

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

Diplomová práce

Konzistence v Saatyho matici a dalších
maticích párových srovnání



Vedoucí diplomové práce:

doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.

Rok odevzdání: 2017

Vypracovala:

Bc. Kristýna Belobradová

AME, II. ročník

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Kristýna Belobradová

Název práce: Konzistence v Saatyho matici a dalších maticích párových srovnání

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt:

Diplomová práce se zaměřuje na různé přístupy k měření (ne)konzistence v Saatyho matici. V první části je nejprve uveden princip metody AHP. Další část je zaměřena na indexy nekonzistence v Saatyho matici, dále jsou zde také uvedeny axiomatické vlastnosti indexů a vztahy mezi indexy. Jednotlivé indexy jsou vysvětleny na příkladech.

Klíčová slova: Analytický hierarchický proces (AHP), Saatyho škála, párové srovnávání, Saatyho matice, (ne)konzistence, indexy nekonzistence, axiomatické vlastnosti.

Počet stran: 57

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Kristýna Belobradová

Title: Consistence in the Saaty's matrix and other pairwise comparison matrices

Type of thesis: Master's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.

The year of presentation: 2017

Abstract:

The master's thesis deals with different approaches to measurement of (in)consistency in Saaty's matrix. The first part shows basic principles of AHP. The next section is focused on various inconsistency indices in Saaty matrix, then there are also introduced axiomatic properties of inconsistency indices and relationships between them. Individual indices are explained on examples.

Key words: Analytic hierarchy process (AHP), Saaty's scale, pairwise comparison, Saaty's matrix, (in)consistency, inconsistency indices, axiomatic properties.

Number of pages: 57

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod odborným vedením doc. RNDr. Jany Talašové, CSc., a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny použité zdroje.

V Olomouci dne

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala vedoucí mé diplomové práce doc. RNDr. Janě Talašové, CSc. za odborné vedení, poskytování rad a za čas, který mi věnovala při vypracování mé diplomové práce.

Obsah

Úvod	8
1 Analytický hierarchický proces (AHP)	9
1.1 Hierarchická struktura.....	9
1.1.1 Kritéria.....	10
1.1.2 Párové srovnávání	11
1.2 Saatyho matice	12
1.3 Váhy kritérií.....	14
1.4 Dílčí hodnocení variant.....	16
1.5 Celkové hodnocení variant	17
1.6 Klady a zápory AHP	17
1.6.1 Klady AHP	17
1.6.2 Zápory AHP.....	18
2 Konzistence	19
3 Měření (ne)konzistence	23
3.1 Index nekonzistence CI	26
3.2 Podílový koeficient nekonzistence CR	27
3.3 Geometrický index nekonzistence	28
3.4 Harmonický index nekonzistence	31
3.5 Index determinantů	33
3.6 Index nejednoznačnosti (Ambiguity index).....	36
3.7 Index relativní chyby	38
3.8 Koczkodaj index	40
3.9 Golden-Wang index.....	42
3.10 Index c_3	44
3.11 Index ρ	45
4 Vlastnosti indexů nekonzistence	48

4.1	Axiomatické vlastnosti indexů nekonzistence	48
4.1.1	Význam axiomů.....	51
4.1.2	Splnění axiomů.....	52
4.2	Vztahy mezi indexy nekonzistence.....	53
Závěr.....		55
Použitá literatura.....		56

Úvod

Diplomová práce se věnuje metodě analytického hierarchického procesu (AHP), především se zaměřuje na měření konzistence v Saatyho matici. Metoda AHP je jednou z nejvyužívanějších metod vícekriteriálního rozhodování. Úlohou vícekriteriálního rozhodování se rozumí výběr nejlepší varianty z množiny variant, které jsou hodnoceny dle stanovených kritérií. Podstatou metody AHP je složitější rozhodovací problém členit na menší části (tvoří se tak hierarchická struktura). Důležitou součástí metody AHP je párové srovnávání kritérií (popř. variant), kde preference kritérií (popř. variant) jsou vyjádřeny pomocí tzv. devítibodové Saatyho škály. Metoda AHP tedy patří do metod vícekriteriálního rozhodování založených na párovém srovnávání.

První kapitola se zabývá pojmy souvisejícími s metodou AHP a Saatyho maticí. Je zde také uveden postup pro výpočet vah ze Saatyho matice a jsou tu shrnuté výhody a nevýhody této metody.

Druhá kapitola se věnuje přímo konzistenci Saatyho matice, je zde tedy uvedena definice konzistence a věty vztahující se k této problematice (za jakých podmínek je matice konzistentní a co pro konzistentní matici platí).

Ve třetí kapitole jsou popsány indexy nekonzistence, které slouží k měření (ne)konzistence Saatyho matice. Každý z daných indexů je podrobně vysvětlen a ilustrován na příkladu.

Čtvrtá kapitola se zabývá axiomatickými vlastnostmi, které by měly indexy nekonzistence splňovat, aby měřily nekonzistenci matic přiměřeně. Dále jsou zde také uvedené vztahy mezi některými indexy nekonzistence.

Práce je zaměřena na matice párových srovnání v multiplikativním tvaru. Existují také matice v aditivním tvaru, kterými se však tato práce nezabývá. Diplomová práce vycházela především z rozsáhlé práce od Mattea Brunelliho, který se zabývá i maticemi v aditivním tvaru. Základní věty o konzistenci v Saatyho matici byly čerpány z literatury, jejímž autorem je Jaroslav Ramík.

Cílem diplomové práce je popsat různé přístupy k měření (ne)konzistence v maticích párových srovnání, především se práce zaměřuje na Saatyho matici a také tyto přístupy ilustrovat na příkladech, protože je kladen důraz na srozumitelnost textu pro čtenáře.

1 Analytický hierarchický proces (AHP)

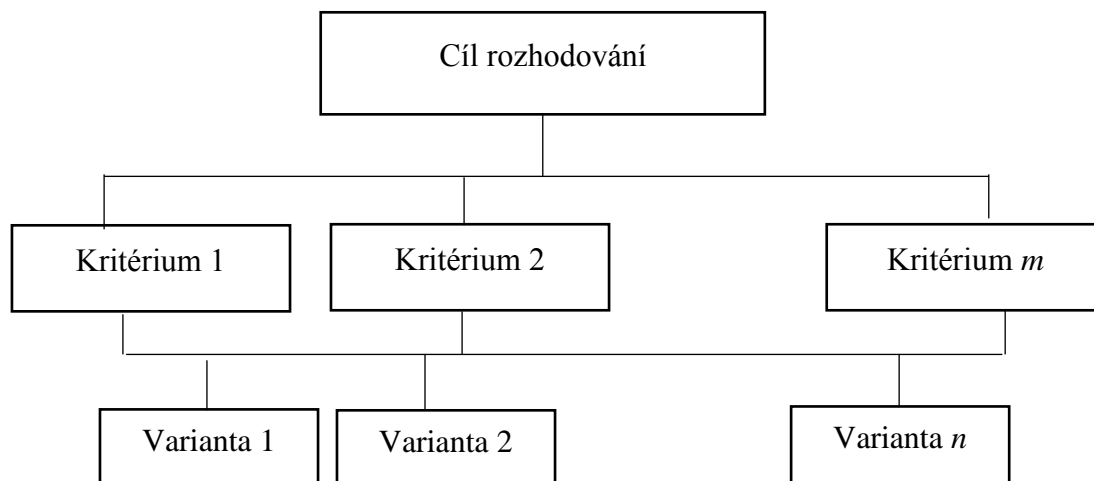
Analytický hierarchický proces - AHP (Saaty [1]) je jedna z nejužívanějších metod vícekritériálního rozhodování, kdy existuje více než jedna možnost řešení a rozhoduje se na základě více než jednoho kritéria. Podstatou metody AHP je rozčlenění složitého problému rozhodování do tzv. hierarchické struktury.

1.1 Hierarchická struktura

Rozhodovací problém se rozčlení na aspekty, které ovlivňují celkový cíl. Tyto aspekty lze dále dělit, čímž vzniká hierarchická struktura, která umožňuje komplexní pohled na problém.

Na první úrovni v hierarchii stojí celkový cíl rozhodování, další úroveň hierarchie tvoří kritéria K_1, \dots, K_m , která upřesňují cíl rozhodování. Tato kritéria lze popřípadě dělit na subkritéria. Na poslední úrovni se nacházejí varianty x_1, \dots, x_n , z nichž se vybírá ta varianta, která nejvíce naplňuje celkový cíl rozhodování.

Nejjednodušší hierarchií je tříúrovňová hierarchie, kterou lze zakreslit do obrázku následovně (obr. 1.1).

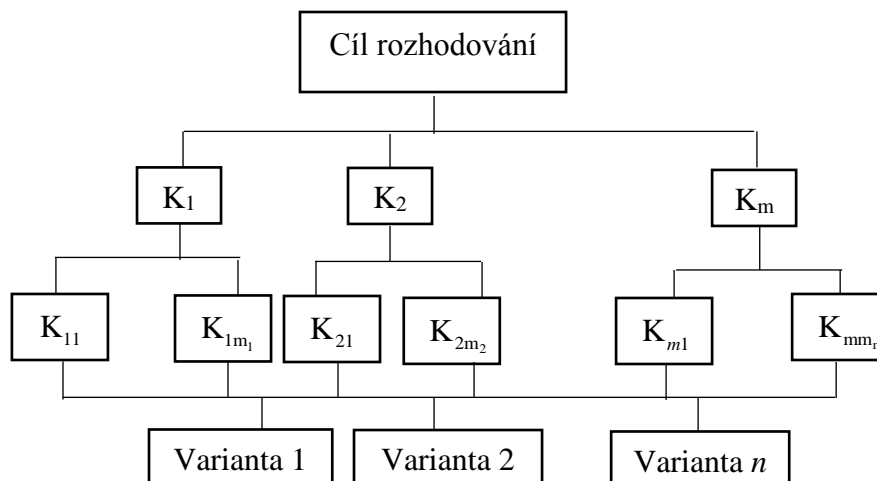


Obr. 1.1: Tříúrovňová hierarchie

Příkladem takové hierarchie může být „Koupě notebooku“, kdy cílem je koupit vhodný notebook. Kritéria v tomto případě mohou být cena, výkonnost, barva, operační

paměť, velikost displeje, operační systém notebooku atd. Varianty jsou například Asus, Lenovo, Acer atd.

Pokud lze kritéria na druhé úrovni hierarchie ještě rozčlenit na tzv. subkritéria vzniká čtyřúrovňová hierarchie (Obr. 1.2).



Obr. 1.2: Čtyřúrovňová hierarchie

Příkladem čtyřúrovňové hierarchie může být situace, kdy cílem rozhodování je výběr zaměstnání. Při výběru nejlepšího zaměstnání se mohou použít např. tato kritéria: pracovní doba, finanční ohodnocení, dostupnost. Kritérium finanční ohodnocení lze ještě rozčlenit na subkritéria mzda a benefity. Kritérium dostupnost lze rozčlenit na subkritéria čas dojíždění, MHD spojení apod.

1.1.1 Kritéria

Kritérium lze chápat jako charakteristiku variant, na jehož základě se hodnotí, která z variant je nejvhodnější. Na soubor kritérií jsou kladeny požadavky, mezi které patří:

- Měřitelnost kritérií – každé kritérium umožňuje zjištění důsledků variant vzhledem k danému kritériu
- Úplnost – lze posoudit naplnění celkového cíle na základě daného souboru kritérií
- Neredundance – kritéria se vzájemně nepřekrývají
- Operacionalita – každé kritérium má jasný a jednoznačný smysl a je pro rozhodovatele plně srozumitelné

- Minimální rozsah – počet kritérií by měl být co nejmenší, aby rozhodovací problém byl přehledný
- Dekomponovatelnost – na základě kritérií dojde ke zjednodušení rozhodovacího problému.

Je zřejmé, že některé z výše uvedených požadavků, které jsou kladeny na soubor kritérií, jsou vzájemně protikladné a nemohou tedy být splněny současně. Minimální rozsah kritérií vede na agregaci kritérií, čímž ale dochází ke snížení operacionality a měřitelnosti těchto agregovaných kritérií. Naopak požadavek operacionality a měřitelnosti ukazuje na dekompozici kritérií, čímž značně vzrůstá počet kritérií a zvyšuje se nebezpečí redundance. Vzhledem k tomu je třeba počítat s určitým kompromisem.

Kritéria lze rozlišovat na kritéria kvantitativní a kvalitativní. Kvantitativní kritéria mají důsledky variant vzhledem ke kritériím dány číselnými hodnotami. Kvalitativní kritéria mají důsledky popsány slovně.

Z hlediska preferencí se kvantitativní kritéria dělí na kritéria s rostoucí/klesající preferencí. U kritérií s rostoucí preferencí jsou preferovány vyšší hodnoty před nižšími (př. zisk), kdežto u kritérií s klesající preferencí jsou preferovány nižší hodnoty (př. náklady).

V metodě AHP se předpokládá, že kritéria jsou kardinálně porovnatelná, tzn. kritéria lze uspořádat a lze určit významnost daných kritérií, tzv. váhy.

Definice 1.1. Necht' jsou dána kritéria K_1, K_2, \dots, K_m . Potom v_1, v_2, \dots, v_m taková, že $v_i \in \mathbb{R}, v_i \geq 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ se nazývají váhami kritérií K_1, K_2, \dots, K_m , jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ platí, že $v_i \geq v_j$ právě tehdy, když kritérium K_i je významnější nebo stejně významné jako kritérium K_j (značí se $K_i \succeq K_j$). Pokud navíc pro váhy platí podmínka $\sum_{i=1}^m v_i = 1$, potom řekneme, že váhy v_1, v_2, \dots, v_m představují normované váhy.

1.1.2 Párové srovnávání

Ke zjištění vah kritérií a dílčích hodnocení variant se v metodě AHP využívá párové srovnávání. Na první hierarchické úrovni se nachází celkový cíl rozhodování, kterému se přiřadí váha 1. Tato váha se má rozdělit mezi kritéria K_1, K_2, \dots, K_m na druhé hierarchické úrovni. Nenormované váhy w_1, w_2, \dots, w_m se získají párovým srovnáváním

jednotlivých kritérií vzhledem k celkovému cíli (na první hierarchické úrovni). Normované váhy v_1, v_2, \dots, v_m lze pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ určit znormováním nenormovaných vah w_1, w_2, \dots, w_m pomocí následujícího vzorce

$$v_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^m w_j}. \quad (1.1)$$

Na každé další úrovni hierarchie se postupuje analogicky, tzn. párově se srovnají všechna kritéria, která mají stejné nadřazené kritérium, a mezi tato kritéria se rozděljuje váha o velikosti 1.

Dílčí hodnocení variant se také získá párovým porovnáním variant vzhledem ke všem kritériím.

Pokud by byly známé váhy w_1, w_2, \dots, w_m ke kritériím K_1, K_2, \dots, K_m , bylo by možné sestavit matici \mathbf{W} , která vyjadřuje relativní preference kritérií:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_m} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_m}{w_1} & \frac{w_m}{w_2} & \dots & \frac{w_m}{w_m} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Většinou jsou ale váhy w_1, w_2, \dots, w_m neznámé, proto je snaha zaměřena na sestavení alespoň odhadu této matice a následné dopočítání příslušných vah. Tento odhad představuje Saatyho matice.

1.2 Saatyho matice

Saatyho matice vznikne párovým srovnáním kritérií K_1, K_2, \dots, K_m (resp. variant) s využitím Saatyho škály, kdy výsledky párových srovnání se uspořádají do matice.

K párovému srovnání jednotlivých kritérií (resp. variant) je třeba určit stupnici, na které se bude srovnání provádět. V metodě AHP k tomu slouží tzv. Saatyho devítibodová škála, kterou T. L. Saaty [1] nadeřinoval. Tato škála určuje významnost jednotlivých kritérií (variant) a její velkou předností je, že je doplněna slovními popisy, které vyjadřují význam těchto intenzit. Díky tomu může rozhodovatel lépe a snáze vyjádřit své preference.

Saatyho škála je uvedena v následující tabulce (Tab. 1.1.).

Tab. 1.1: Saatyho škála

Hodnotící stupeň	Porovnání kritérií K_i a K_j	Anglické názvy
1	K_i je stejně významné jako K_j	Equal importance
2	K_i je slabě významnější než K_j	Weak or slightly importance
3	K_i je mírně významnější než K_j	Moderate importance
4	K_i je o něco více než mírně významnější než K_j	Moderate plus importance
5	K_i je silně významnější než K_j	Strong importance
6	K_i je o něco více než silně významnější než K_j	Strong plus importance
7	K_i je velmi silně významnější než K_j	Very strong importance
8	K_i je velmi, velmi silně významnější než K_j	Very, very strong importance
9	K_i je extrémně významnější než K_j	Extreme importance

Poznámka 1.1 V případě porovnání variant vzhledem ke kritériím se využívá výraz „lepší“ místo výrazu „významnější“.

Hodnoty $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ tvoří tzv. základní Saatyho škálu. Zbývající hodnoty ze Saatyho škály, tj. $\{2, 4, 6, 8\}$, se označují jako tzv. mezihodnoty. V jednodušších případech porovnávání kritérií (variant) se používá základní Saatyho škála. Mezihodnoty v Saatyho škále lze využít v případě, pokud nelze rozhodnout o významnosti kritérií (variant) s využitím základní Saatyho škály. Mezihodnoty jsou tedy jakýmsi kompromisem mezi dvěma lichými hodnotami.

Saatyho matice \mathbf{S} je pak ve tvaru:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mm} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

kde v případě porovnávání kritérií prvek s_{ij} pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ vyjadřuje, kolikrát je kritérium K_i významnější než kritérium K_j (tedy, že K_i je s_{ij} –krát významnější než K_j) a v případě porovnávání variant prvek s_{ij} pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ vyjadřuje, kolikrát je varianta x_i lepší než varianta x_j podle daného kritéria.

V Saatyho matici pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, m$ (resp. $i, j = 1, 2, \dots, n$) platí vztah

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}}, \quad (1.4)$$

tzn. matice \mathbf{S} je reciproká. V matici \mathbf{S} se tedy mohou doplnit pouze prvky nad hlavní diagonálou, protože na symetrických pozicích budou jejich převrácené hodnoty. Hlavní diagonálu pak tvoří samé 1, protože se spolu porovnávají dvě stejná kritéria (varianty). Saatyho matice je pak v následujícím tvaru

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ \frac{1}{s_{12}} & 1 & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{s_{1m}} & \frac{1}{s_{2m}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Saatyho maticí se tedy rozumí čtvercová reciproká matice s kladnými prvky ze Saatyho škály.

1.3 Váhy kritérií

Ze Saatyho matice se pak určují váhy kritérií, přičemž prvky s_{ij} matice \mathbf{S} jsou interpretovány jako odhady podílu vah i -tého a j -tého kritéria. Saatyho matice \mathbf{S} je odhadem matice \mathbf{W} , tj.

$$s_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j} \text{ pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Než se určí váhy kritérií, je ale nejprve nutné ověřit, zda je matice konzistentní, tj. zda v Saatyho matici platí následující vztah

$$s_{ik} = s_{ij} s_{jk} \text{ pro každé } i, j, k = 1, 2, \dots, m. \quad (1.6)$$

Konzistence Saatyho matice bude dále podrobněji vysvětlena.

Saatem navrhovaný způsob na určení nenormovaných vah kritérií z matice \mathbf{S} je metoda, která spočívá ve výpočtu vlastního vektoru této matice příslušející maximálnímu vlastnímu číslu (vlastní vektor matice je pak vektor nenormovaných vah). Toto tvrzení vychází z toho, že jestliže v ideálním případě jsou nenormované váhy známy, pak platí

$$\mathbf{W}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_m} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_m}{w_1} & \frac{w_m}{w_2} & \dots & \frac{w_m}{w_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mw_1 \\ \vdots \\ mw_m \end{pmatrix} = m\mathbf{w},$$

kde tento odvozený vztah je známý v lineární algebře jako definice pro vlastní číslo a vlastní vektor matice. Hodnota matice \mathbf{W} je rovna jedné, proto má jediné nenulové vlastní číslo. Z toho vyplývá, že m je maximální vlastní číslo a \mathbf{w} je vlastní vektor matice \mathbf{W} .

Jelikož matice \mathbf{S} je aproximací matice \mathbf{W} , nenormované váhy $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ lze hledat jako řešení soustavy m rovnic o m neznámých

$$\mathbf{S}\mathbf{w} = \lambda_{\max} \mathbf{w}, \quad (1.7)$$

která se dá přepsat do tvaru

$$(\mathbf{S} - \lambda_{\max} \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

kde $\mathbf{0}$ je sloupcový nulový vektor a \mathbf{I} je jednotková matice $m \times m$. Čím se bude λ_{\max} blížit k m , tím více se matice \mathbf{S} bude blížit k matici \mathbf{W} .

Věta 1.1 (Perron-Frobeniova) Reciproká matice, která má všechny prvky kladné, má maximální kladné reálné vlastní číslo λ_{\max} , a jemu odpovídající vlastní vektor má všechny prvky kladné.

Věta (1.1) říká, že existuje kladné maximální vlastní číslo λ_{\max} a také příslušný vlastní vektor s kladnými složkami (vektor nenormovaných vah).

Jednodušší způsob na určení nenormovaných vah je metoda geometrického průměru řádků, která je ale řešením jiného matematického problému. Dá se dokázat, že řešením následující úlohy

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(s_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 \rightarrow \min$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1, w_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

je geometrický průměr řádků matice \mathbf{S} , který je v následujícím tvaru

$$w_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m s_{ij}} \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.9)$$

Získané váhy je ještě třeba znormovat podle vztahu (1.1).

1.4 Dílčí hodnocení variant

Pro výpočet dílčích hodnocení variant je potřeba sestavit matice párových srovnání variant x_1, \dots, x_n vzhledem k jednotlivým kritériím K_1, \dots, K_m s využitím Saatyho devítibodové škály. Je tedy nutné sestavit celkem m matic $\mathbf{S}^k = \{s_{ij}^k\}_{i,j=1}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, přičemž s_{ij}^k jsou hodnoty ze Saatyho devítibodové škály. Hodnota s_{ij}^k pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ vyjadřuje, kolikrát je varianta x_i lepší než varianta x_j podle kritéria K_k .

V Saatyho matici pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$ platí vztah

$$s_{ij}^k = \frac{1}{s_{ji}^k}, \quad (1.10)$$

tzn. matice \mathbf{S}^k je reciproká.

U takto sestavených matic je nutné ověřit, zda jsou konzistentní podle vztahu (1.6). Dílčí hodnocení variant se pak ze Saatyho matic \mathbf{S}^k počítají stejně, jako tomu bylo u vah kritérií, tedy pomocí vztahu (1.7) nebo (1.9).

Dílčí hodnocení i -té varianty podle k -tého kritéria je pak dle vztahu (1.9) ve tvaru

$$m_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n s_{ij}^k}, \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

kteřé je ale třeba znormovat, tedy normovaná dílčí hodnocení jsou ve tvaru

$$h_i^k = \frac{m_i}{\sum_{j=1}^m m_j}. \quad (1.12)$$

1.5 Celkové hodnocení variant

Celkové hodnocení variant se počítá jako vážený průměr dílčích hodnocení variant vzhledem k jednotlivým kritériím, kde váhami jsou vypočítané váhy kritérií. Celkové hodnocení i -té varianty se tedy počítá podle vzorce

$$h_i = \sum_{j=1}^m v_j h_i^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.13)$$

kde v_j je váha kritéria K_j a h_i^j je dílčí hodnocení varianty x_i podle kritéria K_j . Varianta s nejvyšším celkovým hodnocením je nejlepší varianta, která nejvíce naplňuje celkový cíl rozhodování.

1.6 Klady a zápory AHP

Metoda AHP je nejužívanější metoda vícekritériálního rozhodování, proto jsou v této podkapitole shrnuty nejen klady, ale i zápory této metody, které uvedl Holder [6] a Saaty [1].

1.6.1 Klady AHP

Prvním kladem metody AHP je jednoduchost této metody z hlediska zadávání potřebných informací. Při párovém srovnávání se využívají vždy jen dva prvky, je tedy lehčí vyjadřovat preference a zároveň se mohou tyto preference vyjádřit slovně (pomocí Saatyho škály). Navíc výpočet dílčích vah kritérií a následného dílčího a celkového hodnocení není příliš složitý, protože existují počítačové programy přímo pro výpočet hodnocení pomocí AHP, které lze využít. Pokud není program k dispozici, lze použít jednoduchou metodu geometrického průměru řádků (dává velice podobné výsledky).

Mezi klady metody AHP se také řadí hierarchický systém rozhodovacího problému. Hierarchická struktura problému je přehlednější a navíc členění kritérií do hierarchií je výhodné také z matematického hlediska. Například pokud je na druhé hierarchii osm

kritérií, musí se pro ně vytvořit celkem $\binom{8}{2} = 28$ párových srovnání. Pokud by ale tato

kritéria byla hierarchicky členěna např. do dvou skupin po čtyřech, tak na druhé hierarchické úrovni se porovnají tyto dvě skupiny (tj. 1 porovnání) a na další úrovni se spolu párově porovnají čtyři kritéria v jedné skupině (tj. 6 porovnání) a pak čtyři kritéria ve skupině druhé (tj. také 6 porovnání). Celkem se tedy provede $1+6+6=13$ párových porovnání, což není ani polovina z původních 28 párových srovnání.

Mezi klady lze zařadit i to, že metoda AHP akceptuje různé typy kritérií. Metoda dokáže pracovat jak s kvantitativními, tak i s kvalitativními kritérii.

Posledním z mnoha kladů je také všestrannost metody AHP. Metodu AHP lze použít k výběru nejlepší varianty. Lze ji ale také použít v případě, kdy v rozhodovacím problému hraje roli riziko (přidá se další hierarchická úroveň – stavy světa).

1.6.2 Zápory AHP

Prvním záporem metody AHP je počet párových srovnání. Nejprve se musejí porovnat kritéria. Pokud se na stejné hierarchické úrovni nachází m kritérií, musí se udělat celkem $\binom{m}{2}$ párových srovnání (toto číslo lze snížit tím, že se vytvoří další hierarchické úrovně). Pak je nutné porovnat všechny varianty (n variant) vzhledem ke každému kritériu (m kritérií), dohromady dalších $m \binom{n}{2}$ párových srovnání. Velký počet párových srovnání je časově náročný na zadávání.

Mezi zápory se také může řadit podoba výsledných hodnocení, která jsou vyjádřena jen číselně. Kritizováno je to, že preference mezi kritérii a variantami jsou zadávány slovně, ale výsledky jsou vyjádřeny pouze číselně.

V neposlední řadě je velkou nevýhodou metody AHP to, že v reálných situacích nelze zcela dosáhnout úplné konzistence. To lze ukázat na příkladu, kdy se budou uvažovat tři kritéria A, B, C. Pokud je kritérium A mírně významnější než kritérium B ($s_{AB} = 3$) a kritérium B je silně významnější než kritérium C ($s_{BC} = 5$), pak by dle definice konzistence (1.6) muselo platit $s_{AC} = 15$. Taková hodnota se však v Saatyho devítibodové škále nevyskytuje. S touto nevýhodou se lze vypořádat zavedením definice tzv. slabé konzistence, která je pro všechna $i, j, k = 1, \dots, m$, kde $i \neq j, j \neq k, i \neq k$ ve tvaru

$$s_{ij} > 1 \wedge s_{jk} > 1 \Rightarrow s_{ik} > \max\{s_{ij}, s_{jk}\}. \quad (1.14)$$

2 Konzistence

Zásadní vlastností, kterou by měla Saatyho matice splňovat, je konzistence vyjádřených preferencí, tzn. pokud je kritérium K_i s_{ij} -krát významnější než K_j a kritérium K_j je s_{jk} -krát významnější než kritérium K_k $i, j, k = 1, 2, \dots, m$, tak by mělo platit, že kritérium K_i je s_{ik} -krát významnější než kritérium K_k , kde $s_{ik} = s_{ij}s_{jk}$. Definicí konzistence uvádí Saaty [1] následovně.

Definice 2.1 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je čtvercová matice typu $m \times m$, pro jejíž prvky platí

$$s_{ik} = s_{ij}s_{jk} \text{ pro každé } i, j, k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1)$$

Potom matice \mathbf{S} je konzistentní.

Takto zavedená definice konzistence je v praxi těžko splnitelná. Proto se také využívá definice tzv. slabé konzistence, která je uvedena v literatuře od Brunelliho [2].

Definice 2.2 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je čtvercová, kladná matice. Tato matice je slabě konzistentní, jestliže pro každé $i, j, k = 1, \dots, m$, kde $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$ platí

$$s_{ij} > 1 \wedge s_{jk} > 1 \Rightarrow s_{ik} > \max\{s_{ij}, s_{jk}\}.$$

K ověření slabé konzistence je vhodné, aby byla kritéria v matici seřazena dle významnosti. Pokud jsou v Saatyho matici kritéria seřazena dle významnosti, tak pro všechna $i, j = 1, \dots, m$, kdy $i < j$ platí $s_{ij} \geq 1$ a pro všechna $i = 1, \dots, m$ platí $s_{ii} = 1$, tj. prvky nad diagonálou jsou tvořeny pouze prvky $\{1, \dots, 9\}$, nevyskytují se tam zlomky. K ověření slabé konzistence, musí být v řádcích prvky nad diagonálou neklesající zleva doprava a ve sloupcích ze spodu nahoru.

Definice slabé konzistence (2.2) představuje oslabení definice konzistence (2.1).

Věta 2.1 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, která je konzistentní.

Pak matice \mathbf{S} je také slabě konzistentní.

Dále se v textu bude uvažovat definice klasické konzistence (2.1). K tomu, aby se určilo, co platí pro konzistentní matice a za jakých podmínek je matice konzistentní, se musí nejprve uvést, co platí pro reciproké matice. Tyto vztahy ve své práci uvádí Ramík [5].

Věta 2.2 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, která je reciproká, tj.

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}} \text{ pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Potom pro její maximální vlastní číslo platí $\lambda_{\max} \geq m$.

Důkaz: viz [5], str. 90.

Věta 2.3 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, pro jejíž prvky platí

$$s_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \text{ pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.3)$$

kde $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ je vektor s kladnými čísly. Potom platí

$$\lambda_{\max} = \lambda_m = m \quad (2.4)$$

a pro všechna ostatní vlastní čísla platí

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 0. \quad (2.5)$$

Důkaz: viz [5], str. 87.

Nyní lze vyslovit, co platí pro konzistentní matice a za jakých podmínek je matice konzistentní. Tyto věty také uvedl ve své práci Ramík [5].

Věta 2.4 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, pro jejíž prvky platí vztah (2.2). Potom matice \mathbf{S} je reciproká a konzistentní, tj. platí vztahy

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}} \text{ pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$s_{ik} = s_{ij}s_{jk} \text{ pro každé } i, j, k = 1, 2, \dots, m.$$

Důkaz: viz [5], str. 86.

Věta 2.5 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, která je konzistentní.

Potom existuje vektor s kladnými prvky $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ takový, že prvky matice \mathbf{S} splňují vztah (2.3).

Důkaz: viz [5], str. 88.

Věta 2.6 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, která je konzistentní.

Potom je matice \mathbf{S} reciproká a pro její maximální vlastní číslo platí

$$\lambda_{\max} = \lambda_m = m$$

a pro všechna ostatní vlastní čísla platí

$$\lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Důkaz: viz [5], str. 89.

Věta 2.7 Necht' $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, která je reciproká, tj.

platí vztah

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}} \text{ pro všechna } i, j = 1, 2, \dots, m,$$

a pro její maximální vlastní číslo platí

$$\lambda_{\max} = m.$$

Potom matice \mathbf{S} je konzistentní.

Důkaz: viz [5], str. 91.

Z věty 2.6 a věty 2.7 plyne:

Důsledek 2.1 Matice $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je konzistentní tehdy a jen tehdy, když pro její maximální vlastní číslo platí $\lambda_{\max} = m$.

Následující věta je uvedl Saaty [1].

Věta 2.8 Každá reciproká matice typu 2×2 je konzistentní.

Důkaz: Reciproká matice typu 2×2 je ve tvaru

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ s_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho je zřejmé, že platí:

$$s_{11}s_{12} = 1 \cdot s_{12} = s_{12},$$

$$s_{12}s_{21} = s_{12} \cdot \frac{1}{s_{12}} = 1 = s_{11},$$

$$s_{12}s_{22} = s_{12} \cdot 1 = s_{12},$$

$$s_{21}s_{11} = \frac{1}{s_{12}} \cdot 1 = s_{21},$$

$$s_{21}s_{12} = \frac{1}{s_{12}} \cdot s_{12} = 1 = s_{22},$$

$$s_{22}s_{21} = 1 \cdot \frac{1}{s_{12}} = s_{21}.$$

□

Na měření (ne)konzistence kladné čtvercové reciproké matice \mathbf{S} existuje spousta metod, které ve své práci shrnuje Brunelli [2], [3], [4], mezi něž se řadí např. index nekonzistence CI či geometrický index nekonzistence atd.

3 Měření (ne)konzistence

Indexy uvedené v této kapitole popisuje ve své práci Brunelli [2], [3], [4].

Dále se v textu bude uvažovat Saatyho matice, tedy čtvercová matice, jejíž prvky jsou hodnoty ze Saatyho devítibodové škály, přičemž je tato matice reciproká, tj. platí vztah (1.4). Saatyho matice je tedy ve tvaru

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ \frac{1}{s_{12}} & 1 & \cdots & s_{2m} \\ s_{12} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{s_{1m}} & \frac{1}{s_{2m}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Poznámka 3.1 Indexy nekonzistence se dají aplikovat i na obecnější matice párových srovnání v multiplikatívním tvaru, tj. kladné reciproké matice, jejichž prvky vyjadřují intenzity preferencí srovnávaných kritérií (popř. variant), tedy $s_{ij} = k$ vyjadřuje, že i -té kritérium (varianta) je k -krát významnější (lepší) než j -té kritérium (varianta). Zde se v textu uvažuje Saatyho matice ve tvaru (3.1).

Výpočet indexů nekonzistence bude dále ilustrován na třech Saatyho maticích pro šest kritérií (cena, výkonnost, barva, operační paměť, velikost displeje, operační systém notebooku), přičemž cílem rozhodování je vybrat vhodný notebook. První matice je následujícího tvaru

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 & 3 & 5 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & 1 & 9 & \frac{1}{3} & 5 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{5} & 3 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & 3 & 5 & 1 & 9 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{7} \\ 3 & 9 & 8 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

kde prvky této matice jsou prvky Saatyho škály, resp. jejich převrácené hodnoty.

Už jen z tvaru Saatyho matice lze do určité míry usoudit, zda je matice konzistentní či nekonzistentní. Aby to bylo možné, je třeba seřadit kritéria podle významnosti, tedy vypočítat váhy daných kritérií a matici přeskládat.

Nenormované váhy se ze zadané matice získají po dosazení do výše uvedeného vztahu (1.9)

$$w_1 = \sqrt[6]{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}} = 2,609,$$

$$w_2 = \sqrt[6]{\frac{1}{9} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{9}} = 0,755,$$

$$w_3 = \sqrt[6]{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot \frac{1}{8}} = 0,326,$$

$$w_4 = \sqrt[6]{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{5}} = 1,442,$$

$$w_5 = \sqrt[6]{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot \frac{1}{7}} = 0,244,$$

$$w_6 = \sqrt[6]{3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1} = 4,430.$$

Z vypočtených nenormovaných vah je vidět, že šesté kritérium má nejvyšší váhu, to znamená, že je nejvýznamnější. První kritérium má nejnižší váhu, je proto nejméně významné. Saatyho matice, která má kritéria uspořádaná podle významnosti je ve tvaru

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 & 8 & 7 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 & 9 & 7 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 5 & 9 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 9 & 5 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & 1 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Z takového tvaru matice už lze zjistit, že matice není konzistentní, protože pro prvky této matice neplatí ani slabá konzistence (definice 2.2).

Druhou uvažovanou maticí je matice \mathbf{S}_2 , která se z matice \mathbf{S}_1 (ve tvaru 3.3) vytvoří tak, aby při zachování pořadí významnosti její prvky alespoň splňovaly slabou konzistenci

(to znamená, že prvky nad diagonálou musí být v řádcích zleva doprava neklesající a ve sloupcích ze spodu nahoru neklesající). Tato matice je pak např. ve tvaru

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 5 & 9 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 5 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Poslední uvažovaná matice je tvořena tak, aby kritéria této matice měla stejné pořadí významnosti jako \mathbf{S}_1 (3.3) a zároveň aby pro kritéria platilo:

- První kritérium je dvakrát významnější než druhé kritérium,
- Druhé kritérium je dvakrát významnější než třetí kritérium (tj. první kritérium je čtyřikrát významnější než třetí kritérium), atd.

Podle tohoto principu by první kritérium mělo být šestnáctkrát významnější než páté kritérium, ale Saatyho škála má nejvyšší hodnotu devět. Tedy na této pozici bude hodnota odpovídající nejvyšší hodnotě Saatyho škály. Tato matice je pak ve tvaru

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 9 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

O těchto maticích lze usoudit, že platí:

- Matice \mathbf{S}_3 je více konzistentní než matice \mathbf{S}_2 ,
- Matice \mathbf{S}_2 je více konzistentní než matice \mathbf{S}_1 .

U daných matic se bude porovnávat hodnota nekonzistence pomocí různých indexů nekonzistence.

3.1 Index nekonzistence CI

Nechť je dána matice S ve tvaru (3.1).

Nejstarší přístup k měření konzistence matice S je index nekonzistence CI , který zavedl Saaty [1] ve tvaru

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - m}{m - 1}, \quad (2.11)$$

kde λ_{\max} je maximální vlastní číslo matice S .

CI je nezáporné, jelikož platí $\lambda_{\max} \geq m$. Pro konzistentní matici platí, že index nekonzistence je roven nule, tj. $CI = 0$. Čím více je index nekonzistence vzdálenější od nuly, tím je matice více nekonzistentní.

Bylo zjištěno, že hodnota indexu nekonzistence CI je závislá na parametru m (počet kritérií), proto byl zaveden tzv. podílový koeficient nekonzistence CR .

Příklad 3.1 Nechť je dána matice S_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Je potřeba vypočítat maximální vlastní číslo matice. Vlastní čísla matice se vypočítají v matlabu pomocí příkazu `eig(S1)`.

Obr. 3.1: Zápis výpočtu vlastních čísel matice v matlabu

```
S1=[1 9 7 3 5 1/3;
    1/9 1 9 1/3 5 1/9;
    1/7 1/9 1 1/5 3 1/8;
    1/3 3 5 1 9 1/5;
    1/5 1/5 1/3 1/9 1 1/7;
    3 9 8 5 7 1]
eig(S1)
```

Po výpočtu v matlabu vyjde maximální vlastní číslo $\lambda_{\max} = 7,248$. Tento výsledek se dosadí do vzorce (3.6) pro výpočet indexu nekonzistence CI :

$$CI = \frac{7,248 - 6}{6 - 1} = 0,2495.$$

Výsledky indexu nekonzistence CI všech uvažovaných matic jsou shrnuty v následující tabulce.

Tab. 3.1: Výsledky CI

	S_1	S_2	S_3
CI	0,2495	0,1278	0,0354

Z tabulky (3.1) vyplývá, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic, přičemž nekonzistence matice S_3 je sedmkrát nižší než nekonzistence matice S_1 .

3.2 Podílový koeficient nekonzistence CR

Nechť je dána matice S ve výše uvedeném tvaru (3.1). Podílový koeficient nekonzistence nadefinoval Saaty [1] a je ve tvaru

$$CR = \frac{CI}{RI(m)}, \quad (2.12)$$

kde $RI(m)$ je náhodný koeficient nekonzistence.

Hodnota $RI(m)$ se získá jako průměr CI z náhodně vygenerovaných reciprokových Saatyho matic typu $m \times m$.

Saaty [1] náhodně vygeneroval 50 000 matic typu $m \times m$ ($m = 3, 4, \dots, 15$) a spočítal koeficient CI u každé vygenerované matice. Koeficient $RI(m)$ pak pro dané m získal aritmetickým průměrem všech CI . Výsledky tohoto experimentu jsou uvedeny v následující tabulce (Tab. 3.2).

Tab. 3.2: Hodnoty náhodného koeficientu nekonzistence $RI(m)$

m	2	3	4	5	6	7	8
$RI(m)$	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,4
m	9	10	11	12	13	14	15
$RI(m)$	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59

Matice \mathbf{S} se považuje za konzistentní, pokud je $CR \leq 0,1$.

Příklad 3.2 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

K výpočtu podílového koeficientu nekonzistence je využít výše spočtený index nekonzistence CI , jehož hodnota je 0,25. Podílový koeficient nekonzistence po dosazení do vzorce (3.7) je ve tvaru

$$CR = \frac{0,25}{1,25} = 0,1996,$$

kde hodnota 1,25 je převzata z tabulky (3.2) pro $m = 6$.

Výsledky indexu CR pro všechny matice jsou shrnuty v tabulce (3.3).

Tab. 3.3: Výsledky CR

	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2	\mathbf{S}_3
CR	0,1996	0,1022	0,0283

Z tabulky (3.3) vyplývá, že matice \mathbf{S}_1 není konzistentní matice, protože $CR > 0,1$, matice \mathbf{S}_2 téměř splňuje podmínku pro CR a matice \mathbf{S}_3 splňuje podmínku na konzistenci určitě.

3.3 Geometrický index nekonzistence

Necht' je dána matice \mathbf{S} ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Geometrický index nekonzistence byl navržen Crawfordem [8]. Tento index je založen na tom, že nenormované váhy matice \mathbf{S} jsou odhadnuty pomocí geometrického průměru řádků ve výše uvedeném tvaru (1.9). Pak je možné s odhadnutými váhami pro každé s_{ij} nadefinovat částečný index nekonzistence e_{ij} ve tvaru

$$e_{ij} = s_{ij} \frac{w_j}{w_i}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.13)$$

Nyní už lze zavést celkový index nekonzistence matice \mathbf{S} jako normovaný součet zlogaritmovaných částečných indexů nekonzistence. Tento index je známý pod názvem geometrický index nekonzistence (GCI) a je v následujícím tvaru

$$GCI = \frac{2}{(m-1)(m-2)} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\ln e_{ij})^2. \quad (2.14)$$

Je zřejmé, že pro konzistentní matice je hodnota e_{ij} rovna 1, protože $s_{ij} = w_i/w_j$ a tedy také $\ln e_{ij} = 0$. Pro zcela konzistentní matice je proto hodnota GCI rovna 0.

Příklad 3.3 Necht' je dána matice S_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Nejprve se musí vypočítat nenormované váhy ze zadané matice podle výše uvedeného vztahu (1.9). Tyto váhy jsou už spočítané na začátku této kapitoly. Vektor vah je $\mathbf{w} = (2,609; 0,755; 0,326; 1,442; 0,244; 4,430)$.

Dále je třeba napočítat všechny částečné indexy nekonzistence podle výše uvedeného vzorce (3.8)

$$e_{11} = s_{11} \frac{w_1}{w_1} = 1 \cdot \frac{2,609}{2,609} = 1,$$

$$e_{12} = s_{12} \frac{w_2}{w_1} = 9 \cdot \frac{0,755}{2,609} = 2,604, \text{ atd.}$$

Další částečné indexy nekonzistence se vypočítají stejným způsobem. Výsledky částečných indexů nekonzistence jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 3.4: Výsledky částečných indexů nekonzistence

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	2,604	0,874	1,658	0,468	0,566
e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}
0,384	1	3,886	0,637	1,616	0,652
e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}
1,143	0,257	1	0,885	2,245	1,699
e_{41}	e_{42}	e_{43}	e_{44}	e_{45}	e_{46}
0,603	1,571	1,13	1	1,523	0,614
e_{51}	e_{52}	e_{53}	e_{54}	e_{55}	e_{56}
2,139	0,619	0,445	0,657	1	2,594
e_{61}	e_{62}	e_{63}	e_{64}	e_{65}	e_{66}
1,767	1,534	0,589	1,628	0,386	1

Geometrický index nekonzistence je po dosazení do vzorce (3.9) ve tvaru

$$GCI = \frac{2}{5.4} [(\ln 2,604)^2 + (\ln 0,874)^2 + \dots + (\ln 0,614)^2 + (\ln 2,594)^2] =$$

$$\frac{2}{5.4} [(0,957)^2 + (-0,135)^2 + \dots + (-0,488)^2 + (0,953)^2] = 0,6824.$$

Pro porovnání jsou výsledky částečných indexů nekonzistence pro matici S_2 uvedeny v následující tabulce.

Tab. 3.5: Výsledky částečných indexů nekonzistence matice S_2

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	1,447	0,964	1,659	0,664	0,566
e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}
0,384	1	2,378	0,637	2,294	0,652
e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}
1,038	0,421	1	0,803	1,608	1,542
e_{41}	e_{42}	e_{43}	e_{44}	e_{45}	e_{46}
0,603	1,571	1,245	1	1,200	0,614
e_{51}	e_{52}	e_{53}	e_{54}	e_{55}	e_{56}
1,506	0,436	0,621	0,832	1	2,557
e_{61}	e_{62}	e_{63}	e_{64}	e_{65}	e_{66}
1,767	1,193	0,648	1,628	0,391	1

V tabulkách (3.4) a (3.5) je vidět, že se hodnoty částečných indexů nekonzistence pro matici S_2 více blíží hodnotě 1 (hodnota částečných indexů nekonzistence pro zcela konzistentní matice) než pro matici S_1 .

Hodnota geometrického indexu nekonzistence pro matici S_2 je $GCI = 0,4326$.

Výsledky částečných indexů nekonzistence pro matici S_3 jsou uvedeny v tabulce (3.6).

Tab. 3.6: Výsledky částečných indexů nekonzistence matice S_3

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}
1	1,001	1,211	1,100	0,842	0,809
e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	e_{25}	e_{26}
0,908	1	1,100	1	1,360	0,735
e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}
0,825	0,909	1	0,908	1,235	1,187
e_{41}	e_{42}	e_{43}	e_{44}	e_{45}	e_{46}
0,908	1	1,100	1	1,359	0,735
e_{51}	e_{52}	e_{53}	e_{54}	e_{55}	e_{56}
1,187	0,735	0,809	0,735	1	1,922
e_{61}	e_{62}	e_{63}	e_{64}	e_{65}	e_{66}
1,235	1,359	0,841	1,359	0,520	1

V tabulce (3.6) v porovnání s tabulkami (3.4) a (3.5) se hodnoty částečných indexů nekonzistence pro matici S_3 ještě více blíží hodnotě 1 (hodnota částečných indexů nekonzistence pro zcela konzistentní matice).

Hodnota geometrického indexu nekonzistence pro matici S_3 je $GCI = 0,1028$.

Výsledky indexu GCI pro všechny matice jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 3.7: Výsledky GCI

	S_1	S_2	S_3
GCI	0,6824	0,4326	0,1028

Z tabulky (3.7) vyplývá, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic, přičemž matice S_2 má čtyřikrát vyšší hodnotu nekonzistence než matice S_3 .

3.4 Harmonický index nekonzistence

Nechť je dána matice S ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Stein a Mizzi [9] navrhli index nekonzistence založený na proporcionalitě mezi sloupci matice \mathbf{S} . Jestliže je matice \mathbf{S} konzistentní, pak sloupce této matice jsou proporcionalní (úměrné) a hodnota této matice je rovna jedné. Proto lze předpokládat, že čím méně jsou sloupce proporcionalní, tím je matice méně konzistentní.

Nejprve je nutné vytvořit pomocný vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$, který se z matice \mathbf{S} vypočítá vztahem

$$a_j = \sum_{i=1}^m s_{ij} \text{ pro všechna } j = 1, \dots, m.$$

Harmonický průměr složek vektoru \mathbf{a} je pak ve tvaru

$$HM = \frac{m}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j}}. \quad (2.15)$$

Znormováním funkce HM se získá harmonický index nekonzistence HCI , který je v následujícím tvaru

$$HCI = \frac{(HM - m)(m + 1)}{m(m - 1)}. \quad (2.16)$$

Bylo dokázáno, že platí $\sum_{j=1}^m a_j^{-1} = 1$, pokud je matice \mathbf{S} konzistentní a $\sum_{j=1}^m a_j^{-1} < 1$, pokud matice není konzistentní. Je zřejmé, že pro konzistentní matici by hodnota harmonického indexu nekonzistence HCI byla rovna nule, protože pro konzistentní matice je hodnota $HM = m$.

Příklad 3.4 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Nejprve se musí z matice \mathbf{S}_1 vypočítat pomocný vektor vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 3 = 4,787,$$

$$a_2 = 9 + 1 + \frac{1}{9} + 3 + \frac{1}{5} + 9 = 22,311,$$

$$a_3 = 7 + 9 + 1 + 5 + \frac{1}{3} + 8 = 30,333,$$

$$a_4 = 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{9} + 5 = 9,644,$$

$$a_5 = 5 + 5 + 3 + 9 + 1 + 7 = 30,$$

$$a_6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + 1 = 1,912.$$

Harmonický průměr složek vektoru \mathbf{a} je po dosazení do vzorce (3.10) ve tvaru

$$HM = \frac{6}{\frac{1}{4,787} + \frac{1}{22,311} + \frac{1}{30,333} + \frac{1}{9,644} + \frac{1}{30} + \frac{1}{1,912}} = 6,338.$$

S vypočítaným harmonickým průměrem lze pak určit harmonický index nekonzistence pomocí vztahu (3.11)

$$HCI = \frac{(6,338 - 6) \cdot 7}{65} = 0,0789.$$

Výsledky tohoto indexu nekonzistence jsou uvedeny v tabulce (3.8).

Tab. 3.8: Výsledky HCI

	S_1	S_2	S_3
HCI	0,0789	0,0395	0,0152

V tabulce (3.8) lze vidět, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic, přičemž změny v hodnotách nekonzistence nejsou tak velké jako např. u geometrického indexu nekonzistence, kde se hodnoty lišily řádově.

3.5 Index determinantů

Paláez a Lamata [10] navrhli index determinantů, který je založen na tom, že pro nekonzistentní matice \mathbf{S} typu 3×3 je $\det(\mathbf{S}) > 0$.

Tato vlastnost vychází z toho, že determinant matice \mathbf{S} se získá následovně

$$\det(\mathbf{S}) = \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}} + \frac{s_{12}s_{23}}{s_{13}} - 2,$$

a jestliže je matice nekonzistentní, tak platí $s_{13} \neq s_{12}s_{23}$. A protože obecně platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 > 0 \quad \forall a, \neq b, \quad a, b > 0,$$

tak je determinant nekonzistentní matice větší než nula.

Tento závěr je možné zobecnit na matice větších rozměrů a definovat index nekonzistence. Nechť je dána matice \mathbf{S} ve výše uvedeném tvaru (3.1). Index nekonzistence

se získá jako střední hodnota determinantů všech možných podmatic \mathbf{T}_{ijk} (3×3) dané matice, které jsou konstruovány následovně

$$\mathbf{T}_{ijk} = \begin{pmatrix} 1 & s_{ij} & s_{ik} \\ s_{ji} & 1 & s_{jk} \\ s_{ki} & s_{kj} & 1 \end{pmatrix}, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad \forall i < j < k.$$

Počet takto zkonstruovaných matic je $\binom{m}{3}$. Výsledkem je index vyjadřující průměrnou nekonzistenci vypočtenou pro všechny podmatice \mathbf{T}_{ijk}

$$CI^* = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left(\frac{s_{ik}}{s_{ij}s_{jk}} + \frac{s_{ij}s_{jk}}{s_{ik}} - 2 \right)}{\binom{m}{3}}, \quad (2.17)$$

kde $\left(\frac{s_{ik}}{s_{ij}s_{jk}} + \frac{s_{ij}s_{jk}}{s_{ik}} - 2 \right)$ je determinant podmatice \mathbf{T}_{ijk} . Pro konzistentní matici je index roven 0, protože každý determinant podmatice typu 3×3 je roven 0.

Příklad 3.5 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Nejdříve se musí zkonstruovat všechny možné podmatice \mathbf{T}_{ijk} této matice a z nich se musí vypočítat determinanty, tedy

$$\det(\mathbf{T}_{123}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1/9 & 1 & 9 \\ 1/7 & 1/9 & 1 \end{pmatrix} = 9,658 \quad \det(\mathbf{T}_{124}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0,000$$

$$\det(\mathbf{T}_{125}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 1/9 & 1 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} = 7,111 \quad \det(\mathbf{T}_{126}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/3 \\ 1/9 & 1 & 1/9 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} = 1,333$$

$$\det(\mathbf{T}_{134}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 0,610 \quad \det(\mathbf{T}_{135}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 1/7 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} = 2,438$$

$$\det(\mathbf{T}_{136}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/3 \\ 1/7 & 1 & 1/8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 1,006 \quad \det(\mathbf{T}_{145}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 9 \\ 1/5 & 1/9 & 1 \end{pmatrix} = 3,585$$

$$\det(\mathbf{T}_{146}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 0,356 \quad \det(\mathbf{T}_{156}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/7 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 0,610$$

$$\det(\mathbf{T}_{234}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/3 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 3,585 \quad \det(\mathbf{T}_{235}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 1/9 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} = 3,585$$

$$\det(\mathbf{T}_{236}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/9 \\ 1/9 & 1 & 1/8 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 8,224 \quad \det(\mathbf{T}_{245}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1/5 & 1/9 & 1 \end{pmatrix} = 0,267$$

$$\det(\mathbf{T}_{246}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/5 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 0,267 \quad \det(\mathbf{T}_{256}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/9 \\ 1/5 & 1 & 1/7 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 4,584$$

$$\det(\mathbf{T}_{345}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \\ 1/3 & 1/9 & 1 \end{pmatrix} = 0,267 \quad \det(\mathbf{T}_{346}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/8 \\ 5 & 1 & 1/5 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1,445$$

$$\det(\mathbf{T}_{356}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/8 \\ 1/3 & 1 & 1/7 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 1,720 \quad \det(\mathbf{T}_{456}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/5 \\ 1/9 & 1 & 1/7 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 4,584.$$

Index determinantů je po dosazení do vzorce (3.12) ve tvaru

$$CI^* = \frac{9,658 + \dots + 4,584}{20} = 2,7617.$$

Výsledky indexu determinantů pro všechny matice jsou shrnuty v následující tabulce.

Tab. 3.9: Výsledky CI^*

	S_1	S_2	S_3
CI^*	2,7617	1,4535	0,3358

Z tabulky (3.9) vyplývá, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic.

3.6 Index nejednoznačnosti (Ambiguity index)

Nechť je dána matice S ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Salo a Hämäläinen [11] navrhli index nejednoznačnosti, který vyžaduje zkonstruování pomocné matice tvořené intervaly. Takto vytvořená matice je pak v následujícím tvaru

$$\begin{pmatrix} [s_{11}^L, s_{11}^R] & \cdots & [s_{1m}^L, s_{1m}^R] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [s_{m1}^L, s_{m1}^R] & \cdots & [s_{mm}^L, s_{mm}^R] \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

kde

$$s_{ij}^L = \min \{s_{ik} s_{kj} \mid k = 1, \dots, m\}, \quad s_{ij}^R = \max \{s_{ik} s_{kj} \mid k = 1, \dots, m\}. \quad (2.19)$$

Pokud je matice S konzistentní, tak tato matice je tvořena pouze reálnými čísly. Z tohoto pohledu pak lze usuzovat, že čím je širší interval, tím by měla být matice S méně konzistentní. Z toho důvodu se zavedl index nekonzistence ve tvaru

$$CM = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{s_{ij}^R - s_{ij}^L}{(1 + s_{ij}^R)(1 + s_{ij}^L)}. \quad (2.20)$$

Pro zcela konzistentní matici platí, že index nekonzistence CM je roven nule, tj. platí $CM = 0$, protože rozdíl $s_{ij}^R - s_{ij}^L = 0$.

Příklad 3.6 Nechť je dána matice S_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Nejprve je nutné vytvořit pomocnou matici tvořenou intervaly. Hranice intervalů po dosazení do vztahu (3.14) jsou ve tvaru

$$s_{11}^L = \min \left\{ 1 \cdot 1, 9 \cdot \frac{1}{9}, 7 \cdot \frac{1}{7}, 3 \cdot \frac{1}{3}, 5 \cdot \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \cdot 3 \right\} = 1, \quad s_{11}^R = \max \left\{ 1 \cdot 1, 9 \cdot \frac{1}{9}, 7 \cdot \frac{1}{7}, 3 \cdot \frac{1}{3}, 5 \cdot \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \cdot 3 \right\} = 1$$

$$s_{12}^L = \min \left\{ 1 \cdot 9, 9 \cdot 1, 7 \cdot \frac{1}{9}, 3 \cdot 3, 5 \cdot \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \cdot 9 \right\} = \frac{7}{9}, \quad s_{12}^R = \max \left\{ 1 \cdot 9, 9 \cdot 1, 7 \cdot \frac{1}{9}, 3 \cdot 3, 5 \cdot \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \cdot 9 \right\} = 9$$

$$s_{13}^L = \min \left\{ 1 \cdot 7, 9 \cdot 9, 7 \cdot 1, 3 \cdot 5, 5 \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \cdot 8 \right\} = \frac{5}{3}, \quad s_{13}^R = \max \left\{ 1 \cdot 7, 9 \cdot 9, 7 \cdot 1, 3 \cdot 5, 5 \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \cdot 8 \right\} = 81$$

$$s_{14}^L = \min \left\{ 1 \cdot 3, 9 \cdot \frac{1}{3}, 7 \cdot \frac{1}{5}, 3 \cdot 1, 5 \cdot \frac{1}{9}, \frac{1}{3} \cdot 5 \right\} = \frac{5}{9}, \quad s_{14}^R = \max \left\{ 1 \cdot 3, 9 \cdot \frac{1}{3}, 7 \cdot \frac{1}{5}, 3 \cdot 1, 5 \cdot \frac{1}{9}, \frac{1}{3} \cdot 5 \right\} = 3$$

$$s_{15}^L = \min \left\{ 1 \cdot 5, 9 \cdot 5, 7 \cdot 3, 3 \cdot 9, 5 \cdot 1, \frac{1}{3} \cdot 7 \right\} = \frac{7}{3}, \quad s_{15}^R = \max \left\{ 1 \cdot 5, 9 \cdot 5, 7 \cdot 3, 3 \cdot 9, 5 \cdot 1, \frac{1}{3} \cdot 7 \right\} = 45$$

$$s_{16}^L = \min \left\{ 1 \cdot \frac{1}{3}, 9 \cdot \frac{1}{9}, 7 \cdot \frac{1}{8}, 3 \cdot \frac{1}{5}, 5 \cdot \frac{1}{7}, \frac{1}{3} \cdot 1 \right\} = \frac{1}{3}, \quad s_{16}^R = \max \left\{ 1 \cdot \frac{1}{3}, 9 \cdot \frac{1}{9}, 7 \cdot \frac{1}{8}, 3 \cdot \frac{1}{5}, 5 \cdot \frac{1}{7}, \frac{1}{3} \cdot 1 \right\} = 1.$$

Další hranice intervalů se spočítají obdobně. Pak matice intervalů je v následujícím tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & \left[\frac{7}{9}, 9 \right] & \left[\frac{5}{3}, 81 \right] & \left[\frac{5}{9}, 3 \right] & \left[\frac{7}{3}, 45 \right] & \left[\frac{1}{3}, 1 \right] \\ \left[\frac{1}{9}, \frac{9}{7} \right] & 1 & \left[\frac{7}{9}, 9 \right] & \left[\frac{1}{3}, \frac{9}{5} \right] & \left[\frac{5}{9}, 27 \right] & \left[\frac{1}{27}, \frac{9}{8} \right] \\ \left[\frac{1}{81}, \frac{3}{5} \right] & \left[\frac{1}{9}, \frac{9}{7} \right] & 1 & \left[\frac{1}{27}, \frac{5}{8} \right] & \left[\frac{5}{9}, 3 \right] & \left[\frac{1}{81}, \frac{3}{7} \right] \\ \left[\frac{1}{3}, \frac{9}{5} \right] & \left[\frac{5}{9}, 3 \right] & \left[\frac{8}{5}, 27 \right] & 1 & \left[\frac{7}{5}, 15 \right] & \left[\frac{1}{9}, \frac{9}{7} \right] \\ \left[\frac{1}{45}, \frac{3}{7} \right] & \left[\frac{1}{27}, \frac{9}{5} \right] & \left[\frac{1}{3}, \frac{9}{5} \right] & \left[\frac{1}{15}, \frac{5}{7} \right] & 1 & \left[\frac{1}{45}, \frac{1}{7} \right] \\ [1, 3] & \left[\frac{8}{9}, 27 \right] & \left[\frac{7}{3}, 81 \right] & \left[\frac{7}{9}, 9 \right] & [7, 45] & 1 \end{pmatrix}.$$

Poté lze spočítat index nejednoznačnosti CM , který je po dosazení do vztahu (3.15) v následujícím tvaru (lze si všimnout, že ve vzorci se uvažuje součet členů matice nad hlavní diagonálou)

$$CM = \frac{2}{65} \left[\frac{9 - \frac{7}{9}}{(1+9)\left(1 + \frac{7}{9}\right)} + \frac{81 - \frac{5}{3}}{(1+81)\left(1 + \frac{5}{3}\right)} + \dots + \frac{\frac{9}{7} - \frac{1}{9}}{\left(1 + \frac{9}{7}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)} + \frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{45}}{\left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(1 + \frac{1}{45}\right)} \right] = 0,3768.$$

Výsledky indexu CM pro všechny matice jsou shrnuty v následující tabulce.

Tab. 3.10: Výsledky CM

	S_1	S_2	S_3
CM	0,3768	0,3226	0,1429

Z tabulky (3.10) vyplývá, že matice S_1 je nejméně konzistentní z uvažovaných matic. A lze si všimnout toho, že hodnoty nekonzistence matic S_1 a S_2 jsou si dost blízké, u předchozích indexů tomu tak nebylo.

3.7 Index relativní chyby

Nechť je dána matice S ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Index relativní chyby, který nadeřinoval Barzilai [12], vyžaduje zkonstruování pomocné matice

$$S^+ = (s_{ij}^+)_{m \times m} = (\log_2 s_{ij})_{m \times m}. \quad (2.21)$$

Z takto zkonstruované matice se poté odvodí vektor vah $w^+ = (w_1^+, \dots, w_m^+)$ následovně

$$w_i^+ = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_{ij}^+. \quad (2.22)$$

Poté se získá konzistentní část matice S^+ pomocí vzorce

$$C = (c_{ij})_{m \times m} = (w_i^+ - w_j^+)_{m \times m}. \quad (2.23)$$

Matice E , která představuje nekonzistentní část matice S , se vytvoří následovně

$$E = (e_{ij})_{m \times m} = (s_{ij} - c_{ij})_{m \times m}, \quad (2.24)$$

a to tak, že platí $C + E = S$.

Nyní lze definovat index relativní chyby ve tvaru

$$RE = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m e_{ij}^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m s_{ij}^2}. \quad (2.25)$$

Pro konzistentní matici je matice E tvořená nulami, a proto také index relativní chyby RE je roven nule.

Příklad 3.7 Nechť je dána matice S_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Prvním krokem je vytvoření pomocné matice \mathbf{S}^+ , která se z matice \mathbf{S} odvodí podle výše uvedeného vzorce (3.16). Matice \mathbf{S}^+ je pak v následujícím tvaru

$$\mathbf{S}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 3,17 & 2,81 & 1,58 & 2,32 & -1,58 \\ -3,17 & 0 & 3,17 & -1,58 & 2,32 & -3,17 \\ -2,81 & -3,17 & 0 & -2,32 & 1,58 & -3 \\ -1,58 & 1,58 & 2,32 & 0 & 3,17 & -2,32 \\ -2,32 & -2,32 & -1,58 & -3,17 & 0 & -2,81 \\ 1,58 & 3,17 & 3 & 2,32 & 2,81 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalším krokem je vypočtení vah z této pomocné matice \mathbf{S}^+ , které se vypočítají dle vzorce (3.17)

$$w_1^+ = \frac{1}{6}(0 + 3,17 + 2,81 + 1,58 + 2,32 - 1,58) = 1,38,$$

$$w_2^+ = \frac{1}{6}(-3,17 + 0 + 3,17 - 1,58 + 2,32 - 3,17) = -0,41,$$

$$w_3^+ = \frac{1}{6}(-2,81 - 3,17 + 0 - 2,32 + 1,58 - 3) = -1,62,$$

$$w_4^+ = \frac{1}{6}(-1,58 + 1,58 + 2,32 + 0 + 3,17 - 2,32) = 0,53,$$

$$w_5^+ = \frac{1}{6}(-2,32 - 2,32 - 1,58 - 3,17 + 0 - 2,81) = -2,03,$$

$$w_6^+ = \frac{1}{6}(1,58 + 3,17 + 3 + 2,32 + 2,81 + 0) = 2,15.$$

Poté je potřeba spočítat matici \mathbf{C} , která představuje konzistentní část matice \mathbf{S}^+ a je vypočtena dle vzorce (3.18)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1,79 & 3 & 0,85 & 3,41 & -0,77 \\ -1,79 & 0 & 1,21 & -0,94 & 1,62 & -2,56 \\ -3 & -1,21 & 0 & -2,15 & 0,41 & -3,77 \\ -0,85 & 0,94 & 2,15 & 0 & 2,56 & -1,62 \\ -3,41 & -1,62 & -0,41 & -2,56 & 0 & -4,18 \\ 0,77 & 2,56 & 3,77 & 1,62 & 4,18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále je nutné určit matici \mathbf{E} podle výše uvedeného vztahu (3.19), která je po dosazení v následujícím tvaru

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 7,21 & 4 & 2,15 & 1,59 & 1,10 \\ 1,90 & 1 & 7,79 & 1,27 & 3,38 & 2,67 \\ 3,14 & 1,32 & 1 & 2,35 & 2,59 & 3,9 \\ 1,18 & 2,06 & 2,85 & 1 & 6,44 & 1,82 \\ 3,61 & 1,82 & 0,74 & 2,67 & 1 & 4,32 \\ 2,23 & 6,44 & 4,23 & 3,38 & 2,82 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posledním krokem je vypočítání samotného indexu relativní chyby, který se určí dle výše uvedeného vztahu (3.20)

$$RE = \frac{1^2 + 7,21^2 + \dots + 2,82^2 + 1^2}{1^2 + 9^2 + \dots + 7^2 + 1^2} = \frac{390,79}{628,71} = 0,6217.$$

Výsledky indexu RE pro tři uvažované matice jsou uvedeny v tabulce (3.11).

Tab. 3.11: Výsledky RE

	\mathbf{S}_1	\mathbf{S}_2	\mathbf{S}_3
RE	0,6217	0,5722	0,5638

Z tabulky (3.11) lze vyčíst, že matice \mathbf{S}_1 je nejméně konzistentní matice a \mathbf{S}_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic, přičemž hodnoty nekonzistence jsou si poměrně blízké.

3.8 Koczkodaj index

Koczkodaj [13] navrhl index nekonzistence pro matice typu 3×3 v následujícím tvaru

$$K_{ijk} = \min \left\{ \frac{1}{s_{ij}} \left| s_{ij} - \frac{s_{ik}}{s_{jk}} \right|, \frac{1}{s_{ik}} \left| s_{ik} - s_{ij} s_{jk} \right|, \frac{1}{s_{jk}} \left| s_{jk} - \frac{s_{ik}}{s_{ij}} \right| \right\}. \quad (2.26)$$

V roce 1994 pak byla tato metoda zobecněna pro $m \geq 3$, kdy bylo dokázáno, že vzorec (3.21) se pak v tomto případě změní do následujícího tvaru

$$K_{ijk} = \min \left\{ \left| 1 - \frac{s_{ik}}{s_{ij} s_{jk}} \right|, \left| 1 - \frac{s_{ij} s_{jk}}{s_{ik}} \right| \right\}. \quad (2.27)$$

Koczkodaj index nekonzistence je pak ve tvaru

$$K = \max \{ K_{ijk} \mid 1 \leq i < j < k \leq m \}. \quad (2.28)$$

Pro zcela konzistentní matice je pak Koczkodaj index roven nule. To vyplývá z definice (2.1).

Příklad 3.8 Necht' je dána matice S_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Do vzorce (3.22) se dosadí hodnoty matice S_1 a tím se získají hodnoty K_{ijk} , které jsou následující

$$K_{123} = \min \left\{ \left| 1 - \frac{7}{9 \cdot 9} \right|, \left| 1 - \frac{9 \cdot 9}{7} \right| \right\} = \min \left\{ \frac{74}{81}, \frac{74}{7} \right\} = \frac{74}{81},$$

$$K_{124} = \min \left\{ \left| 1 - \frac{3}{9 \cdot \frac{1}{3}} \right|, \left| 1 - \frac{9 \cdot \frac{1}{3}}{3} \right| \right\} = \min \{0, 0\} = 0, \text{ atd.}$$

Výsledky všech pomocných hodnot pro výpočet indexu nekonzistence jsou shrnuty v následující tabulce.

Tab. 3.12: Výsledky K_{ijk}

K_{123}	$\frac{74}{81}$	K_{135}	$\frac{16}{21}$	K_{234}	$\frac{22}{27}$	K_{256}	$\frac{38}{45}$
K_{124}	0	K_{136}	$\frac{13}{21}$	K_{235}	$\frac{22}{27}$	K_{345}	$\frac{2}{5}$
K_{125}	$\frac{8}{9}$	K_{145}	$\frac{22}{27}$	K_{236}	$\frac{73}{81}$	K_{346}	$\frac{17}{25}$
K_{126}	$\frac{2}{3}$	K_{146}	$\frac{4}{9}$	K_{245}	$\frac{2}{5}$	K_{356}	$\frac{17}{24}$
K_{134}	$\frac{8}{15}$	K_{156}	$\frac{8}{15}$	K_{246}	$\frac{2}{5}$	K_{456}	$\frac{38}{45}$

Koczkodaj index nekonzistence se pak určí jako maximální hodnota z těchto vypočtených hodnot, tedy

$$K = \frac{74}{81} = 0,9136.$$

Výsledky tohoto indexu pro všechny uvažované matice jsou shrnuty v následující tabulce.

Tab. 3.13: Výsledky indexu K

	S_1	S_2	S_3
K	0,9136	0,8889	0,7188

Z tabulky (3.13) vyplývá, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic, přičemž hodnoty nekonzistence jsou si poměrně blízké.

3.9 Golden-Wang index

Nechť je dána matice S ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Golden a Wang [14] navrhli index, který je založen na tom, že vektor vah se z matice S získá geometrickým průměrem řádků pomocí výše uvedeného vzorce (1.9). Dále se tento vektor znormuje, tak aby součet vah byl roven jedné (pomocí vztahu 1.1). Tím se získá vektor normovaných vah (v_1, v_2, \dots, v_m) . Tento postup se dá obdobně aplikovat i na sloupce matice S .

Dále je nutné určit matici S^* , která se získá tak, že hodnoty v j -tém sloupci matice S se podělí příslušnou konstantou k_j vypočtenou vztahem

$$k_j = \sum_{i=1}^m s_{ij}.$$

Matice S^* je pak v následujícím tvaru

$$S^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{s_{12}}{k_2} & \dots & \frac{s_{1m}}{k_m} \\ \frac{s_{21}}{k_1} & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{s_{2m}}{k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s_{m1}}{k_1} & \frac{s_{m2}}{k_2} & \dots & \frac{1}{k_m} \end{pmatrix}.$$

Jelikož ale v Saatyho matici platí vztah (1.4), lze matici S^* pak přepsat do následujícího tvaru

$$\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{s_{12}}{k_2} & \dots & \frac{s_{1m}}{k_m} \\ \frac{1}{s_{12}k_1} & \frac{1}{k_2} & \dots & \frac{s_{2m}}{k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{s_{1m}k_1} & \frac{1}{s_{2m}k_2} & \dots & \frac{1}{k_m} \end{pmatrix}.$$

Nyní lze definovat index nekonzistence GW , který je ve tvaru

$$GW = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |s_{ij}^* - v_i|. \quad (2.29)$$

Příklad 3.9 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Nejprve je nutné určit nenormované váhy, které se vypočítají pomocí vzorce (1.9). Tyto váhy jsou už spočítané na začátku této kapitoly. Vektor vah tedy je $\mathbf{w} = (2,609; 0,755; 0,326; 1,442; 0,244; 4,430)$.

Pomocí nich se pak určí normované váhy podle vztahu (1.1). Tyto váhy jsou pak následující

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2,609}{9,806} = 0,266, & v_4 &= \frac{1,442}{9,806} = 0,147, \\ v_2 &= \frac{0,755}{9,806} = 0,077, & v_5 &= \frac{0,244}{9,806} = 0,025, \\ v_3 &= \frac{0,326}{9,806} = 0,033, & v_6 &= \frac{4,430}{9,806} = 0,452. \end{aligned}$$

K výpočtu indexu nekonzistence je ještě potřeba vypočítat matici \mathbf{S}^* , která je ve tvaru

$$\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} 0,209 & 0,403 & 0,231 & 0,311 & 0,167 & 0,174 \\ 0,023 & 0,045 & 0,297 & 0,035 & 0,167 & 0,058 \\ 0,030 & 0,005 & 0,033 & 0,021 & 0,100 & 0,065 \\ 0,070 & 0,134 & 0,165 & 0,104 & 0,300 & 0,105 \\ 0,042 & 0,009 & 0,011 & 0,012 & 0,033 & 0,075 \\ 0,627 & 0,403 & 0,264 & 0,518 & 0,233 & 0,523 \end{pmatrix}.$$

Index nekonzistence GW po dosazení do vzorce (3.24) je ve tvaru

$$\begin{aligned}
 GW &= \frac{1}{6} \left[|0,209 - 0,266| + |0,403 - 0,266| + \dots + |0,233 - 0,452| + |0,523 - 0,452| \right] = \\
 &= \frac{1}{6} (0,057 + 0,137 + \dots + 0,219 + 0,071) = 0,3831.
 \end{aligned}$$

Výsledky indexu nekonzistence GW pro všechny zmiňované matice jsou uvedeny v tabulce (3.14).

Tab. 3.14: Výsledky indexu GW

	S_1	S_2	S_3
GW	0,3831	0,3169	0,1747

V tabulce (3.14) je vidět, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic, přičemž je celkem velký rozdíl mezi nekonzistencí matice S_2 a S_3 .

3.10 Index c_3

Nechť je dána matice S ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Shiraishi a Obata [15] navrhli index nekonzistence koeficient c_3 charakteristického polynomu matice párového srovnávání. Dle definice je charakteristický polynom matice S v následujícím tvaru

$$P_S \lambda = \lambda^m + c_1 \lambda^{m-1} + c_2 \lambda^{m-2} + \dots + c_{m-1} \lambda + c_m,$$

kde c_1, \dots, c_m jsou reálná čísla a λ je neznámá. Shiraishi [15] dokázal, že pokud platí $c_3 < 0$, tak matice S nemůže být zcela konzistentní. To znamená, že přítomnost c_3 je nepochybně příznak nekonzistence.

Shiraishi [15] také dokázal, že index nekonzistence c_3 je v tomto tvaru

$$c_3 = \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left(2 - \frac{s_{ik}}{s_{ij} s_{jk}} - \frac{s_{ij} s_{jk}}{s_{ik}} \right). \quad (2.30)$$

Příklad 3.10 Nechť je dána matice S_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Index c_3 je po dosazení do vztahu (3.25) ve tvaru

$$c_3 = \left(2 - \frac{7}{9 \cdot 9} - \frac{9 \cdot 9}{7}\right) + \left(2 - \frac{3}{9 \cdot \frac{1}{3}} - \frac{9 \cdot \frac{1}{3}}{3}\right) + \dots + \left(2 - \frac{\frac{1}{8}}{3 \cdot \frac{1}{7}} - \frac{3 \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{8}}\right) + \left(2 - \frac{\frac{1}{5}}{9 \cdot \frac{1}{7}} - \frac{9 \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= -9,658 + 0 + \dots + (-1,720) + (-4,584) = -55,2338.$$

Výsledky indexu c_3 pro všechny matice jsou shrnuty v tabulce (3.15).

Tab. 3.15: Výsledky indexu c_3

	S_1	S_2	S_3
c_3	-55,2338	-29,0697	-6,7153

Z tabulky (3.15) vyplývá, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic, přičemž je zde velký rozdíl mezi hodnotami nekonzistence těchto matic.

3.11 Index ρ

Nechť je dána matice S ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Fedrizzi a Giove [16] navrhli index ρ , který je založen na reciprokových vztazích, které mohou být reprezentovány maticí R typu $m \times m$, kdy platí

$$r_{ii} = 0,5 \quad \forall i,$$

$$r_{ij} + r_{ji} = 1 \quad \forall i, j,$$

kde r_{ij} je stupeň významnosti mezi kritérii, tedy r_{ij} nabývá následujících hodnot

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & K_i \text{ je silně významnější než } K_j \\ \alpha \in (0,5, 1) & K_i \text{ je významnější než } K_j \text{ ve stupni } \alpha \\ 0,5 & K_i \text{ je stejně významné než } K_j \\ \beta \in (0, 0,5) & K_j \text{ je významnější než } K_i \text{ ve stupni } \beta \\ 0 & K_j \text{ je silně významnější než } K_i \end{cases}.$$

Matici R lze získat z matice S následujícím vztahem

$$r_{ij} = \frac{1}{2} (1 + \log_9 s_{ij}). \quad (2.31)$$

Z matice R se pak určí částečné indexy nekonzistence vztahem

$$t_{ijk}^2 = (r_{ij} - r_{ik} - r_{kj} + 0,5)^2, \quad (2.32)$$

kde r_{ij} značí reciproký vztah mezi kritérii K_i, K_j , r_{ik} označuje vztah mezi K_i, K_k a r_{jk} vyjadřuje vztah mezi K_j, K_k .

Celkový index nekonzistence ρ se vypočítá jako střední hodnota všech částečných indexů nekonzistence vztahem

$$\rho = \frac{\sum_{i < j < k}^m t_{ijk}^2}{\binom{m}{3}}. \quad (2.33)$$

Příklad 3.11 Necht' je dána matice S_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Jak již bylo zmíněno, index nekonzistence ρ je založen na matici reciprokých vztahů, která se vytvoří pomocí vzorce (3.26) a je ve tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{33}{35} & \frac{3}{4} & \frac{13}{15} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{13}{15} & 0 \\ \frac{2}{35} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{15} & \frac{3}{4} & \frac{1}{37} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{13}{15} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{35} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{36}{37} & \frac{13}{15} & \frac{33}{35} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pro konečný výpočet indexu nekonzistence se musí spočítat částečné indexy nekonzistence t_{ijk}^2 , které jsou po dosazení do vztahu (3.27) ve tvaru

$$t_{123}^2 = \left(1 - \frac{33}{35} - 0 + 0,5 \right)^2 = 0,31,$$

$$t_{124}^2 = \left(1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + 0,5 \right)^2 = 0, \text{ atd.}$$

Všechny hodnoty částečných indexů nekonzistence jsou shrnuty v následující tabulce.

Tab. 3.16: Hodnoty částečných indexů nekonzistence

t_{123}^2	0,31	t_{135}^2	0,11	t_{234}^2	0,15	t_{256}^2	0,18
t_{124}^2	0,00	t_{136}^2	0,05	t_{235}^2	0,15	t_{345}^2	0,01
t_{125}^2	0,25	t_{145}^2	0,15	t_{236}^2	0,28	t_{346}^2	0,07
t_{126}^2	0,06	t_{146}^2	0,02	t_{245}^2	0,01	t_{356}^2	0,08
t_{134}^2	0,03	t_{156}^2	0,03	t_{246}^2	0,01	t_{456}^2	0,18

Index nekonzistence ρ je po dosazení do vztahu (3.28) ve tvaru

$$\rho = \frac{0,31 + 0 + \dots + 0,08 + 0,18}{\binom{6}{3}} = 0,106.$$

Výsledky indexu pro všechny matice jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 3.17: Výsledky indexu ρ

	S_1	S_2	S_3
ρ	0,106	0,067	0,016

Z tabulky (3.17) vyplývá, že matice S_1 je nejméně konzistentní matice a S_3 je nejvíce konzistentní z uvažovaných matic.

4 Vlastnosti indexů nekonzistence

4.1 Axiomatické vlastnosti indexů nekonzistence

V předchozí kapitole byly představeny různé indexy nekonzistence. Otázkou ale je, jak dobře dané indexy měří nekonzistenci Saatyho matice. Z tohoto důvodu Brunelli [7] zavádí na indexy nekonzistence systém axiomů (požadavků).

Mezi zavedené axiomy se řadí:

- Axiom 1 (A1) – Existence jednoho prvku představujícího konzistenci,
- Axiom 2 (A2) – Invariance vzhledem k permutacím kritérií,
- Axiom 3 (A3) – Monotónnost v rámci reciprocity,
- Axiom 4 (A4) – Monotónnost v jednotlivých srovnáních,
- Axiom 5 (A5) – Kontinuita (spojitost).

Axiom 1 (A1) – Existence jednoho prvku představujícího konzistenci

Nechť je dána matice \mathbf{S} ve výše uvedeném tvaru (5.1).

Tento axiom říká, že všechny konzistentní matice jsou určeny jednou reálnou hodnotou indexu nekonzistence. To umožňuje rozlišovat mezi maticemi, které jsou nebo nejsou konzistentní.

Formální zápis axiomu A1 je následující: Index nekonzistence I splňuje A1 právě tehdy, když

$$\exists! v \in R \text{ takové, že } I(\mathbf{S}) = v \Leftrightarrow \mathbf{S} \in \mathbf{S}^K, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{S}^K označuje množinu konzistentních matic.

Axiom 2 (A2) – Invariance vzhledem k permutacím kritérií

Je žádoucí, aby index nekonzistence nezávisel na pořadí, ve kterém jsou kritéria v matici uspořádána. Proto byl zaveden axiom A2. Pro připomenutí, matice permutací je čtvercová binární matice, která má na každém řádku a v každém sloupci právě jednu jedničku a všude jinde nuly.

Formální zápis tohoto axiomu je následující: Index nekonzistence I splňuje A2 právě tehdy, když

$$I(\mathbf{PSP}^T) = I(\mathbf{S}) \quad \forall \mathbf{S}, \forall \mathbf{P}, \quad (3.2)$$

kde \mathbf{P} je matice permutací.

Příklad 4.1 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2). A necht' je dána matice permutací ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{PS}_1\mathbf{P}^T$ je pak ve tvaru

$$\mathbf{PSP}^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & 3 \\ 7 & 1 & 3 & \frac{1}{3} & 9 & 5 \\ 5 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} & 3 & 9 \\ 8 & 3 & 5 & 1 & 9 & 7 \\ 9 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Axiom A2 říká, že u matice \mathbf{S}_1 a matice $\mathbf{PS}_1\mathbf{P}^T$ vyjde stejná hodnota indexu nekonzistence.

Axiom 3 (A3) – Monotónnost v rámci reciprocity

Necht' je dána matice \mathbf{S} ve výše uvedeném tvaru (3.1).

Axiom 3 vyjadřuje, že pokud se v matici \mathbf{S} preference zintenzivní, pak tato matice nemůže mít nižší hodnotu indexu nekonzistence než původní matice \mathbf{S} .

Formální zápis tohoto axiomu je následující: Index nekonzistence I splňuje A3 právě tehdy, když

$$I(\mathbf{S}(b)) \geq I(\mathbf{S}) \quad \forall b > 1, \forall \mathbf{S}, \quad (3.3)$$

kde $\mathbf{S}(b) = (s_{ij}^b)$ typu $m \times m$.

Příklad 4.2 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve tvaru (3.2). Pro $b=3$ je matice $\mathbf{S}_1(3)$ v následujícím tvaru

$$\mathbf{S}_1(3) = \begin{pmatrix} 1^3 & 9^3 & 7^3 & 3^3 & 5^3 & \frac{1}{3^3} \\ \frac{1}{9^3} & 1^3 & 9^3 & \frac{1}{3^3} & 5^3 & \frac{1}{9^3} \\ \frac{1}{7^3} & \frac{1}{9^3} & 1^3 & \frac{1}{5^3} & 3^3 & \frac{1}{8^3} \\ \frac{1}{3^3} & 3^3 & 5^3 & 1^3 & 9^3 & \frac{1}{5^3} \\ \frac{1}{5^3} & \frac{1}{5^3} & \frac{1}{3^3} & \frac{1}{9^3} & 1^3 & \frac{1}{7^3} \\ 3^3 & 9^3 & 8^3 & 5^3 & 7^3 & 1^3 \end{pmatrix}.$$

Pokud index nekonzistence splňuje A3, tak musí platit $I(\mathbf{S}_1(3)) \geq I(\mathbf{S}_1)$. Jinými slovy, matice $\mathbf{S}_1(3)$ nemůže být méně nekonzistentní než matice \mathbf{S}_1 .

Axiom 4 (A4) – Monotónnost v jednotlivých srovnáních

Necht' je dána matice \mathbf{S} ve výše uvedeném tvaru (3.1), která je konzistentní.

Axiom 4 vyjadřuje, že čím větší změna se u nediagonální hodnoty s_{pq} v matici \mathbf{S} provede (včetně odpovídající převrácené hodnoty), tím větší bude hodnota nekonzistence výsledné matice.

Formální zápis axiomu 4 je následující: Index nekonzistence I splňuje A4 právě tehdy, když $I(\mathbf{S}_{pq}(\delta))$ je neklesající funkcí parametru δ pro $\delta > 1$ a nerostoucí funkcí parametru δ pro $\delta < 1 \forall \mathbf{S}$ a $\forall p, q = 1, \dots, m$.

Příklad 4.3 Necht' je dána konzistentní matice párových srovnání \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud se například změní hodnota s_{13} (včetně odpovídající převrácené hodnoty), pak lze získat matice

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud index nekonzistence I splňuje A4, pak platí $I(\mathbf{S}'') \geq I(\mathbf{S}') \geq I(\mathbf{S})$.

Axiom 5 (A5) – Kontinuita (spojitost)

Nechť je dána matice \mathbf{S} ve výše uvedeném tvaru (5.1).

Index nekonzistence $I(\mathbf{S})$ je považován za funkci $\binom{m}{2}$ proměnných s_{ij} , $i < j$ a

kontinuitou $I(\mathbf{S})$ se rozumí spojitost této funkce $\binom{m}{2}$ reálných proměnných.

Formální zápis axiomu 5 je následující: Index nekonzistence $I(\mathbf{S})$ splňuje A5 právě tehdy, když $I(\mathbf{S})$ je spojitá funkce \mathbf{S} , přičemž $s_{ij} > 0$, $s_{ij}s_{ji} = 1 \forall i, j$.

4.1.1 Význam axiomů

Dříve popsané axiomy jsou nezbytné, protože jejich porušení může mít za následek nepřiměřené měření nekonzistence.

- Pokud je axiom 1 porušen, tak dvě zcela konzistentní matice mohou mít dvě různá číselná hodnocení konzistence.
- Pokud je axiom 2 porušen, tak různá hodnocení konzistence by mohla být spojena se stejným souborem preferencí, a to pouhým přeuspořádáním kritérií.
- Pokud je axiom 3 porušen, tak matici $\mathbf{S}_1(3)$, která byla vytvořena v příkladu 4.2, v níž jsou intenzivnější preference, by bylo možné hodnotit jako méně konzistentní matici než matici \mathbf{S}_1 .
- Pokud je axiom 4 porušen, tak matice \mathbf{S}' by mohla být méně konzistentní než \mathbf{S}'' (př. 6.3).
- Pokud je axiom 5 porušen, tak nespojitý index nekonzistence může přiřadit nejvyšší hodnotu indexu nekonzistence na matici, která je libovolně blízko od konzistentní matice.

4.1.2 Splnění axiomů

V této podkapitole jsou uvedené věty, které říkají, které indexy nekonzistence splňují výše uvedené axiomy. Důkazy jednotlivých vět uvedl Brunelli [7].

Věta 4.1 Saatyho index nekonzistence CI splňuje všech pět axiomů.

Důkaz: viz [7], str. 10.

Věta 4.2 Index nekonzistence CI^* splňuje všech pět axiomů.

Důkaz: viz [7], str. 10.

Věta 4.3 Index nekonzistence GCI splňuje všech pět axiomů.

Důkaz: viz [7], str. 12.

Věta 4.4 Index nekonzistence RE splňuje A1-A3, ale nespĺňuje A4-A5.

Důkaz: viz [7], str. 13.

Věta 4.5 Index nekonzistence HCI splňuje A1, A2, A4 a A5, ale nespĺňuje A3.

Důkaz: viz [7], str. 14.

Věta 4.6 Index nekonzistence GW splňuje A1, A2 a A5. V případě, že vektor vah je spočítán pomocí metody geometrického průměru řádků (1.9), pak index nekonzistence GW nespĺňuje A3.

Důkaz: viz [7], str. 15.

V následující tabulce je přehledně zobrazeno, jaké indexy nekonzistence splňují dané axiomy, přičemž + je označení pro splnění daného axiomu, - je označení pro nespĺnění daného axiomu a ? značí neznámý údaj.

Tab. 4.1: Splnění axiomů

	A1	A2	A3	A4	A5
<i>CI</i>	+	+	+	+	+
<i>GCI</i>	+	+	+	+	+
<i>HCI</i>	+	+	-	+	+
<i>CI*</i>	+	+	+	+	+
<i>GW</i>	+	+	-	?	+
<i>RE</i>	+	+	+	-	-

4.2 Vztahy mezi indexy nekonzistence

Přestože každý z indexů je nadefinován jinak, lze ukázat, že některé z indexů nekonzistence jsou proporcionální.

Lze dokázat, že index c_3 je proporcionální k indexu determinantů CI^* , a že index ρ je proporcionální ke geometrickému indexu nekonzistence GCI . Následující věty popisují tyto vztahy a uvedl je ve své práci Brunelli [3].

Věta 4.7 Necht' je dána pozitivní reciproká matice $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ typu $m \times m$, kdy $m \geq 3$.

Pak pro indexy nekonzistence c_3 a CI^* platí následující rovnost

$$c_3 = -\binom{m}{3} CI^*. \quad (3.4)$$

Důkaz: Index nekonzistence CI^* se vypočítá jako střední hodnota determinantů všech podmatic typu 3×3 , které jsou ve tvaru

$$\mathbf{T}_{ijk} = \begin{pmatrix} 1 & s_{ij} & s_{ik} \\ s_{ji} & 1 & s_{jk} \\ s_{ki} & s_{kj} & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall i < j < k.$$

A proto index CI^* je definován následovně

$$CI^* = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left(\frac{s_{ik}}{s_{ij}s_{jk}} + \frac{s_{ij}s_{jk}}{s_{ik}} - 2 \right)}{\binom{m}{3}}. \quad (3.5)$$

Kromě toho, protože je matice $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ pozitivní reciproká matice, tak Shiraishi dokázal, že pro index nekonzistence c_3 platí

$$c_3 = \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m \left(2 - \frac{s_{ik}}{s_{ij}s_{jk}} - \frac{s_{ij}s_{jk}}{s_{ik}} \right). \quad (3.6)$$

Ze vztahů (4.5) a (4.6) lze vidět už výše uvedený vztah

$$c_3 = -\binom{m}{3} CI^*.$$

□

Příklad 4.4 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Dle příkladu (3.5) je index determinantů $CI^* = 2,7617$.

Index c_3 je po dosazení do vzorce (4.4)

$$c_3 = -\binom{m}{3} 2,7617 = -55,2338,$$

což je stejný výsledek jako vyšel v příkladu (3.10).

Věta 4.8 Necht' je dána matice $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{m \times m}$, která se z matice \mathbf{S} získá vztahem (3.26). Pak pro indexy nekonzistence ρ a GCI platí následující rovnost

$$\rho = \frac{3}{4 \ln^2 9} GCI. \quad (3.7)$$

Důkaz: viz [3].

Příklad 4.5 Necht' je dána matice \mathbf{S}_1 ve výše uvedeném tvaru (3.2).

Řešení:

Dle příkladu (3.3) je geometrický index nekonzistence $GCI = 0,6824$.

Index ρ je po dosazení do vzorce (4.7)

$$\rho = \frac{3}{4 \ln^2(9)} \cdot 0,6824 = 0,106,$$

což je stejný výsledek jako vyšel v příkladu (3.11).

Závěr

Cílem diplomové práce bylo srozumitelně popsat různé přístupy k měření (ne)konzistence v maticích párových srovnání, především se zaměřit na Saatyho matici, která se využívá v metodě AHP. Proto v práci byla nejprve představena metoda AHP a poté byly uvedeny věty týkající se konzistence matic.

Jednotlivé indexy k měření (ne)konzistence byly aplikovány na příkladech. Pro každý index byla zadána stejná Saatyho matice, aby se daly výsledky porovnat.

Nejprve byla zadána matice S_1 , která byla zcela jistě nekonzistentní (nesplňovala ani slabou konzistenci), u níž se zjišťovaly výsledky indexů nekonzistence. Další maticí byla matice S_2 (vychází z matice S_1), která při zachování pořadí významnosti splňuje alespoň slabou konzistenci. Třetí uvažovaná matice S_3 byla tvořená tak, aby kritéria měla stejná pořadí významnosti a zároveň, aby platilo, že první kritérium je dvakrát významnější než druhé kritérium, druhé kritérium je pak dvakrát významnější než třetí kritérium (tj. první kritérium je čtyřikrát významnější než třetí kritérium), atd.

O těchto maticích lze předpokládat, že třetí uvažovaná matice je nejvíce konzistentní z těchto uvažovaných matic, což následně potvrdily dané indexy nekonzistence.

Na indexy nekonzistence jsou kladeny určité požadavky (aby přiměřeně měřily nekonzistenci), tzv. axiomatické vlastnosti. Ne všechny indexy nekonzistence splňují tyto vlastnosti. Všechny vlastnosti splňuje index nekonzistence CI , geometrický index nekonzistence GCI a pak také index determinantů CI^* . Dále jsou v práci uvedeny vztahy mezi některými indexy nekonzistence. Lze dokázat, že index c_3 je proporcionální k indexu determinantů CI^* , a že index ρ je proporcionální ke geometrickému indexu nekonzistence GCI .

Přínos diplomové práce spočívá v přehledu různých přístupů k měření (ne)konzistence matic. Byl zde kladen důraz na srozumitelnost daných indexů.

Použitá literatura

- [1] SAATY, Thomas L. *The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation*. London: McGraw-Hill International Book Co., c1980. ISBN 0070543712.
- [2] BRUNELLI, Matteo. *Introduction to the analytic hierarchy process*. New York: Springer, 2014. ISBN 978-331-9125-015.
- [3] BRUNELLI, Matteo, Andrew CRITCH a Michele FEDRIZZI. *A note on the proportionality between some consistency indices in the AHP* [online]. , 10 [cit. 2016-03-28]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300313000751>
- [4] BRUNELLI, Matteo, Luisa CANAL a Michele FEDRIZZI. Inconsistency indices for pairwise comparison matrices: a numerical study. *Annals of Operations Research*. 2013, **211**(1), 493-509. DOI: 10.1007/s10479-013-1329-0. ISSN 0254-5330. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/s10479-013-1329-0>
- [5] RAMÍK, Jaroslav. *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání*. Karviná: Slezská univerzita, 2000. ISBN 80-7248-088-x.
- [6] Holder, R.D.: *Some Comments on the Analytic Hierarchy Process*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 41, No. 11, 1990, 1073 – 1076
- [7] BRUNELLI, Matteo a Michele FEDRIZZI. Axiomatic properties of inconsistency indices for pairwise comparisons. *Journal of the Operational Research Society* [online]. 2015, **66**(1), 1-15 [cit. 2017-03-19]. DOI: 10.1057/jors.2013.135. ISSN 0160-5682. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1057/jors.2013.135>
- [8] CRAWFORD, G. The geometric mean procedure for estimating the scale of a judgement matrix. *Pergamon Journals*. 1985.
- [9] STEIN, William E. a Philip J. MIZZI. The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research* [online]. 2007, **177**(1), 488-497 [cit. 2017-04-12]. DOI: 10.1016/j.ejor.2005.10.057. ISSN 03772217. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221705009288>

- [10] J. I. Peláez and M. T. Lamata. A new measure of consistency for positive reciprocal matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 46(12):1839–1845, 2003.
- [11] A. A. Salo and R. Hämäläinen. Preference programming through approximate ratio comparisons. *European Journal of Operational Research*, 82(3):458–475, 1995.
- [12] Barzilai, J. Consistency measures for pairwise comparison matrices. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 7(3), 123–132, 1998.
- [13] Koczkodaj, W.W. A new definition of consistency of pairwise comparisons. *Mathematical and Computer Modelling*, 18(7), 79–84, 1993.
- [14] Golden, B. L., & Wang, Q. An alternate measure of consistency. In B. L. Golden, E. A. Wasil, & P. T. Harker (Eds.), *The analytic hierarchy process, applications and studies* (pp. 68–81). Berlin: Springer.
- [15] S. Shiraishi and T. Obata. On a maximization problem arising from a positive reciprocal matrix in the AHP. *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 34(2):91–96, 2002.
- [16] FEDRIZZI, Michele a Silvio GIOVE. Incomplete pairwise comparison and consistency optimization. *European Journal of Operational Research* [online]. 2007, 183(1), 303-313 [cit. 2017-04-12]. DOI: 10.1016/j.ejor.2006.09.065. ISSN 03772217. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221706010022>