastní ortogonální dekompozice. Vývoj vypočítaných módů v čase popisuje systém obyčejných diferenciálních rovnic, který se získá pomocí Galerkinovy projekce těchto módů na Navier-Stokesovu rovnici. Tato metodika byla aplikována na dva testovací případy – Kármánovu vírovou stezku a vírový cop. V obou případech byla provedena CFD simulace jednoho referenčního bodu a s použitím získaných POD módů byly sestaveny příslušné redukované modely. Jejich výsledky byly zhodnoceny podle toho, do jaké míry se shodují s referenční simulací.

## **Klíčová slova**

vlastní ortogonální dekompozice, redukovaný model, vírový cop

## **Abstract**

This thesis deals with the formulation and application of reduced order models based on extraction of dominant structures from a system utilizing the method of proper orthogonal decomposition. Time evolution of computed modes is described by a system of ordinary differential equations, which is gained by means of Galerkin projection of these modes onto the Navier-Stokes equations. This methodology was applied on two test cases – Kármán vortex street and vortex rope. In both cases, a CFD simulation of one reference point was carried out and by utilizing gained modes, the corresponding reduced order models were formulated. Their results were assessed by comparing to the reference simulation.

## **Key Words**

proper orthogonal decomposition, reduced order model, vortex rope

## **Bibliografická citace**

URBAN, Ondřej. *Redukovaný model vírového proudění*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 79 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci s názvem Redukovaný model vírového proudění vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Pavla Rudolfa, Ph.D. a s využitím svých znalostí a uvedených zdrojů.

V Brně dne 23. 5. 2017

---

Bc. Ondřej Urban

## Poděkování

Na tomto místě chci poděkovat Ing. Davidu Štefanovi, Ph.D. za poskytnutí svých dat a skriptů pro výpočet POD a čas, který mi věnoval. Speciální poděkování patří také mému vedoucímu, doc. Ing. Pavlu Rudolfovi, Ph.D., za zajímavé téma diplomové práce, které se vztahuje k projektům řešeným na Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana, a za čas, který mi věnoval při konzultacích.



# Obsah

Úvod .....	11
<b>1 Přehled z oblastí tvorby a aplikací redukovaných modelů .....</b>	<b>11</b>
<b>2 Galerkinova metoda .....</b>	<b>14</b>
2.1 Postup výpočtu Galerkinovou metodou konečných prvků .....	14
2.2 Redukce řádu Galerkinova systému .....	17
<b>3 Vlastní ortogonální dekompozice .....</b>	<b>18</b>
3.1 Obecný postup výpočtu POD .....	18
3.2 Praktický postup výpočtu POD .....	20
3.2.1 POD skalární veličiny .....	20
3.2.2 POD vektorové veličiny .....	22
3.3 Varianty provedení POD .....	23
3.4 Vliv vstupních parametrů na vlastnosti POD módů .....	23
3.4.1 Vliv časového rozmezí .....	23
3.4.2 Vliv časového kroku .....	25
<b>4 Redukovaný model proudění .....</b>	<b>27</b>
4.1 Řídící rovnice a používaná konvence .....	27
4.2 Vyjádření jednotlivých členů Galerkinova systému .....	28
4.3 Modelování tlakového členu .....	29
4.4 Shrnutí a řešení Galerkinova systému .....	31
4.5 Kalibrace Galerkinova systému .....	32
4.6 Energetická analýza Galerkinova systému .....	36
<b>5 Aplikace Galerkinovy metody na obtékání čtverce .....</b>	<b>38</b>
5.1 Laminární proudění ( $Re = 200$ ) .....	38
5.1.1 CFD simulace .....	38
5.1.2 Vlastní ortogonální dekompozice .....	41
5.1.3 Redukovaný model .....	47
5.2 Turbulentní proudění ( $Re = 21\ 300$ ) .....	54
5.2.1 CFD simulace .....	54
5.2.2 Vlastní ortogonální dekompozice .....	55
5.2.3 Redukovaný model .....	58
<b>6 Aplikace Galerkinovy metody na proudění v savce .....</b>	<b>63</b>
6.1 CFD simulace .....	63
6.2 Vlastní ortogonální dekompozice .....	65
6.3 Redukovaný model .....	70
<b>Závěr .....</b>	<b>73</b>
<b>Seznam použitých zdrojů .....</b>	<b>74</b>
<b>Seznam použitých symbolů a jednotek .....</b>	<b>78</b>

## Úvod

Proudění tekutin je jev, který má velký význam jak v přírodě, tak v oblasti techniky. Matematicky je popsáno slavnou Navier-Stokesovou rovnicí doplněnou o rovnici kontinuity (někdy jsou souhrnně označovány jako Navier-Stokesovy rovnice). Jde o parciální diferenciální rovnice, jejichž analytické řešení je známo pouze pro několik jednoduchých případů. V ostatních případech se řeší numericky, přičemž výpočetní náročnost je úměrná požadavkům na velikost a jemnost sítě. Na jedné straně spektra je například stacionární laminární proudění s jednoduchou geometrií, které lze vyřešit během několika minut i na standardním osobním počítači, na opačné straně obecné 3D turbulentní proudění, jehož přesné řešení je časově příliš náročné i při použití nejvýkonnějších superpočítačů. Tento fakt vedl k tomu, že se při řešení turbulentního proudění na Navier-Stokesovu rovnici aplikuje reynoldsovské časové středování, které na jedné straně vede ke snížení výpočetních nároků, ale na druhé straně má za následek vznik nových neznámých, takzvaných reynoldsovských napětí, které je potřeba modelovat pomocí dalších rovnic. Za cenu ztráty detailů a nižší přesnosti je tím umožněna praktická aplikace výpočetního modelování turbulentního proudění, nicméně náročnost těchto simulací je i tak pro některé aplikace příliš vysoká. K jejich realizaci mohou ve vhodných případech posloužit takzvané redukované modely proudění, které popisují pouze nejdůležitější struktury v proudovém poli. Za účelem stanovení těchto struktur je nejprve potřeba provést referenční plnohodnotnou simulaci, popřípadě experiment. Řešení následně sestaveného redukovaného modelu je pak oproti plnohodnotnému mnohem rychlejší, což umožňuje například zefektivnění některých optimalizačních výpočtů, které jinak vyžadují vyřešení řídicí rovnice mnohokrát za sebou pro různé parametry, než je nalezena optimální varianta.<sup>[5]</sup> Stinnou stránkou redukovaných modelů je omezený rozsah aplikovatelnosti daný přesností vstupních dat (dominantních struktur). Z hlediska vstupních parametrů se tedy nelze příliš vzdálit od referenční simulace (referenčního experimentu), protože v takových případech se skutečně proudové struktury od těch referenčních mohou lišit natolik, že výsledky redukovaného modelu jsou již velmi nepřesné.

Cílem této práce bude podat přehled o tvorbě a aplikacích redukovaných modelů založených na Galerkinově metodě s využitím metody vlastní ortogonální dekompozice k identifikaci dominantních struktur. Hlavním cílem je aplikace této metodiky na konkrétní příklady – Kármánovu vírovou stezku a vírový cop, který vzniká například v savce Francisovy turbíny při mimooptimálních provozních podmínkách. Tato struktura má za následek tlakové pulzace, které zatěžují součásti turbíny a omezují tak její provozní rozsah, což představuje problém zejména u přečerpávacích elektráren, jejichž úkolem je zajistit stabilitu rozvodné sítě. Principem je, že při nadbytku dodávané elektrické energie fungují v čerpadlovém režimu, při kterém spotřebovávají nadbytečnou energii na čerpání vody do horní nádrže, a naopak ve špičkách fungují v turbínovém režimu a dodávají energii do sítě. Jedním z požadavků na tyto stroje je proto široký provozní rozsah, aby bylo možné reagovat na aktuální potřeby rozvodné sítě. Smyslem této práce je proto prověřit možnost aplikace redukovaného modelu na proudění v savce turbíny, což by mohlo pomoci do budoucna při hledání optimálního řízení s ohledem na snížení účinků vírového copu. Tento problém se v současnosti řeší samonasáváním vzduchu přiváděného středem oběžného kola<sup>[31]</sup>, nicméně stále zde existuje potenciál k nalezení účinnější metody.

# 1 Přehled z oblasti tvorby a aplikací redukovaných modelů

Na úvod této kapitoly je dobré zmínit, že redukované modely založené na Galerkinově metodě nejsou jedinou z možností snížení výpočetní náročnosti simulací proudění. Pokud se omezíme na modely založené na extrakci dominantních struktur ze systému, existuje zde také novější metoda založená na shlukové analýze, kterou formuloval tým kolem Bernda Noacka.<sup>[14]</sup> Jde o statistickou (pravděpodobnostní) metodu založenou na hledání a popisu chování takzvaných shluků (clusterů) v dodaném souboru dat. Galerkinova metoda je naproti tomu deterministická, stanovuje chování dominantních struktur řešením obecně platné řídicí rovnice, v případě proudění tedy Navier-Stokesovy.

Základní myšlenka a předpoklad Galerkinových redukovaných modelů je, že sečtením několika málo takzvaných módů se lze dostat na velmi dobrou aproximaci řešení. Tyto módy jsou vyjádřeny jako součin tvarové funkce závislé pouze na prostorových souřadnicích a časové funkce závislé pouze na čase. Tvarové funkce je nutné vhodně zvolit (tak, aby odpovídaly dominantním strukturám), časové funkce (které určují chování dominantních struktur) je pak možné dopočítat použitím Galerkinovy projekce tvarových funkcí na řídicí rovnici. Její popis krok po kroku lze nalézt dále v této práci. Podle použité metody stanovení tvarových funkcí zavedl autor Bernd Noack rozdělení Galerkinových modelů na tři kategorie<sup>[23]</sup>:

- 1) *matematické*,
- 2) *fyzikální*,
- 3) *empirické*.

U matematických modelů jsou tvarové funkce stanoveny matematicky tak, aby byly ortonormální a splňovaly rovnici kontinuity. K uspokojivému popisu proudění je zde často nutné použít velké množství těchto funkcí (stovky až tisíce<sup>[36]</sup>). Fyzikální modely jsou charakteristické větší vazbou na Navier-Stokesovu rovnici. Příslušné tvarové funkce se pak stanovují například z lineární stabilitní analýzy. Konečně empirické modely využívají ke stanovení tvarových funkcí přímo referenční řešení Navier-Stokesovy rovnice. Díky tomu je možné dosáhnout při dané přesnosti optimální redukce počtu módu (a tím i nejnižší výpočetní náročnosti redukovaného modelu), ale ve srovnání s matematickými modely mnohem rychleji klesá přesnost, když se konfigurace vzdaluje od referenční simulace nebo experimentu. Pro stanovení tvarových funkcí z řešení Navier-Stokesovy rovnice existují různé metody. Velice populární je vlastní ortogonální dekompozice zavedená do oblasti mechaniky tekutin v roce 1967 Johnem Lumleym.<sup>[18]</sup> Její výhodou je, že stanovuje soubor módů tak, aby byl reziduál aproximace řešení minimalizován ve smyslu metody nejmenších čtverců. V případě dekompozice rychlostního pole mluvíme o energetické optimalitě, protože druhá mocnina rychlosti je úměrná měrné kinetické energii. O 21 let později byla tato metoda poprvé použita k sestavení Galerkinova redukovaného modelu.<sup>[2]</sup> Autorem je Nadine Aubry, jedním ze spoluautorů je i zmíněný John Lumley. V následujících odstavcích budou představeny některé konkrétní aplikace této metodiky, od zmíněného Aubryho průkopnického modelu z roku 1988 po nejaktuálnější aplikace z oblasti zbraňových systémů stíhacích letounů.

### **Dynamika koherentních struktur v turbulentní mezní vrstvě**

Nadine Aubry, Philip Holmes, John Lumley, Emily Stone

Vůbec první aplikace Galerkinovy metody k sestavení redukovaného dynamického modelu, z roku 1988. Objektem zájmu byl rozvoj turbulence při proudění kolem stěny. Autoři využili experimentální data získaná pomocí termoanemometrie i výsledky numerické simulace z jiné práce. Pro stanovení dominantních (koherentních) struktur kombinují vlastní ortogonální dekompozici a vlnové funkce. Děje nezahrnuté do systému modelují pomocí modelu založeného na turbulentní viskozitě s jedním volným parametrem. V závislosti na hodnotě tohoto parametru pozorovali různá chování systému, blíže se zabývali intermitentním chováním. Své výsledky zveřejnili v časopisu *Journal of Fluid Mechanics*.<sup>[2]</sup>

### **Optimální řízení odtrhávání vírů s použitím redukovaných modelů**

William R. Graham, Jaume Peraire, K. Y. Tang

Jde o první aplikaci Galerkinova modelu v oblasti kontroly proudění, což je odvětví, se kterým jsou v poslední době redukované modely často spojovány. Práce byla v roce 1997 odeslána do časopisu *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, zveřejněna byla v roce 1999 ve dvou částech.<sup>[10, 11]</sup> Autoři si jako testovací případ zvolili obtékání válečku při Reynoldsově čísle  $Re = 100$  (laminární proudění), kde dochází k periodickému odtrhávání vírů v úplavu známému jako Kármánova vírová stezka. Formulovali dvě metody zahrnutí vlivu kontrolního zásahu do modelu – metodu kontrolní funkce a penalizační metodu. Ve výpočtech se potýkali s narůstající chybou při integraci modelu v čase, která byla způsobena tím, že nijak nemodelovali vliv zanedbaných módů. Tento problém řešili tím, že model v pravidelných intervalech resetovali. Autoři si jako kontrolní zásah zvolili rotaci válečku a formulovali metodiku, pomocí které hledali optimální průběh úhlové rychlosti v čase tak, aby nestacionarita proudění byla co nejmenší. Dosažené výsledky byly ovlivněny nedostatky použitých metod, ale závěrem bylo, že s použitím redukovaného modelu lze do určité míry docílit zmíněného kontrolního záměru.

### **Optimální řízení úplavu rotací válečku s využitím POD redukovaného modelu**

Michel Bergmann, Laurent Cordier, Jean-Pierre Brancher

Tato studie navazuje na práci Williama Grahama a kol., popsanou v předchozím odstavci. Zveřejněna byla v roce 2005 v časopisu *Physics of Fluids*.<sup>[4]</sup> Autoři se zabývají obtékáním válečku při Reynoldsově čísle  $Re = 200$ . Pro nalezení optimálního kontrolního zásahu spočívajícího opět v rotaci válečku použili prakticky stejný postup, ale svůj redukovaný model na rozdíl od předchozí práce stabilizovali prostřednictvím časově proměnné umělé viskozity. Výsledný kontrolní zásah dosáhl snížení součinitele odporu o 25 %. Své výsledky autoři srovnávají s dostupnými výsledky z literatury, z nichž vyplývá, že maximální dosažitelná redukce součinitele odporu pomocí rotace válečku je pro danou konfiguraci 30 %. Kontrolní zásah stanovený redukovaným modelem je tedy z hlediska efektu poměrně blízko optimálnímu kontrolnímu zásahu. Přitom je potřeba vzít v potaz, že účelovou funkcí nebyl samotný součinitel odporu, ale stejně jako v práci Williama Grahama nestacionarita úplavu, tedy norma fluktuací. Z toho plyne závěr, že při použití vhodného souboru tvarových funkcí a vhodného optimalizačního algoritmu lze dosáhnout výsledků srovnatelných s plnohodnotným

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

řešením Navier-Stokesovy rovnice, které je ale dle výpočtu autorů v tomto případě stonásobně náročnější na výpočetní čas.

### Redukované modelování horní vrstvy Tichého oceánu v tropické oblasti

Yanhua Cao, Jiang Zhu, Zhendong Luo, Ionel Navon

Autoři použili techniku vlastní ortogonální dekompozice a Galerkinovu metodu k sestavení redukovaného modelu vývoje horní vrstvy Tichého oceánu. Pokrytá oblast sahá od 20° s. š. po 20° j. š. a od 140° v. d. po 80° z. d. Matematický model byl nejprve integrován přes časový úsek 20 let s časovým krokem 100 sekund, z 21. roku poté byla zapisována data pro vlastní ortogonální dekompozici. Výsledný redukovaný model pak dosáhl dobré shody s referenční simulací především u vývoje hloubky horní vrstvy, která se v průběhu roku mění. Studie byla v roce 2006 zveřejněna v časopisu *Computers and Mathematics with Applications*.<sup>[6]</sup>

### Redukované modelování proudění ve výduť aorty

Gary Han Chang, Clemens Schirmer, Yahya Modarres-Sadeghi

Tato nová studie (rok 2017), uveřejněná v časopise *Journal of Biomechanics*<sup>[12]</sup>, se zabývá možností využití redukovaného modelu při předpovídání proudění ve výduť aorty (medicínsky aneurysma). Jde o specifický problém, takže pro jeho přesné modelování je třeba pomocí dostupných metod (počítačová tomografie, ultrazvuk) získat jak tvar tepny, tak okrajové podmínky pro konkrétního pacienta. Tato data ale mohou být nespolehlivá, což vede na nutnost provedení simulací pro různé variace okrajových podmínek. Autoři ve své práci pro jednoduchost použili symetrickou výduť s uvažováním newtonovských vlastností krve. Jejich cílem bylo sestavit model, který by dokázal předpovědět charakter proudění pro různý vstupní úhel proudu krve do výduť. Za tímto účelem provedli referenční simulaci, při které se tento úhel v průběhu času měnil. Na získaný soubor snapshotů aplikovali metodu vlastní ortogonální dekompozice a z vypočítaných módů vhodně sestavili redukované modely pro různé vstupní úhly proudu do výduť. Vyhodnocovaným parametrem bylo stěnové smykové napětí. Kromě toho také v rámci redukovaného modelu měnili tepovou frekvenci. Validace výsledků proti plnohodnotným simulacím dopadla slibně, takže dalším cílem by měla být aplikace na složitější situace a rozvoj této metodiky s ohledem na potenciální klinické využití.

### Redukované modelování interakce tekutiny s tělesem u kompletního letounu

Thuan Lieu, Charbel Farhat, Michel Lesoinne

V této studii je řešen náročný problém z oblasti aeroelasticity – předpovídání aeroelastického chvění, a to pro kompletní model stíhacího letounu F-16. V subsonickém a supersonickém režimu k tomu lze využít zjednodušené linearizované modely, ale v transonickém režimu (tedy při rychlostech blízkých rychlosti zvuku) nelze nelineární dynamiku zanedbat, což se řeší korekcemi pomocí dat z testů v aerodynamickém tunelu. Autoři v rámci své práce ověřovali možnost využití redukovaného modelu, navrhli také interpolační techniku pro rozšíření oblasti aplikovatelnosti této metody. Princip spočívá ve výpočtu tvarových funkcí z plnohodnotných simulací pomocí vlastní ortogonální dekompozice ve dvou zvolených bodech, v tomto případě daných Machovým číslem. Díky své interpolační technice následně mohli řešit jakýkoli provozní bod, který leží mezi dvěma výchozími. V rámci sledovaných

veličin jejich redukovaný model dosáhl velmi dobré shody s validačními plnohodnotnými simulacemi. Práce byla zveřejněna v roce 2006 v časopisu *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.<sup>[16]</sup>

### **Redukované modelování proudění pro zbraňové systémy stealth letounů**

Irina Tezaur, Srinivasan Arunajatesan, Matthew Barone, Jeffrey Fike a kol.

Tento projekt je řešen v americké společnosti Sandia National Laboratories, která spadá pod korporaci Lockheed Martin. U stealth letounů je nezbytné, aby byla výzbroj uložena v šachtách uvnitř trupu. Při otevření poklopu před odpálením rakety zde ale vzniká nepříznivé proudění, které má za následek velké namáhání součástí nesoucích výzbroj. Jde o náročný problém z oblasti stlačitelného proudění a interakce tekutiny s tělesem, jehož simulace metodou velkých vírů dle autorů trvá týdny i na nejvýkonnějších superpočítačích. Zaměřují se proto na formulování metod, které by tuto problematiku umožnily řešit pomocí redukovaných modelů, zejména metod zajišťujících stabilitu řešení výsledného modelu. Všechny zprávy a články z řešení projektu lze nalézt na stránkách hlavní autorky, zde je citována zpráva z roku 2014.<sup>[15]</sup>

Předchozí odstavce obsahují jen výběr z širokého spektra prací týkajících se redukovaných modelů. Ty mohou mít i mnoho dalších uplatnění, jejich úspěch ale závisí na vhodnosti použitých metod. Nalezení univerzálně aplikovatelné metodiky vedoucí na stabilní modely popisující široký rozsah provozních situací nicméně stále zůstává velkou výzvou.

## 2 Galerkinova metoda

Galerkinova metoda, někdy také Ritzova-Galerkinova metoda, je postup řešení parciálních diferenciálních rovnic. Autorem myšlenky je německý matematik Walther Ritz, ale podrobněji metodu rozpracovali ruští vědci Ivan Bubnov a Boris Galerkin.<sup>[9]</sup> Tato metoda se stala základem známé a dnes často používané metody konečných prvků. Postupem času byla dále rozpracována, takže nyní existuje v celé řadě variant a modifikací vzhledem k vlastnostem různých problémů. Zde bude prezentována pouze tradiční Galerkinova metoda tak, jak se využívá při sestavování redukovaných modelů proudění.<sup>[22]</sup>

### 2.1 Postup výpočtu Galerkinovou metodou konečných prvků

Pro popis postupu výpočtu mějme konkrétní diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1a)$$

a k ní počáteční podmínku

$$u(x, 0) = \sin x \quad (2.1b)$$

Tato rovnice se nazývá transportní rovnice, protože unáší počáteční podmínku rychlostí  $v$ , která bude pro jednoduchost zvolena 1 m/s.

Základní myšlenkou Galerkinovy metody je vyjádření hledaného řešení  $u(x, t)$  jako součtu konečného počtu funkcí ve tvaru

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^m \phi_j(x) a_j(t) \quad (2.2)$$

Funkce  $\phi_j(x)$  se označuje jako bázová nebo tvarová, funkce  $a_j(t)$  je časově závislá funkce, která určuje chování řešení v čase.

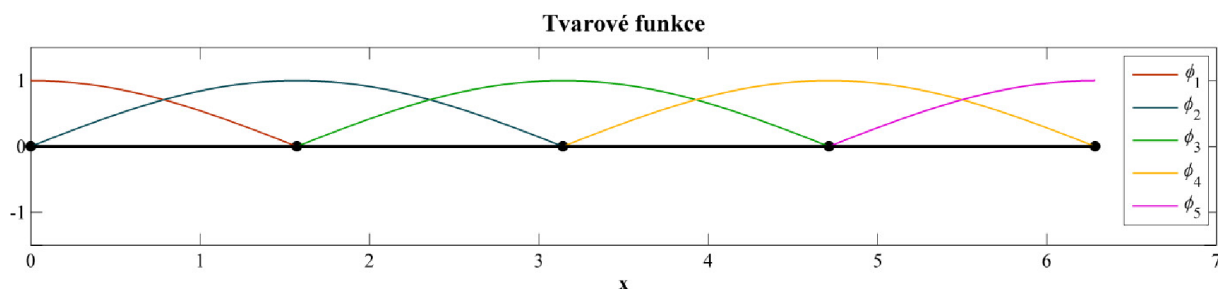
Řešení je hledáno na konečné prostorové oblasti  $\Omega$  v konečném časovém úseku  $T$ . Prostorová oblast se diskretizuje vytvořením sítě, na které budou definovány jednotlivé tvarové funkce. Každá tvarová funkce se váže k jednomu uzlu tak, že její hodnota je v tomto uzlu rovna libovolné hodnotě (obvykle jedné), v ostatních uzlech rovna nule a mezi nimi má kvůli výpočtu derivací libovolně zvolený průběh. Obvykle se tento průběh získá interpolací nějakou funkcí, například lineární nebo kvadratickou. Je nutné, aby byla dostatečně hladká vzhledem k řádu derivací v řídicí rovnici.

Pro problém (2.1) je prostorová oblast jednorozměrná, daná intervalem  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ . Diskretizace byla pro jednoduchost zvolena na 4 ekvidistantní úseky s uzlovými body  $x = \{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\}$ . Tvarových funkcí je celkem pět, přičemž kvůli přesnosti řešení mají s ohledem na počáteční podmínku sinusový průběh. Vše je znázorněno na obrázku 2.1.

Vyjádření řešení (2.2) se dále dosadí do řídicí rovnice (2.1a)

$$\frac{\partial(\sum \phi_j a_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\sum \phi_j a_j)}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

kteřou je potřeba vyřešit pro  $m$  neznámých funkcí  $a_j(t)$ . Aby to bylo možné, je potřeba



**Obrázek 2.1:** Tvarové funkce pro řešení problému (2.1). Černá čára označuje výpočetní doménu, tečky jsou uzlové body.

sestavit soustavu odpovídajícího počtu rovnic. Toho se docílí vynásobením rovnice souborem libovolných lineárně nezávislých testovacích funkcí  $\varphi_i(x)$  a integrováním přes oblast  $\Omega$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_i \left( \frac{\partial(\sum \phi_j a_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\sum \phi_j a_j)}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2.4)$$

Tomuto kroku se někdy říká projekce reziduálu řídicí rovnice na testovací funkce. Rovnici (2.4) se říká slabá nebo také variační formulace a její řešení se nazývá slabé řešení. Pojem slabá forma souvisí s oslabením řádu derivací o jeden stupeň aplikací integrálu.

Dalším krokem je volba testovacích funkcí. U tradiční Galerkinovy metody se jako testovací funkce volí tvarové funkce, to znamená

$$\varphi_i(x) = \phi_i(x) \quad (2.5)$$

Po dosazení do slabé formulace (2.4) a úpravě jednotlivých členů (roznásobení sum, provedení derivací a integrací) máme

$$\sum_{j=1}^5 \frac{da_j}{dt} \int_0^{2\pi} \phi_i \phi_j dx + \sum_{j=1}^5 a_j \int_0^{2\pi} \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} dx = 0 \quad (2.6)$$

Dále definujeme matice, jejichž prvky jsou

$$m_{ij} = \int_0^{2\pi} \phi_i \phi_j dx \quad \dot{a}_i = \frac{da_i}{dt} \quad l_{ij} = \int_0^{2\pi} \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad \mathbf{a}_i = a_i \quad (2.7)$$

Tyto matice pro řešený problém vychází následovně

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & \frac{\pi}{2} & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & \frac{\pi}{2} & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & \frac{\pi}{2} & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} -0,5 & \frac{\pi}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi}{4} & 0,5 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$



## Redukovaný model vírového proudění

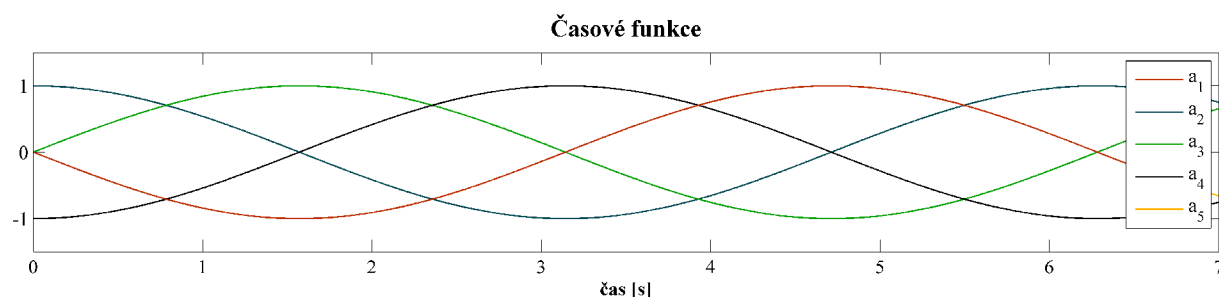
Soustavu rovnic lze nyní přepsat do maticové podoby, tím dostáváme Galerkinův systém

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{l}\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Charakteristickou vlastností těchto matic je, že jsou řídké, v tomto případě dokonce pásové, čehož se dá s výhodou využít ke kompresi při ukládání a v řešičích k efektivnímu výpočtu.<sup>[21]</sup> V MATLABu se dá použít například řešič *ode45* s Runge-Kuttovou metodou. Pro potřeby numerického řešení je ještě potřeba s využitím počáteční podmínky vyjádřit počáteční hodnoty časových funkcí. Snadno dostaneme

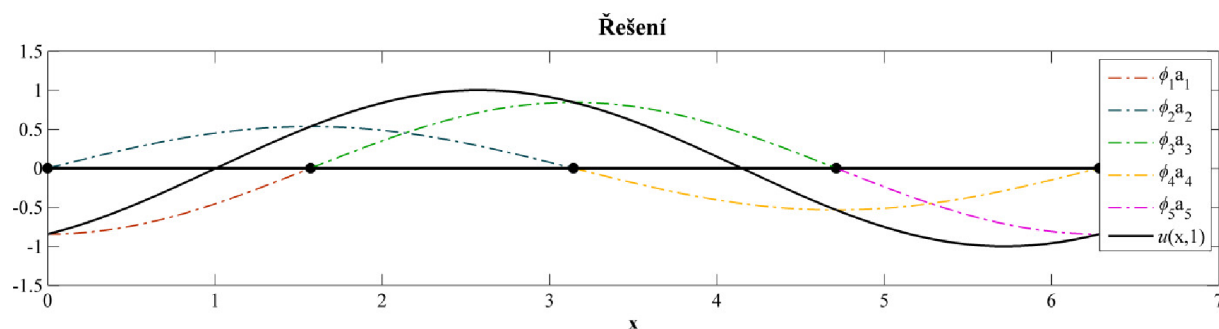
$$a_1(0) = 0; a_2(0) = 1; a_3(0) = 0; a_4(0) = -1; a_5(0) = 0 \quad (2.10)$$

Řešením jsou harmonické funkce sinus a kosinus vykreslené na obrázku 2.2. Pátá funkce zde splývá s první.



**Obrázek 2.2:** Výsledné časové funkce problému (2.1)

Celkovým řešením získaným sečtením všech dílčích funkcí je pak postupná vlna šířící se směrem doprava. Na obrázku 2.3 je zachycena v čase 1 sekunda včetně jednotlivých funkcí, ze kterých se skládá.



**Obrázek 2.3:** Řešení problému (2.1) v čase 1 sekunda. Je zde vidět, že jednotlivé dílčí funkce tvoří dohromady dvě vlny – sinovou a kosinovou, které jsou z definice (2.2) stojaté. Součtem těchto fázově posunutých stojatých vln vzniká výsledná postupná vlna.

Pokud sečteme analytické vyjádření dílčích složek řešení, dostaneme se na rovnici postupné vlny

$$u(x, t) = \sin(x - t) \quad (2.11)$$

Galerkinova metoda konečných prvků tedy v tomto případě díky vhodné volbě sítě a tvarových funkcí vedla na přesné řešení.

## 2.2 Redukce řádu Galerkinova systému

Aplikace Galerkinovy metody konečných prvků obecně vede na soustavu tolika rovnic, kolik má výpočetní síť uzlů. S tím je spojená výpočetní náročnost, která může být pro některé aplikace, jako je řízení proudění, neúnosná i při použití superpočítačů.<sup>[15]</sup> Stejně je to i u jiných metod CFD simulací. Pro tyto aplikace je tedy nutné najít způsob, jak tuto náročnost efektivně snížit při zachování dostatečné přesnosti řešení.

Základní způsob redukce řádu je použití globálních tvarových funkcí místo lokálních, které byly nenulové pouze v jednom uzlu výpočetní sítě. Tyto globální funkce se volí tak, aby při co nejmenším počtu aproximovaly řešení co možná nejlépe. Pro případ transportní rovnice z minulé části je volba jednoduchá. Z obrázku 2.3 bylo patrné, že lokální tvarové funkce dohromady tvořily sinovou a kosinovou vlnu, jejichž součtem vznikla výsledná postupná vlna. Nové tvarové funkce tedy budou

$$\phi_1 = \sin x; \phi_2 = \cos x \quad (2.12)$$

Tato volba vede na soustavu dvou rovnic

$$\frac{da_1}{dt} = a_2; \frac{da_2}{dt} = -a_1 \quad (2.13)$$

jejímž řešením jsou při dané počáteční podmínce (2.1b) funkce

$$a_1 = \cos t; a_2 = -\sin t \quad (2.14)$$

Výsledné řešení se dá opět upravit na tvar (2.11).

Pro případ transportní rovnice tedy bylo dosaženo exaktního řešení rovnice pomocí pouze dvou tvarových funkcí, což vedlo k úspoře výpočetního času. Obecně ale platí, že chceme-li na dané síti o  $m$  uzlech postihnout všechny možné varianty řešení, pak musíme použít  $m$  ortogonálních tvarových funkcí. Je to analogie k tvrzení, že k vytvoření libovolného  $m$ -rozměrného vektoru potřebujeme provést lineární kombinaci  $m$  vzájemně kolmých (ortogonálních) vektorů, protože hodnoty řešení v uzlových bodech lze do takového vektoru zapsat. Zvolené dvě funkce dokážou vytvořit pouze postupnou nebo stojatou vlnu o dané vlnové délce. Pokud by tedy došlo například ke změně vlnové délky, nebylo by možné nové řešení pomocí těchto funkcí aproximovat s dostatečnou přesností a výsledky by byly chybné. Redukce řádu Galerkinova systému je tedy vykoupena omezením stupňů volnosti, a tím i omezením oblasti použitelnosti.

S omezením stupňů volnosti přichází i problém se samotným stanovením tvarových funkcí pro redukci řádu. Aby byl model efektivní, je potřeba předem vědět, jak bude vypadat řešení. Pokud jsou k dispozici přesné výsledky, například z plnohodnotné numerické simulace nebo experimentálního měření, pak lze použít metodu zvanou vlastní ortogonální dekompozice, která vyjadřuje vstupní funkci jako lineární kombinaci dílčích módů tak, aby reziduál mezi aproximací a řešením byl vždy minimální, což je z hlediska redukce řádu výhodná vlastnost.

### 3 Vlastní ortogonální dekompozice

Vlastní ortogonální dekompozice (ve zkratce POD – z anglického *Proper Orthogonal Decomposition*) je technika, která umožňuje rozložit dynamické děje na soubor módů nebo také bazových funkcí. Každý složitý dynamický děj lze v mechanice kontinua vyjádřit jako součet dílčích dějů, kterých může být obecně nekonečně mnoho. Síla POD spočívá v její optimalitě, díky které je v každém módu zachyceno největší možné množství informací ve smyslu nejmenších čtverců, viz níže rovnici (3.2). Díky tomu lze efektivně zredukovat řád popisu vstupního děje (z nekonečna na například několik desítek). Redukce řádu s sebou obecně nese chybu spojenou se zanedbáním nepoužitých dílčích dějů. Ale v případech, kdy se ve zkoumaném systému nacházejí dominantní struktury, je většina informací často zachycena v několika málo módech, vzhledem k nimž lze ostatní považovat za bezvýznamné. Kromě toho je POD výpočetně relativně nenáročná, velkou výhodou je také její linearita a možnost aplikace i na nelineární systémy.

V rámci různých oborů existují různé variace POD: Principal Component Analysis (PCA), Karhunen-Loèveova transformace (KLT) a Singular Value Decomposition (SVD). Tyto metody byly vytvořeny nezávisle na sobě, mají stejný cíl, ale liší se provedením. Na poli mechaniky tekutin tuto metodu představil v roce 1967 John Lumley.<sup>[18]</sup> Dalšími oblastmi aplikace POD jsou analýza signálů, komprese dat, analýza vibrací a zpracování obrazů. Jako některé konkrétní zajímavé aplikace lze zmínit v oceánografii analýzu cirkulace v Tichém oceánu<sup>[6]</sup> nebo v pružnosti a pevnosti detekci přítomnosti a míst defektů s použitím analýzy POD módů vibrující součásti.<sup>[8]</sup>

#### 3.1 Obecný postup výpočtu POD

Následující princip výpočtu POD módů i jeho aplikace lze nalézt například v materiálech Dirka Luchtenburga a kol.<sup>[17]</sup> Vyšetřujeme skalární funkci  $u(\vec{x}, t)$ , kde  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  je vektor prostorových souřadnic a  $t$  čas. Tato funkce je definovaná na oblasti  $\Omega$  v časové doméně  $T$  a popisuje nějakou vlastnost. U proudění je to například tlak, velikost rychlosti nebo vířivost. Vyšetřovanou funkci lze beze zbytku vyjádřit součtem  $m$  módů ve tvaru

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^m \phi_i(\vec{x}) a_i(t) \quad (3.1)$$

kde  $\phi_i$  je prostorově závislá funkce určující tvar módu a  $a_i$  časově závislá funkce určující jeho vývoj v čase. Aproximace vstupní funkce pomocí  $n$  módů, kdy  $n < m$ , má být ve smyslu nějaké podmínky optimální, zde kritéria nejmenších čtverců, takže platí

$$\iint_{\Omega T} (\vec{u} - \vec{u}_{\text{POD}}^{[n]})^2 d\vec{x} dt \leq \iint_{\Omega T} (\vec{u} - \vec{u}_{\text{jiná}}^{[n]})^2 d\vec{x} dt \quad (3.2)$$

Tato podmínka vyjadřuje snahu zachytit co nejvíce informací do co nejmenšího počtu módů. Jinými slovy neexistuje žádná jiná dekompozice, která by pomocí  $n$  módů zachycovala danou veličinu lépe než POD. Také to znamená, že POD obecně není modální analýza, kde požadujeme, aby časově závislé funkce byly exaktně sinus nebo kosinus. Za vhodných podmínek

toho lze dosáhnout pomocí metody zvané *Dynamic Mode Decomposition* (DMD).<sup>[28]</sup>

Matematické řešení optimalizačního problému (3.2) vede na Fredholmovu integrální rovnici

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}(\vec{x}, \vec{x}') \phi_i(\vec{x}') d\vec{x}' = \lambda_i \phi_i(\vec{x}) \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{R}(\vec{x}, \vec{x}')$  je korelační matice definovaná vztahem

$$\mathbf{R}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{T} \int_T u(\vec{x}, t) u(\vec{x}', t) dt \quad (3.4)$$

Symbol  $\vec{x}'$  značí odlišnou pozici oproti  $\vec{x}$ . Vyřešením Fredholmovy rovnice jsou získány vlastní funkce  $\phi_i$  a vlastní čísla  $\lambda_i$ . Korelační matice je samoadjungovaná a pozitivně semidefinitní. Díky těmto vlastnostem jsou vlastní čísla reálná a kladná a vlastní funkce ortonormální ve smyslu

$$\int_{\Omega} \phi_i(\vec{x}) \phi_j(\vec{x}) d\vec{x} = I_{ij} \quad (3.5)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková diagonální matice. Časové funkce  $a_i$  pak lze dopočítat pomocí projekce veličiny  $u$  na příslušnou vlastní funkci  $\phi_i$

$$a_i(t) = \int_{\Omega} u(\vec{x}, t) \phi_i(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.6)$$

V roce 1987 navrhl Lawrence Sirovich alternativní cestu, která staví místo prostorové korelace na časové korelaci.<sup>[30]</sup> Vstupní veličina je diskretizována v čase, odtud vznikl název metoda snapshotů. Korelační matice je potom definována vztahem

$$\mathbf{C}(t, t') = \int_{\Omega} u(\vec{x}, t) u(\vec{x}, t') d\vec{x} \quad (3.7)$$

a Fredholmova rovnice má tvar

$$\frac{1}{T} \int_T \mathbf{C}(t, t') a_i(t') dt' = \lambda_i a_i(t) \quad (3.8)$$

Z předcházejícího je zřejmé, že vlastní funkce tentokrát představují časovou funkci  $a_i$ . Tyto funkce jsou biortogonální ve smyslu

$$\frac{1}{T} \int_T a_i(t) a_j(t) dt = \Lambda_{ij} \quad (3.9)$$

kde  $\Lambda$  je diagonální matice s vlastními čísly  $\lambda_i$ . Vlastní funkce  $\phi_i$  se dopočítají projekcí

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

$$\phi_i(\vec{x}) = \frac{1}{\lambda_i T} \int_T u(\vec{x}, t) a_i(t) dt \quad (3.10)$$

Při dodržení výše popsaných postupů jsou prostorová i časová POD ekvivalentní, tzn. vedou ke stejným výsledkům.

Vzhledem k tomu, že vlastní funkce  $\phi_i$  lze dle rovnice (3.10) po převedení integrálu na sumu reprezentovat jako lineární kombinaci okamžitých hodnot vstupní veličiny  $u(\vec{x}, t)$ , přechází na ně všechny její časově nezávislé vlastnosti, které lze popsat lineární homogenní rovnicí z hlediska proměnné  $u$ . Mezi ně patří například rovnice kontinuity u nestlačitelného proudění nebo některé okrajové podmínky, které pak platí jednotlivě u všech POD módů.

Dále lze rovnici (3.9) s využitím ortonormality vlastních funkcí (3.5) rozšířit na tvar

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \iint_{\Omega T} (a_i(t) \phi_i(\vec{x}))^2 d\vec{x} dt \quad (3.11)$$

Z toho vyplývá, že je-li sledovaná veličina  $u$  velikost rychlosti, pak je vlastní číslo  $\lambda_i$  úměrné střední integrální hodnotě přes časový úsek  $T$  integrálu měrné kinetické energie příslušného módu přes oblast  $\Omega$ . Vydělením tohoto vlastního čísla součtem vlastních čísel všech módů dostaneme podíl měrné kinetické energie daného módu na celkové měrné kinetické energii ve sledované oblasti. Tímto způsobem se dá snadno určit, kolik módů je potřeba sečíst, aby bylo zachyceno požadované procento měrné kinetické energie v oblasti. V případě, že sledovaná veličina je tlak nebo velikost vířivosti, nemá vlastní číslo relevantní fyzikální význam a je označováno jako mohutnost v případě tlaku, resp. enstrofie v případě velikosti vířivosti. Pořád je ale použitelné při stanovování významu jednotlivých módů.

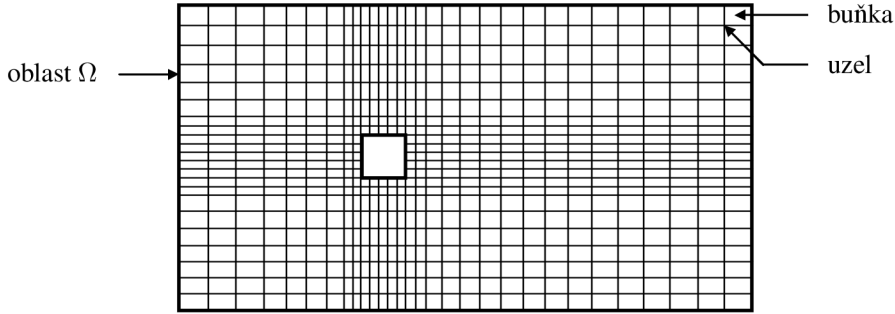
## 3.2 Praktický postup výpočtu POD

Při praktických výpočtech se zpravidla počítá s daty diskrétními v čase i prostoru, proto je potřeba provést operace značené v předcházejícím popisu obecně analyticky pomocí vhodných numerických metod. V této části bude popsán nejjednodušší princip výpočtu POD jak prostorovou (přímou) metodou, tak časovou metodou (metoda snapshotů), pro skalární i vektorovou veličinu. Nalézt ho lze také například v materiálech Bernda Noacka.<sup>[22]</sup>

### 3.2.1 POD skalární veličiny

Pro výpočet POD je uvažována nerovnoměrná síť, na které je sledovaná veličina vypočtena nebo naměřena v určitém počtu časových okamžiků. Mezi těmito okamžiky (snapshots) je dán konstantní časový krok. Ke každému datovému bodu je přiřazena velikost buňky, ve které se nachází (v závislosti na dimenzi délka, obsah nebo objem). Ideálně by se měly datové body kvůli integraci nacházet v těžištích buněk. Schéma modelové dvourozměrné domény je na obrázku 3.1.

Prvním krokem je seřazení všech hodnot do vektorů a matice. Vektory budou uvažovány ve výchozím tvaru jako sloupcové. Nejprve jsou do vektorů poskládány jednotlivé souřadnice všech datových bodů v libovolném pořadí. Následují velikosti buněk  $S_i$ , které už ale musí čít



**Obrázek 3.1:** Schéma dvourozměrné výpočetní domény typu quad pro výpočet obtékání čtverce.

stejně pořadí jako souřadnice. Protože sledovaná veličina je definovaná kromě prostoru i v čase, bude zapsána v matici. Má-li výpočetní síť  $N$  bodů a pořízeno bylo  $M$  snapshotů, bude mít tato matice rozměr  $N \times M$ . Hodnoty sledované veličiny jsou tedy u každého snapshotu seřazeny ve stejném pořadí jako souřadnice a zapisovány postupně do sloupců matice. Těmito kroky došlo k přesunu z klasického diskretizovaného prostoru do tzv. fázového prostoru  $\mathcal{R}^P$  o rozměru  $P = N$ . Pro případ dvourozměrné domény je tedy tvar vstupů následující

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{\bar{x}_1, t_1} & u_{\bar{x}_1, t_2} & \cdots & u_{\bar{x}_1, t_M} \\ u_{\bar{x}_2, t_1} & u_{\bar{x}_2, t_2} & \cdots & u_{\bar{x}_2, t_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\bar{x}_N, t_1} & u_{\bar{x}_N, t_2} & \cdots & u_{\bar{x}_N, t_M} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Dále je pro účely numerické integrace, která je prováděna obdélníkovou metodou, vytvořena matice

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{S_1} u_{\bar{x}_1, t_1} & \sqrt{S_1} u_{\bar{x}_1, t_2} & \cdots & \sqrt{S_1} u_{\bar{x}_1, t_M} \\ \sqrt{S_2} u_{\bar{x}_2, t_1} & \sqrt{S_2} u_{\bar{x}_2, t_2} & \cdots & \sqrt{S_2} u_{\bar{x}_2, t_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{S_N} u_{\bar{x}_N, t_1} & \sqrt{S_N} u_{\bar{x}_N, t_2} & \cdots & \sqrt{S_N} u_{\bar{x}_N, t_M} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

která vznikne vynásobením každé hodnoty v matici  $\mathbf{U}$  odmocninou z velikosti příslušné buňky. Další postup závisí na vybrané metodě. Sestává z následujících kroků:

**Přímá metoda**

**Metoda snapshotů**

Výpočet korelační matice

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T}{M} \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V}}{M} \quad (3.14b)$$

Vyřešení vlastního problému

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (3.15b)$$

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

Výpočet vektoru  $\phi_i$

$$(\phi_i)_j = \frac{(\mathbf{e}_i)_j}{\sqrt{S_j}} \quad (3.16a)$$

$$\phi_i = \mathbf{U} \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{M\lambda_i}} \quad (3.16b)$$

Výpočet vektoru  $\mathbf{a}_i$

$$(\mathbf{a}_i)_j = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_{kj} ((\mathbf{e}_i)_k \sqrt{S_k}) \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i \sqrt{M\lambda_i} \quad (3.17b)$$

V obou metodách je korelační matice sestavena tak, že Fredholmova rovnice přechází na známý vlastní problém matice (3.15). Odvození tohoto procesu lze nalézt v článku od autorů Smithe, Moehlise a Holmes.<sup>[32]</sup> V MATLABu se vlastní problém řeší pomocí funkce *eig*. Vlastní vektory  $\mathbf{e}_i$  jsou následně seřazeny podle svých vlastních čísel  $\lambda_i$  sestupně, tedy od největšího vlastního čísla po nejmenší. Výpočet vlastních funkcí (3.16) a (3.17) obsahuje i zpětný přepočítání, takže výsledné funkce, resp. vektory, jsou ortonormální a biortogonální ve smyslu rovnic (3.5) a (3.9). Tento zpětný přepočítání je nutné udělat, protože při zmíněné úpravě korelační matice za účelem redukce Fredholmovy rovnice na vlastní problém matice došlo i k předefinování vlastních vektorů.

Hlavním kritériem při volbě metody je porovnání počtu snapshotů oproti počtu buněk ve výpočetní síti. Jak je patrné z rovnic (3.14), vzhledem k rozdílnému pořadí maticového násobení má výsledná matice u přímé metody rozměr  $N \times N$ , zatímco u metody snapshotů  $M \times M$ . Přímá metoda se proto lépe uplatní tam, kde je více snapshotů než síťových buněk, což jsou typicky například kmitající prutová tělesa. Naproti tomu metoda snapshotů se uplatní u dat s rozsáhlými sítěmi a menším počtem snapshotů, což je případ i CFD simulací.

### 3.2.2 POD vektorové veličiny

U vektorové veličiny se využívá faktu, že každá její složka je ve své podstatě skalární veličina, k jejíž hodnotě je v rámci tohoto vektoru přiřazen směr příslušné souřadnicové osy. Princip POD je proto úplně stejný jako v předchozím případě, liší se pouze ve tvaru vstupů, kde je vhodné počítat se všemi složkami vektoru zároveň.

Princip tvorby vstupních vektorů a matic pro POD vektorových veličin je ten, že složky vektoru se zapisují postupně pod sebe. Má-li vektorová veličina  $n$  složek a je definovaná na síti o  $N$  bodech v  $M$  časových okamžicích, potom vektory souřadnic mají rozměr  $Nn$  a matice s hodnotami veličiny má rozměr  $Nn \times M$ . Jejich tvary pro dvourozměrný prostor jsou

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_N \\ S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{x,\bar{x}_1 t_1} & \cdots & u_{x,\bar{x}_1 t_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x,\bar{x}_N t_1} & \cdots & u_{x,\bar{x}_N t_M} \\ u_{y,\bar{x}_1 t_1} & \cdots & u_{y,\bar{x}_1 t_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{y,\bar{x}_N t_1} & \cdots & u_{y,\bar{x}_N t_M} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Po výpočtu prostorových POD módů  $\phi_i$  je důležité mít na paměti, že i tyto vektory mají tvar analogický ke tvaru vstupních vektorů, je tedy nutné je rozdělit zpět na příslušné složky. Naopak časové funkce není třeba upravovat a řídí se jimi všechny složky prostorových módů, což vede ke zjednodušení dalších výpočtů a analýz. To je důvod, proč se počítá se všemi složkami vektoru zároveň.

### 3.3 Varianty provedení POD

V případě mechaniky tekutin se rozlišují dva způsoby POD. První je POD celkových hodnot sledované veličiny, druhý POD fluktuální složky této veličiny. Fluktuální složka se vypočítá odečtením střední hodnoty ze všech snapshotů od jednotlivých snapshotů. Střední hodnota je tedy dána vztahem

$$u_0(\vec{x}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(\vec{x}, t_i) \quad (3.19)$$

a fluktuální hodnoty vztahem

$$u'(\vec{x}, t_i) = u(\vec{x}, t_i) - u_0(\vec{x}) \quad (3.20)$$

Výsledná aproximace sledované veličiny je pak dána součtem její střední hodnoty a souboru POD módů fluktuací. Výsledky obou variant POD bývají na první pohled velice podobné, protože jeden z módů u POD celkových hodnot přibližně odpovídá časově středované hodnotě a označuje se jako nultý mód. Nicméně častěji se využívá POD fluktuálních hodnot, protože fluktuace jsou z definice symetrické kolem nuly a stacionární okrajové podmínky, jako je konstantní vstupní rychlost, jsou tak dány pouze časově středovanou hodnotou. V této práci bude používána pouze POD fluktuálních hodnot.

### 3.4 Vliv vstupních parametrů na vlastnosti POD módů

#### 3.4.1 Vliv časového rozmezí

Časové rozmezí, tedy rozdíl časového okamžiku posledního snapshotu a časového okamžiku prvního snapshotu, přímo ovlivňuje tvary POD módů. Na obrázku 3.2 jsou pro srovnání vykresleny druhý a čtvrtý POD mód tlaku při obtékání čtverce a frekvenční spektrum druhého módu získané diskrétní Fourierovou transformací (DFT).

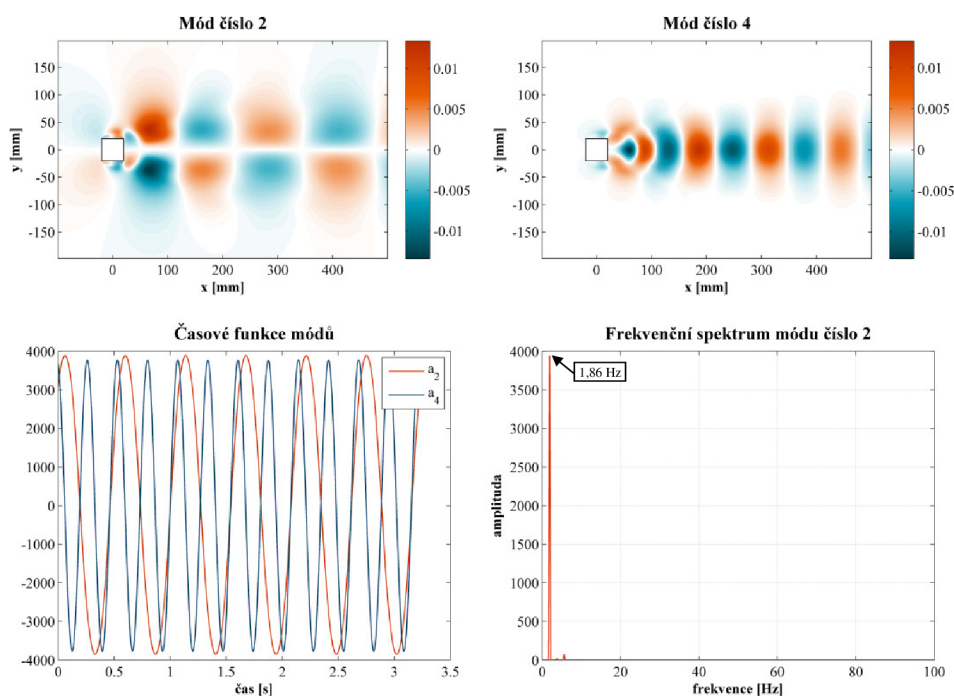
V prvním případě byl jako vstup do POD vybrán soubor prvních 646 snapshotů, které dohromady popisují rozmezí šesti period. Tvary POD módů jsou zde symetrické, resp. antisymetrické, a jejich frekvenční spektra obsahují jen několik málo frekvencí, zde u druhého módu pouze tři, přičemž dvě z nich jsou prakticky zanedbatelné. Z toho vyplývá, že POD módy jsou v tomto případě velice blízké vlastním tvarům proudění.

Ve druhém případě bylo použito prvních 700 snapshotů, které popisují rozmezí 6,5 periody. Zde je vidět, že došlo ke ztrátě symetrie a antisymetrie. Frekvenční spektra obsahují velké množství frekvencí, mnoho z nich se nachází v plynulých náběžích na amplitudové špičky, tzv. peaky. Ve frekvenčním spektru druhého módu jsou tři dominantní frekvence.

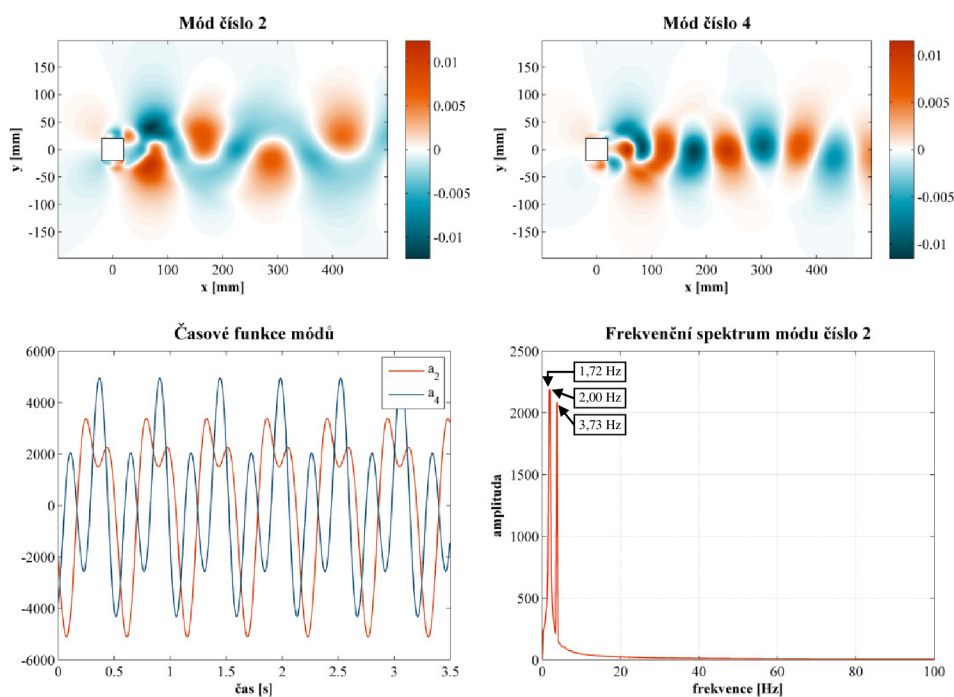


## Redukovaný model vírového proudění

6 period (646 snapshotů)



6,5 periody (700 snapshotů)



**Obrázek 3.2:** Vliv časového rozmezí na POD módy pro případ obtékání čtverce. Zobrazeny jsou tvary POD módů tlaku  $\phi_2$  a  $\phi_4$  a jejich časové funkce  $a_2$  a  $a_4$ . Frekvenční spektrum druhého módu bylo spočítáno pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Časový krok mezi snapshoty je  $\Delta t = 0,005$  s.

Průměr z prvních dvou odpovídá dominantní frekvenci v prvním případě, třetí dominantní frekvence se v prvním případě vyskytuje až u třetího a čtvrtého módu.

Důvod toho, proč jsou POD módy stejně jako DFT zkreslené, pokud délka časového úseku neodpovídá přirozenočíselnému násobku periody signálu, lze snadno najít srovnáním vztahů pro výpočet těchto operací. V obou se vyskytuje výpočet střední integrální hodnoty přes časový úsek  $T$ . V ideálním případě je tento časový úsek nekonečný, takže se na něm mohou projevit všechny frekvence a eliminuje se nepřesnost u celkově neperiodických signálů. Na konečném časovém úseku je nejlepších výsledků dosaženo, pokud střední integrální hodnota přes tento úsek odpovídá střední integrální hodnotě přes nekonečný úsek. U periodického děje to tedy znamená, že na tomto úseku musí proběhnout počet period odpovídající nějakému přirozenému číslu.

Rozdílné tvary POD módů v jednotlivých případech mají za následek i odlišnosti v jejich relativních mohutnostech daných vlastními čísly  $\lambda_i$ . V tomto případě jsou ale relativně malé, například druhý mód v prvním případě dosahuje 15,7 %, ve druhém 16,2 %.

Srovnáním obou případů lze dospět k závěru, že je vhodné používat soubor snapshotů popisující časový interval odpovídající nějakému násobku periody. Při stanovování počtu snapshotů v praxi je nutné mít na paměti, že první snapshot by měl navazovat na poslední, nesmí se tedy shodovat. V opačném případě by se poslední snapshot už počítal do další periody, přičemž i tento jediný snapshot navíc se při kroku 0,005 sekundy zřetelně projevil, v tomto případě zejména na tvaru druhého módu, který se na toto ukázal být nejcitlivější.

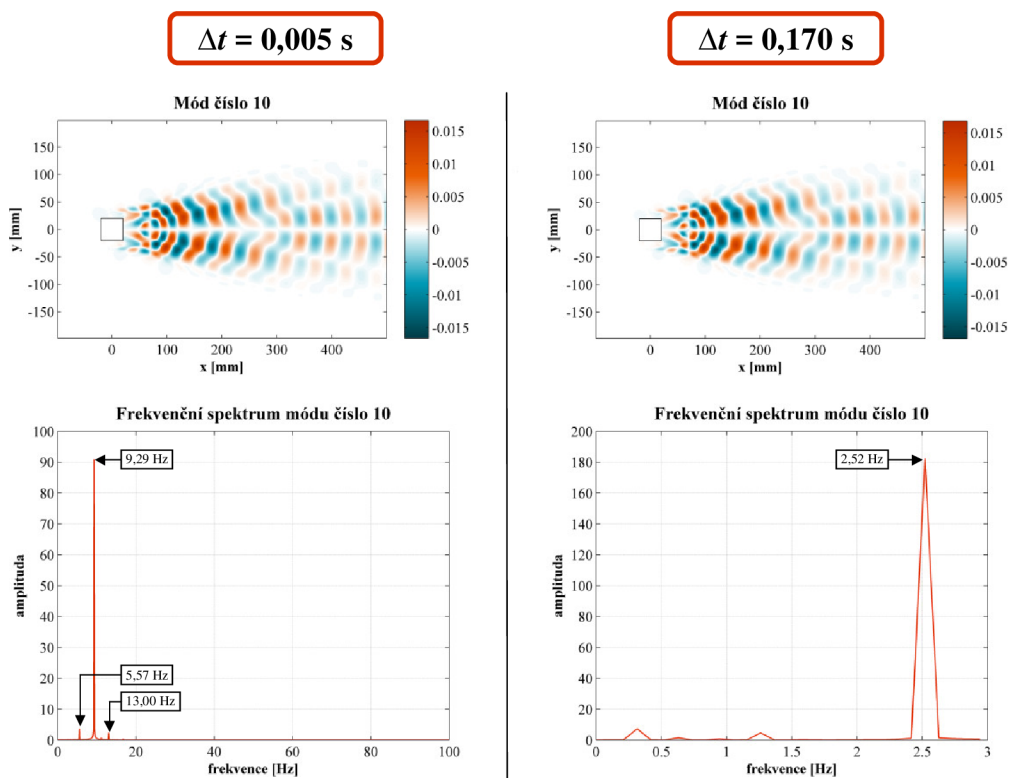
### 3.4.2 Vliv časového kroku

Pro stanovení vlivu časového kroku na výsledky POD byla použita vstupní data popisující časové rozmezí 18 period, v prvním případě 1939 snapshotů s krokem 0,005 sekundy, ve druhém případě 57 snapshotů s krokem 0,170 sekundy.

Z výsledků na obrázku 3.3 vyplývá, že časový krok sám o sobě neovlivnil sledovaný POD mód, ten vyšel prakticky stejně. Nicméně frekvenční analýzy se liší. Důvodem je, že v případě kroku 0,170 sekundy není splněn Nyquistův-Shannonův teorém, který říká, že přesná rekonstrukce spojitěho frekvenčně omezeného signálu z jeho vzorků je možná tehdy, pokud byla vzorkovací frekvence vyšší než dvojnásobek nejvyšší harmonické složky vzorkovaného signálu. Časový krok 0,170 sekundy odpovídá vzorkovací frekvenci 5,88 Hz, pro kterou je nejvyšší možná rekonstruovatelná frekvence 2,94 Hz. Toto hrubé podkročení Nyquistova-Shannonova teorému proto vedlo ke zcela špatným výsledkům frekvenční analýzy, ale nemělo v tomto případě vliv na výsledek POD. Nicméně pokud vzorkovací frekvence odpovídá některé z frekvencí periodického děje, dojde k ovlivnění módů, protože módy příslušející inkriminované frekvenci se jeví jako konstantní signál. Z tohoto důvodu se pak neprojeví na flukuační složce, ale na střední hodnotě.

V praxi se kvůli rekonstruovatelnosti časových funkcí Nyquistův-Shannonův teorém nepodkročuje. V takovém případě změna časového kroku nemá na POD módy prakticky žádný vliv, což potvrzují i výsledky dizertační práce Davida Štefana prostřednictvím srovnání relativních mohutností mnohem složitějšího tlakového pole ve vírovém generátoru.<sup>[34]</sup>

## Redukovaný model vírového proudění



Obrázek 3.3: Vliv časového kroku na POD módy pro případ obtékání čtverce. Zobrazeny jsou tvary desátého POD módu tlaku  $\phi_{10}$  a jeho frekvenční spektra pro časové kroky 0,005 s a 0,170 s.

## 4 Redukovaný model proudění

V první kapitole byla na jednoduchém příkladě prezentována Galerkinova metoda a způsob, jak lze docílit snížení řádu modelu, a tím i snížení výpočetní náročnosti. Další kapitola se věnovala vlastní ortogonální dekompozici, což je metoda, díky které lze efektivně ze známého řešení získat soubor módů pro snížení řádu Galerkinova systému. Výhoda tohoto souboru módů je, že z definice POD je jeho reziduál vzhledem ke vstupním datům minimalizován ve smyslu metody nejmenších čtverců. V této kapitole bude tato technika použita k sestavení takzvaného redukovaného modelu proudění (ve zkratce ROM – z anglického *Reduced Order Model*) nestlačitelné viskózní tekutiny.

### 4.1 Řídící rovnice a používaná konvence

Proudění tekutin se řídí známou Navier-Stokesovou rovnicí, která se dá odvodit na základě rovnováhy sil působících na elementární částici. Pro úplnost systému je doplněna rovnicí kontinuity. Uvažujeme-li nestlačitelnou viskózní kapalinu bez působení vnějších objemových sil, mají tyto rovnice tvar

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v} \nabla \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (4.1b)$$

Cílem je vyřešit tento problém pomocí Galerkinovy metody. Potřebným vstupem je soubor  $m$  POD módů rychlosti. Ty jsou uvažovány pouze pro flukтуаční složku rychlosti, proto platí, že  $\phi_0$  jsou časově středované hodnoty a  $\phi_{1 \div m}$  jsou vypočítané POD módy. Vektor rychlosti je tedy vyjádřen jako

$$\vec{v} = \sum_{j=0}^m \vec{\phi}_j a_j \quad (4.2)$$

Vyjádření rychlosti se dále dosadí do Navier-Stokesovy rovnice (4.1b) a následně se provede Galerkinova projekce jednotlivých POD módů na tuto rovnici. Vzhledem k její rozsáhlosti bude vhodné postupovat člen po členu. Dále se pro zjednodušení zápisu používá následující konvence

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \vec{u} \vec{v} d\Omega \quad (4.3a)$$

$$[\vec{u}]_{\theta} = \int_{\theta} \vec{u} \vec{n} d\theta \quad (4.3b)$$

## 4.2 Vyjádření jednotlivých členů Galerkinova systému

Pro lokální zrychlení dostáváme výraz

$$\left( \vec{\phi}_i, \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^m \vec{\phi}_j a_j \right)_{\Omega} \quad (4.4)$$

Sumace je dále roznásobena derivací i módem  $\vec{\phi}_i$ . Časově závislá je jen funkce  $a_j$ , proto lze aplikovat operátor derivace pouze na ni, přičemž diferenciál se změní z parciálního na totální. Je to dáno tím, že tato funkce nezávisí na ničem jiném než na čase. Výraz má nyní podobu

$$\left( \sum_{j=0}^m \frac{da_j}{dt} \vec{\phi}_i \vec{\phi}_j \right)_{\Omega} \quad (4.5)$$

Zde lze využít ortonormalitu módů popsanou v rovnici (3.5), což vede k vypadnutí mnoha členů. Nyní ale uvažujme obecně neortogonální módy. Dále je potřeba provést prostorovou integraci. S využitím stejné úvahy jako u časové derivace lze vytknout časové funkce před integrál (nezávisí na prostorových souřadnicích), kterému tím pádem podléhají pro změnu jen prostorové POD módy. Definujme matici, jejíž prvky jsou

$$m_{ij} = (\vec{\phi}_i, \vec{\phi}_j)_{\Omega} \quad (4.6)$$

a konečný tvar lokálního zrychlení je

$$\sum_{j=0}^m m_{ij} \frac{da_j}{dt} \quad (4.7)$$

Následuje konvektivní člen. Příslušná projekce má tvar

$$- \left( \vec{\phi}_i, \sum_{j=0}^m \vec{\phi}_j a_j \nabla \sum_{k=0}^m \vec{\phi}_k a_k \right)_{\Omega} \quad (4.8)$$

Sumy jsou sjednoceny do jedné, která je roznásobena členem  $\vec{\phi}_i$

$$- \left( \sum_{j,k=0}^m \vec{\phi}_i \vec{\phi}_j \nabla \vec{\phi}_k a_j a_k \right)_{\Omega} \quad (4.9)$$

Pro zjednodušení se zavádí matice, jejíž prvky jsou

$$q_{ijk} = -(\vec{\phi}_i \vec{\phi}_j \nabla \vec{\phi}_k)_{\Omega} \quad (4.10)$$

Konečná podoba konvektivního členu potom je

$$\sum_{j,k=0}^m q_{ijk} a_j a_k \quad (4.11)$$

Další na řadě je tlakový člen. Zde je možné využít matematickou identitu

$$-\frac{1}{\rho}(\vec{\phi}_i, \nabla p)_\Omega = -\frac{1}{\rho} \left( \nabla \cdot (p \vec{\phi}_i) - p(\nabla \cdot \vec{\phi}_i) \right)_\Omega \quad (4.12)$$

Divergence módů rychlosti je z definice POD nulová a na zbylou divergenci lze aplikovat Gaussovu-Ostrogradského větu

$$-\frac{1}{\rho} \left( \nabla \cdot (p \vec{\phi}_i) \right)_\Omega = -\frac{1}{\rho} [p \vec{\phi}_i]_\theta \quad (4.13)$$

kde  $\theta$  je hranice oblasti  $\Omega$ . Podmínkou je, aby hranice byla uzavřená. Problematika modelování tlaku bude řešena v následující části.

Zbývá viskózní člen. Jeho projekce má tvar

$$\nu \left( \vec{\phi}_i, \Delta \sum_{j=0}^m \vec{\phi}_j a_j \right)_\Omega \quad (4.14)$$

Další úpravy jsou podobné jako u konvektivního členu. Nejprve je roznásobena suma

$$\nu \left( \sum_{j=0}^m \vec{\phi}_i \Delta \vec{\phi}_j a_j \right)_\Omega \quad (4.15)$$

a dále se zavádí matice, jejíž prvky jsou

$$l_{ij} = \nu (\vec{\phi}_i \Delta \vec{\phi}_j)_\Omega \quad (4.16)$$

Za účelem redukce chyb spojených s numerickou derivací se aplikuje Greenova první identita, díky které lze snížit řád derivace o jeden. To vede na nový tvar

$$l_{ij} = \nu \sum_{k=1}^n ([(\phi_k)_i \nabla (\phi_k)_j]_\theta - (\nabla (\phi_k)_i \nabla (\phi_k)_j)_\Omega) \quad (4.17)$$

kde index  $k$  značí směry souřadnicového systému. Konečná podoba viskózního členu je

$$\sum_{j=0}^m l_{ij} a_j \quad (4.18)$$

### 4.3 Modelování tlakového členu

V předchozí části byla provedena Galerkinova projekce POD módů na Navier-Stokesovu rovnici. V ní ale stále přebývá jedna neznámá – tlak. Ten by měl být aproximován konzistentně s rychlostí<sup>[25]</sup>, což znamená, že hledáme takové módy tlaku, které se řídí stejnými časovými funkcemi jako módy rychlosti. Díky tomu dostaneme soustavu  $m$  rovnic pro  $m$  neznámých časových funkcí, kterou už je možné vyřešit. Způsobů, jak se s tlakovým členem vypořádat, je více.

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

Autorem prvního způsobu je Bernd Noack.<sup>[25]</sup> Módy tlaku jsou zde získány vyřešením Poissonovy rovnice pro tlak. Tato rovnice je odvozena z Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou kapalinu (4.1b) aplikováním operátoru divergence a využitím rovnice kontinuity (4.1a), díky které mnoho členů vypadne. Výsledný tvar pro 3D je

$$\Delta p = -\rho \left( \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (4.19)$$

Tento tvar se dá upravit využitím sumace a indexového zápisu do podoby

$$\Delta p = -\rho \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (4.20)$$

Dalším krokem je dosažení aproximace rychlosti pomocí POD módů (4.2) do této rovnice, výsledek pak lze po úpravě zapsat ve formě

$$\Delta p = \sum_{j,k=0}^m s_{jk} a_j a_k \quad (4.21)$$

Řešení této rovnice lze očekávat ve tvaru

$$p = \sum_{j,k=0}^m p_{jk} a_j a_k \quad (4.22)$$

kde parciální tlaky  $p_{jk}$  splňují rovnici

$$\Delta p_{jk} = s_{jk} \quad (4.23)$$

Neumannova okrajová podmínka pro řešení této rovnice se získá vyjádřením gradientu tlaku z Navier-Stokesovy rovnice (4.1b). Po posazení tohoto řešení do Galerkinovy projekce (4.12) má příslušný člen podobu

$$-\frac{1}{\rho} \left( \vec{\phi}_i, \nabla \sum_{j,k=0}^m p_{jk} a_j a_k \right)_{\Omega} \quad (4.24)$$

Úpravy opět spočívají v roznásobení sumy a zavedení matice, jejíž prvky jsou

$$q_{ijk}^p = -\frac{1}{\rho} \left( \vec{\phi}_i, \nabla p_{jk} \right)_{\Omega} \quad (4.25)$$

což vede na další kvadratický člen Galerkinova systému

$$\sum_{j,k=0}^m q_{ijk}^p a_j a_k \quad (4.26)$$

Tato metoda je vhodná tam, kde známe rychlostní, ale nemáme tlakové pole. Typickým příkladem jsou experimentální data, kde zatím lze získat pouze rychlostní pole, například metodou PIV. Její nevýhodou je náročnost spojená s řešením Poissonovy rovnice.

Pokud známe i tlakové pole, což je případ CFD simulací, je snazší pro výpočet tlakového členu použít druhou metodu, kterou navrhl Michel Bergmann.<sup>[3]</sup> Spočívá v provedení POD pro rychlost a tlak dohromady. Použije se zde POD pro vektorovou veličinu popsaná v části 3.2.2, přičemž vstupní vektorová veličina je

$$\vec{u} = (v_x, v_y, v_z, p) \quad (4.27)$$

Ve výsledku je tlak dekomponován společně s rychlostí, čímž získáváme aproximaci tlaku ve tvaru

$$p = \sum_{j=0}^m \psi_j a_j \quad (4.28)$$

Po dosazení do Galerkinovy projekce má tlakový člen tvar

$$\frac{1}{\rho} \left( \vec{\phi}_i, \nabla \sum_{j=0}^m \psi_j a_j \right)_{\Omega} \quad (4.29)$$

Další úpravy jsou stejné jako v předchozích případech. Zavádí se matice, jejíž prvky jsou

$$l_{ij}^p = \frac{1}{\rho} \left( \vec{\phi}_i, \nabla \psi_j \right)_{\Omega} \quad (4.30)$$

a výsledkem je další lineární člen Galerkinova systému

$$\sum_{j=0}^m l_{ij}^p a_j \quad (4.31)$$

Důsledkem provedení POD rychlosti a tlaku dohromady je, že módy rychlosti (a ani tlaku) nejsou obecně ortogonální. Důvodem je, že po provedení POD jsou výsledné prostorové módy rozděleny na tlakovou a rychlostní složku. Ortogonalita zde platí pouze pro celý vektor, ne jednotlivě pro jeho složky.

Jak je vidět, výhoda Bergmannova modelu spočívá v jeho nenáročnosti. Velkou nevýhodou ale je, že je platný pouze v referenčním bodě, a to kvůli tomu, že změna gradientu tlaku je podle něj přímo úměrná změně rychlosti (4.29), zatímco ve skutečnosti se mění kvadraticky, což Noackův model respektuje (4.24). Třetí přístup k modelování tlaku pak spočívá v tom, že se Poissonova rovnice neřeší plnohodnotnou simulací, ale na úrovni redukováného modelu.<sup>[1]</sup> Předpokladem jsou známé hodnoty tlaku, z nichž je provedeno POD odděleně od rychlosti. Aproximace tlaku tedy je

$$p = \sum_{j=0}^m \psi_j b_j \quad (4.32)$$

Funkce  $b_j$  jsou novou neznámou, proto je potřeba v rámci redukováného modelu kromě Navier-Stokesovy rovnice (4.1b) řešit navíc také Poissonovu rovnici (4.19). Dalším krokem je tedy dosazení této aproximace a provedení Galerkinovy projekce s testovacími funkcemi  $\psi_i$



---

## Redukovaný model vírového proudění

---

$$\left( \psi_i, \sum_{j=0}^m \Delta \psi_j b_j \right)_{\Omega} = \left( \psi_i, \sum_{j,k=0}^m k_{jk} a_j a_k \right)_{\Omega} \quad (4.33)$$

kde člen  $k_{jk}$  v sobě obsahuje všechny členy z pravé strany. Zde bude pro jednoduchost uvažováno 2D proudění

$$k_{jk} = \frac{\partial(\phi_x)_j}{\partial x} \frac{\partial(\phi_x)_k}{\partial x} + \frac{\partial(\phi_y)_j}{\partial y} \frac{\partial(\phi_y)_k}{\partial y} + \frac{\partial(\phi_x)_j}{\partial y} \frac{\partial(\phi_y)_k}{\partial x} \quad (4.34)$$

Po zavedení matic, které v sobě obsahují integrály přes doménu, stejně jako tomu bylo u Navier-Stokesovy rovnice, dostáváme tvar

$$\sum_{j=0}^m L_{ij}^p b_j = \sum_{j,k=0}^m q_{ijk}^p a_j a_k \quad (4.35)$$

V kombinaci s Navier-Stokesovou rovnicí nyní máme systém  $2m + 2$  rovnic pro  $2m + 2$  neznámých  $a_j$  a  $b_j$ ,  $j = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ . Ale díky tomu, že po aplikaci Galerkinovy projekce se Poissonova rovnice zredukovala na obyčejnou soustavu lineárních rovnic, lze neznámé funkce  $b_i$  explicitně vyjádřit a dosadit je do Navier-Stokesovy rovnice. Platí tedy

$$b_j = \sum_{k=0}^{(m+1)^2} s_{jk} a_k^q \quad (4.36)$$

kde  $s_{jk}$  jsou prvky matice  $s$ , která se získá řešením soustavy rovnic (4.35)

$$\mathbf{s} = (\mathbf{L}^p)^{-1} \mathbf{q}^p \quad (4.37)$$

Matice  $\mathbf{q}^p$  je v tomto vztahu oproti rovnici (4.35) přeskládána tak, aby bylo možné soustavu rovnic napsat v maticové formě  $\mathbf{L}^p \mathbf{b} = \mathbf{q}^p \mathbf{a}^q$ , kde vektor  $\mathbf{a}^q$  v sobě obsahuje všechny součiny časových funkcí  $a_j a_k$ . Matici  $s$  je možné přeskládat tak, aby platilo

$$b_j = \sum_{k,l=0}^m s_{jkl} a_k a_l \quad (4.38)$$

Po dosazení do výchozího vztahu (4.32) dostáváme nový předpis pro tlak

$$p = \sum_{j,k,l=0}^m \psi_j s_{jkl} a_k a_l \quad (4.39)$$

Pro zjednodušení definujeme novou matici, jejíž prvky jsou

$$p_{jk} = \sum_{i=0}^m \psi_i s_{ijk} \quad (4.40)$$

což vede na finální aproximaci tlaku

$$p = \sum_{j,k=0}^m p_{jk} a_j a_k \quad (4.41)$$

se kterou se dále pracuje analogicky jako u Noackova modelu (4.24) až (4.26). Tato aproximace respektuje kvadratickou závislost mezi gradientem tlaku a rychlostí. Nevýhodou je riziko značných numerických chyb, protože Poissonova rovnice obsahuje mnoho součinů prvních derivací i druhé derivace POD módů.

S ohledem na výhody a nevýhody předchozích metod byla v rámci této práce formulována čtvrtá metoda, která v sobě kombinuje nenáročnost Bergmannova modelu při zachování kvadratické závislosti gradientu tlaku na rychlosti. Trik spočívá v tom, že se provede POD veličiny

$$\vec{u} = (v_x, v_y, v_z, \sqrt{p}) \quad (4.42)$$

Rozdíl oproti Bergmannovu modelu (4.27) spočívá v tom, že se nepracuje s tlakem, ale s jeho odmocninou. Druhá odmocnina je ale v oboru reálných čísel definovaná pouze pro nezáporná čísla, takže je nutné zajistit, aby tlak nenabýval záporných hodnot a ideálně také to, aby se nepohyboval příliš blízko nule, což po aplikaci odmocniny vede na strmé gradienty. To se provede jednoduše přičtením dostatečně velké konstanty ke všem hodnotám tlaku. Z Navier-Stokesovy rovnice (4.1b) je patrné, že rychlostní pole nezávisí na konkrétních hodnotách tlaku, ale pouze na jeho gradientu, který se přičtením konstanty nezmění. Dostáváme tedy

$$\nabla p = \nabla (\sqrt{p})^2 = \nabla \left( \sum_{j=0}^m \psi_j a_j \right)^2 = \sum_{j,k=0}^m \nabla (\psi_j \psi_k) a_j a_k \quad (4.43)$$

Toto vyjádření se opět analogicky s předchozím a Noackovým modelem dosadí do Navier-Stokesovy rovnice, kde vede na další kvadratický člen.

## 4.4 Shrnutí a řešení Galerkinova systému

V předchozích částech byla vyřešena podoba jednotlivých prvků Galerkinova systému. Úpravy vedly na kvadratické a lineární členy. Dalším krokem je sečtení těch, které si tvarově odpovídají. Týká se to tlakového členu, který má v závislosti na použitém modelu lineární formu (takže ho lze přičíst k viskóznímu členu) nebo kvadratickou formu (takže ho lze přičíst ke konvektivnímu zrychlení). Galerkinův systém pak má tvar

$$\sum_{j=0}^m m_{ij} \frac{da_j}{dt} = \sum_{j=0}^m l_{ij} a_j + \sum_{j,k=0}^m q_{ijk} a_j a_k \quad (4.44)$$

pro  $i = 0, 1, \dots, m$ . V tomto tvaru se ale Galerkinův systém většinou neřeší. Problémy zde činí časově středované hodnoty  $\vec{\phi}_0$ . Ty obvykle obsahují okrajové podmínky, jako je vstupní rychlost nebo výstupní tlak. Numerické chyby ve výpočtu příslušné časové funkce by vedly ke změně okrajových podmínek, což je nežádoucí. Dalším důvodem jsou komplikace v dynamických analýzách.<sup>[24]</sup> Proto se časová funkce  $a_0$  nepočítá, ale položí se rovna jedné. Rovnice pro  $i = 0$  je pak nadbytečná, takže se ze systému vyřadí. Dosazení  $a_0 = 1$  na příslušná místa

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

v kvadratickém a lineárním členu vede na jejich oslabení o jeden až dva řády. Důsledkem je vznik konstantního členu

$$c_i = l_{i0} + q_{i00} \quad (4.45)$$

a rozšíření lineárního členu

$$l_{ij} = l_{ij} + q_{ij0} + q_{i0j} \quad (4.46)$$

Galerkinův systém má nyní následující podobu

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \frac{da_j}{dt} = c_i + \sum_{j=1}^m l_{ij} a_j + \sum_{j,k=1}^m q_{ijk} a_j a_k \quad (4.47)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Nyní už lze přikročit k řešení Galerkinova systému, čili jeho integraci v čase pomocí vhodné numerické metody. V této práci bude řešení prováděno v MATLABu pomocí řešiče *ode45*. Ten řeší systémy ve tvaru  $\dot{y} = f(t, y)$ , takže prvním krokem je vynásobení Galerkinova systému inverzní maticí k matici  $\mathbf{m}$ . Matice kvadratického členu se násobí postupně pro jednotlivé hodnoty indexu  $k$ . Tím došlo k osamostatnění časové derivace na levé straně soustavy

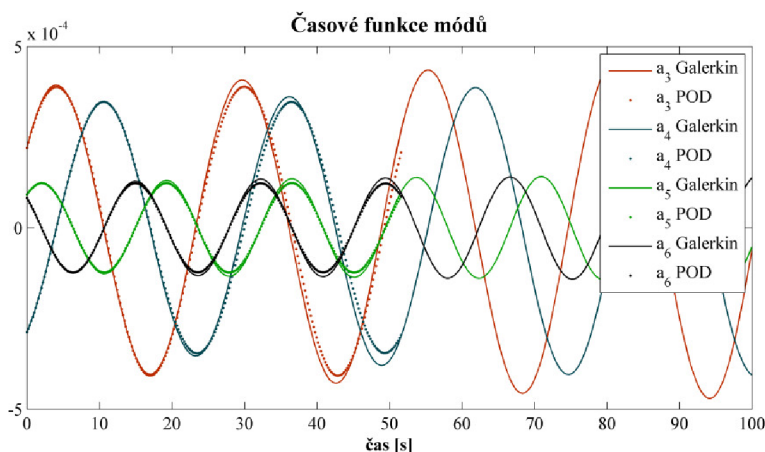
$$\frac{da_i}{dt} = c_i + \sum_{j=1}^m l_{ij} a_j + \sum_{j,k=1}^m q_{ijk} a_j a_k \quad (4.48)$$

Poté je možné vytvořit funkci, ve které bude sestavován Galerkinův systém, a příslušným příkazem spustit řešič. Detaily k této proceduře lze nalézt v literatuře.<sup>[20]</sup> Pro jednoznačnost řešení je ještě nutné definovat počáteční podmínku. Tou mohou být například počáteční hodnoty časových funkcí získaných z POD.

## 4.5 Kalibrace Galerkinova systému

Z předcházejícího popisu sestavení redukovaného modelu proudění je vidět, že je potřeba provést mnoho numerických výpočtů – derivací a integrálů, které jsou obecně zatíženy numerickou chybou. To se promítne i na řešení Galerkinova systému, kde často dochází k nezanedbatelným frekvenčním a amplitudovým chybám. Na obrázku 4.1 je pro ilustraci vykresleno řešení redukovaného modelu obtékání čtverce se 7 použitými módy (časově středované hodnoty + 6 POD módů flukтуаční složky). Je zde vidět narůstající rozdíl mezi řešením Galerkinova systému a výsledky POD, který nakonec může vést k divergenci nebo ustálení výsledků na chybných hodnotách. Pro tyto chyby je možné identifikovat několik příčin<sup>[7]</sup>:

- 1) *strukturální nestabilita* Galerkinova systému<sup>[23]</sup>,
- 2) *zkrácení báze* POD módů (zanedbání vyšších POD módů),
- 3) *numerické chyby* (ve výpočtech matic i v integraci Galerkinova systému),
- 4) *chybné předpoklady* (při zanedbávání různých členů nebo například nesplnění podmínky nestlačitelnosti u experimentálních dat).



Obrázek 4.1: Řešení Galerkinova systému se 7 módy a výsledky POD.

Pojem strukturální nestabilita značí, že malé chyby v systému mohou vést k velkým chybám v řešení. Bod 1) je tedy úzce provázán s bodem 3). Malá hodnota kinetické energie vyšších módů daná jejich vlastními čísly vede k jejich zanedbání a nepoužití v Galerkinově systému. Situace ale vypadá jinak z hlediska disipace. Zde vyšší POD módy často hrají důležitou roli, protože značná část disipace se odehrává na úrovni malých vírů, které jsou jejich součástí.<sup>[3, 34]</sup> Bod 2) je tím pádem do jisté míry provázán s bodem 4). Vliv chyby spojené se zanedbáním vyšších POD módů pomůže odhadnout energetická analýza Galerkinova systému, která bude řešena v další části.

Výše popsané problémy se dají řešit dvěma cestami:

- 1) *modelování zanedbaných dějů* (subgridní modely turbulence<sup>[35]</sup>, využití energetické analýzy<sup>[22]</sup>, využití reziduálů Navier-Stokesovy rovnice<sup>[3]</sup> aj.),
- 2) *kalibrace Galerkinova systému* (prostřednictvím minimalizace definované chyby).

První cestu lze označit jako fyzikální, protože spočívá ve vytvoření modelu založeného na popisu fyzikálních zákonitostí (ať už exaktního nebo empirického). Naproti tomu druhou cestu lze nazvat matematickou, protože spočívá v čistě matematické úpravě systému tak, aby jeho řešení bylo co nejbližší zvolené funkci (v tomto případě časové funkce z POD). Postrádá tedy jakoukoli vazbu na nějakou fyzikální zákonitost a platí vždy jen pro konkrétní Galerkinův systém.

Ačkoli se první způsob zdá být preferovanou volbou vzhledem ke své fyzikální podstatě, může se stát, že dosažené výsledky jsou sice lepší, ale pořád ne dostatečně přesné. Potom zůstává už jen druhý způsob, tedy matematická kalibrace. K jejímu provedení je vhodné nejprve přepsat Galerkinův systém (4.48) do maticové podoby. Definujeme matice

$$\mathbf{E}(t_i) = (1 \quad a_1(t_i) \quad \cdots \quad a_m(t_i) \quad a_1 a_1(t_i) \quad \cdots \quad a_m a_m(t_i))$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} c_1 & l_{11} & \cdots & l_{1m} & q_{111} & \cdots & q_{1mm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & l_{m1} & \cdots & l_{mm} & q_{m11} & \cdots & q_{mmm} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$\dot{\mathbf{a}}(t_i) = (\dot{a}_1(t_i) \quad \cdots \quad \dot{a}_m(t_i))$$

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

Galerkinův systém pak lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{E}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{a}} \quad (4.50)$$

Cílem kalibrace je nalézt takové koeficienty  $\mathbf{x}$ , aby byla zvolená chyba minimální. Lze použít následující definice<sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}_{\text{POD}}(t) - \mathbf{a}_{\text{ROM}}(t) \quad (4.51)$$

kde  $\mathbf{a}_{\text{ROM}}(t)$  řeší problém (4.50). Těto metodě se někdy říká Floquetova kalibrace a vyžaduje opakovanou integraci Galerkinova systému v kombinaci s některým optimalizačním algoritmem k nalezení výsledných koeficientů.<sup>[22]</sup> Další dvě definice spočívají v dosazení časových funkcí z POD do systému (4.50). Druhá definice chyby se získá po jeho integraci

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}_{\text{POD}}(t) - \mathbf{a}_{\text{POD}}(0) - \int_0^t \mathbf{E}(t)\mathbf{x}dt \quad (4.52)$$

a konečně třetí definice se získá analogicky ke druhé, ale bez integrace

$$\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{a}}_{\text{POD}}(t) - \mathbf{E}(t)\mathbf{x} \quad (4.53)$$

Tato metoda je někdy nazývána Poincarého kalibrace.<sup>[22]</sup>

V dalším bude využita třetí definice chyby. Tu chceme minimalizovat metodou nejmenších čtverců

$$\langle \|\mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{x}, t)\|^2 \rangle_T = \min \quad (4.54)$$

kde  $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e}}$  značí normu s jednotkovou váhovou funkcí a  $\langle \cdot \rangle_T$  značí středování přes časový úsek  $T$ . Hledaná matice  $\mathbf{x}$  se získá vyřešením problému

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.55)$$

jehož prvky jsou

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^T \mathbf{E}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{a}} \quad (4.56)$$

Přímé řešení tohoto problému ale není rozumné z toho důvodu, že matice  $\mathbf{A}$  obvykle bývá špatně podmíněná<sup>[7]</sup>, což má za následek, že malé změny ve struktuře problému vedou k velkým změnám řešení. Jinými slovy, řešení je velice citlivé na numerické chyby v systému, což eventuálně může vést k rapidnímu nárůstu chyby. Proto autor Laurent Cordier navrhl použít k nalezení matice  $\mathbf{x}$  přístup zvaný Tichonovova regularizace, který se dá popsat jako nalezení kompromisu mezi dvěma požadavky<sup>[7]</sup>:

- 1)  $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \min$
- 2)  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 = \min$

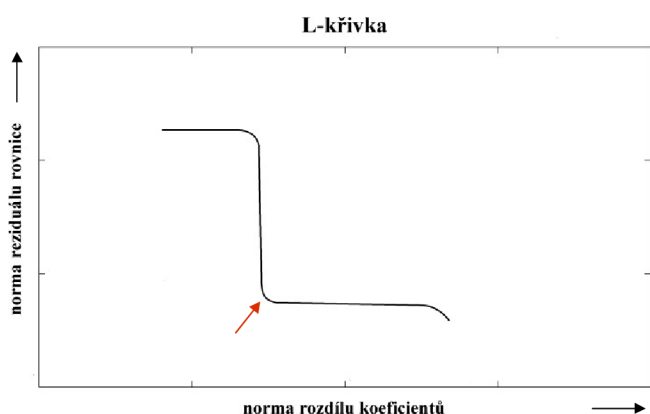
První požadavek je minimalizace reziduálu řešeného problému, druhý požadavek je, aby rozdíl mezi původními koeficienty Galerkinova systému  $\mathbf{x}_0$  (před kalibrací) a nově získanými byl co nejmenší. Druhý požadavek je založen na předpokladu, že původní koeficienty vyžadují pouze malé úpravy, které opraví numerické chyby. Je to způsob zachování fyzikální podstaty původního modelu, protože se dá ukázat, že bez aplikace tohoto požadavku by

norma rozdílu mezi původními a novými koeficienty nabývala velmi vysokých hodnot.<sup>[7]</sup>

Tichonovova regularizace tedy spočívá v hledání minima

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \alpha\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 = \min \quad (4.57)$$

kde  $\alpha$  je parametr regularizace. Pokud je roven nekonečnu, dostaneme původní koeficienty v nezměněné podobě, pokud je roven nule, dostaneme neregularizované řešení. Dalším krokem je výběr optimální hodnoty regularizačního parametru. K tomu je potřeba napočítat výsledky pro několik zvolených hodnot a vykreslit si do grafu normu reziduálu rovnice proti normě rozdílu koeficientů. Výsledná křivka často má tvar písmene L, proto se jí říká L-křivka. Obecný tvar této křivky včetně obvyklé volby regularizačního parametru je na obrázku 4.2.



**Obrázek 4.2:** Obecný průběh L-křivky. Oranžová šipka značí obvyklou volbu regularizačního parametru.

Z grafu je zřejmé, že reziduál začíná výrazně klesat až tehdy, když norma rozdílu koeficientů dosáhne určité hodnoty. Dále dochází k rychlému poklesu, který se záhy téměř zastaví a další pokles nastává až u velkých hodnot normy rozdílu koeficientů, kde už v případě Galerkinova systému dochází ke ztrátě fyzikální podstaty. Rigorózní přístup k volbě regularizačního parametru spočívá v nalezení místa největšího zakřivení písmene L, které je na obrázku znázorněno oranžovou šipkou.<sup>[7]</sup>

Samotný výpočet matice  $\mathbf{x}$  pro zvolenou hodnotu regularizačního parametru a jednotkovou váhovou funkci spočívá ve vyřešení rovnice

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \alpha \mathbf{x}_0 \quad (4.58)$$

kde  $\mathbf{I}$  je opět jednotková matice. Lze použít i jinou váhovou funkci, a tím upřednostnit modifikaci některých koeficientů nad jinými.

Po výpočtu kalibrovaných koeficientů Galerkinova systému je potřeba mít na paměti, že při jeho řešení (integraci v čase) by měla být použita stejná diskretizace jako při výpočtu derivací časových funkcí z POD  $\dot{\mathbf{a}}$ , které jsou jedním ze vstupů pro regularizaci. Znamená to použití stejné numerické metody se stejným časovým krokem. Vzhledem k této diskretizaci jsou totiž výsledky regularizace optimální, takže použití jiné metody může vést k méně přesným výsledkům.

## 4.6 Energetická analýza Galerkinova systému

Energetická analýza Galerkinova systému je nástroj, díky kterému lze získat náhled do energetických toků v rámci jednotlivých POD módů a mezi nimi. Ze zjištěných energetických bilancí lze odhadnout vliv zanedbaných módů a jím ovlivněnou stabilitu řešení. Tuto metodu formuloval Bernd Noack<sup>[25]</sup> s využitím postupů Dietmara Rempfera.<sup>[27]</sup>

Princip výpočtu energetických toků jednotlivých módů je velice podobný principu výpočtu Galerkinova systému. Jde opět o projekci jednotlivých módů na Navier-Stokesovu rovnici, ale tentokrát se použijí celé módy, ne jen jejich prostorové funkce. Navíc se provádí časové středování přes úsek  $T$ . Řešíme problém

$$\left\langle (\vec{\phi}_i a_i, \mathcal{N}) \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad (4.59)$$

kde  $\mathcal{N}$  je operátor Navier-Stokesovy rovnice (4.1b) a funkce  $a_i$  jsou časové funkce z POD. Uvažuje se zde dekompozice kolem časově středovaných hodnot. Díky biortogonalitě časových funkcí (3.9) mnoho členů vypadne. Zbylé tvoří po osamostatnění časových derivací na levé straně a drobné úpravě modální bilanční rovnice ve tvaru

$$\frac{d\mathcal{K}_i}{dt} = \mathcal{P}_i + \mathcal{C}_i + \mathcal{T}_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i \quad (4.60)$$

První člen je úměrný časově středované změně měrné kinetické energie v čase. Příslušný vztah je

$$\frac{d\mathcal{K}_i}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{\phi}_i, \vec{\phi}_i)_{\Omega} \left\langle \frac{da_i^2}{dt} \right\rangle_T \quad (4.61)$$

Druhý člen se nazývá produkce. Jeho definice je

$$\mathcal{P}_i = (\vec{\phi}_i, \vec{\phi}_i)_{\Omega} q_{i0} \langle a_i^2 \rangle_T \quad (4.62)$$

Produkce je interakce mezi daným flukтуаčním módem a časově středovanými hodnotami. Obvykle vychází kladně, takže představuje energetický tok, který daný mód získává z časově středovaného proudu. Třetí člen se nazývá konvekce. Je definován vztahem

$$\mathcal{C}_i = (\vec{\phi}_i, \vec{\phi}_i)_{\Omega} q_{i0i} \langle a_i^2 \rangle_T \quad (4.63)$$

Opět jde o interakci s časově středovaným proudem, která ale na rozdíl od předchozího členu obvykle vychází záporně. Představuje tedy energetický tok odevzdávaný časově středovanému proudem. Pro  $i = 0$  jsou definice produkce a konvekce shodné, v tomto případě se uvažuje pouze konvekce. Čtvrtý člen se nazývá transfer. Vztah pro jeho výpočet je

$$\mathcal{T}_i = (\vec{\phi}_i, \vec{\phi}_i)_{\Omega} q_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle_T \quad (4.64)$$

Tento člen má význam přenosu energie do/z dalších flukтуаčních módů. Pátý člen je disipace. Jeho definice je

$$\mathcal{D}_i = (\phi_i, \phi_i)_\Omega l_{ii} \langle a_i^2 \rangle_T \quad (4.65)$$

Popisuje přeměnu energie na teplo. Poslední je tlakový člen. Pro model dle Bergmanna se vypočítá ze vztahu

$$\mathcal{F}_i = (\phi_i, \phi_i)_\Omega l_{ii}^p \langle a_i^2 \rangle_T \quad (4.66)$$

Představuje energii získávanou z tlakového gradientu.

Sečtením všech modálních bilančních rovnic lze získat globální bilanční rovnici. Energetická bilance, resp. její reziduál, napoví, jak se budou chovat výsledky integrace Galerkinova systému v čase. Toho lze následně využít k jeho kalibraci.<sup>[22]</sup>



## 5 Aplikace Galerkinovy metody na obtékání čtverce

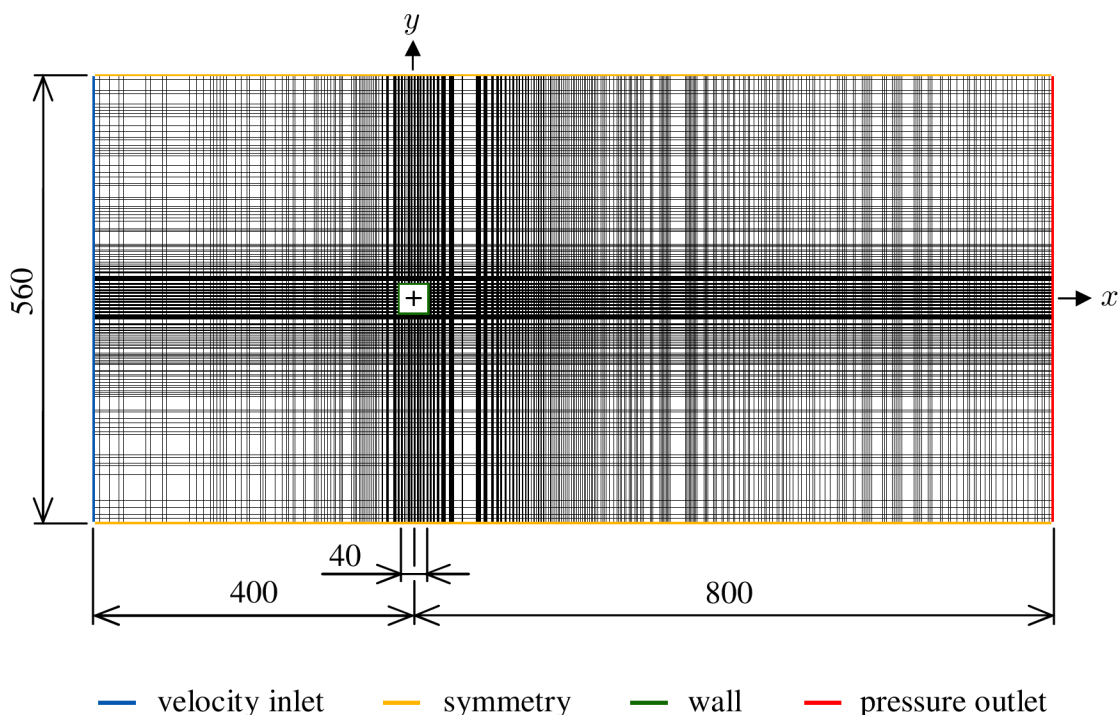
V této části bude řešen 2D problém obtékání čtverce, což je v určitém rozsahu Reynoldsových čísel nestacionární proudění, při němž dochází ke vzniku tzv. Kármánovy vírové stezky. Jde o periodické odtrhávání vírů v úplavu za překážkou. Tento jev má velký praktický význam, protože nepříznivě ovlivňuje účinnost strojů a tlakové pulzace vznikající vlivem odtrhávání vírů mají za následek periodickou sílu působící na obtékané těleso, která jej může rozkmitat a v krajním případě způsobit únavový lom. Typickými příklady jsou proudění kolem křídel letadla nebo kolem lopatek vodní turbíny. Pro svou relativní jednoduchost a celou škálu průvodních jevů je obtékání jednoduchého tělesa často využíváno k naladění různých matematických modelů proudění.

Cílem této části je provést CFD simulaci obtékání čtverce pro laminární i turbulentní proudění, na výsledky aplikovat vlastní ortogonální dekompozici a sestavit redukovaný model s použitím Galerkinovy metody.

### 5.1 Laminární proudění ( $Re = 200$ )

#### 5.1.1 CFD simulace

Simulace byla provedena na výpočetní síti na obrázku 5.1. Ta pokrývá oblast o rozměrech  $1200 \times 560$  mm. Obtékaný čtverec o straně 40 mm se nachází 400 mm od levého okraje, vertikálně je zarovnán doprostřed. Souřadnicový systém má počátek ve středu čtverce, osa  $x$  směřuje do směru proudění (doprava), osa  $y$  do příčného směru (nahoru).



Obrázek 5.1: Výpočetní síť, geometrie a okrajové podmínky.

Výpočetní síť je strukturovaná a konformní typu quad (jejími prvky jsou na sebe navazující čtyřúhelníky – čtverce a obdélníky) a skládá se z 209400 buněk, 419930 stran a 210530 uzlů. V oblasti okolo čtverce je jemnější, aby bylo dobře podchyceno odtržení mezní vrstvy, kde dochází k velkým změnám rychlosti na malém prostoru.

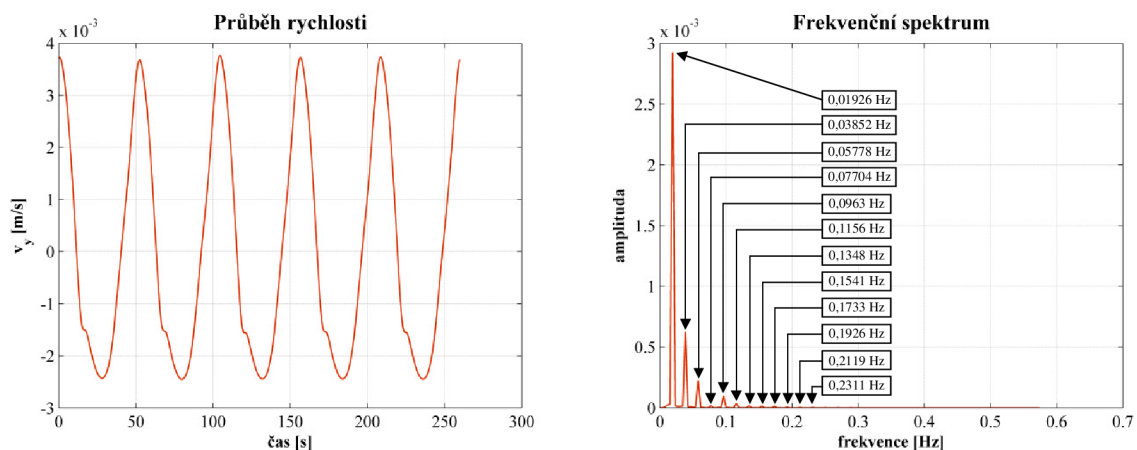
Pro řešení laminárního proudění bez problémů stačí Navier-Stokesovy rovnice. Není tedy nutné k nim přidávat další modely či korekce. Vstupní rychlost byla nastavena na hodnotu 0,00502 m/s, což v kombinaci se stranou čtverce dává Reynoldsovo číslo 200. CFD simulace byla provedena v programu ANSYS Fluent 16.2, konečné nastavení řešiče je v následující tabulce.

Tabulka 5.1: Nastavení Fluentu.

Materiály		
<b>Materiál uvnitř buněk:</b>		voda
<b>Vlastnosti:</b>	<b>Hustota [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Dynamická viskozita [Pa·s]</b>
	998,2	0,001003
Okrajové podmínky		
<b>Vstupní rychlost [m/s]</b>	<b>Výstupní tlak [Pa]</b>	<b>Stěna</b>
0,00502	0	No slip
Metody řešení a nastavení řešiče		
<b>Sdružení tlaku a rychlosti</b>	PISO	
<b>Gradienty</b>	Least squares cell based	
<b>Tlak</b>	Second order	
<b>Hybnost</b>	QUICK	
<b>Přechody</b>	Second order implicit	
<b>Časový krok [s]</b>	0,2	
<b>Počet iterací na časový krok</b>	30	

Průběh řešení byl monitorován v jednom bodě nacházejícím se v úplavu na souřadnicích [93,21] mm. Zaznamenávána byla rychlost ve směru  $y$  metodou vertex average (průměr z vrcholů dané buňky). Na tato data byla aplikována Fourierova transformace, jejímž výsledkem je frekvenční spektrum zobrazené na obrázku 5.2. Data pro POD byla exportována pomocí funkce automatického exportu po každém časovém kroku. Zvolen byl export hodnot v těžištích buněk do ASCII souboru.

## Redukovaný model vírového proudění

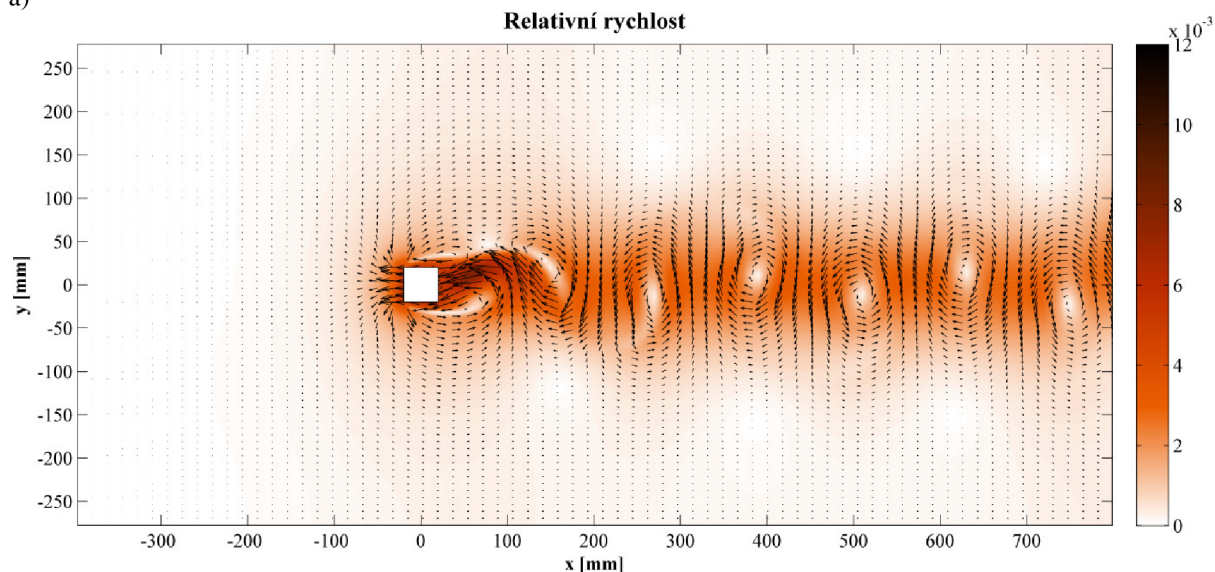


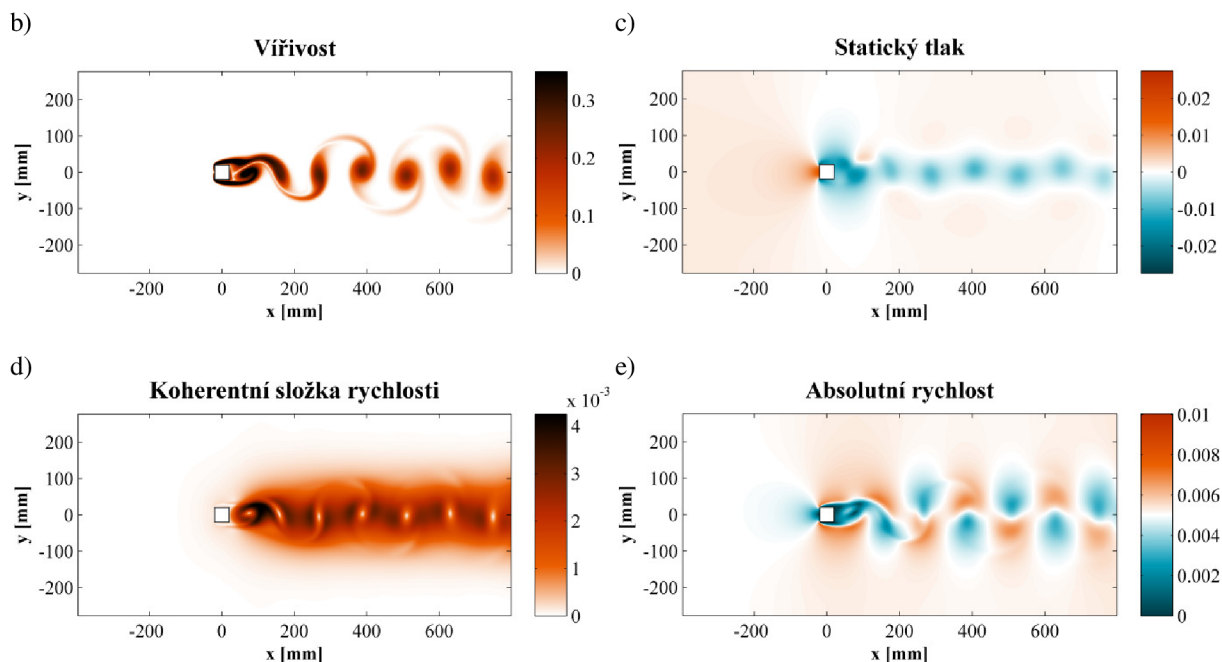
Obrázek 5.2: Průběh rychlosti ve směru  $y$  v monitorovaném bodě a jeho frekvenční spektrum.

Z výsledků Fourierovy transformace vyplývá, že proudění je periodické. Základní frekvence je 0,01926 Hz, dále se tu projevují i její násobky, přičemž jejich amplituda s rostoucí frekvencí exponenciálně klesá. Výjimkou je čtvrtá vlastní frekvence, jejíž amplituda je oproti sousedním frekvencím velice nízká. Důvodem je zřejmě to, že se její vlastní tvar ve sledovaném místě projevuje jen slabě.

Na obrázku 5.3 jsou pomocí kontur vykreslena prostorová rozložení hodnot některých veličin v rámci zvoleného časového okamžiku (snapshot). Je na nich dobře vidět očekávaná Kármánova vírová stezka. Obrázek 5.3 a) znázorňuje pole relativní rychlosti, ve kterém je možné dobře identifikovat odtržené vírové struktury rotující kolem svých vírových jader. K odtrhávání vírů dochází střídavě na horní a dolní straně čtverce. Důsledkem toho se střídá i směr rotace vírů – víry na horní straně rotují po směru hodinových ručiček, víry na spodní straně rotují proti směru hodinových ručiček. Směr rotace víru je dán rychlostním profilem, kdy u stěny je relativní rychlost ve směru osy  $x$  záporná, o kousek výš ale už kladná, což je dáno zrychlením proudu při obtékání. Na obrázku 5.3 b) jsou vykresleny kontury velikosti

a)





**Obrázek 5.3:** a) pole relativní rychlosti (vzhledem ke vstupní rychlosti), b) velikost vřivosti, c) statický tlak, d) velikost koherentní složky rychlosti, e) velikost absolutní rychlosti

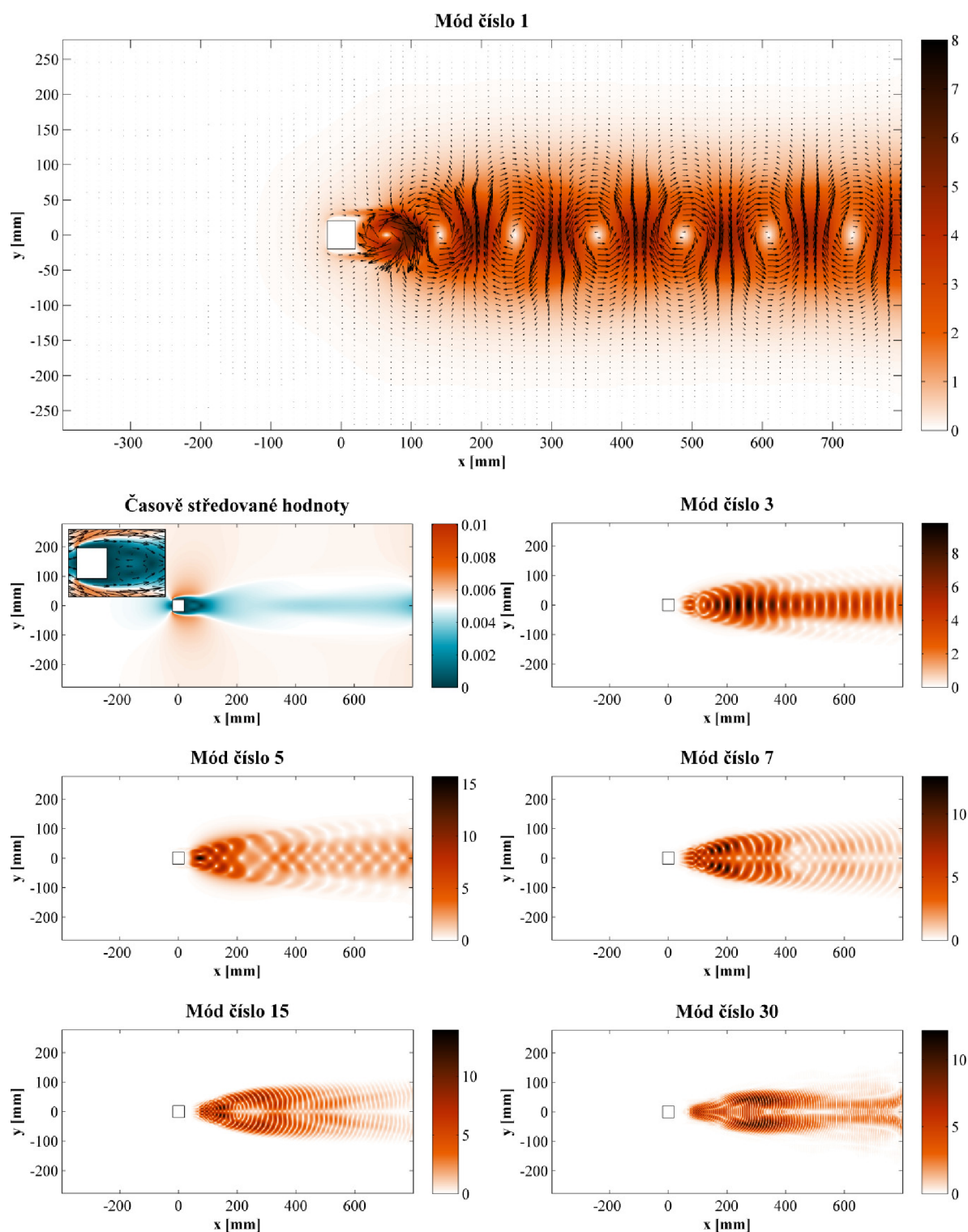
vřivosti. Tato veličina poskytuje asi nejnázornější vizualizaci Kármánovy vírové stezky. Z kontur statického tlaku na obrázku 5.3 c) je patrné, že od kraje víru směrem k jeho jádru tlak klesá. To je způsobeno odstředivými účinky rotující tekutiny. Na výstupu je vidět vliv tlakové okrajové podmínky, kdy tlak po celé délce klesá na nulovou hodnotu. Na obrázku 5.3 d) je vykreslena velikost koherentní složky rychlosti (označení je podle Reynoldsovy trojitě dekompozice). Tato veličina slouží jako vstup pro POD a zároveň dává informaci o tom, kde je proudění stacionární a kde se naproti tomu odehrávají dynamické děje. Nakonec na obrázku 5.3 e) jsou vykresleny kontury velikosti absolutní rychlosti.

### 5.1.2 Vlastní ortogonální dekompozice

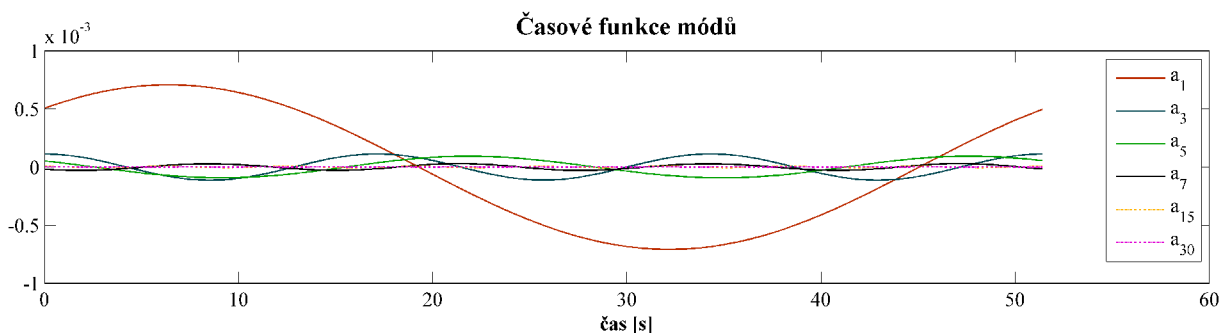
Vstupem pro vlastní ortogonální dekompozici bylo 258 snapshotů popisujících rozmezí jedné periody, tedy odtržení jednoho páru vírů. Prováděna byla dvěma způsoby – rychlost a tlak odděleně pro použití do modelu se zanedbaným tlakovým členem a rychlost s tlakem dohromady ve společných snapshotech pro použití do modelu s tlakovým členem modelovaným pomocí POD. Charakteristickou vlastností POD módů Kármánovy vírové stezky je jejich párovost. Párované módy zachycují společný tvar s fázovým rozdílem  $90^\circ$ . Důvodem je, že Kármánova vírová stezka má charakter postupného vlnění, protože odtržené víry jsou unášeny proudem, zatímco POD módy mají charakter stojaté vlny. Součtem dvou stojatých vln s fázovým rozdílem  $90^\circ$  pak vzniká žádaná postupná vlna. Z toho vyplývá, že součet párovaných módů lze brát jako jeden vlnový mód.

Na následujících obrázcích jsou vykresleny POD módy rychlosti počítané odděleně od tlaku, přičemž z výše uvedeného důvodu je z každé dvojice vykreslen jen jeden mód. Dále jsou zde vykresleny jejich časové funkce včetně frekvenčního spektra a graf relativních kinetických energií jednotlivých módů.

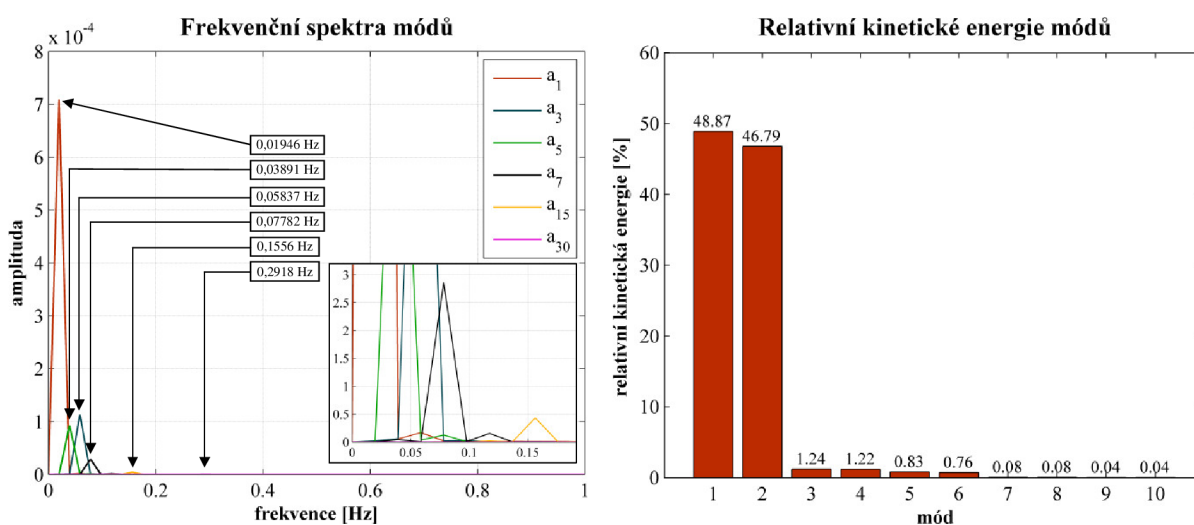
## Redukovaný model vírového proudění



**Obrázek 5.4:** POD módy rychlosti počítané variantou dekompozice rychlosti a tlaku odděleně. Kontury značí velikost vektorového pole, u prvního módu je vykresleno i samotné vektorové pole, ve kterém jsou vidět unášené vírové struktury. U časově středovaných hodnot je i detail z vektorového pole, na kterém je vidět pár stacionárních vírů za čtvercem.



Obrázek 5.5: Časové funkce POD módů z předchozího obrázku.



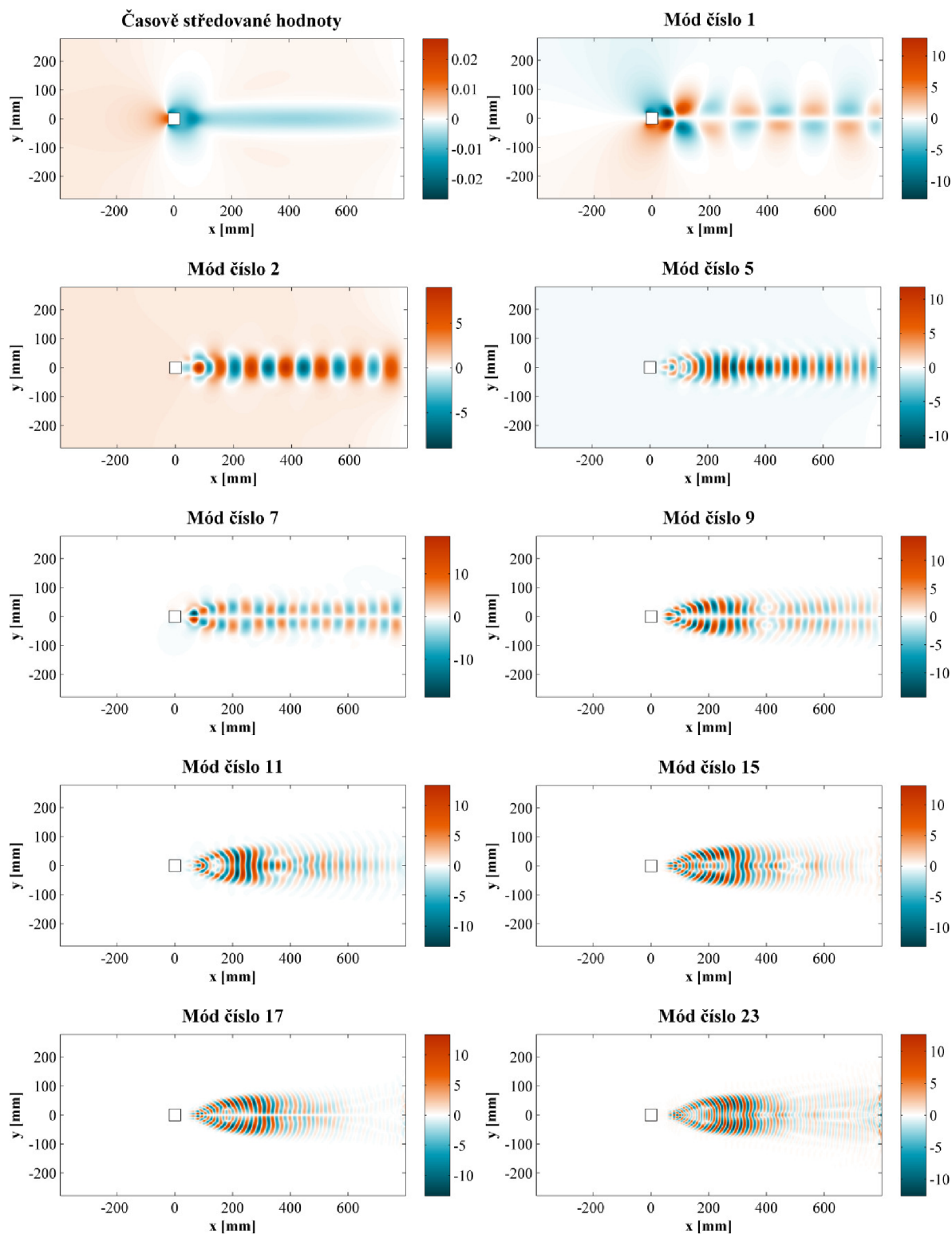
Obrázek 5.6: Frekvenční spektra módů vykreslených na obrázku 5.4. Obrázek 5.7: Graf relativních energií prvních 10 POD módů.

Z frekvenčního spektra na obrázku 5.6 je vidět, že POD módy vykreslené na obrázku 5.4 obsahují vždy jednu dominantní frekvenci a navíc případně některé další, které jsou ale vzhledem k té dominantní zanedbatelné. Proto POD módy téměř odpovídají vlastním tvarům proudění, které dohromady popisují takzvané koherentní struktury. V tomto případě jsou jimi odtrhávající se víry tvořící Kármánovu vírovou stezku.

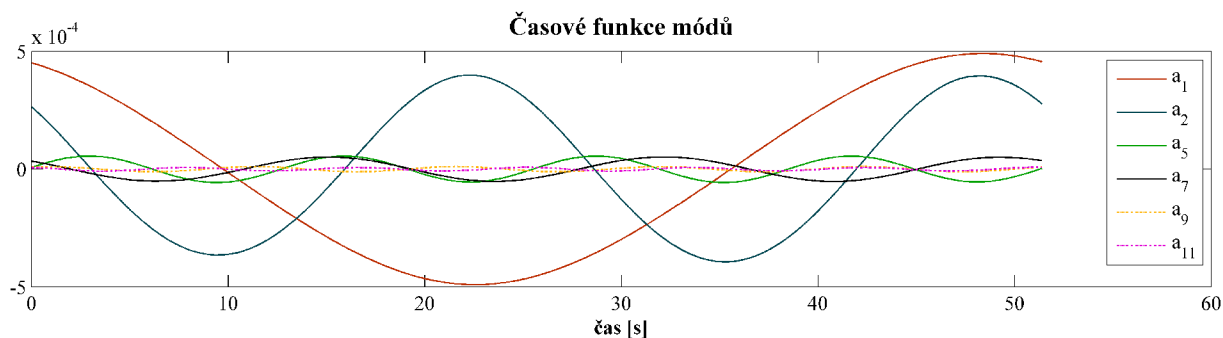
Graf relativních energií ukazuje, že jen první dva POD módy zachycují 95,66 % kinetické energie koherentní složky proudění. Přesnosti 99 % je dosaženo po sečtení pouhých šesti módů. Z hlediska použití POD módů pro Galerkinovu projekci to znamená, že pokud by byly všechny vstupy naprosto přesné, mělo by prvních 6 POD módů stačit k dosažení použitelných výsledků.

Na dalších obrázcích jsou vykresleny POD módy tlaku. Provedení je stejné jako v případě rychlosti. Vzhledem k tomu, že byly počítány samostatně, jsou jejich časové funkce odlišné od časových funkcí módů rychlosti, takže v redukovaném modelu je potřeba řešit také Poissonovu rovnici dle části 4.3. Nicméně díky určité provázanosti rychlosti a tlaku se zde prezentované POD módy rychlosti a tlaku počítané odděleně od těch počítaných dohromady liší jen málo. Srovnáním obrázků 5.5 a 5.9 a 5.6 a 5.10 lze zjistit, že časové funkce odpovídajících si módů rychlosti a tlaku jsou frekvenčně prakticky shodné, ale mají rozdílnou

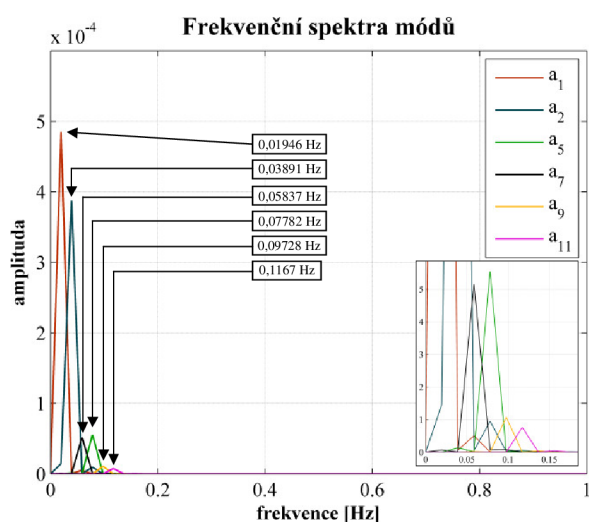
## Redukovaný model vírového proudění



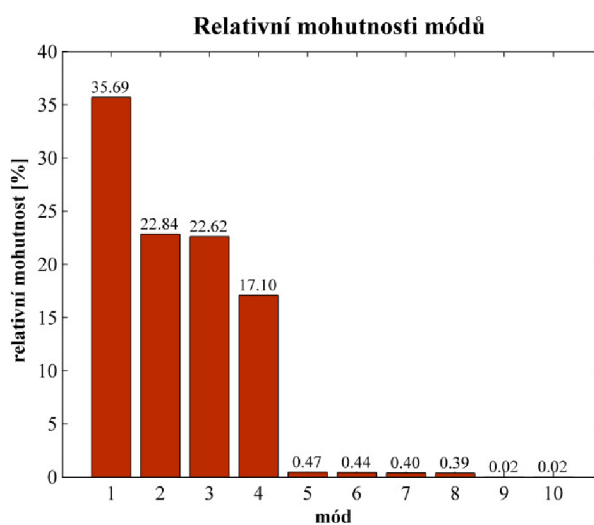
Obrázek 5.8: POD módy tlaku počítané variantou dekompozice rychlosti a tlaku odděleně.



Obrázek 5.9: Časové funkce některých POD módů z předchozího obrázku.



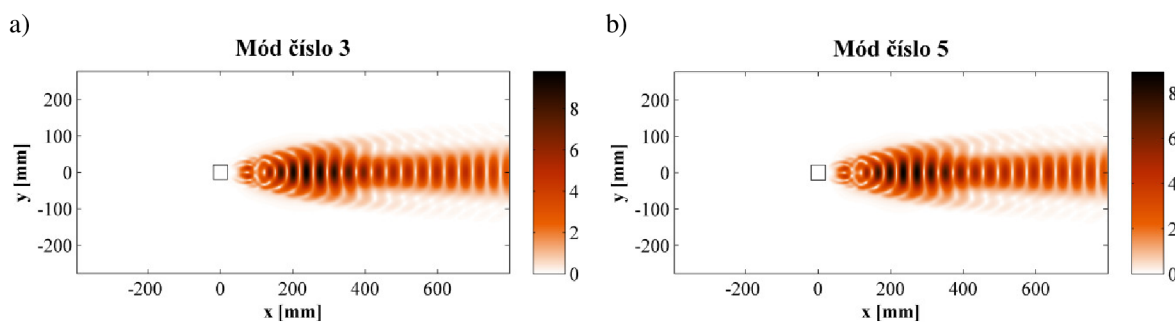
Obrázek 5.10: Frekvenční spektra některých módů vykreslených na obrázku 5.8.



Obrázek 5.11: Graf relativních mohutností prvních 10 POD módů.

počáteční fázi a amplitudu. Pokud si mají odpovídat, je potřeba fázově posunout a amplitudově poupravit příslušné prostorové POD módy. V tom spočívá největší rozdíl mezi výsledky jmenovaných způsobů provedení POD rychlostního a tlakového pole.

Graf relativních mohutností ukazuje, že na rozdíl od rychlosti, kde byla většina energie zachycena v prvních dvou módech, je v případě tlaku většina informací zachycena až v prv-



Obrázek 5.12: Odpovídající si POD módy rychlosti počítané a) samostatně b) dohromady s tlakem. Sice se od sebe liší pořadovým číslem, ale po ostatních stránkách (amplituda, fáze) se liší pouze nepatrně.

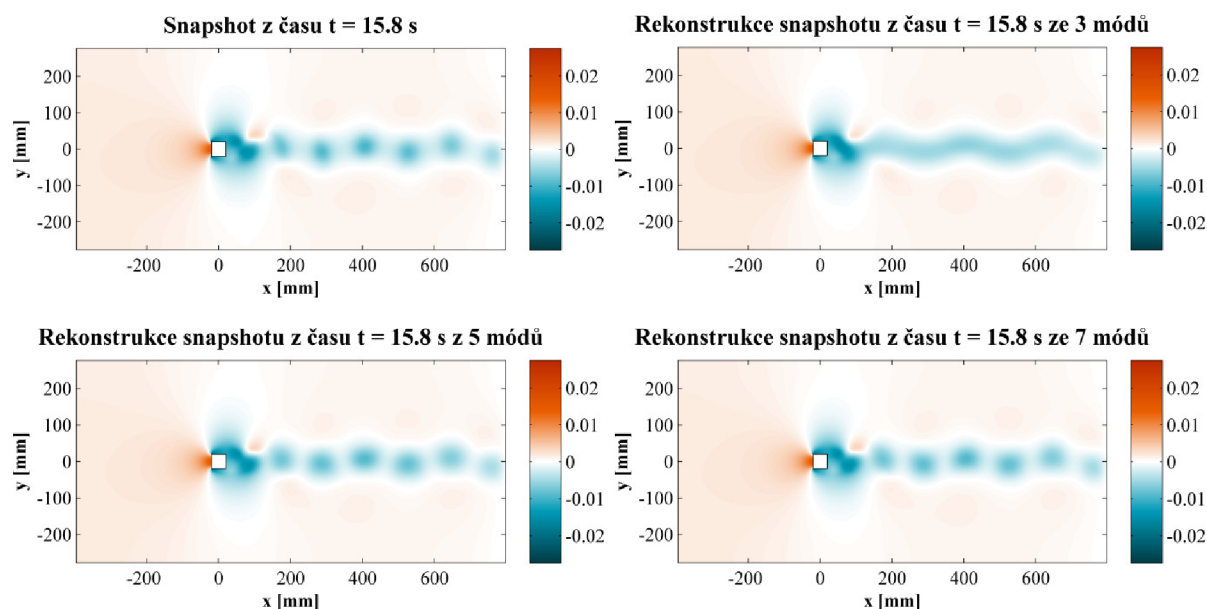


## Redukovaný model vírového proudění

ních čtyřech módech (98,25 %). Přesnosti 99 % je ale dosaženo shodně s rychlostí po sečtení 6 módů.

Z provedené POD analýzy dále vyplývají dvě skutečnosti týkající se pořadí módů. Za prvé, pokud jsou módy seřazeny podle své relativní energie/mohutnosti/enstrofie, což je standardní postup, není vždy nutné, aby s rostoucím číslem módu rostla i jeho dominantní frekvence. Pořadí závisí na síle daných pulzací v rámci sledovaného jevu. Tento fakt je vidět u módů rychlosti i tlaku. Za druhé, nemusí ani platit, že párované módy se vyskytují vedle sebe, přestože dohromady tvoří jeden vlnový mód (postupnou vlnu). Způsobují to stojaté pulzace, které se ze své podstaty vyskytují pouze v jednom z dvojice módů, jednak i to, že stojaté vlny vzniklé rozkladem postupné vlny obecně nemusí mít stejnou energii. Tento jev, k němuž dospěl i Martin Jízdny ve své diplomové práci<sup>[13]</sup>, je vidět u POD módů tlaku, kde jedny z párovaných módů mají čísla 1 a 3, resp. 2 a 4.

Poslední částí POD analýzy jsou rekonstrukce vybraného snapshotu z různého počtu módů. Lze tak zjistit, jak se který POD mód podílí na daném jevu a výsledky srovnat s grafem relativních energií/mohutností/enstrofií. Na obrázku 5.13 je snapshot tlaku a jeho rekonstrukce ze tří, pěti a sedmi POD módů. Každá přidaná dvojice módů je odpovídající si pár, s ohledem na jev popsáný v předchozím odstavci tedy módy nebyly přidávány přesně podle pořadového čísla. Je zde vidět, že přidáním prvního páru (mohutnost 58,31 %) k časově středovaným hodnotám došlo ke zvlnění oblasti nízkého tlaku v úplavu, ale nejsou zde patrné odtrhávající se vírové struktury. Ty jsou dotvořeny dalším párem módů s mohutností 39,94 %, celková mohutnost je tedy 98,25 %. Mohutnost dalšího páru už je nesrovnatelně menší, čemuž odpovídají jen nepatrné změny na rekonstruovaném obrazu.



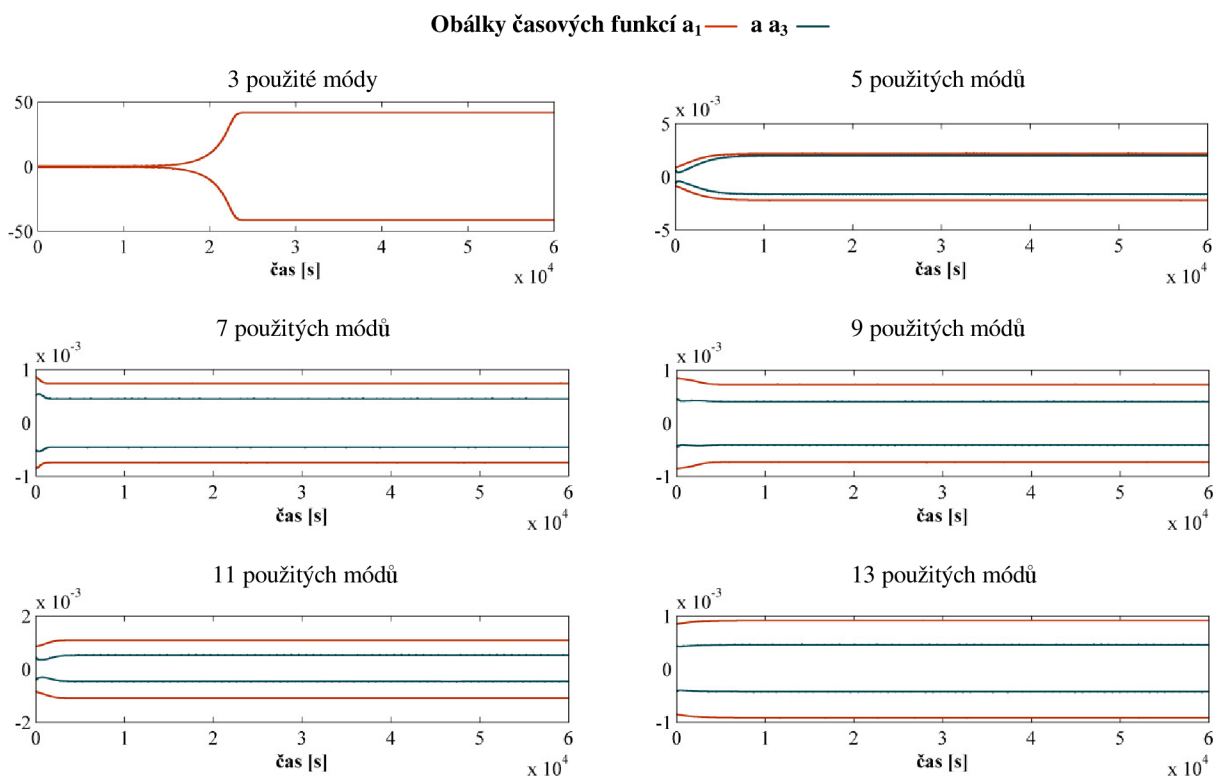
Obrázek 5.13: Snapshot tlakového pole a jeho rekonstrukce ze tří, pěti a sedmi módů.

### 5.1.3 Redukovaný model

Získané prostorové POD módy z předchozí kapitoly byly použity jako bazové funkce pro Galerkinovu metodu. Při použití modelu flukтуаční složky (4.48) vzhledem k okrajovým podmínkám tlakový člen vypadne, a stačí tak znát pouze POD módy rychlosti. Pokud je potřeba spočítat i tlakové pole, je možné použít Poissonovu rovnici pro tlak, viz část 4.3.

Vzhledem ke tvaru Navier-Stokesovy rovnice po Galerkinově projekci bylo potřeba napočítat první derivace POD módů. Za tímto účelem byl vytvořen v MATLABu program, který načítá informace o uzlech a stranách sítě ze souborů typu \*.msh vytvořených v generátorech sítí od ANSYSu. Pomocí těchto informací lze k jednotlivým buňkám identifikovat sousední buňky, tedy ty, které s danou buňkou sdílí některou její stranu. Derivace byly následně spočítány metodou least squares cell based. Integrace byly provedeny obdélníkovou metodou s využitím známých hodnot obsahů buněk, exportovaných přímo z Fluentu společně s řešením. Jako počáteční podmínky byly použity počáteční hodnoty časových funkcí POD módů. Výsledné časové funkce by se tedy v ideálním případě měly s nimi shodovat. Jako měřítko kvality proto bude využito jejich vzájemné srovnání.

Redukovaný model byl sestavován postupně s různými počty módů tak, že vždy byl přidán jeden vlnový pár. Integrace byla provedena až do času 60 000 sekund, což odpovídá 1 167 odtržením Kármánových vírů. Obálky výsledných časových funkcí, pomocí kterých lze sledovat průběh amplitud, jsou vykresleny na obrázku 5.14.

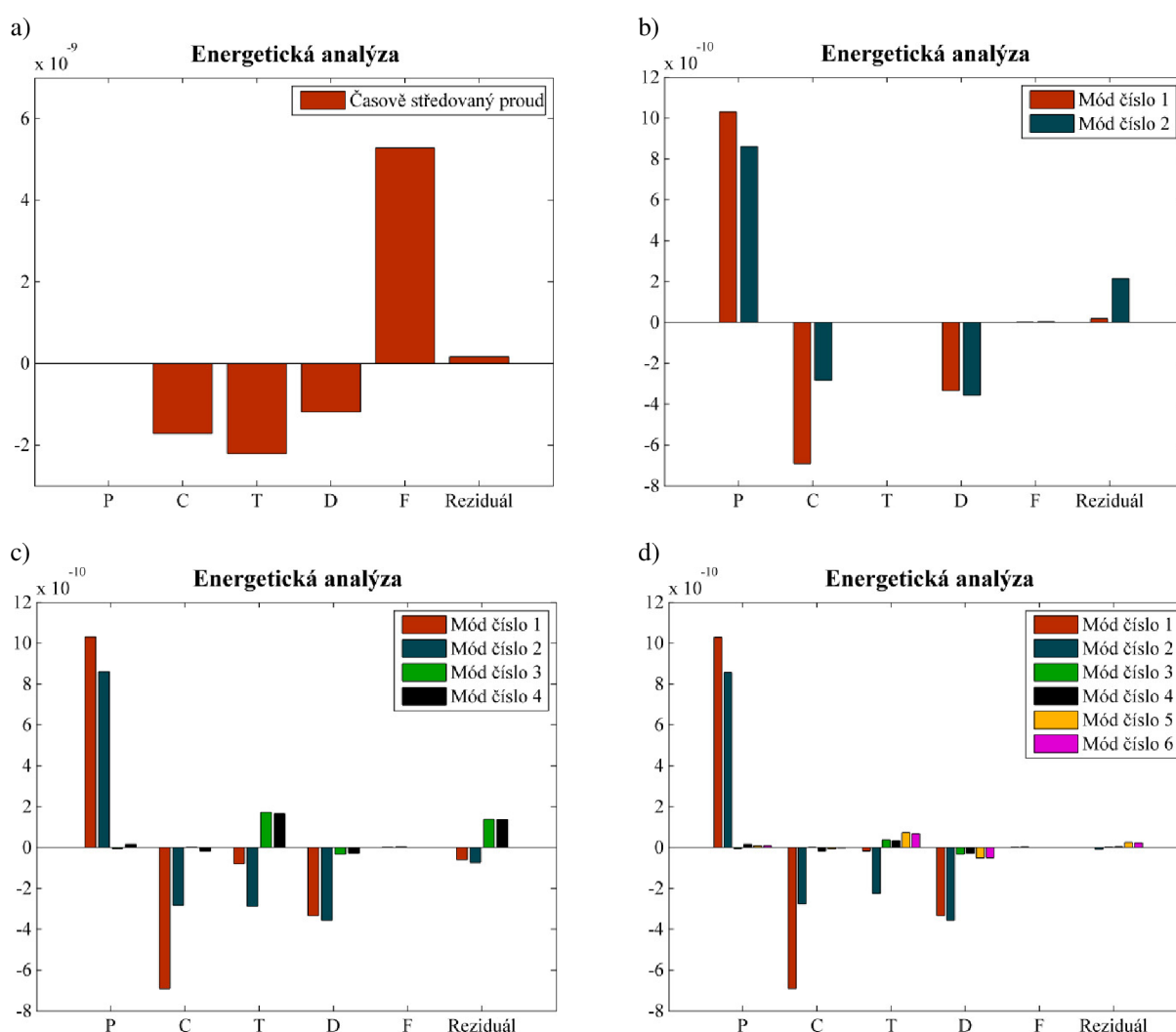


Obrázek 5.14: Obálky časových funkcí módů  $a_1$  a  $a_3$  při různém počtu použitých módů v Galerkinově systému.

## Redukovaný model vírového proudění

Z výsledků na obrázku 5.14 je patrné, že z hlediska dlouhodobé přesnosti není výsledný redukovaný model úplně ideální. Při třech použitých módech amplituda časových funkcí exponenciálně rostla, až se ustálila na příliš velké hodnotě. U většího počtu použitých módů vždy došlo k odchýlení amplitudy na chybnou hodnotu. Ta s rostoucím počtem módů vychází střídavě vyšší nebo nižší oproti počáteční hodnotě dané příslušnou časovou funkcí z POD. Podobné výsledky lze najít i v literatuře, viz například článek autorů Sirisupa a Karniadakise.<sup>[29]</sup>

K odhalení vlivu zanedbání vyšších POD módů na chybu řešení Galerkinova systému byla provedena energetická analýza dle části 4.6 s časovým středováním přes jednu periodu. Výsledné energetické toky jsou vykresleny v grafech na obrázku 5.15.

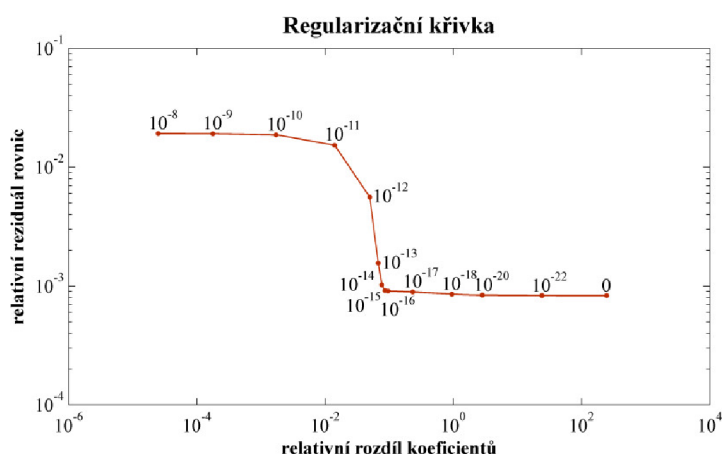


**Obrázek 5.15:** Energetická analýza Galerkinova systému. a) časově středovaný proud v systému se 7 módy, b) módy ze systému se třemi módy, c) módy ze systému s pěti módy, d) módy ze systému se sedmi módy. Člen představující změnu kinetické energie v čase zde není znázorněn, protože vzhledem ke středování přes jednu periodu jsou jeho hodnoty vždy nulové. Značení veličin dle kapitoly 4.6.

V prvním grafu je zakreslena energetická bilance časově středovaného proudu. Je zde patrné, že zdrojem jeho energie je tlakový gradient. Tato energie se spotřebovává částečně na konvektivní jevy, částečně je disipována (přeměněna v teplo). Energetické toky časově středovaného proudu vyšly prakticky stejně pro všechny analyzované systémy, proto jsou zde vykresleny pouze výsledky ze systému se sedmi módy. Výsledky jsou pouze informativní, protože rovnice pro časově středovaný proud nebyla dle teoretické části do řešeného redukovaného modelu zahrnuta.

Zbylé tři grafy znázorňují energetické bilance fluktuálních módů. Zde už výsledky závisí na počtu módů v systému, proto jsou vykresleny pro tři, pět a sedm použitých módů. Mění se charakteristika je transfer. Jsou tu patrné velké reziduály u posledních dvou módů, kde citelně chybí transfer do vyšších POD módů, nejvíce do následujících dvou. Velké reziduály u systému se třemi a pěti módy zřejmě způsobují značné chyby ve výsledcích příslušných redukovaných modelů. U systému se sedmi módy už jsou reziduály poměrně malé, proto zde roste význam numerických chyb.

Ke zlepšení dosažených výsledků bude potřeba provést kalibraci Galerkinova systému. Zvolen byl model se sedmi módy, protože se zachycenými více než 99 % energie a relativně nízkými reziduály energetické bilance představuje dobrý kompromis mezi kvalitou výsledků a počtem použitých módů. Kalibrační metodou byla zvolena Tichonovova regularizace chyby  $e^{(3)}$  popsána v části 4.4. Na obrázku 5.16 je vykreslena výsledná L-křivka.



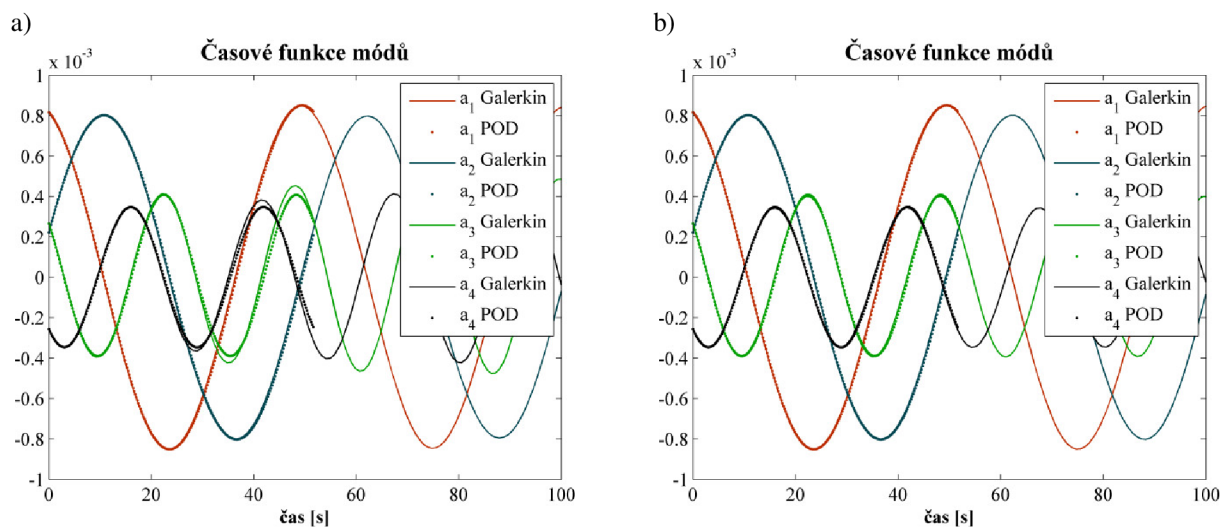
**Obrázek 5.16:** L-křivka dosažená při kalibraci Galerkinova systému se 7 módy. Hodnoty u jednotlivých bodů jsou hodnoty regularizačního parametru.

V grafu je patrný výrazný pokles reziduálů Galerkinova systému při relativní změně koeficientů, tedy normě změny koeficientů podělené normou původních hodnot, rovné zhruba  $10^{-1}$ . Jako regularizační parametr byla zvolena hodnota  $10^{-14}$ , která leží těsně před rohem tvaru písmene L. U vyšších hodnot už vycházela příliš špatná podmíněnost systému. Relativní reziduál rovnic, tedy norma reziduálu Galerkinova systému podělená normou levé strany (derivací časových funkcí), zde vychází zhruba  $10^{-3}$ , což znamená chybu v řádu desetin procenta. U nekalibrovaného systému je tato hodnota vyšší než  $10^{-2}$ , což představuje chybu v řádu jednotek procent.

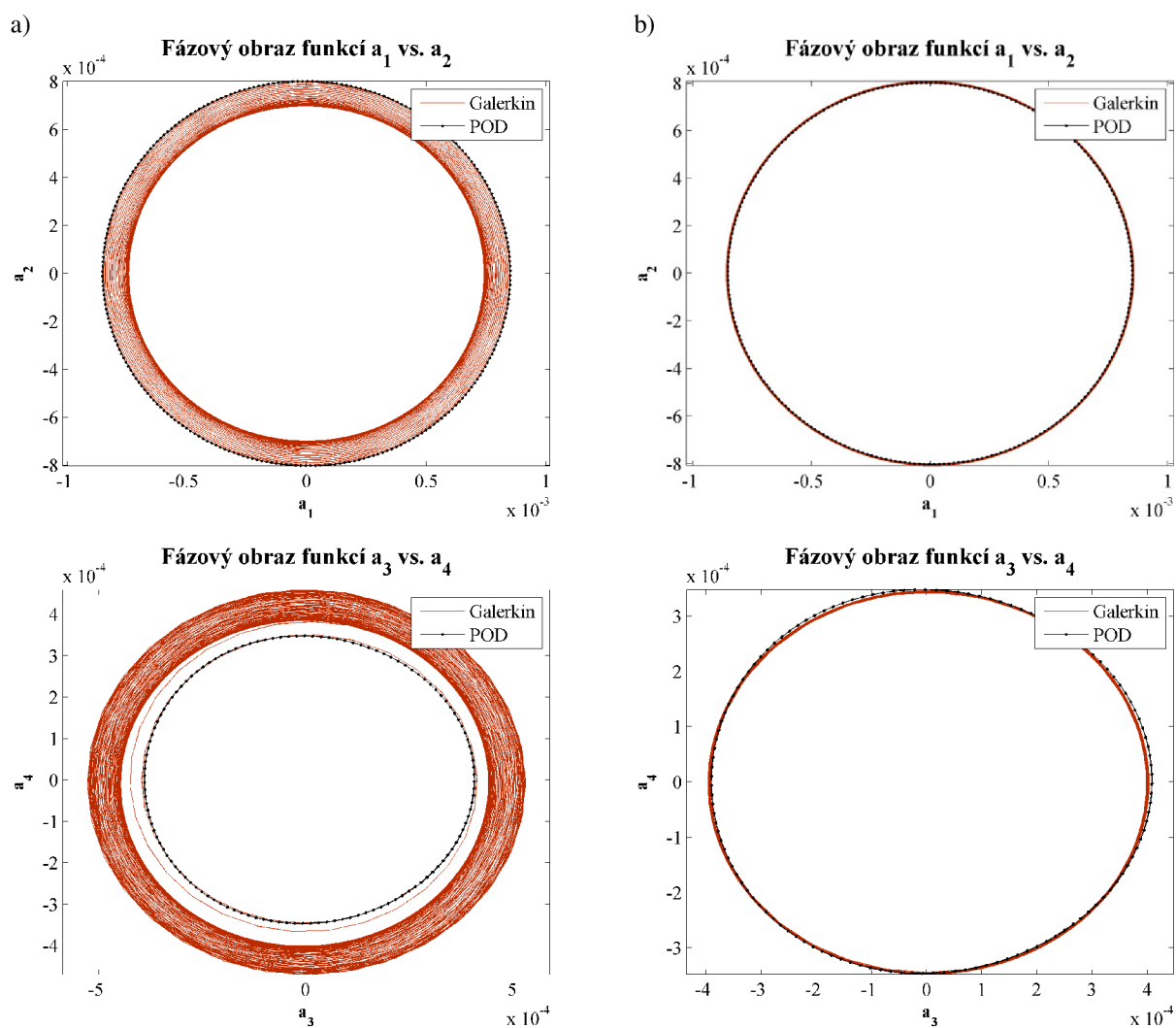
Na dalším obrázku jsou vykresleny pro srovnání výsledky krátkodobé integrace kalibrovaného a nekalibrovaného systému. Je zde patrné, že bez kalibrace dochází k postupnému odchylování od výsledků referenční simulace (časových funkcí z POD), a to zejména u třetího a čtvrtého módu. Po kalibraci už si výsledky odpovídají mnohem lépe.

Na obrázku 5.18 jsou fázové obrazy některých dvojic časových funkcí před a po kalibraci.

## Redukovaný model vírového proudění



Obrázek 5.17: Časové funkce Galerkinova systému a POD a) před kalibrací, b) po kalibraci.



Obrázek 5.18: Fázové obrazy časových funkcí a) před kalibrací, b) po kalibraci.

Časové funkce Galerkinova systému byly získány z dlouhodobé integrace až do času 60 000 sekund. U výsledků bez kalibrace je vidět měnící se poloměr opisovaného tvaru (přibližně kružnice), což znamená změnu amplitudy v čase. Naproti tomu u kalibrovaných výsledků jsou změny pouze minimální, výsledný model je tedy dostatečně přesný i při dlouhodobé integraci.

## 5.2 Turbulentní proudění (Re = 21 300)

### 5.2.1 CFD simulace

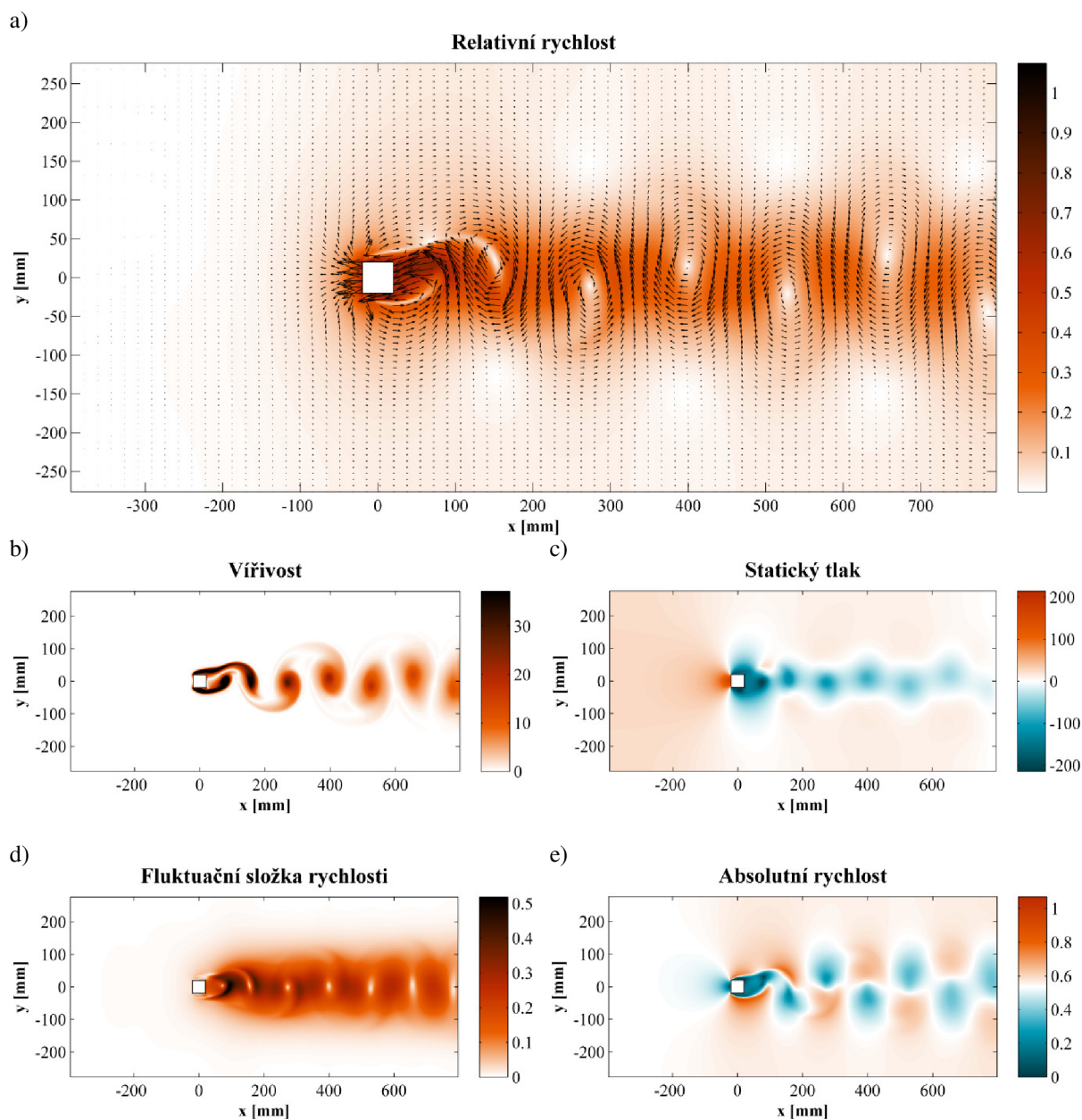
Po sestavení redukovaného modelu pro laminární Kármánovu vírovou stezku je dalším krokem turbulentní proudění, kde bude potřeba navíc modelovat i vliv turbulence. V rámci této části byl použit přístup, který spočívá v modelování celé reynoldsovsky středované Navier-Stokesovy rovnice po Boussinesqově hypotéze, takže kromě rychlosti a tlaku se zde objevují ještě dvě neznámé – turbulentní viskozita a turbulentní kinetická energie. CFD simulace byla provedena pro stejnou geometrii jako v předchozím případě. Vstupní rychlost má ale nyní hodnotu 0,535 m/s, což odpovídá experimentu autorů Lyna a Rodiho.<sup>[19]</sup> Jako model turbulence byl zvolen model k-ε realizable, k modelování proudění u stěn byly použity nerovnovážné stěnové funkce. Síť má stejnou strukturu jako u laminárního proudění (obrázek 5.1), přičemž jemnost buněk u stěn byla volena s ohledem na dodržení doporučeného rozsahu hodnot parametru wall  $y^+$ . Celkový počet buněk je 54 658. Nastavení řešiče je shrnuto v následující tabulce.

Tabulka 2: Nastavení Fluentu.

Materiály		
Materiál uvnitř buněk: voda		
Vlastnosti:	Hustota [kg/m <sup>3</sup> ]	Dynamická viskozita [Pa·s]
	998,2	0,001003
Model turbulence		
Model turbulence:	k-ε realizable	
Stěnové funkce:	nerovnovážné stěnové funkce	
Okrajové podmínky		
Vstup	Výstup	Stěna
$v = 0,535$ m/s	$p = 0$ Pa	No slip
$D_h = 0,04$ m	$D_h = 0,04$ m	
$I = 5$ %	$I = 10$ %	
Metody řešení a nastavení řešiče		
Sdružení tlaku a rychlosti	PISO	
Gradients	Least squares cell based	
Tlak	Second order	
Hybnost	QUICK	
Přechody	Second order implicit	
Turbulentní kinetická energie	Second order upwind	
Turbulentní disipace	Second order upwind	
Časový krok [s]	0,001	
Počet iterací na časový krok	20	

Na obrázku 5.19 jsou vykresleny výsledky CFD simulace. Provedení je stejné jako u laminárního proudění (obrázek 5.3), takže lze provést vzájemné srovnání. Především je možné si

## Redukovaný model vírového proudění

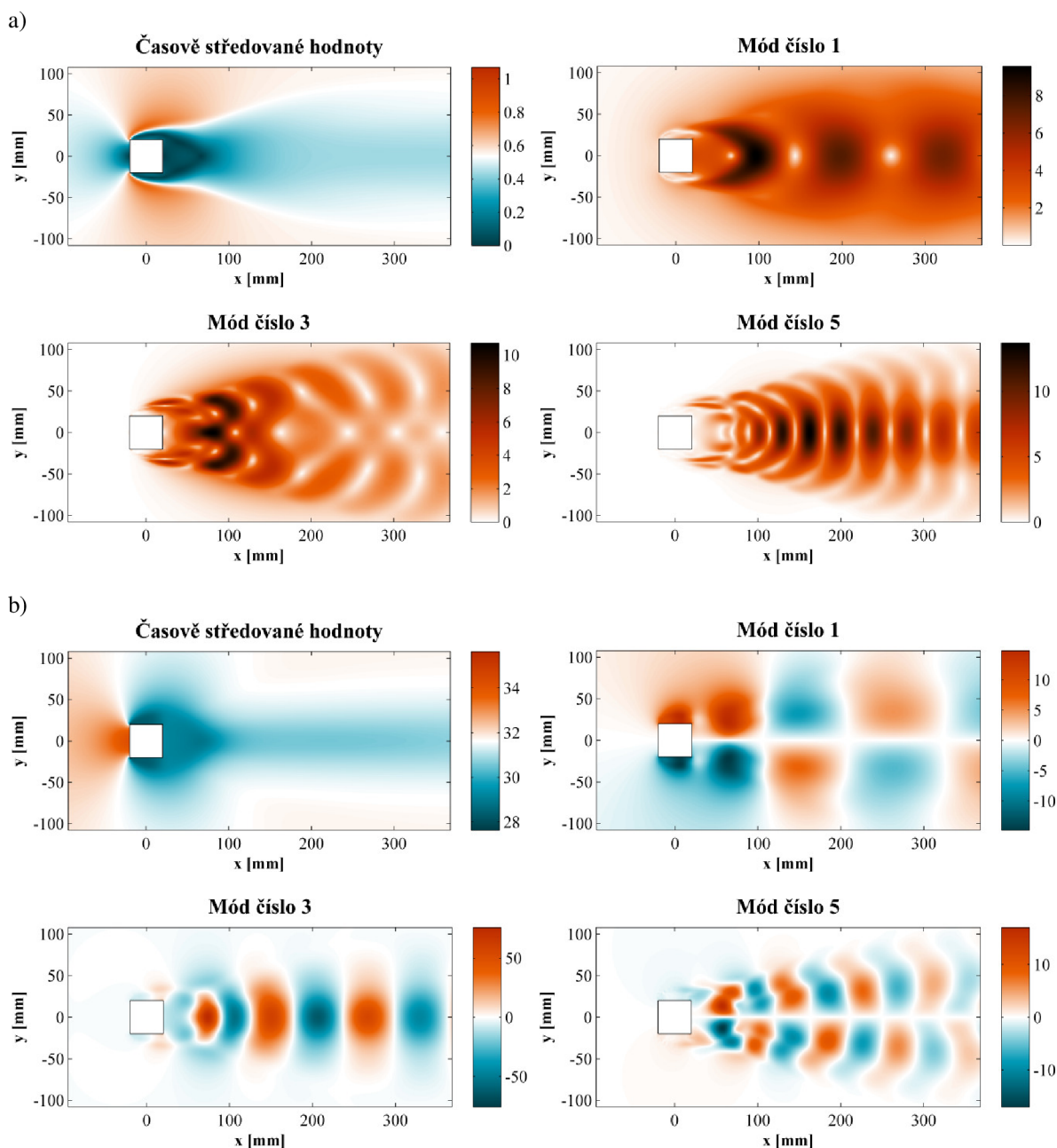


**Obrázek 5.19:** a) pole relativní rychlosti (vzhledem ke vstupní rychlosti), b) velikost vířivosti, c) statický tlak, d) velikost fluktuační složky rychlosti, e) velikost absolutní rychlosti

všimnout větší difuzivity, typické pro turbulentní proudění, což je patrné zejména při srovnání kontur velikosti vířivosti.

### 5.2.2 Vlastní ortogonální dekompozice

Pro další výpočty už nebyla používána celá doména, ale pouze výřez v rozsahu souřadnice  $x$  od -95 mm do 370 mm a souřadnice  $y$  od -110 mm do 110 mm. Tento krok byl proveden z důvodu srovnatelnosti výsledků s detailnějšími simulacemi, kde by byla práce s celou



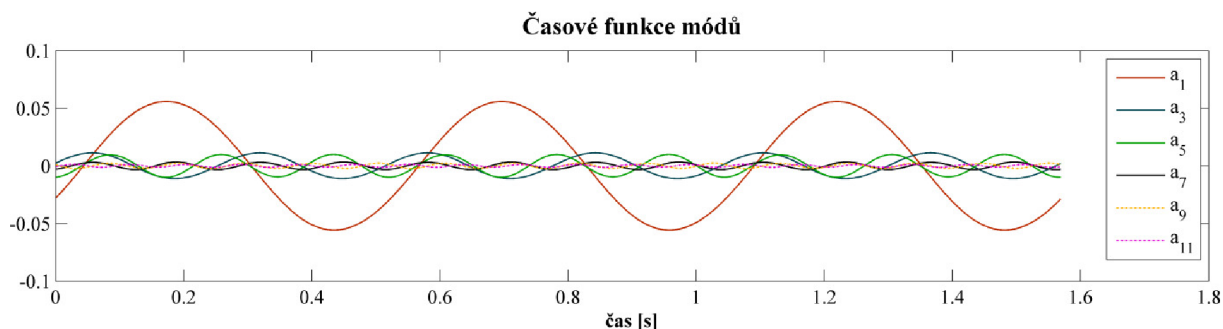
**Obrázek 5.20:** a) velikost časově středované složky a POD módů rychlosti, b) časově středovaná složka odmocniny ze statického tlaku a velikost POD módů odmocniny ze statického tlaku pro použití do čtvrtého modelu tlaku dle části 4.3.

doménou výpočetně příliš náročná. Důsledkem je, že okrajové podmínky už nejsou v čase neměnné a budou záviset na výsledcích redukovaného modelu. Vstupem pro vlastní ortogonální dekompozici bylo 1570 snapshotů popisujících rozmezí 3 period odtrhávání vírů.

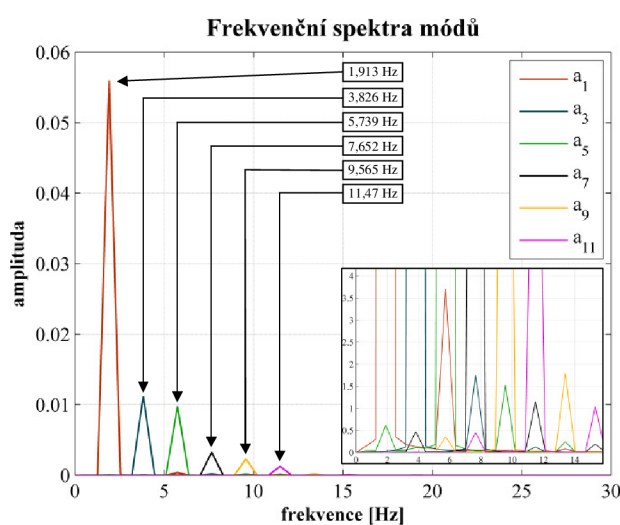
Na obrázku 5.20 jsou vykresleny módy rychlosti a tlaku, které byly dále použity k sestavení redukovaného modelu. Pro modelování tlaku byl použit čtvrtý model dle části 4.3, takže zde prezentované POD módy statického tlaku jsou přesněji módy odmocniny ze statického tlaku navýšeného o 1000 Pa, aby byla zajištěna nezápornost hodnot v celé doméně.



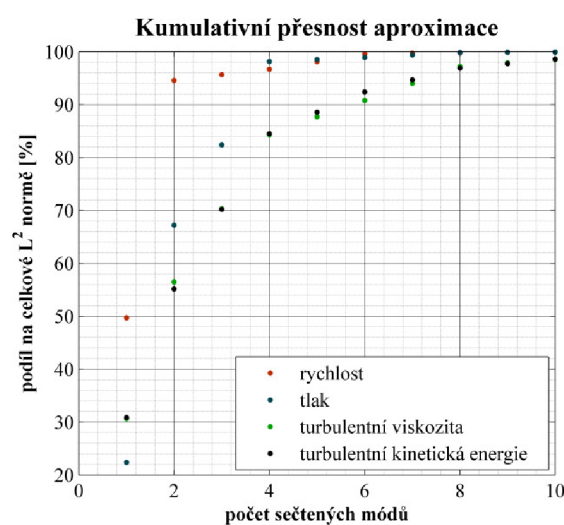
## Redukovaný model vírového proudění



Obrázek 5.21: Časové funkce některých POD módů.



Obrázek 5.22: Frekvenční spektra módů vykreslených na obrázku 5.21.



Obrázek 5.23: Graf přesnosti aproximace flukтуаční složky dekomponovaných veličin.

Protože dekompozice byla provedena z obou veličin společně, řídí se společnými časovými funkcemi vykreslenými na následujícím obrázku. Kromě rychlosti a tlaku byla dekomponována navíc ještě turbulentní viskozita a turbulentní kinetická energie pro účely stanovení turbulentní disipace a turbulentního tlaku v redukovaném modelu. U turbulentní kinetické energie byla dekompozice provedena z odmocniny z této veličiny, stejně jako u tlaku. Zde se dá využít toho, že turbulentní kinetická energie je z definice nezáporná, proto není problém provést odmocnění. Důvodem tohoto kroku je stejně jako u tlaku to, aby hodnoty této veličiny rostly s rychlostí podle skutečnosti kvadraticky, a ne lineárně. Významnost POD módů jednotlivých veličin ale stejná není a je potřeba ji stanovit zvlášť. Na obrázku 5.23 je pak vykreslena přesnost aproximace flukтуаční složky daných veličin ve smyslu  $L^2$  normy v závislosti na počtu sečtených módů. Je zde patrné, že turbulentní veličiny konvergují ve srovnání s rychlostí a tlakem pomaleji, na druhou stranu ale natolik rychle, že při 10 sečtených módech je přesnost aproximace přes 98 %. Z frekvenční analýzy na obrázku 5.22 vyplývá, že frekvence odtrhávání vírů je 1,91 Hz. Tuto hodnotu lze srovnat se zmíněným experimentem autorů Lyna a Rodiho, kteří naměřili  $1,79 \pm 0,05$  Hz, což je ve srovnání s CFD simulací nižší frekvence. Při vyvozování závěrů je nutné mít na paměti, že výpočtová doména byla dvourozměrná, zatímco experimentální kanál měl nezanedbatelnou hloubku.

### 5.2.3 Redukovaný model

Oproti laminárnímu proudění obsahuje řídicí rovnice navíc dva členy – turbulentní disipaci a turbulentní tlak. Jejich součástí jsou dvě nové neznámé – turbulentní viskozita a turbulentní kinetická energie. Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, na tyto veličiny byla aplikována vlastní ortogonální dekompozice společně s rychlostí a tlakem. V rámci redukovaného modelu jsou tedy všechny neznámé vyjádřeny pomocí aproximací se známými prostorovými funkcemi, které jsou pro různé veličiny různé, a neznámými časovými funkcemi, které jsou pro všechny veličiny stejné a jsou řešeny pomocí redukovaného modelu. Řešíme tedy reynoldsovsky středovanou Navier-Stokesovu rovnici po Boussinesqově hypotéze

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \nu_t \Delta \vec{v} + 2\mathbf{S} \nabla \nu_t - \frac{2}{3} \nabla k \quad (5.1)$$

kde  $\mathbf{S}$  je tenzor rychlosti deformace. Za jednotlivé neznámé se dosadí jejich aproximace a provede se Galerkinova projekce. Tato procedura byla pro standardní Navier-Stokesovu rovnici řešena v části 4.2, takže zde je potřeba doplnit turbulentní členy. Galerkinova projekce pro turbulentní disipaci je

$$\left( \vec{\phi}_i, \sum_{j=0}^m \xi_j a_j \Delta \sum_{k=0}^m \vec{\phi}_k a_k \right)_{\Omega} + \left( \vec{\phi}_i, 2\mathbf{S}_{\text{POD}} \nabla \sum_{j=0}^m \xi_j a_j \right)_{\Omega} \quad (5.2)$$

kde  $\xi$  jsou POD módy turbulentní viskozity a matice  $\mathbf{S}_{\text{POD}}$  je tenzor rychlosti deformace aproximovaný pomocí POD módů. Jeho prvky jsou

$$(S_{\text{POD}})_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (\varsigma_k)_{ij} a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \left( \frac{\partial(\phi_i)_k}{\partial x_j} + \frac{\partial(\phi_j)_k}{\partial x_i} \right) a_k \quad (5.3)$$

Indexy  $i$  a  $j$  značí směry souřadnicového systému, indexy  $k$  jsou čísla POD módů. Zbývá Galerkinova projekce turbulentního tlaku

$$- \left( \vec{\phi}_i, \frac{2}{3} \nabla \left( \sum_{j=0}^m \kappa_j a_j \right)^2 \right)_{\Omega} \quad (5.4)$$

Další úpravy se provedou stejným způsobem, jaký byl popsán v části 4.2 pro základní členy Navier-Stokesovy rovnice. Definuje se matice, jejíž prvky jsou

$$q_{ijk}^t = \left( \vec{\phi}_i \xi_j \Delta \vec{\phi}_k + 2\vec{\phi}_i \varsigma_k \nabla \xi_j - \frac{2}{3} \vec{\phi}_i (\kappa_k \nabla \kappa_j + \kappa_j \nabla \kappa_k) \right)_{\Omega} \quad (5.5)$$

Také je možné aplikovat Greenovu první identitu ke snížení řádu derivace u členu se druhými derivacemi. Turbulentní člen má potom finální podobu

$$\sum_{j,k=0}^m q_{ijk}^t a_j a_k \quad (5.6)$$

Při vyřazení rovnice pro časově středované hodnoty ze systému a položení  $a_0 = 1$  vznikne navíc konstantní a lineární člen

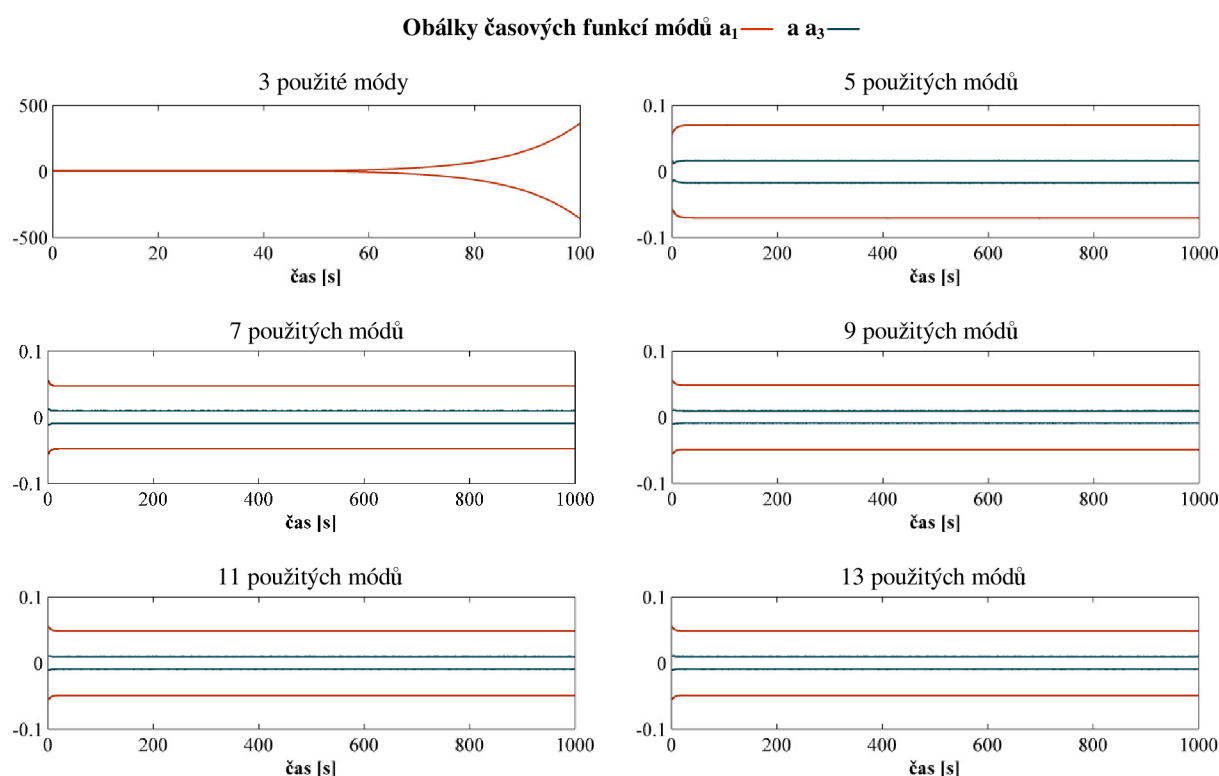
## Redukovaný model vírového proudění

$$c_i^t = q_{i00}^t \quad (5.7)$$

$$l_{ij}^t = q_{ij0}^t + q_{i0j}^t \quad (5.8)$$

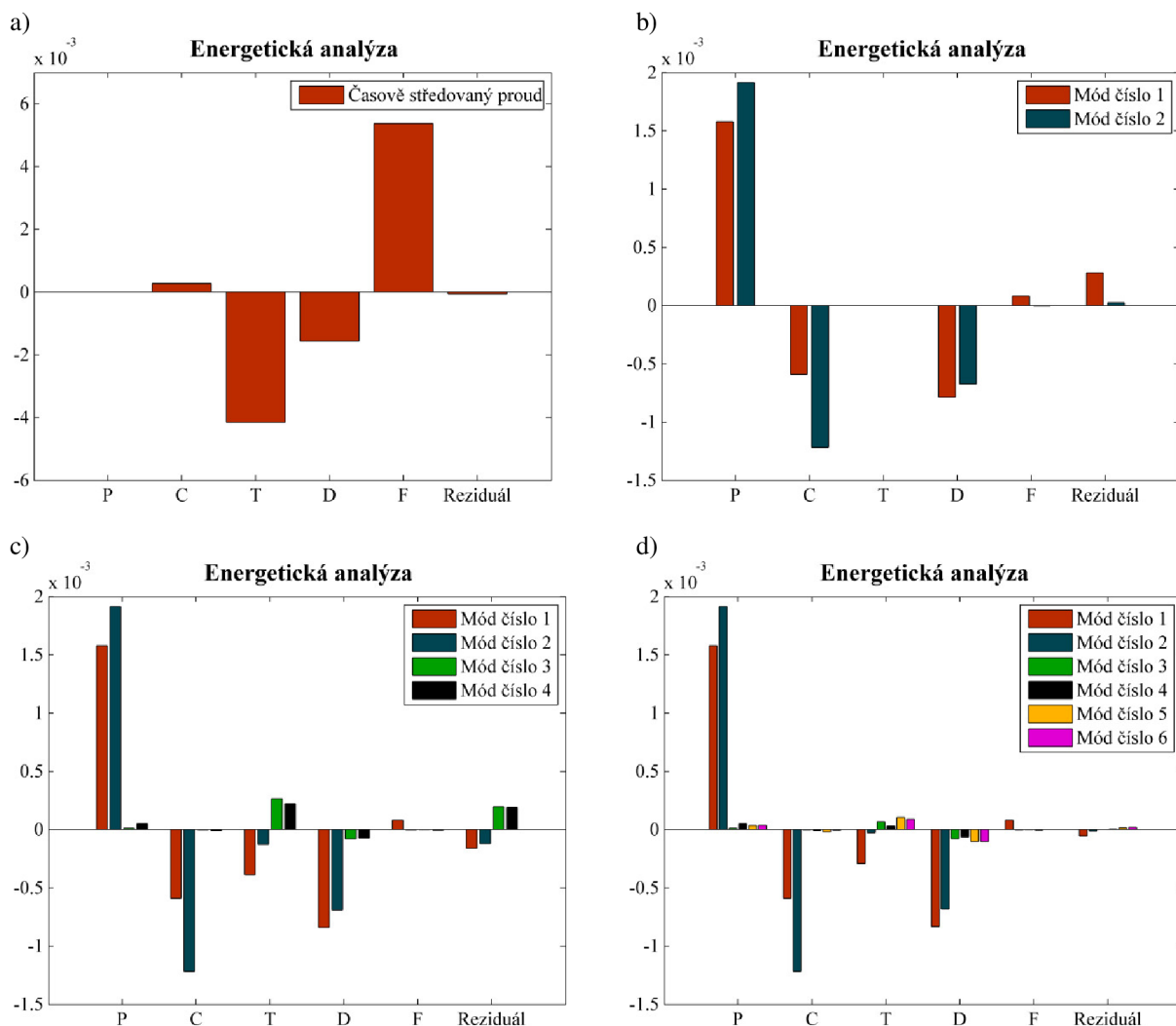
Turbulentní členy je poté možné přičíst ke zbylým členům Navier-Stokesovy rovnice (4.47).

Takto sestavené redukované modely s různým počtem použitých módů byly integrovány až do času 1000 sekund, během kterých se odehraje 1913 odtržení vírových párů. Jako počáteční podmínka byly opět použity počáteční hodnoty časových funkcí z POD, takže výsledné funkce by v ideálním případě měly být s nimi shodné. Obálky vypočítaných časových funkcí prvního a třetího módu jsou vykresleny na obrázku 5.24. Z nich je patrné, že u modelu se třemi módy se projevuje nestabilní chování, ale u modelů s pěti a více módy je už systém stabilní. Dále je vidět, že se amplitudy zmíněných módů s rozšiřováním systému nijak významně nemění, nicméně vychází nižší ve srovnání s výsledky POD.



**Obrázek 5.24:** Obálky časových funkcí módů  $a_1$  a  $a_3$  při různém počtu použitých módů v Galerkinově systému.

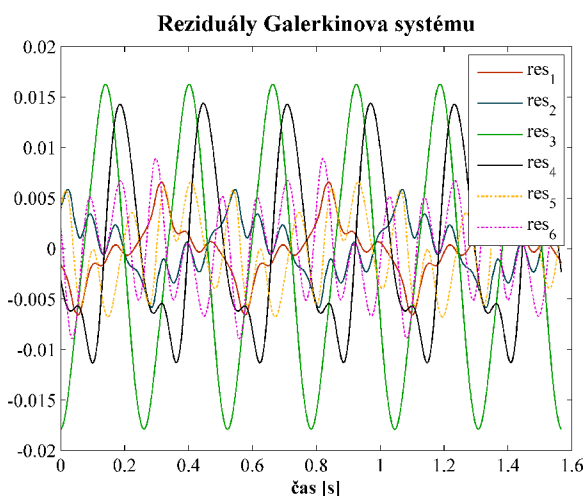
Stejně jako u laminárního proudění byla provedena i analýza energetických toků v rámci Galerkinova systému. Na obrázku 5.25 jsou vykresleny výsledné grafy. Opět je zde patrné, jak se projevuje chybějící transfer do nepoužitých módů na reziduálech použitých módů. U prvního módu je navíc zřejmý nezanedbatelný vliv tlakového členu. Záporné reziduály prvních dvou (nejsilnějších) módů u systémů s pěti a sedmi módy souvisí s poklesem amplitudy řešení příslušných redukovaných modelů. Naopak kladné reziduály těchto módů u systému se třemi módy způsobují exponenciální růst amplitudy řešení.



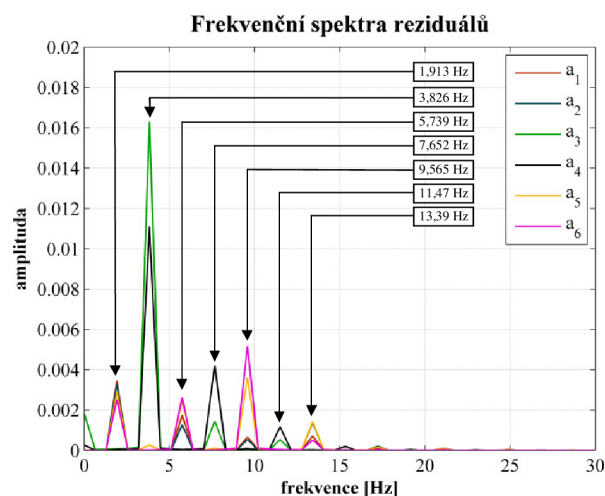
**Obrázek 5.25:** Energetická analýza Galerkinova systému. a) časově středovaný proud v systému se 7 módy, b) módy ze systému se třemi módy, c) módy ze systému s pěti módy, d) módy ze systému se sedmi módy. Člen představující změnu kinetické energie v čase zde není znázorněn, protože vzhledem ke středování přes tři periody jsou jeho hodnoty vždy nulové. Značení veličin dle kapitoly 4.6.

Pro další práci byl zvolen ve shodě s laminární Kármánovou vírovou stezkou model se šesti fluktuálními módy. Ke zlepšení výsledků nezbyvá než provést numerickou kalibraci. Opět k tomu byla použita Tichonovova regulace, nicméně získané výsledky nebyly dostatečně přesné a stabilní. K pochopení toho, proč tato metodika selhává, je potřeba se zabývat hlouběji reziduály Galerkinova systému. Ty jsou vykresleny na obrázku 5.26 a jejich frekvenční spektra na obrázku 5.27. Jak je patrné, u reziduálů je dominantní nízkofrekvenční složka, jejíž frekvence jsou shodné s frekvencemi použitých POD módů. Z pohledu amplitudy vychází největší chyba u třetího módu, kde dosahuje poměr amplitudy reziduálu k amplitudě derivace časové funkce (levá strana rovnice) téměř 8 %. Nízkofrekvenční složku tedy lze eliminovat modifikací příslušných koeficientů Galerkinova systému. Vysokofrekvenční složka souvisí s nepoužitými módy, proto ji nelze modifikací koeficientů eliminovat. V případě nutnosti by bylo možné se inspirovat modelováním turbulence u CFD simulací, kde jsou drobné turbulentní víry ze systému eliminovány aplikací reynoldsovského časového středo-

## Redukovaný model vírového proudění



**Obrázek 5.26:** Průběhy reziduálů Galerkinova systému se šesti módy.



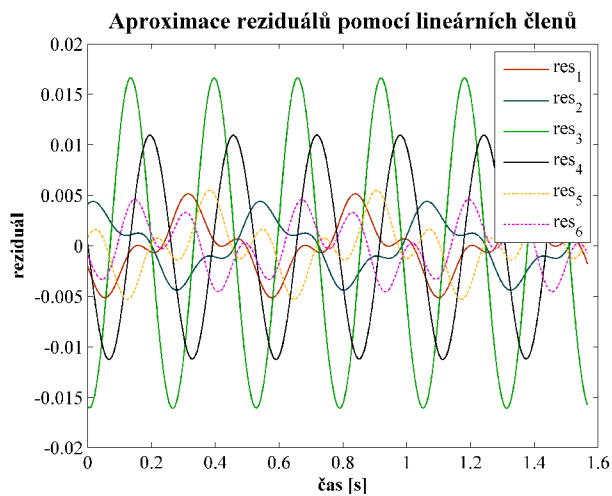
**Obrázek 5.27:** Frekvenční spektra reziduálů Galerkinova systému se šesti módy.

vání a jejich vliv je popsán pomocí nových neznámých – reynoldsovských napětí.

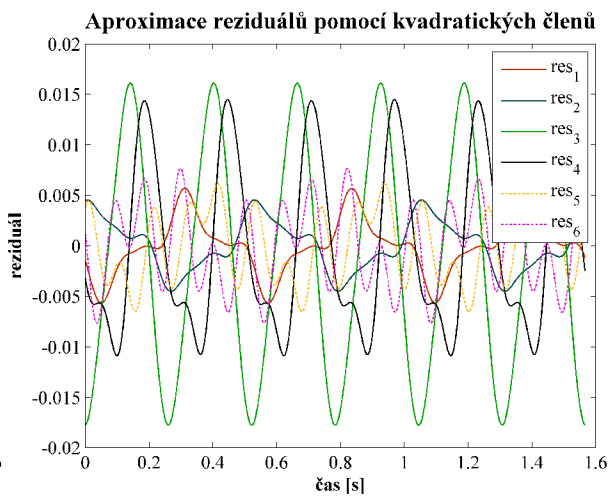
V dalším bude vliv vysokofrekvenční složky reziduálů zanedbán a cílem bude eliminace nízkofrekvenční složky. Hledáme vyjádření reziduálů v podobě shodné s Galerkinovým systémem

$$res_i = c_i^r + \sum_{j=1}^m l_{ij}^r a_j + \sum_{j,k=1}^m q_{ijk}^r a_j a_k \quad (5.9)$$

kde za funkce  $a_j$  jsou dosazeny časové funkce z POD. Cílem je stanovit matice  $\mathbf{c}^r$ ,  $\mathbf{l}^r$  a  $\mathbf{q}^r$  tak, aby byl po odečtení této aproximace reziduál Galerkinova systému vhodně snížen a řešení bylo co nejpřesnější. Problém spočívá v tom, že neexistuje jednoznačné řešení, protože časové funkce nejsou ortogonální. Přesněji řečeno, funkce  $a_j$  z definice POD jsou vzájemně ortogonální, to už ale neplatí vzhledem k jejich součinům  $a_j a_k$ . Pro ilustraci tohoto problému jsou na následujících obrázcích vykresleny aproximace reziduálů vyjádřené v prvním případě pouze pomocí lineárních členů, ve druhém případě pouze pomocí kvadratických členů. Ze srovnání s obrázkem 5.26 vyplývá, že reziduál byl v obou případech aproximován s dobrou přesností, v případě aproximace pomocí kvadratických členů je přesnost o něco lepší, protože se v nich vyskytují i funkce s vyššími frekvencemi (součinem dvou funkcí o dané frekvenci vznikne funkce s dvojnásobnou frekvencí). Je tedy patrné, že nízkofrekvenční dynamiku lze vlivem neortogonality a silné korelace stejně dobře vyjádřit jak pomocí lineárních, tak pomocí kvadratických členů. Otázkou potom je, jak stanovit poměry mezi korelovanými členy. Pomoci by v tom mohla znalost řešení i pro jiný stav, z níž by se dalo určit, do jaké míry se amplituda reziduálů mění lineárně a do jaké kvadraticky. Tichonovova regularizace volí vždy takové řešení, které dosahuje nejlepšího poměru mezi minimalizací reziduálu a velikostí zásahů do původního systému s ohledem na zvolený regularizační parametr. Minimalizace změny systému ale v aktuálně řešeném případě není vhodná podmínka, protože hodnoty lineárních členů Galerkinova systému jsou ve srovnání s kvadratickými členy většinou řádově nižší. Následkem toho jsou přednostně modifikovány lineární členy, kde má menší zásah větší vliv. Ve skutečnosti se ale dá očekávat, že větší zásahy by měly být provedeny do nelineárních



**Obrázek 5.28:** Aproximace reziduálů Galerkinova systému se šesti fluktuálními módy pouze pomocí lineárních členů.

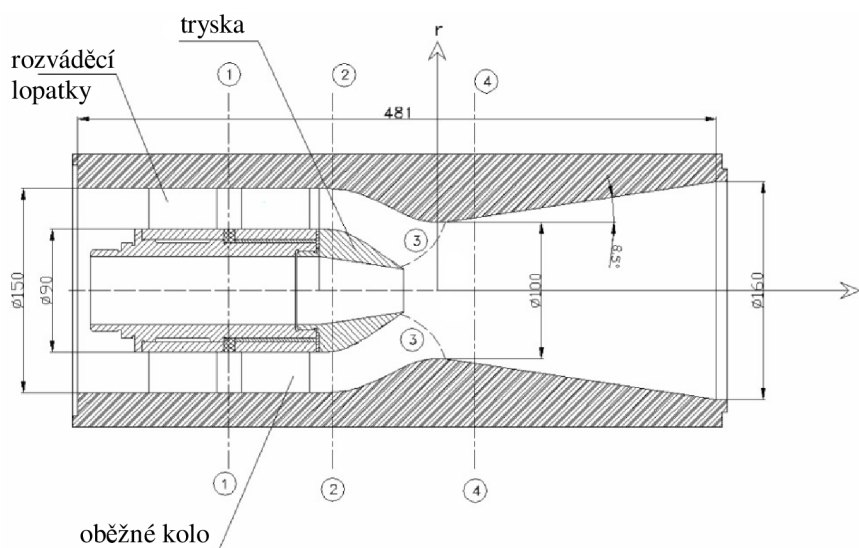


**Obrázek 5.29:** Aproximace reziduálů Galerkinova systému se šesti fluktuálními módy pouze pomocí kvadratických členů.

členů, s ohledem na jejich velikost. Pro kalibraci redukovaného modelu tím pádem bude potřeba sestavit jinou metodu, což už je nad rámec této práce.

## 6 Aplikace Galerkinovy metody na proudění v savce

Cílem této části je aplikovat Galerkinovu metodu na proudění v savce vodní turbíny při mimooptimálních podmínkách, kdy zde vzniká struktura zvaná vírový cop. Ten je provázen silnými tlakovými pulzacemi, které jsou z provozního hlediska nebezpečné. Metodika využití redukovaných modelů by zde potenciálně mohla posloužit k nalezení účinného způsobu řízení, který by proudění co nejvíce ustálil a zmírnil jeho negativní dopady. Jako testovací případ byl zvolen vírový generátor navržený v Rumunsku na univerzitě v Temešváru.<sup>[33]</sup> Toto zařízení má za cíl vytvářet podmínky podobné těm ve skutečné vodní turbíně, oproti které je ale výrazně menší a levnější. Na následujícím obrázku je náčrt jeho geometrie v podélném řezu se základními rozměry.

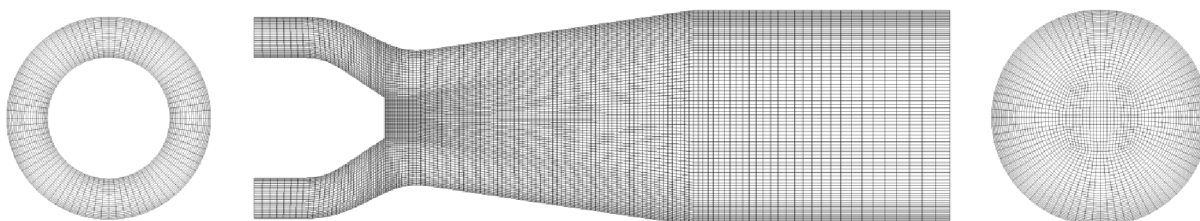


Obrázek 6.1: Řez vírovým generátorem. Zdroj: [33]

Tímto vírovým generátorem se z pohledu POD analýzy zabýval už David Štefan ve své dizertační práci.<sup>[34]</sup> Řešil v ní jak přirozené proudění, tak proudění řízené vstříkáváním vody do savky tryskou procházející vnitřkem náboje.

### 6.1 CFD simulace

CFD simulace byla provedena na doméně začínající těsně za oběžným kolem, kam byla předepsána vstupní okrajová podmínka známá z výpočtového modelování celého zařízení provedeného mimo tuto práci. Na výstupu, který se nachází v určité ustalovací vzdálenosti od kuželové části savky, byla předepsána okrajová podmínka konstantního tlaku rovného 0 Pa s radiální rovnovážnou podmínkou. Zbytek jsou stěny, na kterých bylo předpokládáno ulpívání kapaliny. Síť byla vytvořena v programu ANSYS Meshing, je strukturovaná a konformní, tvořená výhradně z hexa prvků. Celkový počet buněk dosahuje 398 320. Podélný řez a pohledy na vstup a výstup jsou na následujícím obrázku.



Obrázek 6.2: Výpočetní síť

Pro modelování turbulence byl zvolen model reynoldsovských napětí (RSM), který je vhodný tam, kde dochází k velkému zakřivení proudnic a kde je velká míra anizotropie turbulence. Zbýlá nastavení byla volena ve shodě se zmíněnou prací Davida Štefana, shrnuta jsou v následující tabulce. Časový krok 0,0001 sekundy byl zvolen s ohledem na síť tak, aby Courantovo číslo nepřesáhlo hodnotu jedna.

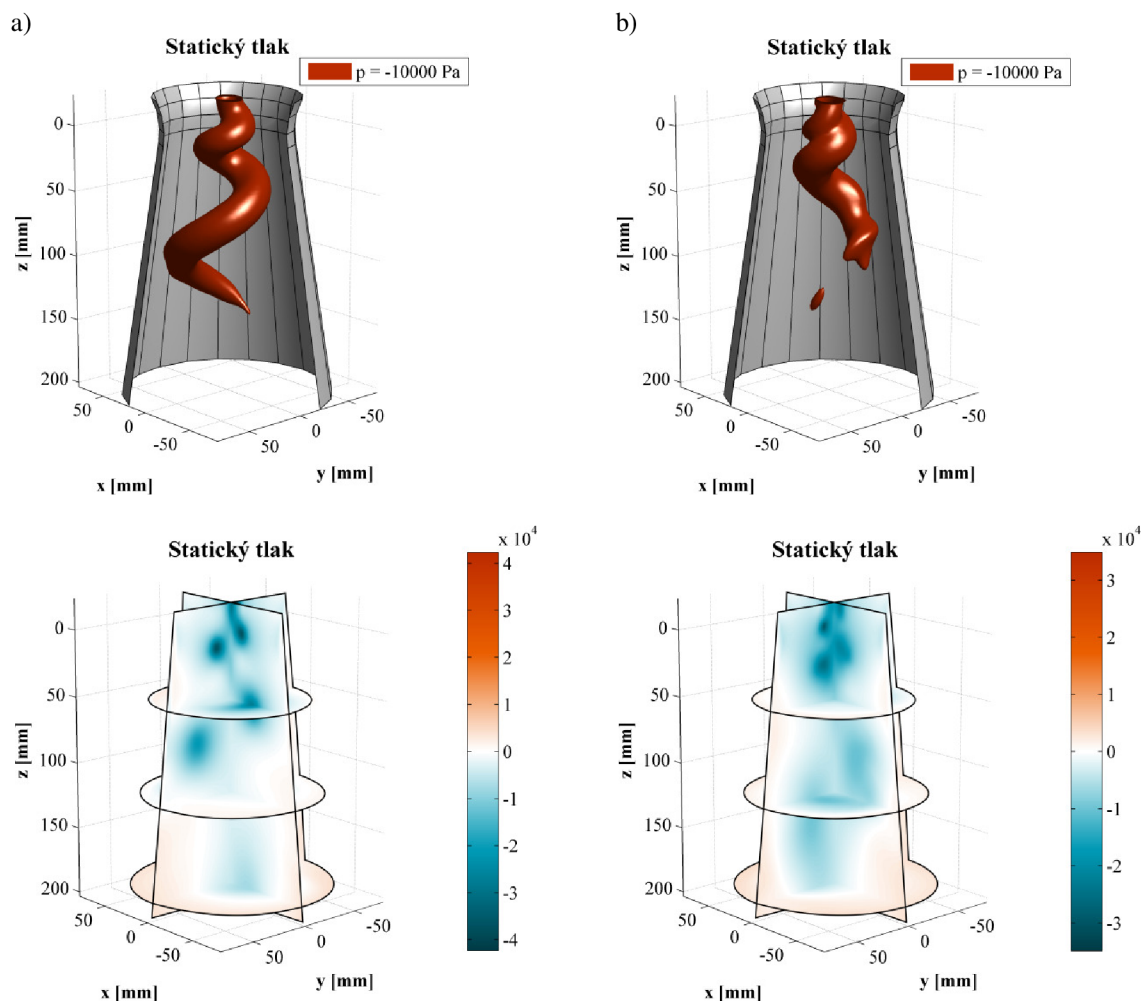
Tabulka 3: Nastavení Fluentu.

Materiály		
<b>Materiál uvnitř buněk:</b>	voda	
<b>Vlastnosti:</b>	<b>Hustota [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Dynamická viskozita [Pa·s]</b>
	998,2	0,001003
Model turbulence		
<b>Model turbulence:</b>	Reynolds stress, quadratic pressure-strain	
<b>Stěnové funkce:</b>	nerovnovážné stěnové funkce	
Okrajové podmínky		
<b>Vstup</b>	<b>Výstup</b>	<b>Stěna</b>
definovaný rychlostní profil	$p = 0$ Pa	No slip
definovaný průběh k	radiální rovnovážná podmínka	
definovaný průběh $\epsilon$		
Metody řešení a nastavení řešiče		
<b>Sdružení tlaku a rychlosti</b>	PISO	
<b>Gradients</b>	Least squares cell based	
<b>Tlak</b>	PRESTO!	
<b>Hybnost</b>	QUICK	
<b>Přechody</b>	Second order implicit	
<b>Turbulentní kinetická energie</b>	Second order upwind	
<b>Turbulentní disipace</b>	Second order upwind	
<b>Reynoldsovská napětí</b>	Second order upwind	
<b>Časový krok [s]</b>	0,0001	
<b>Počet iterací na časový krok</b>	25	

Po určité době řešení došlo podle očekávání ke zformování vírového copu, který je pomocí statického tlaku vizualizován na dalším obrázku. Tato struktura je velice nestabilní – po určité době se začíná rozpadat za přítomnosti výrazných pulzací, načež se opět zformuje a po jistou dobu takto vydrží. V této fázi dominuje precesní pohyb – vírový cop rotuje kolem osy savky, přičemž osa rotace se do jisté míry mění. Cyklus se dále pravidelně opakuje, nicméně děj jako takový není periodický. Projevuje se zde turbulentní chaotické chování, takže prakticky nelze najít dva okamžiky, ve kterých by měl vírový cop přesně stejný tvar.



## Redukovaný model vírového proudění

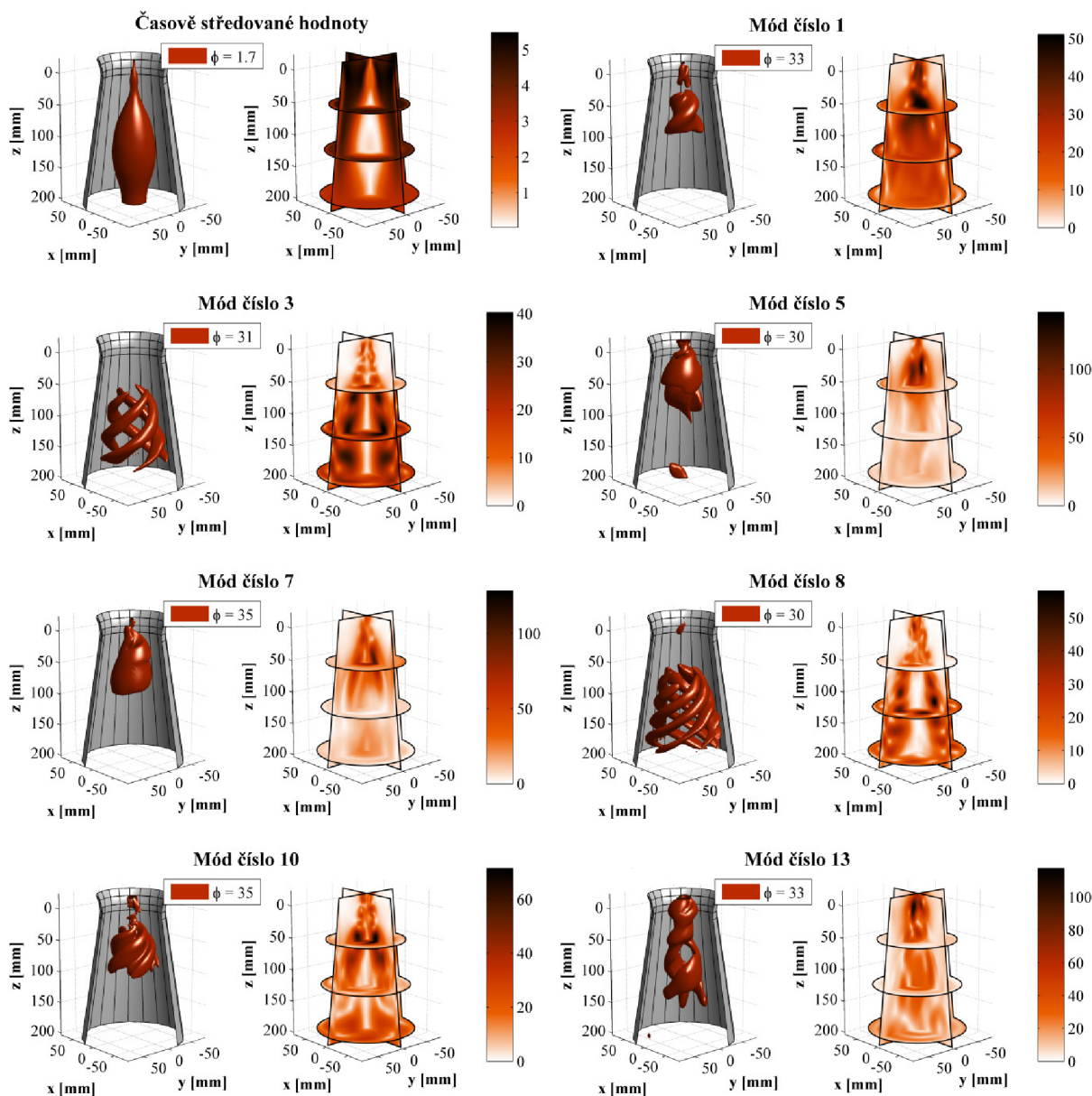


**Obrázek 6.3:** Vizualizace a) vyvinutého vírového copu, b) rozpadajícího se vírového copu pomocí izokontur tlaku a pomocí řezů. Autorem použitého modelu výřezu savky je David Štefan.

## 6.2 Vlastní ortogonální dekompozice

Pro účely vlastní ortogonální dekompozice byly ukládány výsledky po každém desátém časovém kroku. Časový úsek mezi jednotlivými snapshoty je tedy 0,001 s. Celkem jich bylo použito 713, což je interval o délce 0,713 s. Během této doby se vírový cop jedenáctkrát otočí kolem osy savky a zároveň proběhnou obě fáze popsané v předchozí části. Exportovanými veličinami, které byly vstupem pro POD, jsou kromě rychlosti a tlaku ještě turbulentní viskozita a turbulentní tlak. Tyto turbulentní veličiny lze dopočítat pomocí Boussinesqovy hypotézy z reynoldsovských napětí za předpokladu izotropní turbulence, takže tímto krokem došlo k zanedbání anizotropie turbulence, ale také k výraznému snížení nároků na POD. V opačném případě by bylo potřeba vedle rychlosti a tlaku dekomponovat ještě šest reynoldsovských napětí, což znamená provedení POD z osmi veličin nehledě na to, že rychlost má tři složky.

Na následujících obrázcích jsou pomocí izokontur a řezů vykresleny vypočítané POD módy rychlosti a tlaku. Opět zde bylo možné pozorovat párovost módů, kdy dvojice módů

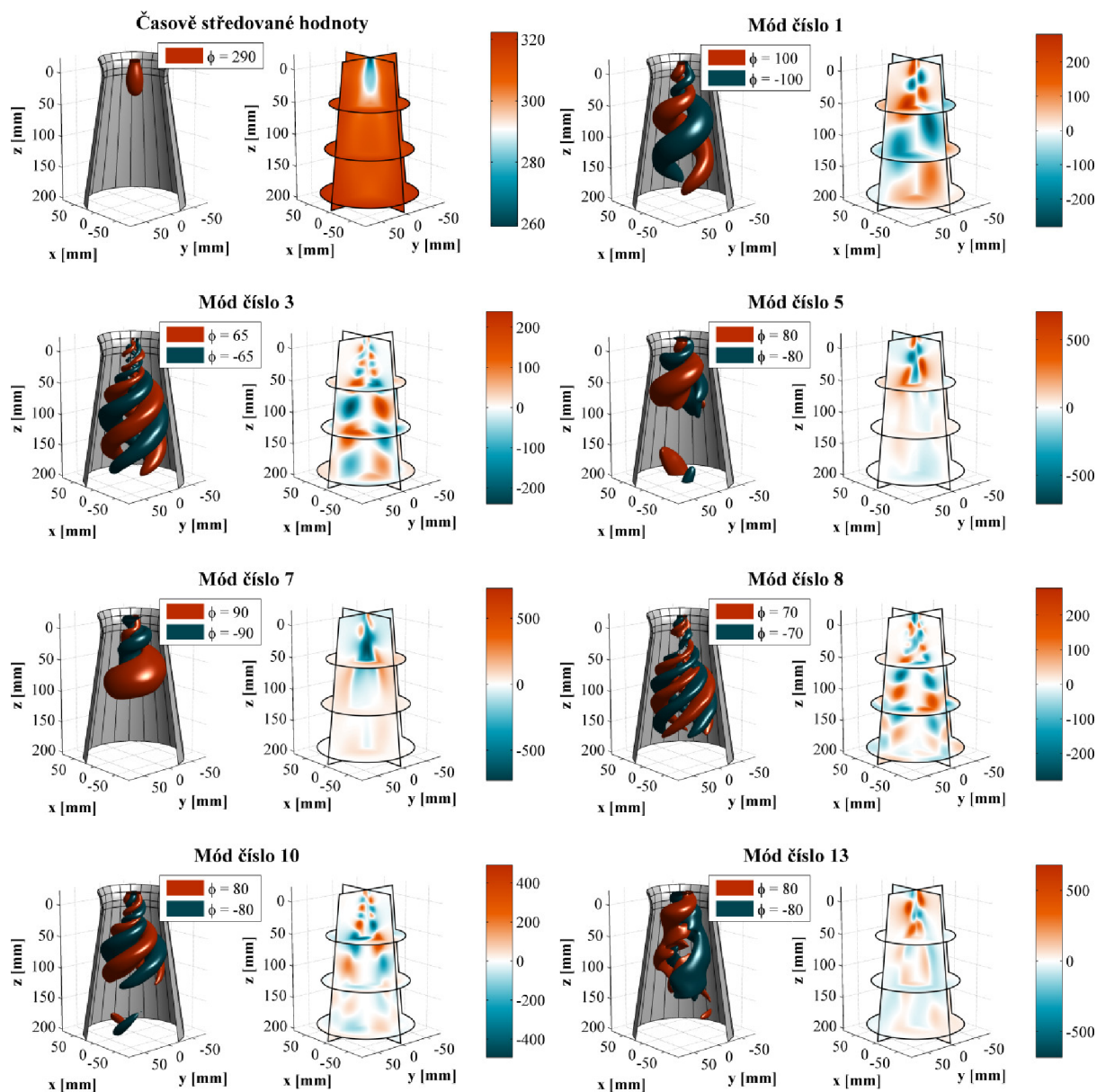


**Obrázek 6.4:** Velikost časově středovaných hodnot a některých POD módu rychlosti vizualizovaná pomocí řezů a izokontur.

číslo 1 a 2, 3 a 4, 5 a 6, 8 a 9, 10 a 11 souvisí převážně s precesním pohybem, naproti čemuž stojí mód číslo 7, který souvisí hlavně s axiálními pulzacemi. K němu se pojí až mód číslo 12.

Dekompozice tlaku byla provedena stejným způsobem jako u turbulentní Kármánovy vírové stezky – nejprve byl tlak navýšen o 100 000 Pa, aby v celé doméně nabýval kladných hodnot, a POD bylo poté provedeno z jeho odmocniny, díky čemuž se dosáhne kvadratické závislosti gradientů tlaku na rychlosti. Přičtením konstanty se totiž gradienty tlaku nezměnily. Tento model tlaku byl blíže popsán v části 4.3. Módy na následujícím obrázku se tedy vztahují k odmocnině ze statického tlaku navýšeného o 100 000 Pa. Díky tomu, že POD bylo provedeno ze všech veličin zároveň, si čísla párovaných módů u jednotlivých veličin odpovídají. Je to dáno tím, že časové funkce jsou pro všechny veličiny stejné. U časově středovaných

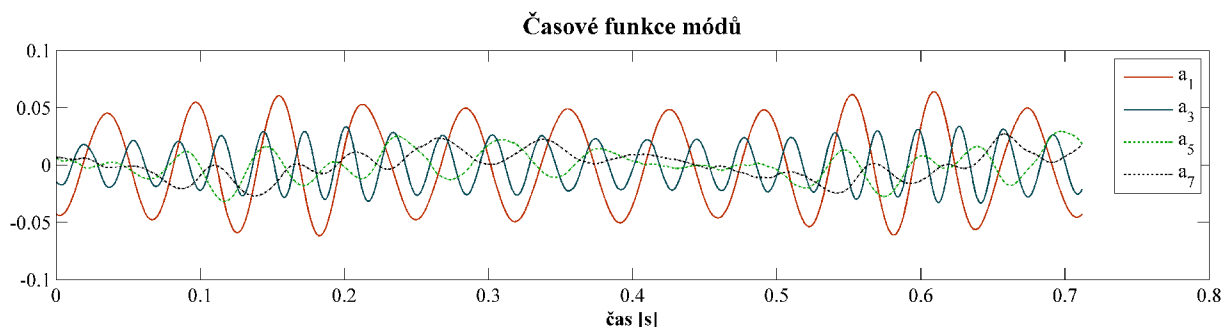
## Redukovaný model vírového proudění



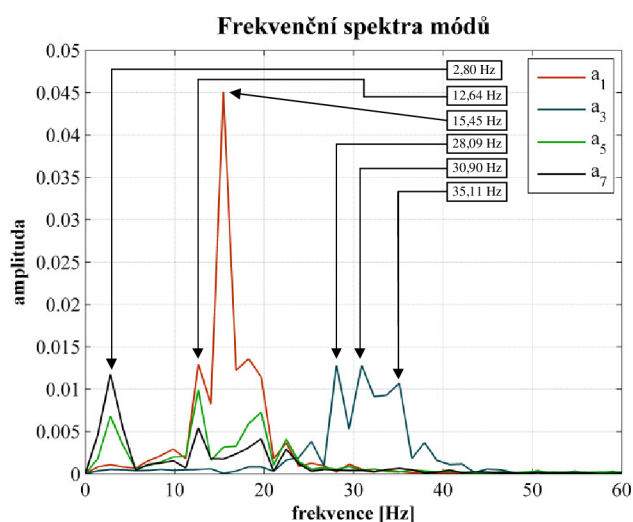
**Obrázek 6.5:** Časově středované hodnoty a POD módy odmocniny ze statického tlaku navýšeného o 100 000 Pa vizualizované pomocí řezů a izokontur. Podrobnosti k modelu tlaku jsou v části 4.3.

hodnot je patrná výrazná oblast nízkého tlaku pod středem náboje oběžného kola. Právě z tohoto místa se do savky spouští vírový cop. Fluktuační jsou zde rozměrově poměrně malé ve srovnání se střední částí savky, kde se tato struktura výrazně rozšiřuje radiálním směrem a nabývá na průřezu. Dobře je to vidět na prvních čtyřech fluktučních módech.

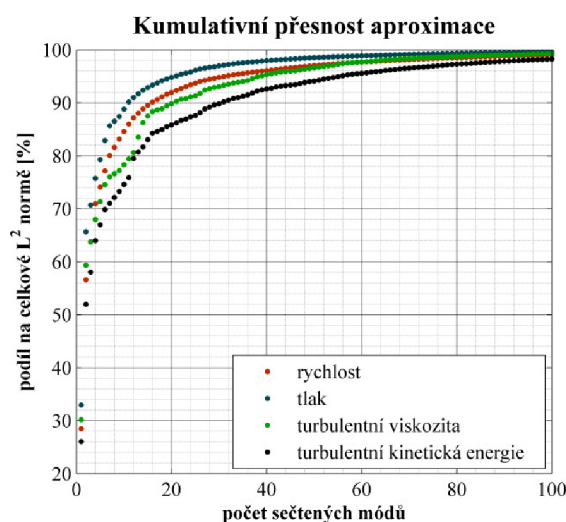
Na dalších obrázcích jsou vykresleny časové funkce módů a jejich frekvenční spektra. Je zde patrný podobný charakter funkcí  $a_1$  a  $a_3$ , jejichž základem je harmonická funkce, jejíž amplituda i frekvence se ale v průběhu času mírně mění. Potvrzují to frekvenční spektra, kde není dominantní jediná osamocená špička odpovídající jediné frekvenci, jako tomu bylo u Kármánovy vírové stezky, ale významná je zde celá řada frekvencí v rozsahu o šířce asi 10 Hz. Krok na frekvenci je v tomto případě s ohledem na délku časového intervalu 1,4 Hz,



Obrázek 6.6: Časové funkce některých POD módů.



Obrázek 6.7: Frekvenční spektra některých módů.



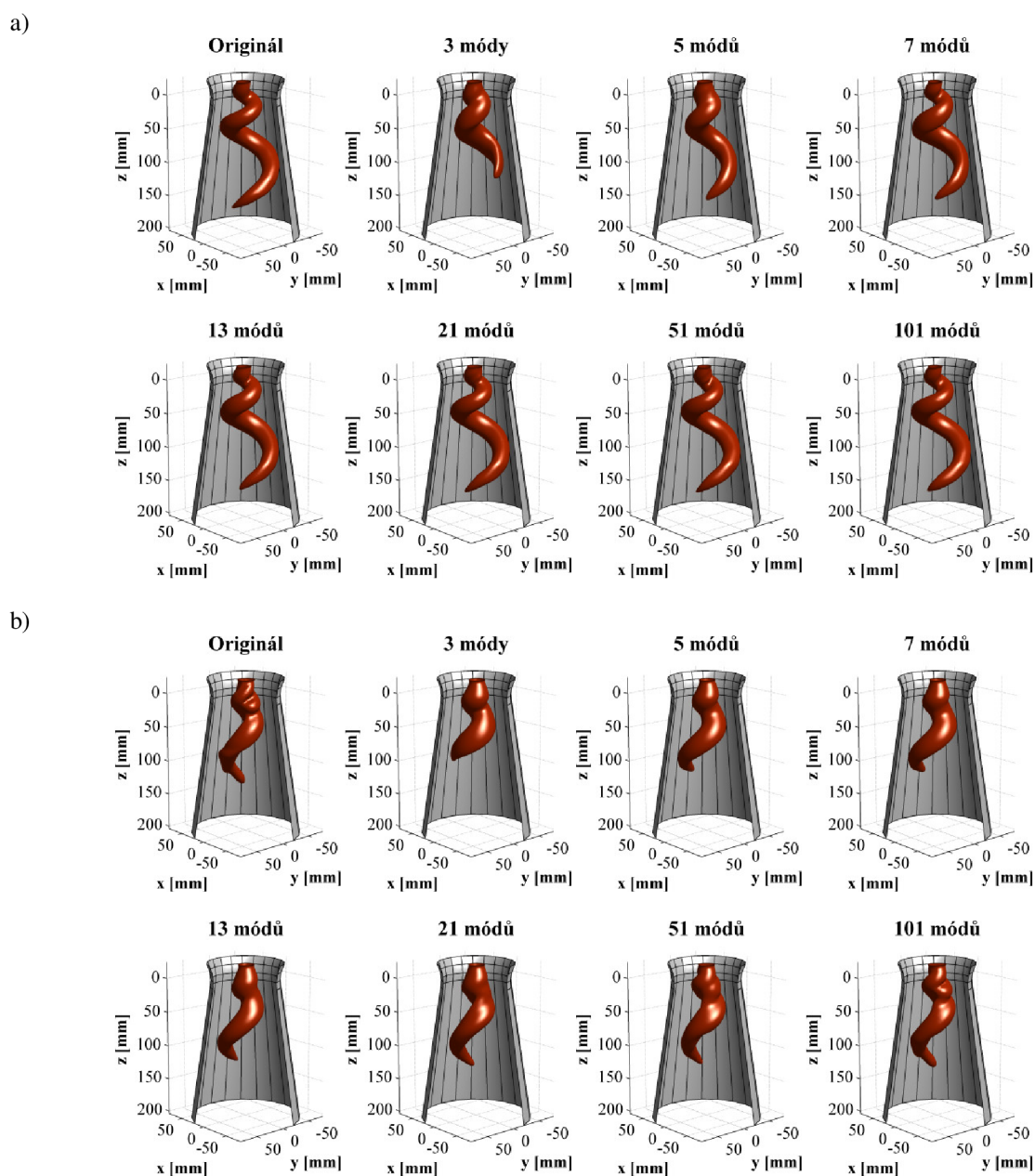
Obrázek 6.8: Graf přesnosti aproximace fluktuální složky dekomponovaných veličin.

kvůli čemuž mají značnou amplitudu prakticky všechny frekvence z tohoto rozsahu. U prvního módu ale na rozdíl od třetího vyčnívá hodnota 15,45 Hz, což odpovídá frekvenci precesního pohybu vírového copu. Tato hodnota je ve shodě s experimentálními výsledky naměřenými přímo konstruktéry vírového generátoru, kteří pomocí dat z tlakových snímačů dospěli k frekvenci 15,5 Hz.<sup>[26]</sup> Autoři dále pomocí stroboskopu stanovili otáčky oběžného kola na  $920 \text{ min}^{-1}$ , což představuje frekvenci 15,33 Hz. To znamená, že vírový cop rotuje prakticky synchronně s oběžným kolem. U pátého a především u sedmého módu je významná frekvence 2,8 Hz, která odpovídá axiálním pulzácím v savce.

U grafu kumulativní přesnosti aproximace fluktuální složky si lze všimnout, že POD vírového copu konverguje výrazně pomaleji než POD Kármánovy vírové stezky. Přesnost aproximace ve smyslu  $L^2$  normy po sečtení 100 módů je zde v závislosti na veličině 98 % a více. U Kármánovy vírové stezky ale ke stejné přesnosti stačilo sečíst pouze 10 módů. Navíc se dá očekávat, že s prodloužením časového úseku dojde ještě k dalšímu zpomalení konvergence s tím, jak vzroste počet stupňů volnosti. Nicméně vzhledem k tomu, že smyslem redukovaného modelu není zachytit veškeré detaily, bude zvolená délka časového úseku považována za dostatečnou.

Pro lepší představu o konvergenci POD byly také provedeny rekonstrukce vírového copu z různého počtu sečtených módů, a to jednak ve fázi, kdy je tato struktura plně vyvinutá, ale

## Redukovaný model vírového proudění



**Obrázek 6.9:** Originální snapshot a rekonstrukce vírového copu z různého počtu módů a) ve fázi, kdy je plně vyvinutý, b) ve fázi, kdy podléhá výrazným nestabilitám. Vykreslena je izokontura tlaku o hodnotě  $-10\,000\text{ Pa}$ , počty módů jsou včetně časově středovaných hodnot.

také ve fázi, kdy podléhá výrazným nestabilitám. Z výsledků na obrázku 6.9 je patrné, že vyvinutý vírový cop konverguje rychleji oproti vírovému copu v nestabilní fázi. V obou případech nejprve s přičítáním módů narůstá délka izokontury a formuje se základní tvar vírového copu. Po sečtení 13 módů se tvar vyvinutého vírového copu od originálu liší už jen v detailech, naproti tomu vírový cop v nestabilní fázi je oproti originálu příliš hladký. Chybí zde výrazné pulzace patrné především v horní části struktury, které jsou součástí až vyšších módů. Tyto pulzace jsou tedy příčinou mnoha stupňů volnosti a pomalé konvergence POD.

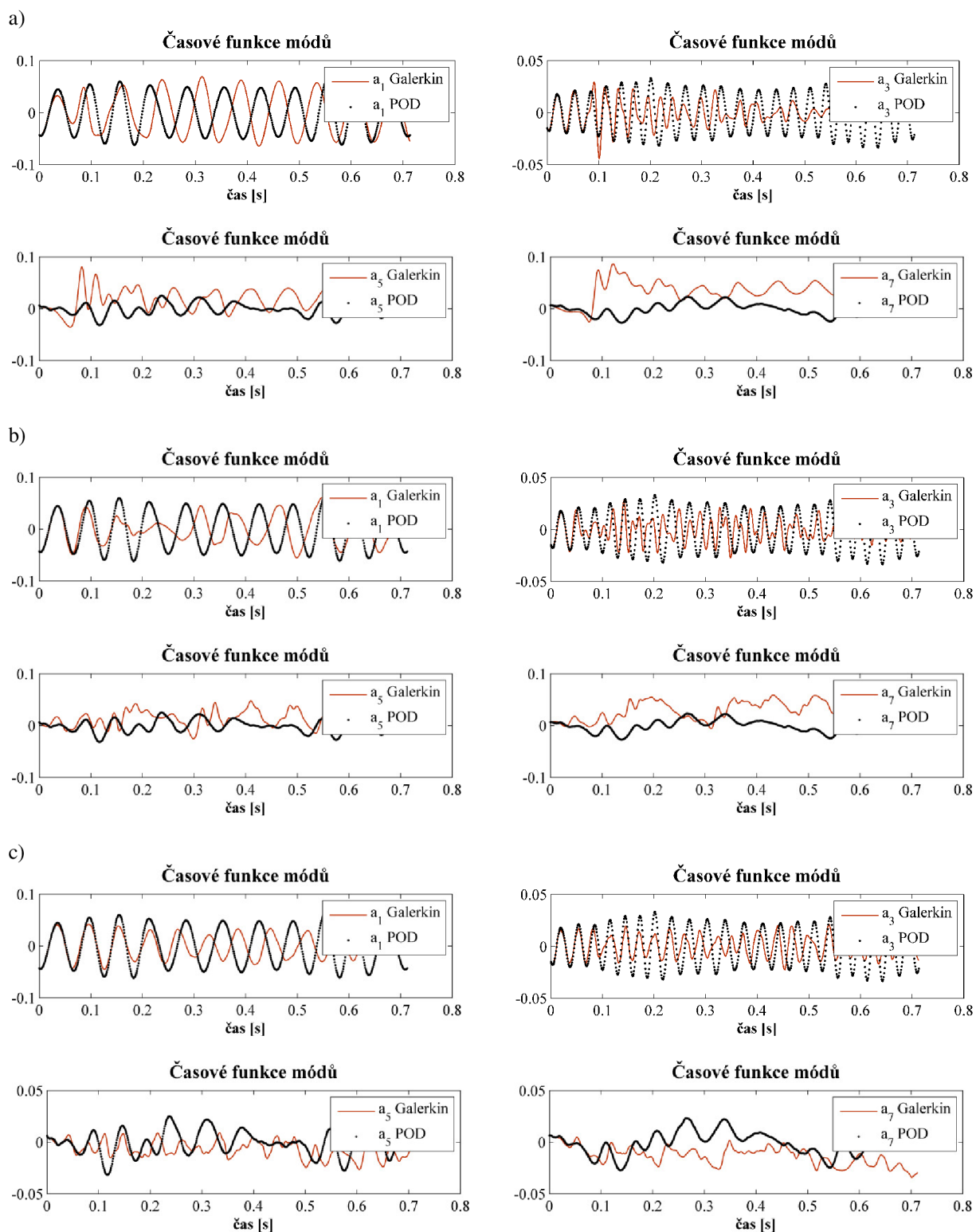
### 6.3 Redukovaný model

Z POD analýzy provedené v předchozí části vyplývá skutečnost, že konvergence vlastní ortogonální dekompozice je u vírového copu poměrně pomalá, což je špatná zpráva s ohledem na tvorbu redukovaného modelu. Rekonstrukce vybraných snapshotů z různého počtu POD módů ukázala, že je potřeba sečíst minimálně 13 módů, aby byl dobře zachycen aspoň základní tvar vírového copu. V chování vírového copu bylo možné identifikovat fázi, během níž tato struktura podléhala výrazným pulzacím, které měly víceméně nahodilý charakter, z čehož plyne velký počet stupňů volnosti a to, že k jejich rekonstrukci je třeba sečíst velké množství módů. V praxi (a v oblasti řízení proudění zvláště) je potřeba držet se co nejnižšího počtu módů, takže v rámci redukovaného modelu bude možné zachytit pouze základní tvar vírového copu. Vliv zanedbaných pulzací ale není malý, což plyne z grafu přesností aproximací na obrázku 6.8, takže ho bude potřeba zohlednit pomocí vhodného modelu nebo kalibrace.

Redukované modely vírového copu byly v rámci této práce sestaveny s použitím různých počtů módů. Počáteční podmínky byly opět počáteční hodnoty časových funkcí z POD, takže stejně jako u Kármánovy vírové stezky je možné přímo srovnat výsledné funkce. Na obrázku 6.10 na následující straně jsou vykresleny časové funkce módů číslo 1, 3, 5 a 7, získané integrací modelů s 15, 30 a 100 flukтуаčními módy. Pozitivní zjištění je, že model byl ve všech případech stabilní, negativní to, že výsledky nejsou dostatečně přesné. Ve všech případech je vidět, že vypočítané časové funkce se nejprve vyvíjí ve shodě s výsledky z POD, ale po krátké době dojde k rychlému odchýlení ke špatným průběhům. S ohledem na složitost proudění se sice nedá očekávat přesná shoda, ale průběhy by si měly odpovídat aspoň statisticky – měly by mít podobné frekvenční spektra a v nich by se měly shodovat dominantní frekvence a jejich amplitudy. Získané výsledky jsou od tohoto kritéria příliš daleko. Problémem je zde to, že jde o silně sdružený problém – v rovnici pro daný mód se vyskytují všechny ostatní módy, takže chyby ve vyšších módech mohou snadno ovlivnit nižší (významnější) módy, až se celý systém nakonec odchýlí k jinému, nesprávnému řešení. Systém tedy bude potřeba kalibrovat, přičemž vzhledem k výše uvedenému se nedá jako kritérium použít přesná shoda řešení s výsledky POD, takže to bude vyžadovat vytvoření jiné, vhodné metody.

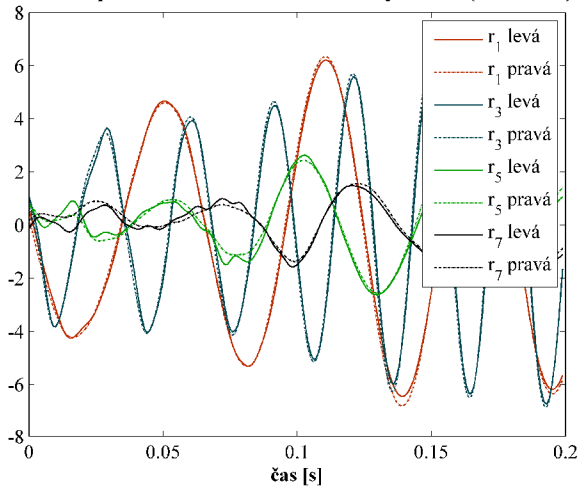
Pro lepší představu o vlastnostech Galerkinova systému jsou na obrázku 6.11 vykresleny průběhy levé a pravé strany některých rovnic po dosazení časových funkcí z POD. Levé strany jsou vzhledem ke tvaru systému (4.48) derivace časových funkcí, pravé strany zase součet konstantního, lineárních a kvadratických členů. Rozdíly mezi těmito průběhy jsou reziduály Galerkinova systému. Z grafů je patrné, jak s rostoucím počtem módů v systému reziduály klesají. Při 101 použitých módech už rozdíly mezi znázorněnými průběhy nejsou nikterak velké. Situace je ale jiná u vyšších (nevykreslených) módů, kde více chybí interakce s nepoužitými módy. Tyto chyby pak při integraci vlivem zmíněné sdruženosti rovnic ovlivní i nižší módy a způsobí odchýlení výsledného řešení od správných průběhů.

## Redukovaný model vírového proudění

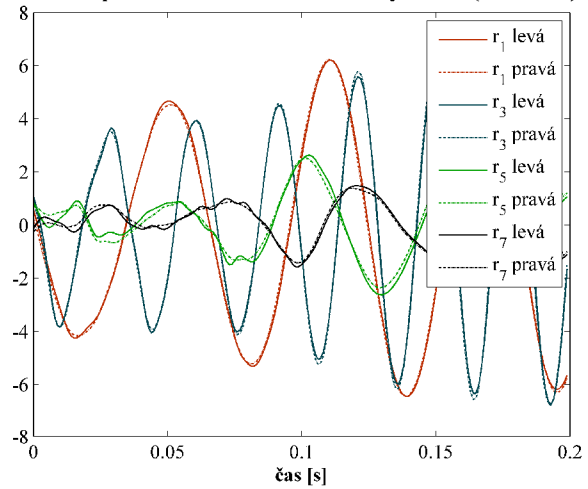


**Obrázek 6.10:** Časové funkce některých módů získané integrací redukovaného modelu ve srovnání s výsledky POD. a) model s 15 fluktuálními módy, b) model se 30 fluktuálními módy, c) model se 100 fluktuálními módy.

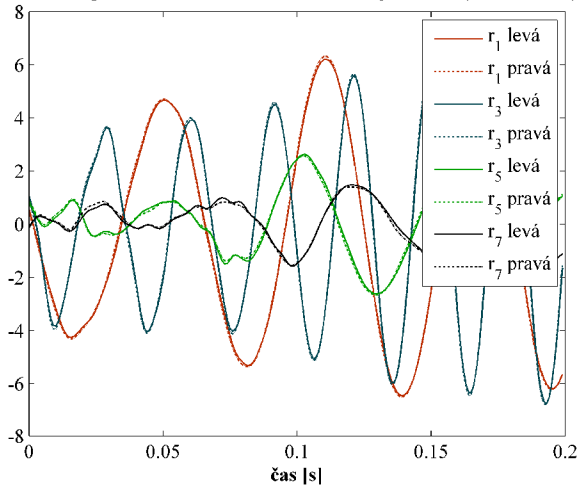
Levá a pravá strana Galerkinova systému (16 módů)



Levá a pravá strana Galerkinova systému (31 módů)



Levá a pravá strana Galerkinova systému (101 módů)



**Obrázek 6.10:** Srovnání průběhů levé a pravé strany některých rovnic Galerkinova systému po dosažení časových funkcí z POD při různém počtu použitých módů (včetně časově středovaných hodnot). Rozdíl mezi průběhy odpovídá reziduálům Galerkinova systému.



### Závěr

Tato práce se zabývala redukovanými modely proudění založenými na extrakci dominantních struktur ze systému metodou vlastní ortogonální dekompozice (ve zkratce POD). Chování takto získaných módů pak popisuje systém obyčejných diferenciálních rovnic získaný pomocí Galerkinovy projekce těchto módů na Navier-Stokesovu rovnici. Hlavním cílem této práce bylo aplikovat tuto metodiku na obtékání čtverce, za kterým vzniká Kármánova vírová stezka, a proudění v savce, kde vzniká vírový cop. Obojí jsou silně nestabilní děje projevující se značnými tlakovými pulzacemi. Redukované modely byly řešeny s počátečními podmínkami odpovídajícími referenční CFD simulaci, z níž byly stanoveny potřebné POD módy. Jejich řešení by se tedy mělo shodovat s časovými funkcemi POD módů, čehož bylo využito ke zhodnocení výsledků jednotlivých modelů. Ve všech případech byl pozorován postupný nárůst chyby v čase, až se výsledky ustálily na více či méně chybných průbězích. U laminární Kármánovy vírové stezky se podařilo výsledky uspokojivě zlepšit pomocí Tichonovovy regularizace, která upravuje rovnice tak, aby byl co nejvíce snížen reziduál při co nejmenších zásazích do systému. U turbulentní Kármánovy vírové stezky a vírového copu už ale tato metoda není vhodná, takže do budoucna bude pro získání dostatečně přesných modelů potřeba formulovat jinou, vhodnější. U vírového copu je situace komplikovanější v tom, že konvergence POD módů je oproti Kármánově vírové stezce výrazně pomalejší. Praktické aplikace v oblasti řízení proudění si žádají co nejnížší počty použitých módů, takže bude potřeba vytvořit vhodný model značného vlivu nepoužitých módů. Výsledný redukovaný model by měl být stabilní a dostatečně přesný nejen v referenčním bodě, ale i v jeho okolí s ohledem na proměnlivé kontrolní zásahy. Vzhledem k požadavku širší oblasti platnosti ale bude potřeba použít jinou metodiku i k samotnému vytvoření základního modelu. V této práci byly POD módy stanoveny z CFD simulace jednoho referenčního provozního bodu, takže takto sestavený redukovaný model je platný pouze v nejbližším okolí tohoto bodu. V literatuře lze nalézt dvě metody rozšíření oblasti platnosti redukovaného modelu. Jedna spočívá v provedení referenčních simulací a stanovení POD módů v několika provozních bodech a následné interpolace mezi nimi, druhá ve stanovení POD módů z CFD simulace, v rámci které se provozní bod plynule mění. Obě metody ale mají významné stinné stránky, takže metodika sestavení dostatečně přesných redukovaných modelů popisujících širší rozsah provozního pásma dle znalostí autora stále nebyla uspokojivě vyřešena a zůstává nadále velkou výzvou.

Z pohledu CFD simulací turbulentního proudění byl v této práci použit pro Kármánovu vírovou stezku model turbulence  $k-\varepsilon$  a pro vírový cop model reynoldsovských napětí RSM. Tyto modely jsou založeny na určitých zjednodušujících předpokladech, kvůli kterým je nutné vzít v úvahu, že výsledky se mohou více či méně lišit od skutečnosti. Do budoucna se proto u obou případů počítá s provedením simulace metodou velkých vírů (LES), která pomůže získat přesnější a detailnější popis proudění.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] AKHTAR, Imran, Ali H. NAYFEH a Calvin J. RIBBENS. On the stability and extension of reduced-order Galerkin models in incompressible flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2009, **23**(3), s. 213–237. DOI: 10.1007/s00162-009-0112-y.
- [2] AUBRY, Nadine, Philip HOLMES, John L. LUMLEY a Emily STONE. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*. 1988, **192**, s. 115-173. DOI: 10.1017/S0022112088001818.
- [3] BERGMANN, Michel, Charles-Henri BRUNEAU a Angelo IOLLO. *Improvement of Reduced Order Modeling based on Proper Orthogonal Decomposition*. Výzkumná zpráva. Bordeaux: Institut national de recherche en informatique et en automatique, 2008. 39 s.
- [4] BERGMANN, Michel, Laurent CORDIER a Jean-Pierre BRANCHER. Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model. *Physics of Fluids*. 2005, **17**(9). DOI: 10.1063/1.2033624.
- [5] BERGMANN, Michel, Andrea FERRERO, Angelo IOLLO, Angela SCARDIGLI a Haysam TELIB. An approach to perform shape optimisation by means of hybrid ROM-CFD simulations. *Recent developments in numerical methods for model reduction*. Konferenční prezentace [online]. Paříž, 2016 [cit. 2017-05-07]. Dostupné z: <http://www.math.univ-montp2.fr/~nmpdes/ME3/Contributed/Ferrero.pdf>
- [6] CAO, Yanhua, Jiang ZHU, Zhendong LUO a Ionel M. NAVON. Reduced-Order Modeling of the Upper Tropical Pacific Ocean Model using Proper Orthogonal Decomposition. *Computers and Mathematics with Applications*. 2006, **52**(8-9), s. 1373–1386. DOI: 10.1016/j.camwa.2006.11.012.
- [7] CORDIER, Laurent, Badr Abou EL MAJD a Julien FAVIER. Calibration of POD Reduced-Order Models using Tikhonov regularization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2009, **63**(2), s. 269-296. DOI: 10.1002/flid.2074.
- [8] GALVANETTO, Ugo a George VIOLARIS. Numerical investigation of a new damage detection method based on proper orthogonal decomposition. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2007, **21**(3), s. 1346–1361. DOI: 10.1016/j.ymsp.2005.12.007.
- [9] GANDER, Martin J. a Gerhard WANNER. From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing. *SIAM Review*. **54**(4). DOI: 10.1137/100804036.
- [10] GRAHAM, William R., Jaume PERAIRE a K. Y. TANG. Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models – Part I: Open-Loop Model Development. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999, **44**(7), s. 945-972. DOI:10.1002/(SICI)1097-0207(19990310)44:7<945::AID-NME537>3.0.CO;2-F.

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

- [11] GRAHAM, William R., Jaume PERAIRE a K. Y. TANG. Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models – Part II: model-based control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999, **44**(7), s. 973-990. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990310)44:7<973::AID-NME538>3.0.CO;2-F.
- [12] CHANG, Gary Han, Clemens M. SCHIRMER a Yahya MODARRES-SADEGHI. A reduced-order model for wall shear stress in abdominal aortic aneurysms by proper orthogonal decomposition. *Journal of Biomechanics*. 2017, **54**, s. 33-43. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2017.01.035.
- [13] JÍZDNÝ, Martin. *Vlastní tvary vírového proudění*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 79 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.
- [14] KAISER, Eurika, Bernd R. NOACK, Laurent CORDIER a kol. Cluster-based reduced-order modelling of a mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*. 2014, **754**, s. 365-414. DOI: 10.1017/jfm.2014.355.
- [15] KALASHNIKOVA, Irina a kol. *Reduced Order Modeling for Prediction and Control of Large-Scale Systems*. Výzkumná zpráva. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2014. 142 s
- [16] LIEU, Thuan, Charbel FARHAT a Michel LESOINNE. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006, **195**(41-43), s. 5730-5742. DOI: 10.1016/j.cma.2005.08.026.
- [17] LUCHTENBURG, Dirk M., Bernd R. NOACK a Michael SCHLEGEL. *An introduction to the POD Galerkin method for fluid flows with analytical examples and MATLAB source codes*. Technická zpráva. Berlín: Technische Universität Berlin, 2009. 54 s.
- [18] LUMLEY, John L. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*. Moskva: Nauka, 1967.
- [19] LYN, Dennis A. a Wolfgang RODI. The flapping shear layer formed by flow separation from the forward corner of a square cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 1994, **267**, s. 353-376. DOI: 10.1017/S0022112094001217
- [20] MANOUSSAKI, Daphne. *Using MATLAB to solve ODEs* [online]. [cit. 2016-08-13]. Dostupné z: <http://www.math.vanderbilt.edu/~daphne/courses/math226/MatlabODEs.pdf>
- [21] MATHWORKS. Constructing Sparse Matrices. *MathWorks Documentation* [online]. [cit. 2016-08-11]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/help/matlab/math/constructing-sparse-matrices.html>

- [22] NOACK, Bernd R. *Reduced-Order Modelling for Flow Control*. Přednáškové prezentace. [online]. Berlín: Technische Universität Berlin, 2008 [cit. 2015-11-28]. Dostupné z: <http://www.berndnoack.com/ReducedOrderModeling.php>
- [23] NOACK, Bernd R., Konstantin AFANASIEV, Marek MORZYŃSKI, Gilead TADMOR a Frank THIELE. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*. 2003, **497**, s. 335-363. DOI: 10.1017/S0022112003006694.
- [24] NOACK, Bernd R., Marek MORZYŃSKI a Gilead TADMOR. *Reduced-Order Modelling for Flow Control*. Vídeň: Springer, 2011. CISM Courses and Lectures, vol. 528. ISBN 978-370-9107-577.
- [25] NOACK, Bernd R., Paul PAPAS a Peter A. MONKEWITZ. The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 2005, **523**, s. 339–365. DOI: 10.1017/S0022112004002149.
- [26] PETIT, Olivier, Alin BOSIÖC, Hakan NILSSON, Sebastian MUNTEAN a Romeo SUSAN-RESIGA. Unsteady Simulations of the Flow in a Swirl Generator, using OpenFOAM. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*. 2011, **4**(1), s. 199-208. DOI: 10.5293/IJFMS.2011.4.1.199.
- [27] REMPFER, Dietmar. *Kohärente Strukturen und Chaos beim laminar-turbulenten Grenzschichtumschlag*. Stuttgart: Fakultät Verfahrenstechnik der Universität Stuttgart, 1991.
- [28] ROWLEY, Clarence W., Igor MEZIĆ, Shervin BAGHERI, Philipp SCHLATTER a Dan S. HENNINGSON. Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 2009, **641**, s. 115–127. DOI: 10.1017/S0022112009992059.
- [29] SIRISUP, Sirod a George E. KARNIADAKIS. A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models. *Journal of Computational Physics*. 2004, **194**, s. 92-116. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.08.021.
- [30] SIROVICH, Lawrence. Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part I: Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1987, **45**(3), s. 561–571.
- [31] SKOTÁK, Aleš. *Vírové struktury v savce vodní turbíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2004. 68 s. Vedoucí dizertační práce prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [32] SMITH, Troy R., Jeff MOEHLIS a Philip HOLMES. Low-Dimensional Modelling of Turbulence Using the Proper Orthogonal Decomposition: A Tutorial. *Nonlinear Dynamics*. 2005, **41**(1-3), s. 275–307. DOI: 10.1007/s11071-005-2823-y.

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

- [33] SUSAN-RESIGA, Romeo, Sebastian MUNTEAN, Constantin TĂNASĂ a Alin BOSIOC. Hydrodynamic Design and Analysis of a Swirling Flow Generator. *Proceedings of the 4th German – Romanian Workshop on Turbomachinery Hydrodynamics* [online]. Stuttgart, 2008 [cit. 2017-05-07]. Dostupné z: [http://acad-tim.tm.edu.ro/iSMART-flow/pdf/Resiga\\_4GRoWTH1.pdf](http://acad-tim.tm.edu.ro/iSMART-flow/pdf/Resiga_4GRoWTH1.pdf)
- [34] ŠTEFAN, David. *Study of the dissipation in spiraling vortical structures*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 176 s. Vedoucí dizertační práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.
- [35] WANG, Zhu, Imran AKHTAR, Jeff BORGGAARD a Traian ILIESCU. *Proper Orthogonal Decomposition Closure Models For Turbulent Flows: A Numerical Comparison* [online]. 2011 [cit. 2016-08-13]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1106.3585.pdf>
- [36] ZEBIB, Abdelfattah. Stability of viscous flow past a circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*. 1987, **21**, s. 155-165. DOI: 10.1007/BF00127673.

### Zdroje obrázků

U převzatých obrázků je zdroj uveden v popisku. V ostatních případech jsou obrázky původní.

## Seznam symbolů a jednotek

Symbol	Jednotka	Význam
$a$	–	časové funkce POD módů
$\dot{a}$	–	matice derivací časových funkcí módů
$\mathbf{A}$	–	charakteristická matice soustavy lineárních rovnic
$b$	–	časové funkce POD módů tlaku počítaných odděleně od rychlosti
$\mathbf{b}$	–	vektor pravých stran soustavy lineárních rovnic
$\mathbf{c}$	–	vektor konstantních členů Galerkinova systému
$\mathbf{C}$	–	korelační matice POD metodou snapshotů
$\mathcal{C}$	[J/(kg·s)]	člen konvekce v energetické bilanci
$\mathcal{D}$	[J/(kg·s)]	člen disipace v energetické bilanci
$\mathbf{e}$	–	vlastní vektory korelační matice ve výpočtu POD
$\mathbf{E}$	–	matice časových funkcí v Galerkinově systému
$\mathcal{F}$	[J/(kg·s)]	tlakový člen energetické bilance
$\mathbf{I}$	–	jednotková matice
$k$	[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	turbulentní kinetická energie
$\mathcal{K}$	[J/(kg·s)]	člen kinetické energie v energetické bilanci
$\mathbf{l}$	–	matice lineárních členů Galerkinova systému
$\mathbf{L}$	–	matice členů levé strany Poissonovy rovnice
$\mathbf{m}$	–	matice koeficientů levé strany Galerkinova systému
$M$	–	počet snapshotů použitých pro POD
$\vec{n}$	–	vektor normály směřující vně z kapaliny
$N$	–	počet buněk v síti
$p$	[Pa]	statický tlak
$\mathcal{P}$	[J/(kg·s)]	člen produkce v energetické bilanci
$\mathbf{q}$	–	matice kvadratických členů Galerkinova systému
$\mathbf{R}$	–	korelační matice POD přímou metodou
$\mathcal{R}^P$	–	fázový prostor o rozměru $P$
$\mathbf{res}$	–	matice reziduálů Galerkinova systému
$\mathbf{s}$	–	různé matice vyskytující se při řešení Poissonovy rovnice
$\mathbf{S}$	–	vektor velikostí buněk, také tenzor rychlosti deformace
$t$	[s]	čas
$T$	[s]	perioda nebo délka zvoleného časového úseku
$\mathcal{T}$	[J/(kg·s)]	člen transferu v energetické bilanci
$u$	–	obecné označení pro sledovanou veličinu
$\mathbf{U}$	–	matice snapshotů sledované veličiny
$\vec{v}$	[m/s]	vektor rychlosti
$\mathbf{V}$	–	matice sledované veličiny násobená odmocninou z velikosti buněk
$\mathbf{x}$	–	matice obsahující všechny členy Galerkinova systému
$\alpha$	[-]	regularizační parametr
$\varepsilon$	[J/(kg·s)]	míra turbulentní disipace
$\theta$	–	hranice prostorové domény
$\kappa$	–	POD módy turbulentní kinetické energie

---

## Redukovaný model vírového proudění

---

Symbol	Jednotka	Význam
$\lambda$	–	vlastní čísla korelační matice
$\nu$	$[\text{m}^2/\text{s}]$	kinematická viskozita, s indexem $t$ turbulentní viskozita
$\xi$	–	POD módy turbulentní viskozity
$\rho$	$[\text{kg}/\text{m}^3]$	hustota
$\varsigma$	–	POD módy tenzoru rychlosti deformace
$\varphi$	–	testovací funkce Galerkinovy projekce
$\phi$	–	tvarové funkce Galerkinovy projekce, POD módy rychlosti
$\psi$	–	POD módy tlaku
$\Omega$	–	prostorová doména