

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

NÁVRH ALGORITMU VÝPOČTU ROTORU ELEKTRICKÉHO STROJE S OHLEDEM NA NAPĚŤOVĚ DEFORMAČNÍ POMĚRY A KRITICKÉ OTÁČKY

DESIGN OF COMPUTATIONAL ALGORITHM OF ELECTRIC MACHINE ROTOR WITH RESPECT TO
STRESS-STRAIN RELATIONSHIPS AND CRITICAL SPEED

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Daniel Pařízek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Daniel Pařízek
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Návrh algoritmu výpočtu rotoru elektrického stroje s ohledem na napětově deformační poměry a kritické otáčky

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kontrola namáhání rotoru elektrického stroje je jeden z klíčových výpočtů pro ověření funkčnosti elektrického stroje jako celku. Práce by měla řešit návrh algoritmu výpočtu, který by obsahoval napětově–deformační analýzu s ohledem na kritickou vlastní frekvenci a případný návrh jednoduchého kalkulátoru, který by obsahoval napětově–deformační analýzu s ohledem na kritickou vlastní frekvenci. Jde v podstatě o analýzu nosníku na dvou podporách zatíženého hmotností mezi podporami. Rovněž by měl respektovat velikost díry v hřídeli jako možnost lepšího návrhu rotoru elektrického stroje. V další části práce by měl být navržen algoritmus výpočtu s využitím MKP tak, aby byl obecně aplikovatelný na jakýkoliv rotor elektrického stroje.

Cíle diplomové práce:

1. Rešerše problematiky návrhu rotoru elektrických strojů.
2. Návrh jednoduchého kalkulátoru pro výpočet rotoru s dutou hřídelí.
3. Pouzení výpočtových postupů mechanické kontroly rotoru elektrického stroje s využitím MKP pro konkrétní zadání.
4. Analýza a zhodnocení dosažených výsledků.

Seznam doporučené literatury:

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L.: The Finite Element Method. Butterworth Heinemann, London, 2000

BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J.: Numerické metody mechaniky 1, 2. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992

BATHE K.-J.: Finite Element Procedures. Prentice Hall, 1996

SLAVÍK, J., STEJSKAL V., ZEMAN V.: Základy dynamiky strojů, 2000

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá problematikou mechanického návrhu rotoru elektrického stroje. V rámci prvních dvou kapitol praktické části práce jsou sestaveny dva zjednodušené výpočtové modely rotoru (modely úrovně 1). Konkrétně model ohybově poddajného rotoru na tuhých podporách a model ohybově tuhého rotoru na pružných podporách. Podstata těchto výpočtových modelů spočívá v řešitelnosti pomocí jednoduchých rovnic. S použitím těchto modelů lze dosáhnout úspory času při sestavování předběžného návrhu geometrie rotoru. Následující kapitola je věnována srovnání různých přístupů k výpočtovému modelování rotoru pomocí MKP. Vyšetřován je předem zadaný předběžný návrh vysokorychlostního masivního rotoru. Představeny jsou výpočtové modely různých úrovní při deformačně-napěťové analýze a modální analýze. Součástí je rovněž návrh, jak při dané analýze efektivně postupovat.

Klíčová slova

točivý elektrický stroj, masivní rotor, magnetický tah, příčinkový součinitel, kritické otáčky, Rayleighova metoda, MKP

Abstract

The Master's thesis deals with the mechanical design of electric machine rotor. Within the first two chapters of the practical part of the thesis two simplified computational models of the rotor (level 1 models) are compiled. Specifically, the model of flexible rotor mounted on rigid supports and model of rigid rotor mounted on flexible supports. The essence of these computational models lies in solvability using simple equations. Using these models can save time when constructing a pre-design of the rotor geometry. The following chapter is devoted to comparing different approaches to computational modeling of rotor using FEM. A predetermined preliminary design of a high-speed massive rotor is investigated. Computational models of different levels at stress-strain analysis and modal analysis are presented. It also includes a suggestion on how to proceed effectively in a given analysis.

Key Words

rotating electrical machine, massive rotor, unbalanced magnetic pull, influence coefficient, critical speed, Rayleigh method, FEM

Bibliografická citace

PAŘÍZEK, Daniel. *Návrh algoritmu výpočtu rotoru elektrického stroje s ohledem na napět'ově deformační poměry a kritické otáčky*. Brno, 2019. 107 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.

Prohlášení autora

Tímto prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma *Návrh algoritmu výpočtu rotoru elektrického stroje s ohledem na napět'ově deformační poměry a kritické otáčky* jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a zdrojů, které jsou v práci citovány a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

V Brně dne 24. května 2019

.....
Daniel Pařízek

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval doc. Ing. Radku Vlachovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a konzultace, které přispěly k vypracování této práce. Zároveň bych rád poděkoval své přítelkyni Janě Rejentové za pomoc s programem \LaTeX .

Obsah

Úvod	1
1 Formulace problému a cíle práce	3
1.1 Problémová situace	3
1.2 Formulace problému (úlohy)	3
1.3 Cíle řešení problému (úlohy)	3
2 Problematika návrhu rotorů elektrických strojů	5
3 Magnetický tah	7
4 Metoda konečných prvků	9
4.1 Statická analýza	9
4.2 Modální analýza	10
5 Komplexní analýza problému	13
5.1 Vymezení hranic problému	13
5.2 Systém podstatných veličin	13
5.3 Metoda řešení problému	14
6 Modelování ohybově poddajného rotoru na úrovni 1	17
6.1 Průhyb a napjatost odstupňovaného hřídele	17
6.1.1 Matice poddajnosti	17
6.1.2 Ekvivalentní momenty setrvačnosti	20
6.1.3 Průhyb hřídele se zahrnutím magnetického tahu	28
6.1.4 Napjatost hřídele	32
6.2 Přibližné metody výpočtu prvních kritických otáček	39
6.2.1 Dunkerleyův vztah	42
6.2.2 Rayleighova energetická metoda	45
6.3 Model ohybově poddajného rotoru úrovně 1	51
6.3.1 Zhodnocení výsledků pro konkrétní případ rotoru	53
7 Modelování ohybově tuhého rotoru na úrovni 1	59
7.1 Ekvivalentní tuhost rotoru	60
7.1.1 Posuv rotoru v důsledku deformace pružných podpor	60
7.1.2 Přibližné stanovení prvních kritických otáček	61
7.2 Deformačně-napět'ový stav rotoru	61
7.2.1 Rotující válcové těleso	66
7.3 Model ohybově tuhého rotoru úrovně 1	71
8 Modelování rotoru na vyšších úrovních s použitím MKP	73
8.1 Deformačně-napět'ová analýza rotoru	74
8.1.1 Plný model rotoru	75
8.1.2 Výsečový model rotoru	78
8.1.3 Sub-model klece rotoru	81
8.1.4 Zhodnocení výsledků	84
8.2 Modální analýza rotoru	84

8.2.1	Model rotoru M1.1	86
8.2.2	Model rotoru M1.2	87
8.2.3	Model rotoru M1.3	88
8.2.4	Zhodnocení výsledků	90
8.3	Zhodnocení modelu ohybově tuhého rotoru úrovně 1	90
9	Závěr	93
	Literatura	95
	Seznam symbolů a zkratk	99
	Seznam obrázků	104
	Seznam tabulek	105
	Přílohy	107

Úvod

Točivé elektrické stroje jsou zařízení, která slouží k přeměně energie. V případě motorů se jedná o přeměnu elektrické energie na energii magnetickou a následně mechanickou. Probíhají-li přeměny energií v opačném pořadí, pak je řeč o generátorech. Z nejhrubšího hlediska se tyto stroje skládají ze dvou hlavních částí – stacionární části, tzv. *statoru*, který v případě motorů produkuje točivé magnetické pole a rotující části, *rotoru*, který pohání externí zařízení [1, 2].

Celkový návrh elektrického stroje se skládá z celé řady dílčích návrhů, jako např. návrhu elektrického, tepelného, mechanického a dalších. Správně navržený elektrický stroj musí současně vyhovět požadavkům všech dílčích návrhů, které z principu nemohou probíhat nezávisle na sobě. Stádium vývoje prototypu elektrického stroje je proto obvykle zdoluhavým iterativním procesem, kdy opakovanými konstrukčními úpravami a výpočty směřujeme od prvotního zevrubného návrhu k dílu, které splňuje požadavky zákazníka [3]. Situace může být o to komplikovanější v případě vysokootáčkových elektrických strojů, které se často pohybují na hranici technické proveditelnosti.

Hlavní motivací této práce je docílit úspory času při návrhu prototypu točivého elektrického stroje. Zabývat se budeme dílčí částí mechanického návrhu rotoru. Konkrétně se bude jednat o kontrolu deformačně-napěťového stavu a stanovení vlastních frekvencí rotoru, tzv. kritických otáček. Rotor musí být navržen tak, aby kritické otáčky, mající za následek vznik funkčně nepřijatelných vibrací, ležely mimo rozsah požadovaných provozních otáček.

V současné době je nejrozšířenější metodou řešení inženýrských problémů výpočtové modelování. Výsledky získané výpočtovým modelováním jsou významně ovlivněny úrovní dílčích modelů geometrie, okolí, vazeb apod. – jedná se o problematiku úrovnivosti výpočtového modelování [4]. V současnosti preferovaná metoda konečných prvků (dále jen MKP) umožňuje modelovat rotor na mnoha různých úrovních. Při volbě vhodného výpočtového modelu pak hraje významnou roli výpočtová náročnost a požadovaná přesnost výsledků. Tato kritéria bývají obvykle protichůdná, což činí výběr výpočtového modelu problematickým. Nelehkým úkolem je pak nalezení určitého kompromisu. V rámci této práce budou představeny různé přístupy k výpočtovému modelování rotoru pomocí MKP při deformačně-napěťové a modální analýze. Cílem bude usnadnit výběr vhodného výpočtového modelu a zároveň navrhnout, jakým způsobem při dané analýze efektivně postupovat.

Část této práce bude věnována problematice prvotního návrhu geometrie rotoru. Ten bývá obvykle sestavován intuitivně na základě zkušeností z předešlých řešených problémů. V této fázi vývoje je klíčové získat v krátkém čase zevrubnou představu o chování rotoru. Použití MKP pro tyto účely je však variantou nepřiměřeně časově náročnou. Cílem proto bude sestavit zjednodušený model rotoru, jehož chování bude možné popsat pomocí jednoduchých analytických vztahů. Sestavený výpočtový model by měl být schopen v krátkém čase alespoň přibližně stanovit deformačně-napěťové poměry a kritické otáčky rotoru.

1 Formulace problému a cíle práce

1.1 Problémová situace

Vývoj prototypu rotoru elektrického stroje je zpravidla zdlouhavý, iterativní proces. Od prvotního zevrubného návrhu směřujeme k finálnímu dílu opakovanými výpočty a konstrukčními úpravami. Deformačně-napět'ové a modální analýzy rotorů elektrických strojů jsou v současné době řešeny dominantně pomocí MKP, což může být více či méně časově náročné. K sestavení prvotního návrhu geometrie rotoru by proto bylo výhodné mít k dispozici zjednodušený výpočtový model, popsateľný pomocí jednoduchých rovnic, který by umožnil v krátkém čase alespoň přibližně stanovit deformačně-napět'ové poměry a kritické otáčky. Z pohledu úrovnosti výpočtového modelování nazvěme tento výpočtový model modelem úrovně 1.

Model úrovně 1 lze použít ve stádiu vývoje k vytvoření prvotního návrhu geometrie. Pro další podrobné analýzy je však třeba použít MKP, která umožňuje modelovat rotor na mnoha různých úrovních. Pro volbu vhodného modelu geometrie, okolí, vazeb apod. je bezesporu rozhodující typ analýzy, kterou řešíme. Lze například očekávat, že deformačně-napět'ová analýza bude vyžadovat detailnější zpracování modelu geometrie v oblastech koncentrátorů napětí než modální analýza apod. Dále však platí, že čím propracovanější výpočtový model použijeme, tím vyšší bude výpočtová náročnost a s ní spojená doba potřebná pro výpočet. Nelehkým úkolem výpočtáře je pak nalezení určitého kompromisu – je třeba sestavit takový výpočtový model rotoru, který povede k řešení daného problému (resp. úlohy) za přijatelnou dobu výpočtu.

1.2 Formulace problému (úlohy)

- Sestavit zjednodušený výpočtový model rotoru (model úrovně 1), který umožní v krátkém čase přibližně stanovit první kritické otáčky a deformačně-napět'ové poměry. Jedná se o problém vyžadující volbu vhodné metody řešení.
- Provést srovnání různých přístupů k výpočtovému modelování rotoru elektrického stroje pomocí MKP. V tomto případě se jedná úlohu, neboť metoda řešení je předem známá.

1.3 Cíle řešení problému (úlohy)

Cíle, kterých má být v této práci dosaženo, byly vedoucím práce formulovány následovně.

1. Provedení rešerše problematiky návrhu rotoru elektrických strojů.
2. Návrh zjednodušeného výpočtového modelu rotoru s dutou hřídelí, který bude popsateľný pomocí jednoduchých analytických vztahů.
3. Posouzení výpočtových postupů mechanické kontroly rotoru elektrického stroje s využitím MKP pro konkrétní zadání.
4. Analýza a zhodnocení dosažených výsledků.

2 Problematika návrhu rotorů elektrických strojů

Správný návrh elektrického stroje vyžaduje znalosti mnoha oborů – elektromagnetizmu, mechaniky těles, dynamiky rotorů, termomechaniky, hydromechaniky a dalších. Dle [3] se úplný návrh elektrického stroje skládá z následujících dílčích návrhů:

1. návrhu elektrického obvodu,
2. návrhu magnetického obvodu,
3. návrhu izolace,
4. tepelného návrhu,
5. mechanického návrhu,
6. návrhu konstrukce a technologie výroby [3].

Složitost celkového návrhu spočívá právě v tom, že dílčí návrhy nemohou probíhat nezávisle na sobě. Požadavky dílčích návrhů navíc velmi často bývají protichůdné. Příkladem může být návrh šířky vzduchové mezery mezi rotorem a statorem. Z pohledu elektromagnetického návrhu je vhodné, pokud je šířka vzduchové mezery co nejmenší, z pohledu mechanického návrhu je tomu naopak. Klíčové je pak nalezení určitého kompromisu – z nepřeberného množství různých variant je třeba vybrat tu, pokud možno, nejvhodnější. [3, 5]

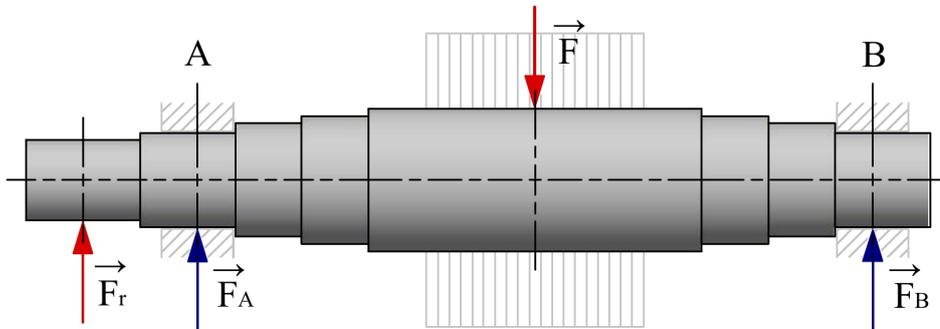
Univerzální návod na to, jak při návrhu postupovat, bohužel neexistuje. Zpravidla se proto jedná o proces iterativní, kdy opakovanými výpočty a konstrukčními úpravami postupně přecházíme od předběžného návrhu k dílu, které vyhovuje všem požadavkům. Předběžný návrh se obvykle sestavuje na základě zkušeností inženýrů [3, 6].

V rámci této práce se budeme zabývat pouze dílčí oblastí mechanického návrhu – posouzením deformačně-napět'ového stavu rotoru a vyhodnocením kritických otáček, při kterých dochází k rezonanci. Univerzální metodou pro řešení těchto dílčích úloh je v současné době dominantně používaná MKP, která bude stručně představena v kapitole 4. Z důvodu úspory času i důvodů finančních však nacházejí své uplatnění v této oblasti i jiné metody řešení. Za zmínku stojí v praxi velmi často používaná *metoda přenosových matic*, která umožňuje ve velmi krátkém čase přibližně stanovit průhyby hřídele a kritické otáčky. Touto metodou se podrobně zabývá diplomová práce [7], v této práci jí proto nebudeme dále věnovat pozornost. V některé literatuře, například v [3] nebo [6], je pro posouzení deformačně-napět'ového stavu a kritických otáček rotoru použito zjednodušeného výpočtového modelu – letmo uloženého nehmotného hřídele, zatíženého jedinou silou F_r na převislém konci a jedinou silou F mezi ložisky, viz obrázek 2.1. Matematický popis těchto modelů vychází převážně z teorie prosté pružnosti, konkrétně z teorie nosníků, namáhaných na ohyb a na krut, která je podrobně popsána v [8]. Důraz je v případě těchto modelů kladen zejména na to, aby vzniklé rovnice bylo možné řešit bez nutnosti použití výpočetní techniky.

Úroveň modelu rotoru z obrázku 2.1 je s ohledem na možnosti současné doby nedostačující. V podobě, v jaké je zpracován v [7], však poskytuje důležité informace o zatížení, kterému je rotor za provozu vystaven a které je při návrhu třeba brát v potaz. Síla F_r , působící na převislém konci, představuje tah řemene. Tah řemene může a nemusí být přítomen v závislosti na konstrukčním provedení mechanismu pro přenos kroutícího momentu. Síla F , působící mezi ložisky, je dána součtem tíhy rotorového svazku a klece F_G a magnetického tahu F_{mg} . Hřídel

jako celek je namáhán na ohyb. Převislý konec, včetně úseku od ložiska A po odlehý konec rotorového svazku, je v důsledku přenosu kroutícího momentu namáhán na krut. Podrobnější rozbor namáhání bude proveden v kapitole 6.1.4.

$$F = F_G + F_{mg} \quad (2.1)$$



Obr. 2.1: Zjednodušený model rotoru (vychází z [3]).

Právě magnetický tah F_{mg} bývá při mechanickém návrhu často opomíjen. Jedná se o zatížení, které vzniká v důsledku přitažlivých elektromagnetických sil působících mezi rotorem a statorem. Magnetickému tahu bude věnována následující kapitola.

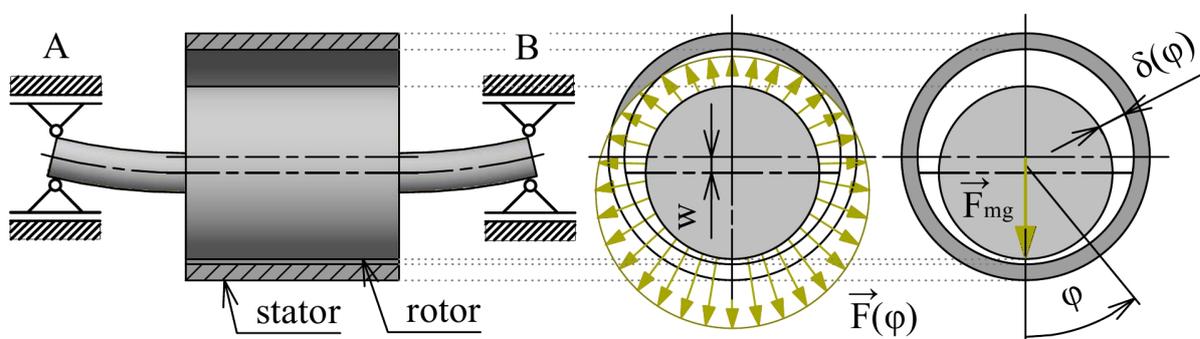
3 Magnetický tah

Protéká-li vinutím točivého elektrického stroje elektrický proud, pak ve vzduchové mezeře vzniká magnetické silové pole, které má za následek vznik přitažlivých elektromagnetických sil působících mezi rotorem a statorem. Je-li šířka vzduchové mezery (vůle mezi rotorem a statorem), například v důsledku geometrických nepřesností, dynamické či statické excentricity, po obvodu proměnná, pak tyto síly nejsou v rovnováze, tj. navzájem se nevyruší. Silovou výslednici těchto elektromagnetických sil, dále F_{mg} , nazýváme *nevyváženým magnetickým tahem*. Magnetický tah působí přibližně ve směru nejmenší šířky vzduchové mezery [2, 9].

Dle článku [10] lze magnetický tah F_{mg} popsat lineární závislostí

$$F_{mg} = C_{mg}w, \quad (3.1)$$

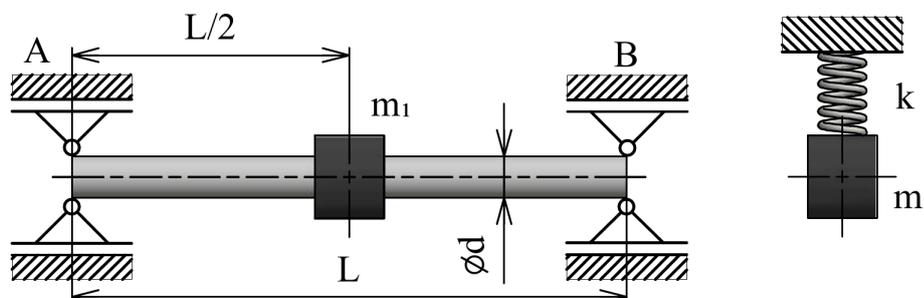
kde C_{mg} je magnetická tuhost a w je průhyb hřídele v místě působivosti F_{mg} , viz obrázek 3.1.



Obr. 3.1: Nevyvážený magnetický tah (vychází z [10]).

Definice (3.1) umožňuje modelovat magnetický tah pomocí lineární pružiny se zápornou tuhostí [7]. Podstata záporné tuhosti spočívá v tom, že při stlačení neklade pružina odpor, nýbrž působí tahovou silou, která je přímo úměrná jejímu stlačení. Problematiku lze lépe přiblížit na konkrétním příkladě. Uvažujme jednoduchý model rotoru, tvořený nehmotným poddajným hřídelem se soustředěnou hmotou m_1 , viz obrázek 3.2. Nehmotný poddajný hřídel lze modelovat pomocí lineární pružiny tuhosti k . Na základě rovnice $F = kw$, kde F je zátěžná síla působící v místě hmoty m_1 a w posuv působivosti této síly, lze s použitím Castiglianovy věty odvodit

$$k = \frac{48EJ_y}{L^3}. \quad (3.2)$$



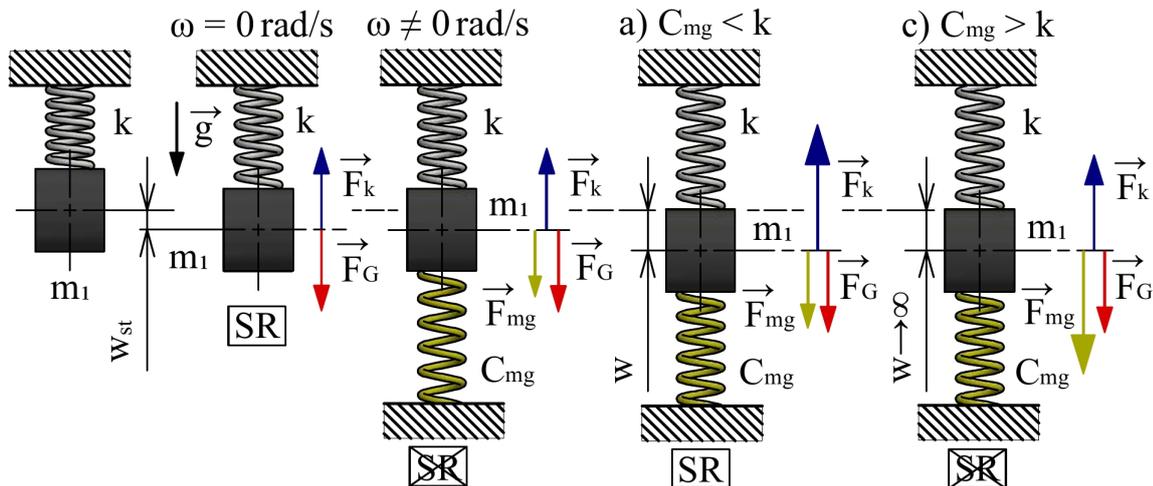
Obr. 3.2: Model rotoru se soustředěnou hmotou m_1 .

V klidovém stavu, kdy $\omega = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, je hřídel prohýbán pouze v důsledku působení tíhové síly $F_G = m_1g$. Průhybu přitom klade odpor v opačném směru působící pružná síla hřídele F_k .

Během procesu zatěžování postupně narůstá velikost síly F_k až do okamžiku, kdy F_G a F_k jsou ve statické rovnováze. Hřídel pak v místě společného působení sil vykazuje statický průhyb w_{st} , který je příčinou nerovnoměrné šířky vzduchové mezery $\delta(\varphi)$. Uvedením rotoru do provozu ($\omega \neq 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) dojde ke vzniku magnetického tahu F_{mg} , který vyvolá další průhyb hřídele. Velikost síly F_{mg} je stejně jako velikost síly F_k závislá na průhybu w . Dle poměru tuhosti hřídele k a magnetické tuhosti C_{mg} přitom mohou nastat tři různé případy.

- Pokud $C_{mg} < k$, pak velikost síly F_k roste s větším gradientem než velikost F_{mg} . V určitém momentě dospěje silová soustava do statické rovnováhy, které odpovídá průhyb w . Zda je tento průhyb funkčně přípustný se odvíjí od vůle mezi rotorem a statorem.
- V případě $C_{mg} = k$ narůstají síly F_k a F_{mg} se stejným gradientem. Silová soustava z tohoto důvodu nemůže nabýt statické rovnováhy.
- V případě, že $C_{mg} > k$, roste velikost F_k s menším gradientem než velikost F_{mg} . Průhyb pak roste teoreticky nade všechny meze, jinak řečeno je nestabilní [10].

Situace jsou patrné z obrázku 3.3.



Obr. 3.3: Stabilita průhybu v důsledku přítomnosti magnetického tahu.

4 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je v současné době jednou z nejpoužívanějších metod řešení inženýrských problémů z nejrůznějších oborů, jako např. mechaniky těles, hydromechaniky, termomechaniky, elektromagnetizmu a dalších. Podstata této metody spočívá v diskretizaci spojitého kontinua na konečný počet podoblastí jednoduchého tvaru, tzv. prvků – odtud plyne název metody [11, 12].

Uvažujme *přímou úlohu pružnosti*, tj. takovou úlohu pružnosti, kdy všechny vstupní parametry týkající se geometrie, vazeb, zatížení a materiálu jsou známy a hledanými neznámými jsou deformace a napjatost tělesa. Z hlediska matematické formulace rozlišujeme dva základní přístupy k řešení přímé úlohy – přístup diferenciální a přístup variační. *Diferenciální přístup* vede na soustavu diferenciálních rovnic, které jsou řešitelné analyticky v uzavřeném tvaru jen ve velmi ojedinělých případech. MKP je založena na *přístupu variačním*, který vede na problém hledání minima nějakého funkcionálu [12, 13].

„Funkcionál – zobrazení z množiny funkcí do množiny čísel. Je to tedy pravidlo, podle něhož přiřadíme funkci na jejím definičním oboru (nebo jeho části) nějakou číselnou hodnotu. Příkladem je určitý integrál funkce [11].“

Z hlediska volby nezávislých neznámých funkcí dále rozlišujeme tři varianty řešení – silovou, deformační a hybridní (smíšenou). V případě *silové varianty* jsou nezávislými neznámými funkcemi složky tenzoru napětí, pomocí kterých jsou následně určeny deformační posuvy. V případě *deformační varianty* je tomu naopak – nezávislými neznámými jsou deformační posuvy. V případě *smíšené varianty* jsou nezávislými neznámými parametry vybrané deformační posuvy a vybrané složky tenzoru napětí [12, 13].

V případě MKP je preferována varianta deformační. Nezávislými neznámými jsou deformační posuvy uzlů konečno-prvkové sítě. Napříč elementy jsou hodnoty deformačních posuvů aproximovány s použitím tzv. bázevých funkcí. Základním pilířem deformační varianty MKP je *věta o minimu kvadratického funkcionálu*, která říká následující:

„Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které minimalizují kvadratický funkcionál Π_L , též zvaný Lagrangeův potenciál [12, 14].“

Lagrangeův potenciál Π_L je definován vztahem

$$\Pi_L = W - P, \quad (4.1)$$

kde W je celková energie napjatosti tělesa a P je celková potenciální energie vnějších sil [14].

4.1 Statická analýza

Statické analýzy bude v této práci použito k posouzení deformačně-napět'ového stavu rotoru. Minimalizací Lagrangeova potenciálu obdržíme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (4.2)$$

kde \mathbf{K} je globální matice tuhosti, \mathbf{F} je globální matice zatížení a \mathbf{U} je matice nezávislých deformačních parametrů. Rovnice (4.2) se nazývá *základní rovnice MKP*. Při statické analýze musí být dále splněna následující podmínka:

„Řešitel musí vždy předepsat alespoň takové okrajové podmínky, aby zamezil pohybu tělesa jako celku ve všech jeho složkách, které jsou možné s ohledem na typ a dimenzi úlohy [12].“

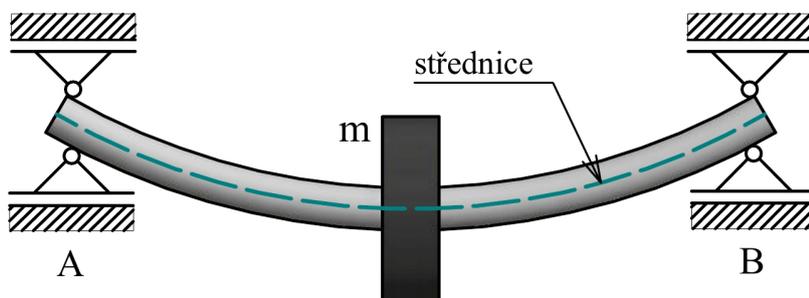
Při nesplnění této podmínky je matice \mathbf{K} singulární, tj. $\det(\mathbf{K}) = 0$. Soustava (4.2) pak nemá jednoznačné řešení, což vede k numerickému zhroucení výpočtu [12]. Předepsáním dostatečného počtu okrajových podmínek dojde k vynulování příslušných prvků matice \mathbf{U} , a tím i odpovídajících řádků a sloupců matice \mathbf{K} , která již není singulární.

4.2 Modální analýza

Pomocí modální analýzy stanovujeme vlastní frekvence a odpovídající vlastní tvary zkoumaného objektu. Vlastní (v dynamice rotorů častěji „kritickou“) úhlovou frekvenci, odpovídající j -tému vlastnímu tvaru, budeme nadále značit Ω_j [$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$]. Výstupem programu Ansys pak častěji bývají vlastní frekvence f_j , vyjádřené v [Hz] (kmitočet) [12]. V souvislosti s rotujícími stroji se lze často setkat rovněž s vyjádřením vlastních frekvencí v otáčkách – dále jen kritické otáčky n_j [$\text{ot}\cdot\text{min}^{-1}$]. Mezi Ω_j , f_j a n_j platí následující přepočtení vztahy:

$$f_j = \frac{1}{2\pi}\Omega_j, \quad n_j = \frac{30}{\pi}\Omega_j, \quad n_j = 60f_j. \quad (4.3)$$

Uvažujme zjednodušený model rotoru – poddajný hřídel s jednou soustředěnou hmotou m , uložený na dokonale tuhých podporách. Při dosažení prvních kritických otáček n_1 hřídel krouží deformován do tvaru, který odpovídá prvnímu vlastnímu tvaru při ohybovém kmitání, viz obrázek 4.1. Mluvíme pak o tzv. *krouživém kmitání*.

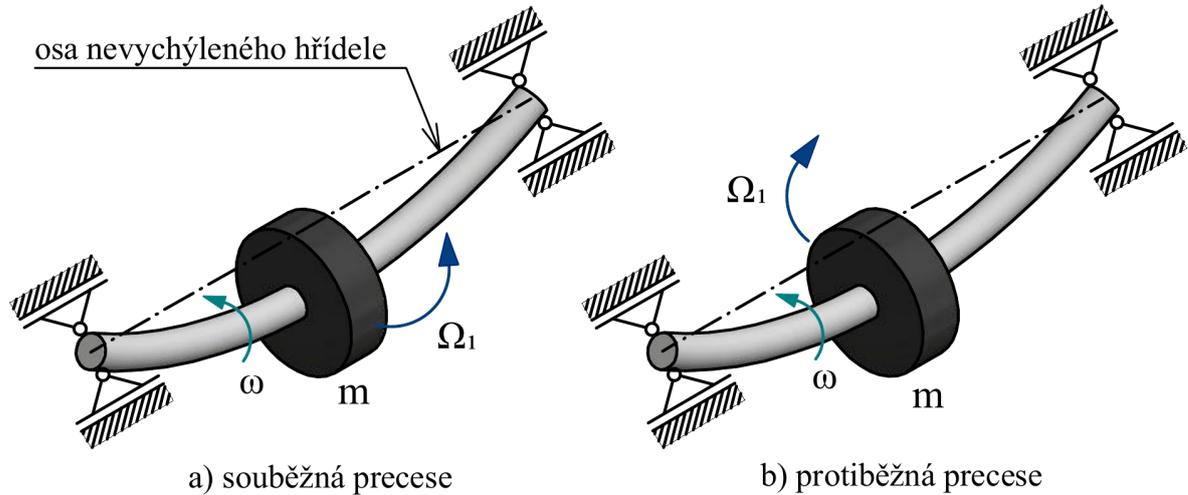


Obr. 4.1: První vlastní ohybový tvar.

Při krouživém kmitání rotoru přitom mohou nastat dva různé případy. Necht' ω je úhlová frekvence otáčení rotoru a Ω_1 je první kritická úhlová frekvence krouživého kmitání, pak

- a) má-li ω a Ω_1 stejný směr (ve stavu rezonance $\Omega_1 = \omega$), mluvíme o *souběžné (dopředné) precesi*,
- b) naopak pokud Ω_1 má opačný směr než ω (ve stavu rezonance $\Omega_1 = -\omega$), mluvíme o *protiběžné (zpětné) precesi* [15].

Obě situace jsou patrné z obrázku 4.2. Důležitou skutečností je, že zatímco souběžná precese nastane vždy, protiběžná precese jen ve velmi ojedinělých případech. Příznivou podmínkou pro vybudení kritických otáček s protiběžnou precesí může být například ve dvou směrech rozdílná tuhost jednoho z ložisek v případě hřídele s letmo uloženým kotoučem [15].



Obr. 4.2: Souběžná a protiběžná precese.

V rámci modálních analýz, řešených v této práci pomocí MKP, bude vyšetřováno volné netlumené kmitání rotoru se zahrnutím gyroskopických účinků za rotace. Minimalizace funkcionálu pak vede na pohybovou rovnici ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

kde \mathbf{M} je globální matice hmotnosti, ω je úhlová frekvence otáčení rotoru a \mathbf{G} je matice gyroskopických účinků. Z pohledu matematického vede řešení rovnice na problém vlastních hodnot. Vlastní čísla hledáme jakožto kořeny charakteristické rovnice

$$\det(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\omega\mathbf{G} + \mathbf{K}) = 0. \quad (4.5)$$

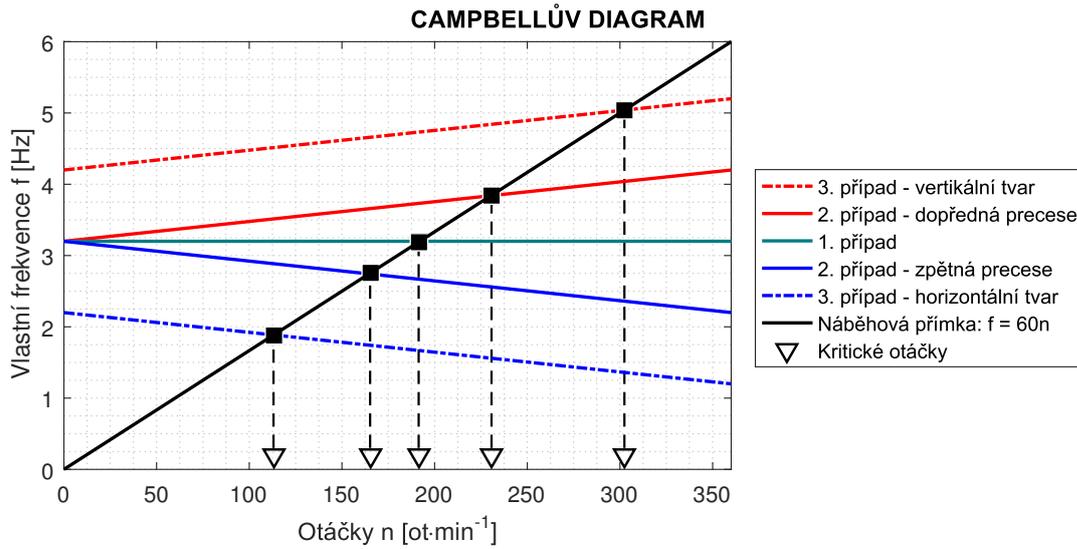
Ač by se tak na první pohled mohlo zdát, matice gyroskopických účinků \mathbf{G} nemá charakter tlumení, neboť nezpůsobuje disipaci energie. V důsledku její přítomnosti se však vlastní frekvence stávají závislými na otáčkách rotoru. Jelikož tlumení je nulové, všechna vlastní čísla budou ryze imaginární, komplexně sdružená:

$$\lambda_j = \pm i\Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.6)$$

kde Ω_j [$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$] je j -tá vlastní úhlová frekvence, n je počet stupňů volnosti (odpovídající řádu matic \mathbf{M} , \mathbf{G} a \mathbf{K}) a i je imaginární jednotka [12, 16, 17].

Závislosti $\Omega_j(\omega)$ lze graficky znázornit pomocí Campbellova diagramu, jehož schématický náčrt je patrný z obrázku 4.3. Vlastní frekvence jsou zde vyjádřeny v [Hz] a otáčky rotoru v [$\text{ot}\cdot\text{min}^{-1}$]. V těchto jednotkách obdržíme Campbellův diagram s použitím programu Ansys Workbench, který budeme dále v práci využívat. Obrázek demonstruje tři různé případy:

1. případ – symetricky uložený rotor bez zahrnutí gyroskopických účinků,
2. případ – symetricky uložený rotor se zahrnutím gyroskopických účinků,
3. případ – nesymetricky uložený rotor se zahrnutím gyroskopických účinků [18].



Obr. 4.3: Campbellův diagram (vychází z [18]).

Odtud je patrné, že při zahrnutí gyroskopických účinků dochází k rozštěpení vlastních frekvencí pro dopřednou a zpětnou precеси. Přímka definovaná rovnicí

$$n = 60f \quad (4.7)$$

se nazývá *náběhová přímka* – v případě vyjádření vlastních frekvencí a otáček rotoru v týchž jednotkách představuje osu prvního kvadrantu. Otáčky, při kterých náběhová přímka protne závislost vlastních frekvencí, odpovídají kritickým otáčkám [17, 18]. Dále je třeba zdůraznit, že závislosti vlastních frekvencí na otáčkách obecně nejsou lineární. V [19] je proto doporučeno provést výpočet vlastních frekvencí pro účely sestavení Campbellova diagramu pomocí MKP při několika různých otáčkách.

5 Komplexní analýza problému

At' už se subjekt potýká s řešením úlohy či problému, vždy je nutné si ujednotit, které veličiny jsou a nejsou pro řešení podstatné, tj. vytvořit tzv. *systém podstatných veličin*. Nejprve je však třeba provést vymezení hranic problému. Šíře problému by měla být ohraničena tak, aby byla v souladu s cíli a zároveň ji bylo možné pojmout v rozsahu, který náleží diplomové práci [4].

5.1 Vymezení hranic problému

Po konzultaci s vedoucím práce bylo provedeno následující vymezení hranic problému. V rámci modálních analýz budou vyhodnocovány pouze první kritické otáčky rotoru. V rámci deformačně-napět'ových analýz se omezíme na posouzení dvou mezních stavů – mezního stavu pružnosti a mezního stavu deformace.

„Mezní stav pružnosti tělesa je takový jeho stav, při jehož překročení vznikají v tělese zjizvitelné plastické deformace [11].“

„Mezní stav deformace tělesa je takový jeho stav, ve kterém se deformace funkčně přípustné mění na deformace funkčně nepřípustné [11].“

Srovnání přístupů k modelování rotoru pomocí MKP bude v případě deformačně-napět'ové analýzy provedeno pro jeden konkrétní provozní stav. Konkrétně chod rotoru „za studena“ před prohrátím vlivem ztrátového tepla ve vinutí.

5.2 Systém podstatných veličin

V rámci této práce je řešen problém, resp. úloha, na objektu Ω , kterým je rotor elektrického stroje. Systém podstatných veličin $\Sigma(\Omega)$ lze rozdělit do 9 podmnožin (S0 až S8) [4].

- S0: Veličiny popisující okolí Ω

V některých aplikacích je pro účely chlazení vyplněn vnitřní prostor elektrického stroje speciálním médiem. Pro tyto účely se nejčastěji používá hélium, vodík či kapalný dusík [20]. V rámci této práce nebude vliv okolního média uvažován.

- S1: Geometrie a topologie Ω

Rotor elektrického stroje lze na nejnižší úrovni modelovat jako nehmotný odstupňovaný poddajný hřídel se soustředěnými hmotami. Pro účely posouzení přístupů k výpočtovému modelování rotoru pomocí MKP bude geometrie a topologie rotoru vycházet z konkrétního zadání.

- S2: Podstatné vazby Ω na okolí

Rotor je připevněn ke statoru prostřednictvím ložisek. V závislosti na úrovni dílčího modelu uložení budou ložiska modelována jako dokonale tuhé či pružné podpory.

- S3: Aktivace Ω

Za klidového stavu je rotor aktivován působením tíhového silového pole Země. Uvedení rotoru do provozu má za následek vznik setrvačných objemových sil od rotace. Budeme-li uvažovat asynchronní stroj při tzv. „chodu naprázdno“, tj. chod rotoru bez zátěže (kroutící moment je nulový), pak vinutím rotoru prochází nulový (resp. zanedbatelný) elektrický proud. Rotor se

otáčí synchronními otáčkami točivého magnetického pole statoru. Je-li rotor zatížen, pak dojde k poklesu otáček. Vinutím rotoru protéká indukovaný elektrický proud [6]. Protéká-li vinutím rotoru elektrický proud, pak dochází ke vzniku magnetického tahu. Průtokem elektrického proudu vinutím dochází v důsledku disipace energie v podobě tepla rovněž k ohřevu rotoru.

- S4: Ovlivňování procesů z okolí

Aktivace Ω má za následek vznik reakčních sil v ložiscích. Prostřednictvím okolního média je odváděno teplo (chlazení).

- S5: Oborové vlastnosti Ω

V případě všech prvků Ω bude uvažován homogenní, izotropní, lineárně pružný model materiálu, který je jednoznačně definován hodnotami modulu pružnosti v tahu a Poissonova poměru. Modální analýza vyžaduje dále zadání hustoty daného materiálu. Pro posouzení mezního stavu pružnosti je třeba znát hodnoty mezí kluzu daných materiálů.

- S6: Procesy a stavy na Ω vyvolané jeho aktivací

V důsledku aktivace dochází k deformaci rotoru a vzniku stavu napjatosti. Dosažení kritických otáček má za následek vznik funkčně nepřijatelných výchylek.

- S7: Projevy Ω vyvolané procesy

Riziko dosažení nežádoucích mezních stavů.

- S8: Důsledky projevů do okolí Ω

V důsledku dosažení nežádoucích mezních stavů může rotor elektrického stroje v praxi přestat plnit svoji funkci a zavinit tak havárii soustavy, jejíž je součástí.

5.3 Metoda řešení problému

V rámci této práce má být sestaven zjednodušený výpočtový model rotoru, který umožní v krátkém čase přibližně stanovit deformačně-napět'ové poměry a první kritické otáčky. Řešení bude provedeno výpočtovým modelováním, tj. modelovým objektem O_M , který poslouží k řešení problému na primárním objektu Ω , bude vhodně zvolená matematická teorie [4]. Uvažovaným modelem geometrie rotoru bude odstupňovaný nehmotný poddajný hřídel se soustředěnými hmotami. Snahou bude docílit rovnoměrného rozložení hmotnosti rotorového svazku po daném úseku hřídele. Ložiska budou modelována jako dokonale tuhé podpory. Pro posouzení deformačně-napět'ového stavu bude použita teorie prosté pružnosti, konkrétně teorie prostého ohybu a prostého krutu nosníků. K vyhodnocení průhybů bude použito příčinkových součinitelů. Pro uvažovaný model geometrie a dílčí model uložení lze první kritické otáčky stanovit s použitím Dunkerleyova vztahu či Rayleighovy energetické metody. Jedná se o dvě pravděpodobně nejrozšířenější metody přibližného stanovení prvních kritických otáček, na které lze v literatuře v souvislosti s rotujícími stroji natrefit. Vyhodnocení prvních kritických otáček bude provedeno s použitím obou těchto metod. Sestavený výpočtový model bude zpracován v prostředí programu Matlab. S ohledem na cíle práce bude umožněno rovněž zadání hřídele s vnitřním otvorem.

Model nehmotného poddajného hřídele se soustředěnými hmotami je použitelný v případě ohybově poddajných rotorů, které se skládají z hřídele, balení rotorových plechů a dalších dílčích komponent. V současné době se lze ovšem setkat rovněž s vysokootáčkovými masivními rotory, které vykazují značnou ohybovou tuhost. Podstatnou se v případě těchto rotorů stává tu-

host ložisek. Popis masivních rotorů na úrovni jednoduchých analytických vztahů, tj. na úrovni 1, je značně omezen. Nabízí se použití modelu dokonale ohybově tuhého rotoru na pružných podporách. Takto formulovaný model rotoru lze redukovat na soustavu s jedním stupněm volnosti – hmotu uloženou na pružině o tuhosti ekvivalentní tuhostem podpor. Pro aproximaci deformačně-napět'ového stavu, vyvolaného v důsledku působení setrvačných objemových sil od rotace, se nabízí použít model rotujícího válcového tělesa, který je za specifických podmínek řešitelný diferenciálním přístupem. Použitelnost těchto modelů bude v této práci posouzena.

Dále má být pro konkrétní zadání provedeno srovnání přístupů k výpočtovému modelování rotoru elektrického stroje pomocí MKP, která umožňuje modelovat rotor na mnoha různých úrovních. Rovněž se jedná o výpočtové modelování. Představeny budou výpočtové modely různých úrovní při deformačně-napět'ové a modální analýze. Cílem bude mimo jiné demonstrovat, jak při deformačně-napět'ové či modální analýze efektivně postupovat. Řešení bude provedeno s použitím programu Ansys Workbench.

6 Modelování ohybově poddajného rotoru na úrovni 1

Cílem v této kapitole je sestavit takový model ohybově poddajného rotoru, který bude řešitelný pomocí jednoduchých rovnic a umožní v krátkém čase alespoň přibližně stanovit deformačně-napět'ové poměry a první kritické otáčky. Hlavní motivací je úspora času při tvorbě prvotního návrhu geometrie prototypu rotoru elektrického stroje.

Uvažovaným modelem geometrie bude letmo uložený odstupňovaný nehmotný poddajný hřídel, zatížený v klidovém stavu tíhou paketu rotoru mezi ložisky a tíhou řemenice na převislém konci. Za provozu bude zatížení doplněno o magnetický tah, tah řemene a přenášený kroučící moment. Zdůrazněme tedy, že počáteční předpětí řemene nebude uvažováno. Ložiska budou modelována jako dokonale tuhé podpory neomezující natočení hřídele. Uvažován bude model materiálu homogenní, izotropní, lineárně pružný. V případě demonstrací na konkrétních případech budou použity hodnoty materiálových charakteristik E , μ a ρ platné pro běžnou konstrukční ocel, viz tabulka 6.1. Pro posouzení deformačně-napět'ového stavu hřídele bude použita teorie prosté pružnosti a pevnosti, konkrétně teorie ohýbaných a kroucených nosníků. Zde budeme vycházet zejména z [8]. Pro přibližné stanovení prvních kritických otáček bude použit Dunkerleyův vztah a Rayleighova energetická metoda.

Modul pružnosti v tahu E [MPa]	210 000
Poissonův poměr μ [-]	0,3
Hustota ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	7850

Tab. 6.1: Materiálové charakteristiky konstrukční oceli.

6.1 Průhyb a napjatost odstupňovaného hřídele

6.1.1 Matice poddajnosti

Uvažujme nehmotný poddajný nosník zatížený osamělou silou F . Budeme-li předpokládat, že takto zatížený nosník je podroben pouze elastickým deformacím, pak z předpokladů lineární pružnosti plyne, že veškeré závislosti mezi vstupními parametry a výstupními parametry (deformace a napjatost) jsou lineární [8]. Platí tedy, že deformační posuv u , vyvolaný zátěžnou silou F , je přímo úměrný velikosti této síly. Jinak řečeno, deformační posuv u je nějakým α -násobkem velikosti síly F . Konstanta úměrnosti α se nazývá *příčinkový součinitel* a z rovnice

$$u = \alpha F \quad (6.1)$$

plyne její definiční vztah

$$\alpha = \frac{u}{F} \quad [\text{mm}\cdot\text{N}^{-1}]. \quad (6.2)$$

Jak je patrné z rovnice (6.2), příčinkový součinitel α odpovídá deformačnímu posuvu u vztaženému na velikost síly F . Lze jej tedy rovněž chápat jako deformační posuv vyvolaný silou o velikosti 1 N. Upravíme-li rovnici (6.1) do tvaru

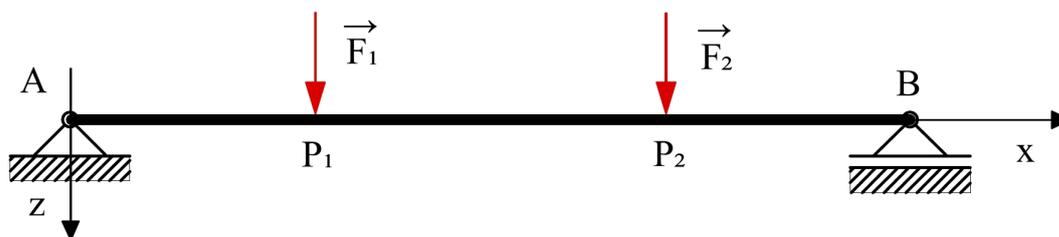
$$F = \frac{1}{\alpha} u, \quad (6.3)$$

pak je patrné, že α odpovídá převrácené hodnotě tuhosti k [$\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$]. Příčinkový součinitel α lze tedy rovněž chápat jako *poddajnost*:

$$\alpha = \frac{1}{k}. \quad (6.4)$$

Uvažujme případ nehmotného poddajného nosníku zatíženého dvěma osamělými silami F_1 a F_2 dle obrázku 6.1, kde vyznačené body P_1 a P_2 představují působíště zátěžných sil. Příčinkový součinitel se vždy váže k posuvu, který je vyvolán pouze jednou z osaměle působících sil. V případě nosníku z obrázku 6.1 tak budeme mít celkem čtyři příčinkové součinitele a to:

- α_{11} ... posuv působíště P_1 vyvolaný jednotkovou silou $F_1/|F_1|$,
- α_{22} ... posuv působíště P_2 vyvolaný jednotkovou silou $F_2/|F_2|$,
- α_{12} ... posuv působíště P_1 vyvolaný jednotkovou silou $F_2/|F_2|$,
- α_{21} ... posuv působíště P_2 vyvolaný jednotkovou silou $F_1/|F_1|$.



Obr. 6.1: Prostě uložený nosník zatížený mezi podporami.

Jelikož se pohybujeme v oblasti lineární pružnosti, platí tzv. *věta o vzájemnosti posuvů*:

„Působí-li na lineárně pružné těleso v bodech P_1 , P_2 jednotkové síly $F_1/|F_1|$, $F_2/|F_2|$ a označíme-li α_{ij} posuv působíště jednotkové síly $F_i/|F_i|$ po její nositelce způsobený jednotkovou silou $F_j/|F_j|$, pak pro tzv. příčinkové součinitele platí

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \quad [8].“$$

Věta o vzájemnosti posuvů je přímým důsledkem *Bettiho věty o vzájemnosti prací* [8].

Pozn: značení jednotlivých členů z předchozí věty bylo transformováno do námi zavedeného. V [8] je používáno značení odlišné.

Příčinkové součinitele je možné následujícím způsobem zapsat do matice, která bude mít v případě nosníku z obrázku 6.1 rozměry 2×2 . V důsledku platnosti věty o vzájemnosti posuvů budou pouze 3 složky této matice nezávislé.

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

V obecném případě nehmotného poddajného nosníku zatíženého n osamělými silami, bude mít matice $\boldsymbol{\alpha}$ rozměry $n \times n$. Pro $i \neq j$ přitom platí $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (jedná se tedy vždy o matici symetrickou). V některé literatuře, například v [21], je pro matici $\boldsymbol{\alpha}$ použito názvu *matice poddajnosti*.

Vztahy pro příčinkové součinitele lze odvodit pro konkrétní uložení a zatížení nosníku následujícím způsobem. Z definičního vztahu (6.2) a výše uvedeného plyne

$$\alpha_{ij} = \frac{u_{ij}}{F_j}. \quad (6.6)$$

Deformační posuv u_{ij} vyjádříme s použitím *Castiglianovy věty*:

„Působí-li na lineárně pružné těleso silová soustava, pak posuv u působíště osamělé síly F po její nositelce je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa podle této síly:

$$u = \frac{\partial W}{\partial F}, \quad (6.7)$$

$u > 0$, když nastává ve smyslu působení F [8, 11].“

Pozn: *Castiglianovu větu lze analogicky formulovat rovněž pro natočení vyvolané osamělou silovou dvojicí.*

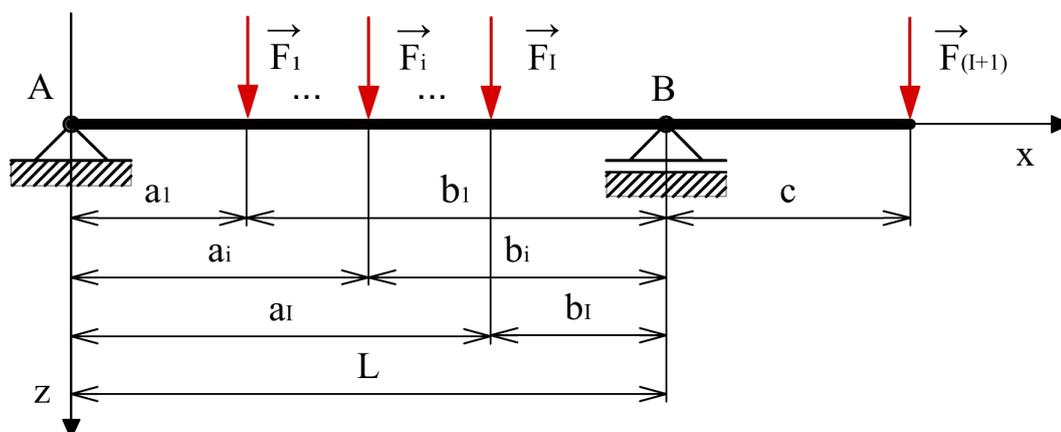
V případě příčinkových součinitelů α_{ij} , pro které $i \neq j$, je třeba v poloze působíště P_i zavést doplňkovou sílu $F_D = 0\text{ N}$ a dle této síly následně derivovat. Jelikož vliv posouvající síly je v případě štíhlých nosníků nepodstatný, energie napjatosti W je dána vztahem

$$W = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_o^2}{J_y} dx, \quad (6.8)$$

kde l je délka střednice, M_o ohybový moment a J_y moment setrvačnosti (též kvadratický moment) průřezu [8]. Vztahy pro příčinkové součinitele jsou pro různé případy uložení a zatížení nosníků dohledatelné v literatuře, jejich odvozením se proto dále nebudeme zabývat.

Sestavení matice poddajnosti hřídele rotoru

Klíčovým úkolem při hledání maximálního průhybu a prvních kritických otáček uvažovaného modelu rotoru pomocí přibližných metod řešení (viz následující podkapitoly) je sestavení matice poddajnosti α , tj. matice příčinkových součinitelů α_{ij} .



Obr. 6.2: Letmo uložený hřídel zatížený $I + 1$ silami.

V případě letmo uloženého nehmotného poddajného hřídele zatíženého osamělými silami $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I, F_{I+1}$, dle obrázku 6.2, má matice α rozměry $(I + 1) \times (I + 1)$, kde I je

počet zátěžných sil působících mezi podporami. Následující vztahy (6.10), (6.11) a (6.12) pro příčinkové součinitele α_{ij} byly převzaty z [21] a [22].

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1I} & \alpha_{1(I+1)} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2I} & \alpha_{2(I+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{I1} & \alpha_{I2} & \dots & \alpha_{II} & \alpha_{I(I+1)} \\ \alpha_{(I+1)1} & \alpha_{(I+1)2} & \dots & \alpha_{(I+1)I} & \alpha_{(I+1)(I+1)} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

- Submatice prvků α_{ij} pro $i = 1, 2, \dots, I$ a $j = 1, 2, \dots, I$ obsahuje příčinkové součinitele týkající se sil $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I$ mezi podporami. Prvky této submatice, splňující podmínku $i \leq j$, určíme s použitím vztahu

$$\alpha_{ij} = \frac{b_j a_i}{6EJ_y L} (L^2 - b_j^2 - a_i^2). \quad (6.10)$$

- Submatice (resp. sloupcový vektor) prvků $\alpha_{i(I+1)}$, kde $i = 1, 2, \dots, I$, vyjadřuje vztah mezi sílou $F_{(I+1)}$, působící na převislém konci, a silami $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I$ mezi podporami. Pro stanovení těchto prvků použijeme vztah

$$\alpha_{i(I+1)} = -\frac{a_i c (L^2 - a_i^2)}{6EJ_y L}. \quad (6.11)$$

- Posledním neznámým prvkem je prvek $\alpha_{(I+1)(I+1)}$, který je dán vztahem

$$\alpha_{(I+1)(I+1)} = \frac{c^2 (c + L)}{3EJ_y}. \quad (6.12)$$

Matice poddajnosti $\boldsymbol{\alpha}$ je symetrická. Pro stanovení prvků α_{ij} , kde $i > j$ (prvky pod hlavní diagonálou), lze proto s výhodou využít skutečnosti, že pro $i \neq j$ platí $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Po dosazení obdržíme matici poddajnosti $\boldsymbol{\alpha}$ v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 a_1 (L^2 - b_1^2 - a_1^2)}{6EJ_y L} & \frac{b_2 a_1 (L^2 - b_2^2 - a_1^2)}{6EJ_y L} & \dots & \frac{b_I a_1 (L^2 - b_I^2 - a_1^2)}{6EJ_y L} & -\frac{a_1 c (L^2 - a_1^2)}{6EJ_y L} \\ & \frac{b_2 a_2 (L^2 - b_2^2 - a_2^2)}{6EJ_y L} & \dots & \frac{b_I a_2 (L^2 - b_I^2 - a_2^2)}{6EJ_y L} & -\frac{a_2 c (L^2 - a_2^2)}{6EJ_y L} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \text{sym.} & & \frac{b_I a_I (L^2 - b_I^2 - a_I^2)}{6EJ_y L} & -\frac{a_I c (L^2 - a_I^2)}{6EJ_y L} \\ & & & & \frac{c^2 (c + L)}{3EJ_y} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

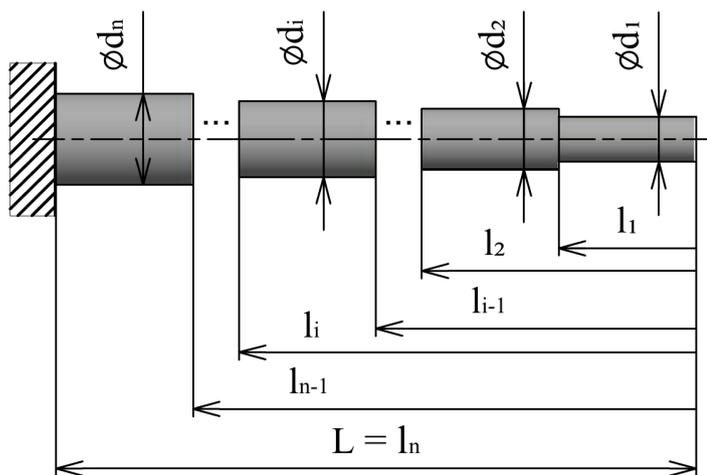
6.1.2 Ekvivalentní momenty setrvačnosti

Vztahy pro příčinkové součinitele α_{ij} z předchozí podkapitoly 6.1.1 platí pro hřídel stálého průřezu po celé délce střednice. Hřídele elektrických strojů však obvykle bývají mnohonásobně odstupňované. Chceme-li řešit případ odstupňovaného hřídele, pak je třeba nejprve vyřešit otázku, jaké hodnoty dosazovat do vztahů pro α_{ij} za momenty setrvačnosti průřezu J_y . Řešení tohoto dílčího problému bude předmětem této podkapitoly.

Vyjdeme z myšlenky převzaté z článku [23]. Zde je pro případ mnohonásobně odstupňovaného, jednostranně vetknutého nosníku zavedena nová průřezová charakteristika, tzv. *ekvivalentní moment setrvačnosti* J_{eq} , definovaný vztahem

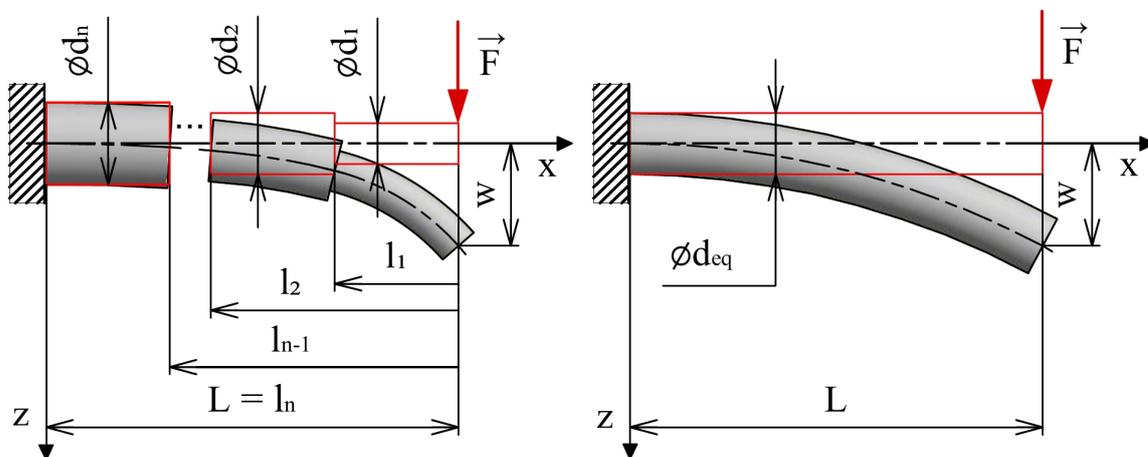
$$J_{eq} = \frac{L^3}{\sum_{i=1}^n \frac{(l_i)^3 - (l_{i-1})^3}{J_i}}, \quad (6.14)$$

kde L je celková délka nosníku, n je počet úseků stálého průřezu, J_i je moment setrvačnosti průřezu i -tého úseku a l_i poloha konce i -tého úseku od volného konce, viz obrázek 6.3 [23].



Obr. 6.3: Vetknutý mnohonásobně odstupňovaný nosník.

S použitím MKP byla pozorována deformačně-napěťová odezva dvou jednostranně vetknutých nosníků téže délky L na stejné vnější zatížení. První z nosníků byl odstupňovaný dle obrázku 6.3, tj. měl po částech konstantní momenty setrvačnosti průřezu J_1, J_2, \dots, J_n . Druhý z nosníků měl konstantní moment setrvačnosti J_{eq} po celé délce střednice spočtený dle vztahu (6.14). Bylo zjištěno, že při zatížení osamělou silou F na volném konci vykazují oba nosníky maximální průhyb w stejné velikosti, jak je schématicky znázorněno na obrázku 6.4. Vztah (6.14) byl patrně odvozen právě na základě rovnosti těchto průhybů, což můžeme snadno ověřit s použitím Castiglianovy věty (6.7).



Obr. 6.4: Odstupňovaný a ekvivalentní hřídel.

Uvažujme nehmotný, mnohonásobně odstupňovaný, jednostranně vetknutý nosník zatížený silou F na volném konci. Z Castiglianovy věty plyne pro posuv w působitě síly F

$$w = \int_0^L \frac{M_o}{EJ_y} \frac{\partial M_o}{\partial F} dx = \int_0^L \frac{Fx}{EJ_y} \frac{\partial(Fx)}{\partial F} dx = \frac{F}{E} \int_0^L \frac{x^2}{J_y} dx. \quad (6.15)$$

Moment setrvačnosti průřezu J_y nelze vytknout před integrál, protože pro $x \in (0, L)$ není konstantní. Pro uvažovaný nosník však platí následující.

$$\begin{aligned} x = x_1 \in (0, l_1) : & \quad J_y = J_1 = \text{konst.} \\ x = x_2 \in (l_1, l_2) : & \quad J_y = J_2 = \text{konst.} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x = x_n \in (l_{n-1}, l_n) : & \quad J_y = J_n = \text{konst.} \end{aligned}$$

Rovnici (6.15) tak můžeme přepsat do tvaru

$$w = \frac{F}{E} \left[\frac{1}{J_1} \int_0^{l_1} x_1^2 dx_1 + \frac{1}{J_2} \int_{l_1}^{l_2} x_2^2 dx_2 + \dots + \frac{1}{J_n} \int_{l_{n-1}}^{l_n} x_n^2 dx_n \right]. \quad (6.16)$$

Následným řešením obdržíme pro průhyb w rovnici

$$w = \frac{F}{3E} \left[\frac{l_1^3}{J_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{J_2} + \dots + \frac{l_n^3 - l_{n-1}^3}{J_n} \right]. \quad (6.17)$$

Výraz v závorce nyní nahradíme pomocí sumy

$$w = \frac{F}{3E} \sum_{i=1}^n \frac{(l_i)^3 - (l_{i-1})^3}{J_i}. \quad (6.18)$$

Pro úplnost zdůrazněme, že v rovnici (6.18) je $l_0 = 0$ mm. Pro nosník téže délky L s konstantním momentem setrvačnosti průřezu J_{eq} po celé délce střednice dostaneme z Castiglianovy věty

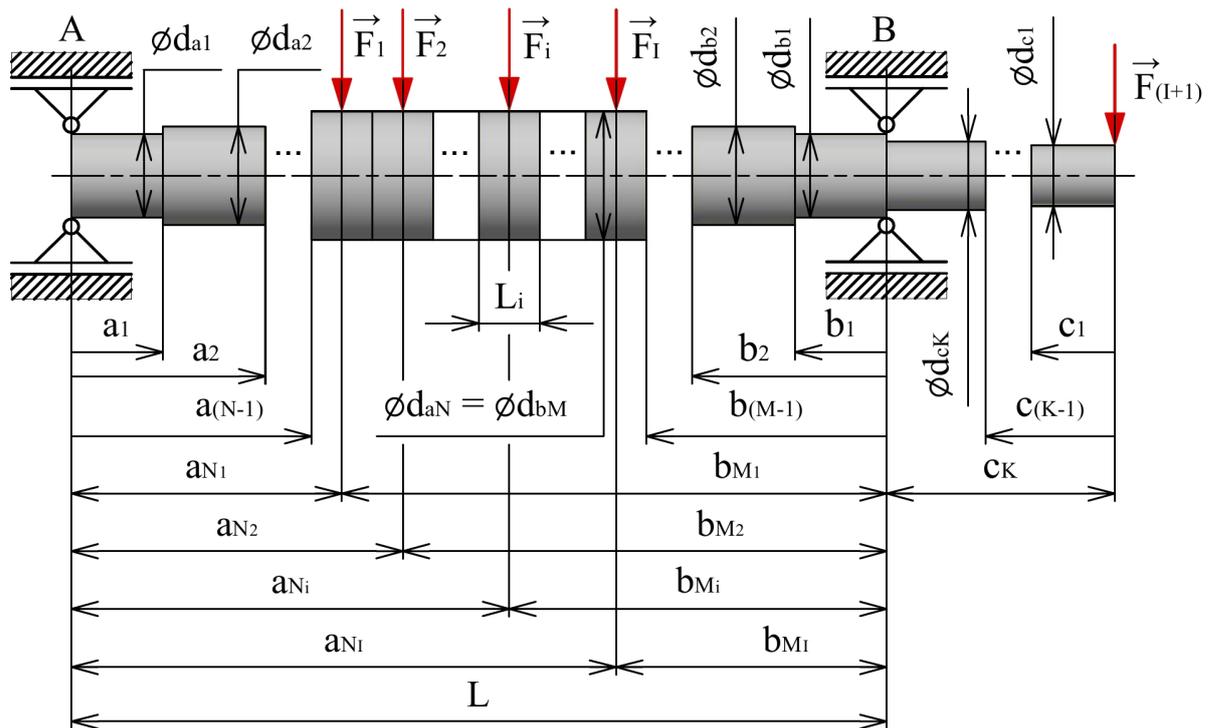
$$w = \int_0^L \frac{M_o}{EJ_{eq}} \frac{\partial M_o}{\partial F} dx = \int_0^L \frac{Fx}{EJ_{eq}} \frac{\partial(Fx)}{\partial F} dx = \frac{F}{EJ_{eq}} \int_0^L x^2 dx, \quad (6.19)$$

$$w = \frac{FL^3}{3EJ_{eq}}. \quad (6.20)$$

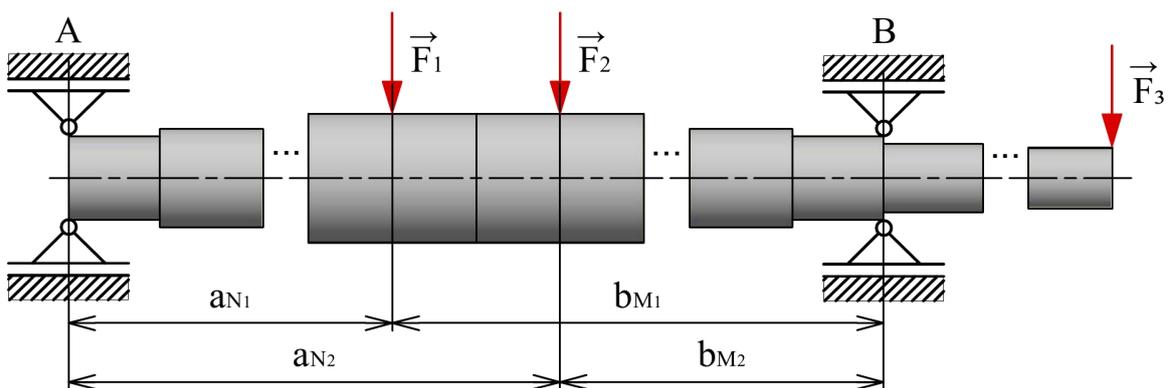
Porovnáním rovnic (6.18) a (6.20) a následnou úpravou skutečně obdržíme pro ekvivalentní moment setrvačnosti J_{eq} vztah (6.14). Z tohoto pro nás plyne důležitá skutečnost:

„Mnohonásobně odstupňovaný nosník zatížený osamělou silou F můžeme nahradit ekvivalentním nosníkem stálého průřezu tak, že posuvy působitě síly F budou sobě rovny. Průřezovou charakteristikou ekvivalentního nosníku je ekvivalentní moment setrvačnosti J_{eq} . Pro případ nosníku z obrázku 6.4 je J_{eq} dán vztahem (6.14)“.

Nyní přistoupíme k vyjádření ekvivalentních momentů setrvačnosti pro letmo uložený odstupňovaný hřídel z obrázku 6.5. Budeme přitom předpokládat, že úsek o průměru $d_{a_N} = d_{b_M}$ je rozdělen na I ekvidistantních úseků délek $L_1 = L_2 = \dots = L_i = \dots = L_I$. Mezi ložisky je hřídel zatížen silami $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I$ tak, že síla F_i působí ve středu úseku L_i . Na převislém konci je hřídel zatížen osamělou silou F_{I+1} .

Obr. 6.5: Odstupňovaný hřídel zatížený $I + 1$ silami.

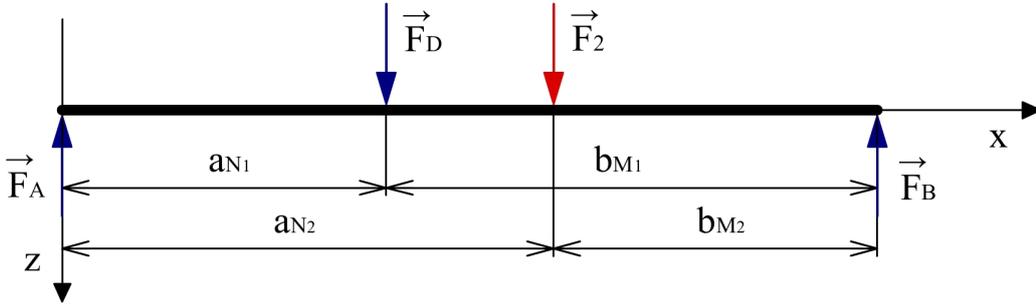
Interpretace ekvivalentních momentů setrvačnosti je obdobná jako v případě příčinkových součinitelů, viz podkapitola 6.1.1. Ekvivalentní moment setrvačnosti J_{ij} odstupňovaného hřídele budeme chápat jako moment setrvačnosti hřídele stálého průřezu, který vykazuje stejný posuv působíště síly F_i vyvolaný osaměle působící silou F_j . Moment setrvačnosti J_{ij} tedy budeme odvozovat vždy na základě deformačního posuvu, který je vyvolán pouze jednou z osaměle působících zátěžných sil. Odvození bude provedeno pro $I = 2$, tj. případ, kdy mezi ložisky působí dvě osamělé síly F_1, F_2 a na převislém konci síla F_3 , viz obrázek (6.6). Všechny zde nezakótované rozměry vychází z obrázku 6.5.



Obr. 6.6: Odstupňovaný hřídel zatížený třemi silami.

Přístupme nyní k odvození vztahu pro ekvivalentní moment setrvačnosti J_{12} . Klíčovým je vyjádření posuvu působíště síly F_1 vyvolaného osaměle působící silou F_2 a to jak pro vyšetřovaný odstupňovaný hřídel (průhyb dále značený w_{12}), tak pro ekvivalentní hřídel téže délky L s konstantním momentem setrvačnosti J_{12} po celé délce střednice (dále $w_{12,eq}$). Pro tyto účely zavedeme v místě působíště síly F_1 doplňkovou sílu $F_D = 0\text{ N}$, dle které budeme následně de-

rivovat v Castiglianově větě. Hledaný vztah pro J_{12} pak obdržíme z podmínky $w_{12} = w_{12,eq}$. Řešit budeme pouze část hřídele mezi podporami, neboť ohybový moment na převislém konci je nulový. Schéma řešené úlohy je po úplném uvolnění patrné z obrázku 6.7.



Obr. 6.7: Schéma hřídele – ekvivalentní moment setrvačnosti J_{12} .

Nejprve sestavíme rovnice rovnováhy a vnitřní výsledné účinky (dále jen VVÚ), tj. ohybové momenty v jednotlivých intervalech. Jedná se o silovou soustavu s rovnoběžnými nositelkami v rovině, k dispozici proto máme dvě podmínky statické rovnováhy.

$$\sum F_z = 0: \quad F_2 + F_D - F_A - F_B = 0 \quad (6.21)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_B L - F_2 a_{N_2} - F_D a_{N_1} = 0 \quad (6.22)$$

Podmínky statické rovnováhy představují dvě rovnice o dvou neznámých, kterými jsou síly ve vazbách F_A a F_B . Řešením obdržíme

$$F_B = \frac{F_2 a_{N_2} + F_D a_{N_1}}{L}, \quad F_A = F_2 + F_D - \frac{F_2 a_{N_2} + F_D a_{N_1}}{L}.$$

VVÚ je z hlediska složitosti dále vzniklých výrazů výhodné sestavit v následujícím tvaru

$$x_a^{(1)} \in (0, a_{N_1}): \quad M_a^{(1)} = F_A x_a^{(1)}, \quad (6.23)$$

$$x_a^{(2)} \in (a_{N_1}, a_{N_2}): \quad M_a^{(2)} = F_A x_a^{(2)} - F_D (x_a^{(2)} - a_{N_1}), \quad (6.24)$$

$$x_b \in (0, b_{M_2}): \quad M_b = F_B x_b. \quad (6.25)$$

Užitím Castiglianovy věty dostaneme pro posuv w_{12} rovnici

$$w_{12} = \int_0^{a_{N_1}} \frac{M_a^{(1)}}{EJ_a} \frac{\partial M_a^{(1)}}{\partial F_D} dx_a^{(1)} + \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} \frac{M_a^{(2)}}{EJ_{a_N}} \frac{\partial M_a^{(2)}}{\partial F_D} dx_a^{(2)} + \int_0^{b_{M_2}} \frac{M_b}{EJ_b} \frac{\partial M_b}{\partial F_D} dx_b, \quad (6.26)$$

která po dosazení za ohybové momenty a parciální derivace přejde do tvaru

$$w_{12} = \int_0^{a_{N_1}} \frac{F_2 b_{M_1} b_{M_2} (x_a^{(1)})^2}{L^2 E J_a} dx_a^{(1)} + \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} \frac{F_2 a_{N_1} b_{M_2} x_a^{(2)} (L - x_a^{(2)})}{L^2 E J_{a_N}} dx_a^{(2)} + \int_0^{b_{M_2}} \frac{F_2 a_{N_1} a_{N_2} x_b^2}{L^2 E J_b} dx_b. \quad (6.27)$$

Rovnici (6.27) upravíme postupným vytýkáním

$$w_{12} = \frac{F_2}{L^2 E} \left[b_{M_1} b_{M_2} \int_0^{a_{N_1}} \frac{(x_a^{(1)})^2}{J_a} dx_a^{(1)} + \frac{a_{N_1} b_{M_2}}{J_{a_N}} \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} L x_a^{(2)} dx_a^{(2)} - \frac{a_{N_1} b_{M_2}}{J_{a_N}} \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} (x_a^{(2)})^2 dx_a^{(2)} + a_{N_1} a_{N_2} \int_0^{b_{M_2}} \frac{x_b^2}{J_b} dx_b \right]. \quad (6.28)$$

Momenty setrvačnosti jsou po jednotlivých úsecích konstantní, což můžeme zapsat následovně.

$$\begin{aligned}
 x_a^{(1)} = x_{a_1}^{(1)} \in (0, a_1) : & \quad J_a = J_{a_1} = \text{konst.} \\
 x_a^{(1)} = x_{a_2}^{(1)} \in (a_1, a_2) : & \quad J_a = J_{a_2} = \text{konst.} \\
 \vdots & \quad \vdots \\
 x_a^{(1)} = x_{a_N}^{(1)} \in (a_{N-1}, a_{N_1}) : & \quad J_a = J_{a_N} = \text{konst.} \\
 \\
 x_b = x_{b_1} \in (0, b_1) : & \quad J_b = J_{b_1} = \text{konst.} \\
 x_b = x_{b_2} \in (b_1, b_2) : & \quad J_b = J_{b_2} = \text{konst.} \\
 \vdots & \quad \vdots \\
 x_b = x_{b_M} \in (b_{M-1}, b_{M_2}) : & \quad J_b = J_{b_M} = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

Získanou rovnici pak můžeme přepsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
 w_{12} = \frac{F_2}{L^2 E} & \left[b_{M_1} b_{M_2} \left\{ \frac{1}{J_{a_1}} \int_0^{a_1} (x_{a_1}^{(1)})^2 dx_{a_1}^{(1)} + \frac{1}{J_{a_2}} \int_{a_1}^{a_2} (x_{a_2}^{(1)})^2 dx_{a_2}^{(1)} + \dots \right. \right. \\
 & + \left. \frac{1}{J_{a_N}} \int_{a_{N-1}}^{a_{N_1}} (x_{a_N}^{(1)})^2 dx_{a_N}^{(1)} \right\} + \frac{a_{N_1} b_{M_2}}{J_{a_N}} \left\{ L \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} x_a^{(2)} dx_a^{(2)} - \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} (x_a^{(2)})^2 dx_a^{(2)} \right\} \\
 & + \left. a_{N_1} a_{N_2} \left\{ \frac{1}{J_{b_1}} \int_0^{b_1} x_{b_1}^2 dx_{b_1} + \frac{1}{J_{b_2}} \int_{b_1}^{b_2} x_{b_2}^2 dx_{b_2} + \dots + \frac{1}{J_{b_M}} \int_{b_{M-1}}^{b_{M_2}} x_{b_M}^2 dx_{b_M} \right\} \right].
 \end{aligned}$$

Řešením integrálů a přepisem vzniklých výrazů pomocí sum pak dostaneme

$$\begin{aligned}
 w_{12} = \frac{F_2}{L^2 E} & \left[\frac{b_{M_1} b_{M_2}}{3} \left\{ \frac{a_1^3 - a_0^3}{J_{a_1}} + \frac{a_2^3 - a_1^3}{J_{a_2}} + \dots + \frac{a_{N_1}^3 - a_{N-1}^3}{J_{a_N}} \right\} \right. \\
 & + \frac{a_{N_1} b_{M_2}}{J_{a_N}} \left\{ \frac{a_{N_2}^2 - a_{N_1}^2}{2} L - \frac{a_{N_2}^3 - a_{N_1}^3}{3} \right\} \\
 & + \left. \frac{a_{N_1} a_{N_2}}{3} \left\{ \frac{b_1^3 - b_0^3}{J_{b_1}} + \frac{b_2^3 - b_1^3}{J_{b_2}} + \dots + \frac{b_{M_2}^3 - b_{M-1}^3}{J_{b_M}} \right\} \right], \\
 \\
 w_{12} = \frac{F_2}{L^2 E} & \left[\frac{b_{M_1} b_{M_2}}{3} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n^3 - a_{n-1}^3}{J_{a_n}} + \frac{a_{N_1}^3 - a_{N-1}^3}{J_{a_N}} \right\} \right. \\
 & + \frac{a_{N_1} b_{M_2}}{J_{a_N}} \left\{ \frac{a_{N_2}^2 - a_{N_1}^2}{2} L - \frac{a_{N_2}^3 - a_{N_1}^3}{3} \right\} \\
 & + \left. \frac{a_{N_1} a_{N_2}}{3} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \frac{b_m^3 - b_{m-1}^3}{J_{b_m}} + \frac{b_{M_2}^3 - b_{M-1}^3}{J_{b_M}} \right\} \right]. \tag{6.29}
 \end{aligned}$$

Nyní přistoupíme k vyjádření průhybu $w_{12,eq}$ ekvivalentního hřídele. Vyjdeme z rovnice (6.28), která při uvažování konstantního momentu setrvačnosti J_{12} po délce střednice přejde do tvaru

$$\begin{aligned}
 w_{12,eq} = \frac{F_2}{L^2 E J_{12}} & \left[b_{M_1} b_{M_2} \int_0^{a_{N_1}} (x_a^{(1)})^2 dx_a^{(1)} + a_{N_1} b_{M_2} L \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} x_a^{(2)} dx_a^{(2)} \right. \\
 & \left. - a_{N_1} b_{M_2} \int_{a_{N_1}}^{a_{N_2}} (x_a^{(2)})^2 dx_a^{(2)} + a_{N_1} a_{N_2} \int_0^{b_{M_2}} x_b^2 dx_b \right]. \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

Řešením integrálů obdržíme pro $w_{12,eq}$ rovnici

$$w_{12,eq} = \frac{F_2}{L^2 E J_{12}} \left[b_{M_1} b_{M_2} \frac{a_{N_1}^3}{3} + a_{N_1} b_{M_2} \left(\frac{a_{N_2}^2 - a_{N_1}^2}{2} L - \frac{a_{N_2}^3 - a_{N_1}^3}{3} \right) + a_{N_1} b_{M_2} \frac{b_{M_2}^3}{3} \right]. \quad (6.31)$$

Porovnáním rovnic (6.29) a (6.31), obdržíme po následné úpravě hledaný ekvivalentní moment setrvačnosti J_{12} ve tvaru

$$J_{12} = \frac{b_{M_1} a_{N_1}^2 + a_{N_2} b_{M_2}^2 + \psi}{\frac{b_{M_1}}{a_{N_1}} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n^3 - a_{n-1}^3}{J_{a_n}} + \frac{a_{N_1}^3 - a_{N-1}^3}{J_{a_N}} \right\} + \frac{a_{N_2}}{b_{M_2}} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \frac{b_m^3 - b_{m-1}^3}{J_{b_m}} + \frac{b_{M_2}^3 - b_{M-1}^3}{J_{b_M}} \right\} + \frac{1}{J_{a_N}} \psi},$$

kde

$$\psi = \frac{3}{2} L (a_{N_2}^2 - a_{N_1}^2) - (a_{N_2}^3 - a_{N_1}^3).$$

Pro účely kompaktnějšího zápisu v této podkapitole zavedeme následující označení pro sumy:

$$\begin{aligned} S_a^{(i)} &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n - a_{n-1}}{J_{a_n}} + \frac{a_{N_i} - a_{N-1}}{J_{a_N}}, & S_b^{(i)} &= \sum_{m=1}^{M-1} \frac{b_m - b_{m-1}}{J_{b_m}} + \frac{b_{M_i} - b_{M-1}}{J_{b_M}}, \\ S_{a^2}^{(i)} &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{J_{a_n}} + \frac{a_{N_i}^2 - a_{N-1}^2}{J_{a_N}}, & S_{b^2}^{(i)} &= \sum_{m=1}^{M-1} \frac{b_m^2 - b_{m-1}^2}{J_{b_m}} + \frac{b_{M_i}^2 - b_{M-1}^2}{J_{b_M}}, \\ S_{a^3}^{(i)} &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n^3 - a_{n-1}^3}{J_{a_n}} + \frac{a_{N_i}^3 - a_{N-1}^3}{J_{a_N}}, & S_{b^3}^{(i)} &= \sum_{m=1}^{M-1} \frac{b_m^3 - b_{m-1}^3}{J_{b_m}} + \frac{b_{M_i}^3 - b_{M-1}^3}{J_{b_M}}, \\ S_c &= \sum_{k=1}^K \frac{c_k - c_{k-1}}{J_{c_k}}, & S_{c^2} &= \sum_{k=1}^K \frac{c_k^2 - c_{k-1}^2}{J_{c_k}}, & S_{c^3} &= \sum_{k=1}^K \frac{c_k^3 - c_{k-1}^3}{J_{c_k}}. \end{aligned}$$

Pro úplnost zdůrazněme, že zde platí $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ mm. Potom

$$J_{12} = \frac{b_{M_1} a_{N_1}^2 + a_{N_2} b_{M_2}^2 + \psi}{\frac{b_{M_1}}{a_{N_1}} \left\{ S_{a^3}^{(1)} \right\} + \frac{a_{N_2}}{b_{M_2}} \left\{ S_{b^3}^{(2)} \right\} + \frac{1}{J_{a_N}} \psi}. \quad (6.32)$$

Při odvození vztahu pro J_{21} bychom po dosazení hodnot za jednotlivé parametry zjistili, že stejně jako v případě příčinkových součinitelů platí

$$J_{21} = J_{12}. \quad (6.33)$$

Při hledání ekvivalentního momentu setrvačnosti J_{11} lze vyjít přímo z rovnice (6.32). Zde položíme $a_{N_2} = a_{N_1}$ a $b_{M_2} = b_{M_1}$, potom $\psi = 0$. Pro J_{11} pak dostaneme vztah

$$J_{11} = \frac{b_{M_1} a_{N_1}^2 + a_{N_1} b_{M_1}^2}{\frac{b_{M_1}}{a_{N_1}} \left\{ S_{a^3}^{(1)} \right\} + \frac{a_{N_1}}{b_{M_1}} \left\{ S_{b^3}^{(1)} \right\}}. \quad (6.34)$$

Analogicky bychom získali pro J_{22} vztah

$$J_{22} = \frac{b_{M_2} a_{N_2}^2 + a_{N_2} b_{M_2}^2}{\frac{b_{M_2}}{a_{N_2}} \left\{ S_{a^3}^{(2)} \right\} + \frac{a_{N_2}}{b_{M_2}} \left\{ S_{b^3}^{(2)} \right\}}. \quad (6.35)$$

Odvození vztahů pro zbylé ekvivalentní momenty setrvačnosti je analogické, proto je zde uvedeme bez odvození. Odvození pro případ J_{13} a J_{31} vede ke stejnému výslednému vztahu:

$$J_{13} = J_{31} = \frac{a_{N_1}^2 - b_{M_1}^2 + \frac{3}{2}Lb_{M_1}}{\frac{1}{a_{N_1}} \left\{ S_{a^3}^{(1)} \right\} - \frac{1}{b_{M_1}} \left\{ S_{b^3}^{(1)} \right\} + \frac{3}{2} \frac{L}{b_{M_1}} \left\{ S_{b^2}^{(1)} \right\}}. \quad (6.36)$$

Ekvivalentní moment setrvačnosti J_{33} je dán vztahem

$$J_{33} = \frac{\frac{1}{3}(a_{N_1}^3 + b_{M_1}^3 + L^2 c_K) + L^2 b_{M_1} - Lb_{M_1}^2}{\frac{1}{3} \left(\left\{ S_{a^3}^{(1)} \right\} + \left\{ S_{b^3}^{(1)} \right\} + \frac{L^2}{c_K} \left\{ S_{c^3} \right\} \right) + L^2 \left\{ S_b^{(1)} \right\} - L \left\{ S_{b^2}^{(1)} \right\}}. \quad (6.37)$$

Získané ekvivalentní momenty setrvačnosti lze uspořádat do čtvercové matice o rozměrech 3×3 , která má pouze 6 nezávislých složek:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

V případě hřídele zatíženého silami $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I$ dle obrázku 6.5 pak matice ekvivalentních momentů setrvačnosti \mathbf{J} přejde do tvaru

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1I} & J_{1(I+1)} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2I} & J_{2(I+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J_{I1} & J_{I2} & \dots & J_{II} & J_{I(I+1)} \\ J_{(I+1)1} & J_{(I+1)2} & \dots & J_{(I+1)I} & J_{(I+1)(I+1)} \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Odvozené vztahy pro J_{ij} lze v tomto případě zobecnit následujícím způsobem.

- Prvky J_{ij} , kde $i = 1, 2, \dots, I$ a $j = 1, 2, \dots, I$, jsou pro $i \leq j$ dány rovnicí (6.32), tj.

$$J_{ij} = \frac{b_{M_i} a_{N_i}^2 + a_{N_j} b_{M_j}^2 + \frac{3}{2}L(a_{N_j}^2 - a_{N_i}^2) - (a_{N_j}^3 - a_{N_i}^3)}{\frac{b_{M_i}}{a_{N_i}} \left\{ S_{a^3}^{(i)} \right\} + \frac{a_{N_j}}{b_{M_j}} \left\{ S_{b^3}^{(j)} \right\} + \frac{1}{J_{a_N}} \left(\frac{3}{2}L(a_{N_j}^2 - a_{N_i}^2) - (a_{N_j}^3 - a_{N_i}^3) \right)}. \quad (6.40)$$

- Prvky $J_{i(I+1)}$, kde $i = 1, 2, \dots, I$ jsou dány rovnicí (6.36):

$$J_{i(I+1)} = \frac{a_{N_i}^2 - b_{M_i}^2 + \frac{3}{2}Lb_{M_i}}{\frac{1}{a_{N_i}} \left\{ S_{a^3}^{(i)} \right\} - \frac{1}{b_{M_i}} \left\{ S_{b^3}^{(i)} \right\} + \frac{3}{2} \frac{L}{b_{M_i}} \left\{ S_{b^2}^{(i)} \right\}}. \quad (6.41)$$

- K určení prvku $J_{(I+1)(I+1)}$ použijeme rovnici (6.37):

$$J_{(I+1)(I+1)} = \frac{\frac{1}{3}(a_{N_1}^3 + b_{M_1}^3 + L^2 c_K) + L^2 b_{M_1} - Lb_{M_1}^2}{\frac{1}{3} \left(\left\{ S_{a^3}^{(1)} \right\} + \left\{ S_{b^3}^{(1)} \right\} + \frac{L^2}{c_K} \left\{ S_{c^3} \right\} \right) + L^2 \left\{ S_b^{(1)} \right\} - L \left\{ S_{b^2}^{(1)} \right\}}. \quad (6.42)$$

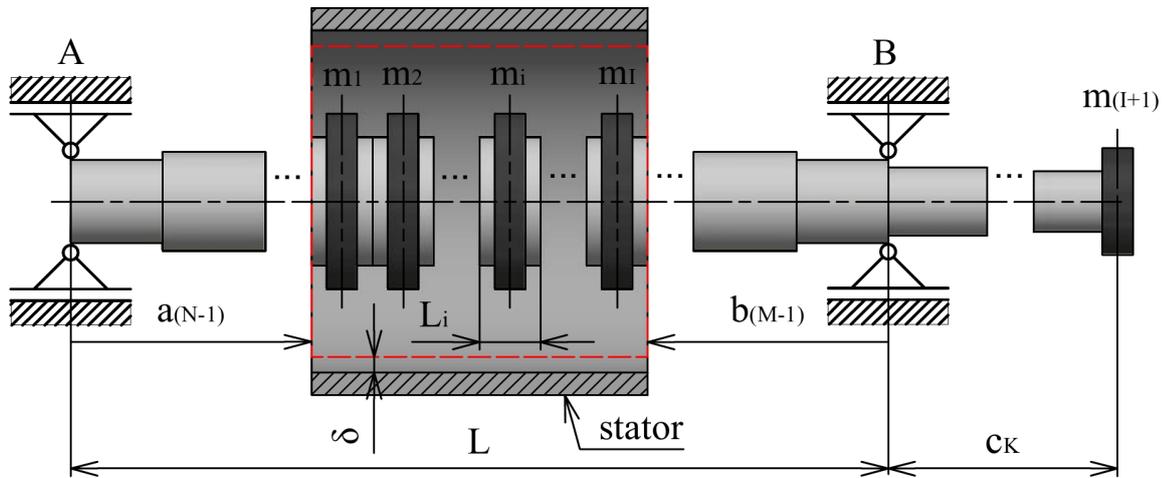
Matice \mathbf{J} je stejně jako matice poddajnosti $\boldsymbol{\alpha}$ symetrická. K určení prvků J_{ij} , kde $i > j$ (prvky pod hlavní diagonálou), lze proto s výhodou využít vlastnosti, že pro $i \neq j$ platí $J_{ij} = J_{ji}$.

Matici poddajnosti (6.13), která byla sestavena v podkapitole 6.1.1 při uvažování konstantního momentu setrvačnosti průřezu J_y po celé délce střednice, lze transformovat pro odstupňovaný hřídel z obrázku 6.5 tak, že prvku α_{ij} přiřadíme odpovídající prvek J_{ij} matice \mathbf{J}

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{b_{M_1} a_{N_1} (L^2 - b_{M_1}^2 - a_{N_1}^2)}{6EJ_{I1}L} & \cdots & \frac{b_{M_I} a_{N_1} (L^2 - b_{M_I}^2 - a_{N_1}^2)}{6EJ_{II}L} & -\frac{a_{N_1} c_K (L^2 - a_{N_1}^2)}{6EJ_{I(I+1)}L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{sym.} & & \frac{b_{M_I} a_{N_I} (L^2 - b_{M_I}^2 - a_{N_I}^2)}{6EJ_{II}L} & -\frac{a_{N_I} c_K (L^2 - a_{N_I}^2)}{6EJ_{I(I+1)}L} \\ & & & \frac{c_K^2 (c_K + L)}{3EJ_{(I+1)(I+1)}} \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

6.1.3 Průhyb hřídele se zahrnutím magnetického tahu

Nehmotný odstupňovaný hřídel z obrázku 6.5, pro který byla v závěru předchozí podkapitoly sestavena matice poddajnosti, nyní použijeme k sestavení zjednodušeného modelu rotoru, viz obrázek 6.8. Soustředěné hmoty $m_1 = m_2 = \cdots = m_i = \cdots = m_I$ reprezentují v součtu hmotnost paketu rotoru, v práci dále značenou jako m_p . Do hmotnosti m_p lze zahrnout rovněž hmotnost klece rotoru a dalších komponent. Poloha hmoty m_i je přitom uvažována ve středu úseku L_i . Soustředěná hmota m_{I+1} na převislém konci představuje hmotnost řemenice m_r .



Obr. 6.8: Model ohybově poddajného rotoru s $I + 1$ soustředěnými hmotami.

Uvažujme, že na hřídel působí síly $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I, F_{I+1}$ dle obrázku 6.5. Pro vyjádření posuvů působí těchto sil $w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_I, w_{I+1}$ použijeme větu o superpozici napjatosti a deformace, která říká následující:

„Napjatost a deformace tělesa zatíženého silovou soustavou je v lineární PP rovna součtu napjatostí a deformací způsobených jednotlivými silami této soustavy [8].“

Hledané průhyby jsou tedy dány soustavou rovnic

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11}F_1 + \alpha_{12}F_2 + \cdots + \alpha_{1(I+1)}F_{I+1}, \\ w_2 &= \alpha_{21}F_1 + \alpha_{22}F_2 + \cdots + \alpha_{2(I+1)}F_{I+1}, \\ &\vdots \\ w_{I+1} &= \alpha_{(I+1)1}F_1 + \alpha_{(I+1)2}F_2 + \cdots + \alpha_{(I+1)(I+1)}F_{I+1}, \end{aligned}$$

kteřou lze maticově zapsat následovně

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{I+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1(I+1)} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2(I+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(I+1)1} & \alpha_{(I+1)2} & \cdots & \alpha_{(I+1)(I+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{I+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{I+1} \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

Zde $\boldsymbol{\alpha}$ je matice poddajnosti uvažovaného hřídele, viz rovnice (6.43).

Statické průhyby hřídele

V klidovém stavu, kdy $\omega = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, mají síly $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I, F_{I+1}$ charakter tíhových sil od soustředěných hmot, tj. platí $F_i = F_{G_i} = m_i g$ (předpětí řemene není uvažováno). Hřídel pak vykazuje statické průhyby

$$\begin{bmatrix} w_{st1} \\ w_{st2} \\ \vdots \\ w_{stI+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} F_{G_1} \\ F_{G_2} \\ \vdots \\ F_{G_{I+1}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ \vdots \\ m_{I+1} g \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Průhyby hřídele za provozu

V důsledku statického průhybu vzniká při uvedení rotoru do provozu ($\omega \neq 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) magnetický tah F_{mg} , který vyvolá další průhyb hřídele. Sílu F_{mg} rozložíme podobně jako hmotnost paketu rotoru do úseků $L_1 = L_2 = \dots = L_i = \dots = L_I$ tak, že síla F_{mg_i} působí ve středu úseku L_i . Jelikož úseky L_i jsou ekvidistantní, z rovnice (3.1) plyne

$$F_{mg_i} = \frac{C_{mg}}{I} w_i. \quad (6.46)$$

Síly $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_I$ mezi ložisky jsou dány součtem

$$F_i = F_{G_i} + F_{mg_i} = m_i g + \frac{C_{mg}}{I} w_i. \quad (6.47)$$

Kromě magnetického tahu je za provozu přítomen rovněž tah řemene F_r . Síla F_{I+1} , působící na převislém konci, je za provozu dána součtem tíhy řemenice a tahu řemene, tj.

$$F_{I+1} = F_{G_{I+1}} + F_r = m_{I+1} g + F_r. \quad (6.48)$$

Soustava rovnic (6.44) pak přejde do tvaru

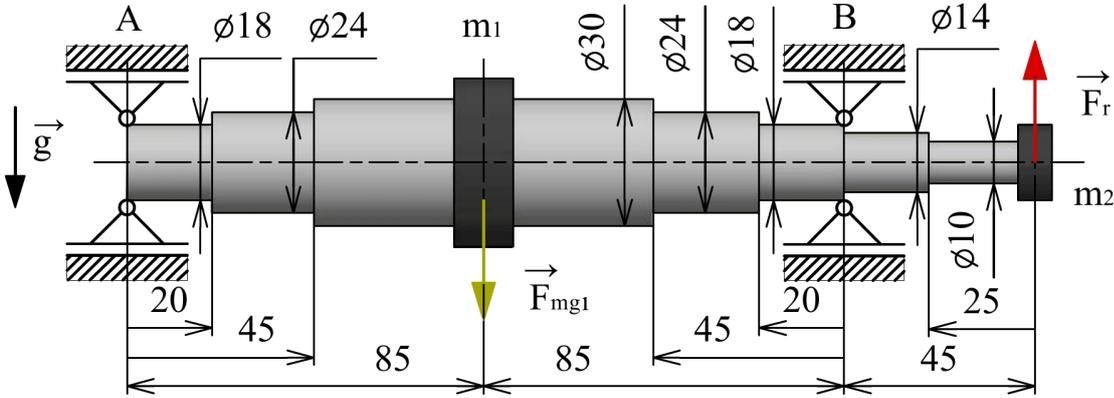
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_I \\ w_{I+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} F_{G_1} + F_{mg_1} \\ F_{G_2} + F_{mg_2} \\ \vdots \\ F_{G_I} + F_{mg_I} \\ F_{G_{I+1}} + F_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} m_1 g + \frac{C_{mg}}{I} w_1 \\ m_2 g + \frac{C_{mg}}{I} w_2 \\ \vdots \\ m_I g + \frac{C_{mg}}{I} w_I \\ m_{I+1} g + F_r \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Nyní budeme uvažovat případ $I = 1$ pro rozměry hřídele patrné z obrázku 6.9. Uvažovaná hmotnost paletu rotoru je $m_p = m_1 = 2,5 \text{ kg}$, hmotnost řemenice $m_r = m_2 = 0,1 \text{ kg}$ a tah řemene

$F_r = -10\text{ N}$ (tah řemene působí vzhůru, tj. proti směru tíhového zrychlení). Ze soustavy rovnic (6.49) obdržíme dvě rovnice o dvou neznámých, kterými jsou průhyby w_1 a w_2 , tj.

$$w_1 = \alpha_{11}(m_1g + C_{mg}w_1) + \alpha_{12}(m_2g + F_r), \quad (6.50)$$

$$w_2 = \alpha_{21}(m_1g + C_{mg}w_1) + \alpha_{22}(m_2g + F_r). \quad (6.51)$$



Obr. 6.9: Model ohybově poddajného rotoru pro $I = 1$.

Soustavu rovnic (6.50) a (6.51) lze řešit *přímou dosazovací metodou*. Z rovnice (6.50) vyjádříme průhyb w_1 a následně dosadíme za w_1 do rovnice (6.51):

$$w_1 = \frac{\alpha_{11}(m_1g) - \alpha_{12}(m_2g + F_r)}{1 - \alpha_{11}C_{mg}}, \quad (6.52)$$

$$w_2 = \alpha_{21} \left[m_1g + C_{mg} \left(\frac{\alpha_{11}(m_1g) - \alpha_{12}(m_2g + F_r)}{1 - \alpha_{11}C_{mg}} \right) \right] + \alpha_{22}(m_2g + F_r). \quad (6.53)$$

Další možností je použití *metody prosté iterace*. Jedná se pravděpodobně o nejjednodušší iterační metodu řešení soustav lineárních rovnic. Její podstata spočívá v opakovaném dosazování výstupů za neznámé [24]. Průhyby hledáme dle předpisu

$$w_1^{(j)} = \alpha_{11} \left(m_1g + C_{mg}w_1^{(j-1)} \right) + \alpha_{12}(m_2g + F_r), \quad (6.54)$$

$$w_2^{(j)} = \alpha_{21} \left(m_1g + C_{mg}w_1^{(j-1)} \right) + \alpha_{22}(m_2g + F_r), \quad (6.55)$$

$$R^{(j)} = \max \begin{bmatrix} R_1^{(j)} \\ R_2^{(j)} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} |w_1^{(j)} - w_1^{(j-1)}| \\ |w_2^{(j)} - w_2^{(j-1)}| \end{bmatrix},$$

kde $j = 1, 2, \dots, J$. V první iteraci ($j = 1$) dosadíme za $w_1^{(0)}$ statický průhyb w_{st1} , pro který ze soustavy (6.45) plyne $w_{st1} = \alpha_{11}m_1g + \alpha_{12}m_2g$. Řešení probíhá v cyklech tak dlouho, dokud reziduum $R^{(j)}$ nedosáhne hodnoty menší, než je určitá zvolená přesnost R_{\min} [mm]. Vzhledem k tomu, že řešení může divergovat, je praktické omezit počet iterací určitou hodnotou J_{\max} .

Konvergence iterativního řešení je podmíněná. Z kapitoly 3 víme, že rozhodující je poměr magnetické tuhosti C_{mg} a tuhosti hřídele, vyjádřený z posuvu společného působíště sil F_{G1} a F_{mg1} . Pro rozměry hřídele z obrázku 6.9 obdržíme matici poddajnosti α ve tvaru

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,57224 \cdot 10^{-5} & -1,65099 \cdot 10^{-5} \\ -1,65099 \cdot 10^{-5} & 1,62932 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ mm} \cdot \text{N}^{-1}. \quad (6.56)$$

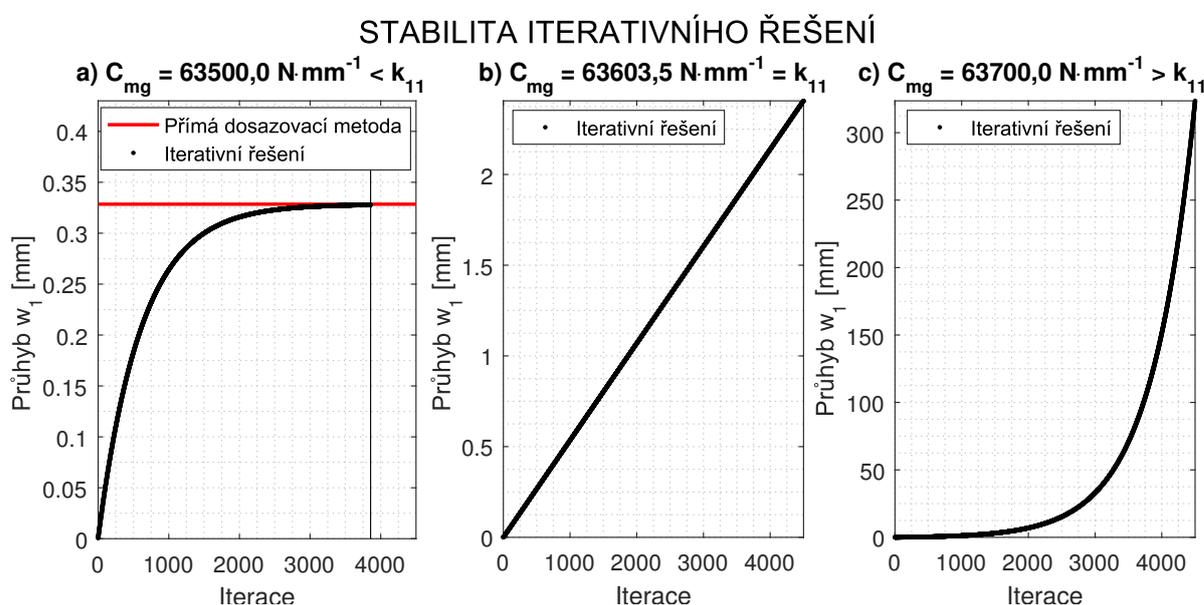
Tuhost hřídele, vyjádřená z posuvu společného působíště sil F_{G_1} a F_{mg_1} , odpovídá dle vztahu (6.4) převrácené hodnotě příčinkového součinitele α_{11}

$$k_{11} = \frac{1}{\alpha_{11}} = 63603,5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}. \quad (6.57)$$

Iterativní řešení bylo provedeno v programu Matlab pomocí cyklu „for“. Maximální počet iterací byl nastaven na hodnotu $J_{\max} = 4500$, požadovaná přesnost byla zvolena $R_{\min} = 10^{-6}$ mm. Vstupy do první iterace (statické průhyby) obdržíme ze soustavy rovnic (6.45):

$$\begin{bmatrix} w_{st1} \\ w_{st2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,694 \cdot 10^{-4} \\ -2,451 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ mm}. \quad (6.58)$$

V závislosti na poměrech hodnot C_{mg} a k_{11} mohou dále při iterativním řešení nastat tři různé případy, jak je patrné z obrázku 6.10.



Obr. 6.10: Stabilita iterativního řešení v závislosti na poměru C_{mg} a k_{11} .

- a) Pro $C_{mg} = 63500,0 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} < k_{11}$ řešení konverguje k hodnotě $w_1 = 0,328$ mm, stanovené z rovnice (6.52). Požadované přesnosti R_{\min} je dosaženo po 3857 iteracích.
- b) Pro $C_{mg} = 63603,5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} = k_{11}$ narůstají hodnoty w_1 během iterací tak, že rozdíl

$$\Delta w_1 = w_1^{(j)} - w_1^{(j-1)}$$

se v celém rozsahu iterací liší až na 7. desetinném místě. Tyto odchylky jsou způsobeny zaokrouhlovací chybou – vyčíslením k_{11} na větší počet desetinných míst lze tyto odchylky snížit. Řešení diverguje teoreticky s lineární závislostí. Z rovnice (6.52) obdržíme v tomto případě, z fyzikální podstaty chybnou, hodnotu $w_1 = -14066$ mm.

- c) Pro $C_{mg} = 63700,0 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} > k_{11}$ řešení diverguje nelineárně. Z rovnice (6.52) obdržíme hodnotu $w_1 = -0,3523$ mm. Tato hodnota je podobně jako v předchozím případě z fyzikální podstaty chybná, neboť průhyb způsobený magnetickým tahem a uvažovaným tahem řemene nemůže probíhat v opačném směru než statický průhyb.

Hodnoty C_{mg} uvažované v předchozím textu jsou pro účely demonstrace stability iterativního řešení nadsazeny. V reálném případě jsou tyto hodnoty řádově nižší.

S uvažováním vyšších hodnot I lze dosáhnout rovnoměrného rozložení jak hmotnosti paketu rotoru, tak magnetického tahu po celé délce úseku. Zvolené hodnotě parametru I pak odpovídá $I + 1$ rovnic soustavy (6.49) a řešení přímou dosazovací metodou je operačně náročné. Z tohoto důvodu nadále upřednostníme řešení iterativní, které je pro libovolné I dáno předpisem

$$\begin{bmatrix} w_1^{(j)} \\ w_2^{(j)} \\ \vdots \\ w_I^{(j)} \\ w_{I+1}^{(j)} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} m_1 g + \frac{C_{mg}}{I} w_1^{(j-1)} \\ m_2 g + \frac{C_{mg}}{I} w_2^{(j-1)} \\ \vdots \\ m_I g + \frac{C_{mg}}{I} w_I^{(j-1)} \\ m_{I+1} g + F_r \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (6.59)$$

$$R^{(j)} = \max \begin{bmatrix} R_1^{(j)} \\ R_2^{(j)} \\ \vdots \\ R_I^{(j)} \\ R_{I+1}^{(j)} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} |w_1^{(j)} - w_1^{(j-1)}| \\ |w_2^{(j)} - w_2^{(j-1)}| \\ \vdots \\ |w_I^{(j)} - w_I^{(j-1)}| \\ |w_{I+1}^{(j)} - w_{I+1}^{(j-1)}| \end{bmatrix}.$$

V první iteraci dosadíme za $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_I^{(0)}$ statické průhyby spočtené ze soustavy rovnic (6.45). Řešení probíhá v cyklech v mezích definovaných hodnotami R_{\min} a J_{\max} .

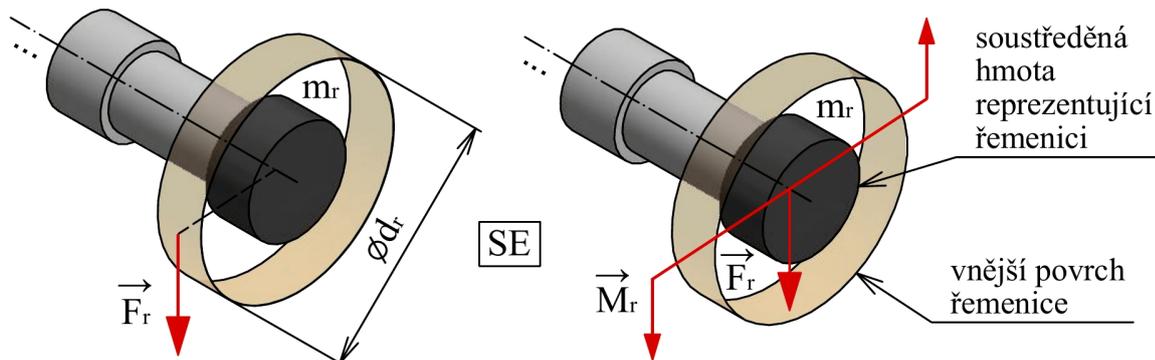
6.1.4 Napjatost hřídele

V rámci této kapitoly se budeme zabývat napjatostí hřídele z obrázku 6.5 při provozním zatížení. Při řešení budeme vycházet z teorie prostě ohýbaných a kroucených nosníků dle [8].

Rozbor stavu napjatosti

V dalších úvahách budeme stejně jako doposud uvažovat řemen bez počátečního předpětí (za klidového stavu je tah řemene nulový). Síla F_{I+1} , působící na převislém konci viz obrázek 6.5, je za provozu dána součtem tíhy řemenice o hmotnosti $m_r = m_{I+1}$ a tahu řemene F_r , tedy

$$F_{I+1} = F_{G_{I+1}} + F_r = m_r g + F_r. \quad (6.60)$$



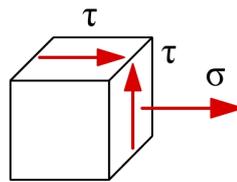
Obr. 6.11: Staticky ekvivalentní zatížení tahu řemene při nulovém počátečním předpětí.

Tah řemene F_r působí na rameni o délce odpovídající poloměru řemenice $r_r = d_r/2$, v důsledku čehož je generován kroutící moment M_r , viz obrázek 6.11.

$$M_r = F_r r_r \quad (6.61)$$

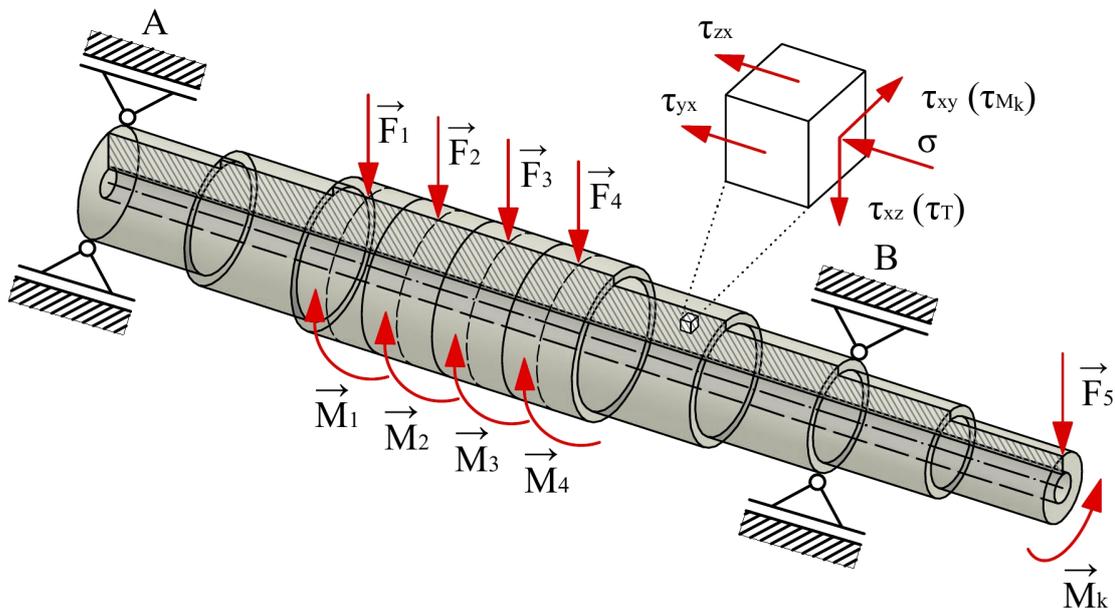
Moment M_r nebyl v předchozích podkapitolách uvažován, neboť na průhyby nemá vliv.

Při uvažovaném zatížení hřídele dle obrázku 6.13 jsou tři složky VVÚ nenulové – ohybový moment M_o , posouvající síla T a kroutící moment M_k . Jedná se o tzv. kombinované namáhání. V bodech vzdálených od osazení vzniká prutová napjatost, která je určena normálovým napětím σ a smykovým napětím τ v jedné stěně elementárního prvku, viz obrázek 6.12 [8].



Obr. 6.12: Elementární prvek – prutová napjatost [8].

Smykové napětí τ se přitom skládá ze dvou složek, smykového napětí τ_T od posouvající síly a smykového napětí τ_{M_k} od kroutícího momentu, viz elementární prvek na obrázku 6.13.

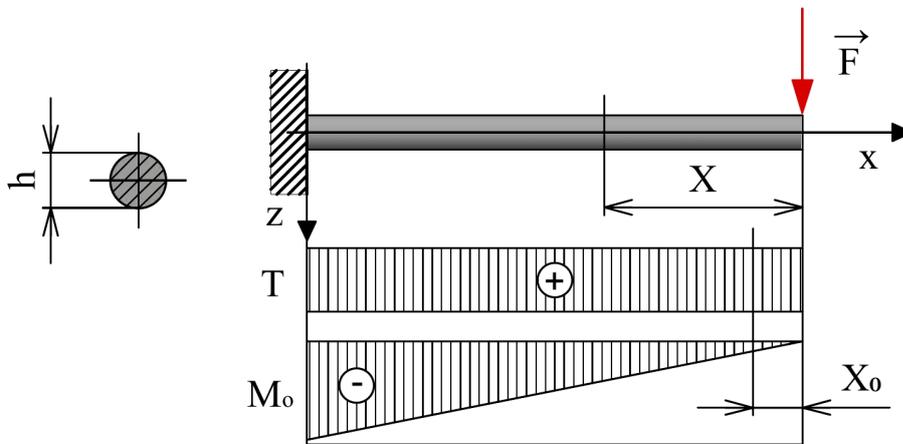


Obr. 6.13: Uvažované zatížení hřídele za provozu.

V případě štíhlých nosníků však platí, že posouvající síla T má podstatný vliv na napjatost pouze v oblastech, kde $\tau_T \doteq \sigma$ [8]. Tyto oblasti představují blízká okolí bodů střednice, kde ohybový moment $M_o = 0 \text{ Nmm}$. Pro představu uveďme příklad jednostranně vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou F dle obrázku 6.14, kde X_0 je šířka oblasti podstatného vlivu T . Pro takto uložený a zatížený nosník je v [8] uvedeno

$$X_0 = \frac{h}{6}.$$

Mimo oblast X_0 lze smykové napětí τ_T považovat za nepodstatné. V případě vyšetřovaného hřídele bude vyhodnocováno pouze normálové napětí σ od ohybového momentu a smykové napětí τ_{M_k} od kroutícího momentu (dále jen τ).



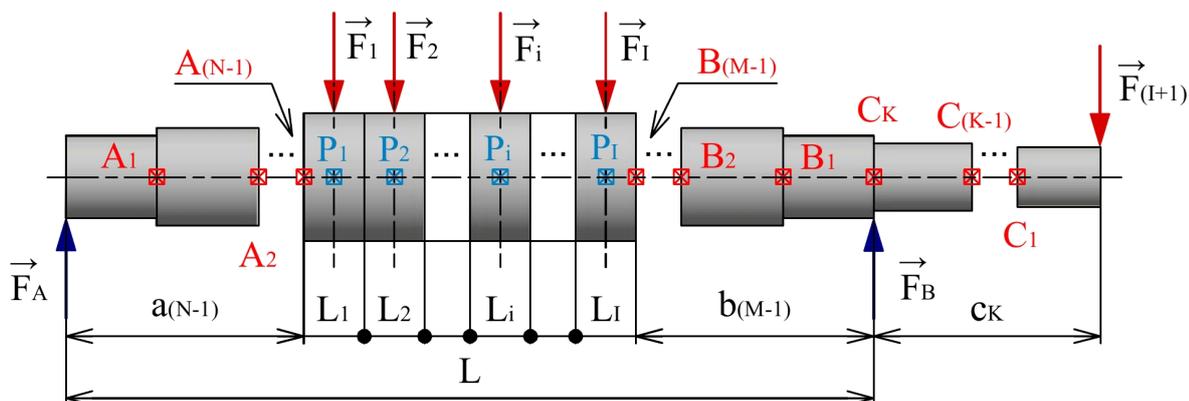
Obr. 6.14: Oblast podstatného vlivu posouvající síly [8].

Vyšetřovaný hřídel z obrázku 6.13 je mnohonásobně odstupňovaný. Skoková změna příčného průřezu, tzv. „osazení“, je konstrukčním vrubem – dochází zde ke koncentraci napětí. Lokálně vzniká v těchto oblastech obecná trojosá napjatost. Napětí stanovená v těchto místech na základě prosté pružnosti – teorie prostého ohybu v případě normálového napětí σ a teorie prostého krutu v případě smykového napětí τ – označujeme za „nominální napětí“ [8].

Důležitou skutečností je, že při uvažovaném zatížení hřídel současně rotuje s úhlovou frekvencí ω . Zatímco smyková napětí τ jsou za provozu konstantní, normálová napětí σ jsou v daném místě příčného průřezu periodicky proměnlivá v čase se souměrným střídavým cyklem. Hřídel je namáhán tzv. „ohybem za rotace“ [25]. Rozhodujícím mezním stavem je v tomto případě mezní stav únavové pevnosti (dále jen MSÚP). Pro posouzení MSÚP byla vytvořena celá řada různých koncepcí. Jelikož je však tato problematika poměrně rozsáhlá, omezíme se pouze na stanovení nominálních napětí, která mohou být dále použita pro posouzení MSÚP s použitím koncepce nominálních napětí. Tato koncepce je vhodná právě pro prutová tělesa [13].

Nominální normálová napětí od ohybového momentu

Nyní budeme uvažovat pouze zatížení generující ohybový moment, viz obrázek 6.15.



Obr. 6.15: Kritická místa normálového napětí σ .

Normálové napětí σ je po příčném průřezu rozloženo podél roviny procházející těžištěm příčného průřezu. V bodech průsečnice této roviny a plochy příčného průřezu je $\sigma = 0$ MPa, jedná se o tzv. „neutrální osu“. V našem případě je neutrální osa rovnoběžná s osou y . Normálové napětí σ je v tomto případě dáno vztahem

$$\sigma(z) = \frac{M_o}{J_y} z \quad [8]. \quad (6.62)$$

Dále na obrázku 6.16 vlevo je zobrazen průběh $\sigma(z)$ v rovině xy . Odtud je dobře patrné, že $\sigma(z)$ dosahuje extrémních hodnot v $z = \pm d/2$, kde d je (vnější) průměr příčného průřezu. Pro vyhodnocení těchto extrémů zavádí [8] vztah

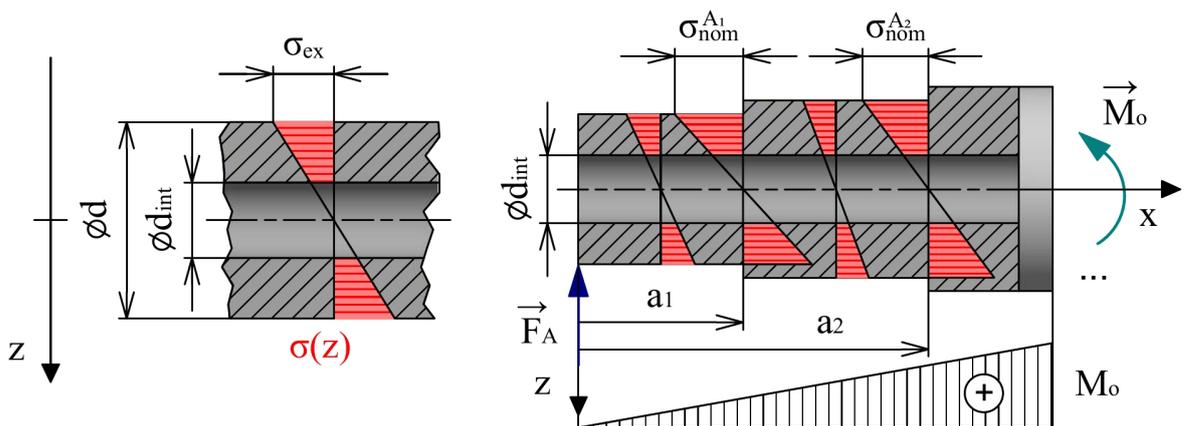
$$\sigma_{ex} = \frac{M_o}{w_o}, \quad (6.63)$$

kde w_o je modul průřezu v ohybu. Při uvažování mezikruhového příčného průřezu s vnějším průměrem d a vnitřním průměrem d_{int} je

$$w_o = \frac{J_y}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi(d^4 - d_{int}^4)}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi(d^4 - d_{int}^4)}{32d}. \quad (6.64)$$

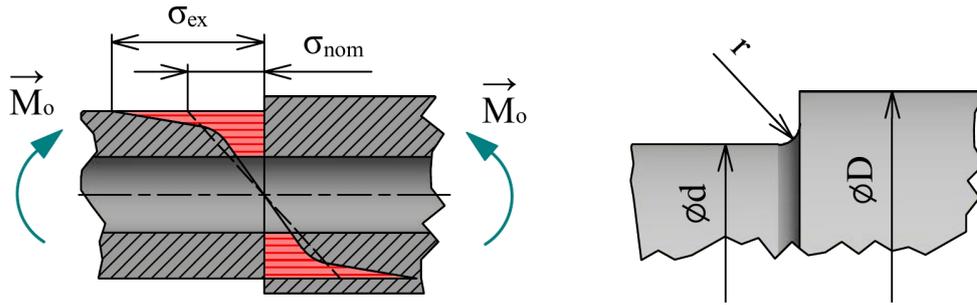
Vyšetřovaný hřídel z obrázku 6.15 je mnohonásobně odstupňovaný. Maxima normálového napětí stanovená v místech skokové změny průřezu pomocí teorie prostého ohybu, s použitím vztahu 6.63, nepředstavují extrémní napětí σ_{ex} , ale nominální napětí σ_{nom} , viz obrázek 6.16 vpravo. Hodnoty σ_{ex} v těchto místech lze pro účely posouzení mezního stavu pružnosti při statickém zatížení získat korekcí napětí σ_{nom} pomocí součinitele koncentrace napětí α [8].

$$\sigma_{ex} = \alpha \sigma_{nom} \quad (6.65)$$



Obr. 6.16: Extrémní a nominální normálová napětí [8].

Hodnoty α jsou pro různé typy vrubů a zatížení zpracovány v podobě nomogramů, které lze dohledat například v [8] nebo [21]. Pro odečet hodnoty α z nomogramů je třeba stanovit poměry D/d a r/d (rozměry r , d a D jsou patrné z obrázku 6.17).



Obr. 6.17: Extrémní normálová napětí v místě vrubu [8].

Při posouzení MSÚP s použitím koncepce nominálních napětí je základním parametrem mez únavy součásti σ_c^* , kterou obdržíme korekcí meze únavy vzorku σ_c pomocí součinitele velikosti ϑ , součinitele opracování a zpracování η a součinitele vrubu β :

$$\sigma_c^* = \frac{\vartheta\eta}{\beta} \sigma_c \quad [13]. \quad (6.66)$$

Hodnotu součinitele vrubu β lze stanovit pomocí Heywoodova vztahu

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{K}{\sqrt{r}}}, \quad (6.67)$$

kde α je součinitel koncentrace napětí, r je poloměr kořene vrubu, viz obrázek 6.17, a K je materiálová konstanta, závislá na typu vrubu a mezi pevnosti materiálu σ_{Pt} [13]. Namáhání součásti je naopak popsáno nekorigovanými nominálními napětími, které stanovíme s použitím teorie prosté pružnosti (odtud název „koncepce nominálních napětí“).

Nominální normálová napětí σ_{nom} budou pro případ hřídele z obrázku 6.15 vyhodnocena:

- v příčných průřezech definovaných na obrázku 6.15 body $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_l$ (působíště zátěžných sil mezi ložisky), ve kterých σ_{nom} odpovídá σ_{ex} ,
- v místech skokové změny příčného průřezu – jedná se o kritická místa, která jsou na obrázku 6.15 vyznačena body $A_1, A_2, \dots, A_{N-1}, B_1, B_2, \dots, B_{M-1}$ a C_1, C_2, \dots, C_K .

Prvním krokem řešení je sestavení podmínek statické rovnováhy a vyjádření sil ve vazbách F_A a F_B . Hřídel je zatížen silovou soustavou s rovnoběžnými nositelkami v rovině, k dispozici máme dvě podmínky statické rovnováhy

$$\sum F_z = 0: \quad \sum_{i=1}^I F_i + F_{I+1} - F_A - F_B = 0, \quad (6.68)$$

$$\sum M_A = 0: \quad \sum_{i=1}^I F_i a_{N_i} - F_B L + F_{I+1} (L + c_k) = 0. \quad (6.69)$$

Podmínky statické rovnováhy (6.68) a (6.69) představují dvě rovnice o dvou neznámých, kterými jsou hledané síly F_A a F_B . Z rovnice (6.69) vyjádříme

$$F_B = \frac{1}{L} \left[\sum_{i=1}^I F_i a_{N_i} + F_{I+1} (L + c_k) \right]. \quad (6.70)$$

Dosažením za F_B do rovnice (6.68) pak dostaneme

$$F_A = \sum_{i=1}^I F_i + F_{I+1} - \frac{1}{L} \left[\sum_{i=1}^I F_i a_{N_i} + F_{I+1} (L + c_k) \right]. \quad (6.71)$$

Ohybové momenty v bodech $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_I$ lze maticově zapsat následujícím způsobem

$$\begin{bmatrix} M_o^{P_1} \\ M_o^{P_2} \\ M_o^{P_3} \\ \vdots \\ M_o^{P_I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{N_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{N_2} & -L_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{N_3} & -2L_1 & -L_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_I} & -(I-1)L_1 & -(I-2)L_1 & \dots & -L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{I-1} \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

Nominální napětí $\sigma_{nom}^{P_i}$ pak obdržíme z rovnice (6.63):

$$\sigma_{nom}^{P_i} = \frac{M_o^{P_i}}{W_o^P} = \frac{M_o^{P_i}}{\frac{\pi(d_{a_N}^4 - d_{int}^4)}{32d_{a_N}}}, \text{ kde } i = 1, 2, \dots, I. \quad (6.73)$$

Ohybové momenty v bodech A_1, A_2, \dots, A_{N-1} , B_1, B_2, \dots, B_{M-1} a C_1, C_2, \dots, C_K lze maticově zapsat následovně:

$$\begin{bmatrix} M_o^{A_1} \\ M_o^{A_2} \\ \vdots \\ M_o^{A_{N-1}} \end{bmatrix} = F_A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_o^{B_1} \\ M_o^{B_2} \\ \vdots \\ M_o^{B_{M-1}} \end{bmatrix} = -F_{I+1} \left(c_K + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \end{bmatrix} \right) + F_B \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_o^{C_1} \\ M_o^{C_2} \\ \vdots \\ M_o^{C_K} \end{bmatrix} = -F_{I+1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix}. \quad (6.74)$$

Nominálních napětí $\sigma_{nom}^{A_n}$, $\sigma_{nom}^{B_m}$ a $\sigma_{nom}^{C_k}$ jsou dána rovnicemi

$$\sigma_{nom}^{A_n} = \frac{M_o^{A_n}}{W_o^{A_n}} = \frac{M_o^{A_n}}{\frac{\pi(d_{a_n}^4 - d_{int}^4)}{32d_{a_n}}}, \text{ kde } n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6.75)$$

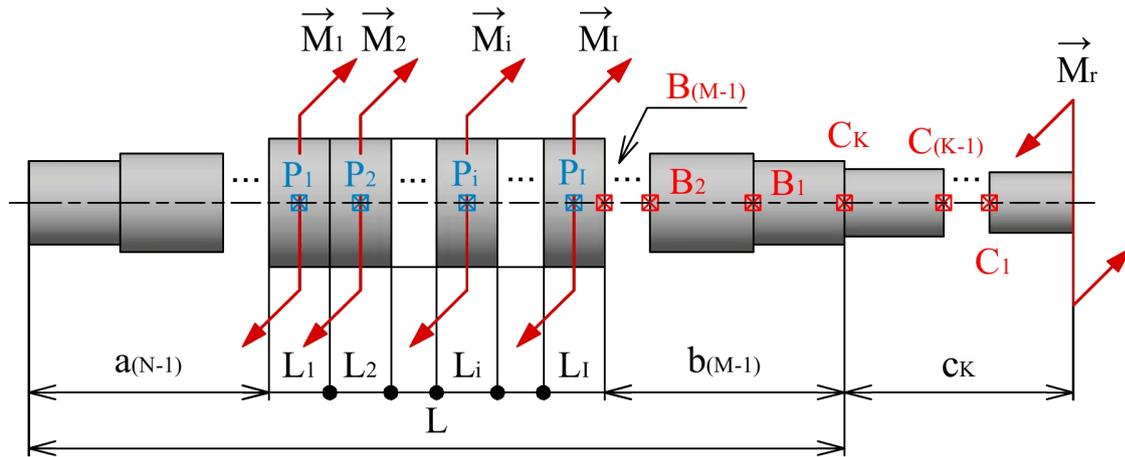
$$\sigma_{nom}^{B_m} = \frac{M_o^{B_m}}{W_o^{B_m}} = \frac{M_o^{B_m}}{\frac{\pi(d_{b_m}^4 - d_{int}^4)}{32d_{b_m}}}, \text{ kde } m = 1, 2, \dots, M-1, \quad (6.76)$$

$$\sigma_{nom}^{C_k} = \frac{M_o^{C_k}}{W_o^{C_k}} = \frac{M_o^{C_k}}{\frac{\pi(d_{c_k}^4 - d_{int}^4)}{32d_{c_k}}}, \text{ kde } k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.77)$$

Nominální smyková napětí od kroutícího momentu

Nyní budeme uvažovat pouze zatížení generující kroutící moment, viz obrázek 6.18. Hřídel je na převíslém konci zatížen momentem M_r a mezi ložisky momenty $M_1 = M_2 = \dots = M_i = \dots = M_I$ tak, že M_i působí ve středu úseku L_i . Z jediné použitelné podmínky statické rovnováhy plyne

$$\sum_{i=1}^I M_i = M_r. \quad (6.78)$$



Obr. 6.18: Kritická místa smykového napětí hřídele.

V příčných průřezech vzniká smykové napětí τ . V místech vzdálených od osazení je τ po příčném průřezu rozloženo lineárně, přitom v bodech střednice je $\tau = 0$ MPa, viz obrázek 6.19 (varianta A). Z teorie prostého krutu plyne pro napětí τ v poloze ρ vztah

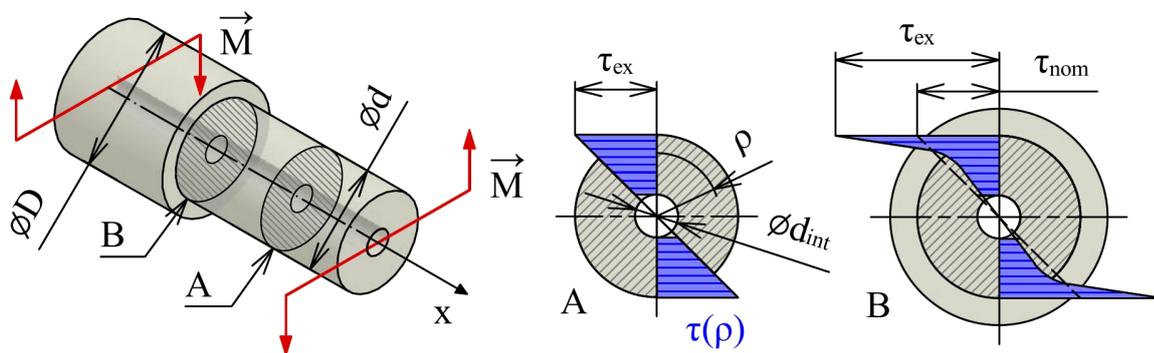
$$\tau(\rho) = \frac{M_k}{J_p} \rho \quad [8]. \quad (6.79)$$

Z obrázku 6.19 je dále patrné, že $\tau(\rho)$ dosahuje extrémních hodnot v $\rho = d/2$, kde d je (vnější) průměr příčného průřezu. Pro vyhodnocení těchto extrémů zavádí [8] vztah

$$\tau_{ex} = \frac{M_k}{w_k}, \quad (6.80)$$

kde w_k je modul průřezu v krutu. Pro mezikruhový příčný průřez s vnějším průměrem d a vnitřním průměrem d_{int} je

$$w_k = \frac{J_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi(d^4 - d_{int}^4)}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi(d^4 - d_{int}^4)}{16d}.$$



Obr. 6.19: Extrémní a nominální smyková napětí [8].

Maximální smyková napětí τ_{ex} v místě skokové změny příčného průřezu lze stanovit analogicky jako v případě ohybu. S použitím vztahu (6.80), odvozeného pro prostý kruh, stanovíme nominální smykové napětí τ_{nom} . Extrémní napětí τ_{ex} obdržíme korekcí nominálního napětí τ_{nom} pomocí součinitele koncentrace napětí α . Jak již bylo řečeno, součinitel $\alpha \in f(D, d, r)$, kde průměry D a d jsou patrné z obrázku 6.19 a r je poloměr kořene vrubu. V případě mnohonásobně

odstupňovaného hřídele bude proto pro každé osazení nabývat různé hodnoty. V této práci se omezíme pouze na stanovení nominálních smykových napětí τ_{nom} .

$$\tau_{ex} = \alpha \tau_{nom} \quad (6.81)$$

Nominální smyková napětí τ_{nom} budou pro případ hřídele z obrázku 6.18 vyhodnocena:

- v příčných průřezech vyznačených body $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_I$ (působíště momentů mezi ložisky), ve kterých τ_{nom} odpovídá τ_{ex} ,
- v místech skokové změny příčného průřezu, tj. v průřezích vyznačených na obrázku 6.18 body, B_1, B_2, \dots, B_{M-1} a C_1, C_2, \dots, C_K .

Kroutící momenty v bodech $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_I$ lze maticově zapsat následovně

$$\begin{bmatrix} M_k^{P_1} \\ M_k^{P_2} \\ \vdots \\ M_k^{P_I} \end{bmatrix} = M_r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - M_1 \begin{bmatrix} I-1 \\ I-2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.82)$$

Nominální napětí $\tau_{nom}^{P_i}$ pak obdržíme z rovnice (6.80):

$$\tau_{nom}^{P_i} = \frac{M_k^{P_i}}{w_k^P} = \frac{M_k^{P_i}}{\frac{\pi(d_{a_N}^4 - d_{int}^4)}{16d_{a_N}}}, \text{ kde } i = 1, 2, \dots, I. \quad (6.83)$$

Kroutící momenty v bodech B_1, B_2, \dots, B_{M-1} a C_1, C_2, \dots, C_K odpovídají svojí velikostí momentu M_r . Pro úplnost uved' me maticový zápis

$$\begin{bmatrix} M_k^{B_1} \\ M_k^{B_2} \\ \vdots \\ M_k^{B_{M-1}} \end{bmatrix} = M_r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_k^{C_1} \\ M_k^{C_2} \\ \vdots \\ M_k^{C_K} \end{bmatrix} = M_r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.84)$$

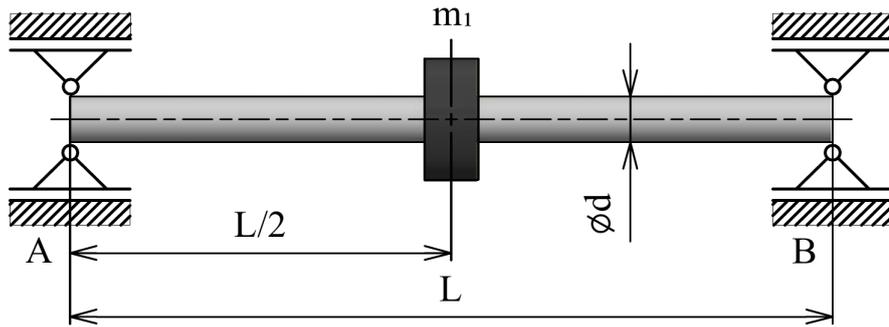
Nominální napětí $\tau_{nom}^{B_m}$ a $\tau_{nom}^{C_k}$ obdržíme dosazením do rovnice (6.80):

$$\tau_{nom}^{B_m} = \frac{M_k^{B_m}}{w_k^{B_m}} = \frac{M_k^{B_m}}{\frac{\pi(d_{b_m}^4 - d_{int}^4)}{16d_{b_m}}}, \text{ kde } m = 1, 2, \dots, M-1, \quad (6.85)$$

$$\tau_{nom}^{C_k} = \frac{M_k^{C_k}}{w_k^{C_k}} = \frac{M_k^{C_k}}{\frac{\pi(d_{c_k}^4 - d_{int}^4)}{16d_{c_k}}}, \text{ kde } k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.86)$$

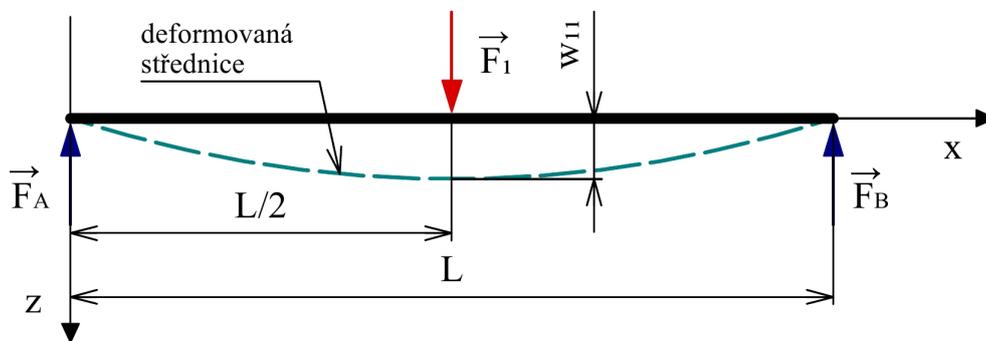
6.2 Přibližné metody výpočtu prvních kritických otáček

Pro prvotní náhled do problematiky budeme nyní hledat první kritickou úhlovou frekvenci Ω_1 jednoduchého modelu rotoru, který se skládá z jedné soustředěné hmoty m_1 uložené ve středu nehmotného poddažného hřídele, viz obrázek 6.20. Vycházet budeme z [21] a [22].



Obr. 6.20: Model rotoru s jednou soustředěnou hmotou.

Při dosažení prvních kritických otáček n_1 vykazuje hřídel krouživé kmitání. To znamená, že v důsledku silového působení hmoty m_1 krouží deformován do prvního vlastního ohybového tvaru, s maximálním průhybem w_{11} v místě zatížení, jak je patrné z obrázku 6.21.



Obr. 6.21: Schéma modelu rotoru s jednou hmotou.

Z kapitoly 6.1.1 víme, že průhyb w_{11} je dán vztahem

$$w_{11} = \alpha_{11} F_1, \quad (6.87)$$

kde α_{11} je příčinkový součinitel. Obdobně, jako je tomu v [21], budeme uvažovat, že síla F_1 má charakter setrvačné objemové síly od rotace, která je vyvolána hmotou m_1 . Hodnota síly F_1 je tak úměrná hmotnosti soustředěné hmoty m_1 , kvadrátu úhlové rychlosti ω a vzdálenosti od osy rotace, které odpovídá maximální průhyb hřídele w_{11}

$$F_1 = m_1 \omega^2 w_{11}. \quad (6.88)$$

Dosažením z rovnice (6.88) do rovnice (6.87) za F_1 a následnou úpravou obdržíme rovnici

$$(\alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1) w_{11} = 0. \quad (6.89)$$

Rovnice (6.89) má netriviální řešení tehdy, jestliže výraz v závorce je roven nule, tj.

$$\alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 = 0. \quad (6.90)$$

Za takové podmínky může průhyb w_{11} nabývat libovolně vysoké hodnoty. Úhlová frekvence ω vyjádřená z podmínky (6.90) tak odpovídá hledané kritické úhlové frekvenci Ω_1 [22]. Drobnou úpravou obdržíme pro Ω_1 vztah

$$\frac{1}{\Omega_1^2} = \alpha_{11} m_1, \quad (6.91)$$

který lze jednoduše upravit do tvaru

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha_{11}m_1}}. \quad (6.92)$$

Příčinkový součinitel α_{11} lze vyjádřit z rovnice (6.10), položíme-li $a_1 = b_1 = L/2$, tj.

$$\alpha_{11} = \frac{b_1 a_1}{6EJ_y L} (L^2 - b_1^2 - a_1^2) = \frac{L^3}{48EJ_y}. \quad (6.93)$$

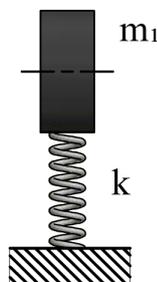
Dosazením z rovnice (6.93) do rovnice (6.92) pak dostaneme

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{48EJ_y}{L^3 m_1}}. \quad (6.94)$$

Jak bylo řečeno v úvodu kapitoly 6.1.1, příčinkový součinitel α představuje poddajnost, tedy převrácenou hodnotu tuhosti (viz rovnice (6.4)). V našem případě představuje příčinkový součinitel α_{11} poddajnost hřídele, jeho převrácená hodnota pak udává tuhost hřídele k . Na základě této skutečnosti lze přepsat rovnici (6.92) ve známý vztah pro výpočet kritické úhlové frekvence soustavy s jedním stupněm volnosti

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad [15]. \quad (6.95)$$

Zde se nabízí otázka, k jakému výsledku bychom dospěli, pokud bychom při hledání kritické úhlové frekvence Ω_1 vycházeli ze vztahu (6.95) a zkoumaný rotor modelovali jako hmotu m_1 kmitající na pružině o tuhosti k , viz obrázek 6.22.



Obr. 6.22: Zjednodušený model rotoru s jednou hmotou.

Tuhost k , odpovídající tuhosti hřídele, plyne z rovnice $F_1 = k w_{11}$. Průhyb w_{11} lze přitom snadno získat pomocí Castiglianovy věty. Učiníme-li tak, obdržíme pro tuhost k vztah

$$k = \frac{48EJ_y}{L^3}. \quad (6.96)$$

Odtud je již patrné, že takovýto postup opět vede na rovnici (6.94), a to navzdory tomu, že uvažovaný model z obrázku 6.22 simuluje nikoliv krouživé kmitání hřídele, ale kmitání příčné. Z tohoto plyne důležitá skutečnost, která je podrobně popsána v [22]. Zde ji uvedeme pouze jako konstatování. Na krouživé kmitání hřídele lze pohlížet jako na příčné kmitání ve dvou navzájem kolmých rovinách. Jsou-li gyroskopické účinky jednotlivých hmot nepodstatné, a netřeba je tak brát v úvahu, pak kritická úhlová frekvence při krouživém kmitání odpovídá kritické úhlové frekvenci příčného kmitání v libovolné z těchto dvou rovin [22]. Rayleighova energetická metoda, kterou se budeme zabývat dále v podkapitole 6.2.2, vychází z předpokladů příčného

kmitání. Na základě výše uvedené skutečnosti lze však odvozené vztahy použít rovněž pro vyhodnocení Ω_1 při krouživém kmitání.

V [15] nebo [22] se při hledání kritické úhlové frekvence Ω_1 vychází z podmínky silové rovnováhy, do které vstupují setrvačná objemová síla od rotace a v opačném směru působící pružná síla hřídele tuhosti k . Podmínka silové rovnováhy má následující tvar

$$m_1 w_{11} \omega^2 - k w_{11} = 0, \quad (6.97)$$

$$(m_1 \omega^2 - k) w_{11} = 0. \quad (6.98)$$

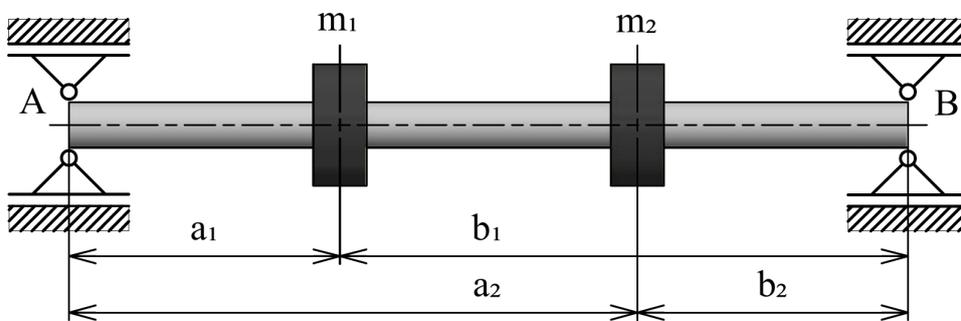
Rovnice (6.98) je ekvivalentní rovnici (6.89).

V dalším textu se seznámíme se dvěma metodami přibližného výpočtu prvních kritických otáček, kterými jsou Dunkerleyův vztah a Rayleighova energetická metoda. Obě metody lze aplikovat na případ nehmotného poddajného hřídele s n soustředěnými hmotami.

6.2.1 Dunkerleyův vztah

Dunkerleyův vzorec je zobecněním právě popsaného postupu hledání prvních kritických otáček pro případ nehmotného poddajného hřídele s n soustředěnými zátěžnými hmotami. Jeho odvození bude z demonstrativních důvodů provedeno nejprve pro případ modelu rotoru se dvěma soustředěnými hmotami. Zobecněným odvozením pro případ n soustředěných hmot pak obdržíme Dunkerleyův vztah v obecné podobě. Při odvození budeme vycházet zejména z [21].

Případ dvou soustředěných zátěžných hmot



Obr. 6.23: Model rotoru se dvěma soustředěnými hmotami.

Pro stanovení průhybů w_1 a w_2 v polohách soustředěných hmot m_1 a m_2 použijeme již známou větu o superpozici napjatosti a deformace. Odtud

$$w_1 = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2, \quad (6.99)$$

$$w_2 = \alpha_{21} F_1 + \alpha_{22} F_2, \quad (6.100)$$

kde síly F_i mají charakter setrvačných objemových sil od rotace, tj.

$$F_i = m_i \omega^2 w_i. \quad (6.101)$$

Dosažením do rovnic (6.99) a (6.100) za F_1 a F_2 z rovnice (6.101) dostaneme

$$w_1 = \alpha_{11} m_1 \omega^2 w_1 + \alpha_{12} m_2 \omega^2 w_2, \quad (6.102)$$

$$w_2 = \alpha_{21} m_1 \omega^2 w_1 + \alpha_{22} m_2 \omega^2 w_2. \quad (6.103)$$

Drobnou úpravou pak obdržíme homogenní soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterými jsou průhyby w_1 a w_2

$$(\alpha_{11}m_1\omega^2 - 1)w_1 + \alpha_{12}m_2\omega^2w_2 = 0, \quad (6.104)$$

$$\alpha_{21}m_1\omega^2w_1 + (\alpha_{22}m_2\omega^2 - 1)w_2 = 0. \quad (6.105)$$

Získanou soustavu rovnic nyní převedeme do maticového tvaru $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}m_1\omega^2 - 1 & \alpha_{12}m_2\omega^2 \\ \alpha_{21}m_1\omega^2 & \alpha_{22}m_2\omega^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.106)$$

Soustava má netriviální řešení tehdy, jestliže determinant matice soustavy \mathbf{A} , zvaný *frekvenční determinant*, je nulový [21], tj.

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11}m_1\omega^2 - 1 & \alpha_{12}m_2\omega^2 \\ \alpha_{21}m_1\omega^2 & \alpha_{22}m_2\omega^2 - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.107)$$

Hledáme tedy takové úhlové frekvence, pro které má soustava netriviální řešení

$$(\alpha_{11}m_1\omega^2 - 1)(\alpha_{22}m_2\omega^2 - 1) - (\alpha_{12}m_2\omega^2)(\alpha_{21}m_1\omega^2) = 0, \quad (6.108)$$

$$\left(\alpha_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \left(\alpha_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}\right) - (\alpha_{12}m_2)(\alpha_{21}m_1) = 0, \quad (6.109)$$

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - \alpha_{11}m_1\frac{1}{\omega^2} - \alpha_{22}m_2\frac{1}{\omega^2} - (\alpha_{12}m_2)(\alpha_{21}m_1) = 0. \quad (6.110)$$

Drobnou úpravou obdržíme polynom 2. stupně s proměnnou $1/\omega^2$:

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - (\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} - (\alpha_{12}m_2)(\alpha_{21}m_1) = 0. \quad (6.111)$$

Diskriminant

$$D = (\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2)^2 + 4(\alpha_{12}m_2)(\alpha_{21}m_1) > 0 \quad (6.112)$$

ve všech případech, rovnice má tedy dva reálné kořeny $1/\Omega_1^2$ a $1/\Omega_2^2$, kde Ω_1 a Ω_2 jsou kritické úhlové frekvence. Vzhledem k tomu, že již v případě tří soustředěných hmot má rovnice (6.111) poměrně složitý tvar, se pro vyjádření kořenů rovnice využívá tzv. *Viětových vzorců*. Ty mají pro případ polynomu 2. stupně ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, s kořeny x_1 a x_2 , tvar

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad [26]. \quad (6.113)$$

Aplikujeme-li první z Viětových vzorců na náš případ, dostaneme rovnici

$$\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2. \quad (6.114)$$

V souladu s rovnicí (6.91) můžeme psát, že

$$\alpha_{ii}m_i = \frac{1}{\Omega_{ii}^2}, \quad (6.115)$$

kde Ω_{ii} je kritická úhlová frekvence, budeme-li uvažovat pouze hmotu m_i [21]. Rovnici (6.114) lze pak přepsat do tvaru

$$\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} = \frac{1}{\Omega_{11}^2} + \frac{1}{\Omega_{22}^2}. \quad (6.116)$$

V tento moment přichází na řadu aproximace, rovněž popsaná v [21], která vychází ze skutečnosti, že $\Omega_1 < \Omega_2$. Pak platí, že $1/\Omega_1^2 \gg 1/\Omega_2^2$. Odtud plyne přibližná rovnost

$$\frac{1}{\Omega_1^2} \approx \frac{1}{\Omega_{11}^2} + \frac{1}{\Omega_{22}^2}, \quad (6.117)$$

kde Ω_1 je hledaná první kritická úhlová frekvence.

Případ n soustředěných zátěžných hmot

Postup je analogický jako v případě dvou soustředěných hmot. Řešení vede na homogenní soustavu lineárních rovnic, kterou lze maticově zapsat následovně

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}m_1\omega^2 - 1 & \alpha_{12}m_2\omega^2 & \dots & \alpha_{1n}m_n\omega^2 \\ \alpha_{21}m_1\omega^2 & \alpha_{22}m_2\omega^2 - 1 & \dots & \alpha_{2n}m_n\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}m_1\omega^2 & \alpha_{n2}m_2\omega^2 & \dots & \alpha_{nn}m_n\omega^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.118)$$

Soustava má opět netriviální řešení tehdy, jestliže frekvenční determinant, tj. determinant matice soustavy \mathbf{A} , je nulový:

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11}m_1\omega^2 - 1 & \alpha_{12}m_2\omega^2 & \dots & \alpha_{1n}m_n\omega^2 \\ \alpha_{21}m_1\omega^2 & \alpha_{22}m_2\omega^2 - 1 & \dots & \alpha_{2n}m_n\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}m_1\omega^2 & \alpha_{n2}m_2\omega^2 & \dots & \alpha_{nn}m_n\omega^2 - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.119)$$

Hledáme tedy takové úhlové frekvence, pro které má soustava netriviální řešení

$$(\alpha_{11}m_1\omega^2 - 1)(\alpha_{22}m_2\omega^2 - 1) \dots (\alpha_{nn}m_n\omega^2 - 1) + \dots = 0, \quad (6.120)$$

$$\left(\alpha_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \left(\alpha_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}\right) \dots \left(\alpha_{nn}m_n - \frac{1}{\omega^2}\right) + \dots = 0. \quad (6.121)$$

Pro n sudé dostaneme dalšími úpravami rovnici

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n - \alpha_{11}m_1 \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} - \alpha_{22}m_2 \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} - \dots - \alpha_{nn}m_n \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} + \dots = 0,$$

naopak pro n liché dostaneme rovnici

$$-\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n + \alpha_{11}m_1 \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} + \alpha_{22}m_2 \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} + \dots + \alpha_{nn}m_n \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} + \dots = 0.$$

Oba případy tak vedou na následující polynom n -tého stupně, s proměnnou $1/\omega^2$:

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n - (\alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 + \dots + \alpha_{nn}m_n) \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} + \dots = 0. \quad (6.122)$$

Kořeny tohoto polynomu jsou $1/\Omega_1^2, 1/\Omega_2^2, \dots, 1/\Omega_n^2$, kde $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ jsou kritické úhlové frekvence. Pro polynom stupně n , ve tvaru $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, přecházejí Viětovy vzorce do následujících tvarů

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad (6.123)$$

$$(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n) + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad (6.124)$$

$$\vdots \quad (6.125)$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad [26]. \quad (6.126)$$

Stejně jako v případě dvou soustředěných hmot nyní použijeme první z Viětových vzorců

$$\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n^2} = \alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \dots + \alpha_{nn} m_n, \quad (6.127)$$

$$\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_n^2} = \frac{1}{\Omega_{11}^2} + \frac{1}{\Omega_{22}^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_{nn}^2}. \quad (6.128)$$

Seřadíme-li kritické úhlové frekvence dle velikosti, tj.

$$\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_n, \quad (6.129)$$

pak platí, že

$$\frac{1}{\Omega_1^2} \gg \frac{1}{\Omega_2^2} \gg \dots \gg \frac{1}{\Omega_n^2}. \quad (6.130)$$

Rovnici (6.128) pak můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{\Omega_1^2} \approx \frac{1}{\Omega_{11}^2} + \frac{1}{\Omega_{22}^2} + \dots + \frac{1}{\Omega_{nn}^2}, \quad (6.131)$$

$$\frac{1}{\Omega_1^2} \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_{ii}^2}, \quad (6.132)$$

kde Ω_1 je první kritická úhlová frekvence. Získaná rovnice (6.132) bývá v odborné literatuře označována jako *Dunkerleyův vztah* [21]. Z rovnice (6.115) vyplývá, že pro stanovení hodnoty Ω_1 pomocí Dunkerleyova vztahu je klíčová znalost prvků hlavní diagonály matice poddajnosti α sestavené pro konkrétní případ uložení a zatížení nosníku.

Důležitou skutečností je, že v důsledku zanedbání vyšších vlastních frekvencí obdržíme užitím Dunkerleyova vztahu vždy nižší hodnotu Ω_1 , než je hodnota skutečná [21].

6.2.2 Rayleighova energetická metoda

Princip Rayleighovy energetické metody vychází ze zákona zachování mechanické energie v izolované soustavě, který je formulován následovně:

„Působí-li v izolované soustavě pouze konzervativní interakční síly, mění se její kinetická a potenciální energie tak, že jejich součet, tj. mechanická energie soustavy, je stálý. [27]“

O soustavě mluvíme jako o izolované, pokud nikterak neinteraguje s okolím. Konzervativní síly jsou přitom ty síly, jimiž vykonaná práce závisí pouze na počátečním a koncovém stavu. Jak síla tíhová, tak pružná síla jsou síly konzervativní. Označíme-li mechanickou energii soustavy E , kinetickou energii soustavy E_k a potenciální energii soustavy E_p , pak zákon zachování mechanické energie můžeme vyjádřit pomocí rovnice

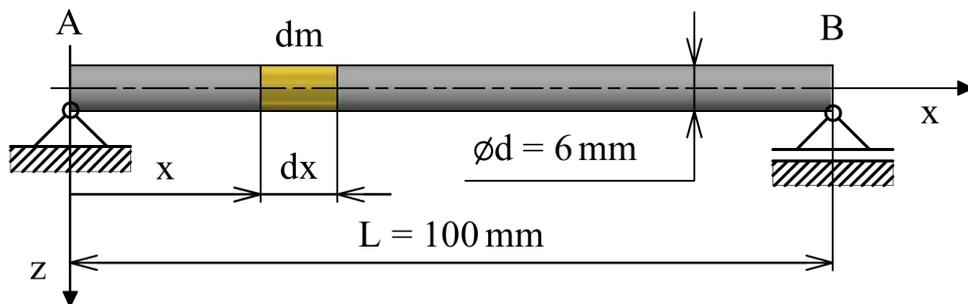
$$E = E_k + E_p = \text{konst.} \quad [27]. \quad (6.133)$$

Uvažujme nyní volné netlumené kmitání mechanické soustavy. Při průchodu rovnovážnou polohou platí, že $E_p = 0$ a $E_k = E_{k,\text{max}}$. V momentě maximálních výchylek naopak platí, že $E_k = 0$ a $E_p = E_{p,\text{max}}$. Má-li celková mechanická energie soustavy mít v libovolném okamžiku konstantní hodnotu, pak z rovnice (6.133) plyne

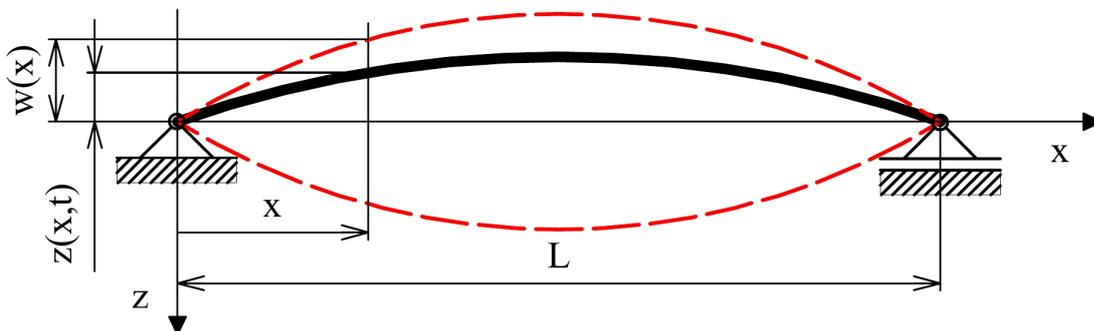
$$E_{k,\text{max}} = E_{p,\text{max}}. \quad (6.134)$$

Rovnice (6.134) je základní rovnicí pro stanovení nejnižší vlastní úhlové frekvence kmitání Ω_1 pomocí Rayleighovy metody [22].

Hledejme nyní vlastní úhlovou frekvenci Ω_1 prostě uloženého nosníku patrného z obrázku 6.24. Uvažováno bude volné netlumené příčné ohybové kmitání, které je schématicky znázorněno dále na obrázku 6.25. Vycházet budeme z [22] a [28].



Obr. 6.24: Rayleighova metoda – prostě uložený nosník.



Obr. 6.25: Rayleighova metoda – příčné kmitání nosníku.

Jak je patrné z obrázku 6.25, libovolný bod střednice nosníku, jehož poloha je dána souřadnicí x , kmitá po přímce kolmé k ose x . Maximální výchylky jsou přitom dány průhybovými čarami $w(x)$. Budeme-li uvažovat harmonický průběh kmitání, pak poloha libovolného bodu střednice v libovolném časovém okamžiku $z(x,t)$ je dána rovnicí

$$z(x,t) = w(x) \sin(\Omega_1 t). \quad (6.135)$$

Okamžitou rychlost libovolného bodu střednice pak obdržíme derivací podle času t , tj.

$$\dot{z}(x, t) = w(x)\Omega_1 \cos(\Omega_1 t). \quad (6.136)$$

Maximální potenciální energie $E_{p,\max}$ odpovídá energii napjatosti ohýbaného nosníku v momentě maximálních výchylek. Dle [28] je proto vyjádřena vztahem

$$E_{p,\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_o^2}{EJ_y} dx = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_y \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (6.137)$$

Pozn: Druhý ze vztahů (6.137) obdržíme dosazením za M_o z diferenciální rovnice průhybové čáry, kterou lze dohledat například v [11].

Při určování kinetické energie vyjdeme z obecně platného vztahu

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm. \quad (6.138)$$

Elementární hmotnost dm lze pro náš případ rozepsat jako

$$dm = \rho dV = \rho S dx. \quad (6.139)$$

Dosadíme-li dále za v amplitudu okamžité rychlosti z rovnice (6.136), pak integrací přes délku nosníku obdržíme následující vztah pro maximální kinetickou energii $E_{k,\max}$

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2} \Omega_1^2 \int_0^L \rho S w(x)^2 dx. \quad (6.140)$$

Porovnáním rovnic (6.137) a (6.140) dostaneme pro první vlastní úhlovou frekvenci vztah

$$\Omega_1^2 = \frac{\int_0^L EJ_y \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho S w(x)^2 dx}. \quad (6.141)$$

Další řešení spočívá v odhadu funkční závislosti pro $w(x)$. Například v [28] je uvažována časově proměnná závislost průhybu $z(x, t)$ ve tvaru

$$z(x, t) = \left(w_0 \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \omega t = Z \sin \omega t. \quad (6.142)$$

Za $w(x)$ dosazujeme do rovnice (6.141) tu ze závislostí $z(x, t)$, která vykazuje maximální výchylky. To odpovídá celému výrazu v závorce, tedy amplitudě Z .

$$w(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (6.143)$$

Dosazením z rovnice (6.143) do rovnice (6.141) a následnou úpravou obdržíme pro Ω_1 prostě uloženého nosníku jednoduchý vztah

$$\Omega_1 = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}}, \quad (6.144)$$

který lze přímo v této podobě naléznout například v [21].

Pozn: Zápís vztahu (6.144) v [28] na první pohled nekoresponduje se zde uvedeným. Příčinou je, že v [28] je symbolu m použito pro značení hmotnosti vztažené na délku nosníku L .

Volba aproximovat průběh $w(x)$ pomocí rovnice (6.143) je obzvláště vhodná, neboť tato rovnice splňuje jak deformační okrajové podmínky (nulové průhyby a nenulová natočení v místě vazeb), tak silové okrajové podmínky (nulové ohybové momenty a nenulové posouvající síly v místě vazeb). Podívejme se, k jakým výsledkům bychom dospěli, pokud bychom se rozhodli průhyb aproximovat například pomocí kvadratické závislosti

$$w(x) = 4w_0 \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right). \quad (6.145)$$

Řešení vede v tomto případě na následující vztah pro Ω_1 :

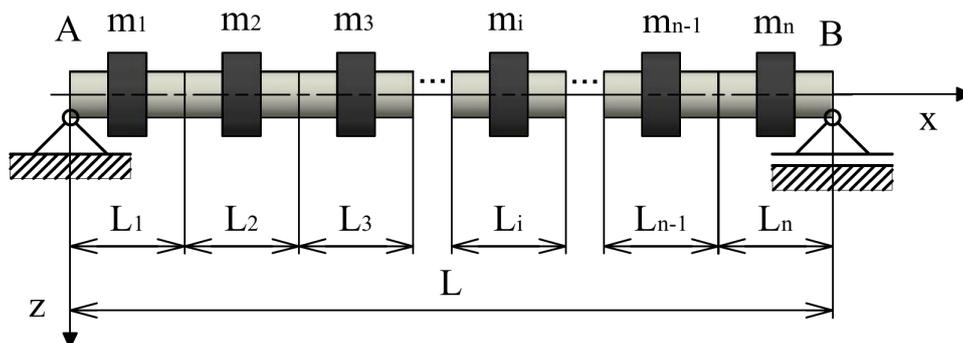
$$\Omega_1 = \frac{3\sqrt{30}}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}}. \quad (6.146)$$

V tabulce 6.2 jsou vypsány hodnoty Ω_1 , získané pomocí odvozených vztahů (6.144) a (6.146), v porovnání s hodnotou získanou pomocí MKP (program Ansys Workbench) při uvažování rozměrů nosníku z obrázku 6.24. Rozdíly mezi analyticky a numericky spočtenými hodnotami Ω_1 jsou vyjádřeny pomocí relativních odchylek. Odtud je patrné, že vztah (6.146) vede k poměrně nepřesným výsledkům. Příčinou této nepřesnosti je, že funkce (6.145), použitá k aproximaci $w(x)$, splňuje pouze deformační okrajové podmínky, kdežto silové okrajové podmínky nespĺňuje. Totéž je demonstrováno v [22] pro případ jednostranně vetknutého nosníku.

Rayleighova metoda		MKP	RSD [%]
Rovnice	Ω_1 [rad·s ⁻¹]	Ω_1 [rad·s ⁻¹]	
(6.144)	7657,1	7435,0	2,08
(6.146)	8498,7		9,44

Tab. 6.2: Kritické úhlové frekvence spojitého nosníku.

Jak bylo právě ukázáno, volba vhodné aproximace funkce $w(x)$ může být problematická. Existuje však zjednodušený postup, který spočívá v diskretizaci nosníku na n úseků ekvivalentní délky L_i s uvažováním, že hmotnost m_i každého úseku je soustředěna v jeho těžišti. Příklad hmotného nosníku je tak převeden na případ nehmotného nosníku s n soustředěnými hmotami, viz obrázek (6.26). Při odvození budeme postupovat dle [22] a [28].



Obr. 6.26: Nehmotný nosník s n hmotami.

Polohu z_i a okamžitou rychlost \dot{z}_i v místě i -té soustředěné hmoty v libovolném čase t můžeme za předpokladu harmonického kmitání vyjádřit pomocí rovnic

$$z_i(t) = w_i \sin(\Omega_1 t), \quad (6.147)$$

$$\dot{z}_i(t) = w_i \Omega_1 \cos(\Omega_1 t). \quad (6.148)$$

Předpokládejme, že průhyby w_i v momentě maximálních výchylek lze aproximovat pomocí průhybů vyvolaných tíhovými silami hmot m_i . Energie napjatosti v momentě maximálních výchylek, představující maximální potenciální energii $E_{p,\max}$, pak odpovídá deformační práci A , kterou vykoná soustava osamělých tíhových sil $F_i = m_i g$ [28]. Pro stanovení deformační práce A lze použít tzv. větu o deformační práci soustavy osamělých sil, která říká následující:

„Působí-li na lineárně pružné těleso soustava Π osamělých sil $\Pi = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ a označíme-li posuvy působišť P_1, P_2, \dots, P_n ve směru nositelek w_1, w_2, \dots, w_n , pak platí

$$A = \frac{1}{2} F_1 w_1 + \frac{1}{2} F_2 w_2 + \dots + \frac{1}{2} F_n w_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i w_i \quad [8].“$$

Odtud plyne pro maximální potenciální energii

$$E_{p,\max} = \frac{1}{2} g (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \dots + m_n w_n) = \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^n m_i w_i. \quad (6.149)$$

Maximální kinetická energie $E_{k,\max}$ je dle [28] dána rovnicí

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2, \quad (6.150)$$

kde rychlosti v_i odpovídají amplitudám $w_i \Omega_1$ z rovnice (6.148). Odtud

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2} \Omega_1^2 (m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 + \dots + m_n w_n^2) = \frac{1}{2} \Omega_1^2 \sum_{i=1}^n m_i w_i^2. \quad (6.151)$$

Dosazením za $E_{p,\max}$ a $E_{k,\max}$ do rovnice (6.134) pak dostaneme následující vzorec pro přibližný výpočet první vlastní úhlové frekvence Ω_1

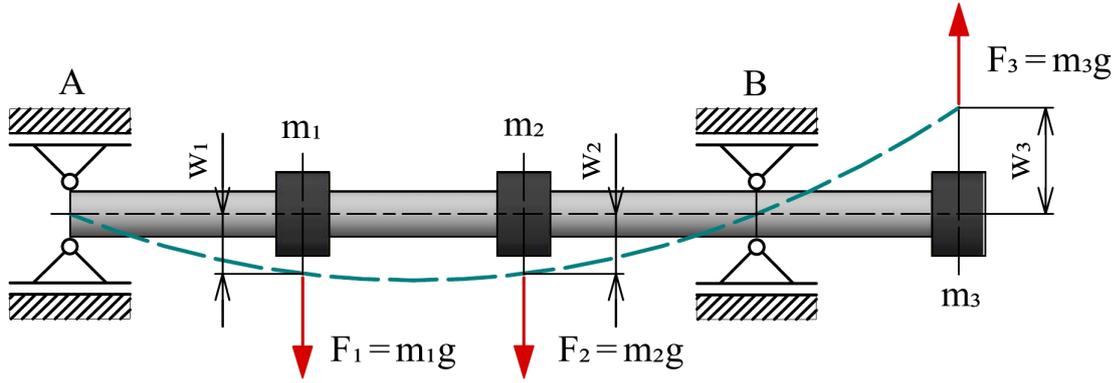
$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^n m_i w_i}{\sum_{i=1}^n m_i w_i^2}}. \quad (6.152)$$

Vztah (6.152) je použitelný pro libovolný případ nehmotného poddajného hřídele s n soustředěnými hmotami. Přibližnost tohoto vztahu přitom spočívá právě v tom, že za w_i dosazujeme statické průhyby vyvolané tíhovými silami těchto hmot [29].

Důležitým faktem je, že s použitím Rayleighovy energetické metody obdržíme vždy vyšší hodnotu Ω_1 , než je hodnota skutečná. Hodnoty Ω_1 stanovené pomocí Rayleighovy metody a Dunkerleyova vztahu tak můžeme vnímat jako hranice intervalu, ve kterém se nachází skutečná hodnota Ω_1 [28, 30].

Letmo uložený hřídel

Při výpočtu první kritické úhlové frekvence Ω_1 letmo uloženého hřídele pomocí Rayleighovy metody je třeba pro výpočet průhybů w_i použít takové zatížení, které vyvolá první vlastní ohybový tvar. V [31] je použito zatížení patrné z obrázku 6.27. Je zde rovněž zdůrazněno, že se nejedná o tíhové síly, ale substitute setrvačných sil [31].



Obr. 6.27: První ohybový vlastní tvar hřídele s letným uložením [31].

Při výpočtu průhybů w_i odstupňovaného hřídele rotoru z obrázku 6.8 použijeme již sestavenou matici poddajnosti α , viz rovnice (6.43). V matici zatížení je však třeba zohlednit, že síla F_{I+1} působí v opačném směru, tj.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_I \\ w_{I+1} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ \vdots \\ m_I g \\ -m_{I+1} g \end{bmatrix}. \quad (6.153)$$

Do vztahu (6.152) dosazujeme velikosti průhybů w_i nezávisle na směru, ve kterém probíhají.

Vliv magnetického tahu

Průhyby w_i , spočtené dle soustavy rovnic (6.153), jsou vyvolány zatížením, které je svojí velikostí úměrné pouze hmotnostem m_i soustředěných hmot. Na hodnoty kritických otáček však může mít podstatný vliv rovněž magnetický tah. Přesnějších výsledků lze docílit, budeme-li při výpočtu průhybů w_i uvažovat zatížení, které je svojí velikostí úměrné rovněž vzniklým magnetickým silám. Tyto průhyby lze získat iterativním řešením dle předpisu (6.59) bez uvažování tahu řemene, tj. $F_r = 0$ N. Je však třeba mít na paměti, že aby uvažované zatížení vyvolalo první vlastní ohybový tvar, síla F_{I+1} na převislém konci hřídele musí působit v opačném směru, tj.

$$\begin{bmatrix} w_1^{(j)} \\ w_2^{(j)} \\ \vdots \\ w_I^{(j)} \\ w_{I+1}^{(j)} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} m_1 g + \frac{C_{mg}}{l} w_1^{(j-1)} \\ m_2 g + \frac{C_{mg}}{l} w_2^{(j-1)} \\ \vdots \\ m_I g + \frac{C_{mg}}{l} w_I^{(j-1)} \\ -m_{I+1} g \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (6.154)$$

$$R^{(j)} = \max \begin{bmatrix} R_1^{(j)} \\ R_2^{(j)} \\ \vdots \\ R_I^{(j)} \\ R_{I+1}^{(j)} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} |w_1^{(j)} - w_1^{(j-1)}| \\ |w_2^{(j)} - w_2^{(j-1)}| \\ \vdots \\ |w_I^{(j)} - w_I^{(j-1)}| \\ |w_{I+1}^{(j)} - w_{I+1}^{(j-1)}| \end{bmatrix}.$$

V první iteraci dosadíme za $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_I^{(0)}$ průhyby spočtené ze soustavy rovnic (6.153). Řešení probíhá v cyklech v mezích určených zvolenými hodnotami R_{\min} a J_{\max} .

- vůle mezi rotorem a statorem δ [mm],
- počet dělení I úseku zatíženého hmotností m_p ,
- tíhové zrychlení g [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$],
- modul pružnosti v tahu E [MPa] materiálu hřídele,
- magnetická tuhost C_{mg} [$\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$].
- parametry iterativního řešení průhybu, tj. maximální počet iterací J_{\max} [-] a požadovaná přesnost R_{\min} [mm].

Řešení:

V první fázi řešení program rozdělí úsek zatížený hmotností m_p na I ekvidistantních úseků délky L_i . Hmotnost řemenice $m_r = m_{I+1}$. Hmotnost paketu rotoru m_p je rovnoměrně rozložena do soustředěných zátěžných hmot $m_1 = m_2 = \dots = m_i = \dots = m_I$, viz obrázek 6.28. Analogicky je po tomto úseku rozdistributedována rovněž zadaná magnetická tuhost C_{mg} . Dle rovnic odvozených v podkapitole 6.1.2 program automaticky vygeneruje matici ekvivalentních momentů setrvačnosti \mathbf{J} a následně matici poddajnosti $\boldsymbol{\alpha}$ ve tvaru (6.43). Řešením soustavy rovnic (6.45) jsou následně vyhodnoceny statické průhyby v polohách soustředěných hmot. Průhyby za provozu, tj. se zahrnutím magnetického tahu a tahu řemene, jsou získány iterativním řešením dle předpisu (6.59). Průhyby spočtené v rámci jednotlivých iterací jsou zapisovány do sloupců matice \mathbf{w}_j . První sloupec matice \mathbf{w}_j obsahuje již spočtené statické průhyby

$$\mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} w_{st1} & w_1^{(1)} & w_1^{(2)} & \dots & w_1^{(j)} & \dots & w_1^{(j-1)} & w_1^{(j)} \\ w_{st2} & w_2^{(1)} & w_2^{(2)} & \dots & w_2^{(j)} & \dots & w_2^{(j-1)} & w_2^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ w_{stI} & w_I^{(1)} & w_I^{(2)} & \dots & w_I^{(j)} & \dots & w_I^{(j-1)} & w_I^{(j)} \\ w_{stI+1} & w_{I+1}^{(1)} & w_{I+1}^{(2)} & \dots & w_{I+1}^{(j)} & \dots & w_{I+1}^{(j-1)} & w_{I+1}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (6.155)$$

Obdobným způsobem jsou do matice \mathbf{F}_j zapisovány vektory zátěžných sil v jednotlivých iteracích. První sloupec matice \mathbf{F}_j obsahuje tíhové síly od soustředěných zátěžných hmot

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} F_{G1} & F_1^{(1)} & F_1^{(2)} & \dots & F_1^{(j)} & \dots & F_1^{(j-1)} & F_1^{(j)} \\ F_{G2} & F_2^{(1)} & F_2^{(2)} & \dots & F_2^{(j)} & \dots & F_2^{(j-1)} & F_2^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_{GI} & F_I^{(1)} & F_I^{(2)} & \dots & F_I^{(j)} & \dots & F_I^{(j-1)} & F_I^{(j)} \\ F_{GI+1} & F_{I+1}^{(1)} & F_{I+1}^{(2)} & \dots & F_{I+1}^{(j)} & \dots & F_{I+1}^{(j-1)} & F_{I+1}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (6.156)$$

Následně je stanovena hodnota maximálního průhybu w_{ex} na úseku zatíženém hmotností m_p .

$$w_{ex} = \max \left(|w_1^{(j)}|, |w_2^{(j)}|, \dots, |w_I^{(j)}| \right) \quad (6.157)$$

Dle poměru hodnot w_{ex} a δ se rozhodne, zda dochází či nedochází k vymezení vůle mezi rotorem a statorem. Hřídel je poté zatížen silami

$$\begin{bmatrix} F_1^{(j)} \\ F_2^{(j)} \\ \vdots \\ F_I^{(j)} \\ F_{I+1}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g + \frac{C_{mg}}{I} w_1^{(j-1)} \\ m_2 g + \frac{C_{mg}}{I} w_2^{(j-1)} \\ \vdots \\ m_I g + \frac{C_{mg}}{I} w_I^{(j-1)} \\ m_{I+1} g + F_r \end{bmatrix} \quad (6.158)$$

a dle rovnic z podkapitoly 6.1.4 jsou vyhodnocena nominální napětí σ_{nom} a τ_{nom} v polohách soustředěných hmot mezi ložisky a místech skokové změny příčného průřezu (osazení), která mohou být dále použita k posouzení MSÚP pomocí koncepce nominálních napětí. Následuje přibližné stanovení prvních kritických otáček n_1 pomocí Dunkerleyova vztahu a Rayleighovy energetické metody, které jsou podrobně popsány v kapitole 6.2.

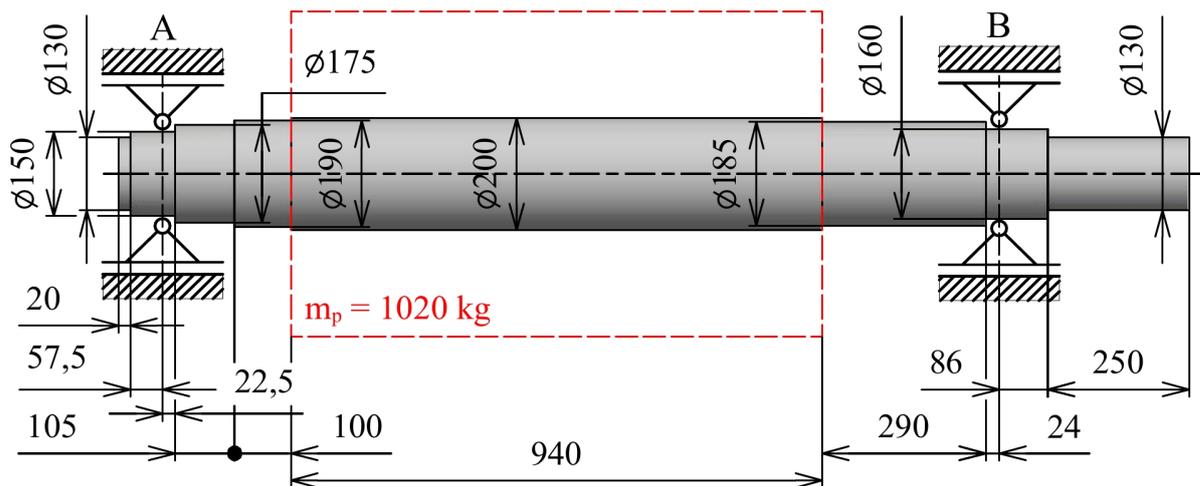
Výstupy programu:

- Vykreslené hodnoty statických průhybů a průhybů za provozu v polohách soustředěných hmot. V „Command Window“ se vypíše hodnota maximálního průhybu w_{ex} [mm], doplněná o informaci, zda dochází k vymezení vůle δ mezi rotorem a statorem, či nikoliv.
- Průběh ohybového momentu M_o [N·mm] a vykreslené hodnoty nominálních normálových napětí σ_{nom} [MPa].
- Průběh krouticího momentu M_k [N·mm] a vykreslené hodnoty nominálních smykových napětí τ_{nom} [MPa].
- Vypis hodnot prvních kritických otáček n_1 [ot·min⁻¹], stanovených pomocí Dunkerleyova vztahu a Rayleighovy energetické metody bez zahrnutí magnetického tahu a dále pomocí Rayleighovy energetické metody se zahrnutím magnetického tahu.

V případě divergence iterativního řešení průhybu v důsledku příliš vysoké hodnoty magnetické tuhosti C_{mg} je uživatel upozorněn chybovým hlášením v „Command Window“.

6.3.1 Zhodnocení výsledků pro konkrétní případ rotoru

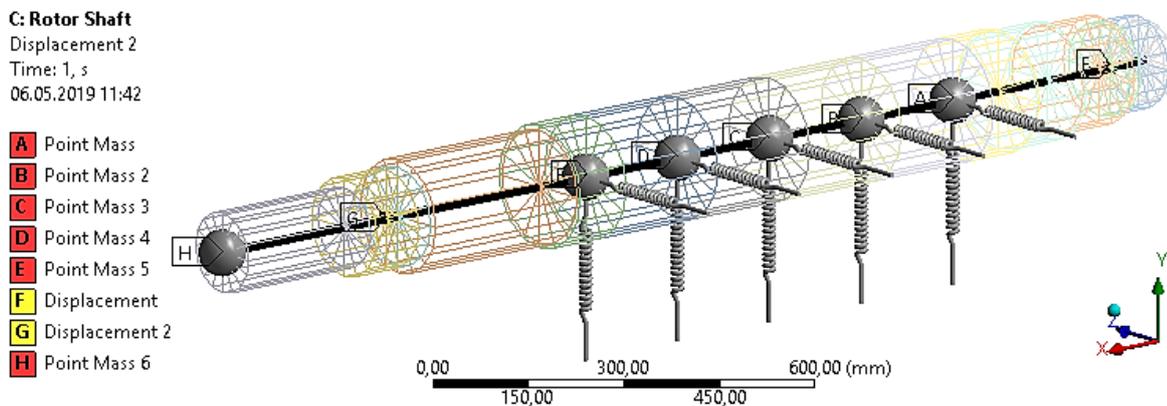
Cílem v této podkapitole je demonstrovat použití modelu ohybově poddajného rotoru úrovně 1 na konkrétním příkladě. Uvažován bude model geometrie rotoru elektromotoru převzatý z [7]. Rozměry včetně hmotnosti paketu rotoru m_p jsou patrné z obrázku 6.30. Model materiálu hřídele je dán hodnotami $E = 210\,000$ MPa, $\mu = 0,3$ a $\rho = 7850$ kg·m⁻³. Magnetický tah je zadán hodnotou magnetické tuhosti $C_{mg} = 10^5$ N·mm⁻¹.



Obr. 6.30: Model rotoru elektromotoru (vychází z [7]).

Z demonstrativních důvodů byl model geometrie rotoru dále doplněn o řemenici s uvažovanou hmotností $m_r = 80$ kg a průměrem $d_r = 600$ mm. Zatížení bylo doplněno o krouticí moment $M_r = 2 \cdot 10^6$ N·mm a tah řemene F_r . Působení tahu řemene je uvažováno v kladném směru osy z (zadána kladná hodnota, stanovená přepočtem dle vztahu (6.61)).

Pro účely srovnání výsledků bylo řešení provedeno rovněž s použitím MKP, v programu Ansys Workbench. Rotor byl modelován pomocí prvků typu BEAM188. Hmotnost m_p byla rovnoměrně přerozdělena do pěti hmotných bodů, tj. prvků MASS21, jak je patrné z obrázku 6.31. Stejným způsobem byl po úseku rozložen magnetický tah. Pro tyto účely byly použity prvky typu COMBIN14 se zadáním záporné tuhosti $k = -C_{mg}/5 = -20000\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$.



Obr. 6.31: Model rotoru elektromotoru v programu Ansys Workbench.

Vstupní parametry:

Způsob zadání vstupních parametrů do programu *Ohybove_Poddajny_Rotor.m* je patrný níže. Zdůrazněme, že model úrovně 1 považuje hřídel za nehmotný, zatímco model rotoru v MKP hmotnost hřídele zohledňuje. Výpočet lze provést konzervativním přístupem tak, že hmotnost paketu rotoru m_p navýšíme o hmotnost hřídele mezi ložisky dosahující hodnoty 342 kg. Rozměry hřídele je třeba zadat dle obrázku 6.28. Počet dělení byl zvolen $I = 5$.

```

1 %% VSTUPNÍ PARAMETRY
2
3 % Hmotnost paketu rotoru: mp [kg]; Hmotnost řemenice: mr [kg]
4 mp = 1020+342;   mr = 80;
5 % Tah řemene Fr [N]; Kroutící moment Mr [Nmm];
6 Fr = 2e6/600;   Mr = 2e6;
7
8 % Délky úseků [mm];           Průměry příčných průřezů [mm]
9 % a = [a1;...;an;...;a(N-1)]; da = [da1;...;dan;...;da(N-1)];
10 a = [22.5; 127.5; 227.5];     da = [150; 175; 190];
11 % b = [b1;...;bm;...;b(M-1)]; db = [db1;...;dbm;...;db(M-1)];
12 b = [24; 314];               db = [160; 185];
13 % c = [c1;...;ck;...;cK];     dc = [dc1;...;dck;...;dcK];
14 c = [250; 336];             dc = [130; 160];
15
16 % Rozpětí ložisek: L [mm]
17 L = 1481.5;
18 % Průměr: daN=dbM=dN [mm];     Vnitřní průměr hřídele: dint [mm]
19 dN = 200;                       dint = 0;
20 % Vůle mezi rotorem a statorem: delta [mm]
21 delta = 5;

```

```

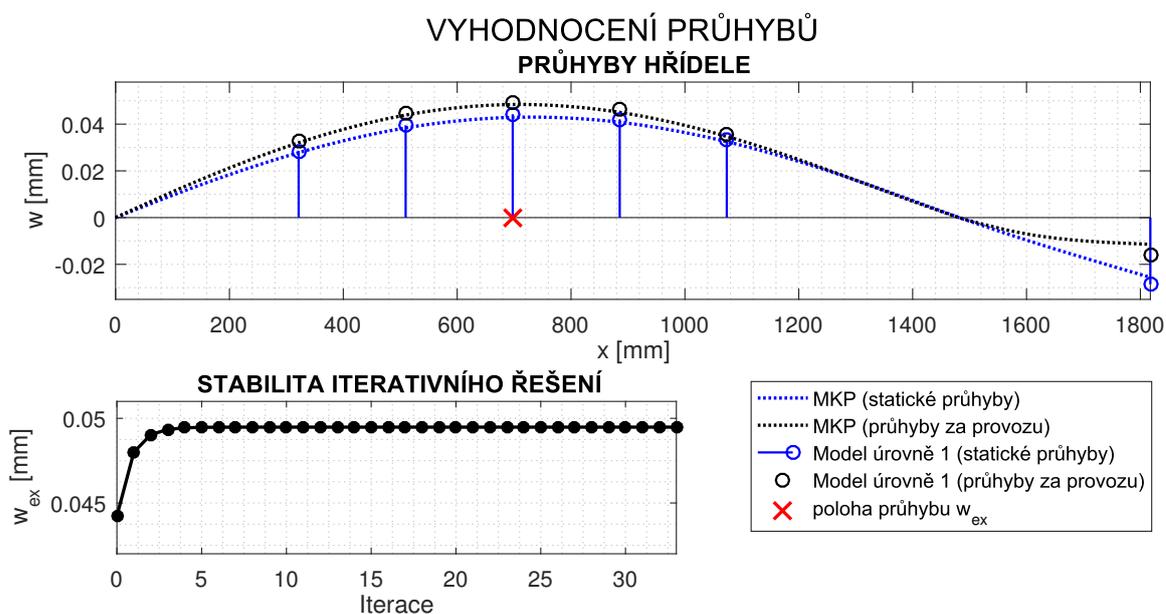
24 % Počet dělení úseku zatíženého hmotnostmi mp: I [-]
25 I = 5;
26 % Tíhové zrychlení: g [m/s^2]
27 g = 9.81;
28 % Modul pružnosti v tahu: E [MPa]
29 E = 210000;
30 % Magnetická tuhost: Cmg [N/mm]
31 Cmg = 1e5;
32 % Maximální počet iterací: Jmax [-]
33 % Minimální reziruum (požadovaná přesnost): Rmin [mm]
34 Jmax = 1000;    Rmin = 1e-50;

```

Výstupy programu:

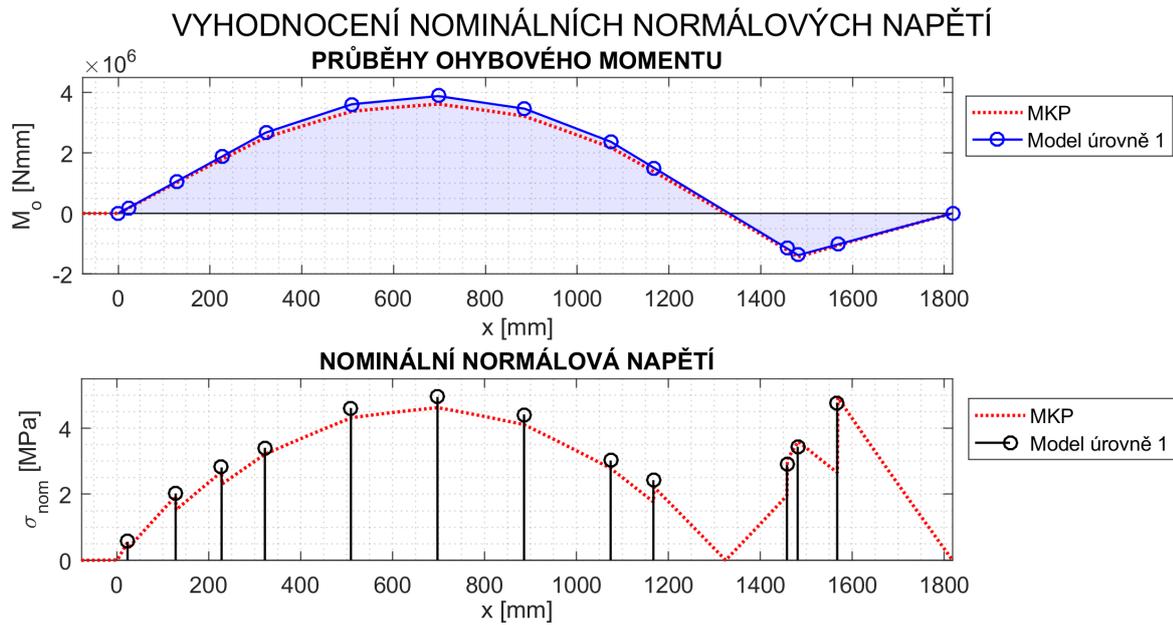
Na obrázku 6.32 jsou vykresleny získané hodnoty průhybů v polohách soustředěných hmot v porovnání s řešením pomocí MKP. Výstupem jsou jak statické průhyby, tak průhyby za provozu, tj. se zahrnutím magnetického tahu a tahu řemene. Maximální průhyb w_{ex} mezi ložisky, stanovený pomocí modelu úrovně 1, se nachází v poloze $x = 698$ mm a dosahuje hodnoty 0,049 mm. Přesnost stanovení hodnoty průhybu w_{ex} a jeho polohy x závisí na zvoleném počtu dělení I , jak je patrné z tabulky 6.3. Z obrázku 6.32 je rovněž patrné, že iterativním řešením bylo dosaženo požadované přesnosti R_{min} po 33 iteracích.

Na obrázcích 6.33 a 6.34 jsou vykresleny průběhy ohybového a kroutícího momentu a hodnoty nominálních napětí σ_{nom} v τ_{nom} rovněž v porovnání s řešením pomocí MKP. Zdůrazněme, že zatímco smyková napětí τ_{nom} jsou v čase konstantní, normálová napětí σ_{nom} jsou v daném místě průřezu periodicky proměnlivá v čase se souměrným střídavým cyklem. Z obrázků je patrné, že kritické místo z hlediska MSÚP se nachází v poloze C_1 , tj. v poloze krajního osazení na převislém konci (značení poloh osazení, viz obrázek (6.15)). Nominální napětí v místech A_1 , B_1 a $C_k = C_2$ je třeba brát s rezervou. Napjatost v těchto oblastech se může lišit v závislosti na reálném provedení uložení.

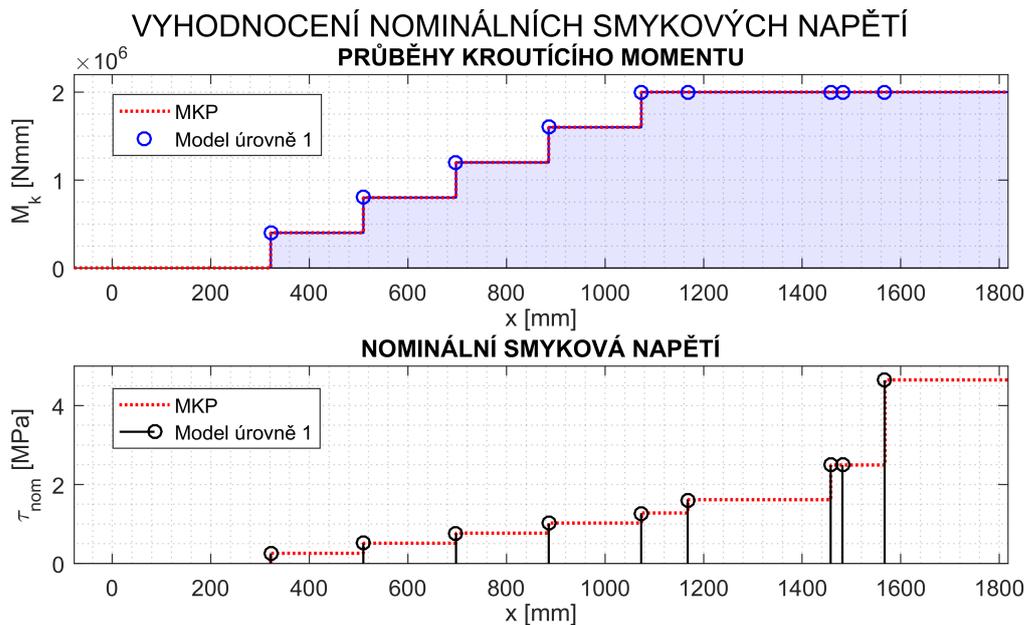


Obr. 6.32: Průhyby hřídele elektromotoru.

I	Model úrovně 1		MKP		RSD [%]	
	w_{ex} [mm]	x [mm]	w_{ex} [mm]	x [mm]	w_{ex}	x
1	0,07448	697,5	0,04842	707,5	30,0	1,00
5	0,04948	697,5			1,53	1,00
20	0,04892	721,0			0,73	1,34
100	0,04890	711,6			0,70	0,41

Tab. 6.3: Přesnost stanovení maximálního průhybu w_{ex} .

Obr. 6.33: Nominální normálová napětí hřídele elektromotoru.



Obr. 6.34: Nominální smyková napětí hřídele elektromotoru.

V tabulce 6.4 jsou vypsány hodnoty prvních kritických otáček n_1 získané s použitím Dunkerleyova vztahu a Rayleighovy energetické metody. Hodnoty získané pomocí MKP, s použitím modelu z obrázku 6.31, vystihuje s větší přesností Rayleighova metoda.

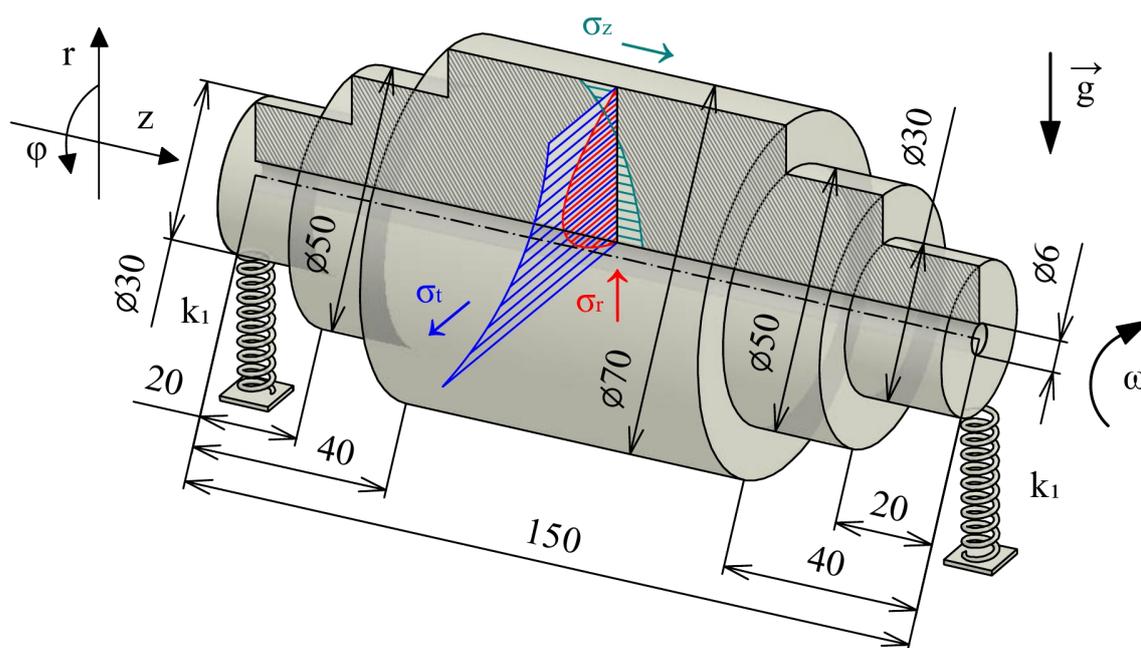
Vliv C_{mg}	Model úrovně 1		MKP	RSD [%]
	Metoda Řešení	n_1 [ot·min ⁻¹]	n_1 [ot·min ⁻¹]	
Ne	Dunkerleyův vztah	4286,4	4652,1	5,79
	Rayleighova metoda	4592,7		0,91
Ano	Rayleighova metoda	3835,9	3852,8	0,31

Tab. 6.4: Přibližné stanovení prvních kritických otáček n_1 .

7 Modelování ohybově tuhého rotoru na úrovni 1

V kapitole 6 byl sestaven zjednodušený model ohybově paddajného rotoru tvořený nehmotným paddajným odstupňovaným hřídelem se soustředěnými hmotami. Použití tohoto zjednodušeného modelu je omezeno na běžné rotory elektrických strojů sestavené z odstupňovaného hřídele, paketu rotorových plechů, klece a dalších dílčích komponent. V současné době se lze rovněž setkat s vysokootáčkovými elektrickými stroji s masivními rotory, pro které je typické, že hřídel a paket rotorových plechů je zhotoven z jednoho kompaktního kusu materiálu. Různá konstrukční provedení masivních rotorů jsou dohledatelná v [32].

V rámci této kapitoly je cílem sestavit zjednodušený výpočtový model masivního rotoru uloženého na pružných podporách, jehož chování bude popsáno pomocí jednoduchých rovnic. Pro demonstrativní účely bude použit model geometrie masivního rotoru patrný z obrázku 7.1, kde tuhost podpor $k_1 = 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$. Magnetický tah, působící na středový úsek rotoru, bude zadán hodnotou magnetické tuhosti $C_{mg} = 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$. Uvažovaným materiálem bude běžná konstrukční ocel (materiálové charakteristiky viz tabulka 6.1).



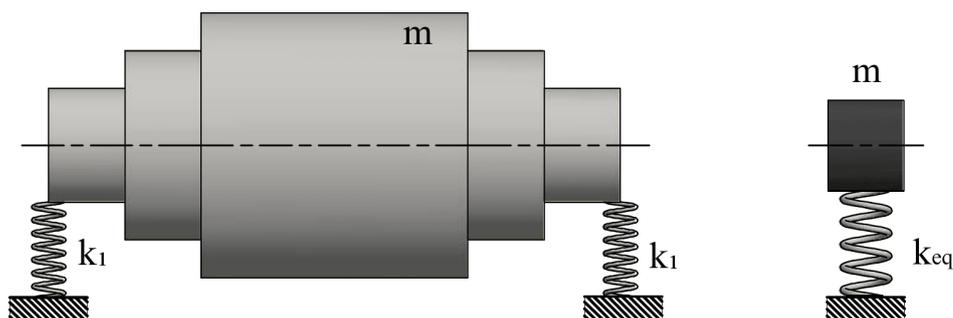
Obr. 7.1: Zjednodušený model geometrie masivního rotoru.

Uvažujme, že rotor z obrázku 7.1 se nachází za klidového stavu ($\omega = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) v tíhovém poli Země. Maximální deformační posuv ve středu rotoru je úměrný tuhosti rotoru k a tuhostem pružných podpor k_1 . V případě masivních rotorů bohužel nelze stanovit tuhost k analyticky, jako v případě štíhlých hřídelů. Hodnoty k masivních rotorů však často bývají významně vyšší oproti tuhostem k_1 . Na základě této skutečnosti budeme nadále rotor modelovat jako dokonale ohybově tuhý. Chyby, kterých se v důsledku tohoto předpokladu dopustíme, budou pro případ rotoru z obrázku 7.1 vyhodnoceny pomocí relativních odchylek v porovnání s řešením pomocí MKP v programu Ansys Workbench.

7.1 Ekvivalentní tuhost rotoru

Považujeme-li vyšetřované masivní rotory za dokonale ohybově tuhé, pak celková tuhost soustavy závisí pouze na tuhosti pružných podpor k_1 . Je-li dále model geometrie rotoru symetrický vůči uložení, pak lze vyšetřovat jeho chování v pružném uložení pomocí zjednodušeného redukováného modelu patrného z obrázku 7.2, tj. soustředěné hmoty m , odpovídající hmotnosti rotoru, uložené na pružině o ekvivalentní tuhosti k_{eq} , pro kterou z [33] plyne vztah

$$k_{eq} = 2k_1. \quad (7.1)$$



Obr. 7.2: Ekvivalentní tuhost ohybově tuhého rotoru.

Pro uvažovaný model rotoru z obrázku 7.1 je $m = 2,92 \text{ kg}$ a $k_{eq} = 2 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$.

7.1.1 Posuv rotoru v důsledku deformace pružných podpor

Uvažujme zjednodušený model ohybově tuhého rotoru z obrázku 7.2. Za provozu působí na tuhý rotor, reprezentovaný hmotou m , tíhová síla $F_G = mg$, magnetický tah $F_{mg} = C_{mg}u$ a v opačném směru působící pružná síla $F_k = k_{eq}u$, kde u je stlačení pružných podpor. Je-li splněna podmínka $C_{mg} < k_{eq}$, viz kapitola 3, pak silová soustava dospěje při určité hodnotě u_k do statické rovnováhy. Hodnota u_k představuje posunutí rotoru jako ohybově tuhého celku, v důsledku deformace pružných podpor. Posuv u_k se společně s radiálním posuvem u_r , který je vyvolán setrvačnými objemovými silami od rotace (dále viz podkapitola 7.2), podílí na vymezení vůle δ mezi rotorem a statorem. Z podmínky statické rovnováhy, sestavené pro uvolněnou hmotu m , obdržíme pro posuv u_k následující vztah

$$u_k = \frac{mg}{k_{eq} - C_{mg}}. \quad (7.2)$$

	u_k [mm]	RSD [%]
Ohybově tuhý rotor (vztah (7.2))	$1,44 \cdot 10^{-4}$	12,75
Poddajný rotor (MKP)	$1,72 \cdot 10^{-4}$	

Tab. 7.1: Posuv u_k rotoru z obrázku 7.1.

V tabulce 7.1 jsou vyhodnoceny posuvy u_k pro model rotoru z obrázku 7.1. Hodnota u_k , získaná pomocí MKP, zohledňuje rovněž tuhost rotoru k . Odtud je patrné, že při uvažování dokonale ohybově tuhého rotoru obdržíme hodnotu u_k o 12,75 % nižší.

7.1.2 Přibližné stanovení prvních kritických otáček

Při hledání první kritické úhlové frekvence Ω_1 vyjdeme z podmínky silové rovnováhy při krouživém hmitání. Jedná se o přístup popsáný v kapitole 6.2, viz rovnice (6.97). Tuhost hřídele k v rovnici (6.97) nahradíme tuhostí k_{eq} . Rovnici dále rozšíříme o magnetický tah, tj. dostaneme

$$m_1 u \omega^2 + C_{mg} u - k_{eq} u = 0, \quad (7.3)$$

$$(m_1 \omega^2 + C_{mg} - k_{eq}) u = 0. \quad (7.4)$$

Rovnice (7.4) má netriviální řešení tehdy, jestliže výraz v závorce je roven nule, tj.

$$m_1 \omega^2 + C_{mg} - k_{eq} = 0. \quad (7.5)$$

Stlačení pružných podpor u pak může nabývat libovolně vysoké hodnoty. Úhlová frekvence ω vyjádřená z podmínky (7.5) odpovídá hledané první kritické úhlové frekvenci Ω_1

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_{eq} - C_{mg}}{m}}. \quad (7.6)$$

Pro model rotoru z obrázku 7.1 byla s použitím MKP v programu Ansys Workbench provedena modální analýza. Získaná hodnota první kritické úhlové frekvence Ω_1 pro dopřednou precesi je v tabulce 7.2 srovnána s hodnotou získanou pomocí vztahu (7.6). Odtud je patrné, že hodnota Ω_1 získaná s uvažováním ohybově tuhého rotoru je o 5,72 % vyšší.

	Ω_1 [rad·s ⁻¹]	RSD [%]
Ohybově tuhý rotor (vztah (7.6))	8255,5	5,72
Poddajný rotor (MKP)	7613,5	

Tab. 7.2: První kritická úhlová frekvence Ω_1 rotoru z obrázku 7.1.

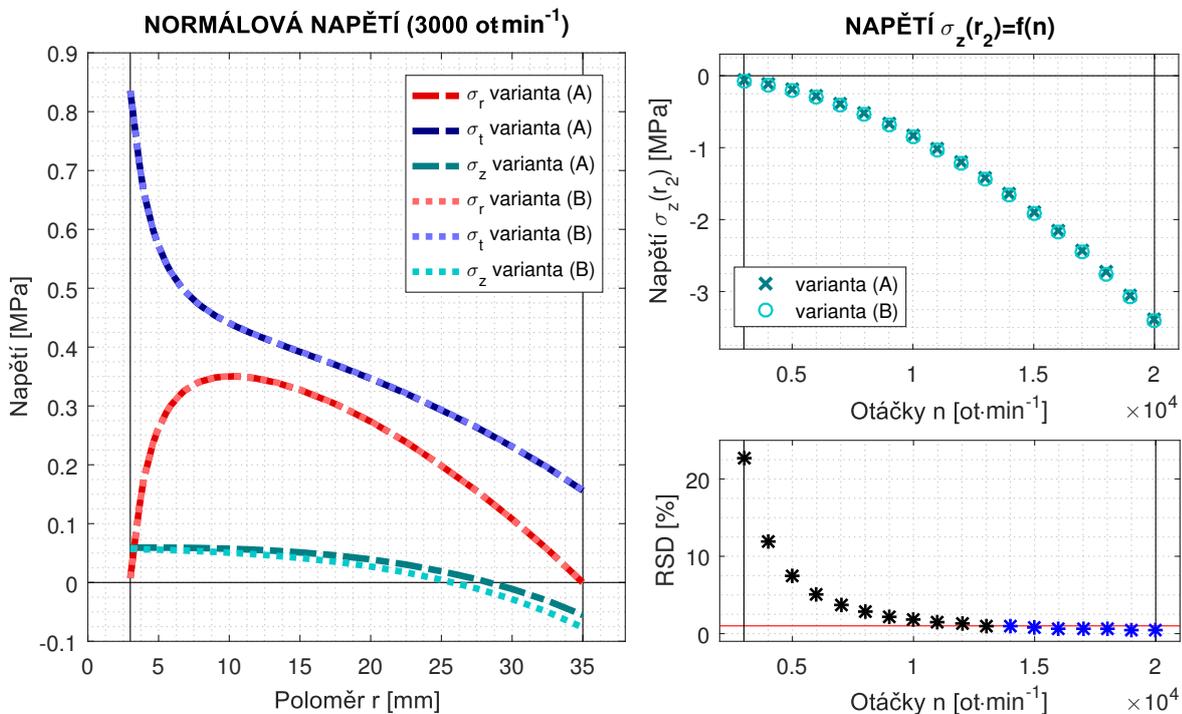
7.2 Deformačně-napět'ový stav rotoru

Podstatným zatížením vysokorychlostních masivních rotorů je zatížení setrvačnými objemovými silami od rotace. Jelikož velikost těchto sil je úměrná kvadrátu vzdálenosti od osy rotace, extrémy napětí a radiálních posuvů, vyvolané těmito silami, budou situovány v oblasti úseku s největším vnějším průměrem. V případě rotoru z obrázku 7.1 se jedná o úsek s mezikruhovým příčným průřezem o vnitřním poloměru $r_1 = 3$ mm a vnějším poloměru $r_2 = 35$ mm. Pro popis napjatosti a deformace na tomto úseku zavedeme cylindrický souřadný systém z, r, φ , viz obrázek 7.1. Snahou v této podkapitole bude analyticky aproximovat průběhy normálových napětí v tomto souřadném systému (tj. průběhy radiálního napětí $\sigma_r(r)$, tangenciálního napětí $\sigma_t(r)$ a axiálního napětí $\sigma_z(r)$, které jsou schématicky znázorněny na obrázku 7.1), průběh redukovaného napětí $\sigma_{red}(r)$ a radiálního posuvu $u_r(r)$. Z praktického hlediska je přitom klíčové přibližné stanovení hodnoty redukovaného napětí σ_{red} v kritickém místě, které se nachází v poloze $r = r_1$, a hodnoty radiálního posuvu $u_r(r_2)$, který se společně s posuvem u_k podílí na vymezení vůle mezi rotorem a statorem. V případě řešení pomocí MKP budou zkoumané průběhy napětí a deformace vyhodnocovány podél předem definované cesty, která leží v průsečnici meridiánového řezu a radiálního řezu totožného s rovinou symetrie zkoumaného úseku.

Napjatost a deformace uvažovaného rotoru je vyvolána současným působením setrvačných objemových sil od rotace, tíhových sil a vzniklého magnetického tahu. Pro model geometrie rotoru z obrázku 7.1 byla pomocí MKP v prostředí programu Ansys Workbench provedena statická strukturální analýza pro dva případy uložení a zatížení.

- (A) Rotor je uložen na pružných podporách o tuhosti k_1 . Uvažováno zatížení tíhovým zrychlením $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a setrvačnými objemovými silami od rotace. Při uvažovaném zatížení a uložení vzniká nenulový magnetický tah.
- (B) Rotor uložen na dokonale tuhých podporách. Uvažováno pouze zatížení setrvačnými objemovými silami od rotace. Magnetický tah je při uvažovaném zatížení nulový.

V obou případech byly rotoru předepsány otáčky $3000 \text{ ot}\cdot\text{min}^{-1}$. Na obrázku 7.3 vlevo jsou vykresleny získané průběhy normálových napětí. Odtud je patrné, že zatížení vlastní tíhou nemá podstatný vliv na průběhy radiálního a tangenciálního napětí. Průběhy axiálního napětí se však postupně rozcházejí směrem k vnějšímu povrchu ($r = r_2$), kde rozdíl mezi hodnotami napětí σ_z dosahuje maxima. Relativní odchylka hodnot σ_z činí v tomto místě 22,7%. Podstatnou otázkou je, jak se bude situace měnit při zvyšujících se otáčkách. Pro oba uvažované způsoby uložení a zatížení byla proto provedena parametrická statická strukturální analýza. Otáčky, jakožto vstupní parametr, byly postupně navyšovány o hodnotu $1000 \text{ ot}\cdot\text{min}^{-1}$ v intervalu $(3000 \div 20000) \text{ ot}\cdot\text{min}^{-1}$. Sledovanými výstupními parametry byly extrémní hodnoty napětí $\sigma_z(r_2)$, které jsou v závislosti na otáčkách vykresleny na obrázku 7.3 vpravo. Rozdíl mezi příslušnými hodnotami $\sigma_z(r_2)$ činí nezávisle na otáčkách 0,021 MPa. Jedná se o příspěvek od ohybu, který je vyvolán působením tíhových sil a magnetického tahu. S rostoucími otáčkami se tento příspěvek napětí stává nepodstatným, což potvrzují rovněž níže vykreslené hodnoty relativních odchylek. Již při otáčkách $14000 \text{ ot}\cdot\text{min}^{-1}$ je relativní odchylka menší než 1%.

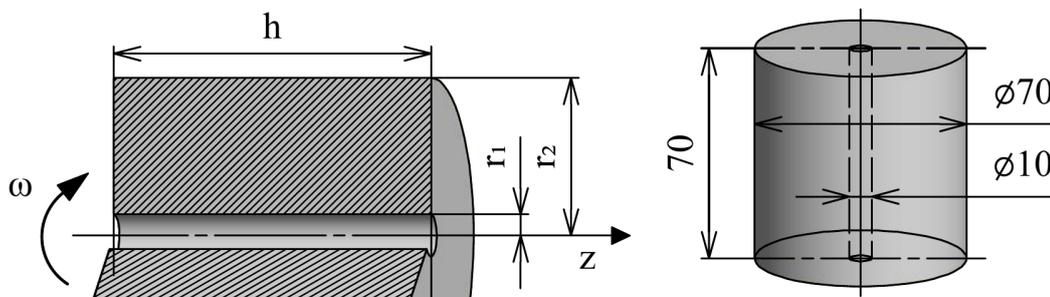


Obr. 7.3: Průběhy hlavních napětí σ_r , σ_t a σ_z .

Masivní rotory jsou používány zejména pro vysokootáčkové stroje. V důsledku toho budeme nadále uvažovat variantu uložení a zatížení (B), která umožňuje vyšetřovat zkoumané průběhy

napětí a deformace v libovolném meridiánovém řezu. Tato skutečnost nás opravňuje řešit úlohu pomocí MKP jako 2D rotačně symetrickou.

Zjednodušíme úlohu dále tím, že budeme modelovat pouze vyšetřovaný úsek rotoru. Použitým modelem geometrie bude rotující válcové těleso patrné z obrázku (7.4). Do jaké míry je tento (značně zjednodušený) model geometrie pro analýzu vyšetřovaných závislostí postačující, bude předmětem následné diskuze.

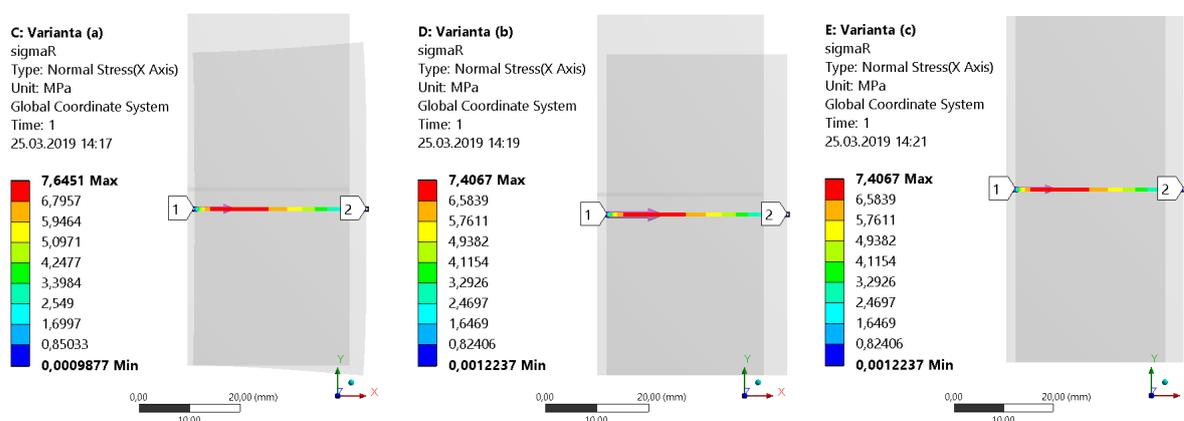


Obr. 7.4: Rotující válcové těleso.

Rotující válcové těleso bylo řešeno pomocí MKP v programu Ansys Workbench jako úloha 2D rotačně symetrická, a to pro tři různé varianty okrajových podmínek.

- Volně deformující se rotující válcové těleso, s omezeným axiálním posuvem v jediném bodě. Přetvoření $\varepsilon_z(r, z)$ v tomto případě proměnné.
- Rotující válcové těleso se svázanými axiálními posuvy uzlů náležících podstavám. Podstavy setrvávají během deformace rovinné a přetvoření $\varepsilon_z(r, z)$ je konstantní.
- Rotující válcové těleso se zamezenými axiálními posuvy podstav. Přetvoření $\varepsilon_z(r, z)$ je v případě těchto okrajových podmínek nulové.

Způsoby, jakými se uvažovaná válcová tělesa deformují, lze vidět na obrázku 7.5. Z tohoto obrázku jsou rovněž patrné definované cesty, ze kterých byly odečítány hledané hodnoty napětí a radiálních posuvů. Ve všech případech byly předepsány otáčky $14000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$.

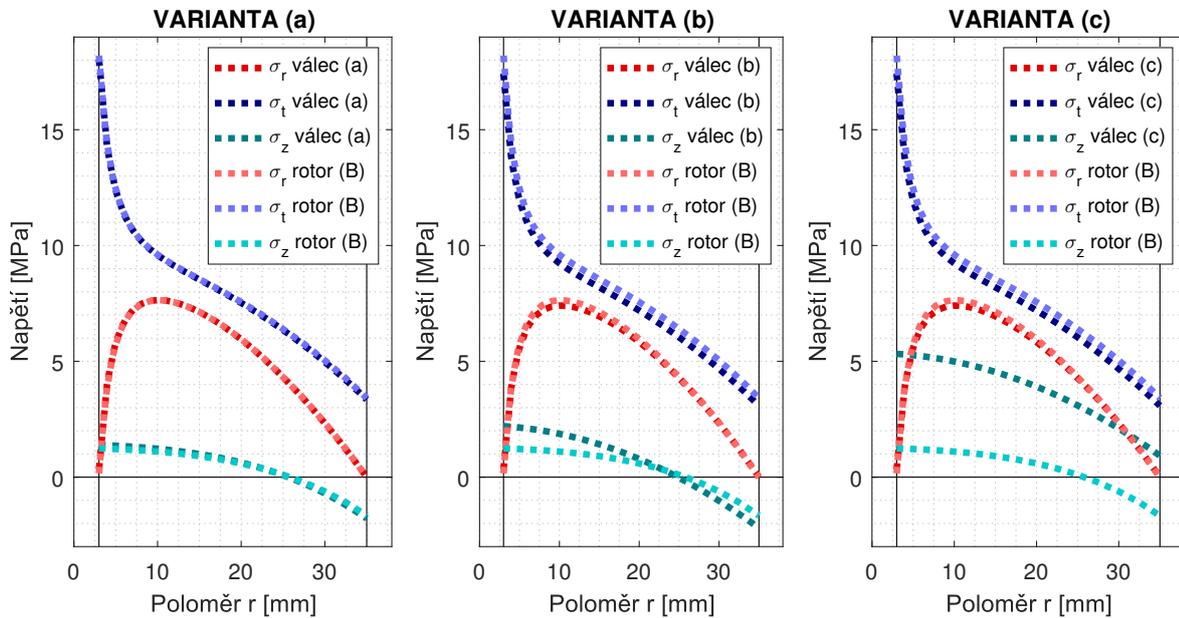


Obr. 7.5: Radiální napětí válcového tělesa při různých okrajových podmínkách.

Průběhy normálových napětí získané s použitím různých modelů válcových těles jsou na obrázku 7.6 srovnány s průběhy získanými pomocí 3D modelu geometrie rotoru z obrázku

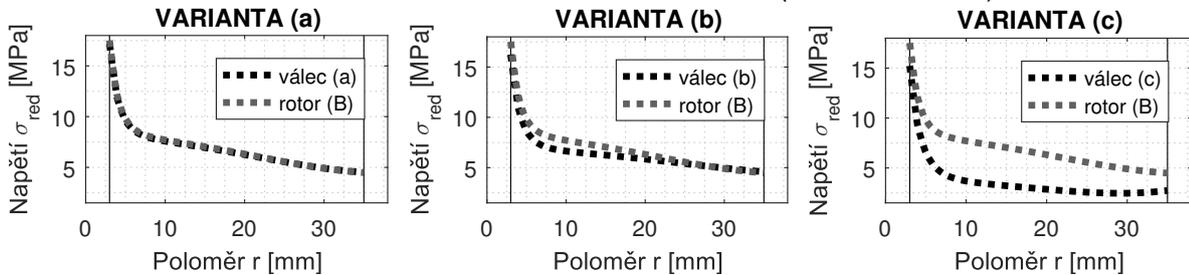
7.1 pro variantu zatížení a uložení (B). Stejným způsobem jsou dále na obrázcích 7.7 a 7.8 srovnány průběhy redukovaných napětí (stanovených dle podmínky HMH – „Equivalent von Mises“) a radiálních posuvů. V tabulce 7.3 jsou pak vyhodnoceny relativní odchylky hodnot $u_r(r_2)$, $\sigma_{red}(r_1)$ a hodnot normálových napětí v polohách r , ve kterých dosahují extrémů.

PRŮBĚHY NORMÁLOVÝCH NAPĚTÍ (14000 otmin⁻¹)



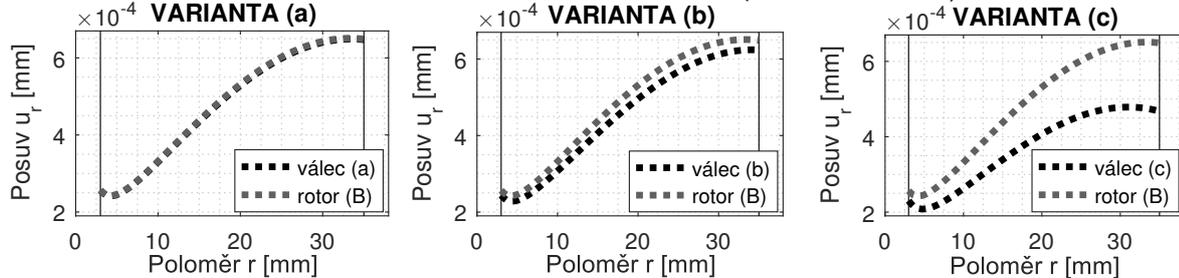
Obr. 7.6: Aproximace průběhů σ_r , σ_t a σ_z pomocí válcových těles.

PRŮBĚHY REDUKOVANÝCH NAPĚTÍ (14000 otmin⁻¹)



Obr. 7.7: Aproximace průběhů σ_{red} (HMH) pomocí válcových těles.

PRŮBĚHY RADIÁLNÍCH POSUVŮ (14000 otmin⁻¹)

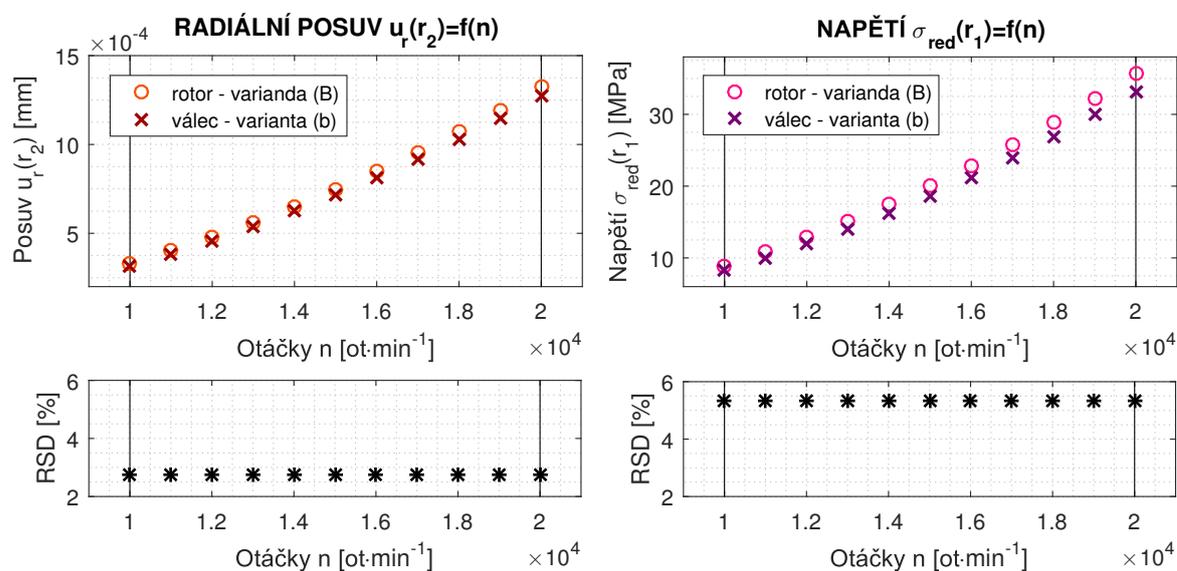


Obr. 7.8: Aproximace průběhů u_r pomocí válcových těles.

	r [mm]	RSD [%]		
		Varianta (a)	Varianta (b)	Varianta (c)
$\sigma_r(r)$	10	0,14	2,21	2,21
$\sigma_t(r)$	3	0,61	3,08	3,08
$\sigma_z(r)$	3	8,32	39,33	87,91
	35	4,90	19,44	–
$u_r(r)$	35	0,16	2,79	22,97
$\sigma_{red}(r)$	3	1,29	5,33	9,87

Tab. 7.3: Relativní odchylky mezi hodnotami napětí a radiálního posuvu.

Pozn: Relativní odchylka pro $\sigma_z(r = 35 \text{ mm})$ varianty (c) není vyhodnocena, neboť posuzovaná napětí mají opačný směr.

Obr. 7.9: Závislost relativních odchylek hodnot $u_r(r_2)$ a $\sigma_{red}(r_1)$ na otáčkách.

Připomeňme, že naším hlavním cílem je analyticky aproximovat hodnoty $\sigma_{red}(r_1)$ a $u_r(r_2)$, v tabulce 7.3 proto věnujeme zvýšenou pozornost zvýrazněným hodnotám relativních odchylek. Z vykreslených průběhů a hodnot relativních odchylek je patrné, že varianta (a) volně deformujícího se válcového tělesa aproximuje průběhy napětí a radiálního posuvu s největší přesností. Maximální relativní odchylky vykazují hodnoty σ_z . Tyto odchylky však (v důsledku nízkých hodnot σ_z) nemají na přesnost aproximací $\sigma_{red}(r_1)$ a $u_r(r_2)$ významný dopad. Pro variantu volně deformujícího se válcového tělesa však v dostupné literatuře nebylo nalezeno analytické řešení, pro naše účely proto není použitelná. Výhodou variant (b) a (c) je, že jsou analyticky řešitelné v uzavřeném tvaru. Lze si povšimnout, že s použitím libovolné z těchto dvou variant dostaneme tytéž průběhy napětí $\sigma_r(r)$ a $\sigma_t(r)$. Je-li totiž splněna podmínka $\varepsilon_z(r, z) = \text{konst.}$, pak jsou hodnoty σ_r a σ_t na deformaci v axiálním směru nezávislé (stejně jako u válcového tělesa zatíženého tlaky, viz [13]). Různé hodnoty $\varepsilon_z(r, z)$ však významně ovlivňují průběhy $\sigma_z(r)$ a $u_r(r)$. Varianta (c) je pro aproximaci hodnot $\sigma_{red}(r_1)$ a $u_r(r_2)$ v důsledku vysokých relativních odchylek nepřijatelná. Pro naše účely je proto použitelná pouze varianta (b) – rotující válcové těleso se

svázanými axiálními posuvy podstav. Hodnoty relativních odchylek 2,79 % v případě radiálního posuvu $u_r(r_2)$ a 5,33 % v případě napětí $\sigma_{\text{red}}(r_1)$ jsou pro přibližnou aproximaci přijatelné. Provedením parametrické strukturální analýzy v programu Ansys Workbench byly stanoveny hodnoty těchto relativních odchylek v rozsahu otáček $(10000 \div 20000) \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$. Z obrázku 7.9 je patrné, že relativní odchylky hodnot $u_r(r_2)$ a $\sigma_{\text{red}}(r_1)$ nejsou na otáčkách závislé.

7.2.1 Rotující válcové těleso

V předchozím textu byly aproximovány průběhy napětí a deformace na středové části masivního rotoru s použitím různých modelů rotujících válcových těles. Užito bylo přístupu variačního, který spočívá v minimalizaci určitého funkcionálu a na kterém je založena MKP. V rámci této podkapitoly bude napjatost a deformace rotujících válcových těles řešena přístupem diferenciálním. Postup řešení je podrobně popsán v [13] nebo [34] pro případ válcového tělesa zatíženého tlaky. Podstatou je řešení systému rovnic obecné pružnosti, který v případě deformační varianty řešení přímé úlohy pružnosti tvoří:

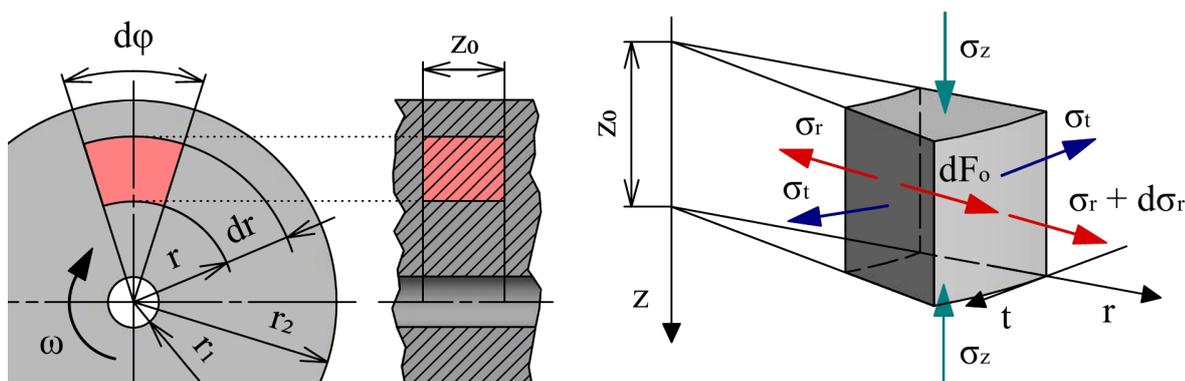
- rovnice rovnováhy elementárního prvku,
- geometrické rovnice
- a konstitutivní vztahy [13].

Zde budeme postupovat analogicky dle [13] a [34] s tím, že rovnice rovnováhy doplníme o elementární objemové síly vzniklé v důsledku rotace. Omezíme se přitom pouze na případy rotujících válcových těles, které splňují podmínku $\varepsilon_z(r, z) = \text{konst.}$, tj. na varianty válcových těles (b) a (c) z kapitoly 7.2. Řešení pak vede na obyčejnou nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu Eulerova typu (stejně jako v případě rotující kruhové a mezikruhové stěny, viz [13]), která je snadno řešitelná v uzavřeném tvaru. Pracovat budeme v cylindrickém souřadném systému r, z, φ , který je v případě variant (b) a (c) hlavním souřadným systémem deformace i napětí – normálová napětí σ_r, σ_z a σ_t odpovídají hlavním napětím. V obecném případě vzniká v bodě válcového tělesa trojosý stav deformace a obecná trojosá napjatost. V souřadném systému z, r, φ pak mají tenzory napětí a deformace následující tvar

$$\mathbb{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t(r) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z(r) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z(r) \end{bmatrix}.$$

Nezávislými deformačními posuvy jsou radiální posuv $u_r(r)$ a axiální posuv $w_z(z)$ [13].

Pro účely sestavení rovnic rovnováhy uvolníme dvěma meridiánovými, dvěma válcovými a dvěma radiálními řezy dvojnásobně elementární prvek, viz obrázek 7.10.



Obr. 7.10: Dvojnásobně elementární prvek válcového tělesa (vychází z [34]).

Pro elementární objemovou sílu dF_o můžeme psát

$$\begin{aligned} dF_o &= a_o dm = (\omega^2 r)(\rho dV) = (\omega^2 r)(\rho \cdot r d\varphi \cdot dr \cdot z_o), \\ dF_o &= \rho \omega^2 r^2 z_o dr d\varphi. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Rovnice rovnováhy v axiálním směru je splněna identicky. Jedinou použitelnou rovnicí rovnováhy je proto rovnice rovnováhy v radiálním směru [34].

$$\sum F_r = 0: \quad (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi z_o - \sigma_r r d\varphi z_o - 2\sigma_t dr \sin \frac{d\varphi}{2} z_o + \rho \omega^2 r^2 z_o dr d\varphi = 0$$

Uvážíme-li, že pro velmi malý úhel $d\varphi$ platí přibližná rovnost $\sin \frac{d\varphi}{2} \doteq \frac{d\varphi}{2}$, pak po zanedbání členů s diferenciály druhého řádu a drobné úpravě přejde rovnice rovnováhy do tvaru

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = -\rho \omega^2 r^2. \quad (7.8)$$

Získaná rovnice rovnováhy má stejný tvar jako v případě rotující kruhové a mezikruhové stěny [13]. Systém rovnic obecné pružnosti doplníme o geometrické rovnice

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw_z}{dz}. \quad (7.9)$$

Konstitutivní vztahy pro obecnou trojosou napjatost (zobecnění Hookův zákon) mohou být vyjádřeny v následujícím tvaru pro napětí

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z) \right], \quad (7.10)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_t + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z) \right], \quad (7.11)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z) \right], \quad (7.12)$$

nebo pro přetvoření

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_z)], \quad (7.13)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)], \quad (7.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_t)]. \quad (7.15)$$

Systém rovnic obecné pružnosti je v této fázi kompletní, a můžeme tak přistoupit k samotnému řešení. Do rovnic (7.10) a (7.11) dosadíme z geometrických rovnic (7.9)

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{du_r}{dr} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon_z \right) \right], \quad (7.16)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{u_r}{r} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon_z \right) \right]. \quad (7.17)$$

Nyní zderivujeme rovnici (7.16) podle r , tj.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{du_r^2}{dr^2} + \frac{u_r}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{d\varepsilon_z}{dr} \right) \right]. \quad (7.18)$$

Omezíme-li se pouze na případy, pro které platí $\varepsilon_z(r, z) = \text{konst.}$, pak člen $\frac{d\varepsilon_z}{dr} = 0$. Po dosazení z rovnic (7.16), (7.17) a (7.18) do rovnice rovnováhy (7.8) a následně úpravě obdržíme obyčejnou nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu Eulerova typu vyjádřenou v nezávislé proměnné, kterou je radiální posuv u_r

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)E} \rho \omega^2 r. \quad (7.19)$$

Diferenciální rovnice (7.19) se liší od případu válcového tělesa zatíženého tlakou nenulovou pravou stranou. Od případu rotující kruhové a mezikruhové stěny se liší pouze tvarem pravé strany, viz [13]. Řešení rovnice (7.19) se skládá z homogenní a partikulární části

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} + u_p, \quad (7.20)$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty. Partikulární řešení hledáme analogicky dle [13] jako v případě rotující stěny, tj. ve tvaru $u_p = Qr^3$. Dosazením do rovnice (7.19) dostaneme

$$\frac{d^2(Qr^3)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(Qr^3)}{dr} - \frac{(Qr^3)}{r^2} = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)E} \rho \omega^2 r, \quad (7.21)$$

$$Q = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)E} \rho \omega^2. \quad (7.22)$$

Obecné řešení diferenciální rovnice pak dostaneme ve tvaru

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{(1-\mu)E} \rho \omega^2 r^3 = C_1 r + \frac{C_2}{r} + Qr^3. \quad (7.23)$$

Zpětným dosazením z rovnice (7.23) do geometrických rovnic (7.9) a následně do konstitutivních vztahů (7.10), (7.11) a (7.12) lze vyjádřit hlavní složky tenzoru napětí ve tvaru

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} + D - \frac{3-2\mu}{8(1-\mu)} \rho \omega^2 r^2, \quad (7.24)$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} + D - \frac{3-2\mu}{8(1-\mu)} \rho \omega^2 r^2, \quad (7.25)$$

$$\sigma_z = 2\mu A + \frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \varepsilon_z - \frac{\mu}{2(1-\mu)} \rho \omega^2 r^2, \quad (7.26)$$

kde

$$A = \frac{EC_1}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad B = \frac{EC_2}{1+\mu}, \quad D = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \varepsilon_z.$$

Pro $\omega = 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ přechází rovnice (7.24), (7.25) a (7.26) do tvaru odvozeného v [13] pro válcové těleso zatížené tlakou.

V případě varianty (c) – rotující válcové těleso se zamezenými axiálními posuvy podstav – platí, že $\varepsilon_z = 0$. Nadále se budeme zabývat pouze variantou (b) – rotující válcové těleso ze svázanými axiálními posuvy podstav. V případě varianty (b) vyjádříme přetvoření ε_z z následující

podmínky převzaté z [34], která říká, že integrál napětí σ_z přes plochu průřezu válce musí být roven celkovému zatížení v axiálním směru. Jelikož v našem případě uvažujeme válcové těleso v axiálním směru nezatížené, platí

$$\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \sigma_z dr = 0. \quad (7.27)$$

Dosazením z rovnice (7.26) do rovnice (7.27) a následným řešením obdržíme

$$\varepsilon_z = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \left[\frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} \frac{\mu}{4(1-\mu)} \rho \omega^2 - 2\mu A \right]. \quad (7.28)$$

Odtud je patrné, že skutečně platí $\varepsilon_z(r, z) = \text{konst.}$ Po dosazení za ε_z z rovnice (7.28) do rovnic (7.10), (7.11) a (7.12) dostaneme po úpravě pro variantu (b)

$$\sigma_r = \left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right) A - \frac{B}{r^2} + \left(\frac{\mu^2}{4(1-\mu)^2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{3-2\mu}{8(1-\mu)} r^2\right) \rho \omega^2, \quad (7.29)$$

$$\sigma_t = \left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right) A + \frac{B}{r^2} + \left(\frac{\mu^2}{4(1-\mu)^2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1+2\mu}{8(1-\mu)} r^2\right) \rho \omega^2, \quad (7.30)$$

$$\sigma_z = \left(\frac{1}{2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} - r^2\right) \frac{\mu}{2(1-\mu)} \rho \omega^2. \quad (7.31)$$

Jelikož napětí σ_r , σ_t a σ_z jsou zároveň hlavní napětí, redukované napětí σ_{red} dle podmínky HMH obdržíme dosazením do rovnice

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2]} \quad [8]. \quad (7.32)$$

Válcové těleso s vnitřním otvorem

Zbývá stanovit konstanty A a B . Ty určíme pro případ válcového tělesa s vnitřním otvorem z okrajových podmínek pro radiální napětí σ_r . Uvažované rotující válcové těleso je zatíženo pouze objemovými silami od rotace, hraniční válcové plochy nejsou zatíženy žádnými vnějšími přetlaky. Platí tedy, že pro

$$r = r_1 : \quad \sigma_r = 0, \quad (7.33)$$

$$r = r_2 : \quad \sigma_r = 0. \quad (7.34)$$

Okrajové podmínky (7.33) a (7.34) představují soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Řešením, například s použitím programu Maple, obdržíme konstanty A a B ve tvaru

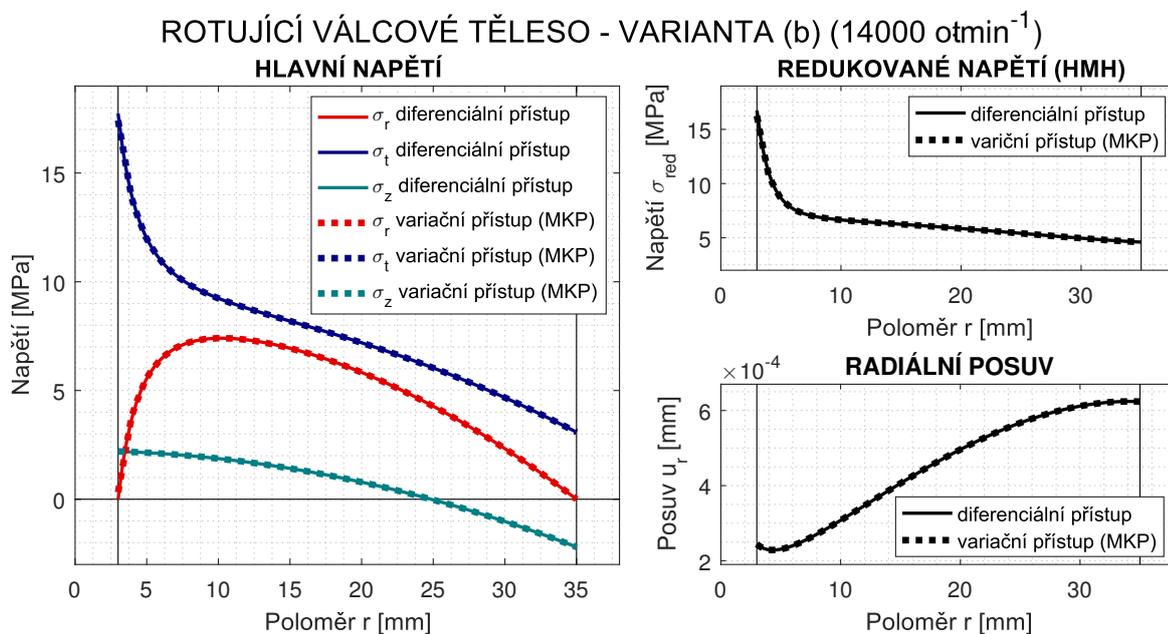
$$A = \frac{1}{8} \frac{(3-5\mu)(r_1^2 + r_2^2)}{(\mu^2 - 1)(2\mu - 1)} \rho \omega^2, \quad (7.35)$$

$$B = \frac{1}{8} \frac{r_1^2 r_2^2 (2\mu - 3)}{\mu - 1} \rho \omega^2. \quad (7.36)$$

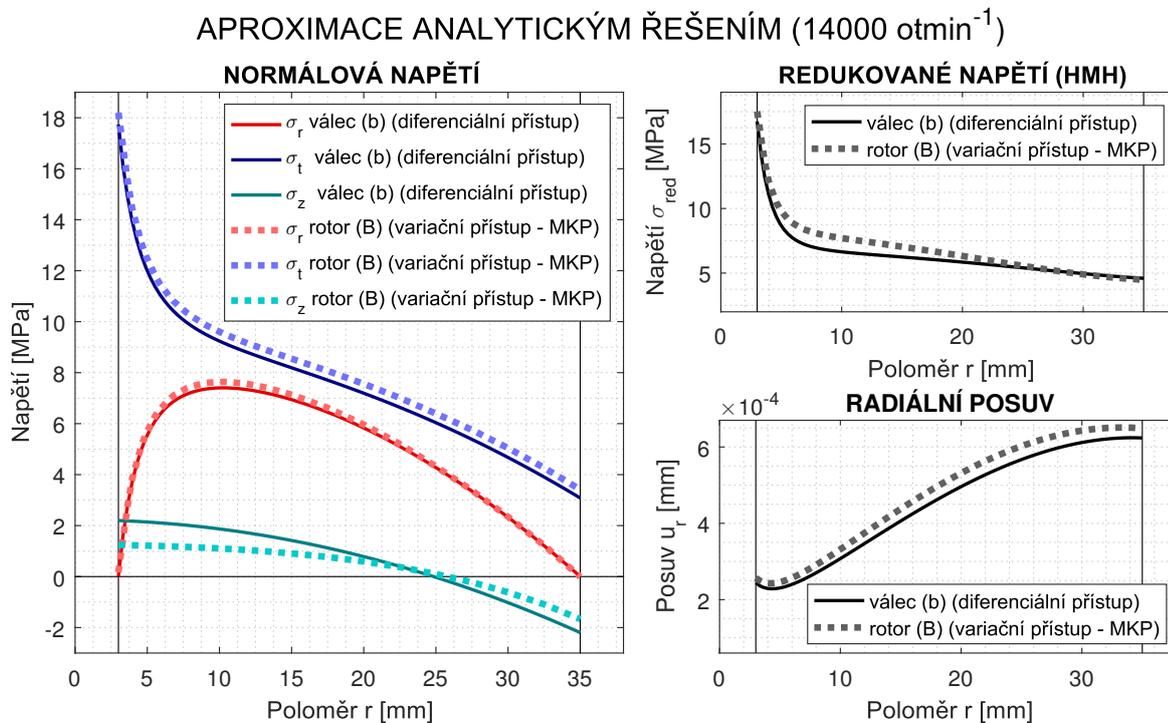
Funkční závislosti $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$ a $\sigma_z(r)$ obdržíme zpětným dosazením konstant A a B do rovnic (7.29), (7.30) a (7.31). Funkční závislost redukovaného napětí $\sigma_{\text{red}}(r)$ dle podmínky HMH je dána rovnicí (7.32). Při hledání funkční závislosti pro radiální posuv $u_r(r)$ lze s výhodou využít rovnice (7.14). Dosazením za ε_t z geometrických rovnic (7.9) dostaneme po drobné úpravě

$$u_r = \frac{r}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)]. \quad (7.37)$$

Na obrázku 7.11 jsou vykresleny průběhy napětí a radiálního posuvu rotujícího válcového tělesa varianty (b) získané diferenciálním přístupem a variačním přístupem s použitím MKP. Míra shody příslušných průběhů potvrzuje správnost analytického řešení. Na obrázku 7.12 je pak odvozené analytické řešení použito k aproximaci průběhů napětí a deformace modelu rotoru z obrázku 7.1 při uvažování zatížení a uložení varianty (B).



Obr. 7.11: Deformace a napjatost rotujícího válcového tělesa varianty (b).



Obr. 7.12: Aproximace průběhu napětí a radiálního posuvu pomocí analytického řešení.

Přesnost, s jakou analytické řešení aproximuje hodnoty $u_r(r_2)$ a $\sigma_{\text{red}}(r_1)$, je vyjádřena pomocí relativních odchylek v tabulce 7.4. V obou případech jsou relativní odchylky menší než 5 %.

	$\sigma_{\text{red}}(r_1)$ [MPa]	$u_r(r_2)$ [mm]
Válcové těleso (b) (diferenciální přístup)	16,75	$6,24 \cdot 10^{-4}$
Model rotoru (B) (variační přístup)	17,52	$6,49 \cdot 10^{-4}$
RSD [%]	3,19	2,80

Tab. 7.4: Relativní odchylky hodnot $\sigma_{\text{red}}(r_1)$ a $u_r(r_2)$.

Válcové těleso bez vnitřního otvoru

V případě rotujícího válcového tělesa bez vnitřního otvoru, pro které je $r_1 = 0$ mm, stanovíme integrační konstanty A a B z následujících okrajových podmínek

$$r = 0 : \quad u_r = 0, \quad (7.38)$$

$$r = r_2 : \quad \sigma_r = 0. \quad (7.39)$$

Z obecného řešení (7.23) plyne, že aby byla splněna geometrická okrajová podmínka (7.38), musí $C_2 = 0$. Odtud pak dostaneme

$$B = 0 \quad [13]. \quad (7.40)$$

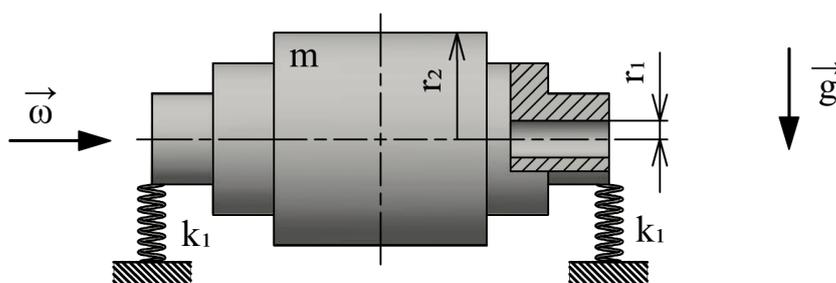
Ze silové okrajové podmínky (7.39) dostaneme dosazením do rovnice (7.29) po úpravě

$$A = \frac{1}{8} \frac{(3 - 5\mu)r_2^2}{(\mu^2 - 1)(2\mu - 1)} \rho \omega^2. \quad (7.41)$$

Funkční závislosti $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$ a $\sigma_z(r)$ obdržíme zpětným dosazením konstant A a B do rovnic (7.29), (7.30) a (7.31). Funkční závislost radiálního posuvu $u_r(r)$ je dána rovnicí (7.37) a funkční závislost redukovaného napětí $\sigma_{\text{red}}(r)$ dle podmínky HMM rovnicí (7.32). Extrém redukovaného napětí se vždy nachází v poloze $r = r_1 = 0$ mm.

7.3 Model ohybově tuhého rotoru úrovně 1

S použitím rovnic odvozených v podkapitolách 7.1 a 7.2 byl v programu Matlab sestaven zjednodušený výpočtový model ohybově tuhého rotoru uloženého na pružných podporách. Použití výpočtového modelu je omezeno na vysokorychlostní masivní rotory. Sestavený výpočtový model je dohledatelný v příloze v podobě M-souboru: *Ohybove_Tuhy_Rotor.m*.



Obr. 7.13: Model ohybově tuhého rotoru úrovně 1.

Vstupní parametry:

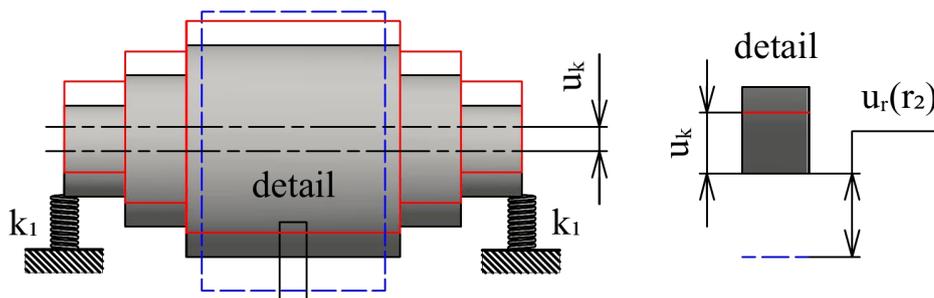
- celková hmotnost rotoru m [kg],
- provozní otáčky n [ot·min⁻¹] a tíhové zrychlení g [m·s⁻²],
- poloměry r_1 [mm] a r_2 [mm] příčného průřezu úseku s největším průměrem,
- vůle mezi rotorem a statorem δ [mm],
- modul pružnosti v tahu E [MPa], Poissonův poměr μ [-] a hustota ρ [kg·m⁻³],
- tuhost pružných podpor k_1 [N·mm⁻¹],
- magnetická tuhost C_{mg} [N·mm⁻¹].

Řešení:

Prvním krokem řešení je převod vstupních parametrů do konzistentních jednotek a zavedení vektoru poloh $r \in \langle r_1, r_2 \rangle$. Následuje výpočet ekvivalentní tuhosti k_{eq} dle vztahu (7.1). S použitím vztahu (7.2) je následně stanoven posuv u_k rotoru jako tuhého celku v důsledku deformace pružných podpor. S použitím rovnice (7.6) je přibližně stanovena hodnota první kritické úhlové frekvence Ω_1 . Následuje aproximace závislostí $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$, $\sigma_z(r)$, $\sigma_{red}(r)$ a $u_r(r)$ pomocí zjednodušeného modelu rotujícího válcového tělesa se svázanými axiálními posuvy podstav. V závislosti na zadané hodnotě vnitřního poloměru r_1 program rozhodne, zda se jedná o rotor s vnitřním otvorem či bez vnitřního otvoru. Pro model rotoru s vnitřním otvorem ($r_1 \neq 0$ mm) jsou konstanty A a B dány vztahy (7.35) a (7.36), pro model rotoru bez vnitřního otvoru ($r_1 = 0$ mm) pak vztahy (7.41) a (7.40). Závislosti $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$ a $\sigma_z(r)$ jsou získány dosazením konstant A a B do rovnic (7.29), (7.30) a (7.31). Z těchto jsou následně vyhodnoceny závislosti redukovaného napětí $\sigma_{red}(r)$ dle podmínky HMH a radiálního posuvu $u_r(r)$ dle rovnic (7.32) a (7.37). Následně je stanovena hodnota extrému redukovaného napětí $\sigma_{red}(r_1)$ a celkového deformačního posuvu rotoru u_c , který je dán součtem

$$u_c = u_k + u_r(r_2). \quad (7.42)$$

Na základě hodnoty deformačního posuvu u_c je rozhodnuto, zda dochází k dosažení mezního stavu deformace, tj. vymezení vůle mezi rotorem a statorem.



Obr. 7.14: Celkový posuv ohybově tuhého rotoru.

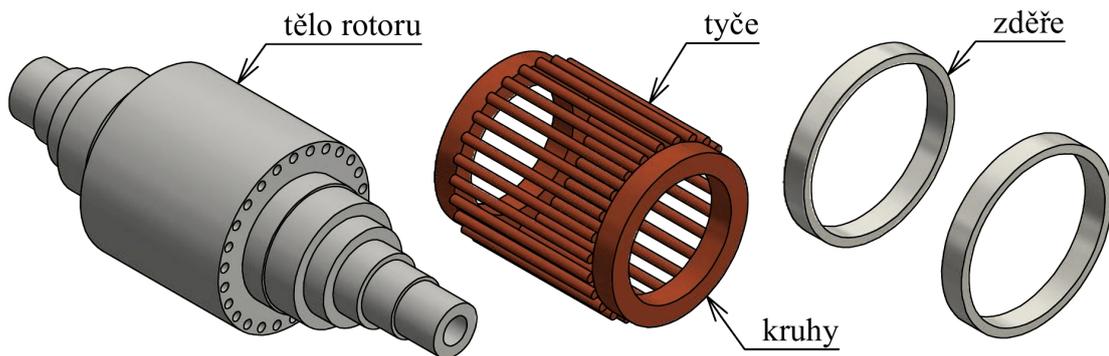
Vstupy programu:

- vykreslené průběhy závislostí $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$, $\sigma_z(r)$, $\sigma_{red}(r)$ a $u_r(r)$,
- výpis hodnoty prvních kritických otáček n_1 [ot·min⁻¹],
- výpis hodnoty extrému redukovaného napětí $\sigma_{red}(r_1)$ [MPa],
- výpis hodnoty celkového deformačního posuvu rotoru u_c [mm], doplněný o informaci, zda dochází nebo nedochází k vymezení vůle δ mezi rotorem a statorem.

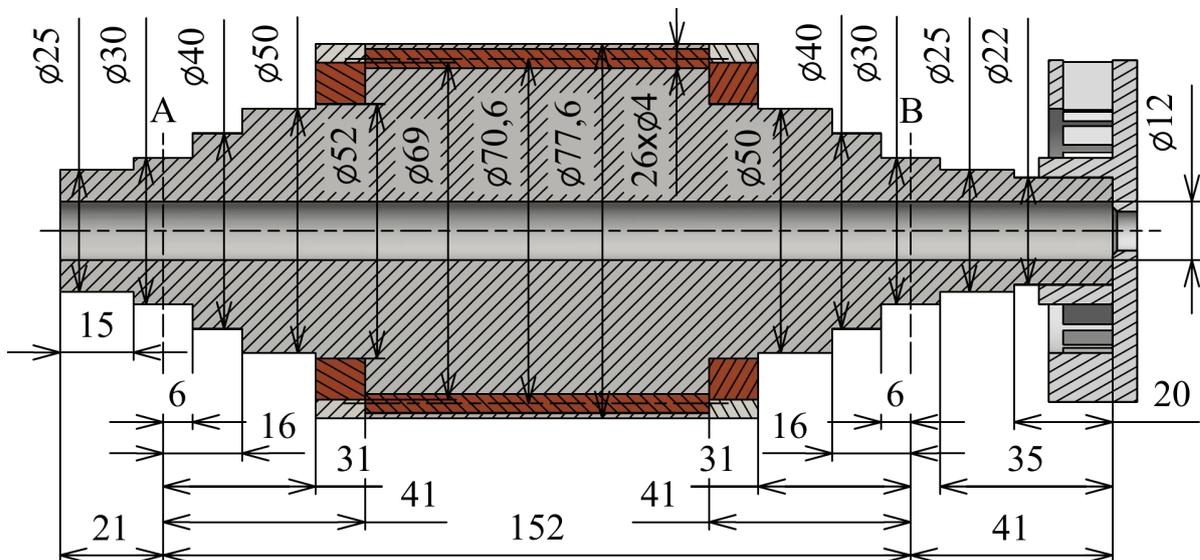
8 Modelování rotoru na vyšších úrovních s použitím MKP

MKP umožňuje modelovat rotor na mnoha různých úrovních. Úroveň použitého výpočtového modelu má zajisté vliv na přesnost získaných výsledků a potřebný výpočtový čas. Klíčové je dosáhnout určitého kompromisu, tj. přijatelné přesnosti výsledků za přijatelnou dobu výpočtu. Cílem v této kapitole je posoudit různé přístupy k výpočtovému modelování rotoru pomocí MKP při deformačně-napěťové a modální analýze. Zároveň by mělo být demonstrováno, jak při těchto analýzách efektivně postupovat. Pracovat budeme v programu Ansys Workbench. V případě deformačně-napěťové analýzy bude použit blok „Static Structural“, v případě modální analýzy blok „Modal“.

Jednotlivé komponenty zadaného modelu geometrie jsou patrné z obrázku 8.1. Jedná se o předběžný návrh vysokorychlostního masivního rotoru, s požadovanými pracovními otáčkami $n = 50000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$. Tělo je zhotoveno z kompaktního kusu oceli 41CrMo4. Klec rotoru, zhotovená ze slitiny CuCrZr, se skládá ze 26 tyčí a 2 kruhů. Tyče jsou vsazeny do předem vyvrtaných děr v těle rotoru a následně pájeny ke kruhům. Na kruhy jsou nalisovány zděře, zhotovené z titanové slitiny Titan Grade 5, s přesahem 0,1 mm. Vůle mezi rotorem a statorem (tj. šířka vzduchové mezery) $\delta = 1,6 \text{ mm}$. Potřebné rozměry jsou vykresleny na obrázku 8.2.

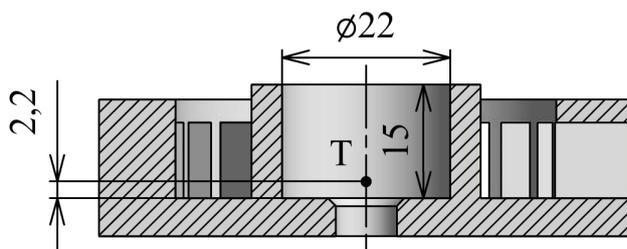


Obr. 8.1: Komponenty modelu geometrie zadaného rotoru.



Obr. 8.2: Rozměry modelu geometrie zadaného rotoru.

Na převislý konec těla rotoru je nalisován ventilátor zhotovený z duralové slitiny. Model geometrie ventilátoru byl poskytnut ve formátu step. Během výpočtového modelování pomocí MKP bude ventilátor v programu Ansys Workbench nahrazen pomocí prvku typu MASS21, tj. bude reprezentován pouze svojí hmotností, polohou těžiště a hlavními momenty setrvačnosti [35]. Hustota duralové slitiny $\rho = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Pomocí programu Autodesk Inventor byla spočtena hmotnost ventilátoru $m_v = 0,093 \text{ kg}$ a hlavní momenty setrvačnosti $I_1 = 58,681 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$, $I_2 = I_3 = 33,322 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$. Poloha těžiště ventilátoru a rozměry stykové plochy s tělem rotou jsou patrné z obrázku 8.3.



Obr. 8.3: Model geometrie ventilátoru.

V místech A a B, viz obrázek 8.2, je rotor uložen v pružných ložiscích se zadanými tuhostmi $k^A = 102 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$ a $k^B = 101 \cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$. Tuhosti ložisek jsou uvažovány konstantní v horizontálním i vertikálním směru. Nevyvážený magnetický tah je zadán hodnotou magnetické tuhosti $C_{mg} = 333 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$. V programu Ansys Workbench budou ložiska modelována s použitím ložiskových prvků COMBI214 se zadanými tuhostmi $k_{11}^A = k_{22}^A = k^A$ a $k_{11}^B = k_{22}^B = k^B$ [36]. Magnetický tah bude modelován s použitím dvou pružinových prvků typu COMBIN14 se zadanými zápornými tuhostmi $k = -C_{mg}$.

Potřebné modely materiálů jsou v programu Ansys Workbench definovány v první fázi preprocessingu v kolonce „Engineering Data“. V případě všech komponent je uvažován homogenní, izotropní, lineárně pružný model materiálu („Linear Elastic – Isotropic Elasticity“). Zadané hodnoty modulu pružnosti v tahu E , Poissonova poměru μ , hustoty ρ a meze kluzu σ_k jsou pro ocel 41CrMo4, slitinu CuCrZr a slitinu Titan Grade 5 v tabulce 8.1.

	E [MPa]	μ [-]	ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	σ_k [MPa]
41CrMo4	200 000	0,3	7850	760
CuCrZr	108 000	0,3	8900	450
Titan Grade 5	114 000	0,3	4450	828

Tab. 8.1: Materiálové parametry komponent rotoru.

8.1 Deformačně-napět'ová analýza rotoru

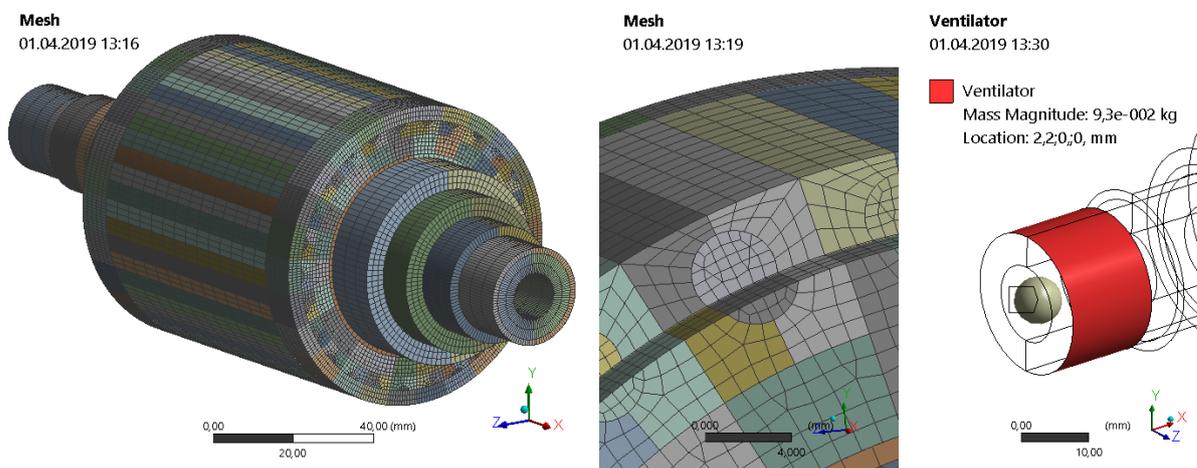
V rámci deformačně-napět'ové analýzy budou vyšetřovány dva různé mezní stavy, mezní stav pružnosti a mezní stav deformace. Mezní stav pružnosti nastane tehdy, jestliže redukované napětí v kritickém místě dosáhne meze kluzu σ_k daného materiálu. Mezní stav deformace pak nastane tehdy, jestliže dojde k vymezení vůle δ mezi rotorem a statorem či vymezení přesahu mezi kruhy a nalisovanými zděřemi. Vyšetřován bude chod rotoru před prohřátím, tj. nebude uvažováno teplotní zatížení. Rovněž nebude uvažován kroučící moment, neboť z hlediska po-

měru výkonu a otáček zadaného rotoru nedosahuje významných hodnot. Prvotní výpočet bude proveden s použitím plného modelu geometrie s poměrně hrubou sítí. O dalším postupu bude rozhodnuto na základě získaných výsledků.

8.1.1 Plný model rotoru

Preprocessing

Po zadefinování modelů materiálu v kolonce „Engineering Data“ následuje tvorba modelu geometrie v kolonce „Geometry“. Model geometrie rotoru byl vytvořen v prostředí „Design Modeler“ v programu Ansys Workbench. S použitím funkce „Slice“ byl následně rozsegmentován tak, aby umožnil vytvoření pravidelné mapované konečno-prvkové sítě. V preprocessingu pokračujeme v kolonce „Model“. Zde je model geometrie doplněn o prvek typu MASS21 („Point Mass“) reprezentující ventilátor. Prvek je vztažen ke stykové válcové ploše těla rotoru s ventilátorem a umístěn do polohy těžiště ventilátoru. Následuje tvorba konečno-prvkové sítě, která je v konečné podobě patrná z obrázku 8.4. Použity byly elementy typu SOLID186 [37].

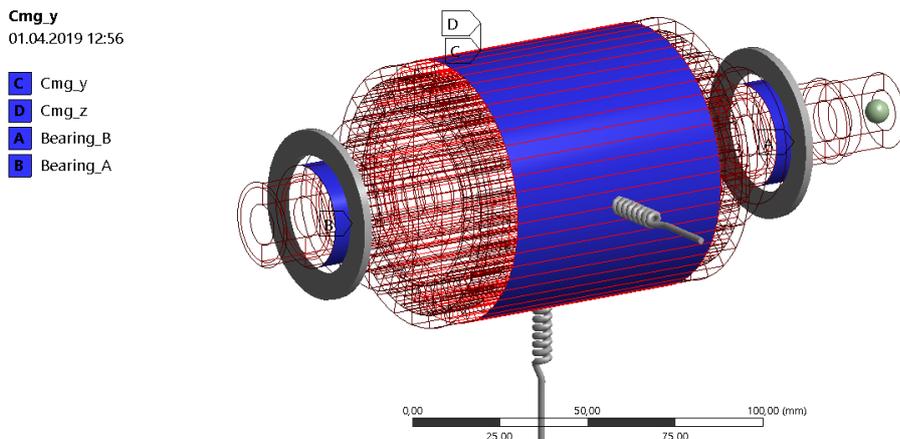


Obr. 8.4: Výsledná konečno-prvková síť a model ventilátoru.

V záložce „Connections“ byly následně definovány kontakty mezi dílčími komponentami rotoru. Uvažovány byly kontakty typu „Frictional“ se zadáním hodnoty koeficientu tření 0,1. Jak v případě kontaktů mezi tělem rotoru a klecí, tak v případě kontaktů mezi klecí a zděři byly stykové plochy náležící kleci definovány jako „Contact“ a stykové plochy náležící tělu rotoru a zděři jako „Target“. Po stykových plochách definovaných jako „Contact“ program automaticky vygeneruje kontaktní prvky typu CONTA174, po stykových plochách definovaných jako „Target“ pak prvky typu TARGE170. Přesah mezi kruhy a zděři byl nastaven s použitím funkce „Offset“. V případě všech kontaktů byla použita metoda „Augmented Lagrange“, která je kombinací metody „Pure Penalty“ a metody „Normal Lagrange“ [38].

Prvky typu COMBI214 nalezneme v záložce „Connections“ pod názvem „Bearing“. Tyto prvky lze předsat k jediné ploše, jedinému bodu či vzdálenému bodu (tzv. „Remote Point“) [36]. Vnější válcové plochy v polohách A a B jsou však v důsledku segmentace modelu geometrie rozděleny na dvě části. Z tohoto důvodu byly ložiskové prvky vztaženy ke vzdáleným bodům definovaným nad těmito válcovými plochami. Obdobným způsobem bylo postupováno v případě prvků typu COMBIN14, použitých k modelování magnetického tahu. Tyto prvky se nachází v záložce „Connections“ pod názvem „Spring“. Vzdálený bod byl v tomto případě definován nad vnější válcovou plochou těla rotoru mezi zděři. Použité vzdálené body jsou

situovány v těžištích vztažných válcových ploch. Vztažné válcové plochy a dílčí modely ložisek a magnetického tahu jsou patrné z obrázku 8.5.

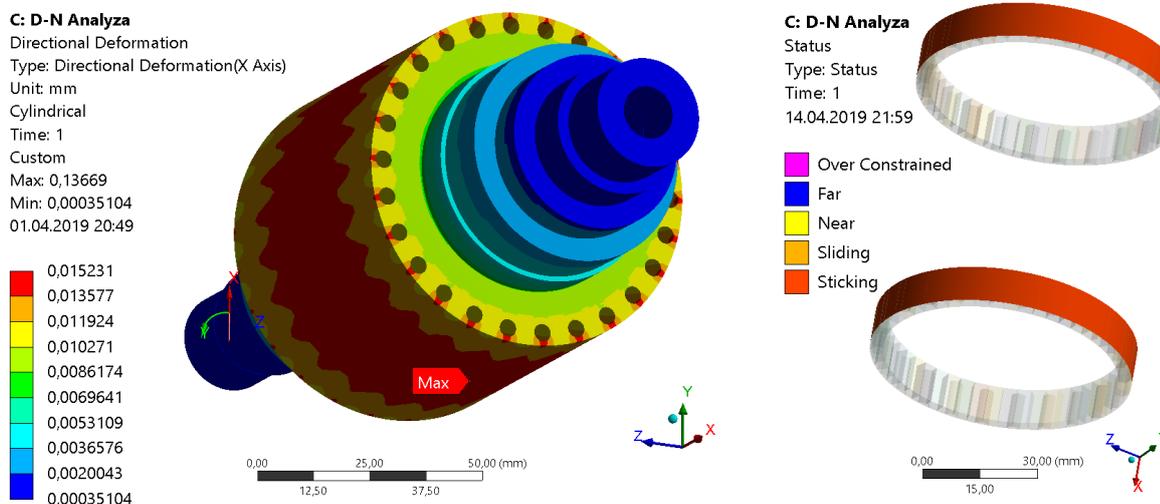


Obr. 8.5: Dílčí modely ložisek a magnetického tahu.

Zbylé stupně volnosti rotoru – axiální posuv a rotace kolem osy rotoru – byly odebrány s použitím okrajové podmínky „Remote Displacement“ aplikované na krajní mezikruhovou plochu převislého konce těla rotoru. Model rotoru byl následně zatížen vlastní tíhou, tj. tíhovým zrychlením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, orientovaným v záporném směru osy y („Standard Earth Gravity“), a setrvačnými objemovými silami od rotace při provozních otáčkách $n = 50000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ („Rotational Velocity“).

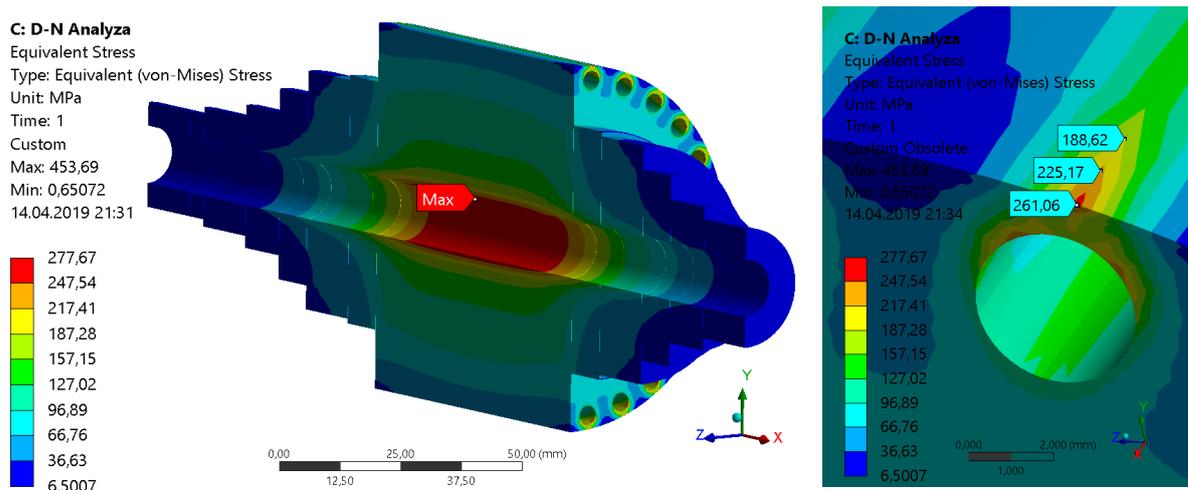
Postprocessing

Na obrázku 8.6 vlevo jsou vykresleny hodnoty radiálních posuvů těla rotoru v lokálním cylindrickém souřadném systému. Maximální radiální posuv, nacházející se na vnější válcové ploše těla rotoru, nabývá hodnoty $15,2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. K vymezení vůle δ mezi rotorem a statorem nedochází. Na obrázku 8.6 vpravo je vykreslen „Contact Status“ mezi kruhy a zděřemi. Odtud je patrné, že tělesa se chovají jako pevně spojená. K vymezení přesahu mezi kruhy a zděřemi, vlivem setrvačných objemových sil, nedochází.



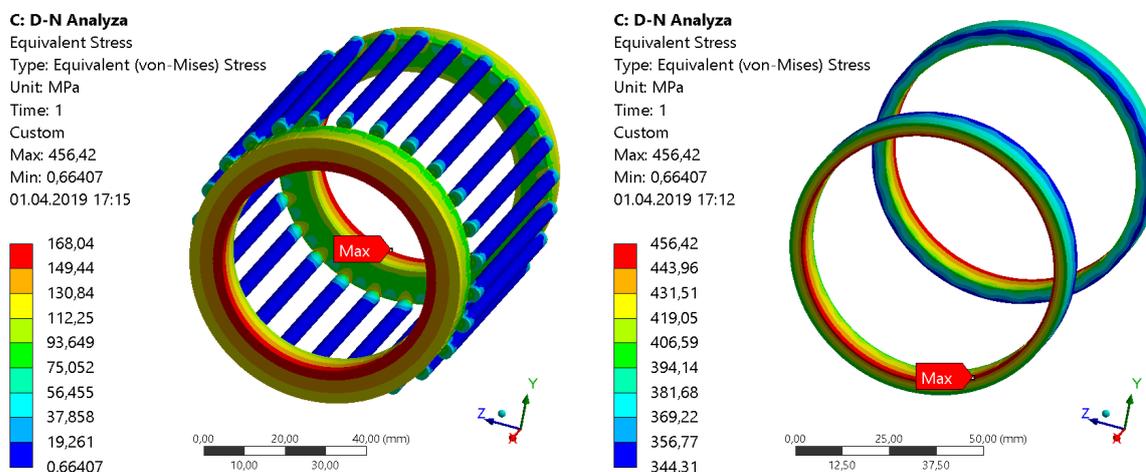
Obr. 8.6: Radiální posuvy těla rotoru a „Contact Status“ mezi kruhy a zděřemi.

Na obrázku 8.7 jsou vykresleny hodnoty redukovaného napětí dílčího modelu těla rotoru stanovené dle podmínky HMH („Equivalent von Mises“). Globální maximum, dosahující hodnoty 277,7 MPa, se nachází na vnitřní válcové ploše přibližně ve středu úseku s největším průměrem. K dosažení mezního stavu pružnosti nedochází. Lokální extrémy se nachází v oblastech děr, do kterých jsou vsazeny tyče klece rotoru. Na obrázku 8.7 vpravo je vykreslen detail oblasti jedné z těchto děr, kde lokální extrém redukovaného napětí dosahuje hodnoty 261,0 MPa. Z tohoto detailu je rovněž patrné, že v těchto oblastech vznikají vysoké gradienty napětí. Hranice mezi konturami by se v ideálním případě měly blížit hladkým křivkám, což zde jednoznačně splněno není. Z této skutečnosti plyne, že použitá síť je příliš hrubá na to, aby vysoké gradienty napětí postihla. Získané výsledky lokálních extrémů napětí proto nelze považovat za věrohodné.



Obr. 8.7: Tělo rotoru – redukované napětí „Equivalent von Mises“.

Na obrázku 8.8 jsou vykresleny hodnoty redukovaného napětí dílčích modelů klece rotoru a zděří. V případě těchto dílčích modelů patrně nedochází k dosažení mezního stavu pružnosti. Je však otázkou, zda lze tyto hodnoty napětí považovat za platné. Zejména v případě dílčího modelu klece rotoru je na první pohled zavádějící, že v oblastech ostrých přechodů mezi kruhy a tyčemi nedosahuje redukované napětí významně zvýšených hodnot. Příčinou může být použití příliš hrubé konečno-prvkové sítě, která není schopna postihnout gradienty napětí v této oblasti. Detailní analýza napjatosti v těchto oblastech bude provedena v následující podkapitole 8.1.2.



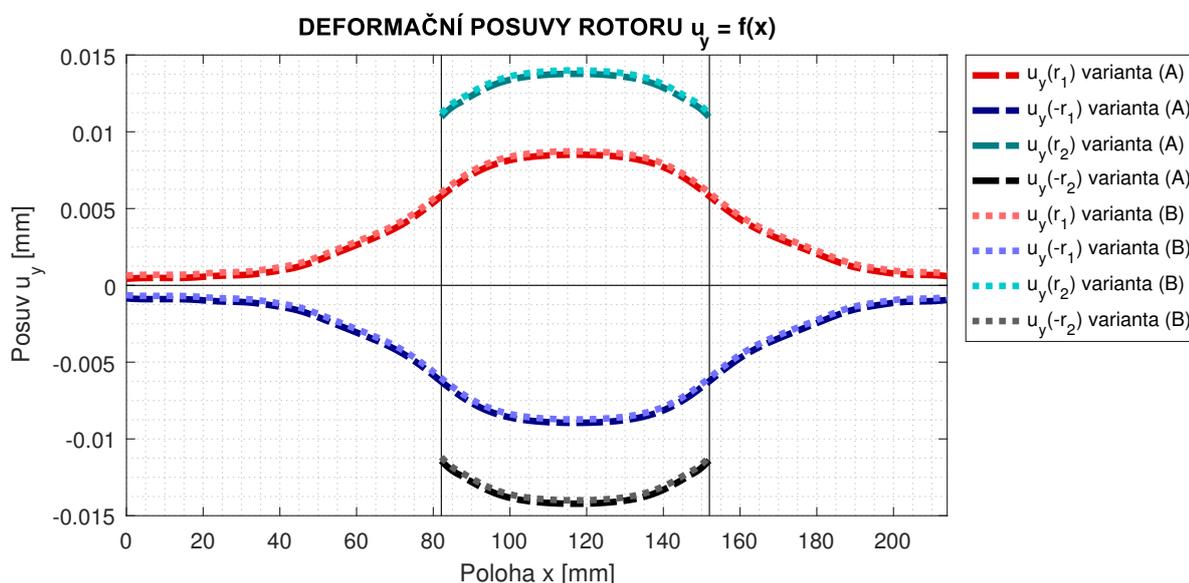
Obr. 8.8: Klec a zděře – redukované napětí „Equivalent von Mises“.

8.1.2 Výsečový model rotoru

Z obrázků 8.6, 8.7 a 8.8 je patrné, že deformace a napjatost vyšetřovaného rotoru vykazuje značnou míru periodické opakovatelnosti. Pro model rotoru z předchozí podkapitoly byla provedena statická strukturální analýza

- (A) s uvažováním vlastní tíhy rotoru,
- (B) bez uvažování vlastní tíhy rotoru.

Pro uvažované varianty zatížení byly vyhodnoceny deformační posuvy u_y v rovině xy globálního souřadného systému podél vnitřní a vnější válcové plochy těla rotoru, viz obrázek 8.9. Z vykreslených průběhů je patrné, že vliv setrvačných objemových sil od rotace značně převažuje nad vlivem tíhových sil a magnetického tahu. Hodnoty u_y varianty (A) jsou vůči hodnotám u_y varianty (B) mírně posunuty v záporném směru osy y . Tyto odchylky jsou z podstatné části způsobeny deformací pružných ložisek. Příspěvek od ohybu nemá na tyto odchylky podstatný vliv. Rotor lze proto modelovat jako dokonale ohybově tuhý.

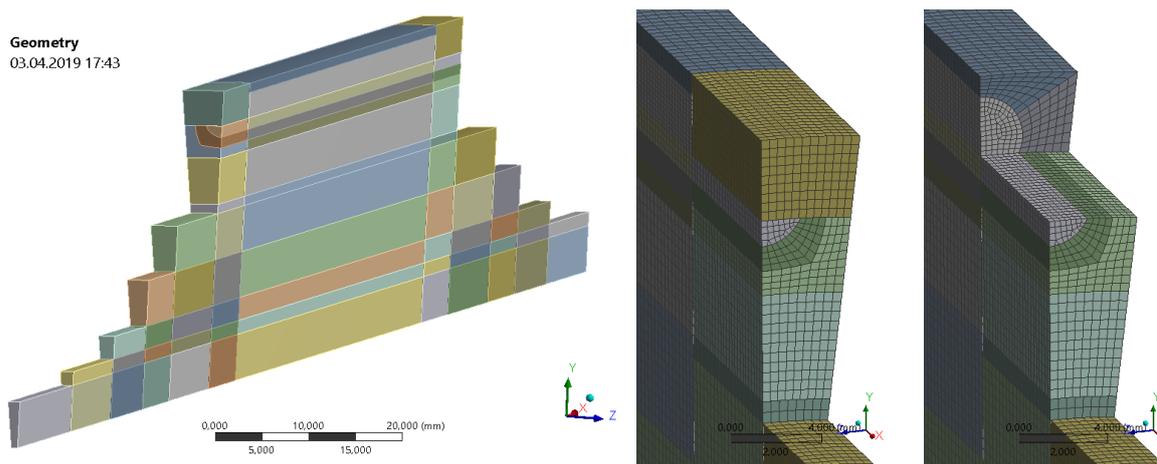


Obr. 8.9: Posuvy u_y v rovině xy po vnější a vnitřní válcové ploše těla rotoru.

Skutečnosti uvedené v předchozím odstavci nás opravňují použít pro posouzení deformačně-napětového stavu rotoru výsečový model geometrie. Při zjemňování konečno-prvkové sítě, která se v předchozí podkapitole prokázala jako nedostačující, pak s použitím výsečového modelu geometrie docílíme značné úspory prvků.

Preprocessing

Výsečový model geometrie byl vytvořen v prostředí „Design Modeler“, v programu Ansys Workbench. Pomocí dvou meridiánových řezů, s použitím funkce „Slice“, byla z plného modelu geometrie separována nejmenší periodicky se opakující jednotka. Podstatou je docílit toho, aby na plochy řezu bylo možné aplikovat symetrické okrajové podmínky. Získaný model geometrie je spolu s detailem zjemněné konečno-prvkové sítě patrný z obrázku 8.10. Sít' je tvořena prvky typu SOLID186. Kontakty mezi dílčími komponentami rotoru byly formulovány stejným způsobem jako v případě plného modelu rotoru, viz podkapitola 8.1.1.

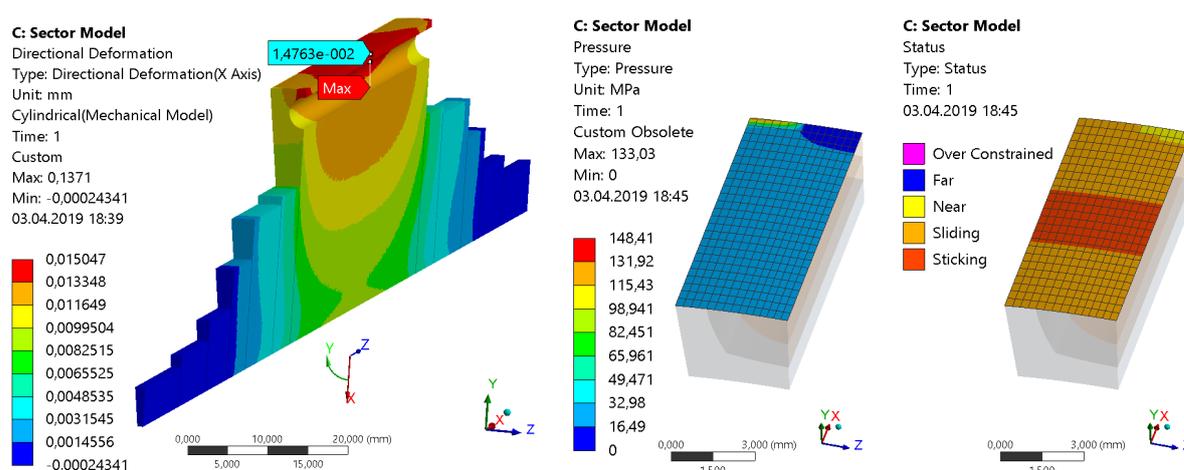


Obr. 8.10: Výšečový model geometrie rotoru – konečno-prvková síť.

Symetrické okrajové podmínky byly formulovány zamezením tangenciálních posuvů uzlů náležících meridiánovým plochám řezu. Pro tyto účely bylo třeba definovat v ose rotoru lokální cylindrický souřadný systém. Zbýlý stupeň volnosti – axiální posuv – byl odebrán pomocí okrajové podmínky „Remote Displacement“ aplikované na hraniční plochu převísleho konce těla rotoru. Model rotoru byl následně zatížen setrvačnými objemovými silami od rotace při požadovaných provozních otáčkách.

Postprocessing

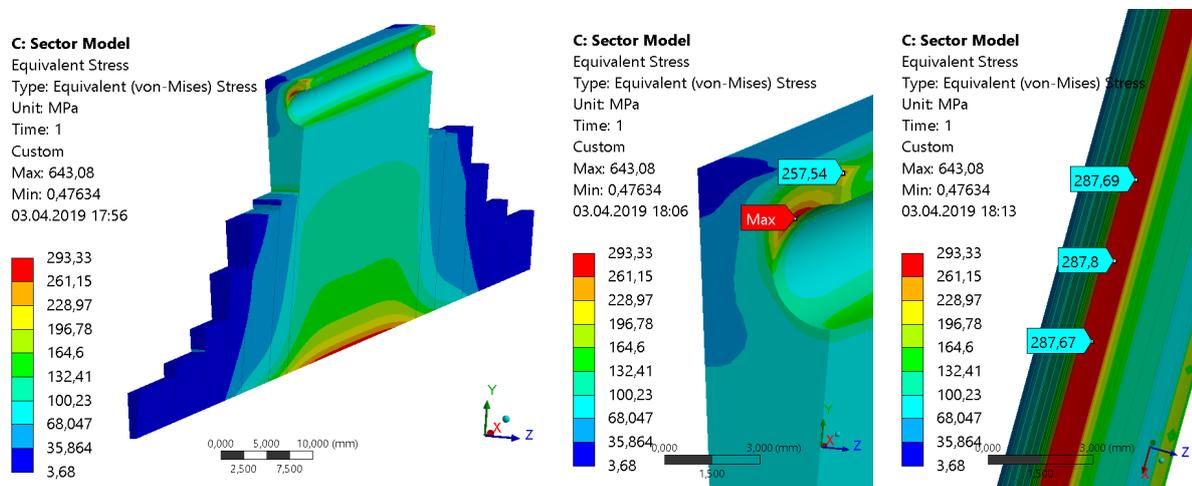
Na obrázku 8.11 vlevo jsou vykresleny hodnoty radiálních posuvů těla rotoru v lokálním cylindrickém souřadném systému. Maximální radiální posuv, nacházející se na vnější válcové ploše těla rotoru, nabývá hodnoty $14,8 \cdot 10^{-3}$ mm. Pro posouzení mezního stavu deformace je však třeba použít plný model rotoru zahrnující rovněž deformaci pružných ložisek v důsledku tíhy rotoru a magnetického tahu. Na obrázku 8.11 vpravo jsou vykresleny hodnoty kontaktního tlaku a „Contact Status“ mezi kruhy a zděřemi. K vymezení přesahu mezi kruhy a zděřemi nedochází.



Obr. 8.11: Výšečový model – radiální posuvy těla rotoru a kontakt mezi kruhy a zděřemi.

Na obrázku 8.12 jsou vykresleny hodnoty redukovaného napětí („Equivalent von Mises“) dílčího modelu těla rotoru. Zjemněná síť již vystihuje vysoké gradienty napětí v oblasti vyústění tyčí věrohodně. V této oblasti se nachází globální maximum redukovaného napětí dosahující hodnoty 293,3 MPa. Příčinou tohoto extrému je významná deformace kruhů v radiálním směru.

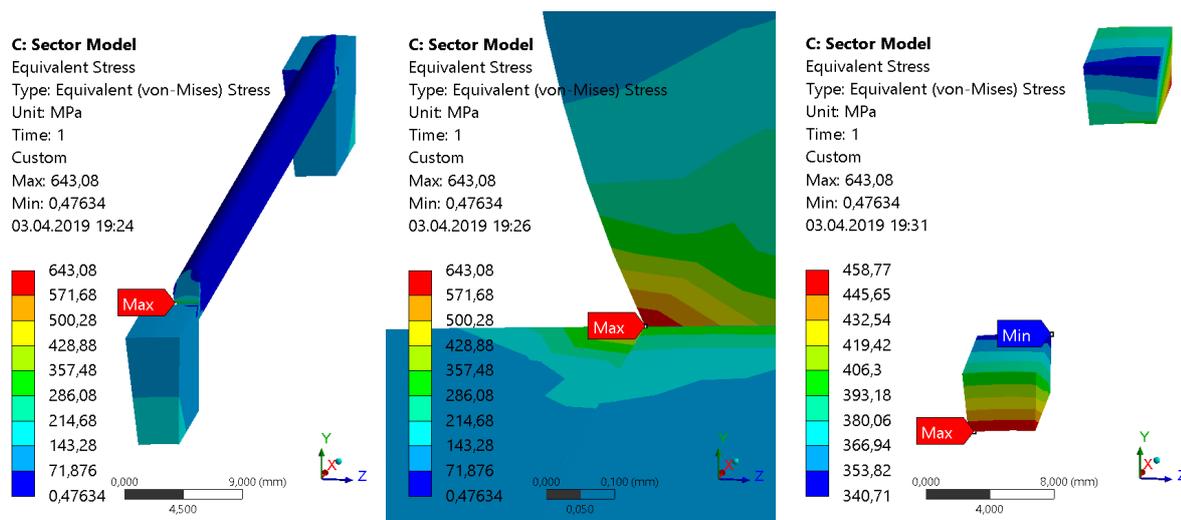
Kruhy jsou pevně spojeny s tyčemi vsazenými do děr těla rotoru. Tyče jsou pak v této oblasti v důsledku rozpínání kruhů vtačovány do děr těla rotoru. Lokální extrém redukovaného napětí, nacházející se na vnitřní válcové ploše těla rotoru, dosahuje hodnoty 287,8 MPa. K dosažení mezního stavu pružnosti v případě těla rotoru nedochází.



Obr. 8.12: Výšečový model, tělo rotoru – „Equivalent von Mises“.

Na obrázku 8.13 jsou vykresleny hodnoty redukovaného napětí dílčích modelů klece rotoru a zděří. V případě zděří dosahuje globální maximum redukovaného napětí hodnoty 458,8 MPa. K dosažení mezního stavu pružnosti v případě zděří nedochází.

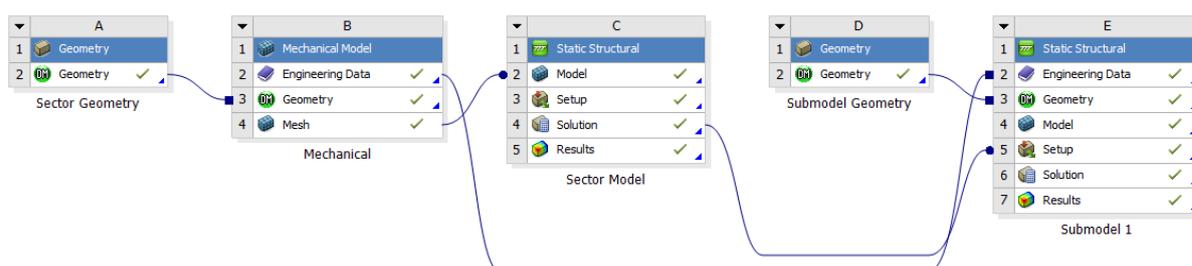
V případě dílčího modelu klece rotoru se maximální hodnoty redukovaného napětí nachází v oblasti ostrého přechodu mezi kruhy a tyčemi. Tyto extrémní plný model rotoru, v důsledku příliš hrubé konečno-prvkové sítě, nezachycuje. Globální maximum redukovaného napětí nabývá hodnoty 643,1 MPa. Tato hodnota přesahuje mez kluzu slitiny CuCrZr téměř o 200 MPa. Patrně se však jedná o napět'ovou singularitu. Stav napjatosti v oblasti přechodu mezi kruhy a tyčemi bude podrobně posouzen v následující podkapitole.



Obr. 8.13: Výšečový model, klec rotoru a zděře – „Equivalent von Mises“.

8.1.3 Sub-model klece rotoru

Podstata „Sub-modellingu“ spočívá ve vytvoření dílčího výpočtového modelu oblasti globálního výpočtového modelu, která vyžaduje detailnější zpracování modelu geometrie, konečno-prvkové sítě apod. V našem případě je globálním modelem výsečový model rotoru z podkapitoly 8.1.2. Cílem je posoudit stav napjatosti v oblasti přechodu mezi kruhy a tyčemi klece rotoru. Model geometrie sub-modelu byl vytvořen v „Design Modeleru“ programu Ansys Workbench separací z výsečového modelu geometrie pomocí funkce „Slice“. Z pohledu definování okrajových podmínek je výhodné, pokud se sub-model nachází ve stejné poloze jako na globálním modelu. Další řešení spočívá v propojení kolonky „Solution“ globálního modelu s kolonkou „Setup“ sub-modelu, jak je patrné z obrázku 8.14.

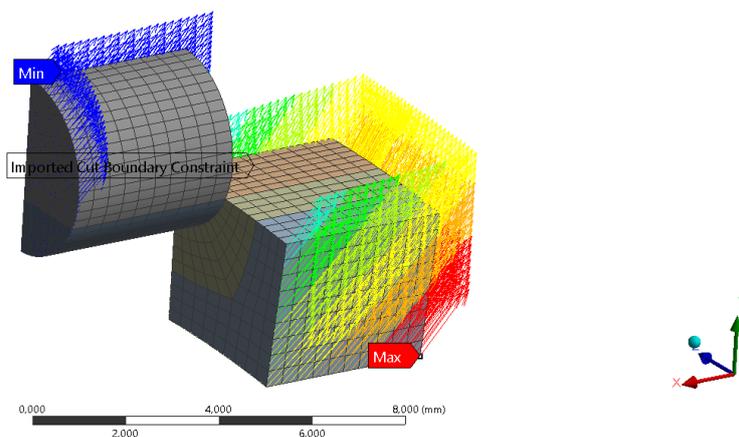


Obr. 8.14: Propojení bloků „Static Structural“ globálního modelu a sub-modelu.

Propojením bloků „Static Structural“ globálního modelu a sub-modelu vznikne v kolonce „Model“ záložka „Submodeling“. Zde je třeba formulovat okrajové podmínky sub-modelu. V našem případě byla použita podmínka „Cut Boundary Constraint“ aplikovaná na plochy řezu sub-modelu. Uzly náležící plochám řezu jsou zatíženy deformačními posuvy převzatými z globálního modelu, jak je patrné z obrázku 8.15.

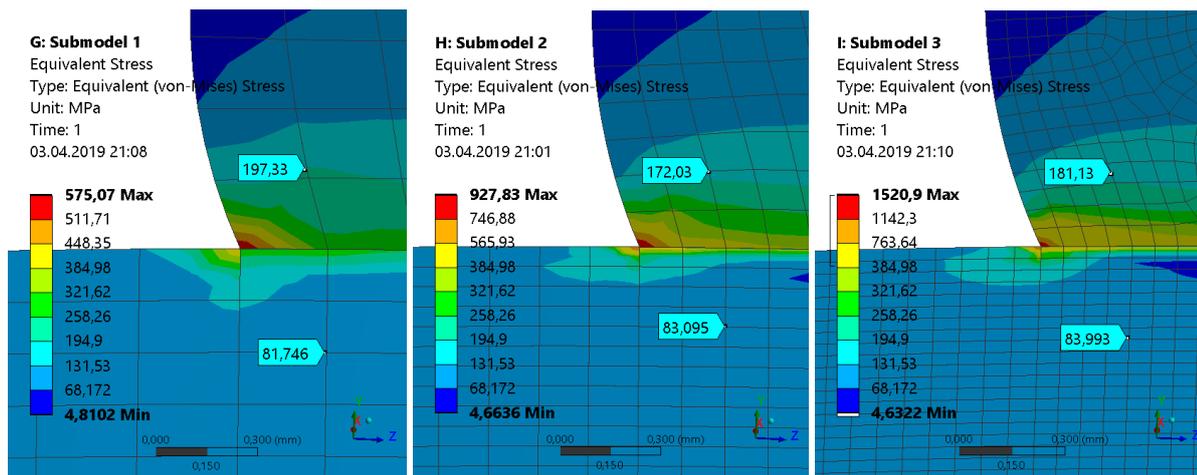
G: Submodel 1
Imported Cut Boundary Constraint
Time: 1, s
All
Unit: mm
03.04.2019 19:39

0,0355417 Max
0,0337079
0,0318741
0,0300403
0,0282066
0,0263728
0,024539
0,0227052
0,0208714
0,0190377 Min

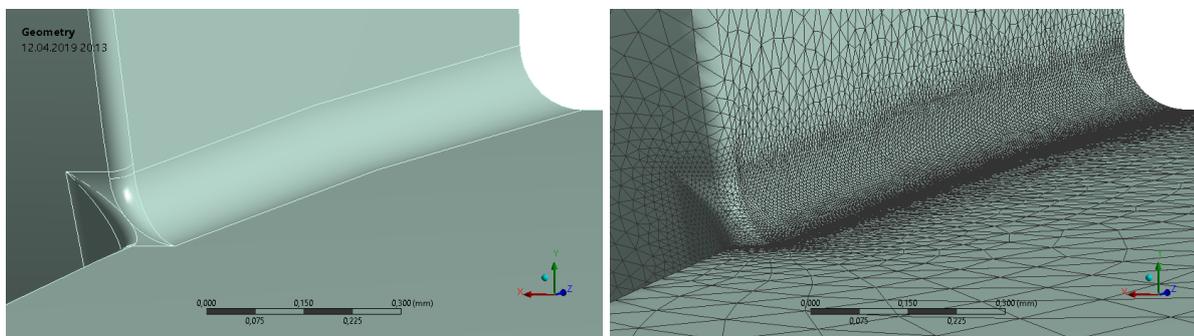


Obr. 8.15: Sub-model oblasti přechodu mezi kruhem a tyčí.

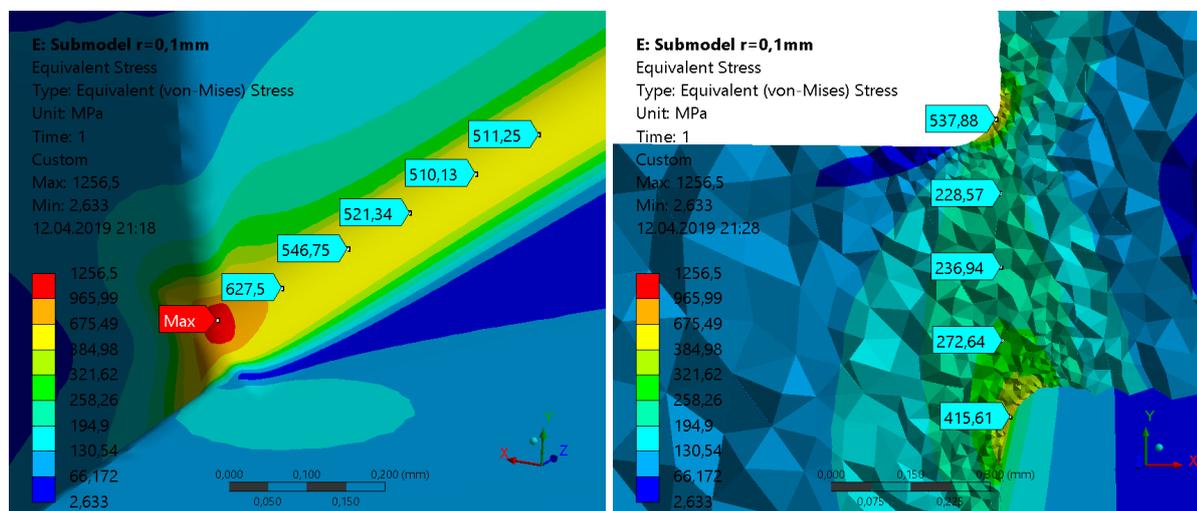
S použitím sub-modelu byla pozorována špičková hodnota redukovaného napětí v oblasti ostrého přechodu mezi kruhem a tyčí při různých hustotách konečno-prvkové sítě. Jak je patrné z obrázku 8.16, při postupném zjemňování sítě prudce narůstají maximální hodnoty redukovaného napětí, a to nejen v oblasti špičkové hodnoty, ale rovněž po celé délce ostrého přechodu. Jedná se tedy skutečně o napětíovou singularitu. Pro posouzení stavu napjatosti v této oblasti byly ostré přechody opatřeny rádiusy o poloměrech zaoblení 0,1 mm. Úprava ostrých přechodů je spolu s konečno-prvkovou sítí patrná z obrázku 8.17. Na obrázku 8.18 jsou pak vykresleny hodnoty redukovaného napětí.



Obr. 8.16: Submodel klece – „Equivalent von Mises“ v oblasti singularity.



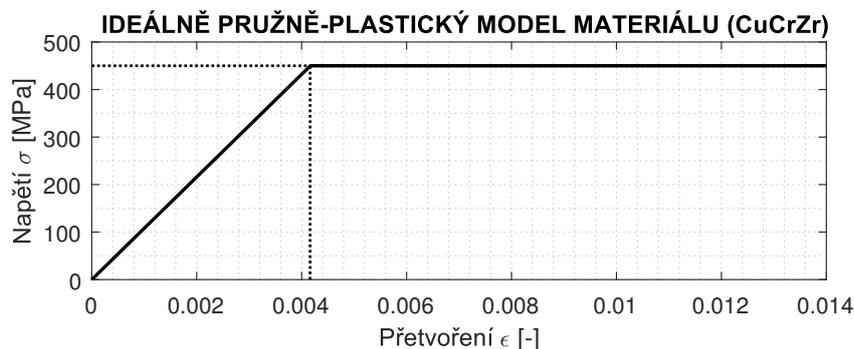
Obr. 8.17: Zaoblění ostrých přechodů mezi kruhem a tyčí.



Obr. 8.18: Napětí „Equivalent von Mises“ v místě zaoblených přechodů.

Jak je patrné z obrázku 8.18, maximální redukované napětí značně překračuje mez kluzu slitiny CuCrZr (nabývá téměř třikrát vyšší hodnoty). Z tohoto důvodu byla dále provedena deformačně-napět'ová analýza s uvažováním ideálně pružně-plastického modelu materiálu – závislost σ – ε je vykreslena na obrázku 8.19. V programu Ansys Workbench byl použit bilineární model materiálu, tj. model „Isotropic Elasticity“, se zadáním hodnot E , μ a ρ , v kombinaci s modelem „Bilinear Isotropic Hardening“, který vyžaduje zadání hodnoty meze kluzu

σ_k a tečného modulu zpevnění E_T [MPa] (směrnice přímky zpevnění). Pro uvažovaný ideálně pružně-plastický model materiálu je $E_T = 0$ MPa.



Obr. 8.19: Závislost σ – ϵ ideálně pružně-plastického modelu materiálu slitiny CuCrZr.

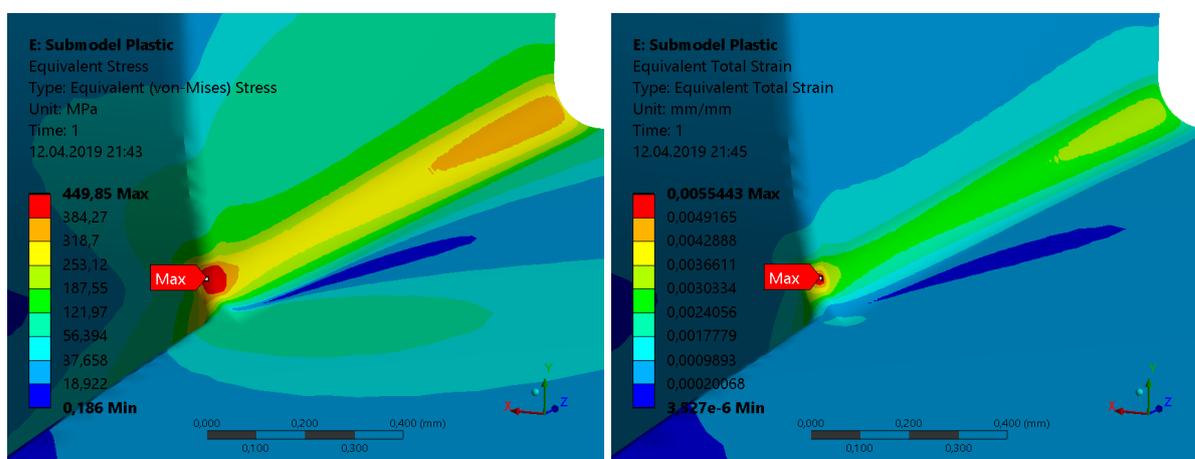
Pro účely mapování deformačně-napět'ové odezvy materiálu během zatěžování byl v řešiči nastaven počet substepů na 20. Dále byla aktivována funkce „Large Deflection“, aby řešič respektoval změny matice tuhosti v důsledku případných geometrických nelinearit.

Na obrázku 8.20 jsou vykresleny hodnoty redukovaného napětí a celkového redukovaného přetvoření ϵ_{red}^c dle podmínky HMH, které je dáno součtem redukovaného elastického přetvoření ϵ_{red}^{el} a redukovaného plastického přetvoření ϵ_{red}^{pl} . Složky ϵ_{red}^{el} a ϵ_{red}^{pl} jsou definovány rovnicemi

$$\epsilon_{red}^{el} = \frac{1}{1-\mu'} \sqrt{\frac{1}{2} [(\epsilon_1^{el} - \epsilon_2^{el})^2 + (\epsilon_2^{el} - \epsilon_3^{el})^2 + (\epsilon_3^{el} - \epsilon_1^{el})^2]} \quad , \text{kde} \quad \mu' = \mu$$

$$\epsilon_{red}^{pl} = \frac{1}{1-\mu'} \sqrt{\frac{1}{2} [(\epsilon_1^{pl} - \epsilon_2^{pl})^2 + (\epsilon_2^{pl} - \epsilon_3^{pl})^2 + (\epsilon_3^{pl} - \epsilon_1^{pl})^2]} \quad , \text{kde} \quad \mu' = 0,5.$$

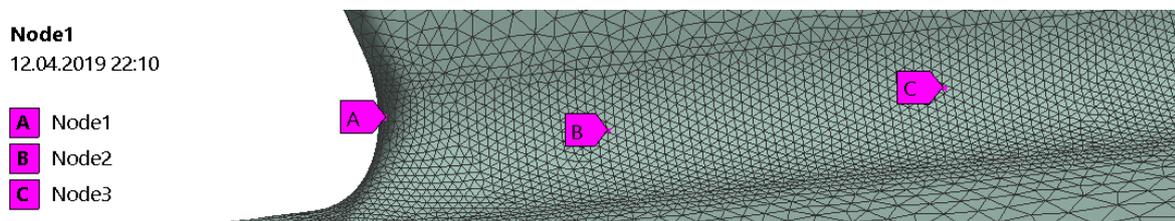
Veličina μ' se nazývá efektivní Poissonův poměr a $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ jsou hlavní přetvoření [39]. Z obrázku 8.20 je patrné, že uvažovaný model materiálu skutečně nepřenáší napětí vyšší, než je mez kluzu slitiny CuCrZr $\sigma_k = 450$ MPa. K lokálnímu zplastizování došlo na okraji hranice mezi tyčí a kruhem. Tato oblast však není nikterak rozsáhlá.



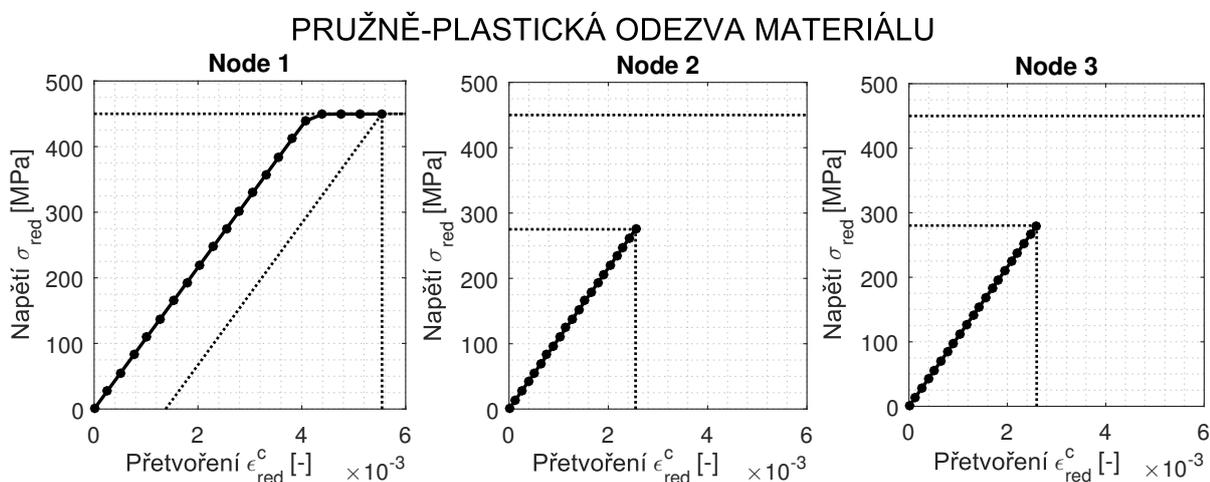
Obr. 8.20: Redukované napětí a celkové redukované přetvoření „Equivalent von Mises“.

Deformačně-napět'ové odezva materiálu, během procesu zatěžování, byla pozorována ve třech uzlech konečno-prvkové sítě vyznačených na obrázku 8.21. Uzel „Node 1“ se nachází

v poloze maximálního celkového redukovaného přetvoření. Získané závislosti σ_{red} na celkovém redukovaném přetvoření ϵ_{red}^c jsou vykresleny na obrázku 8.22. V poloze uzlu „Node 1“ nabývá redukované plastické přetvoření hodnoty $\epsilon_{\text{red}}^{pl} = 1,38 \cdot 10^{-3}$. V reálném případě však bude tato hodnota nižší v důsledku zpevnění materiálu. V polohách uzlů „Node 2“ a „Node 3“ ke vzniku trvalé plastické deformace nedochází.



Obr. 8.21: Místa pozorování deformačně-napět'ové odezvy materiálu.



Obr. 8.22: Deformačně-napět'ová odezva materiálu.

8.1.4 Zhodnocení výsledků

V rámci deformačně-napět'ové analýzy zadaného rotoru bylo zjištěno, že k dosažení mezního stavu deformace, tj. k vymezení vůle δ mezi rotorem a statorem či k vymezení přesahu mezi kruhy a zděření, nedochází. Mezního stavu pružnosti bylo dosaženo v úzké oblasti přechodu mezi kruhy a tyčemi. Při uvažování poloměru zaoblení přechodu 0,1 mm a ideálně pružně-plastického modelu materiálu nabývá maximum redukovaného plastického přetvoření hodnoty $\epsilon_{\text{red}}^{pl} = 1,38 \cdot 10^{-3}$. Dále by bylo vhodné provést analýzu vývoje deformačně-napět'ového stavu v této oblasti za zvýšených teplot, případně při cyklickém zatěžování.

8.2 Modální analýza rotoru

V rámci této podkapitoly bude cílem stanovit první kritické otáčky zadaného rotoru. V případě všech sestavených výpočtových modelů budou použity tytéž dílčí modely materiálů, ventilátoru, ložisek a magnetického tahu jako v podkapitole 8.1.1.

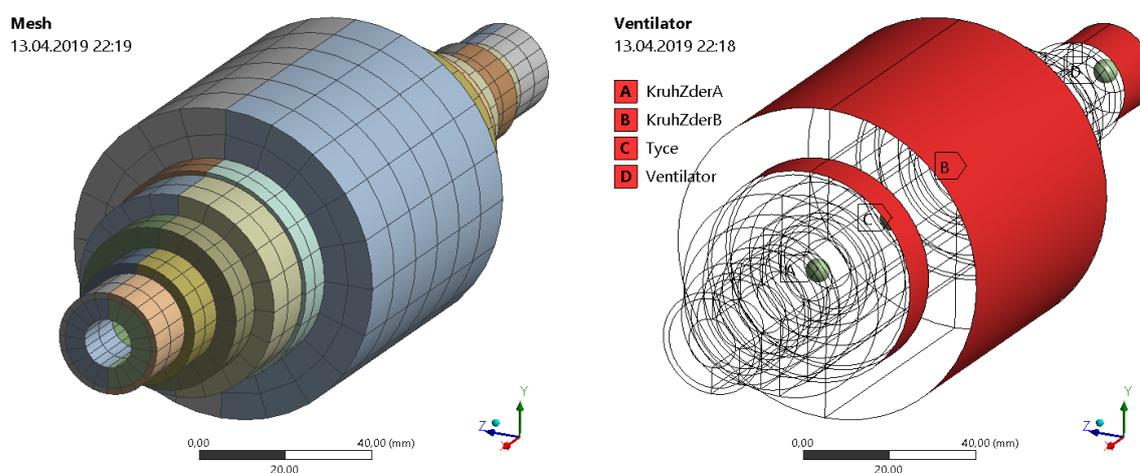
Vyhodnocení prvních kritických otáček bude provedeno s použitím Campbellova diagramu, představeného v kapitole 4.2. Pro jeho sestavení je třeba s použitím MKP stanovit vlastní frek-

vence rotoru odpovídající prvnímu vlastnímu ohybovému tvaru. Jak je patrné z obrázku 4.3, při zahrnutí gyrokopických účinků dochází k rozštěpení vlastních frekvencí pro dopřednou a zpětnou precesi. Závislost vlastních frekvencí na otáčkách však obecně není lineární. Výpočet vlastních frekvencí je proto třeba, v mezích pozorovaného rozsahu otáček, provést při několika různých otáčkách. Značné úspory času lze docílit, máme-li k dispozici zjednodušený výpočtový model, který umožní v krátkém čase alespoň přibližně odhadnout hledané kritické otáčky. Při následných modálních analýzách, s použitím propracovanějších výpočtových modelů, pak sestavujeme Campbellův diagram pouze v rozsahu otáček blízkých odhadnuté hodnotě.

Jelikož vyšetřovaný model rotoru se vyznačuje značnou ohybovou tuhostí, lze předpokládat, že zásadní vliv na první kritické otáčky budou mít tuhosti ložisek a magnetický tah. Pro přibližný odhad prvních kritických otáček byl sestaven model rotoru M0 patrný z obrázku 8.23. Konečno-prvková síť je tvořena prvky typu SOLID185 s lineárními bázovými funkcemi. Kruhy, tyče a zděře jsou reprezentovány pouze svojí hmotností, viz tabulka 8.2. Hmotnost kruhu a zděře se společným těžištěm je zadána pomocí jednoho prvku typu MASS21. Obdobným způsobem je pomocí jediného prvku typu MASS21 zadána celková hmotnost tyčí.

	kruh	zděř	tyč
m [kg]	$14,379 \cdot 10^{-2}$	$3,867 \cdot 10^{-2}$	$0,783 \cdot 10^{-2}$

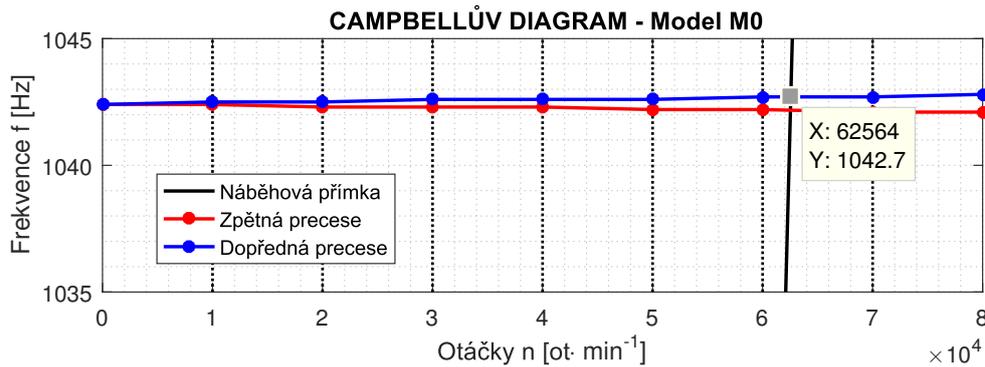
Tab. 8.2: Hmotnosti kruhů, zděří a tyčí.



Obr. 8.23: Model rotoru M0.

Kritické otáčky rotoru jsou ovlivněny gyrokopickými účinky vzniklými v důsledku rotace. Při nastavení řešiče v „Analysis Settings“ je pro zahrnutí gyrokopických účinků třeba v záložce „Rotordynamics Controls“ aktivovat Coriolisovy účinky. Ačkoliv neřešíme tlumenou modální analýzu, pro zahrnutí gyrokopických účinků, tj. řešení pohybové rovnice ve tvaru (4.4), je třeba v záložce „Solver Controls“ přepnout možnost „Damped“ na „Yes“ [40].

Vlastní frekvence, odpovídající prvnímu vlastnímu ohybovému tvaru, byly vyhodnocovány v rozměni otáček ($0 \div 80000$) $\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}$ se zvoleným krokem $10000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$. Otáčky byly zadány tabulkou pomocí podmínky „Rotational Velocity“ ze záložky „Inertial“. Z Campbellova diagramu, z obrázku 8.24, je patrné, že hledané první kritické otáčky se nachází v intervalu otáček ($60000 \div 70000$) $\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}$.

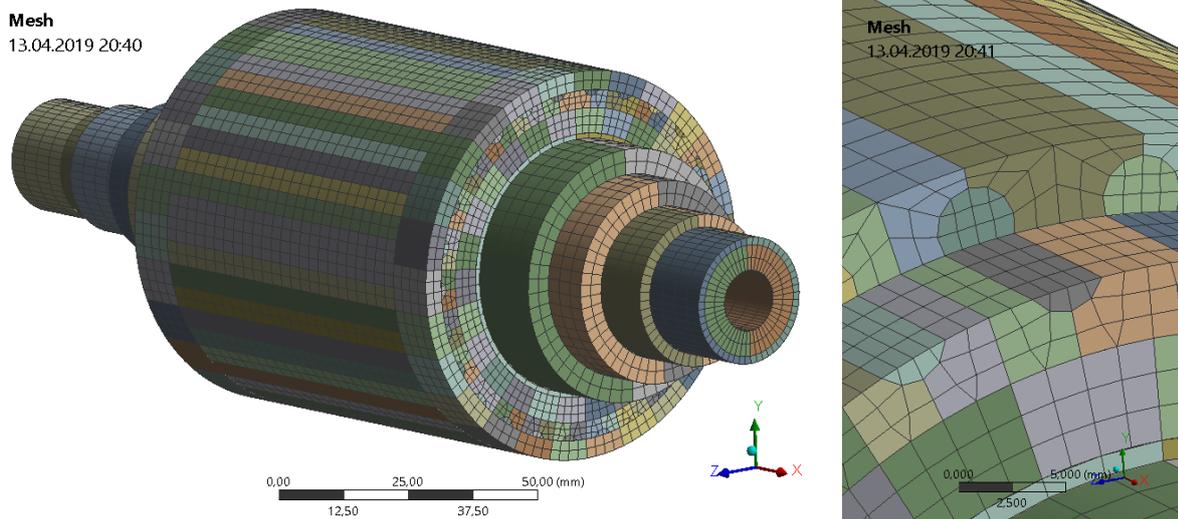


Obr. 8.24: Campbellův diagram – model rotoru M0.

V následujících podkapitolách budou představeny tři výpočtové modely různých úrovní. Campbellovy diagramy budou sestavovány v rozmezí otáček ($60000 \div 70000$) $\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}$. Jak je patrné z obrázku 8.24, hodnoty vlastních frekvencí se v tomto intervalu otáček mění v závislosti na otáčkách jen nepatrně. Interval proto není třeba podrobit dalšímu dělení. Vlastní frekvence budou vyhodnocovány pouze při otáčkách $60000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ a $70000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$. Hodnoty vlastních frekvencí uvnitř intervalu budou aproximovány pomocí lineárních funkcí.

8.2.1 Model rotoru M1.1

Model rotoru M1.1 se od modelu rotoru M0 odlišuje vyšší úrovní zpracování modelu geometrie. Ten je spolu s konečno-prvkovou sítí patrný z obrázku 8.25. Síť je tvořena prvky typu SOLID185 s lineárními básovými funkcemi. Mezi dílčími modely těla rotoru, klece a zděří jsou uvažovány lineární kontakty typu „Bonded“ – pevná spojení.

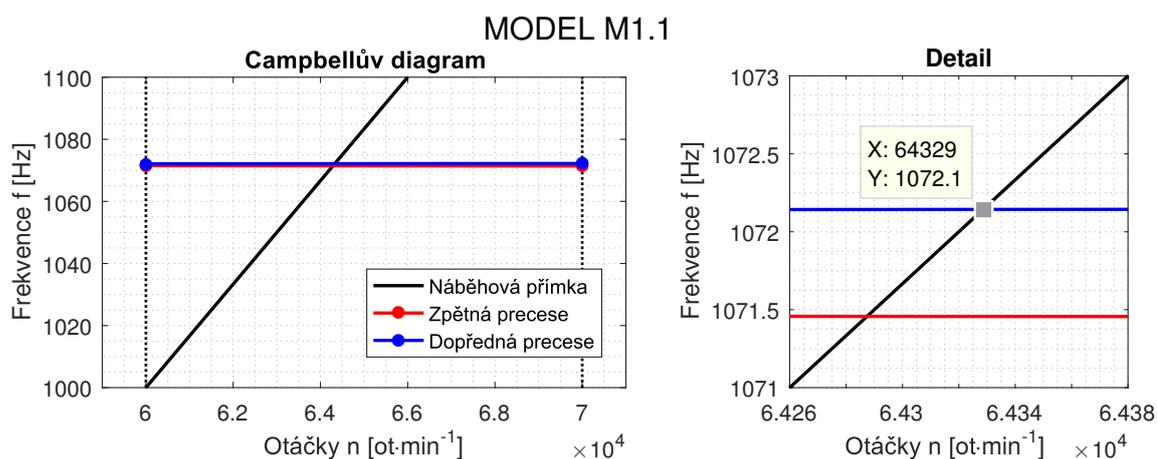


Obr. 8.25: Model geometrie a konečno-prvková síť modelu M1.1.

V tabulce 8.3 jsou hledané vlastní frekvence rotoru, odpovídající prvnímu vlastnímu ohybového tvaru, při otáčkách $60000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ a $70000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$. Na základě získaných hodnot vlastních frekvencí byl sestaven Campbellův diagram patrný z obrázku 8.26. Hodnota prvních kritických otáček při dopředné precеси je $n_1 = 64329 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$.

	Vlastní frekvence f_1 [Hz]	
	$n = 60000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$	$n = 70000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$
Zpětná precese	1071,5	1071,4
Dopředná precese	1072,1	1072,2

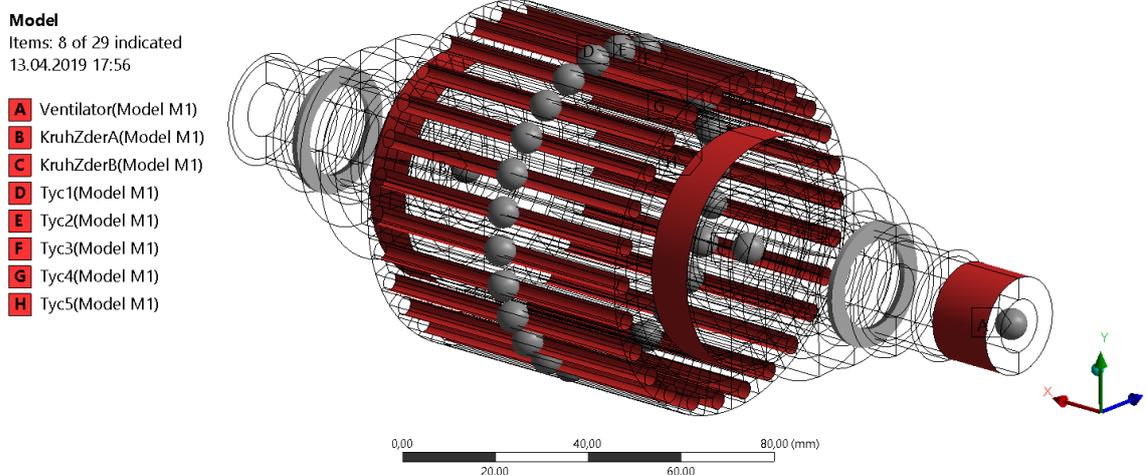
Tab. 8.3: Model M1.1 – vlastní frekvence pro první vlastní ohybový tvar.



Obr. 8.26: Campbellův diagram – model rotoru M1.1.

8.2.2 Model rotoru M1.2

Model rotoru M1.2 vychází z modelu M1.1. V případě těla rotoru je použita stejná konečno-prvková síť, kruhy, zděře a tyče jsou však nahrazeny hmotnými body pomocí prvků typu MASS21, jak lze vidět na obrázku 8.27. Hmotnosti dílčích komponent jsou vypsány v tabulce 8.2. Kruhy a zděře s odpovídající polohou těžiště byly stejně jako v případě modelu M0 nahrazeny společným hmotným bodem – v případě těchto dílčích modelů byly kromě hmotností zadány rovněž hlavní momenty setrvačnosti patrné z tabulky 8.4.



Obr. 8.27: Model rotoru M1.2.

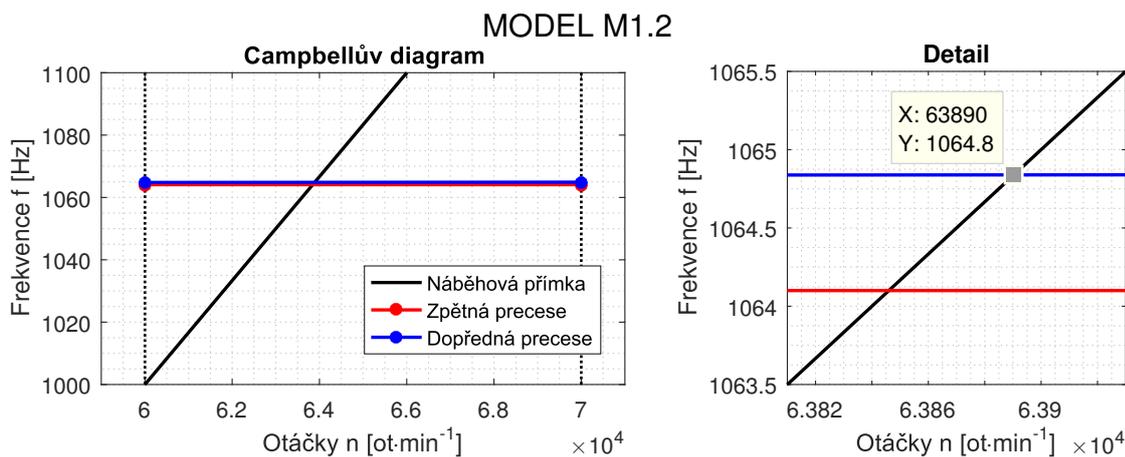
	kruh	zděř	kruh + zděř
I_1 [kg·mm ²]	134,170	51,382	185,551
$I_2 = I_3$ [kg·mm ²]	68,283	26,013	94,296

Tab. 8.4: Hlavní momenty setrvačnosti kruhů a zděří.

Na základě získaných hodnot vlastních frekvencí z tabulky 8.5 byl sestaven Campbellův diagram, viz obrázek 8.28. Z vykresleného detailu patrné, že hodnota prvních kritických otáček při dopředné precesi je $n_1 = 63890 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$.

	Vlastní frekvence f_1 [Hz]	
	$n = 60000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$	$n = 70000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$
Zpětná precese	1064,1	1064,1
Dopředná precese	1064,8	1064,9

Tab. 8.5: Model M1.2 – vlastní frekvence pro první vlastní ohybový tvar.

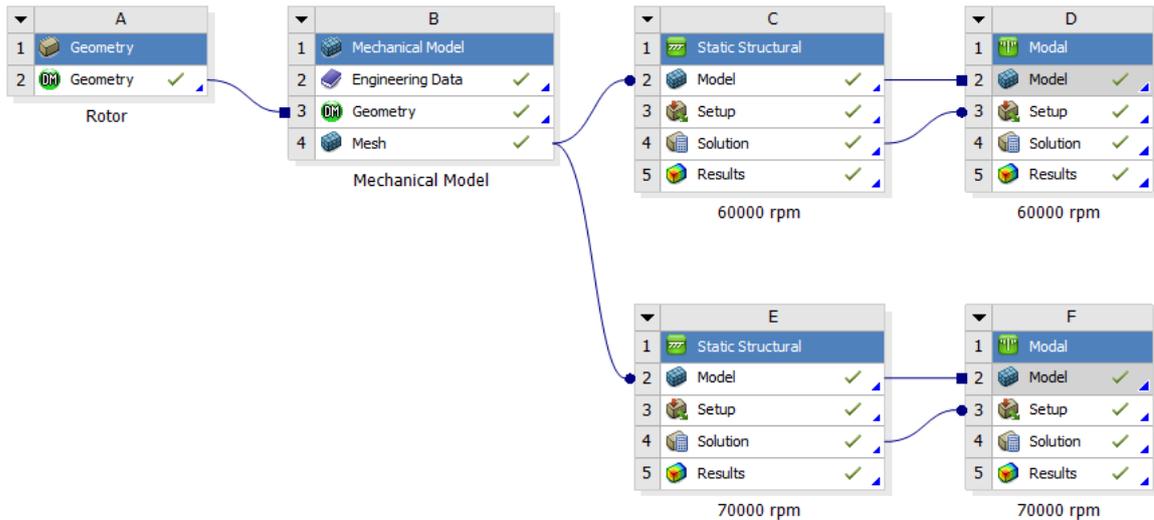


Obr. 8.28: Campbellův diagram – model rotoru M1.2.

8.2.3 Model rotoru M1.3

Modální analýza z principu neumožňuje zahrnout nelineární kontakty mezi tělesy. Nelineární kontakty jsou v programu Ansys Workbench při modální analýze automaticky přepnuty na lineární kontakty typu „Bonded“. Dílčí tělesa se pak chovají jako pevně slepená i v místech, kde reálně dochází k jejich oddalování, což může v některých případech vést ke značným nepřesnostem. Možností, jak při modální analýze zohlednit skutečný stav kontaktů je provedení tzv. „přednapět'ové“ modální analýzy, která se skládá ze dvou kroků.

1. Prvním krokem je řešení statické strukturální analýzy (v programu Ansys Workbench blok „Static Structural“), při které je rotor zatížen setrvačnými objemovými silami od rotace při požadovaných otáčkách. V našem případě byla provedena statická strukturální analýza zvláště při otáčkách $60000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ a $70000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$.
2. Druhým krokem je řešení modální analýzy při týchž otáčkách. Blok „Modal“ je napojen na kolonku „Solution“ bloku „Static Structural“, jak je patrné o obrázku 8.29. Pro zahrnutí skutečného stavu kontaktů při daném zatížení je následně třeba v záložce „Pre-Stress“ modální analýzy nastavit „Contact Status“ na „Use True Status“ [41].

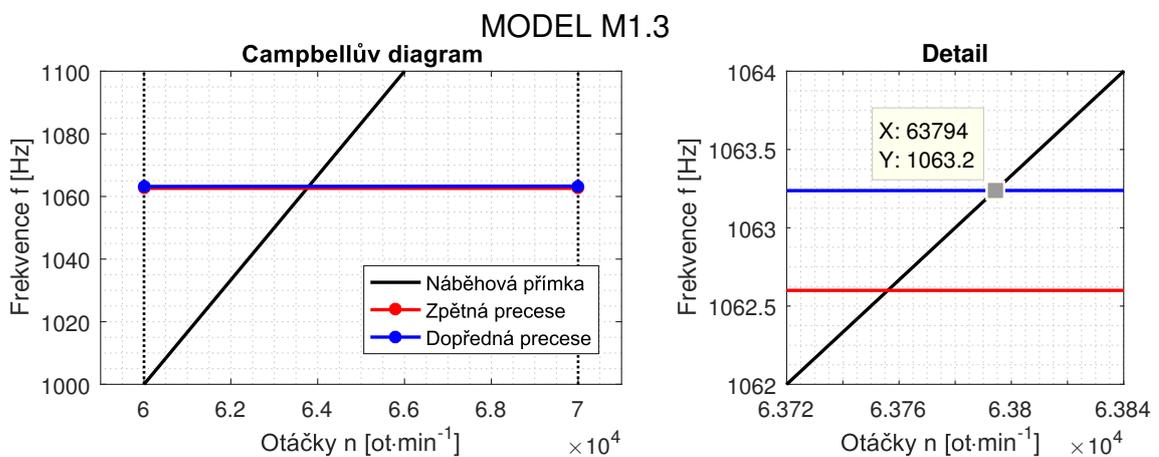


Obr. 8.29: Propojení bloků „Static Structural“ a „Modal“.

Nelineární kontakty mezi dílčími komponentami byly formulovány analogicky jako v případě deformačně-napětové analýzy plného modelu rotoru, viz podkapitola 8.1.1. V případě těla rotoru byla použita konečno-prvková síť modelu M1.1 s tím, že prvky SOLID185 byly nahrazeny prvky SOLID186 – bázovými funkcemi jsou polynomy 2. řádu. Konečno-prvková síť klece rotoru byla upravena tak, aby stykovým plochám, definovaným jako „Contact“, náležela jemnější síť. V tabulce 8.6 jsou vyhodnoceny hledané vlastní frekvence rotoru odpovídající prvnímu vlastnímu ohybovému tvaru. Z Campbellova diagramu, z obrázku 8.30, je patrné, že hodnota prvních kritických otáček při dopředné precesi $n_1 = 63794 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$.

	Vlastní frekvence f_1 [Hz]	
	$n = 60000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$	$n = 70000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$
Zpětná precese	1062,6	1062,6
Dopředná precese	1063,2	1063,3

Tab. 8.6: Model M1.3 – vlastní frekvence pro první vlastní ohybový tvar.



Obr. 8.30: Campbellův diagram – model rotoru M1.3.

8.2.4 Zhodnocení výsledků

V tabulce 8.7 jsou srovnány hodnoty prvních kritických otáček, které byly stanoveny v předchozích podkapitolách s použitím výpočtových modelů M1.1, M1.2 a M1.3. Model M1.3 nejméně vystihuje skutečný stav kontaktů mezi dílčími tělesy, přisuzujeme mu proto nejvyšší úroveň správnosti. Modely M1.1 a M1.2 lze z tohoto pohledu považovat za zjednodušené, jejich výhodou je však podstatně nižší výpočtová náročnost.

Model M1.1 vykazuje v důsledku uvažování pevných spojení mezi dílčími tělesy vyšší ohybovou tuhost, než je skutečná. Hodnoty prvních kritických otáček proto nadhodnocuje. V porovnání s modelem M1.3 byla získána o 0,59 % vyšší hodnota n_1 . V případě modelu M1.2 bychom očekávali, že v důsledku zanedbání tuhosti klece rotoru bude hodnota prvních kritických otáček vůči modelu M1.3 nižší. Jak je však patrné z tabulky 8.7, model M1.2 poskytuje hodnotu n_1 o 0,11 % nadhodnocenou. Příčinou je, že hmotné body reprezentující kruhy a zděře jsou vztaženy ke stykovým válcovým plochám těla rotoru. Za rotace však vzniká mezi kruhy a tělem rotoru mezera, tj. stykové válcové plochy kruhů a těla rotoru se vzájemně oddalují. Hmotnost kruhů a zděří je pak prostřednictvím tyčí přenesena do úseku mezi zděřemi. Tuto skutečnost zohledňuje model M1.3, v porovnání s modelem M1.2 proto vykazuje vyšší poddajnost.

Zjednodušené modely		Model M1.3	RSD [%]
Model	n_1 [ot·min ⁻¹]	n_1 [ot·min ⁻¹]	
M1.1	64329	63794	0,59
M1.2	63890		0,11

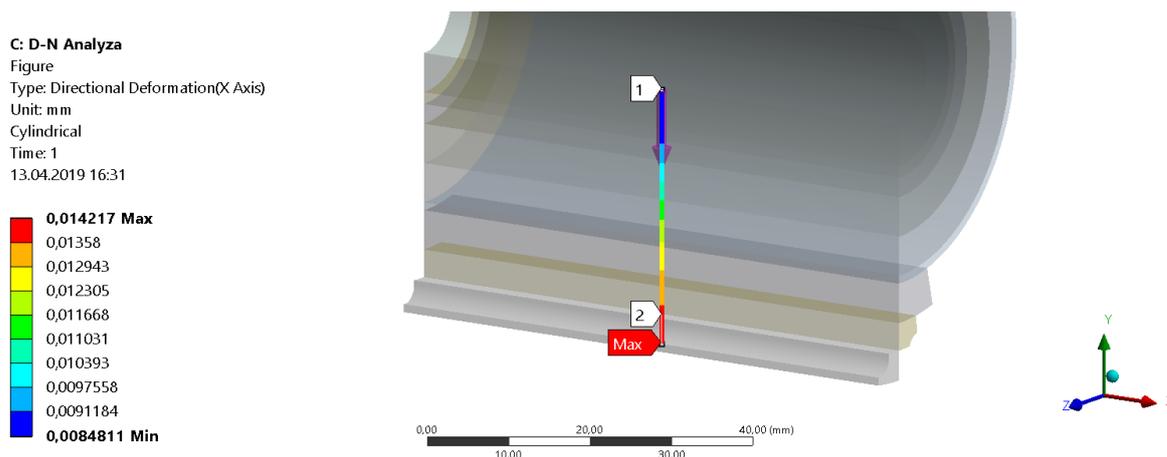
Tab. 8.7: Zhodnocení modelů M1.1 a M1.2 ve vztahu k modelu M1.3.

Navzdory velmi nízkým hodnotám relativních odchylek je patrné, že výpočtový model M1.1, uvažující pevná spojení mezi dílčími komponentami modelu geometrie, vede k poměrně nepřesným výsledkům. Vyžaduje-li situace použít pro vyhodnocení prvních kritických otáček zjednodušený model rotoru s nižší výpočtovou náročností, pak přesnějších výsledků dosáhneme s použitím výpočtového modelu M1.2.

8.3 Zhodnocení modelu ohybově tuhého rotoru úrovně 1

Nyní se podívejme, do jaké míry a s jakou přesností lze popsat chování zadaného rotoru s použitím modelu ohybově tuhého rotoru úrovně 1 sestaveného v kapitole 7. Srovnání deformačně-napětového stavu bude provedeno pro plný model rotoru z podkapitoly 8.1.1, srovnání hodnot kritických otáček bude provedeno pro model M1.3 z podkapitoly 8.2.3.

Na obrázku 8.31 je vykreslena cesta, podél které byly vyhodnocovány závislosti $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$, $\sigma_z(r)$, $\sigma_{red}(r)$ a $u_r(r)$. Cesta je orientovaná ve směru působení tíhového zrychlení, tj. v záporném směru osy y globálního souřadného systému. V odečteném průběhu radiálního posuvu jsou tudíž zahrnuty rovněž deformace pružných ložisek vyvolané vlastní tíhou rotoru a magnetickým tahem. Pro úplnost zdůrazněme, že v případě modelu úrovně 1 je posuv rotoru v důsledku deformace pružných podpor vyhodnocen samostatně jakožto posuv u_k .



Obr. 8.31: Plný model rotoru – definovaná cesta.

Vstupní parametry:

Způsob zadání vstupních parametrů do programu *Ohybove_Tuhy_Rotor.m* je patrný níže. Celková hmotnost rotoru $m = 4,1258$ kg byla odečtena z programu Ansys Workbench (záložka „Geometry“ – „Properties“). Dále je třeba poznamenat, že model úrovně 1 uvažuje pružné podpory týchž tuhostí. Konzervativním přístupem byla zadána hodnota $k_1 = k^B = 101 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$.

```

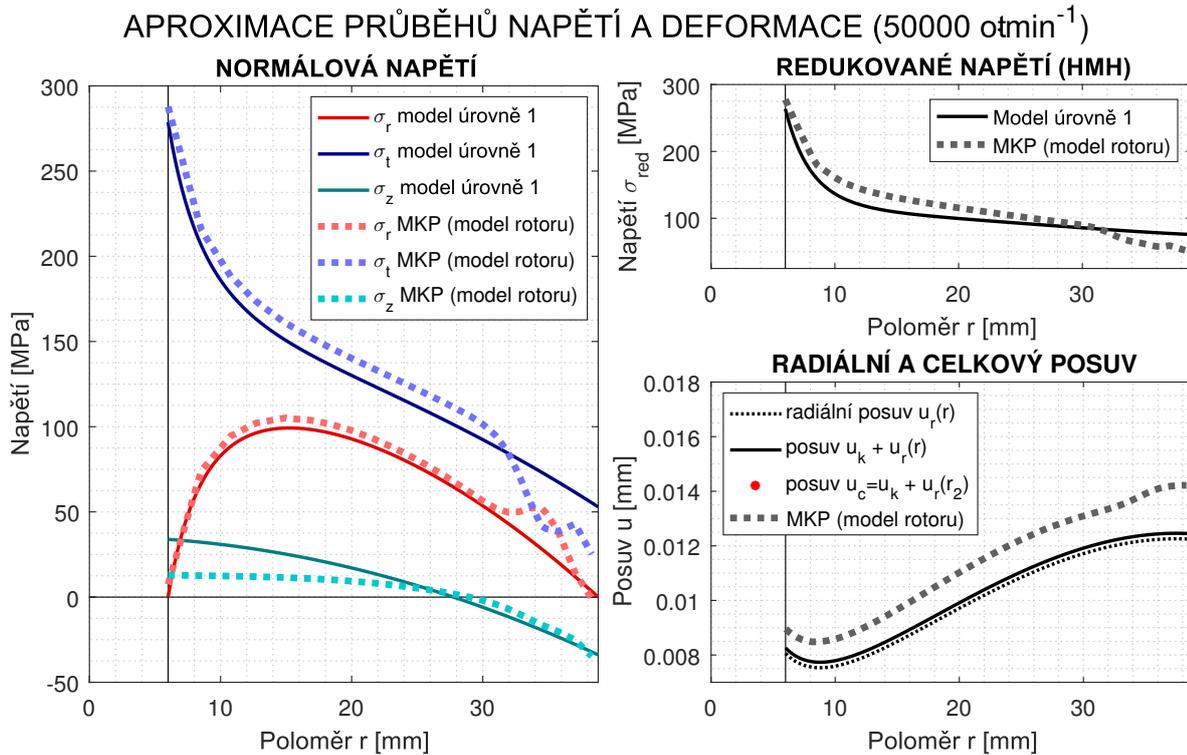
1  %% VSTUPNÍ PARAMETRY
2
3  % hmotnost rotoru: m [kg]
4  m = 4.1258;
5  % vnější poloměr: r1 [mm]; vnitřní poloměr: r2 [mm]
6  r1 = 6; r2 = 38.8;
7  % vůle mezi rotorem a statorem: delta [mm]
8  delta = 1.6;
9
10 % provozní otáčky: n [ot/min]; tíhové zrychlení: g [m/s^2]
11 n = 50000; g = 9.81;
12
13 % materiálové parametry:
14 % modul pružnosti v tahu: E [MPa]; Poissonův poměr: mu [-]
15 mu = 0.3; E = 200000;
16 % hustota: rho [kg/m^3]
17 rho = 7850;
18
19 % Tuhost pružných podpor: k1 [N/mm]; Magnetická tuhost: Cmg [N/mm]
20 k1 = 101000; Cmg = 333;

```

Výstupy programu:

Na obrázku 8.32 jsou vykresleny průběhy napětí a deformace rotoru aproximované s použitím modelu úrovně 1, tj. pomocí rotujícího válcového tělesa se svázanými axiálními posuvy. Odchylky v oblasti $r \in (30 \div 38,8)$ mm jsou způsobeny odlišnou tuhostí rotoru v oblasti děr, do

kterých jsou vsazeny tyče klece rotoru. Přesnost, s jakou je aproximována hodnota redukovaného napětí v kritickém místě $\sigma_{\text{red}}(r_1)$, hodnota celkového posuvu u_c a hodnota prvních kritických otáček n_1 , je vyhodnocena v tabulce 8.8 pomocí relativních odchylek. Relativní odchylka nabývá nejvyšší hodnoty v případě posuvu u_c . Hlavní příčinou této odchylky je použitý model rotujícího válcového tělesa, které v důsledku uvažování svázaných axiálních posuvů vykazuje nižší hodnoty radiálních posuvů. Tato skutečnost je patrná již z obrázku 7.8 z podkapitoly 7.2. K odchylce podstatnou měrou přispívá rovněž odlišná tuhost rotoru v oblasti děr.



Obr. 8.32: Deformačně-napět'ová odezva materiálu.

	$\sigma_{\text{red}}(r_1)$ [MPa]	u_c [mm]	n_1 [ot·min ⁻¹]
Model úrovně 1	263,51	$1,244 \cdot 10^{-2}$	66763
MKP (model rotoru)	277,66	$1,422 \cdot 10^{-2}$	63794
RSD [%]	3,70	9,44	3,22

Tab. 8.8: Relativní odchylky hodnot $\sigma_{\text{red}}(r_1)$, u_c a n_1 .

9 Závěr

Diplomová práce se zabývá dílčí oblastí mechanického návrhu rotoru točivého elektrického stroje, konkrétně posouzením deformačně-napět'ového stavu a kritických otáček rotoru. Praktická část práce je v souladu s cíli práce rozdělena do dvou sekcí – *modelování rotoru na úrovni 1* a *modelování rotoru na vyšších úrovních s použitím MKP*. Vzhledem k rozsahu práce byla problematika ohraničena pouze na posouzení mezního stavu pružnosti a mezního stavu deformace, vyhodnocovány byly pouze první kritické otáčky rotoru.

V rámci sekce *modelování rotoru na úrovni 1* bylo cílem sestavit zjednodušený výpočtový model rotoru, který bude řešitelný pomocí jednoduchých rovnic a umožní tak v krátkém čase přibližně stanovit deformačně-napět'ové poměry a první kritické otáčky. Záměrem bylo docílit úspory času při sestavování prvotního návrhu geometrie rotoru. Sestaveny byly celkem dva výpočtové modely rotoru úrovně 1 – *model ohybově poddajného rotoru na tuhých podporách* a *model ohybově tuhého rotoru na pružných podporách*. Oba výpočtové modely jsou zpracovány v programu Matlab v podobě M-souborů, viz příloha.

Model geometrie ohybově poddajného rotoru úrovně 1 tvoří letmo uložený nehmotný poddajný odstupňovaný hřídel zatížený tíhami soustředěných hmot. Mezi podporami jsou soustředěné hmoty rozloženy rovnoměrně po úseku s největším průměrem příčného průřezu. Do těchto hmot je přerozdělena hmotnost m_p paketu rotoru, případně dalších komponent (tyče, kruhy, atd.). Pro získání konzervativních výsledků lze tuto hmotnost navýšit o hmotnost hřídele mezi podporami. Soustředěná hmota m_r na letném konci představuje řemenici. Kromě vlastní tíhy je dále uvažováno zatížení tahem řemene F_r , přenášeným kroučícím momentem M_r a magnetickým tahem, který je definován magnetickou tuhostí C_{mg} . Řešení spočívá v sestavení matice poddajnosti hřídele α (matice příčinkových součinitelů), s použitím které jsou následně vyhodnoceny průhyby v polohách soustředěných hmot a první kritické otáčky. Průhyby se zahrnutím magnetického tahu jsou řešeny metodou prosté iterace, první kritické otáčky jsou vyhodnoceny s použitím Dunkerleyova vztahu a Rayleighovy energetické metody. Model dále umožňuje stanovit nominální normálová a smyková napětí v polohách soustředěných hmot a v polohách osazení hřídele při zatížení, které odpovídá maximálním průhybům. Pro tyto účely jsou použity vztahy vycházející z teorie prostého ohybu a krutu nosníků. Použití tohoto zjednodušeného modelu je omezeno na běžné rotory elektrických strojů, sestavené z odstupňovaného hřídele, svazku rotorových plechů, klece a dalších komponent.

Použití modelu ohybově tuhého rotoru úrovně 1 je omezeno na vysokorychlostní masivní rotory, pro které platí, že jediným podstatným zatížením jsou setrvačné objemové síly od rotace. S použitím redukovaného modelu – hmoty m , odpovídající hmotnosti rotoru, uložené na lineární pružině o tuhosti k_{eq} ekvivalentní tuhostem pružných podpor – je stanoven posuv rotoru jako tuhého celku, v důsledku deformace podpor, a první kritické otáčky. Model dále umožňuje aproximovat deformačně-napět'ový stav rotoru vyvolaný působením setrvačných objemových sil od rotace. Konkrétně se jedná o průběhy normálových napětí v cylindrickém souřadném systému, průběh redukovaného napětí dle podmínky HMH a průběh radiálního posuvu, ve středu úseku s největším průměrem. Pro tyto účely je použit model rotujícího válcového tělesa se svázanými axiálními posuvy, který je řešitelný diferenciálním přístupem v uzavřeném tvaru.

V rámci sekce *modelování rotoru na vyšších úrovních s použitím MKP* byly představeny různé přístupy k modelování rotoru při deformačně-napět'ové a modální analýze. Analýzy byly provedeny pro zadaný předběžný návrh vysokorychlostního masivního rotoru. V rámci

deformačně-napět'ové analýzy byl vyšetřován jeden konkrétní provozní stav – chod rotoru za studena. Představeny byly dva výpočtové modely rotoru. Prvotní výpočet byl proveden s použitím plného modelu geometrie s poměrně hrubou sítí. Výsledky prokázaly, že zatížení vlastní tíhou a magnetickým tahem nemá na deformačně-napět'ový stav rotoru podstatný vliv. Další analýza byla proto provedena s použitím výsečového modelu geometrie. Konečno-prvková síť byla zjemněna tak, aby věrohodně postihla vysoké gradienty napětí v kritických místech. Jediný lokální extrém redukovaného napětí, přesahující mez kluzu, se nacházel v oblasti ostřejšího přechodu mezi kruhem a tyčí, tj. v oblasti singularity. Stav napjatosti v této oblasti byl dále analyzován s použitím sub-modelu. Ostré přechody byly opatřeny zaobleními o poloměru 0,1 mm. Při uvažování ideálně pružně-plastického modelu materiálu bylo dosaženo mezního stavu pružnosti lokálně na okraji přechodu. Extrém redukovaného plastického přetvoření dosahoval v tomto místě hodnoty $\epsilon_{red}^{pl} = 1,38 \cdot 10^{-3}$. Vývoj deformačně-napět'ového stavu v této oblasti by bylo vhodné dále zanalyzovat za zvýšených teplot, případně při cyklickém namáhání.

Z předešlého plyne následující závěr. Prokáže-li se, že jediným podstatným zatížením rotoru jsou setrvačné objemové síly od rotace, pak lze docílit značné úspory prvků s použitím výsečového modelu geometrie. Při hodnocení mezního stavu deformace (vymezení vůle mezi rotorem a statorem) je však třeba mít na paměti, že tento model nezahrnuje posuv rotoru jako tuhého celku v pružném uložení, který je vyvolaný tíhou rotoru a magnetickým tahem.

V rámci modální analýzy byly s použitím Campbellova diagramu vyhodnocovány první kritické otáčky rotoru n_1 . Prvotní odhad hodnoty n_1 byl stanoven s použitím značně zjednodušeného výpočtového modelu M0. Pro tyto účely by bylo možné použít rovněž model ohybově tuhého rotoru úrovně 1. Kritické otáčky n_1 byly dále vyhodnoceny s použitím tří různých výpočtových modelů, M1.1, M1.2 a M1.3. Campbellův diagram byl v případě těchto modelů sestavován na úzkém intervalu otáček blízkých odhadnuté hodnotě. V rámci tohoto intervalu bylo možné aproximovat závislosti vlastních frekvencí na otáčkách lineárně, čímž bylo dosaženo značné úspory času. Model M1.1 uvažoval pevná spojení dílčích komponent (kontakty typu „Bonded“), v případě výpočtového modelu M1.2 byly dílčí modely klece a zděří nahrazeny pomocí prvků typu MASS21. V případě modelu M1.3 byla provedena přednapět'ová modální analýza. Tento model má nejvyšší úroveň, neboť nejvěrohodněji vystihuje skutečný stav kontaktů. Nevýhodou je však řádově vyšší výpočtová náročnost. Ze získaných výsledků vyplynulo, že v případě nutnosti použít výpočtově méně náročný model je vhodnější volbou model M1.2. Model M1.1 vykazuje v důsledku uvažování kontaktů typu „Bonded“ vyšší ohybovou tuhost, než je skutečná. Hodnoty n_1 proto významně nadhodnocuje.

Ve vztahu k vyšetřovanému masivnímu rotoru bylo na závěr provedeno zhodnocení modelu ohybově tuhého rotoru úrovně 1. Průběhy normálových napětí, redukovaného napětí, radiálního posuvu a hodnoty prvních kritických otáček byly navzdory značným zjednodušením aproximovány s přijatelnou přesností. Relativní odchylka lokálních extrémů redukovaného napětí nacházejících se na vnitřní válcové ploše těla rotoru činí 3,7 %. K dosažení mezního stavu pružnosti však dochází v oblasti přechodu mezi kruhy a tyčemi, tj. mimo oblast popsatelnou pomocí jednoduchých rovnic.

Literatura

- [1] HAMMER, Miloš. *Elektrotechnika a elektronika: přednášky*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006, 134 s. ISBN 80-214-3334-5.
- [2] TONG, Wei. *Mechanical design of electric motors*. Boca Raton: CRC Press, 2014, 702 s. ISBN 978-1-4200-9143-4.
- [3] MRAVENEC, Rudolf. *Elektrické stroje a přístroje: III. Navrhování elektrických strojů točivých* Praha: STNL, 1986, 240 s.
- [4] JANÍČEK, Přemysl. *Systémová metodologie: brána do řešení problémů*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014, 1 sv. ISBN 978-80-7204-887-8.
- [5] LOŠÁK, Petr. *Rotorové soustavy*. (přednáška) Brno: Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, 27. 8. 2018.
- [6] CIGÁNEK, Ladislav a Miroslav BAUER. *Elektrické stroje a přístroje*. 2. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1955, 634 s.
- [7] KUKAČKA, Radek. *Výpočet průhybu hřídele elektrického stroje zahrnující vliv magnetického tahu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 67 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.
- [8] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. 3. přeprac. vyd., V Akademickém nakladatelství CERM 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [9] DONÁT, Martin. Computational Modelling of the Unbalanced Magnetic Pull by Finite Element Method. *Procedia Engineering* [online]. 2012, vol. 48, s. 83-89 [cit. 2018-10-05]. Dostupné z: http://www.sensoplan.com/_literature_42870/The_influence_of_magnetic_forces_on_the_stability_behavior_of_large_electrical_machines
- [10] SPRYSL, H, H VÖGELE a G EBI. The Influence of Magnetic Forces on the Stability Behavior of Large Electrical Machines. *VDI Berichte*. 1996, č. 1285. 10 s.
- [11] BURŠA, Jiří, Jana HORNÍKOVÁ, Přemysl JANÍČEK. *Pružnost a pevnost* [online]. 1.vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003 [cit. 2019-05-06]. Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>. ISBN80-7204-268-8
- [12] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v Inženýrských výpočtech* [online]. [cit. 2019-05-06]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/cs/studium/studijni-materialy.html>
- [13] ONDRÁČEK, Emanuel, Jan VRBKA, Přemysl JANÍČEK a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*. 4., přeprac. vyd., V Akademickém nakladatelství CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006, 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [14] BURŠA, Jiří. *Metoda konečných prvků* [online]. [cit. 2019-05-06]. Dostupné z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/12-prednaska.ppsx
- [15] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika II. díl, Dynamika*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1987, 688 s.

- [16] SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. *Základy dynamiky strojů*. Praha: ČVUT, 1997, 319 s. ISBN 80-01-01622-6.
- [17] ZAPOMĚL, Jaroslav. *Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: část Dynamika rotorů* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2012 [cit. 2019-05-06]. ISBN 978-80-248-2754-4. Dostupné z: <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2754-4.pdf>
- [18] MALENOVSKÝ, Eduard. Dynamika rotorových soustav: Campbellův diagram [online]. [cit. 2019-05-06]. Studijní opory. Dostupné z: http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dyn_rot/kapitola_2.html
- [19] SHARCNet. *Campbell Diagram Chart Results* [online]. [cit. 2019-05-06]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/wb_sim/ds_campbell_diagram_results.html
- [20] SIKORA, Michal. *Inovace systému chlazení točivých elektrických strojů s využitím CFD metod*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 182 s. Vedoucí práce prof. Ing Ctirad Kratochvíl, DrSc..
- [21] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE, Richard G. (Richard Gordon) BUDYNAS, Martin HARTL a Miloš VLK. *Konstruování strojních součástí*. Brno: VUTIUUM, 2010, 1159 s. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [22] KOŽEŠENÍK, Jaroslav. *Dynamika strojů*. Praha: STNL, 1958, 334 s.
- [23] AL-ANSARI, Luay S. Calculating of Natural Frequency of Stepping Cantilever Beam. *International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering* [online]. 2012, vol. 12, no. 5, s. 59-68 [cit. 2018-12-02]. Dostupné z: http://ijens.org/Vol_12_I_05/1217204-05-3737-IJMME-IJENS.pdf
- [24] MAROŠ, Bohumil a Marie MAROŠOVÁ. *MNumerické metody I*. Brno: CERM, 2003, 144 s. ISBN 80-214-2388-9.
- [25] JANÍČEK, Přemysl a Jindřich PETRUŠKA. *Pružnost a pevnost II: úlohy do cvičení*. Brno: CERM, 2002, 182 s. ISBN 80-214-2335-8.
- [26] VINBERG, E. B. *A course in algebra*. Providence: American Mathematical Society, 2003, 511 s. ISBN 0-8218-3318-9.
- [27] HALLIDAY, David, Robert RESNICK, Jearl WALKER a Petr DUB. *Fyzika. Svazek 1. 2. přeprac. vyd.* Brno: VUTIUUM, 2013, ISBN 978-80-214-4123-1.
- [28] THOMSON, William a Marie DILLON DAHLEH. *Theory of Vibration with Applications*. 5. vyd. Upper Sadde River: Prentice Hall, 1998, 524 s. ISBN 978-0-13-651068-0.
- [29] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika II. díl, Dynamika*. Praha: SNTL, 1987, 684 s.
- [30] GONDA, Ján. *Kmitanie pružných telies*. Bratislava: SAV, 1961, 364 s.
- [31] PAZ, Mario a William LEIGH. *Structural Dynamics: Theory and Computation*. 5. vyd. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. ISBN 1-4020-7667-3.
- [32] HAPPUNEN, Jussi. *High-speed solid-rotor induction machine electromagnetic calcu-*

- lation and design*. Lappeenranta: Lappeenrannan teknillinen yliopisto. Digipiano, 2004, 168 s. ISBN 951-764-981-9.
- [33] SUBBIAH, Raj a Jeremy Eli LITTLETON. *Rotor and Structural Dynamics of Turbomachinery: A Practical Guide for Engineers and Scientists*. Cham: Springer International Publishing, 2018, 289 s. ISBN 978-3-319-73295-4.
- [34] BORESI, Arthur P. a Richard J. SCHMIDT. *Advanced Mechanics of Materials* [online]. 6. vyd. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003 [cit. 2019-03-12]. 659 s. ISBN 978-0-471-43881-6. Dostupné z: <https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpAMME0001/advanced-mechanics-materials/advanced-mechanics-materials>
- [35] SHARCNet. *MASS21* [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_MASS21.html
- [36] SHARCNet. *Bearings* [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/wb_sim/ds_bearings.html
- [37] SHARCNet. *SOLID186* [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_SOLID186.html
- [38] SHARCNet. *Contact Tool* [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/wb_sim/ds_Contact_Tool.html
- [39] SHARCNet. *Equivalent (von Mises)* [online]. [cit. 2019-04-13]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/wb_sim/ds_Equiv_Stress.html.
- [40] SHARCNet. *Rotordynamics Controls* [online]. [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/wb_sim/ds_rotordyn_controls.html
- [41] SHARCNet. *Pre-Stress* [online]. [cit. 2019-04-20]. Dostupné z: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/wb_sim/ds_pre_stress_or.html

Seznam symbolů, veličin a zkratk

Veličina/Symbol	Jednotka	Popis
Π_L	[J]	Lagrangeův potenciál
W	[J]	celková energie napjatosti tělesa
P	[J]	potenciální energie vnějších sil
E	[J]	mechanická energie soustavy
E_p	[J]	potenciální energie
E_k	[J]	kinetická energie
K		globální matice tuhosti
U		matice deformačních posuvů
F		globální matice zatížení
M		globální matice hmotnosti
G		matice gyroskopických účinků
α		matice poddajnost hřídele
J		matice ekvivalentních momentů setrvačnosti
\mathbb{T}_ε	[–]	tenzor přetvoření
\mathbb{T}_σ	[MPa]	tenzor napětí
f	[Hz]	frekvence (kmitočet)
ω	[rad·s ⁻¹]	úhlová frekvence
n	[ot·min ⁻¹]	otáčky
f_j	[Hz]	j -tá vlastní frekvence
Ω_j	[rad·s ⁻¹]	j -tá vlastní (kritická) úhlová frekvence
n_j	[ot·min ⁻¹]	j -té kritické otáčky
λ		vlastní číslo
k	[N·mm ⁻¹]	tuhost
k_1	[N·mm ⁻¹]	tuhost pružných podpor
k_{eq}	[N·mm ⁻¹]	ekvivalentní tuhost rotoru
C_{mg}	[N·mm ⁻¹]	magnetická tuhost
α	[mm·N ⁻¹]	příčinkový součinitel
F	[N]	síla
F_G	[N]	tíhová síla

F_{mg}	[N]	magnetický tah
F_r	[N]	tah řemene
dF_o	[N]	elementární objemová síla od rotace
M_o	[N·mm]	ohybový moment
M_k	[N·mm]	kroučící moment
g	[m·s ⁻²]	tíhové zrychlení
σ	[MPa]	normálové napětí
τ	[MPa]	smykové napětí
σ_r	[MPa]	radiální napětí
σ_t	[MPa]	tangenciální napětí
σ_z	[MPa]	axiální napětí
σ_{red}	[MPa]	redukované napětí
A, B		integrační konstanty rotujícího válcového tělesa
ε_r	[–]	radiální přetvoření
ε_t	[–]	tangenciální přetvoření
ε_z	[–]	axiální přetvoření
ε_{red}^c	[–]	celkové redukované přetvoření
ε_{red}^{el}	[–]	redukované elastické přetvoření
ε_{red}^{pl}	[–]	redukované plastické přetvoření
d	[mm]	průměr
r	[mm]	poloměr
L	[mm]	rozpětí ložisek
a, b, c	[mm]	rozměry odstupňovaného hřídele
δ	[mm]	vůle mezi rotorem a statorem
J_y	[mm ⁴]	moment setrvačnosti příčného průřezu
J_{ij}	[mm ⁴]	ekvivalentní moment setrvačnosti průřezu
J_p	[mm ⁴]	polární moment setrvačnosti průřezu
w_o	[mm ³]	modul průřezu v ohybu
w_k	[mm ³]	modul průřezu v krutu
m	[kg]	hmotnost
m_p	[kg]	hmotnost paketu rotoru
m_r	[kg]	hmotnost řemenice
I_1, I_2, I_3	[kg·mm ²]	hlavní momenty setrvačnosti
I	[–]	počet dělení úseku zatíženého hmotností m_p

u	[mm]	deformační posuv
w	[mm]	průhyb
u_r	[mm]	radiální posuv
u_k	[mm]	posuv ohybově tuhého rotoru v důsledku deformace pružných podpor
R_{\min}	[mm]	minimální hodnota rezidua
J_{\max}	[-]	maximální počet iterací
ρ	[kg·m ⁻³]	hustota
μ	[-]	Poissonův poměr
μ'	[-]	efektivní Poissonův poměr
E	[MPa]	modul pružnosti v tahu
σ_k	[MPa]	mez kluzu
RSD	[%]	relativní odchylka (<i>Relative Standard Deviation</i>)
MKP		metoda konečných prvků
VVÚ		vnitřní výslední účinek
HMH		<i>Huber-von Mises-Hencky</i> (energetická hypotéza)
MSÚP		mezní stav únavové pevnosti

Seznam obrázků

2.1	Zjednodušený model rotoru (vychází z [3]).	6
3.1	Nevyvážený magnetický tah (vychází z [10]).	7
3.2	Model rotoru se soustředěnou hmotou m_1	7
3.3	Stabilita průhybu v důsledku přítomnosti magnetického tahu.	8
4.1	První vlastní ohybový tvar.	10
4.2	Souběžná a protiběžná precese.	11
4.3	Campbellův diagram (vychází z [18]).	12
6.1	Prostě uložený nosník zatížený mezi podporami.	18
6.2	Letmo uložený hřídel zatížený $I + 1$ silami.	19
6.3	Vetknutý mnohonásobně odstupňovaný nosník.	21
6.4	Odstupňovaný a ekvivalentní hřídel.	21
6.5	Odstupňovaný hřídel zatížený $I + 1$ silami.	23
6.6	Odstupňovaný hřídel zatížený třemi silami.	23
6.7	Schéma hřídele – ekvivalentní moment setrvačnosti J_{12}	24
6.8	Model ohybově poddajného rotoru s $I + 1$ soustředěnými hmotami.	28
6.9	Model ohybově poddajného rotoru pro $I = 1$	30
6.10	Stabilita iterativního řešení v závislosti na poměru C_{mg} a k_{11}	31
6.11	Statically ekvivalentní zatížení tahu řemene při nulovém počátečním předpětí.	32
6.12	Elementární prvek – prutová napjatost [8].	33
6.13	Uvažované zatížení hřídele za provozu.	33
6.14	Oblast podstatného vlivu posouvající síly [8].	34
6.15	Kritická místa normálového napětí σ	34
6.16	Extrémní a nominální normálová napětí [8].	35
6.17	Extrémní normálová napětí v místě vrubu [8].	36
6.18	Kritická místa smykového napětí hřídele.	38
6.19	Extrémní a nominální smyková napětí [8].	38
6.20	Model rotoru s jednou soustředěnou hmotou.	40
6.21	Schéma modelu rotoru s jednou hmotou.	40
6.22	Zjednodušený model rotoru s jednou hmotou.	41
6.23	Model rotoru se dvěma soustředěnými hmotami.	42
6.24	Rayleighova metoda – prostě uložený nosník.	46
6.25	Rayleighova metoda – příčné kmitání nosníku.	46
6.26	Nehmotný nosník s n hmotami.	48
6.27	První ohybový vlastní tvar hřídele s letmým uložením [31].	50
6.28	Model geometrie modelu ohybově poddajného rotoru úrovně 1.	51
6.29	Zatížení modelu ohybově poddajného rotoru úrovně 1.	51
6.30	Model rotoru elektromotoru (vychází z [7]).	53
6.31	Model rotoru elektromotoru v programu Ansys Workbench.	54
6.32	Průhyby hřídele elektromotoru.	55
6.33	Nominální normálová napětí hřídele elektromotoru.	56
6.34	Nominální smyková napětí hřídele elektromotoru.	56
7.1	Zjednodušený model geometrie masivního rotoru.	59
7.2	Ekvivalentní tuhost ohybově tuhého rotoru.	60
7.3	Průběhy hlavních napětí σ_r , σ_t a σ_z	62
7.4	Rotující válcové těleso.	63
7.5	Radiální napětí válcového tělesa při různých okrajových podmínkách.	63

7.6	Aproximace průběhů σ_r , σ_t a σ_z pomocí válcových těles.	64
7.7	Aproximace průběhů σ_{red} (HMH) pomocí válcových těles.	64
7.8	Aproximace průběhů u_r pomocí válcových těles.	64
7.9	Závislost relativních odchylek hodnot $u_r(r_2)$ a $\sigma_{red}(r_1)$ na otáčkách.	65
7.10	Dvojnásobně elementární prvek válcového tělesa (vychází z [34]).	66
7.11	Deformace a napjatost rotujícího válcového tělesa varianty (b).	70
7.12	Aproximace průběhu napětí a radiálního posuvu pomocí analytického řešení.	70
7.13	Model ohybově tuhého rotoru úrovně 1.	71
7.14	Celkový posuv ohybově tuhého rotoru.	72
8.1	Komponenty modelu geometrie zadaného rotoru.	73
8.2	Rozměry modelu geometrie zadaného rotoru.	73
8.3	Model geometrie ventilátoru.	74
8.4	Výsledná konečno-prvková síť a model ventilátoru.	75
8.5	Dílčí modely ložisek a magnetického tahu.	76
8.6	Radiální posuvy těla rotoru a „Contact Status“ mezi kruhy a zděřemi.	76
8.7	Tělo rotoru – redukované napětí „Equivalent von Mises“.	77
8.8	Klec a zděře – redukované napětí „Equivalent von Mises“.	77
8.9	Posuvy u_y v rovině xy po vnější a vnitřní válcové ploše těla rotoru.	78
8.10	Výšečový model geometrie rotoru – konečno-prvková síť.	79
8.11	Výšečový model – radiální posuvy těla rotoru a kontakt mezi kruhy a zděřemi.	79
8.12	Výšečový model, tělo rotoru – „Equivalent von Mises“.	80
8.13	Výšečový model, klec rotoru a zděře – „Equivalent von Mises“.	80
8.14	Propojení bloků „Static Structural“ globálního modelu a sub-modelu.	81
8.15	Sub-model oblasti přechodu mezi kruhem a tyčí.	81
8.16	Submodel klece – „Equivalent von Mises“ v oblasti singularity.	82
8.17	Zaoblení ostrých přechodů mezi kruhem a tyčí.	82
8.18	Napětí „Equivalent von Mises“ v místě zaoblených přechodů.	82
8.19	Závislost σ - ϵ ideálně pružně-plastického modelu materiálu slitiny CuCrZr.	83
8.20	Redukované napětí a celkové redukované přetvoření „Equivalent von Mises“.	83
8.21	Místa pozorování deformačně-napět'ové odezvy materiálu.	84
8.22	Deformačně-napět'ová odezva materiálu.	84
8.23	Model rotoru M0.	85
8.24	Campbellův diagram – model rotoru M0.	86
8.25	Model geometrie a konečno-prvková síť modelu M1.1.	86
8.26	Campbellův diagram – model rotoru M1.1.	87
8.27	Model rotoru M1.2.	87
8.28	Campbellův diagram – model rotoru M1.2.	88
8.29	Propojení bloků „Static Structural“ a „Modal“.	89
8.30	Campbellův diagram – model rotoru M1.3.	89
8.31	Plný model rotoru – definovaná cesta.	91
8.32	Deformačně-napět'ová odezva materiálu.	92

Seznam tabulek

6.1	Materiálové charakteristiky konstrukční oceli.	17
6.2	Kritické úhlové frekvence spojitého nosníku.	48
6.3	Přesnost stanovení maximálního průhybu w_{ex}	56
6.4	Přibližné stanovení prvních kritických otáček n_1	57
7.1	Posuv u_k rotoru z obrázku 7.1.	60
7.2	První kritická úhlová frekvence Ω_1 rotoru z obrázku 7.1.	61
7.3	Relativní odchylky mezi hodnotami napětí a radiálního posuvu.	65
7.4	Relativní odchylky hodnot $\sigma_{red}(r_1)$ a $u_r(r_2)$	71
8.1	Materiálové parametry komponent rotoru.	74
8.2	Hmotnosti kruhů, zděří a tyčí.	85
8.3	Model M1.1 – vlastní frekvence pro první vlastní ohybový tvar.	87
8.4	Hlavní momenty setrvačnosti kruhů a zděří.	88
8.5	Model M1.2 – vlastní frekvence pro první vlastní ohybový tvar.	88
8.6	Model M1.3 – vlastní frekvence pro první vlastní ohybový tvar.	89
8.7	Zhodnocení modelů M1.1 a M1.2 ve vztahu k modelu M1.3.	90
8.8	Relativní odchylky hodnot $\sigma_{red}(r_1)$, u_c a n_1	92

Přílohy

Součástí elektronické přílohy jsou výpočtové modely rotoru úrovně 1 sestavené v podkapitolách 6.3 a 7.3. Výpočtové modely jsou zpracovány v programu Matlab v podobě M-souborů:

- *Ohybove_Poddajny_Rotor.m*,
- *Ohybove_Tuhy_Rotor.m*.

Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117004>.