

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu, panu doc. Mgr. Zdeňku Opluštilovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, ochotnou spolupráci a čas, který mi věnoval na konzultacích. Také bych ráda poděkovala své mamince, za trpělivost a neuvěřitelnou podporu.

Monika Machalová

Obsah

1	Úvod	2
2	Obyčejné diferenciální rovnice	3
2.1	Základní vlastnosti	3
2.2	Lineární diferenciální rovnice a jejich řešení	3
2.3	Okrajové úlohy a jejich řešení	6
3	Analytické řešení průhybů nosníku	10
3.1	Matematický popis zakřivení	11
3.2	Oboustranně vetknutý nosník	14
3.3	Oboustranně podepřený nosník	18
3.4	Nosník s volným koncem	22
3.5	Vzpěrná stabilita prutů	24
4	Porovnání lineárních a nelineárních modelů	28
4.1	Oboustranně podepřený nosník	30
4.2	Nosník s volným koncem	31
5	Závěr	33
6	Seznam použitých zkratk a symbolů	35

1. Úvod

S diferenciálními rovnicemi se setkáváme v mnoha odvětvích při modelování různých reálných dějů. K nalezení konkrétního řešení je obvykle potřeba popsat buď stav na počátku děje, v takovém případě mluvíme o počátečních úlohách, nebo v krajních bodech intervalu, na kterém úlohu řešíme, pak mluvíme o tzv. okrajových úlohách. Tato bakalářská práce se zabývá okrajovými úlohami pro řešení úlohy průhybu nosníku.

Ve druhé kapitole jsou nejprve připomenuty základní pojmy a postupy pro řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic. Následně se věnujeme popisu okrajových úloh s ohledem na různé varianty předepsaných okrajových podmínek. Prostřednictvím jednoduchého příkladu je ukázán vliv předepsaných okrajových podmínek na řešitelnost.

Třetí kapitola je věnována odvození lineární rovnice pro průhyb nosníku a to prostřednictvím lineární diferenciální rovnice druhého i čtvrtého řádu. Následuje celkem pět příkladů výpočtu analytického řešení průhybu nosníku s různými typy uchycení a zatížení. Analytická řešení jednotlivých příkladů jsou vykreslena prostřednictvím matematického softwaru Matlab. V poslední části této kapitoly je čtenář seznámen se zvláštním typem chování průhybu nosníku, čímž je vzpěr.

Poslední, čtvrtá kapitola je zaměřena na porovnání lineárních a nelineárních modelů. Nelineární modely nosníku jsou vhodné v případě, kdy uvažujeme středně velké průhyby nosníku. Kromě linearizovaného tvaru rovnice popisující průhyb nelineárního modelu nosníku je použita i aproximace získaná užitím Taylorova rozvoje. Jsou zde tedy uvažovány dva nelineární modely. Užitím implementovaných funkcí v softwaru Matlab jsme našli numerické řešení dvou konkrétních úloh, průhyb oboustranně podepřeného nosníku a nosníku s volným koncem. Na obrázcích je pro srovnání vykresleno řešení pro oba typy nelineárních modelů včetně modelu lineárního.

2. Obyčejné diferenciální rovnice

2.1. Základní vlastnosti

V této kapitole si připomeneme základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic, zkráceně ODR (z angl. Ordinary Differential Equations), čerpáno z [1], [2]. Necht $y(x)$ je neznámá funkce, $x \in I$ je nezávisle proměnná a $y, \dots, y^{(n)}$ jsou derivace této neznámé funkce. Rovnici

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

kde F je daná funkce $n + 2$ proměnných, definovaná na nějaké množině $G = I \times \Omega$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nazýváme obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu. Řádem diferenciální rovnice (2.1) rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v (2.1) vyskytuje. Speciálně, pro $n = 1$, tedy máme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$F(x, y, y') = 0.$$

Řešení obyčejné diferenciální rovnice n -tého řádu tvaru (2.1) je definováno následovně.

Definice 2.1 Řekneme, že funkce $u(x)$ je řešením rovnice (2.1) na intervalu I , jestliže je n -krát spojitě diferencovatelná na intervalu I a $\forall x \in I$ platí

$$(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) \in G, \quad F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0.$$

Řešit diferenciální rovnici znamená určit všechna její řešení. Ale ne každá taková rovnice musí být řešitelná. Množinu všech řešení naší diferenciální rovnice (2.1) nazýváme obecné řešení. Obecné řešení lze v některých případech (například u lineárních diferenciálních rovnic) vyjádřit ve tvaru

$$y = u(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Když z obecného řešení vybereme jedno konkrétní, například volbou konstant c_1, c_2, \dots, c_n , hovoříme o partikulárním řešení. Partikulární řešení dané rovnice lze také získat za předpokladu, že k rovnici přidáme tzv. počáteční nebo okrajové podmínky. Pak úlohu najít řešení dané rovnice, které vyhovuje předepsané počáteční nebo okrajové podmínce, nazýváme počáteční nebo okrajovou úlohou. V této práci se budeme zabývat pouze okrajovými úlohami.

2.2. Lineární diferenciální rovnice a jejich řešení

Uvažujme lineární diferenciální rovnici n -tého řádu

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad \forall x \in I, \quad (2.2)$$

kde $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x)$ a $b(x)$ jsou dané spojitě funkce, $a_n(x) \neq 0$ na I . Tuto rovnici pak lze také stručněji zapsat ve tvaru

$$L(y) = b(x),$$

kde

$$L(y) = a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

O tvaru řešení této rovnice pak hovoří následující věta.

2.2. LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ

Věta 2.1 Necht funkce $a_k(x)$, $k = 0, \dots, n$ a $b(x)$ z rovnice (2.2) jsou funkce spojité na intervalu I . Potom pro každé řešení $y(x)$ rovnice $L(y) = b(x)$ existují reálné konstanty c_1, \dots, c_n tak, že

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) + y_p(x),$$

kde $y_p(x)$ je libovolné (tzv. partikulární) řešení rovnice $L(y) = b(x)$ a $u_1(x), \dots, u_n(x)$ je n -tice lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice

$$L(y) = 0.$$

Funkci

$$y_h(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x)$$

pak nazýváme obecným řešením příslušné homogenní rovnice, tedy rovnice (2.1).

Pokud jsou funkce $a_k(x)$, $k = 0, \dots, n$ konstantní, tj. $a_k(x) = a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, je rovnice (2.2) tvaru

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x), \quad x \in I.$$

V tomto případě hovoříme o lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty.

Pro hledání řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty budeme využívat tzv. Wronského matici, jejíž definici si nyní uvedeme.

Definice 2.2 Necht funkce $u_1(x), \dots, u_n(x)$ mají spojité derivace do řádu $n-1$ na I . Výraz

$$\mathbf{W}[u_1, \dots, u_n](x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & \dots & u_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

se nazývá Wronského matice funkcí $u_1(x), \dots, u_n(x)$. Determinant Wronského matice se nazývá wronskián funkcí $u_1(x), \dots, u_n(x)$.

Obecné řešení diferenciální rovnice (2.2) budeme i v tomto případě hledat ve tvaru

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

tedy jako součet řešení $y_h(x)$ příslušné homogenní rovnice tvaru

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad x \in I \quad (2.4)$$

a jednoho konkrétního partikulárního řešení $y_p(x)$ dané nehomogenní rovnice (2.2). Nyní se podíváme na konkrétní příklady, jak takové řešení najít.

Řešení homogenní rovnice

Řešení homogenní rovnice (2.4) budeme hledat ve tvaru exponenciální funkce $u(x) = e^{\lambda x}$. Vypočteme derivace funkce $u(x)$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ u''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ u^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Dosazením příslušných derivací do rovnice $L(y) = 0$ a vydělením členem $e^{\lambda x}$ získáme tzv. charakteristickou rovnici $P(\lambda) = 0$, kde $P(\lambda)$ je polynom tvaru

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0.$$

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ kořenem polynomu $P(\lambda)$, pak je funkce $u(x) = e^{\lambda x}$ řešením rovnice $L(y) = 0$. Tvar obecného řešení $y_h(x)$ rovnice (2.4) závisí na kořenech λ . Jednotlivé varianty řešení si ukážeme na jednoduchých příkladech.

Jestliže

- $P(\lambda)$ má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 , pak funkce $u_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $u_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ jsou řešením dané homogenní rovnice.

Příklad: je dána rovnice $2y'' + 5y' = 0$. Příslušný charakteristický polynom má kořeny $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$. Obecné řešení dané rovnice je tvaru $y(x) = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{2}x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- $P(\lambda)$ má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2}$, pak funkce $u_1(x) = e^{\lambda_{1,2} x}$ a $u_2(x) = x e^{\lambda_{1,2} x}$ jsou řešením dané rovnice.

Příklad: je dána rovnice $y'' - 2y' + y = 0$. Příslušný charakteristický polynom má dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = 1$. Obecné řešení dané rovnice je pak tedy tvaru $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- $P(\lambda)$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = u \pm iv$, pak jsou řešením dané rovnice funkce $u_1(x) = e^{ux} \cos(vx)$, $u_2(x) = e^{ux} \sin(vx)$.

Příklad: je dána rovnice $y'' + 6y' + 13y = 0$. Kořeny příslušného charakteristického polynomu $P(\lambda)$ jsou $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$. Hledané obecné řešení dané rovnice je tvaru $y(x) = c_1 e^{-3x} \cos(2x) + c_2 e^{-3x} \sin(2x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- $P(\lambda)$ má násobné komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2,3,4} = u \pm iv$, pak jsou funkce $u_1(x) = e^{ux} \cos(vx)$, $u_2(x) = e^{ux} \sin(vx)$, $u_3(x) = x e^{ux} \cos(vx)$ a $u_4(x) = x e^{ux} \sin(vx)$, řešením dané rovnice.

Příklad: je dána rovnice $y'''' + 8y'' + 16y = 0$, jejíž příslušný charakteristický polynom má kořeny $\lambda_{1,2,3,4} = \pm 2i$. Obecné řešení je tvaru $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 x \cos(2x) + c_4 x \sin(2x)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení $y_p(x)$ rovnice (2.2) lze najít dvěma způsoby, které si nyní připomeneme.

2.3. OKRAJOVÉ ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

Řešení nehomogenní rovnice - metoda variace konstant

Předpokládejme, že jsme již našli n -tici lineárně nezávislých řešení $u_1(x), \dots, u_n(x)$ příslušné homogenní lineární diferenciální rovnice (2.1). Tedy její obecné řešení je tvaru $y_h(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou $b(x)$ budeme hledat ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + \dots + c_n(x)u_n(x), \quad (2.5)$$

kde $c_1(x), \dots, c_n(x)$ jsou tzv. variabilní konstanty, tedy funkce, které závisí na proměnné x . Dosazením (2.5) do rovnice (2.2) a užitím Wronského matice dostaneme vztah pro derivace variabilních konstant

$$\mathbf{W}[u_1, \dots, u_n](x) \cdot \mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x),$$

kde $\mathbf{W}[u_1, \dots, u_n](x)$ je již zmiňovaná Wronského matice nezávislých řešení, $\mathbf{C}'(x)$ je sloupcový vektor derivací variabilních konstant $\mathbf{C}'(x) = (c_1'(x), \dots, c_n'(x))^\top$ a na pravé straně je vektor $\mathbf{b}(x) = (0, \dots, 0, b(x))^\top$.

Řešení nehomogenní rovnice - metoda neurčitých koeficientů

Metoda neurčitých koeficientů je metoda použitelná pouze v případě, kdy pravá strana lineární diferenciální rovnice (2.2) je speciálního tvaru, konkrétně:

- exponenciální funkce,
- funkce typu $\sin(vx), \cos(vx)$,
- funkce typu $e^{ux} \cos(vx), e^{ux} \sin(vx)$,
- polynom,

případně nějaká jejich lineární kombinace.

Partikulární řešení diferenciální rovnice (2.2) budeme hledat ve stejném tvaru jako je pravá strana rovnice. Konkrétně hledané partikulární řešení budeme uvažovat v daném tvaru s neurčitými (neznámými) koeficienty a dosadíme ho do rovnice $L(y) = b(x)$. Tím získáme soustavu lineárních rovnic, ze kterých jsme schopni získat konkrétní hodnoty těchto koeficientů.

2.3. Okrajové úlohy a jejich řešení

V této kapitole se zaměříme na okrajové úlohy druhého řádu, viz [5]. Tedy uvažujme nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x), \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad (2.6)$$

Budeme hledat řešení $y(x)$ dané rovnice, které navíc splňuje předepsané okrajové podmínky

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = y_0, \quad (2.7)$$

$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = y_1, \quad (2.8)$$

2. OBÝČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

kde y_a, y_b jsou dané hodnoty řešení v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$ a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou reálná čísla, pro která platí

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| &\neq 0, \\ |\gamma| + |\delta| &\neq 0. \end{aligned}$$

Definice 2.3 Úlohu najít funkci $y(x)$ vyhovující rovnici (2.6) a splňující okrajové podmínky (2.7), (2.8), nazýváme okrajovou úlohou. Jestliže $y_a = y_b = 0$, pak hovoříme o homogenních okrajových podmínkách, v opačném případě hovoříme o nehomogenních okrajových podmínkách.

Rozlišujeme tři typy speciálních případů okrajových podmínek. Tím prvním jsou tzv. **Dirichletovy podmínky**, nebo-li podmínky 1. druhu, které mají tvar

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Druhým typem jsou **Neumannovy podmínky**, tzv. podmínky 2. druhu, které jsou tvaru

$$y'(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b.$$

Posledním, třetím speciálním případem okrajových podmínek jsou **Newtonovy podmínky**, v literatuře bývají označovány jako obecné okrajové podmínky tvaru

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) &= y_a, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= y_b. \end{aligned}$$

Obtížnost studia okrajových úloh spočívá zejména v jejich nelokálnosti. Pro okrajové úlohy například neplatí analogie Picardovy věty o jednoznačnosti počáteční úlohy, jak můžeme vidět v následujícím příkladu.

Příklad 2.1 Uvažujme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + 4y = 0. \tag{2.9}$$

Podle Picardovy věty má každá počáteční úloha pro tuto rovnici právě jedno řešení. Pokud však budeme uvažovat s rovnicí (2.9) okrajové podmínky, pak můžeme mít okrajové úlohy, které jsou jednoznačně řešitelné, ale i takové, které mají nekonečně mnoho řešení, resp. vůbec řešení nemají. Obecné řešení dané rovnice (2.9) je tvaru

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x),$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

a) Uvažujme nyní okrajové podmínky tvaru

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Po dosazení okrajových podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} y(0) = 0 : \quad c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 &= 0, \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 : \quad c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} &= 1. \end{aligned}$$

2.3. OKRAJOVÉ ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

Vyřešením této soustavy lineárních rovnic dostáváme $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Tedy řešení rovnice vyhovující daným okrajovým podmínkám je tvaru

$$y(x) = \sin(2x),$$

což je jediné řešení.

b) V případě, že jsou dány okrajové podmínky tvaru

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

dostáváme po dosazení soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} y(0) = 0 : \quad c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 &= 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 : \quad c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava ale má nekonečně mnoho řešení, tedy existuje nekonečně mnoho řešení dané rovnice (2.9) splňující tyto předepsané okrajové podmínky.

c) Jsou-li dány okrajové podmínky tvaru

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

dostaneme po dosazení soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} y(0) = 0 : \quad c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 &= 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 : \quad c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi &= 1. \end{aligned}$$

Tato soustava ale nemá žádné řešení, proto ani okrajová úloha s těmito podmínkami pro rovnici (2.9) nemá řešení.

Otázky týkající se řešitelnosti obecných lineárních okrajových úloh můžeme nalézt např. v [3]. Zde můžeme nalézt nutnou a postačující podmínku pro jednoznačnou řešitelnost dvoubodové okrajové úlohy pro lineární systém (což je zobecnění naší okrajové úlohy (2.6)-(2.8)). Uvažujme nyní okrajovou úlohu pro soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \tag{2.10}$$

$$A_1\mathbf{y}(a) + A_2\mathbf{y}(b) = \mathbf{c}, \tag{2.11}$$

kde $A(x)$ je maticová funkce $n \times n$, $\mathbf{b}(x)$ je n -rozměrná vektorová funkce, přičemž prvky $A(x)$ a $\mathbf{b}(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. A_1, A_2 jsou reálné matice $n \times n$ a \mathbf{c} je n -rozměrný vektor reálných čísel. Řešením okrajové úlohy (2.10), (2.11) pak rozumíme n -rozměrnou spojitě diferencovatelnou vektorovou funkci $\mathbf{y} : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, která vyhovuje systému (2.10) $\forall x \in \langle a, b \rangle$ a splňuje okrajové podmínky (2.11).

Spolu s okrajovou úlohou (2.10), (2.11) budeme uvažovat odpovídající homogenní úlohu

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} \tag{2.12}$$

$$A_1\mathbf{y}(a) + A_2\mathbf{y}(b) = \mathbf{0}. \tag{2.13}$$

Věta 2.2 (*Existence a jednoznačnost*)[3]

Pro jednoznačnou řešitelnost úlohy (2.10), (2.11) je nutné a stačí, aby odpovídající homogenní úloha (2.12), (2.13) měla pouze triviální (nulové) řešení, tj. aby byla splněna podmínka

$$\det(A_1 Y(a) + A_2 Y(b)) \neq 0$$

kde Y je fundamentální matice systému (2.10).

Pro námi uvažovanou okrajovou úlohu (2.6) - (2.8) by koeficienty soustavy (2.10) byly ve tvaru

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & \frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b(x)}{a_2} \end{pmatrix}$$

a okrajové podmínky pak

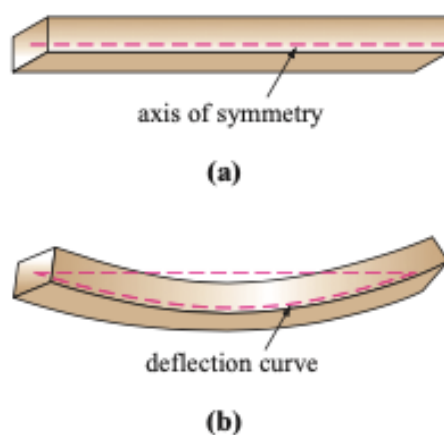
$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí věty 2.2 lze ukázat jednoznačnou řešitelnost lineárních okrajových úloh uvažovaných v kapitole 3 (ve studovaných modelech ji máme také zaručenou přímým výpočtem řešení).

3. Analytické řešení průhybů nosníku

Velké množství inženýrských aplikací je konstruováno pomocí tzv. nosníků. Jedná se o nosnou část konstrukce, která slouží k přenosu sil. V této práci budeme uvažovat homogenní nosník délky L . Homogenním nosníkem rozumíme nosník se stejnými průřezy po celé jeho délce.

Z důvodů vlastní váhy nosníku, nebo také díky působení nějaké vnější síly, dochází k průhybu nosníku, převážně k ohybu. Každý takový průhyb lze popsat diferenciální rovnicí 2. případně 4. řádu. Obrázky uvedené v této kapitole jsou čerpány z [6].



Obrázek 3.1: Nosník a jeho střednice

Na obrázku 3.1 můžeme vidět příklad homogenního nosníku s osou symetrie (střednice nosníku), která nás při výpočtech zakřivení bude zajímat nejvíce.

Abychom ale mohli nalézt průhyb nosníku jakožto partikulární řešení příslušné diferenciální rovnice, je potřeba úlohu převést na okrajovou úlohu, a tedy přidat k dané diferenciální rovnici i okrajové podmínky. Ty závisí pouze na typu uložení nosníku. Podívejme se tedy nyní konkrétně na jednotlivé případy uložení.



Obrázek 3.2: Vetknutý na obou koncích

První případ uložení nosníku je vetknutí obou jeho konců, viz obrázek 3.2. Pro takovýto typ nosníku předepisujeme okrajové podmínky tvaru

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y'(0) &= 0, \\ y(L) &= 0 & y'(L) &= 0. \end{aligned}$$

Pokud je v okrajové podmínce předepsaná funkční hodnota v bodě, značí to nulový, tedy žádný, průhyb v tomto bodě. První derivace v okrajové podmínce pak znamená nulové pootočení v bodě. Těmto dvěma typům okrajových podmínek se říká deformační okrajové podmínky.



Obrázek 3.3: Vetknutý na jednom konci

Na obrázku 3.3 můžeme vidět nosník, jehož levý konec je vetknutý a pravý volný. V takovémto případě pro $x = 0$ jsou předepsány tyto okrajové podmínky

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0.$$

V bodě $x = L$ pak podmínky tvaru

$$y''(L) = 0 \quad y'''(L) = 0.$$

Jak můžeme vidět, vyskytují se nám zde i druhé a třetí derivace. Druhá derivace značí nulový ohybový moment v bodě, a třetí derivace nulovou posouvající sílu v bodě. Takovýmto podmínkám se obecně říká silové okrajové podmínky.



Obrázek 3.4: Podepřený na obou koncích

Dalším typem uchycení je tzv. podepření na obou koncích, viz obrázek 3.4. V tomto případě jsou předepsány tyto okrajové podmínky

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y''(0) &= 0, \\ y(L) &= 0 & y''(L) &= 0. \end{aligned}$$

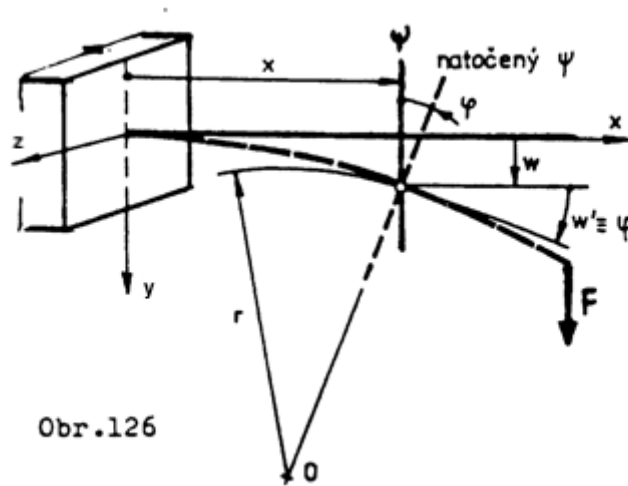
Dále se také samozřejmě můžeme setkat s různými kombinacemi uchycení nosníku. Například levý konec bude vetknutý a druhý podepřený.

3.1. Matematický popis zakřivení

Nyní se podíváme na matematický popis zakřivení střednice nosníku. Pro názornější vysvětlení jsem použila obrázek 3.5 z literatury [4], ve kterém jsem pro lepší orientaci upravila označení os. Budeme uvažovat osu x totožnou se střednicí nosníku, viz obrázek 3.1, a osu y takovou, že výchylka $y(r)$ měřená od osy x je kladná, pokud „klesá“.

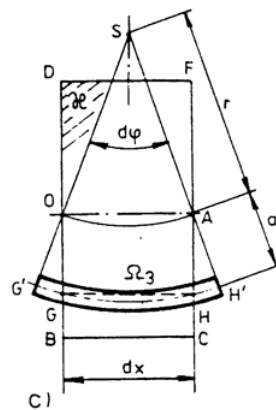
Pro naše výpočty budeme uvažovat pouze případy, kdy síla působí v rovině xy . Tedy nebudeme uvažovat vychýlení střednice nosníku podél osy z .

3.1. MATEMATICKÝ POPIS ZAKŘIVENÍ



Obr.126

Obrázek 3.5: průhyb nosníku



Obrázek 3.6: oskulační kružnice

Z obrázku 3.6 je patrné, že popis průhybu střednice nosníku bude popisovat tzv. křivost $\frac{1}{r}$, kde r je poloměr oskulační kružnice ohybové čáry. Ta je definována vztahem

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ}, \quad (3.1)$$

kde M je ohybový moment v bodě x , E je modul pružnosti v tahu a J je moment setrvačnosti průřezu v bodě x . Naším úkolem je tedy nalézt analytický tvar křivosti. Z diferenciální geometrie je již znám vztah pro křivost rovinné křivky, který je popsán následující rovnicí

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm \frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU

což lze zapsat i takto

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.2)$$

kde y značí posuv bodu střednice ve směru osy y . Z rovnic (3.1) a (3.2) získáme vztah

$$\frac{\pm y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EJ}.$$

Pokud budeme uvažovat dlouhý štíhlý nosník, tedy nosník, jehož délka je výrazně větší než zbylé rozměry nosníku, můžeme mluvit o takzvaném Euler-Bernoulliho nosníku. Tento model nosník je asi nejznámějším nosníkem vůbec, pojmenován je podle autorů modelu Leonharda Eulera a Daniela Bernoulliho. Pro tento typ nosníku platí, že průhyb je výrazně menší než samotné rozměry nosníku, a tedy můžeme říct, že $y' \approx 0$. Z toho plyne

$$\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}} \approx 1.$$

A tedy pro malé deformace můžeme vztah pro průhyb napsat ve tvaru lineární diferenciální rovnice druhého řádu:

$$y'' = \pm \frac{M}{EJ}.$$

Jedná se tedy o tzv. lineární model. Ten používáme v případě, kdy jsou splněny následující předpoklady

- průhyby u ohybu jsou velmi malé
- materiál je Hookeovský
- namáhání je jednoduché
- vychází se z prvku uvolněném v nedeformovaném stavu

Popis diferenciální rovnicí 4. řádu

Nyní se podíváme na popis průhybu nosníku diferenciální rovnicí čtvrtého řádu. Rovnici pro průhyb střednice se pokusíme odvodit trochu jiným způsobem, než jsme použili výše pro rovnici druhého řádu.

Z fyzikálních zákonů předpokládáme, že pro deformaci nosníku platí Hookeův zákon

$$M(x) = EJk, \quad (3.3)$$

kde k je deformace v ohybu, daná vztahem

$$k = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.4)$$

To je analogie toho, co jsme řešili při odvozování diferenciální rovnice druhého řádu, proto můžeme říci, že pro malé deformace

$$\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}} \approx 1. \quad (3.5)$$

3.2. OBOUSTRANNĚ VETKNUTÝ NOSNÍK

Zároveň z teorie pružnosti platí vztah

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q,$$

kde q je liniové zatížení. Použitím vztahů (3.3), (3.4) a (3.5) následně dostaneme rovnici

$$\frac{d^2}{dx^2} (EJy'') = -q.$$

Dále budeme uvažovat, že E a J jsou konstanty, což následně dává vztah

$$EJ \frac{d^2}{dx^2} (y'') = -q,$$

což lze také psát ve tvaru

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -q,$$

to je lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu pro průhyb nosníku, přesněji řečeno pro jeho střednici.

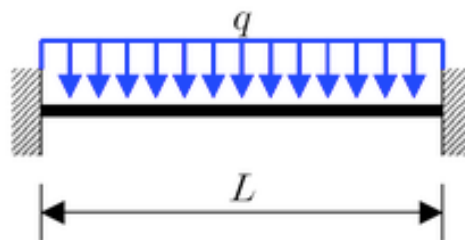
V následujících kapitolách se podíváme na jednotlivé typy nosníků s ohledem na jejich upevnění na okrajích.

3.2. Oboustranně vetknutý nosník

V této části práce budeme uvažovat nosník, který je na obou koncích vetknutý.

Příklad 3.1

Uvažujme oboustranně vetknutý nosník, na který působí liniové zatížení q , viz obrázek 3.7.



Obrázek 3.7: Oba konce vetknuté - liniové zatížení

Přitom budeme uvažovat diferenciální rovnici čtvrtého řádu

$$EJy'''' = -q, \tag{3.6}$$

s ohledem na vetknuté okraje uvažujeme okrajové podmínky tvaru

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y'(0) &= 0, \\ y(L) &= 0, & y'(L) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU

Při hledání řešení budeme nejprve postupovat s ohledem na teorii popsanou ve druhé kapitole. Rovnici (3.6) lze zapsat ve tvaru

$$y'''' = -\frac{q}{EJ}. \quad (3.8)$$

Charakteristický polynom příslušné homogenní diferenciální rovnice má jeden čtyřnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2,3,4} = 0$. Proto bude obecné řešení příslušné homogenní rovnice ve tvaru

$$y_h(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4. \quad (3.9)$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.8). Protože na pravé straně této rovnice je konstanta a diferenciální rovnice je čtvrtého řádu, je partikulární řešení tvaru

$$y_p(x) = -\frac{qx^4}{24EJ}. \quad (3.10)$$

Obecné řešení dané rovnice získáme jako součet obecného řešení (3.9) příslušné partikulární rovnice a partikulárního řešení (3.10):

$$y(x) = -\frac{qx^4}{24EJ} + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4,$$

kde c_1 , c_2 , c_3 a c_4 jsou reálné konstanty. Tyto konstanty nyní určíme pomocí předepsaných okrajových podmínek. Pro tyto účely si nejprve vyjádříme první derivaci řešení

$$y'(x) = -\frac{qx^3}{6EJ} + 3c_1x^2 + 2c_2x + c_3.$$

Po dosazení do okrajových podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &: c_4 = 0, \\ y'(0) = 0 &: c_3 = 0, \\ y(L) = 0 &: -\frac{qL^4}{24EJ} + c_1L^3 + c_2L^2 + c_3L + c_4 = 0, \\ y'(L) = 0 &: -\frac{qL^3}{6EJ} + 3c_1L^2 + 2c_2L + c_3 = 0. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme

$$c_1 = \frac{qL^2}{12EJ}, \quad c_2 = -\frac{qL^2}{24EJ}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0.$$

Řešení dané rovnice (3.6) splňující předepsané okrajové podmínky (3.7) je tedy funkce tvaru

$$y(x) = -\frac{qx^4}{24EJ} + \frac{qLx^3}{12EJ} - \frac{qL^2x^2}{24EJ},$$

což lze ještě upravit

$$y(x) = -\frac{qx^2}{24EJ} (x^2 - 2xL^2 + L^2). \quad (3.11)$$

3.2. OBOUSTRANNĚ VETKNUTÝ NOSNÍK

Diferenciální rovnice popisující průhyb nosníku je ovšem natolik jednoduchá, že k tvaru obecného řešení lze dojít následujícím, jednodušším, způsobem. A sice, danou rovnici (3.6) čtyřikrát postupně zintegrujeme:

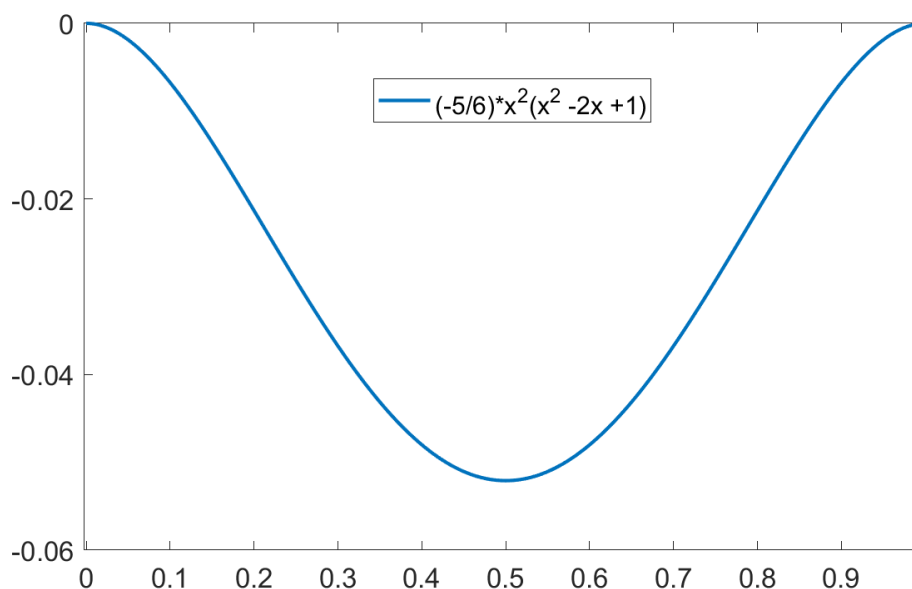
$$\begin{aligned} EJy'''(x) &= -qx + c_1, \\ EJy''(x) &= -\frac{qx^2}{2} + c_1x + c_2, \\ EJy'(x) &= -\frac{qx^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3, \\ EJy(x) &= -\frac{qx^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4. \end{aligned}$$

Po dosazení okrajových podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &: c_4 = 0, \\ y'(0) = 0 &: c_3 = 0, \\ y(L) = 0 &: \frac{1}{EJ} \left(-\frac{qL^4}{24} + \frac{c_1L^3}{6} + \frac{c_2L^2}{2} \right) = 0, \\ y'(L) = 0 &: \frac{1}{EJ} \left(-\frac{qL^3}{6} + \frac{c_1L^2}{2} + c_2L \right) = 0. \end{aligned}$$

Po vyřešení dostáváme

$$c_1 = \frac{qL}{2}, \quad c_2 = -\frac{qL^2}{12}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0.$$



Obrázek 3.8: Analytické řešení příkladu 3.1

Obecné řešení dané diferenciální rovnice je tedy

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{qx^4}{24} + \frac{qLx^3}{12} - \frac{qL^2x^2}{24} \right) = -\frac{qx^2}{24EJ} (x^2 - 2xL + L^2),$$

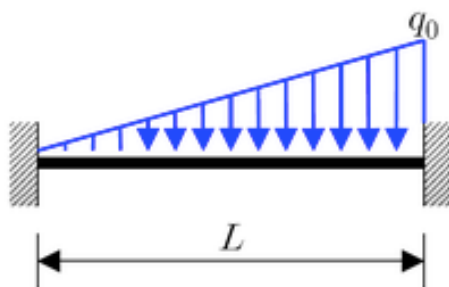
3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU

což je shodné s řešením (3.11), které jsme získali metodou neurčitých koeficientů. Pro názornost je analytické řešení vykresleno na obrázku 3.8 pomocí softwaru Matlab, přičemž jsme zvolili tyto hodnoty vstupních parametrů $q = 20\text{N}/\text{m}$, $L = 1\text{m}$ a $EJ = 1$. Pro takto zvolené hodnoty je řešení tvaru

$$y(x) = -\frac{5x^2}{6} (x^2 - 2x + 1).$$

Příklad 3.2

Nyní budeme uvažovat opět oboustranně vetknutý nosník, tentokrát ovšem s liniovým zatížením, které nebude konstantní, nýbrž bude popsáno lineární funkcí, viz obrázek 3.9.



Obrázek 3.9: Oba konce vetknuté - liniové zatížení

Diferenciální rovnice pro průhyb nosníku je tedy nyní tvaru

$$EJy'''' = -\frac{q_0x}{L}, \quad (3.12)$$

a s ohledem na vetknuté konce nosníku máme tytéž okrajové podmínky jako v předchozím příkladu:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y'(0) &= 0, \\ y(L) &= 0, & y'(L) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení nyní nalezneme užitím postupného integrování dané rovnice:

$$\begin{aligned} EJy''''(x) &= -\frac{q_0x^2}{2L} + c_1, \\ EJy'''(x) &= -\frac{q_0x^3}{6L} + c_1x + c_2, \\ EJy''(x) &= -\frac{q_0x^4}{24L} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3, \\ EJy'(x) &= -\frac{q_0x^5}{120L} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4. \end{aligned}$$

Po dosazení okrajových podmínek získáme soustavu rovnic pro neznámé konstanty:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 : & \quad c_4 = 0, \\ y'(0) = 0 : & \quad c_3 = 0, \\ y(L) = 0 : & \quad \frac{1}{EJ} \left(-\frac{q_0L^5}{120L} + \frac{c_1L^3}{6} + \frac{c_2L^2}{2} + c_3L + c_4 \right) = 0, \\ y'(L) = 0 : & \quad \frac{1}{EJ} \left(-\frac{q_0L^4}{24L} + \frac{c_1L^2}{2} + c_2L + c_3 \right) = 0. \end{aligned}$$

3.3. OBOUSTRANNĚ PODEPŘENÝ NOSNÍK

Vyřešením této soustavy dostaneme

$$c_1 = \frac{3q_0L}{20}, \quad c_2 = -\frac{q_0L^2}{30}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0.$$

Tedy obecné řešení dané rovnice (3.12) splňující předepsané okrajové podmínky je tvaru

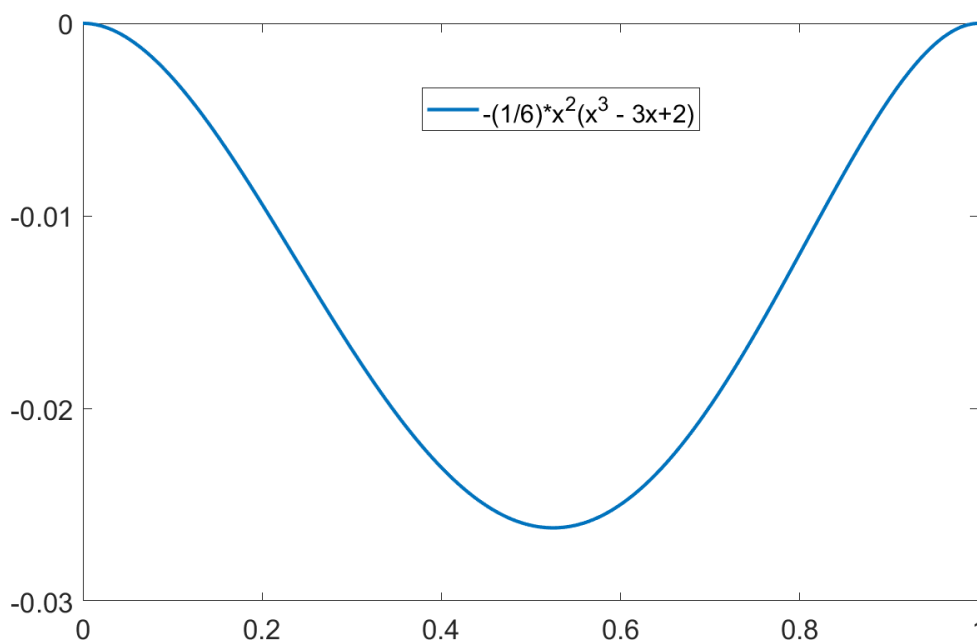
$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{q_0x^5}{120L} + \frac{3q_0Lx^3}{120} - \frac{q_0L^2x^2}{60} \right),$$

což lze ještě upravit

$$y(x) = \frac{-q_0x^2}{120LEJ} (x^3 - 3L^2x + 2L^3).$$

Pro názornost je analytické řešení vykresleno na obrázku 3.10 pomocí softwaru Matlab, přičemž jsme zvolili tyto hodnoty vstupních parametrů $q_0 = 20\text{N/m}$, $L = 1\text{m}$ a $EJ = 1$. Pro takto zvolené hodnoty je řešení tvaru

$$y(x) = -\frac{x^2}{6} (x^3 - 3x + 2).$$



Obrázek 3.10: Analytické řešení příkladu 3.2

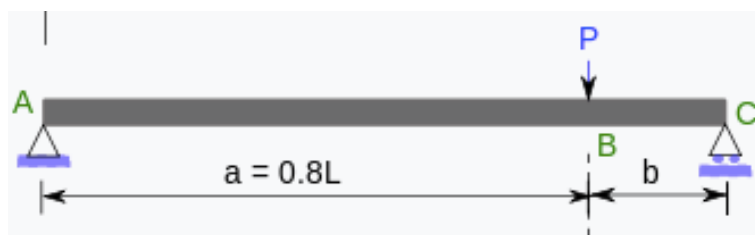
3.3. Oboustranně podepřený nosník

V této části práce budeme uvažovat nosník, který je na obou koncích podepřený. V tomto případě bude ohybem nosníku vznikat i napětí, protože budeme uvažovat pevné podpory.

Příklad 3.3

Nechť je dán oboustranně podepřený nosník délky L , na který navíc působí v bodě $0.8L$ síla P , viz obrázek 3.11.

3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU



Obrázek 3.11: Oba konce podepřené - působící síla

V tomto případě můžeme průhyb střednice nosníku popsat lineární diferenciální rovnicí druhého řádu

$$EJy'' = M.$$

Příslušné okrajové podmínky jsou v tomto případě tvaru

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Síla P rozdělí interval $\langle 0, L \rangle$ na dva podintervaly, konkrétně $\langle 0, 0.8L \rangle$ a $\langle 0.8L, L \rangle$. Pro tyto intervaly si nejprve vyjádříme ohybové momenty

$$\begin{aligned} M &= 0.2Px, & x \in \langle 0, 0.8L \rangle, \\ M &= 0.2Px - P(x - 0.8L), & x \in \langle 0.8L, L \rangle. \end{aligned}$$

Daná úloha se nám tím tedy rozdělila na dvě podúlohy, ve kterých budeme řešit dvě diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} EJy''(x) &= 0.2Px, & x \in \langle 0, 0.8L \rangle, \\ EJy''(x) &= 0.2Px - P(x - 0.8L), & x \in \langle 0.8L, L \rangle. \end{aligned}$$

Zintegrováním těchto rovnic dostáváme nejprve

$$\begin{aligned} EJy'(x) &= \frac{0.2Px^2}{2} + c_1, & x \in \langle 0, 0.8L \rangle, \\ EJy'(x) &= \frac{0.2Px^2}{2} - \frac{P(x - 0.8L)^2}{2} + c_2, & x \in \langle 0.8L, L \rangle, \end{aligned}$$

a následně pak

$$\begin{aligned} EJy(x) &= \frac{0.2Px^3}{6} + c_1x + c_3, & x \in \langle 0, 0.8L \rangle, \\ EJy(x) &= \frac{0.2Px^3}{6} - \frac{P(x - 0.8L)^3}{6} + c_2x + c_4, & x \in \langle 0.8L, L \rangle. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme okrajové podmínky pro funkční hodnoty

$$y(0) = 0 : \quad c_3 = 0, \tag{3.13}$$

$$y(L) = 0 : \quad \frac{1}{EJ} \left(\frac{0.2PL^3}{6} - \frac{P(L - 0.8L)^3}{6} + c_2L + c_4 \right) = 0. \tag{3.14}$$

3.3. OBOUSTRANNĚ PODEPŘENÝ NOSNÍK

Následně porovnáme funkční hodnoty a první derivace zleva a zprava v bodě $0.8L$. Pro funkční hodnoty tedy chceme, aby $y(0.8L^-) = y(0.8L^+)$, což dává

$$\frac{0.2P(0.8L)^3}{6} + 0.8Lc_1 + c_3 = \frac{0.2P(0.8L)^3}{6} + 0.8Lc_2 + c_4. \quad (3.15)$$

Podobně pro první derivace chceme, aby $y'(0.8L^-) = y'(0.8L^+)$, tedy aby

$$\frac{0.2P(0.8L)^2}{2} + c_1 = \frac{0.2P(0.8L)^2}{2} + c_2. \quad (3.16)$$

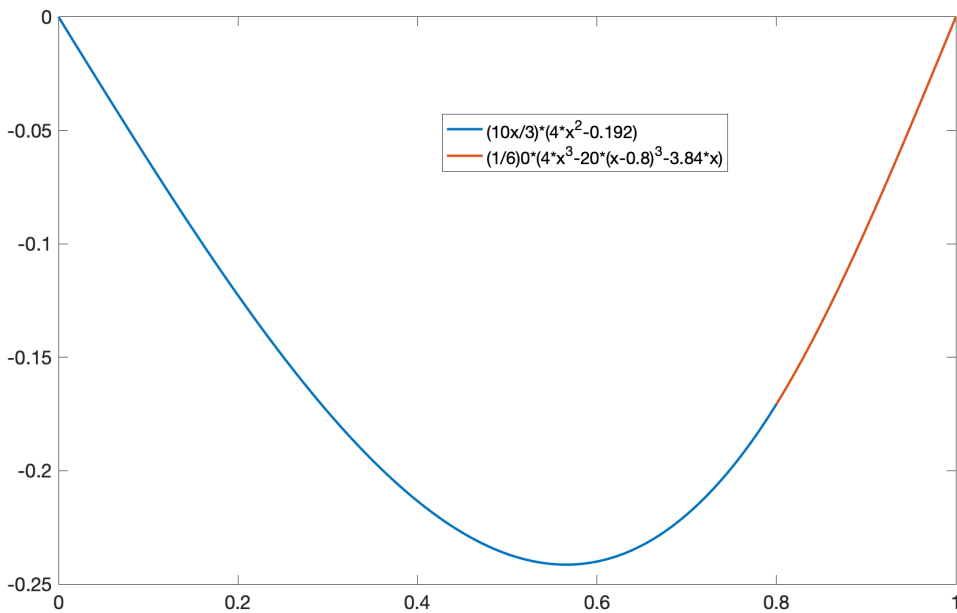
Ze vztahu (3.16) plyne, že $c_1 = c_2$, dále pak postupně z (3.15) a (3.13) dostaneme rovnost $c_3 = c_4 = 0$. Ze vztahu (3.14) pak vypočteme, že

$$c_1 = c_2 = -\frac{0.192PL^2}{6}.$$

Hledané řešení je tedy dáno na jednotlivých intervalech takto

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{0.2Px^3}{6} - \frac{0.192PL^2}{6}x \right), \quad x \in \langle 0, 0.8L \rangle,$$

$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{0.2Px^3}{6} - \frac{P(x - 0.8L)^3}{6} - \frac{0.192PL^2}{6}x \right), \quad x \in \langle 0.8L, L \rangle.$$



Obrázek 3.12: Analytické řešení příkladu 3.3

Pro názornost je analytické řešení vykresleno na obrázku 3.12 pomocí softwaru Matlab, přičemž jsme zvolili tyto hodnoty vstupních parametrů $P = 20N$, $L = 1m$ a $EJ = 1$. Pro takto zvolené hodnoty je řešení tvaru

$$y(x) = \frac{10x}{3} (0.2x^2 - 0.192), \quad x \in \langle 0, 0.8 \rangle,$$

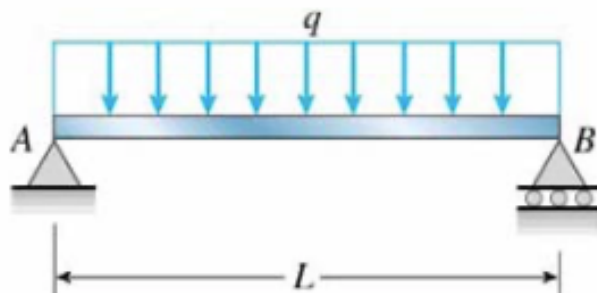
$$y(x) = \frac{1}{6} (4x^3 - 20(x - 0.8)^3 - 3.84x), \quad x \in \langle 0.8, 1 \rangle.$$

3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU

Příklad 3.4 Nyní budeme uvažovat stejně uložený nosník jako v předchozím příkladě, tentokrát však na nosník nebude působit osamělá síla ale liniové zatížení po celé délce nosníku, viz obrázek 3.13.

Funkce ohybového momentu je v tomto případě ve tvaru

$$M = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2.$$



Obrázek 3.13: Oboustranně podepřený nosník - liniové zatížení

Průhyb nosníku tedy můžeme popsat diferenciální rovnicí druhého řádu

$$EJy'' = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2$$

a doplníme stejnými okrajovými podmínkami jako v předchozím příkladě. Danou rovnicí nyní dvakrát postupně zintegrujeme a dostaneme

$$EJy'(x) = \frac{1}{4}qLx^2 - \frac{1}{6}qx^3 + c_1,$$

$$EJy(x) = \frac{1}{12}qLx^3 - \frac{1}{24}qx^4 + c_1x + c_2.$$

Z okrajových podmínek

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

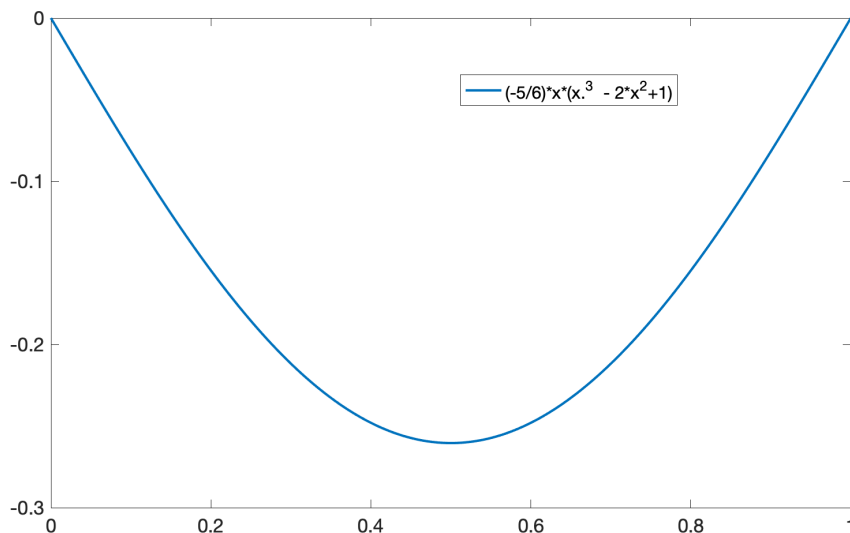
pak dostaneme $c_2 = 0$ a $c_1 = -\frac{1}{24}qL^3$ a tedy hledané řešení splňující předepsané okrajové podmínky je tvaru

$$y(x) = -\frac{qx}{24EJ} (x^3 + L^3 - 2Lx^2).$$

Pro názornost je analytické řešení vykresleno na obrázku 3.14 pomocí softwaru Matlab. Zvoleny byly tyto hodnoty vstupních parametrů $q = 20\text{N/m}$, $L = 1\text{m}$ a $EJ = 1$. Pro takto zvolené hodnoty je řešení tvaru

$$y(x) = -\frac{5x}{6} (x^3 - 2x^2 + 1).$$

3.4. NOSNÍK S VOLNÝM KONCEM

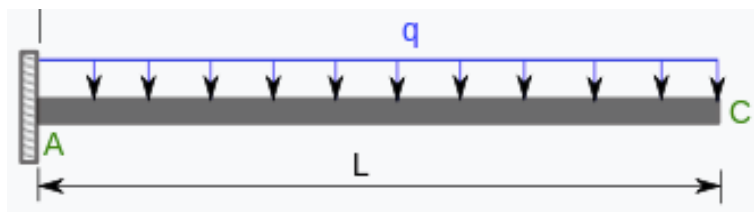


Obrázek 3.14: Analytické řešení příkladu 3.4

3.4. Nosník s volným koncem

Příklad 3.5

Nyní se podíváme na příklad jednostranně vetknutého nosníku, tzv. konzoly, který je na druhém konci volný. Na celý nosník působí liniové zatížení q , viz obrázek 3.15.



Obrázek 3.15: Jeden konec vetknutý

Nejprve tuto úlohu vyřešíme pomocí diferenciální rovnice druhého a později čtvrtého řádu. Průhyb střednice nosníku lze popsat diferenciální rovnicí tvaru

$$EJy'' = M \quad (3.17)$$

s předepsanými okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0.$$

Vyjádříme si nyní ohybový moment působící na nosník:

$$M = -\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2}.$$

Odtud po dosazení za moment M do (3.17) dostáváme rovnici

$$EJy''(x) = -\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2}. \quad (3.18)$$

3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU

Pro nalezení obecného řešení stačí rovnici (3.18) postupně dvakrát zintegrovat a dostaneme tvar hledaného řešení

$$EJy'(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qL^2x}{2} + c_1,$$

$$EJy(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qLx^3}{6} - \frac{qL^2x^2}{4} + c_1x + c_2.$$

Odtud pak po dosazení do okrajových podmínek dostáváme

$$y(0) = 0 : \quad c_1 = 0,$$

$$y'(0) = 0 : \quad c_2 = 0.$$

Je tedy zřejmé, že řešení dané diferenciální rovnice druhého řádu splňující předepsané okrajové podmínky je tvaru

$$y(x) = -\frac{qx^2}{24EJ} (x^2 - 4Lx + 6L^2).$$

Nyní se podíváme, jak by se tato úloha dala řešit pomocí diferenciální rovnice čtvrtého řádu. Uvažujme tedy rovnici tvaru

$$EJy'''' = -q,$$

kde q je opět liniové zatížení působící po celé délce nosníku. Postupujeme opět tak, že rovnici postupně čtyřikrát zintegrujeme, dostaneme tak následující rovnice

$$EJy'''(x) = -qx + c_1,$$

$$EJy''(x) = -\frac{qx^2}{2} + c_1x + c_2,$$

$$EJy'(x) = -\frac{qx^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3,$$

$$EJy(x) = -\frac{qx^4}{24} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4.$$

V tomto případě však uvažujeme s ohledem na řád diferenciální rovnice tyto okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0.$$

Z nich pak dostaneme

$$y(0) = 0 : \quad c_4 = 0,$$

$$y'(0) = 0 : \quad c_3 = 0,$$

$$y'''(L) = 0 : \quad c_1 = qL,$$

$$y''(L) = 0 : \quad c_2 = -\frac{qL^2}{2}.$$

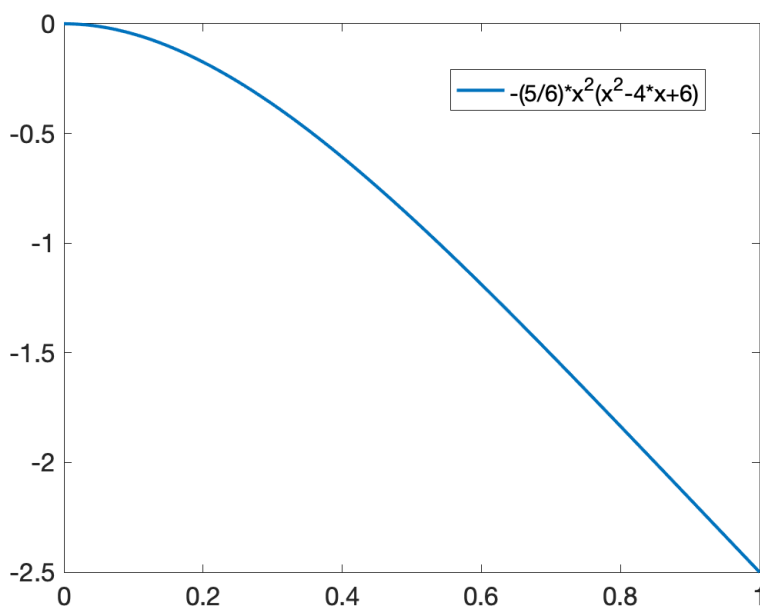
3.5. VZPĚRNÁ STABILITA PRUTŮ

Hledané řešení dané diferenciální rovnice čtvrtého řádu s předepsanými okrajovými podmínkami je tvaru

$$y(x) = -\frac{qx^2}{24EJ} (x^2 - 4Lx + 6L^2).$$

Pro názornost je analytické řešení vykresleno na obrázku 3.16 pomocí softwaru Matlab. Zvoleny byly tyto hodnoty vstupních parametrů $q = 20N/m$, $L = 1m$ a $EJ = 1$. Pro takto zvolené hodnoty je řešení tvaru

$$y(x) = -\frac{5x^2}{6} (x^2 - 4x + 6).$$



Obrázek 3.16: Analytické řešení příkladu s volným koncem

3.5. Vzpěrná stabilita prutů

Nyní se podíváme na speciální případ chování lineárního modelu nosníku představující tzv. vzpěr, což je namáhání prutu tlakovou osovou silou. Představme si, že na náš nosník např. most, působí síla v ose x . Takovou sílu může vytvořit například sesuv půdy na kraji mostu, viz obrázek 3.17. Takto tlačené pruty/nosníky jsou náchylné ke ztrátě jejich stability, což způsobuje tzv. vybočení prutu. Tento jev je u většiny konstrukcí nežádoucí, protože může způsobit kolaps celé konstrukce.

Abychom předešli ztrátě stability, je třeba vypočítat velikost kritické síly, při které dojde k vybočení prutu. Ta se vypočítá podle vztahu

$$F_{kr} = \frac{\alpha^2 EJ_{min}}{L^2},$$

kde α je štíhlostní poměr definovaný jako podíl

$$\alpha = \frac{L_{red}}{i},$$

3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU

a i je tzv. poloměr setrvačnosti

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}},$$

L_{red} je vzpěrná délka a A je plocha průřezu nosníku.

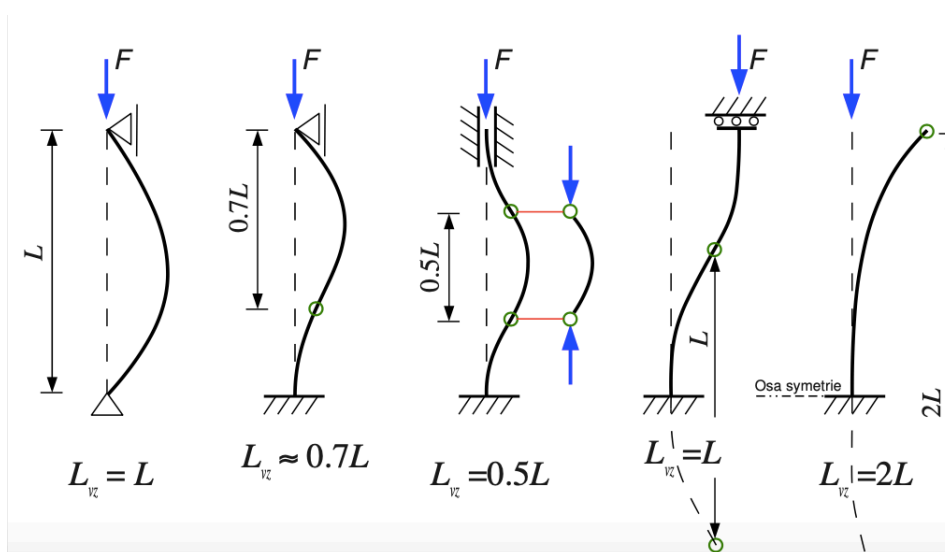


Obrázek 3.17: Tlaková síla působící na nosník s pravým volným koncem

Odtud plyne i druhý vztah pro výpočet velikosti kritické síly

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{L_{red}^2},$$

kde L_{red} určíme podle typu uložení, viz obrázek 3.18 čerpaný z [8].



Obrázek 3.18: Typy uložení - vzpěr

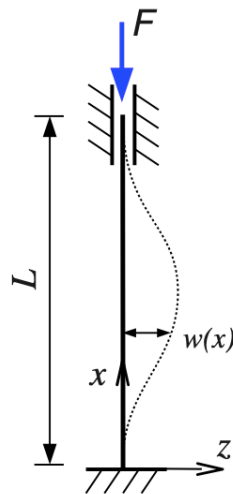
Podívejme se nyní na odvození L_{red} nějakého konkrétního příkladu. Vezmeme oboustranně vetknutý nosník, na který působí síla F ve směru osy x , viz obrázek 3.19. Jeden (konkrétně horní konec) nosníku je uložen vetknutím s možným posuvem ve směru osy x .

Uvažujme nyní diferenciální rovnici druhého řádu průhybu

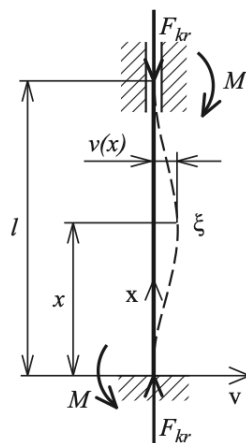
$$y'' = \frac{M}{EJ},$$

3.5. VZPĚRNÁ STABILITA PRUTŮ

Pro lepší názornost zde také uvedeme uvolnění vazeb, viz obrázek 3.20. V našem případě, s ohledem na obrázek 3.19, uvažujeme $w(x) = y(x)$ jako hodnotu průhybu nosníku v bodě x .



Obrázek 3.19: Tlaková síla působící na oboustranně vetknutý nosník, zdroj [8]



Obrázek 3.20: Uvolnění vazeb oboustranně vetknutého nosníku, zdroj [7]

Ohybový moment v obecném řezu je dán vztahem

$$M(x) = F_{kr}y(x) - M.$$

Platí tedy

$$EJy''(x) = F_{kr}y(x) - M$$

Nyní zavedeme substituci

$$\alpha^2 = \frac{F_{kr}}{EJ}. \quad (3.19)$$

Dostáváme tak diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru

$$y'' + \alpha^2 y(x) = \alpha^2 \frac{M}{F_{kr}}.$$

3. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ PRŮHYBŮ NOSNÍKU

Konkrétně se jedná o nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Hledané řešení budeme hledat ve tvaru součtu obecného řešení příslušné homogenní rovnice a jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Toto partikulární řešení bude tvaru

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{M}{F_{kr}}.$$

Po dosazení okrajových podmínek

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y'(0) &= 0, \\ y(L) &= 0, & y'(L) &= 0, \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} y(0) = 0 : & \quad A + \frac{M}{F_{kr}}, \\ y'(0) = 0 : & \quad B = 0. \end{aligned}$$

Tedy řešení rovnice splňující předepsané okrajové podmínky je tvaru

$$y(x) = \frac{M}{F_{kr}} (1 - \cos \alpha x).$$

Ve druhém vetknutí vzpěry platí

$$y(L) = 0 : \quad 1 - \cos \alpha L = 0,$$

což bude platit v případě, že

$$\alpha L = k2\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Nyní ze vztahů (3.19) a (3.20) dostáváme rovnost

$$\alpha^2 L^2 = k^2 4\pi^2,$$

a po úpravě

$$\frac{F_{kr}}{EJ} L^2 = k^2 4\pi^2.$$

Vzhledem k tomu, že naším cílem bude ve většině případů najít nejmenší kritickou sílu, za k volíme $k = 1$. Po vyjádření kritické síly dostáváme vzorec

$$F_{kr} = 4\pi^2 \frac{EJ}{L^2},$$

což přesně odpovídá vztahu znázorněnému na obrázku 3.18, tedy že $L_{red} = 0.5L$.

4. Porovnání lineárních a nelineárních modelů

V této kapitole se podíváme na rozdíl mezi lineárním a nelineárním modelem nosníku. Prozatím jsme v práci uvažovali pouze lineární model ve tvaru

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}.$$

V předchozí kapitole jsme také zmínili, že lineární modely nosníku uvažujeme v případě velmi malých průhybových deformací. Předpoklady pro užití lineárního modelu jsme již sice zmínili, ale znovu si je pro srovnání s nelineárním modelem připomeneme. Předpokladem tedy je splnění prutových předpokladů, materiál nosníku musí být Hookeovský, průhyby u ohybu malé, a vychází se z prvku uvolněného v nedeformovaném stavu.

V praxi se však setkáme i se středně velkými, případně i velkými průhyby nosníku, nebo s případem, kdy nějaký z výše uvedených předpokladů není splněn. V takovém případě nám klasický popis lineární diferenciální rovnicí nestačí a budeme potřebovat popsat daný případ nelineárním modelem. Tento model je popsán pomocí diferenciální rovnice tvaru

$$\frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ}.$$

Kromě linearizovaného tvaru této rovnice (popsaného výše), můžeme uvažovat její následující aproximaci. Funkci $(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}$ si rozepíšeme do Taylorovy mocninné řady. Zavedeme substituci $(y')^2 = t$ a budeme řešit rozvoj funkce $(1 + t)^{\frac{3}{2}}$ podle vztahu

$$(c + x)^A = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{A}{k} c^{A-k} x^k.$$

V našem případě tedy dostáváme

$$(1 + t)^{\frac{3}{2}} = \binom{\frac{3}{2}}{0} 1^{\frac{3}{2}} t^0 + \binom{\frac{3}{2}}{1} 1^{\frac{1}{2}} t^1 + \binom{\frac{3}{2}}{2} 1^{-\frac{1}{2}} t^2 + \dots$$

Vezmeme-li první dva členy, dostáváme aproximaci

$$(1 + t)^{\frac{3}{2}} \approx \binom{\frac{3}{2}}{0} 1^{\frac{3}{2}} t^0 + \binom{\frac{3}{2}}{1} 1^{\frac{1}{2}} t,$$

a po úpravě

$$(1 + t)^{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}t$$

Vrátíme-li se zpět k původní proměnné dostaneme

$$\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}(y')^2.$$

4. POROVNÁNÍ LINEÁRNÍCH A NELINEÁRNÍCH MODELŮ

A tedy z původního vztahu dostáváme vyjádření pro druhou derivaci funkce y :

$$y'' = \frac{M}{EJ} \left(1 + \frac{3}{2} (y')^2 \right). \quad (4.1)$$

V této rovnici označme $\frac{M(x)}{EJ} = a(x)$. Potom rovnice (4.1) má tvar

$$y'' = a(x) \left(1 + \frac{3}{2} (y')^2 \right). \quad (4.2)$$

Tuto rovnici zkusíme rozřešit vzhledem k $y'(x)$, tedy zavedeme substituci $y'(x) = v(x)$. Pak z (4.2) dostaneme

$$v' = a(x) \left(1 + \frac{3}{2} v^2 \right).$$

Rovnici řešíme metodou separace proměnných a dostáváme

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} A(x) + c \right),$$

tj.

$$y'(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} A(x) + c \right), \quad (4.3)$$

kde

$$A(x) = \int_0^x a(t) dt. \quad (4.4)$$

Přičemž konstantu c můžeme vyjádřit například v případě konstantního zatížení, tj. když ohybový moment $M(x)$ je symetrický vzhledem ke středu nosníku, tedy z podmínek $y'(0) = -y'(L)$, což pro proměnnou v dává $v(0) = -v(L)$. Máme tedy

$$v(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg}(c), \quad v(L) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} A(L) + c \right).$$

Máme tedy

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg}(c) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} A(L) + c \right),$$

odkud dostáváme

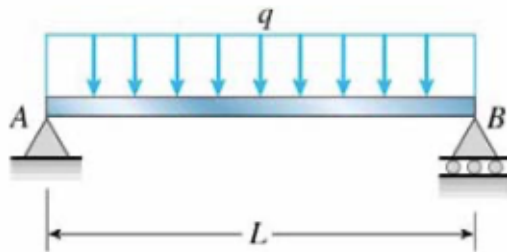
$$c = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} A(L).$$

Konečné řešení $y(x)$ rovnice (4.1) pak můžeme dostat integrací vztahu (4.3). Poznamenejme však, že v případě obvyklých ohybových momentů $M(x)$ nelze integrál v (4.4) spočítat.

Je zřejmé že nelinearita značně zvyšuje složitost výpočtu a přináší nové typy chování, které se u lineárních modelů nevyskytují. Mezi takové nejjednodušší případy nelineárního chování patří například materiálová nelinearita nebo vzpěrná stabilita prutů.

4.1. Oboustranně podepřený nosník

Nyní se podívejme na příklad oboustranně podepřeného nosníku, který je liniově zatížený. Tuto úlohu jsme si již analyticky vyřešili v předchozí kapitole, ale pro lineární typ nosníku. Nyní budeme uvažovat liniově zatížený nelineární model nosníku, viz obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Oboustranně podepřený nosník - liniové zatížení

Průhyb nosníku můžeme popsat nelineárními modely

$$EJy''(x) = \frac{qx}{2}(x-1) \left(1 + (y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.5)$$

resp.

$$EJy''(x) = \frac{qx}{2}(x-1) \left(1 + \frac{3}{2}(y'(x))^2\right), \quad (4.6)$$

kde L je délka nosníku a q je liniové zatížení působící na nosník.

Vzhledem k tomu, že analytické řešení těchto modelů nelze nalézt, ukážeme si numerické řešení této úlohy. To jsme našli užitím matematického softwaru Matlabu. Konkrétně jsme použili metodu `bvp4c`. Jedná se o kolokační metodu, která nalezne přibližné řešení dané diferenciální rovnice s předepsanými okrajovými podmínkami. Pro řešení touto metodou je třeba zadat vstupní parametry, těmi jsou funkce `ODEFUN` (zadaná jakou soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu), okrajové podmínky `BCFUN` a odhad řešení v krajních bodech `SOLINIT`. Konkrétně se používá tato syntaxe

```
SOL = bvp4c(ODEFUN,BCFUN,SOLINIT)
```

Konkrétní zadání vstupních hodnot pro $q = 20\text{N/m}$ a délku nosníku $L = 1\text{m}$ je volání funkce `bvp4c` uvedeno níže přímo v matlabovském prostředí. Současně je také získané numerické řešení vykresleno červeně na obrázku 4.2.

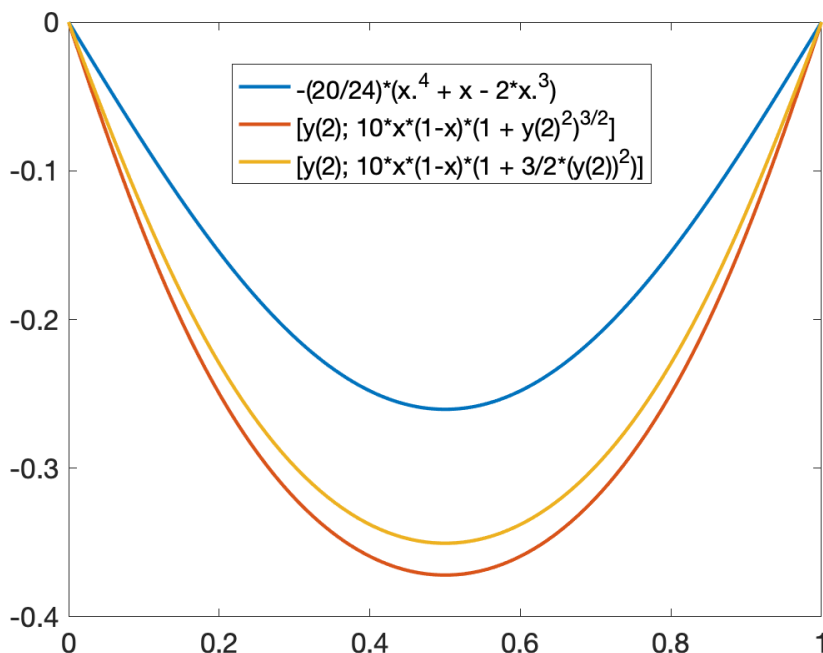
Matlabovský m-file

```
1 odefun = @(x,y) [y(2); 10*x*(1-x)*(1 + 3/2.*(y(2))^2)] %zadani funkce
2 bcfunA = @(ya,yb) [ya(1); yb(1)] %zadani okrajovych podminek
3 x = linspace(0,1,100);
4 solinit = bvpinit(x, [0, 0]) %odhad reseni v krajnich bodech
5 solA = bvp4c(odefun,bcfunA,solinit)
6 plot(solA.x, solA.y(1,:))
```


4. POROVNÁNÍ LINEÁRNÍCH A NELINEÁRNÍCH MODELŮ

Pro porovnání průhybu lineárního a nelineárních modelů je zde červeně vykresleno i řešení lineárního modelu z příkladu 3.4, které je tvaru

$$y(x) = -\frac{5x}{6} (x^3 - 2x^2 + 1).$$



Obrázek 4.2: Numerické řešení příkladu - oba konce vetknuté

Jak můžeme vidět na obrázku 4.2, nelineární modely nosníku mají pro stejné vstupní parametry větší průhyby než ten lineární.

4.2. Nosník s volným koncem

Nyní se podíváme na nelineární nosník, který je na jednom konci vetknutý a druhý konec nosníku je volný. Průhyb tohoto konkrétního nosníku můžeme popsat pomocí nelineárních rovnic

$$\frac{y''(x)}{EJ} = \left(-\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2} \right) (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}},$$

resp.

$$\frac{y''(x)}{EJ} = \left(-\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2}(y'(x))^2 \right)$$

s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

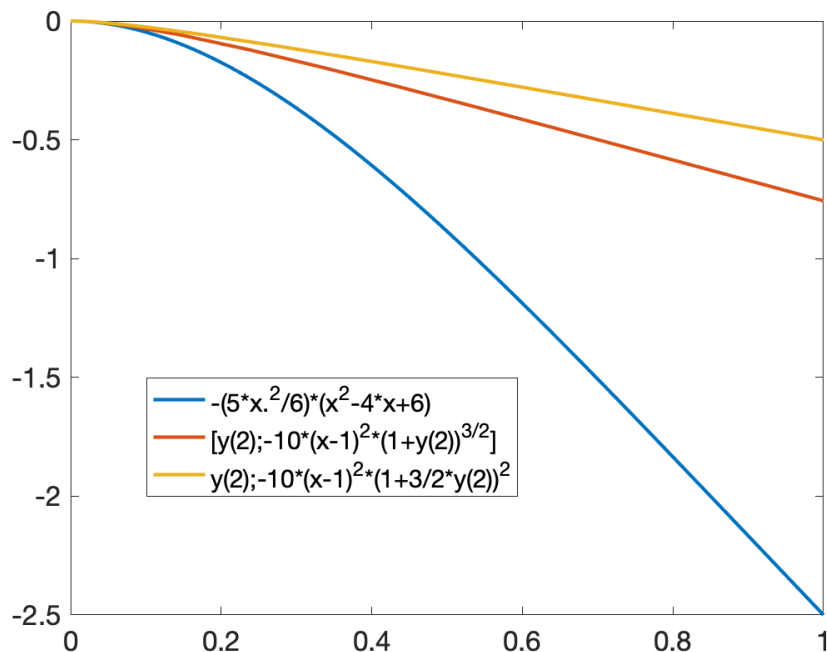
Vzhledem k zadaným okrajovým podmínkám neřešíme vlastně okrajovou úlohu, nýbrž úlohu počáteční. Danou úlohu vyřešíme numericky pomocí matematického softwaru Matlab a v něm implementované metody *ode45*, což je Runge Kuttova metoda pro řešení počátečních úloh. Pro řešení touto metodou je třeba zadat vstupní parametry, těmi jsou funkce

4.2. NOSNÍK S VOLNÝM KONCEM

ODEFUN (zadaná jakou soustava diferenciálních rovnic prvního řádu), interval závislé proměnné TSPAN a počáteční podmínky Y0. Konkrétně se používá tato syntaxe

$$\text{SOL} = \text{ode45}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, \text{Y0})$$

Konkrétní zadání vstupních hodnot pro $q = 20\text{N/m}$ a délku nosníku $L = 1\text{m}$ je volání funkce `ode45` uvedeno níže přímo v matlabovském prostředí. Současně je také získané numerické řešení vykresleno červeně na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Analytické řešení příkladu - pravý konec volný

Matlabovský m-file

```
1 odefun=@(x,y) [y(2);-10*(x-1).^2*(1+3/2.*y(2))^2]
2 a=0;b=1;
3 x=linspace(a,b,100);
4 solA=ode45(odefun,[a b],[0;0]);
5 plot(solA.x,solA.y(1,:))
```

5. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo nastudovat základní vlastnosti okrajových úloh, zejména pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, dále pak analýza různých průhybů nosníků namáhaných jak příčně tak na vzpěr. Dalším úkolem bylo porovnat lineární a nelineární modely na konkrétních příkladech. Dle mého názoru bylo cíle dosaženo.

První kapitola je úvodní kapitolou této práce. Druhá je již věnována základním pojům a postupům pro řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, přičemž v závěru jsou popsány různé typy předepsaných okrajových podmínek, které mají velký vliv na řešitelnost okrajové úlohy, což je prezentováno na konkrétním jednoduchém příkladu. Ve třetí kapitole je odvozena lineární diferenciální rovnice druhého a čtvrtého řádu pro průhyb nosníku. Teorie je vhodně doplněna konkrétními příklady, ve kterých je výpočteno analytické řešení průhybu nosníku s různými typy uchycení a zatížení. Tato řešení jsou vykreslena prostřednictvím matematického softwaru Matlab. V závěru kapitoly se také věnujeme speciálnímu typu chování průhybu nosníku, kterým je vzpěr. Poslední, čtvrtá kapitola je zaměřena na porovnání lineárních a nelineárních modelů, což je opět vhodně doplněno dvěma konkrétními příklady. Užitím implementovaných funkcí v softwaru Matlab je nalezeno numerické řešení těchto úloh. Na obrázcích je pro srovnání vykresleno řešení pro oba typy nelineárních modelů včetně modelu lineárního.

Téma bakalářské práce mě velmi bavilo, zejména proto, že propojovalo mé znalosti získané ze základních kurzů matematické analýzy, mechaniky a v neposlední řadě také numerických metod. V případě nelineárních modelů nosníku jsem hledala numerické řešení užitím implementovaných numerických metod v softwaru Matlab. Také jsem si prohloubila zkušenosti s typografickým systémem LaTeX.

Literatura

- [1] FIŠER, Jiří. Úvod do teorie obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3401-8.
- [2] Franců, Jan. Studijní text k předmětu Parciální diferenciální rovnice, dostupné na <https://moodle.vutbr.cz>
- [3] KIGURADZE, Ivan. Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Masarykova univerzita v Brně, 1997. ISBN 80-210-166-4-7
- [4] JANÍČEK, Přemysl. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [5] MÍKA, Stanislav a Alois KUFNER. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981. Matematika pro vysoké školy technické.
- [6] ZILL, Dennis G. a Michael R. CULLEN. *Differential equations with boundary-value problems*. 4th edition. Pacific Grove: Brooks/Cole, [1997]. ISBN 0-534-95580-0.
- [7] Studijní materiály ČVUT, <http://drone.fsid.cvut.cz/pp2/Stabilita.pdf>
- [8] Studijní materiály ČVUT, https://mech.fsv.cvut.cz/~smilauer/teaching/PP_prednaska_05_vzper.pdf

6. Seznam použitých zkratek a symbolů

ODR	obyčejné diferenciální rovnice
\mathbb{R}	obor reálných čísel
\mathbb{R}^n	n-rozměrný vektorový prostor reálných čísel
$u^{(n)}(x)$	n -tá derivace funkce $u(x)$
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
$\mathbf{W}(u_1, \dots, u_n)(x)$	Wronského matice funkcí $u_1(x), \dots, u_n(x)$
$y_h(x)$	obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice
$y_p(x)$	partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice