Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Matematizace reálných situací na základní škole

Vypracovala: Bc. Michaela Opavová
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Matematizace reálných situací na základní škole jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ………………… ……………………………….

Michaela Opavová

Poděkování

Touto cestou bych velice ráda poděkovala vedoucí mé diplomové práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za odborné vedení práce, cenné rady a důležité připomínky a v neposlední řadě také za její trpělivost a vstřícný přístup během celého zpracovávání mé práce. Poděkování dále patří mé rodině a přátelům, kteří mě podporovali po celou dobu studia.

Anotace

Hlavním cílem této diplomové práce na téma Matematizace reálných situací na základní škole je přehledně vypracovat soubor řešených aplikačních úloh. Aplikační úlohy jsou zastoupené v učebnicích poměrně v malém rozsahu, učebnice se většinou věnují klasickým úlohám přesného a směrodatného zadání, které vedou na řešení pomocí konkrétního probíraného učiva. Učitelé často slýchávají od žáků otázku: „A proč se to musím učit, když to nikdy nebudu potřebovat?“ Jako odpověď poslouží právě aplikační úlohy, jejichž podstata tkví ve významu matematiky pro praxi. Jedná se o úlohy komplexnější povahy, kdy k jejich řešení je potřeba alespoň základních znalostí matematiky. Vedou žáky k řešení problému i více než jedním způsobem, často jsou vedeny doprovodnými otázkami, ve kterých záleží na dané situaci. V práci jsou řešeny úlohy z více oblastí, až už to jsou úlohy obecné povahy vyskytující se v učebnicích nebo oblasti týkající se prostředí obchodu, individuální dopravy, finanční gramotnosti až po úlohy z prostředí geometrie. Celkem práce obsahuje 15 řešených úloh a v závěru je proveden výzkum, jak žáci dokáží řešit úlohy aplikačního charakteru.

Abstract

The main aim of this diploma thesis on the Mathematization of real-life situations at basic school is to elaborate a set of solved application tasks. Application tasks are relatively small in textbooks, textbooks mostly deal with the classical tasks of accurate and standard assignment that lead to solutions using a particular subject. Teachers often hear the question from the pupils: "Why do I have to learn when I will never need it?" As a response, it is just the application tasks that matter in terms of mathematics for practice. These are tasks of a more complex nature, where at least basic knowledge of mathematics is needed to solve them. They lead pupils to solve the problem in more than one way, often led by accompanying questions, depending on the situation. In the thesis are solved problems from more than one area, as long as they are tasks of general nature occurring in textbooks or areas related to the business environment, individual transport, financial literacy to tasks from the environment of geometry. In total, the work contains 15 solved tasks and in the end, research is carried out how pupils can solve the tasks of application character.

Obsah

1 ÚVOD

Tato diplomová práce je založena na praktické části souboru řešených příkladů na téma Matematizace reálných situací na základní škole. Je členěna na podkapitoly, které se zabývají různou problematikou reprezentovanou aplikačními úlohami. Aplikační úlohy jsou jedním z prostředků, které učitelům pomáhají předávat matematiku tak, aby se žáci učili používat matematické znalosti a dovednosti s porozuměním v situacích, se kterými se mohou setkat v běžném životě.

Druhá kapitola je zaměřena na úlohy obecného typu. Úlohy nejsou vybírány pro jeden ročník, ale jsou brány komplexně. V úlohách žáci využijí znalosti zlomků, sestavují na základě informací rovnice, přímé úměrnosti, lineární funkce a její grafy dále aplikují Pythagorovu větu, setkají se s % a v neposlední řadě je vše propleteno logickým úsudkem, při propojování s praxí. Úlohy jsou řešené více způsoby. Úlohy jsou převzaty z uvedené literatury, nebo jsou literaturou ze zdrojů inspirovány a poté jsou doplněny již vlastními vytvořenými otázkami. V nějakých úlohách je uvedeno čistě matematické řešení, které se od řešení v praxi bude poměrně lišit, ale díky doprovodným otázkám můžeme žáky navést k zajímavým argumentům z hlediska logického vysvětlení.

Třetí kapitola se týká prostředí obchodu, kdy si žák může vyzkoušet, jak roli prodávajícího, tak roli nakupujícího. Žáci ve většině případů zjistí, že zájmy těchto dvou stran jsou opačné.

Čtvrtá kapitola je zaměřená na individuální cestu, konkrétně na spolujízdu více osob, kde kromě matematických znalostí a dovedností spolu s logickým úsudkem mohou při rozhodování hrát roli mezilidské vztahy. Opět bude tato kapitola v odpovědích záviset na odůvodněných žákových argumentech, které byly vydedukovány na základě řešení problému.

Pátá kapitola se zabývá finanční gramotností, která se na základních školách začíná pomalu ale jistě rozvíjet a stává se součástí klasické výuky.

Šestá kapitola prezentuje geometrii v matematice.

Poslední kapitoly jsou věnovány výzkumným úlohám, které jsou podrobně rozpracovány k následnému výzkumnému šetření, které probíhalo mezi žáky v 6. ročnících základních škol. Součástí je samozřejmě vyhodnocení výzkumu s ukázkami žákovských postupů jednotlivých řešení.

V práci jsou publikované příklady, které jsou převzaté z literatury uvedené ve zdrojích. Poté jsou zde příklady, které jsou inspirovány příklady z literatury a jsou doplněny o další doprovodné vlastní otázky a v neposlední řadě jsou zde vlastní příklady, ovšem také inspirované. Úlohy jsou pro lepší přehlednost obohaceny o tabulky, grafy a obrázky.

Obrázky, které jsou součástí řešení příkladů, nejsou číslovány z důvodu zachování přehlednosti řešení a všechny obrázky jsou vlastní, mnou vytvořené.

2 OBECNÉ ÚLOHY

2.1 Příklad 1

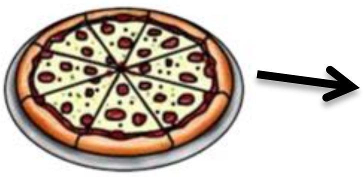
Osm žáků základní školy v Novém Městě na Moravě – Jakub, Alena, Radim, Eva, Magda, Honza, Ester a Petr – se zúčastnilo sportovních soutěží. Trenérka jim po soutěži koupila šest pizz, ať se spravedlivě rozdělí. Alena navrhovala jiné dělení než Petr a ten se zase nemohl shodnout s Evou. Jak se o pizzu mohli rozdělit?

([3], str. 34)

Otázka: Jakým způsobem můžeme rozdělit mezi 8 dětí 6 pizz?

Alena: Všechny pizzy se rozdělí na 8 kousků, a každý si vezme z každé pizzy 1 kousek.

Každý z žáků si vezme $\frac{1}{8}$ jedné pizzy. Celkem je ale 6 pizz.

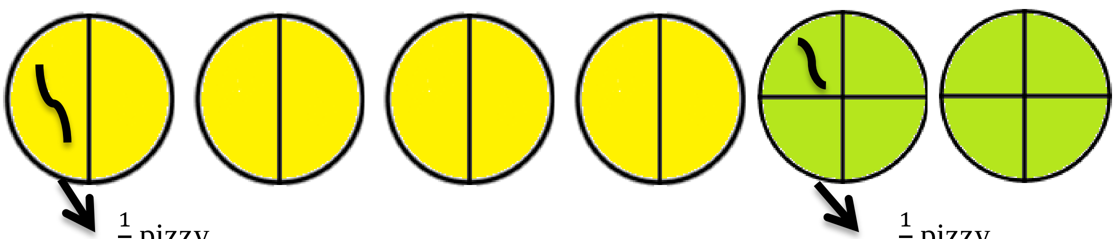


Tedy: $\frac{1}{8}$ pizzy $\cdot\, 6 = \frac{6}{8}$ pizzy.

Aby to bylo spravedlivé, každý žák si vezme $\frac{6}{8}$ jedné pizzy.

Toto je nejjednodušší způsob, jak pizzy rozdělit. Pokusíme se najít další možné způsoby rozdělení.

Petr: Je nás 8, tak si rozdělíme 4 pizzy na poloviny a každý dostane polovinu ze 4 pizz. Zbývající dvě pizzy rozdělíme na čtvrtiny a každý si vezme jednu čtvrtinu z těchto zbývajících dvou pizz.



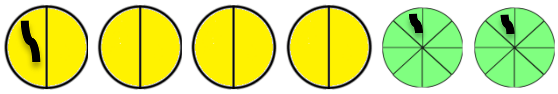
$\frac{1}{2}$ pizzy

$\frac{1}{4}$ pizzy

$$\text{Tedy: } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{4} = \frac{3}{4} \text{ pizzy.}$$

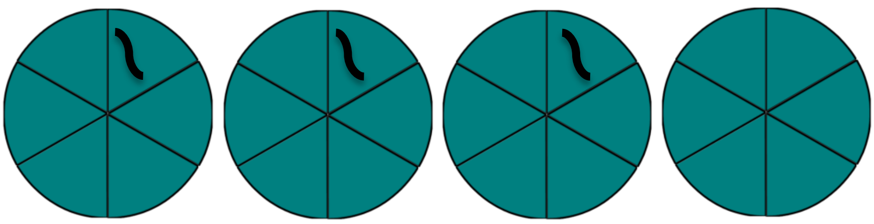
Aby to bylo spravedlivé, každý žák si vezme $\frac{3}{4}$ jedné pizzy.

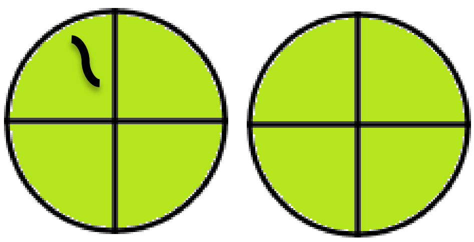
Další možný způsob, jak zbývající dvě pizzy rozdělit je takový, že pizzy rozdělíme na osminy a každý žák si vezme $\frac{1}{8}$ z každé zbývající pizzy. Tedy z obou posledních pizz si každý žák vezme 1 kousek.



Tedy: $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4\cdot 1+1+1}{8}=\frac{6}{8}$ pizzy.

Eva: První čtyři pizzy si rozdělíme na šestiny a každý dostane 3 kousky. Zbylé dvě pizzy rozdělíme na čtvrtiny a každý dostane 1 kousek jen z jedné pizzy.

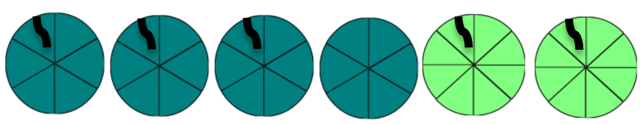




Tedy: $\frac{3}{6}+\frac{1}{4}=\frac{12+6}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$ pizzy.

Každý žák si vezme $\frac{3}{4}$ jedné pizzy.

Další možný způsob, jak zbývající dvě pizzy rozdělit je ten, že pizzy rozdělíme na osminy a každá žák si vezme $\frac{1}{8}$ z každé zbývající pizzy.



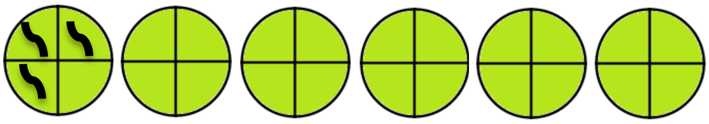
Tedy: $\frac{3}{6}+\frac{2}{8}=\frac{3\cdot 4+2\cdot 3}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$ pizzy.

Poznámka:

Bude existovat nekonečně mnoho řešení, jak pizzy rozdělit. Při rozkrajování pizzy se mohou vyskytnout ale omezující limity, např.: krájení pizzy na tak úzké kousky, že se pizza trhá a nejde vzít do ruky nebo se bude krájet tak úzké kousíčky, že už to nebude dílek, ale jen tenká linka. Pizza může být rozdělena, na tolik dílků, na kolik bude každý chtít, jen bude později obtížné ji s přesností rozdělit na stejné kousky. Rozdělení bude nepřesné.

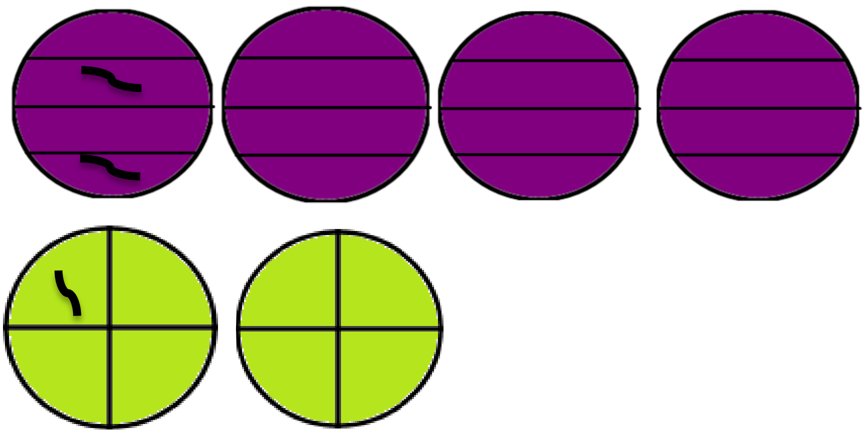
Existují ještě další možné způsoby, jak pizzy spravedlivě rozdělit?

Všechny pizzy rozdělíme ihned na čtvrtiny a každý žák si přímo vezme $\frac{3}{4}$ pizzy.



Zajímavější způsob:

První čtyři pizzy si rozdělíme na čtvrtiny, ale nyní jiným způsobem, rozdělíme je horizontálně. Tak, že pizzu nejprve rozdělíme na poloviny a poté obě poloviny rozdělíme ještě na poloviny. Zbývající dvě pizzy rozdělíme na čtvrtiny již předešlým způsobem, jako v použitých rozděleních. Každý z žáků si vezme u horizontálně rozdělených pizz 1 menší a 1 větší kousek pizzy a ze zbývajících dvou pizz si vezme jednu čtvrtinu z jedné pizzy.

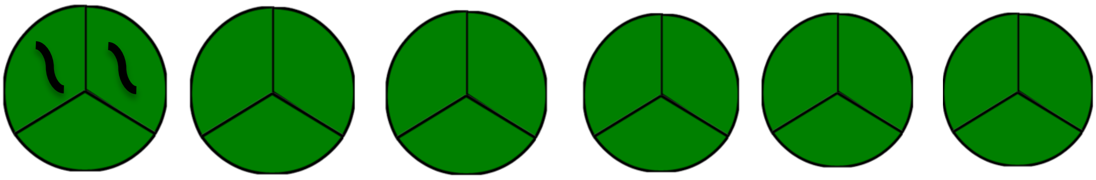


$$\text{Tedy: } \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} \text{ pizzy.}$$

Doplňující otázka:

Žáci se mezi sebou dohodli, že dají kousek pizzy i jejich trenérce, která si ji také zaslouží stejně rovným dílem. Jak rozdělí pizzy, aby bylo rozdělení spravedlivé a všichni dostali stejný počet kousků pizzy?

Nyní se pizzy budou rozdělovat mezi 9 lidí. Každou pizzu rozdělíme na 3 kousky a všichni si vezmou 2 kousky. Každý žák i paní trenérka budou mít $\frac{2}{3}$ pizzy.

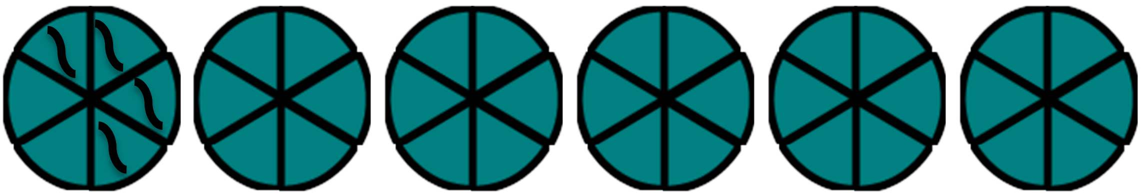


Poznámka:

Toto rozdělení se teoreticky zdá jako nejjednodušší, ale prakticky se bude pizza rozdělovat na třetiny nejhůře.

Jiné rozdělení:

Všechny pizzy si rozdělíme na šestiny a každý dostane 4 kousky pizzy. Každý žák i paní trenérka dostane $\frac{4}{6}$ pizzy.



2.2 Příklad 2

Pan Kavada rozdělil listopadovou výplatu na několik částí. Polovina připadla na potraviny a nájemné, za polovinu zbytku koupil vánoční dárky a čtvrtinu posledního zbytku ponechal na různá rodinná vydání. To se mu zdálo málo, a proto tuto poslední část výplaty zvýšil o 200 Kč. Zbytek 1480 Kč si uložil na vkladní knížku. Vypočítejte výši uvedené výplaty? ([15], str. 15)

---

1. způsob řešení: algebraické řešení

Matematický zápis:

výplata ………………………………… x

potraviny + nájemné ……………….…... $\frac{1}{2}x$

vánoční dárky ………………………… $\frac{1}{2}$ z $\frac{1}{2}$ co zbývá, tedy $\frac{1}{4}x$

různá vydání ……………………….…….. $\frac{1}{4}$ z $\frac{1}{4}$ co zbývá, tedy $\frac{1}{16}x + 200$ Kč

zbytek ………………………………… 1480 Kč

Z údajů sestavíme rovnici:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{16}x + 200\right) + 1480 = x \quad /\cdot 16$$

$$8x + 4x + x + 3200 + 23680 = 16x$$

$$13x + 26880 = 16x$$

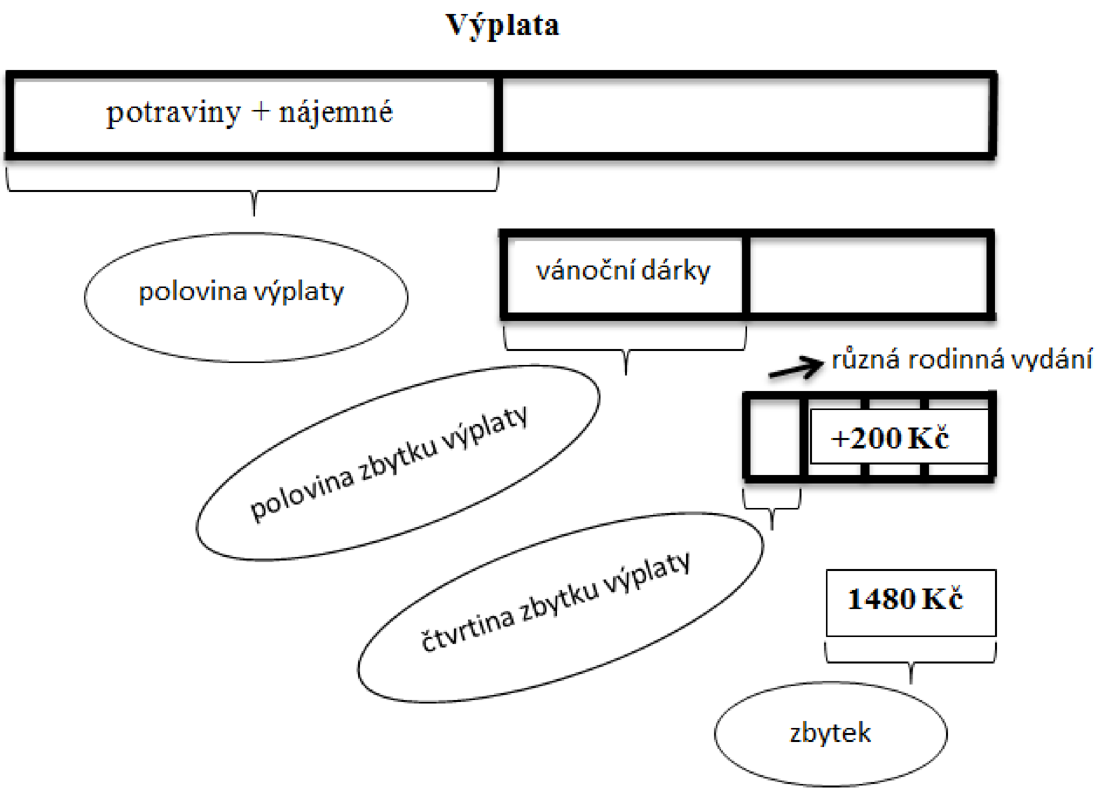
$$3x = 26880$$

$$x = 8960 \text{ Kč}$$

Výplata byla ve výši 8960 Kč.

2. způsob řešení: grafické znázornění

Tento způsob řešení je vhodný, pokud žáci nebudou ze zadání sestavovat rovnici a lépe se orientují v grafickém zobrazení.



2.3 Příklad 3

Překupník prodává mobilní telefony. Prvnímu zákazníkovi prodal polovinu své zásoby a ještě polovinu mobilu. Druhému zákazníkovi prodal polovinu zbytku zásoby a polovinu mobilu. Třetímu zákazníkovi prodal opět polovinu zbylé zásoby a polovinu mobilu. Nakonec mu zůstal jeden mobil. S kolika mobilními telefony začínal překupník obchodovat? ([8], str. 69)

Poznámka:

I když zadání neodpovídá situaci, která by se uskutečnila v reálném životě, přesto je řešení reálné.

Známe jen jeden konkrétní číselný údaj tedy, že překupníkovi nakonec zůstal jeden mobil. Zkusíme řešit úlohu odzadu.

1. způsob řešení: řešení odzadu

Překupníkovi zbyl jeden mobil. Tento jeden mobil je výsledkem předchozího, třetího prodeje. Tedy polovina předchozího stavu bez poloviny jednoho mobilu. Přepíšeme si třetí prodej do matematického zápisu: $\left(1 - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{2}$.

Máme polovinu zbylé zásoby a polovinu mobilu. Abychom vypočítali, kolik měl mobilů při posledním prodeji, musíme provádět řešení s opačnými matematickými operacemi.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 2 = 3 \text{ mobily}$$

Mobil, který mu nakonec zůstal.

Polovina mobilu, kterou mu překupník prodává.

Překupník prodává polovinu zbylé zásoby, tedy vydělíme $\frac{1}{2}$. Pokud počítáme odzadu, musíme číselný výraz vynásobit číslem 2.

Překupník měl před třetím prodejem 3 mobily.

Nyní ke druhému prodeji. Tři mobily opět představují polovinu předchozího prodeje bez poloviny mobilu.

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \left(\frac{7}{2}\right) \cdot 2 = 7 \text{ mobilů}$$

Překupník měl před druhým prodejem 7 mobilů.

Nyní k poslednímu, tedy prvnímu prodeji. Sedm mobilů opět představuje polovinu původního prodeje bez poloviny mobilu.

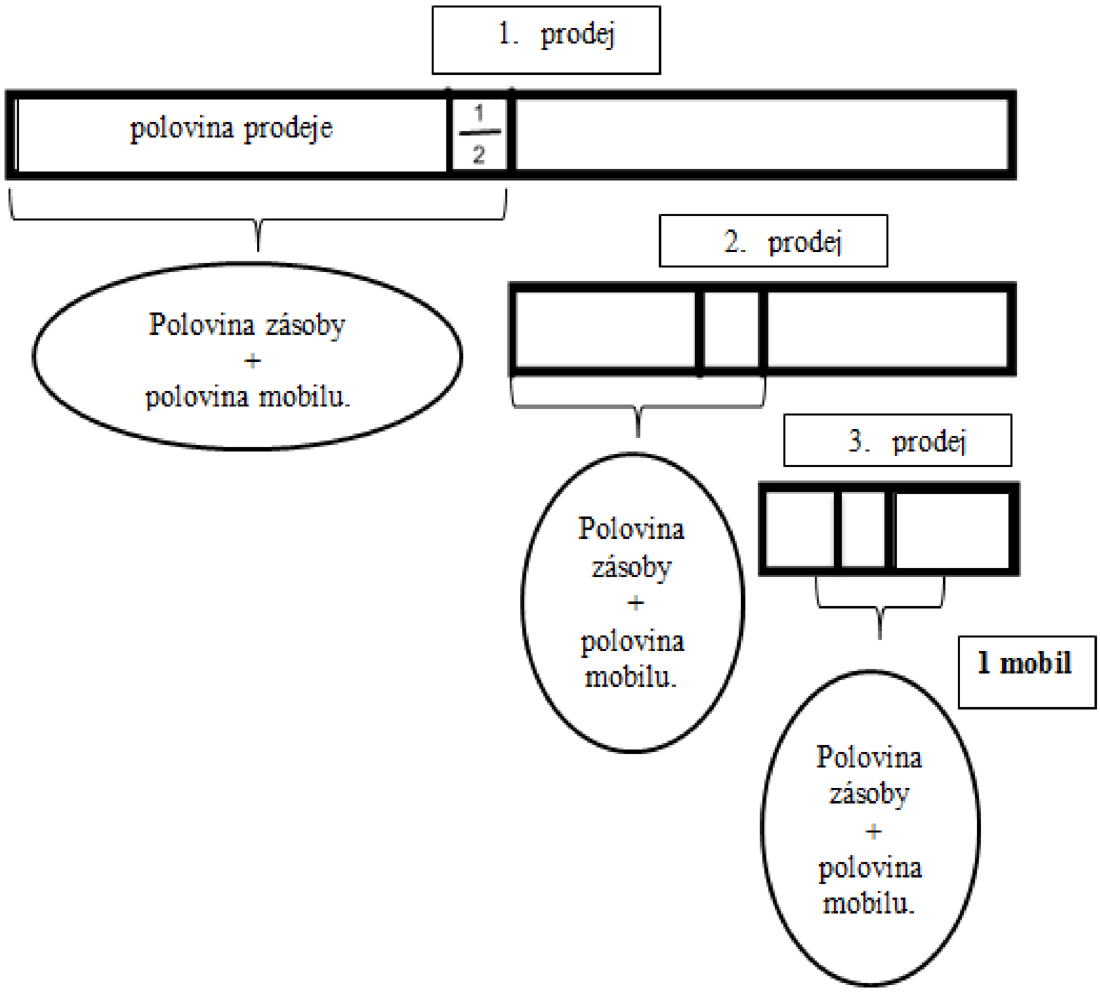
$$\left(7 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \left(\frac{15}{2}\right) \cdot 2 = 15 \text{ mobilů}$$

Překupník měl původně 15 mobilů.

2. způsob řešení: grafické znázornění

Poznámka:

Pokud se žák orientuje v grafickém zobrazení, pak je vhodný tento způsob řešení. Nyní můžeme grafický zápis řešit od začátku zadání úlohy.



3. způsob řešení: algebraické řešení

Celkový počet mobilních telefonů na začátku prodeje nevíme, označíme ho neznámou x.

Prvnímu zákazníkovi prodal polovinu své zásoby, tedy $\frac{1}{2}x$ a ještě 1. zákazníkovi prodal $\frac{1}{2}$ telefonu.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

Druhému zákazníkovi prodal polovinu zbylé zásoby, tedy

$\frac{1}{2} \cdot (\text{zbylá zásoba} - \text{zásoba, kterou prodal prvnímu zákazníkovi})$ a ještě

2. zákazníkovi prodal $\frac{1}{2}$ telefonu.

$$\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - x - 1}{2} + \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{x+1}{4}$$

Třetímu zákazníkovi prodal polovinu zbylé zásoby, tedy $\frac{1}{2} \cdot (\text{zbylá zásoba} - \text{zásoba, kterou prodal druhému zákazníkovi})$ a ještě 3. zákazníkovi prodal $\frac{1}{2}$ telefonu.

$$\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x - 2 \cdot (x+1) - (x+1)}{4} + \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{x+1}{8}$$

Musíme přičíst mobil, který mu nakonec zůstal.

Nyní z těchto informací sestavíme rovnici:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + 1 = x \ /\cdot 8$$
$$4 \cdot (x+1) + 2 \cdot (x+1) + (x+1) + 8 = 8x$$
$$4x + 4 + 2x + 2 + x + 1 + 8 = 8x$$
$$7x + 15 = 8x$$
$$-x = -15 \ /\cdot (-1)$$
$$x = 15$$

Na začátku měl překupník 15 mobilních telefonů.

Poznámka:
Nejvíce praktické způsoby řešení příkladu jsou první dva způsoby, třetí způsob řešení je poměrně náročný, protože obsahuje velké množství textu, kde by se žák mohl lehce ztratit v postupném systému řešení. Třetí způsob řešení vyžaduje znalost rovnic.

2.4 Příklad 4

Pan Nový si pořídil nové auto. Když dojel domů, zjistil, že v nádrži nemá už skoro žádné palivo. Pan Nový bydlí v Katovicích a průměrná kombinovaná spotřeba jeho automobilu je 5,3l /100 km, do nádrže se vejde 45 litrů paliva. Rozhodl se, že pojede natankovat. K jaké čerpací stanici se panu Novému vyplatí dojet natankovat plnou nádrž, 5 litrů, 10 litrů, 20 litrů a 30 litrů, když bude tankovat benzín?

Předpokládá se, že se cena benzínu bude odpovídat čerpací stanici, na které pan Nový tankuje.

a) **Benzínová stanice OMV Katovice (28,90 Kč/l), vzdálenost: 754 m.**
b) **Soukromá čerpací stanice M. Kříž Strakonice (27,90 Kč/l), vzdálenost: 6,7 km.**
c) **Čerpací stanice RoBIN OIL Strakonice (28,90 Kč/l), vzdálenost: 6,9 km.**
d) **Čerpací stanice Tank Ono Kbelnice (27,50 Kč/l), vzdálenost: 12,6 km.**
e) **Čerpací stanice RoBIN OIL Horažďovice (29,20 Kč/l), vzdálenost: 11,2 km.**

Ceny benzínu: listopad 2015 ([19])

Nejprve sestavíme tabulku, která obsahuje názvy čerpacích stanic, vzdálenosti stanic od místa bydliště i zpět, poté ceny benzínu za 1 litr pro jednotlivé čerpací stanice a ceny dopravy tam i zpět na čerpací stanice.

Název stanice	Vzdálenost tam a zpět	Cena za 1l benzínu	Cena dopravy
OMV Katovice	1,508 km	28,90 Kč	
M. Kříž Strakonice	13,4 km	27,90 Kč	
RoBIN OIL Strakonice	13,8 km	28,90 Kč	
Tank ONO Kbelnice	25,2 km	27,50 Kč	
RoBIN OIL Horažďovice	22,4 km	29,20 Kč	

Poslední sloupeček dopočítáme z údajů, které známe, pomocí přímé úměrnosti.

<u>Cena dopravy:</u>

OMV Katovice: ↑ 5,3 l ……………………………… 100 km ↑

x l ……………………………… 1,508 km

$$\frac{x}{5{,}3} = \frac{1{,}508}{100}$$

$$x = 0{,}079924\ \mathrm{l}$$

Nyní jsme vypočítali, kolik pan Nový projede paliva k čerpací stanici i zpět. Potřebujeme to vyjádřit finanční částkou. Výsledek vynásobíme cenou za 1 litr benzínu.

$$0{,}079924\ \mathrm{l} \cdot 28{,}90\ \text{Kč} \doteq 2{,}30\ \text{Kč}$$

Cena dopravy k benzínové stanici OMV Katovice vyšla pana Nového na 2,30 Kč.

Stejný postup bude i u ostatních čerpacích stanic.

M. Kříž Strakonice: ↑ 5,3 l ……………………………… 100 km ↑

x l ……………………………… 13,4 km

$$\frac{x}{5{,}3} = \frac{13{,}4}{100}$$

$$x = 0{,}7102\ \mathrm{l}$$

$$0{,}7102 \cdot 27{,}90\ \text{Kč} \doteq 19{,}80\ \text{Kč}$$

Cena dopravy k benzínové stanici M. Kříž Strakonice vyšla pana Nového na 19,80 Kč.

RoBIN OIL Strakonice:

$$\begin{array}{l} 5{,}3\,\mathrm{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 100 \text{ km} \\ x\,\mathrm{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 13{,}8 \text{ km} \end{array}$$

$$\frac{x}{5{,}3} = \frac{13{,}8}{100}$$

$$x = 0{,}7314\ \mathrm{l}$$

$$0{,}7314 \cdot 28{,}90\ \text{Kč} \doteq 21{,}10\ \text{Kč}$$

Cena dopravy k benzínové stanici RoBIN OIL Strakonice vyšla pana Nového na 21,10 Kč.

Tank ONO Kbelnice:

$$\begin{array}{l} 5{,}3\,\mathrm{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 100 \text{ km} \\ x\,\mathrm{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 25{,}2 \text{ km} \end{array}$$

$$\frac{x}{5{,}3} = \frac{25{,}2}{100}$$

$$x = 1{,}3356$$

$$1{,}3356 \cdot 27{,}50\ \text{Kč} \doteq 36{,}70\ \text{Kč}$$

Cena dopravy k benzínové stanici Tank ONO Kbelnice vyšla pana Nového na 36,70 Kč.

RoBIN OIL Horažďovice:

$$\begin{array}{l} 5{,}3\,\mathrm{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 100 \text{ km} \\ x\,\mathrm{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 22{,}4 \text{ km} \end{array}$$

$$\frac{x}{5{,}3} = \frac{22{,}4}{100}$$

$$x = 1{,}1872\ \mathrm{l}$$

$$0{,}7102 \cdot 29{,}20\ \text{Kč} \doteq 34{,}70\ \text{Kč}$$

Cena dopravy k benzínové stanici RoBIN OIL Horažďovice vyšla pana Nového na 34,70 Kč.

Nyní můžeme doplnit do tabulky poslední sloupeček.

Název stanice	Vzdálenost tam a zpět	Cena za 1l benzínu	Cena dopravy
OMV Katovice	1,508 km	28,90 Kč	**2,30 Kč**
M. Kříž Strakonice	13,4 km	27,90 Kč	**19,80 Kč**
RoBIN OIL Strakonice	13,8 km	28,90 Kč	**21,10 Kč**
Tank ONO Kbelnice	25,2 km	27,50 Kč	**36,70 Kč**
RoBIN OIL Horažďovice	22,4 km	29,20 Kč	**34,70 Kč**

Pomocí vyjádření lineární funkce vypočítáme, kolik bude pana Nového stát natankování určených litrů u jednotlivých čerpacích stanic.

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + q}$$

$\boldsymbol{k}$ ……………....... .... cena za 1 litr benzínu

$\boldsymbol{x}$ …………..………… počet natankovaných litrů benzínu

$\boldsymbol{q}$ ……………………… částka, kterou pan Nový projede k čerpací stanici a zpět (= cena dopravy)

$\boldsymbol{y}$ ……………………… výsledná částka

OMV Katovice: $\boldsymbol{y = (28,90 \cdot x) + 2,30}$

cena benzínu za 1 litr: *k* = 28,90 Kč

cena dopravy: *q* = 2,30 Kč

x (počet litrů)	1	5	10	20	30	45
y (výsledná částka)	31,20	146,80	291,30	580,30	860,30	1302,80

M. Kříž Strakonice: $\boldsymbol{y = (27,90 \cdot x) + 19,80}$

cena benzínu za 1 litr: *k* = 27,90 Kč

cena dopravy: *q* = 19,80 Kč

x (počet litrů)	1	5	10	20	30	45
y (výsledná částka)	47,70	149,30	289,80	577,80	856,80	1275,30

RoBIN OIL Strakonice: $\boldsymbol{y = (28,90 \cdot x) + 21,10}$

cena benzínu za 1 litr: *k* = 28,90 Kč

cena dopravy: *q* = 21,10 Kč

x (počet litrů)	1	5	10	20	30	45
y (výsledná částka)	50	165,60	310,10	599,10	888,10	1321,60

Tank ONO Kbelnice: $\boldsymbol{y = (27,50 \cdot x) + 36,70}$

cena benzínu za 1 litr: *k* = 27,50 Kč

cena dopravy: *q* = 36,70 Kč

x (počet litrů)	1	5	10	20	30	45
y (výsledná částka)	64,20	174,20	311,70	586,70	861,70	1247,20

RoBIN OIL Horažďovice: $\boldsymbol{y = (29{,}20 \cdot x) + 34{,}70}$

cena benzínu za 1 litr: k = 29, 20 Kč

cena dopravy: q = 34,70 Kč

x (počet litrů)	1	5	10	20	30	45
y (výsledná částka)	63,90	180,70	326,70	618,70	910,70	1348,70

Panu Novému se vyplatí dojet natankovat plnou nádrž paliva k čerpací stanici Tank ONO Kbelnice. Plnou nádrž, tedy 45 litrů, natankuje za 1274,20 Kč.

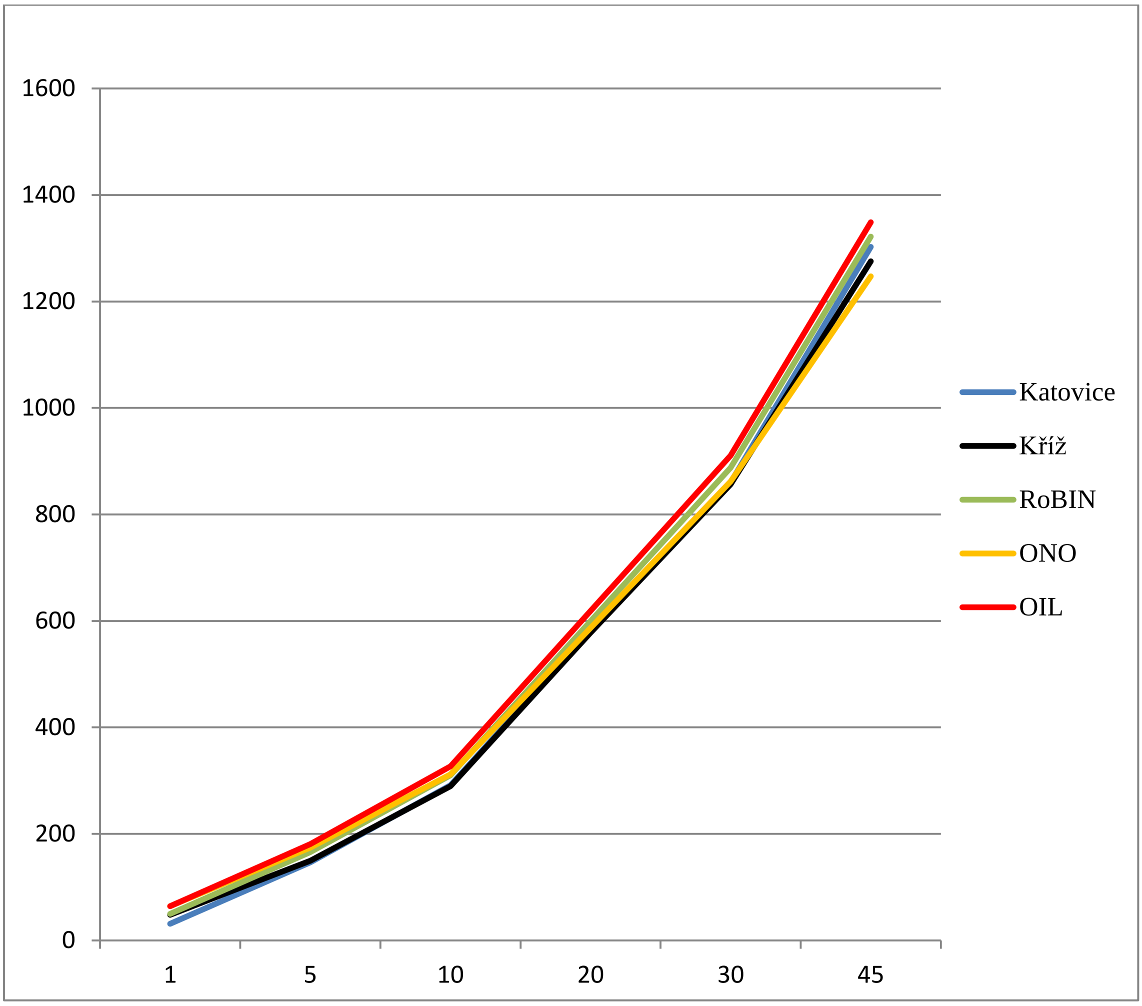
Řešení:

Pokud chce pan Nový tankovat malé množství paliva, vyplatí se natankovat 5 litrů u čerpací stanice OMV Katovice, 5 litrů natankuje za 146,80 Kč.

Pokud chce pan Nový tankovat 10, 20 nebo 30 litrů, vyplatí se tankovat palivo u čerpací stanice M. Kříž Strakonice, 10 litrů natankuje za 289,80 Kč, 20 litrů natankuje za 577,80 Kč a 30 litrů natankuje za 856,80 Kč.

Pokud pan Nový pravidelně jezdí nějakou trasu, např. do práce, tak se situace bude měnit. Všimne si, že mu bude brzy docházet palivo a natankuje ho tedy při cestě. Tento příklad můžeme považovat za výjimečnou situaci, kdy si pan Nový koupil auto například ve městě, do kterého nejezdí a tím pádem i jeho trasa byla jiná.

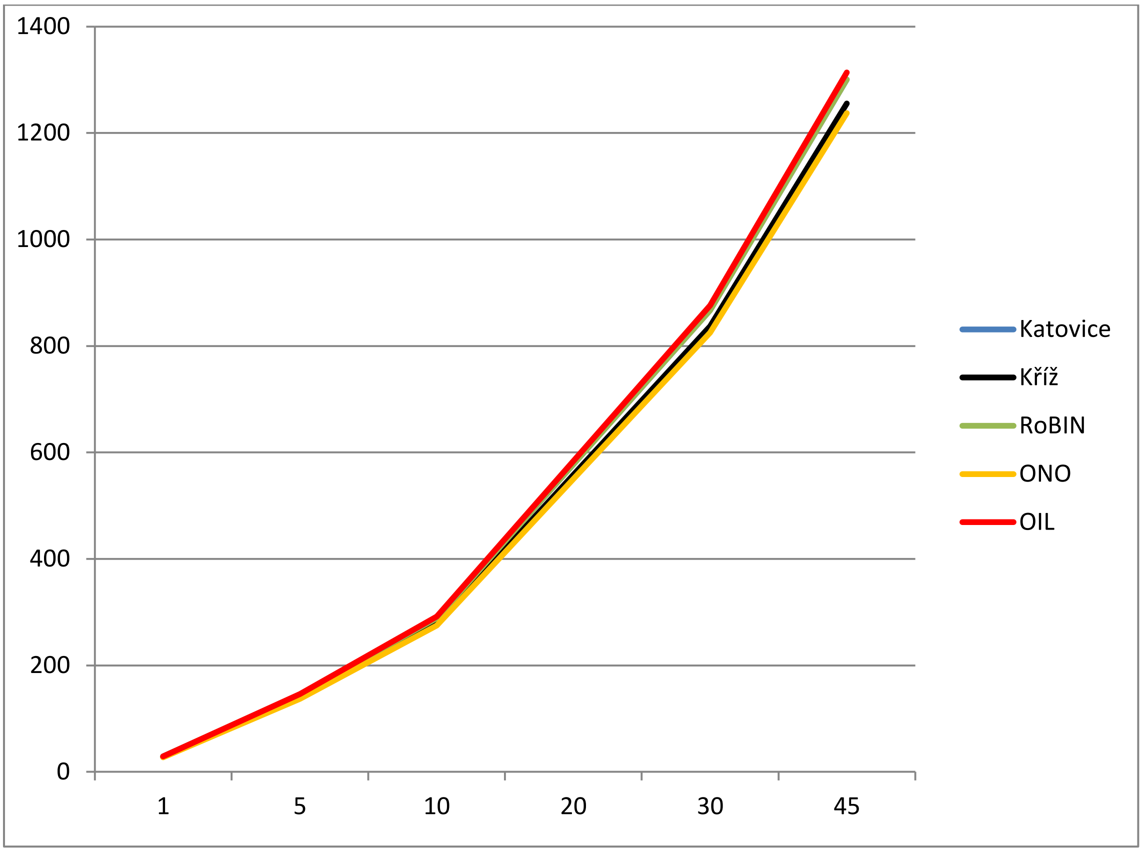
Pro lepší přehlednost je uvedené srovnání cen benzínu u jednotlivých čerpacích stanic při čerpání určitého množství paliva znázorněno v grafu.



Poznámka:

Matematické řešení se od praktického řešení liší. Ve většině případů si řidiči všimnou, že jim pomalu dochází benzín, proto si naplánují cestu tak, aby při ní mohli natankovat palivo a nemuseli tak jet cestu jen kvůli benzínu na čerpací stanici a zase zpět. Pokud si naplánují cestu a při ní budou tankovat, tak hraje roli pouze cena benzínu, nikoli cena dopravy. V reálném životě obvykle neřešíme haléřové položky cen benzínu. V konečném znění se neřídíme podle tohoto řešení, co zde máme. Pokud máme benzínovou stanici při naší cestě, tankujeme tam, i když bude např. cena 1 litru paliva dražší než na vzdálenější benzínové stanici.

Následující graf znázorňuje pouze ceny benzínu při natankování různého množství u každé čerpací stanice. Jde vidět, že ceny se opravdu razantně neliší, takže se asi nejvíce vyplatí tankovat po cestě nebo kde řidič uzná za vhodné. Mnohdy rozhoduje kvalita benzínu.



2.5 Příklad 5

Celková kapacita přehradní nádrže Orlík je 780000000 m^3. Na začátku povodní bylo v nádrži 500000000 m^3. Každou sekundu přiteklo do přehrady 4000 m^3. Odtok z přehrady byl 1000 m^3/s.

Spočítej, kolik vody přibude do přehrady za 1 sekundu, 1 minutu a 1 hodinu?

Kolik vody bude v nádrži za 1 hod, 2 hod, 5 hod, 10 hod, 1 den?

Za jak dlouho bude přehrada plná?

Kdy přehrada přeteče?

Jak by se musel zvýšit odtok, aby se přehrada naplnila až za 46 hodin? ([18])

Nejprve si vypočítáme hodnoty pro 1 s, 1 min a 1 hod. Nesmíme zapomenout započítat i odtok přehrady 1000 m^3/s.

Čas	1 s	1 min	1 hod
Přítok vody m^3	4000	240000	14400000
Skutečný přítok m^3 (přítok vody – odtok)	**3000**	180000	10,8 mil

Nyní vypočítáme přítok za jednotlivé hodiny. Vypočítáme ho pomocí vyjádření předpisu lineární funkce:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + q}$$

$\boldsymbol{k}$ ……………………… přítok za jednu hodinu

$\boldsymbol{x}$ ……………………… počet hodin

$\boldsymbol{q}$ ……………………… původní objem vody, který byl v nádrži na počátku povodní

$\boldsymbol{y}$ ……………………… výsledný objem (množství vody v přehradě)

Čas	0	1	2	5	10	24
Výpočet (m^3)	$10{,}8 \cdot 0 + 500$	$10{,}8 \cdot 1 + 500$				
Objem vody mil. m^3	500	510,8	521,6	554	608	759,2

Za jak dlouho bude přehrada plná?

Vypočítáme opět z předpisu lineární funkce:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + q}$$

$$780 \text{ mil.}\,\mathrm{m}^3 = 10{,}8 \text{ mil.}\,\mathrm{m}^3 \cdot x + 500 \text{ mil.}\,\mathrm{m}^3$$

$$780 = 10{,}8 \cdot x + 500$$

$$780 - 500 = 10{,}8x$$

$$10{,}8x = 280$$

$$x = \frac{280}{10{,}8}$$

$$x \doteq 26 \text{ hod}$$

Přehrada bude plná přibližně za 26 hodin. Poté může přehrada přetéct, pokud se nezvýší odtok vody z přehrady.

Jak by se musel zvýšit odtok, aby se přehrada naplnila až za 46 hodin?

Poznámka:

Při povodních se obvykle postupuje způsobem, že se reguluje množství vody v nádrži tím, že se mění odtok vody z přehrady. Tedy se bude zvyšovat s rychleji přibývajícím množstvím vody, které přiteče do přehrady.

Jak by se musel zvýšit odtok, aby se přehrada naplnila až za 46 hodin?

Nyní opět využijeme znalosti lineární funkce. Rovnice zůstane stejná jako v předchozím úkolu, ale znění se neznámá. (V předchozí úloze byla neznámá čas, v této úloze bude neznámá skutečný přítok, tedy k je neznámá.)

Nyní vypočítáme skutečný přítok vody za hodinu. Vypočítáme ho opět pomocí předpisu lineární funkce:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + q}$$

$$780 \text{ mil. m}^3 = k \cdot 46 + 500 \text{ mil. m}^3$$

$$780 = 46k + 500$$

$$780 - 500 = 46k$$

$$280 = 46k$$

$$6{,}087 \doteq k$$

$$k \doteq 6{,}087 \text{ mil. m}^3$$

Nyní jsme zjistili skutečný přítok vody za hodinu.

Skutečný přítok vody vypočítáme jako rozdíl mezi přítokem a odtokem vody z nádrže. Opět využijeme již vypočítaných údajů a zjistíme odtok. Sestavíme rovnici:

$$\text{Skutečný přítok za hodinu} = 1 \text{ hodina} \cdot (\text{přítok vody} - \text{odtok vody})$$

$$6{,}087 \text{ mil. m}^3 = 60 \cdot 60 \cdot (4000 - x)$$

$$6087000 = 3600 \cdot (4000 - x)$$

$$6087000 = 14400000 - 3600x$$

$$-8313000 = -3600x$$

$$3600x = 8318000$$

$$x \doteq 2309 \text{ m}^3/s$$

Do rovnice dosazujeme tento přítok, protože je potřeba skutečný přítok vody do přehrady za situace, že by se měla přehrada naplnit až za 46 hodin.

Aby se přehrada naplnila až za 46 hodin, musel by se zvýšit odtok vody na 2309 m^3/s.
Nyní si pro přehlednost vypočítáme, jaký je objem vody v mil. m^3 v různých hodinách, pokud by se měla přehrada naplnit až za 46 hodin.
Vypočítáme ho opět za pomocí již zjištěných údajů a sestavíme rovnici:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + q}$$

k .... přítok za jednu hodinu při takovém objemu, při kterém by se přehrada naplnila za 46 hodin

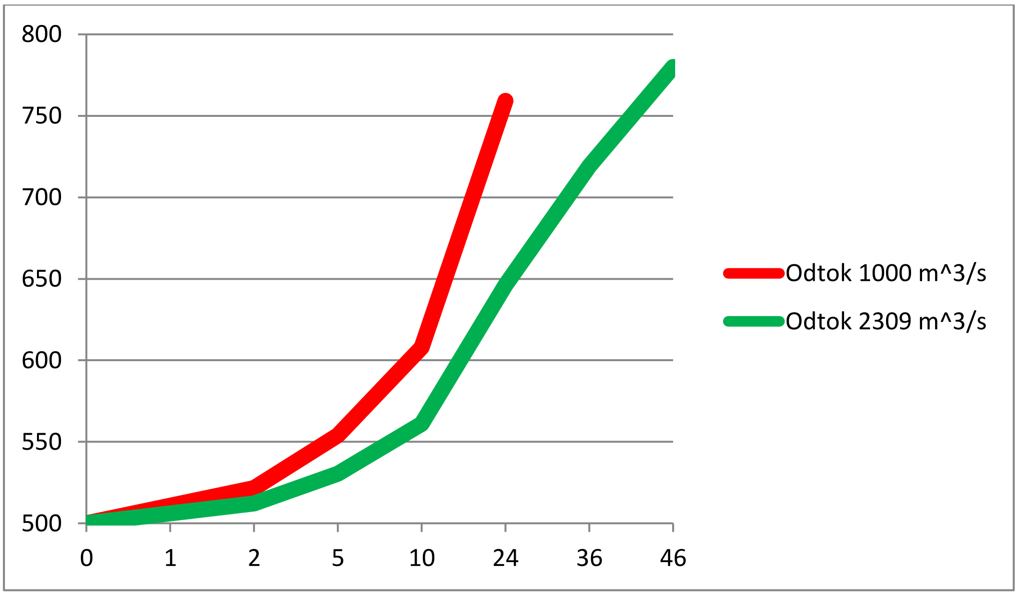
x .... počet hodin

q .... původní objem vody, který byl v nádrži na počátku povodní

y .... výsledný objem (množství vody v přehradě)

Čas	1	10	24	36	46
Výpočet (m^3)	$6{,}087 \cdot 1 + 500$	$6{,}087 \cdot 10 + 500$			
Objem vody mil. m^3	506,1	561	646,1	719,1	780

V grafu je názorně ukázáno, kdy a kolik mil. m^3 vody nateče do přehrady a kdy se přibližně přehrada naplní.

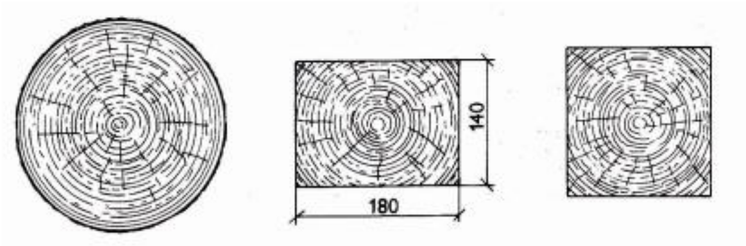


2.6 Příklad 6

Z kmenů borovic se budou řezat trámy. Které na příčném řezu tvaru obdélníku budou mít rozměry 18 cm a 14 cm (obrázek)

a) Jaké nejmenší průměry musí tyto kmeny mít?

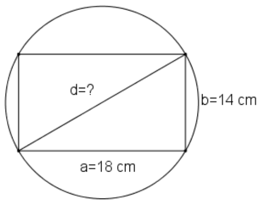
b) O kolik procent se sníží odpad dřeva, kdybychom ze stejného kmene vyřízli trámy tvaru čtverce s maximálním průměrem? (počítejte s kmeny tvaru válce)



([15,]str. 54)

---

a) Jaké nejmenší průměry musí mít kmeny, při zadaných rozměrech?



Průměr vypočítáme z Pythagorovy věty. Z pravoúhlého trojúhelníku můžeme vypočítat přeponu d[1], když známe odvěsny a a b.

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$18^2 + 14^2 = d^2$$

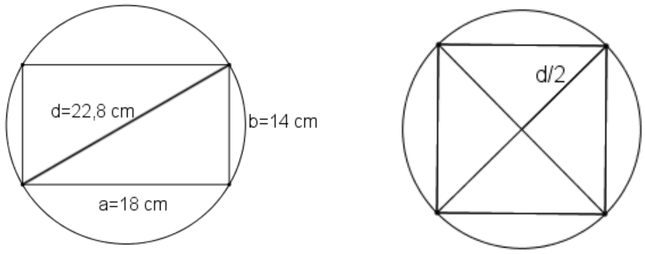
$$520 = d^2$$

$$d \doteq 22{,}8 \text{ cm}$$

Tyto kmeny musí mít nejmenší průměry přibližně 22,8 cm.

b) O kolik procent se sníží odpad dřeva, kdybychom ze stejného kmene vyřízli trámy tvaru čtverce s maximálním průměrem? (počítejte s kmeny tvaru válce)

[1] Protože počítáme průměr, tedy *d*, můžeme si již nyní označit přeponu tímto písmenem.



V této části příkladu budeme využívat obsahy řezů kmene.

Musíme vypočítat obsahy řezů kmene na obrázcích a obsah řezu kmene samotného.

Obsah řezu kmene označíme *S*, obsah řezu kmene obdélníkového tvaru označíme S_1 a obsah řezu kmene čtvercového tvaru označíme S_2.

Jaký bude obsah *S*? Využijeme vzorec pro obsah kružnice.

Jaký bude obsah S_1? Využijeme vzorec pro obsah obdélníku.

$$S = \pi \cdot r^2 \qquad S_1 = a \cdot b$$

$$S = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad S_1 = 18 \cdot 14$$

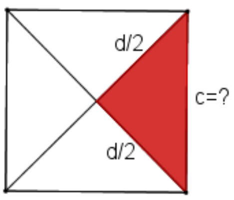
$$S = \pi \cdot \left(\frac{22{,}8}{2}\right)^2 \qquad S_1 \doteq 252 \text{ cm}^2$$

$$S \doteq 408{,}1 \text{ cm}^2$$

Nyní vypočítáme obsah řezu kmene čtvercového tvaru. Jaký bude obsah S_2?

Jak zjistíme velikost strany čtverce? Využijeme toho, že známe velikost průměru a pomocí Pythagorovy věty vypočítáme velikost strany čtverce a následně dokážeme vypočítat i jeho obsah.

Velikost strany čtverce:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = c^2$$

$$11{,}4^2 + 11{,}4^2 = c^2$$

$$c \doteq 16{,}1 \text{ cm}$$

Obsah čtverce:

$$S_2 = a^2$$

$$S_2 = 16{,}1^2$$

$$S_2 \doteq 259{,}2 \text{ cm}^2$$

Od obsahu *S* odečteme S_1 a S_2; zjistíme tím, kolik vznikne odpadu u každého řezu a přes přímou úměrnost vypočítáme, o kolik % se liší jednotlivé vypočítané odpady.

$S_1 \doteq 252 \text{ cm}^2$

$S_2 \doteq 259{,}2 \text{ cm}^2$

Kolik bude odpadu u příčného řezu tvaru obdélníku a kolik u tvaru čtverce?

$$S - S_1 = 408{,}1 - 252 = 156{,}1\ \text{cm}^2 \text{ odpadu} \qquad S - S_2 = 408{,}1 - 259{,}2 = 148{,}9\ \text{cm}^2 \text{ odpadu}$$

Z obdélníkového řezu bude $156{,}1\ \text{cm}^2$ odpadu a ze čtvercového řezu bude $148{,}9\ \text{cm}^2$ odpadu.

Nyní jsme dostali údaje o jednotlivých odpadech a zjistíme, jaký je mezi nimi rozdíl v %.

100 % ………………… 156,1

x % ………………… 148,9

$$\frac{x}{100} = \frac{148{,}9}{156{,}1}$$

$$x = \frac{14890}{156{,}1}$$

$$x \doteq 95{,}4\ \%$$

Nyní stačí akorát od 100% odečíst procentuální odpad vytvořený u čtvercového řezu a vyjde nám snížení odpadu dřeva v % při tomto řezu.

$100\ \% - 95{,}4\ \% = 4{,}6\ \%$

Odpad se sníží o přibližně 4,6 %, pokud bychom z kmene vyřezávali čtvercové trámy.

3 PROSTŘEDÍ OBCHODU

3.1 Příklad 1

Každý ze tří prodavačů – pánové Holý, Malý a Nový – nakoupil 100 kilogramů jablek po 10 korunách za jeden kilogram. Pan Holý prodal za dvě hodiny polovinu svých jablek po 15 Kč za jeden kilogram. Potom snížil cenu na 12 Kč za kilogram a jablka prodal za jednu hodinu. Pan Malý se rozhodl prodávat jablka za 16 Kč za jeden kilogram a zůstat na tržišti tak dlouho, dokud vše neprodá. Pan Nový prodával jablka po 16 Kč za jeden kilogram. Tomu, kdo koupil alespoň 5 kilogramů, chtěl nabídnout slevu a prodávat jeden kilogram po 12 Kč.
Který si vydělá nejvíce peněz bez ohledu na čas?
Kdo se svojí strategií vyprodá nejdříve jablka - odůvodněte? ([13], str. 8)

Role prodávajícího bez ohledu na čas.

p. Holý:

P. Holý prodal za 2 hodiny 50 kg jablek, kdy 1 kg jablek stál 15 Kč. Poté za další hodinu prodal zbývajících 50 kg jablek, kdy ale 1 kg jablek stál jen 12 Kč.

2 hodiny ……………………50 kg jablek po 15 Kč/kg ……... celkem 750 Kč
1 hodina …………………... 50 kg jablek po 12 Kč/kg ……... celkem 600 Kč

Hodiny	1. a 2.	3.
Prodáno jablek (kg)	50	50
Cena 1 kg jablek (Kč)	15	12
Tržba (Kč)	750	600

Celkem p. Holý utržil za 3 hodiny prodeje 1350 Kč. Jeho zisk[2] bude činit 350 Kč (Příjmy – náklady: 1350 Kč – 1000 Kč = 350 Kč.) bez ohledu na další možné náklady, které nejsou v úloze popsány. (např.: pronájem místa na tržnici, doprava zboží na místo atd.) V této úloze jsou popsány náklady jen za nákup jablek a ty jsou pro všechny prodejce stejné, tedy 1000 Kč.

---

[2]Podle P. A. Samuelsona [12] je zisk čistý příjem, neboli rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady.

p. Malý:

P. Malý prodává tolik hodin, kolik je potřeba na to, aby prodal všechny jablka. Přitom 1 kilogram jablek prodává za 16 Kč.

x hodin ……………100 kg jablek po 16 Kč/kg …….. celkem 1600 Kč

Hodiny	x
Prodáno jablek (kg)	100
Cena 1 kg jablek (Kč)	16
Tržba (Kč)	1600

P. Malý utržil za prodej 1600 Kč, jeho zisk bude činit 600 Kč. (1600 Kč – 1000 Kč = 600 Kč)

p. Nový:

P. Nový prodává jeden kilogram jablek za 16 Kč, pokud si zákazník koupí alespoň 5 kilogramů, tak p. Nový nabízí slevu a 1 kilogram jablek bude stát jen 12 Kč.

x hodin ………. alespoň 5 kg jablek, sleva… 12 Kč/kg………. jinak 16 Kč/kg

Hodiny	x
Prodáno jablek (kg)	100
Cena 1 kg (Kč) jablek do 5-ti kg	16
Cena 1 kg (Kč) jablek nad 5 kg	12
Tržba	viz níže

Pokud by k p. Novému přišli jen zákazníci, kteří by chtěli 5 a více kg jablek, tak by utržil 1200 Kč. (Pokud by zboží prodával po 5- ti a více kilogramech, utržil by 1200 Kč.) $20 \cdot (5 \cdot 12) = 1200$ Kč.

Když množství jablek rozdělíme po 5 – ti kilogramech, získáme tak oněch 20 pětikilových pytlíků, za které utrží 1200 Kč. Jestliže ale všechny jablka neprodá po pěti a více kilogramech, utrží za ně větší finanční obnos.

Hodiny	x
Prodáno jablek (kg)	100
Cena jablek 1 kg (Kč)	16
Cena jablek při koupi alespoň 5 – ti kg	12
Tržba	viz níže

Možnosti jsou následující:

20 pytlíků po 5 – ti kilogramech po 12 – ti Kč

19 pytlíků po 5 – ti kilogramech po 12 – ti Kč a pět jednokilových pytlíků po 16 – ti Kč

…

…

…

1 pytlík po 5 – ti kilogramech po 12 – ti Kč a 95 jednokilových pytlíků po 16 – Kč

100 jednokilových pytlíku po 16 – ti Kč

$$20 \cdot 5 \cdot 12\ Kč = 1200 \text{ Kč}$$

$$19 \cdot 5 \cdot 12 \text{ Kč} + 5 \cdot 16 \text{ Kč} = 1140 + 80 = 1220 \text{ Kč}$$

$$18 \cdot 5 \cdot 12 \text{ Kč} + 10 \cdot 16 \text{ Kč} = 1080 + 160 = 1240 \text{ Kč}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$1 \cdot 5 \cdot 12 \text{ Kč} + 95 \cdot 16 \text{ Kč} = 60 + 1520 = 1580 \text{ Kč}$$

$$0 \cdot 5 \cdot 12 \text{ Kč} + 100 \cdot 16 \text{ Kč} = 0 + 1600 = 1600 \text{ Kč}$$

p. Malý utrží peníze v rozmezí 1200 Kč až 1600 Kč, podle toho, v jakém množství se mu povede jablka prodat.

Nejvíce peněž utrží druhý prodejce (p. Malý), který prodává jablka při ceně 16 Kč/kg. Stejnou částku ale může utržit i třetí prodejce, pokud prodá všechna jablka za cenu 16 Kč/kg.

Poznámka:
Toto je čistě matematické řešení postupu, který se zde vyskytuje. Realita tomuto postupu neodpovídá. Nevíme, zda se tyto situace stanou skutečně tak, jak jsou tady napsané nebo zcela jinak.

Co může ovlivnit rychlost prodeje? (Uvedeme si příklady, jak by to mohlo dopadnout.)

- Cena zboží. (V každé situaci existuje vztah mezi cenou a zbožím.)
- Poloha stánku. (Pokud bude prodejce až na konci tržiště, nemusí k němu zákazník dojít a nakoupí jablka u bližšího stánku.)
- Propagace prodeje = reklama a množství poskytovaných informací o zboží. (Jakou udělá prodávající reklamu svému obchodu, aby přesvědčil zákazníky ke koupi. Poskytování různých slev a výhod při koupi většího množství zboží.)
- Ekonomická situace zákazníka. (Výše peněžního příjmu spotřebitele, rodinný rozpočet a další.)
- Kvalita zboží. (Zákazník si raději koupí dražší jablka, ale budou kvalitní, než – li jablka potlučená. Dalším faktorem by mohlo být chemické ošetření prodávaného zboží – chemické postřiky nebo pěstování v bio kvalitě.)
- Důvěryhodnost prodejce.
- Čas, kdy půjdou kupující na tržnici. (Prodávající může dát slevu od začátku prodeje nebo až v průběhu.)
- Tržní konkurence.[3]

Poznámka:
Prodej boží je ovlivněný různými faktory, které působí na zákazníka. Proto nemůžeme jednoznačně říci, že si nejvíce peněz, bez ohledu, kolik času prodejce stráví na tržnici, vydělá p. Malý nebo p. Nový. Výdělek prodejců bude záležet na poloze stánku, pokud p. Holý bude mít stánek až na konci tržiště, tak mohou všichni zákazníci nakupovat u prvního stánku, který bude působit přesvědčivě a zboží bude kvalitní, např. u pana Malého, i když bude cena zboží vyšší. Pokud bude sezóna jablek a každý je bude

[3] Podle P. Hejtmana [6] tržní konkurence je střetávání zájmů různých ekonomických subjektů na trhu, usilujících o maximální ekonomické výhody.

zpracovávat, mohou nejvíce nakupovat u p. Nového, kde využijí slevu nad 5 kg jablek. Pokud půjdou všichni zákazníci na tržnici včas a projdou všechny stánky s jablky, utrží nejvíce pan Holý. Nelze jednoznačně říci, jaká strategie projede, bude nejefektivnější.

Kdo vyprodá nejdříve jablka?

p. Holý:

Čas, kdy p. Holý vyprodá jablka, víme ze zadání. Za 2 hodiny vyprodá polovinu množství jablek a za další hodinu prodá zbytek jablek.

Pan Holý vyprodá jablka za 3 hodiny.

Nyní využijeme ještě podrobněji informace, které máme ze zadání, abychom je později mohli využít k dalším výpočtům.

Pan Holý prodá za 2 hod ………… 50 kg jablek za 15 Kč/kg. ➡ 100 kg za 4 hod

2 hod ……………..……… 50 kg jablek

x hod ………………… 100 kg jablek

$$\frac{x}{2} = \frac{100}{50}$$

$$x = \frac{200}{50}$$

$$x = 4 \text{ hodiny}$$

(Kdyby pan Holý prodával za takto zadaných podmínek jablka, prodal by je všechny za 4 hodiny.)

Poté ještě prodá za 1 hod …………. 50 kg jablek za 12 Kč/kg. ➡100 kg za 2 hod

1 hod …………….…… 50 kg jablek

x hod ………………… 100 kg jablek

$$\frac{x}{1} = \frac{100}{50}$$

$$x = \frac{100}{50}$$

$$x = 2 \text{ hodiny}$$

(Kdyby pan Holý prodával za takto zadaných podmínek jablka, prodal by je všechny za 2 hodiny.)

<u>p. Malý:</u>

Z údajů, které zatím víme, si sestavíme tabulku.

Pokud budou prodávat 1 kg jablek za 12 Kč, vyprodají je za 2 hod, pokud 1 kg jablek za 15 Kč, vyprodají je za 4 hod.

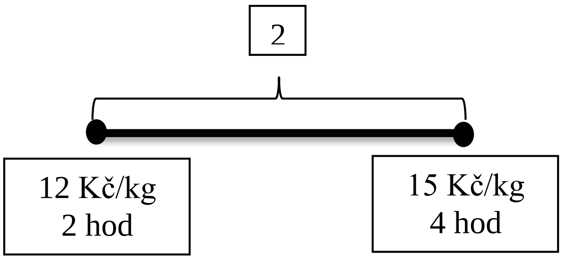
12 Kč/kg	2 hod
13 Kč/kg	
14 Kč/kg	
15 Kč/kg	4 hod
16 Kč/kg	

Jak dopočítáme zbývající údaje v tabulce?

Převedeme situaci na analogii s úsečkou.

Víme, že jablka, která se prodávají po 12 – ti Kč/kg se prodají za 2 hodiny a jablka, která se prodávají po 15 – ti Kč/kg se prodají za 4 hodiny. Za jakou dobu se prodají jablka, která se prodávají za 13 Kč/kg a 14 Kč/kg?

Máme úsečku dlouhou 2 cm (údaj 2 cm představuje 2 hodiny) a musíme ji rozdělit na 3 stejné díly. Kolik minut bude každý díl úsečky minut?



$$2:3 = 0,\overline{6}\ \text{hod}$$

$$0,\overline{6} = 40\ \text{minut}$$

Aby byly díly rovnoměrně rozdělené, musí mít každý díl velikost 40 minut.

Nyní můžeme doplnit zbývající údaje v tabulce:

12 Kč/kg	2 hod
13 Kč/kg	2 hod 40 min
14 Kč/kg	3 hod 20 min
15 Kč/kg	4 hod
16 Kč/kg	**4 hod 40 min**

Pan Malý vyprodá jablka za 4 hodiny a 40 minut.

<u>p. Nový:</u>
Z již zjištěných údajů bude pan Nový vyprodávat jablka v rozmezí od 2 hod do 4 hod 40 minut v závislosti na tom, za jakou aktuální cenu bude prodávat.

Toto tvrzení však musíme oslabit, protože pan Nový může vyprodat jablka v různém časovém intervalu, není tedy jasné, kdy přesně je vyprodá. Nemusí prodat tři hodiny ani jedno jablko a pak jablka prodá najednou během chvíle nebo další možností je, že bude prodávat stejné množství jablek vždy stejně rychle. Prodávající nemůže až tolik ovlivnit zákazníkův příchod.

Nejrychleji vyprodá první prodejce a zároveň i poslední prodejce, pokud bude prodávat jablka jen po 5 – ti kilogramových pytlíkách.

Poznámka:
Všichni prodávající se chovají v příkladu jedním způsobem. Pro přiblížení do reálného světa využijeme cenovou elasticitu poptávkové funkce.
Vysvětlíme si, jak bude spotřebitelská poptávka reagovat na změnu ceny.

Cenová elasticita poptávky (Samuelson [12], str. 66) „*je pojem, s jehož pomocí měříme, o kolik se změní poptávané množství statku, změní-li se jeho cena.*“ Jinak řečeno, může být zavedena jako procentuální změna poptávaného množství oproti procentuální změně ceny.
Následující teoretická část je vytvořena na základě podkladů z literatury [7] a [17].
Je nutné znát následující pojmy:
$E_D(p)$ …………… cenová elasticita poptávkové funkce
p …………………cena
$D_{(p)}$ ……………… poptávková funkce vyjadřující množství zboží $D = D_{(p)}$, které spotřebitel zamýšlí koupit při dané ceně
$D'_{(p)}$……………… mezní poptávka

$D_{(p)} \cdot p$ …………… množství peněz, které je spotřebitel ochoten utratit za dané zboží při ceně p

vzorec pro výpočet elasticity poptávkové funkce:

$$E_D(p) = p \cdot \frac{D'_{(p)}}{D_{(p)}}$$

Mohou nastat 3 kategorie cenové elasticity. Buďto jde o jednotkovou elasticitu poptávky nebo o cenově elastickou poptávku, anebo o cenově neelastickou poptávku.

a) poptávka s jednotkovou elasticitou

$$(D_{(p)} \cdot p)' = 0$$

$$D_{(p)} + p \cdot D'_{(p)} = 0$$

$$p \cdot D'_{(p)} = -D_{(p)}$$

$$p \cdot \frac{D'_{(p)}}{D_{(p)}} = -1$$

Je-li cenová elasticita poptávkové funkce rovna číslu -1, tak se poptávka nazývá jednotkově elastická. To znamená, že s poklesem ceny statku se objem výdajů na nákup tohoto statku nezmění.

b) cenově elastická poptávka

$$(D_{(p)} \cdot p)' < 0$$

$$D_{(p)} + p \cdot D'_{(p)} < 0$$

$$p \cdot D'_{(p)} < -D_{(p)}$$

$$p \cdot \frac{D'_{(p)}}{D_{(p)}} < -1$$

Jde o klesající funkci. Vyjadřuje, že s poklesem ceny bude součin $D_{(p)} \cdot p$ růst. To znamená, že bude růst objem výdajů na nákup daného statku. Poptávka je cenově elastická.

c) cenově neelastická poptávka

$$(D_{(p)} \cdot p)' > 0$$

$$D_{(p)} + p \cdot D'_{(p)} > 0$$

$$p \cdot D'_{(p)} > -D_{(p)}$$

$$p \cdot \frac{D'_{(p)}}{D_{(p)}} > -1$$

Jde o rostoucí funkci. Tedy s poklesem ceny klesají výdaje na nákup tohoto statku. Poptávka je cenově neelastická.

3.2 Příklad 2

V zahrádce mám mnoho růží. Půjdu je prodávat. Budu prodávat každou růži za 5 Kč. Můžete si u mě koupit také stuhu. Ta stojí 10 Kč. Začněme prodávat a nakupovat.

Mám 40 Kč, kolik různých variant kytic si mohu koupit? ([13], str. 10)

Pro lepší přehlednost si vytvoříme ceník. V tabulce jsou zvýrazněné možné kombinace růží a růží se stuhou popř. stuhami, kdy peněžní částka za kytice nepřesáhne 40 Kč.

Počet růží	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cena růže bez stuhy (Kč)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Cena s 1 stuhou (Kč)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Cena se stuhou ke každé růži (Kč)	10	15	30	45	60	75	90	205	120	135	150

Již z tabulky je patrné, že při nákupu růže nebo kytic růží existuje pravidelný přírůstek a cena kytice je závislá na počtu růží, které jsou se stuhou i bez stuhy.

.

a) Za kytice se utratí celá částka, tedy 40 Kč a zároveň nepřevažuje počet stuh nad počtem růží. Kolik možností nákupu je?

40 Kč	8 růží + 0 stuh	6 růží + 1 stuha	4 růže + 2 stuhy

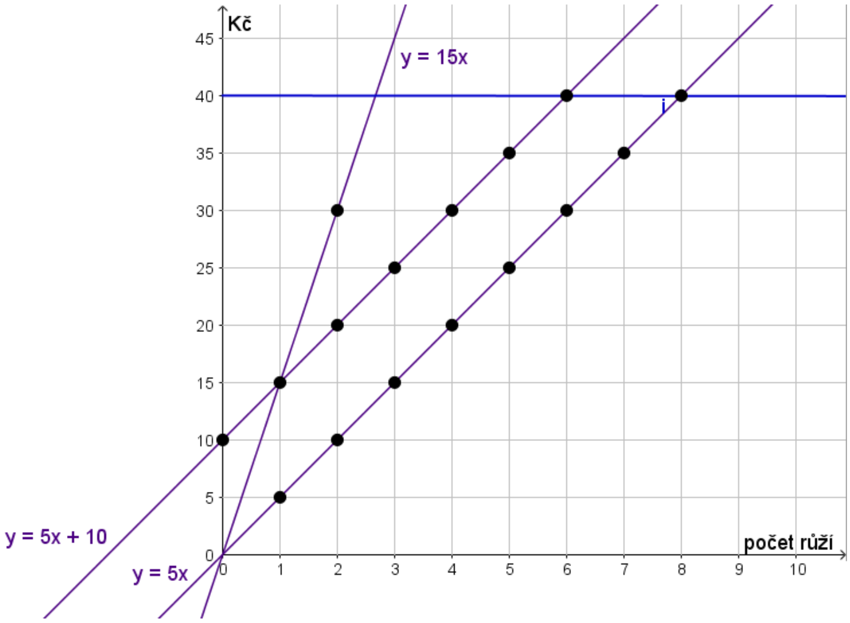
Jsou tři nejjednodušší možnosti, jak růže nakoupit. Existují ještě další možné kombinace kytic? Nyní jsme vypsali možnosti, kdy se nakupuje stejný druh kytic. Jsou ale varianty, kdy kupujeme různé kytice.

Pro lepší představu si základní kombinace z tabulky vyjádříme matematicky a graficky znázorníme.

První řádek tabulky můžeme vyjádřit lineární funkcí danou předpisem $y = 5x$.

Druhý řádek, tedy růže s jednou stuhou, vyjádříme jako $y = 5x + 10$.

Třetí řádek, který vyjadřuje ceny se stuhou ke každé růži, můžeme zjednodušeně zapsat předpisem $y = 15x$.



Nyní můžeme vytvářet různé kombinace kytic. Můžeme koupit jen dvě kytice nebo i tři kytice. Existují možnosti i jak koupit čtyři kytice? Půjde koupit za 40 Kč i pět kytic?

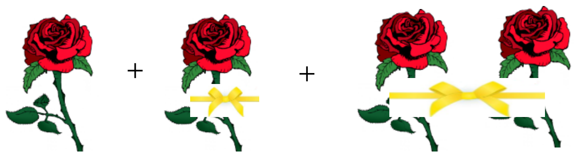
Některé možnosti růží a stuh, kdy utratíme celou částku:

- 2 samostatné růže + 4 růže s jednou stuhou
- 3 samostatné růže + 3 růže s jednou stuhou
- 4 samostatné růže + 2 růže s jednou stuhou
- 5 samostatných růží + 1 růže se stuhou
- 2 samostatné růže + 2 růže se dvěma stuhami
- 3 růže s jednou stuhou + 1 růže s jednou stuhou

- 4 růže se čtyřmi stuhami + 1 růže s jednou stuhou

Nyní jsme vypsali některé možnosti, při koupi dvou kytic růží. Můžeme koupit i tři kytice, kdy v každé kytici bude jiná kombinace růží?

- 1 samostatná růže + 1 růže s jednou stuhou + 2 růže s jednou stuhou



Existuje varianta i pro 4 kytice:

- 1 samostatná růže + 1samostatná růže + 1 samostatná růže + 3 samostatné růže dohromady

Půjde koupit i 5 kytic?

- 1 samostatná růže + 1 samostatná růže + 1 samostatná růže + 1 samostatná růže + 2 růže s jednou stuhou

Existuje mnoho variant, jak nakoupit kytice s růžemi se stuhou i bez stuhy. Záleží na počtu osob, pro kolik lidí jsou určeny. Záleží také i na výběru kupujícího. Vystupuje řada faktorů, které ovlivňují výběr květiny. (Pokud potřebuji květinu k narozeninám pro blízkého člověka, nebudu mu dávat jen jednu růži, ale nechám si uvázat květinu s co největším možným počtem růží. Nebo mohu potřebovat květiny pro více lidí … Někdo má rád stuhy u květin, další člověk bude preferovat kytice bez stuh. Existuje velká škála možností, jak růže zkombinovat, abychom utratili celých 40 Kč.

b) Za kytice se nemusí utratit celá částka, ale zároveň nepřevažuje počet stuh nad počtem růží. Kolik možností nákupu je?

 +  +

40 Kč	35 Kč	30 Kč	25 Kč	20 Kč	15 Kč	10 Kč	5 Kč	0 Kč
8+0	7+0	6+0	5+0	4+0	3+0	2+0	1+0	
6+1	5+1	4+1	3+1	2+1	1+1			
4+2	3+2	2+2						

Opět se vycházelo z tabulky na začátku příkladu. Z této tabulky vychází celkem 17 nejjednodušších možností, jak nakoupit kytice stejného druhu.

Z tabulky můžeme dále vytvářet kombinace různého počtu růží a stuh. Může nastat také případ, kdy se žádná květina kupovat nebude.

Možností bude opět mnoho, záleží na požadavcích, které bude mít zákazník.

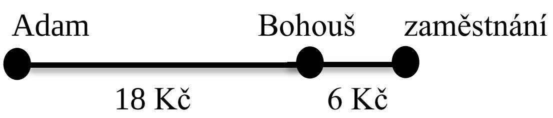
4 INDIVIDUÁLNÍ DOPRAVA

4.1 Příklad 1

Každý den jezdím vlastním autem do práce. Také moji spolupracovníci, kteří bydlí v blízkých místech, jezdí každý svým autem. Adam a Bohouš jezdí každý svým autem, po stejné trase, ale ze dvou různých míst. Adama stojí jedna cesta do práce 18 Kč, Bohouše 6 Kč. Náklady na 1 km jízdy mají stejné. ([13], str. 6)

Otázka: **Bylo by možné snížit náklady na dopravu do zaměstnání u spolupracovníků, pokud by jezdili Adam a Bohouš spolu? Kolika způsoby si mohou mezi sebou rozdělit náklady na cestu? Jaké rozdělení bude nejspravedlivější?**

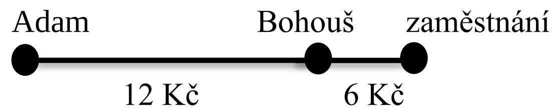
Adam jezdí z místa, které je dál než místo, odkud jezdí Bohouš. Adam by tedy mohl na cestě nabrat Bohouše a mohli by poté dojíždět do zaměstnání spolu.



Pokud mají oba stejné náklady, tak úsek, který jezdí Adam sám, ho stojí 12 Kč. Kolik Kč by mohl každý ušetřit, kdyby Adam vozil Bohouše? Která varianta by byla nejspravedlivější? Adam cestuje sám a Bohouš cestuje také sám. Jelikož Adam má cestu kolem Bohouše, tak ho za nějaký poplatek vezme. V zásadě by na spolujízdě měli ušetřit všichni účastníci jízdy. Je zde velmi důležitá vzájemná dohoda osob, na jakých podmínkách se domluví.

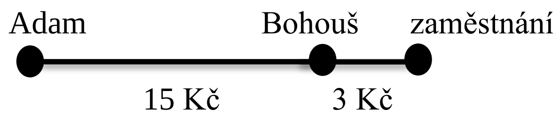
Řešení s jedním autem:

Adam bude chytrý, a když nabere Bohouše, nechá si od něj zaplatit 6 Kč, tedy tu částku, která by Bohouše stála, kdyby jel svým autem. Adam tedy ušetří 6 Kč, Bohouš neušetří nic, ale neopotřebovává si auto a neriskuje případné nabourání svého auta, jen je závislý na Adamovo čase.



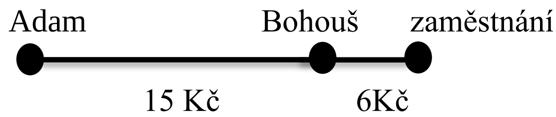
(Adam zaplatí celou první část jízdy a Bohouš zaplatí celou druhou část jízdy.)

Adam zaplatí za cestu, než nabere Bohouše 12 Kč a poté co Bohouše nabere, se o zbývající částku za cestu rozdělí stejným dílem. Adam tedy zaplatí 15 Kč a Bohouš jen 3 Kč. Každý ušetří polovinu částky za zbývající vzdálenost. Je to spravedlivé rozdělení nákladů na cestu? (Adam jede 2/3 sám, náklady si tedy platí sám. Náklady na zbývající cestu si spolupracovníci rozdělí.) Pro Bohouše je to velmi výhodné.

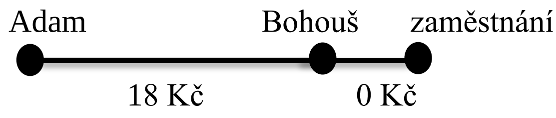


(Adam zaplatí celou první část jízdy a ještě polovinu druhé části jízdy, Bohouš zaplatí jen polovinu druhé části jízdy.)

Adam zaplatí jen 15 Kč, tedy o polovinu méně z jejich společné jízdy. Bohouše nechá zaplatit ale stejnou částku, jako kdyby jel sám. Bohouš neušetří nic a Adam na jízdě ještě vydělá.



Adam zaplatí náklady za celou cestu, tedy 18 Kč a Bohouš nebude platit nic. Tato varianta je nejvýhodnější pro Bohouše, ale nejméně výhodná pro Adama. Mohl by na tuto variantu Adam přistoupit?



V jakém poměru si oba muži rozdělí částku za společný úsek jízdy, aby to bylo spravedlivé?

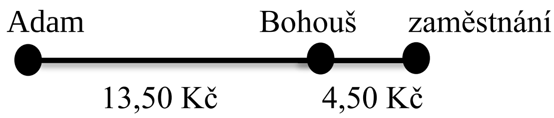
Adam jede celou trasu, tedy $\frac{3}{3}$ cesty. Bohouš jede jen $\frac{1}{3}$ cesty. 6 Kč se bude rozdělovat v poměru 3:1.

$6\ \text{Kč} : 4 = 1{,}50\ \text{Kč} \cdot 3 = 4{,}50\ \text{Kč}$

$6\ \text{Kč} : 4 = 1{,}50\ \text{Kč} \cdot 1 = 1{,}50\ \text{Kč}$

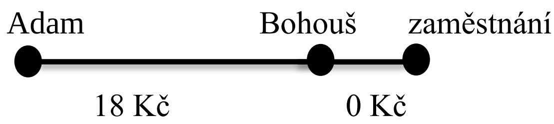
Adam: $12\ \text{Kč} + 1{,}50\ \text{Kč} = 13{,}50\ \text{Kč}$

Bohouš: $4{,}50\ \text{Kč}$

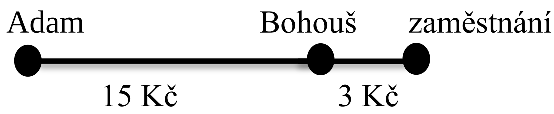


Řešení se dvěma auty:

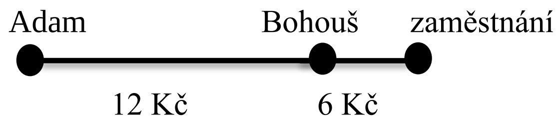
Adam pojede k Bohoušovi svým autem. Tento úsek cesty si náklady platí sám a činí 12 Kč. U Bohouše si zaparkuje auto a od Bohouše pojedou Bohoušovo autem. Bohouš si nechá cestu buďto zaplatit celou, takže Adama to bude stát 6 Kč, neušetří nic, ale zbývajících 6 km nepojede svým autem, nebude ho opotřebovávat.



Nebo Adam u Bohouše přesedne opět do Bohoušovo auta. Zbývající úsek cesty budou platit stejným dílem. Tedy Adam ke svým 12 – ti Kč zaplatí ještě 3 Kč a Bohouš zaplatí už jen 3 Kč.



Další způsob je následující. Adam jede k Bohoušovi svým autem, za cestu zaplatí 12 Kč. Poté přesedne do Bohoušovo auta a zbývající úsek bude platit Bohouš, Bohouš tedy zaplatí 6 Kč.



Závěr:

Jaké bude nejideálnější řešení? To záleží na mnoha faktorech. Bude záležet na konkrétní situaci, co komu více vyhovuje. Spolujízda nese ten faktor, že musí jet oba spolu, tudíž jim to nemusí pokaždé vyhovovat. Každý může mít po práci ještě své zařizování nebo mohou mít dokonce oba jinou pracovní dobu, mohou dělat přesčasy. Záleží čistě jen na jejich domluvě. V tomto příkladu stojí každého pána jízda do zaměstnání relativně málo peněz. Bude zajímavější brát v úvahu spíše spolujízdu na delší vzdálenosti a ve více lidech, kde už finanční částka a rozdělování nákladů bude pozoruhodnější. V tomto příkladu mají oba také stejné náklady na jízdu, což obvykle v reálním životě nebývá. Každé auto má trochu jinou spotřebu.

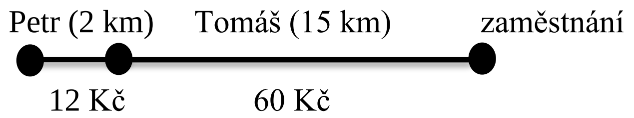
Pro tento příklad stojí také za zvážení, jestli mají možnost dostat se do práce i jinými dopravními prostředky, jako je městská hromadná doprava nebo vlaková doprava.

Pokud bychom zůstali u spolujízdy jen dvou lidí, stojí více za zvážení spolujízda, ve které se jezdí vetší vzdálenost a každé auto má jiné náklady na provoz.

<u>Další varianta příkladu</u>:

Každý den jezdím vlastním autem do práce. Také moji spolupracovníci, kteří bydlí na stejné trase, jezdí každý svým autem. Petr a Tomáš jezdí každý svým autem, po stejné trase, ale ze dvou různých míst. Petra stojí jedna cesta do práce 102 Kč, Tomáše 60 Kč. Náklady na 1 km jízdy jsou různé, Petra stojí 1 km jízdy 6 Kč, Tomáše jen 4 Kč.

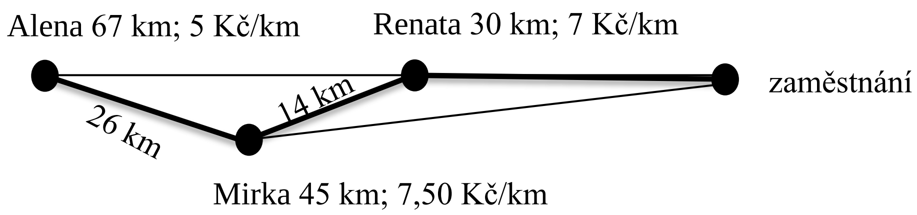
Otázka: **Bylo by možné snížit náklady na dopravu do zaměstnání u spolupracovníků, pokud by jezdili Petr a Tomáš spolu? Kolika způsoby si mohou mezi sebou rozdělit náklady na cestu? Jaké rozdělení bude nejspravedlivější?**



Obměna příkladu pro více lidí:

Ještě zajímavější by byla spolujízda třech a více osob, ještě pokud nejedou všichni po stejné trase.

Alena, Mirka i Renata jezdí do práce každá sama vlastním autem. Snížily by se u některé z žen náklady na dopravu, kdyby se připojila k jiné ženě? Alena přišla s nápadem spolujízdy jako první, rozhodla se tedy po cestě nabírat Mirku a Renatu. Ušetří Alena nějaké peníze, bude pro ni spolujízda výhodnější? Navrhněte ideální řešení spolujízdy. Jak si mezi sebou popřípadě rozdělí náklady na cestu?



5 FINANČNÍ GRAMOTNOST

5.1 Příklad 1

Z hrubé mzdy bylo pracovníkovi sraženo na daních 864 Kč, což představovalo 21,6 % jeho hrubé mzdy. Jak velká byla hrubá mzda pracovníka? Jak velká částka mu byla vyplacena? ([1], str. 31)

Aktuální přepsání pomocí zdroje [20].

Z hrubé mzdy byla pracovníkovi sražena daň z příjmu 5500 Kč. Sociální a zdravotní pojištění činí 3035 Kč. Dohromady to v procentech představovalo 31,1% jeho hrubé mzdy. Jak velká byla hrubá mzda pracovníka? Jak velká částka byla pracovníkovi vyplacena, když sleva na poplatníka je 2070 Kč?

Musíme vypočítat, kolik představuje 100%, když částka 8236 Kč je 31,1%.

$$\begin{array}{rl} \uparrow\ 8236\text{ Kč}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 31{,}1\%\ \uparrow \\ x\text{ Kč}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 100\% \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x}{8236} = \frac{100}{31{,}1}$$

$$x = \frac{823600}{31{,}1}$$

$$x \doteq \mathbf{26467Kč}$$

Hrubá mzda pracovníka je 26467 Kč. (Poznámka: Tato částka je průměrnou hrubou mzdou pro rok 2015. ([21])

Jak velká částka mu byla vyplacena? Ptáme se na čistou mzdu. Tedy od hrubé mzdy musíme odečíst daňovou povinnost, zdravotní a sociální pojištění a přičteme slevu na poplatníka:

$$26467\text{ Kč} - 8236\text{ Kč} + 2070\text{ Kč} = \mathbf{20301Kč.}$$

Pracovníkovi byla vyplacena částka 20301Kč, jedná se o čistou mzdu.

5.2 Příklad 2

Banka nabízí u svého spořicího účtu roční úrokovou míru 1,55%. Na účet plánuješ vložit zděděných 160 tisíc korun. Daň z úroku je 15%. Kolik korun budeš mít na účtu po roce? ([11], str. 107)

Zděděné peníze vynásobíme roční úrokovou mírou.

$$160000 \text{ Kč } \cdot 0{,}0155 = 2480 \text{ Kč}$$

Tato částka musí být zdaněna 15%, z 2480 Kč se odepíše jako úrok.

Tedy 15% = 0,15

$$2480 \text{ Kč } \cdot 0{,}15 = 372 \text{ Kč.}$$

Částka 372 Kč činí daň z úroku, kterou musíme odečíst od roční úrokové míry.

$$2480 \text{ Kč} - 372 \text{ Kč} = 2108 \text{ Kč}$$

Nyní musíme přičíst ke zděděné částce + 2108 Kč.

$$160000 \text{ Kč} + 2108 \text{ Kč} = 162108 \text{ Kč.}$$

Po roce bude na účtu 162108 Kč.

Poznámka:

S účtem sjednaným u různých bank jsou v drtivé většině spojeny ještě další poplatky. Je otázkou, zda-li po roce nebude na učte finální částka nižší než na začátku, při vkladu.

6 GEOMETRIE

6.1 Příklad 1

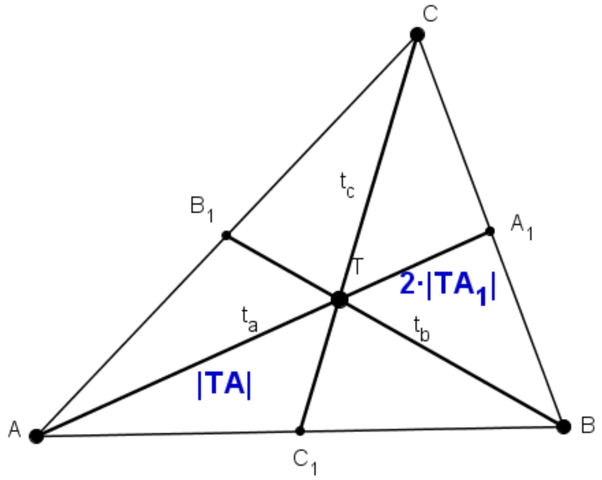
Pan Starý, pan Novák a pan Skružný se rozhodli, že si postaví každý dům. Chtějí začít stavět společně. Rozhodli se, že jim bude stačit jen jedna studna na vodu, ale podmínkou je, aby k ní měli všichni stejně daleko. Kde si mohou postavit domy, aby každý měl ke studni stejně daleko?

---

1. způsob řešení

Máme přesně dané místo na studnu, tedy studna už je vybudovaná a okolo se budou stavět ve stejné vzdálenosti domy.

Je potřeba, aby byla studna ve stejné vzdálenosti od všech domů. Jak této skutečnosti můžeme dosáhnout?
Využijeme znalostí z geometrie, nejprve o těžnicích a těžišti.
Těžnice je úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníku se středem protější strany. Každý trojúhelník má tři těžnice. (Coufalová, [5]) Těžnice libovolného trojúhelníku se vždy protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá **těžiště** trojúhelníku. (Coufalová, [5]) Pro polohu těžiště platí, že jeho vzdálenost od vrcholu je dvakrát větší než vzdálenost od středu protější strany. (Binterová, [2]) Tedy, těžiště dělí těžnice v poměru 2:1.



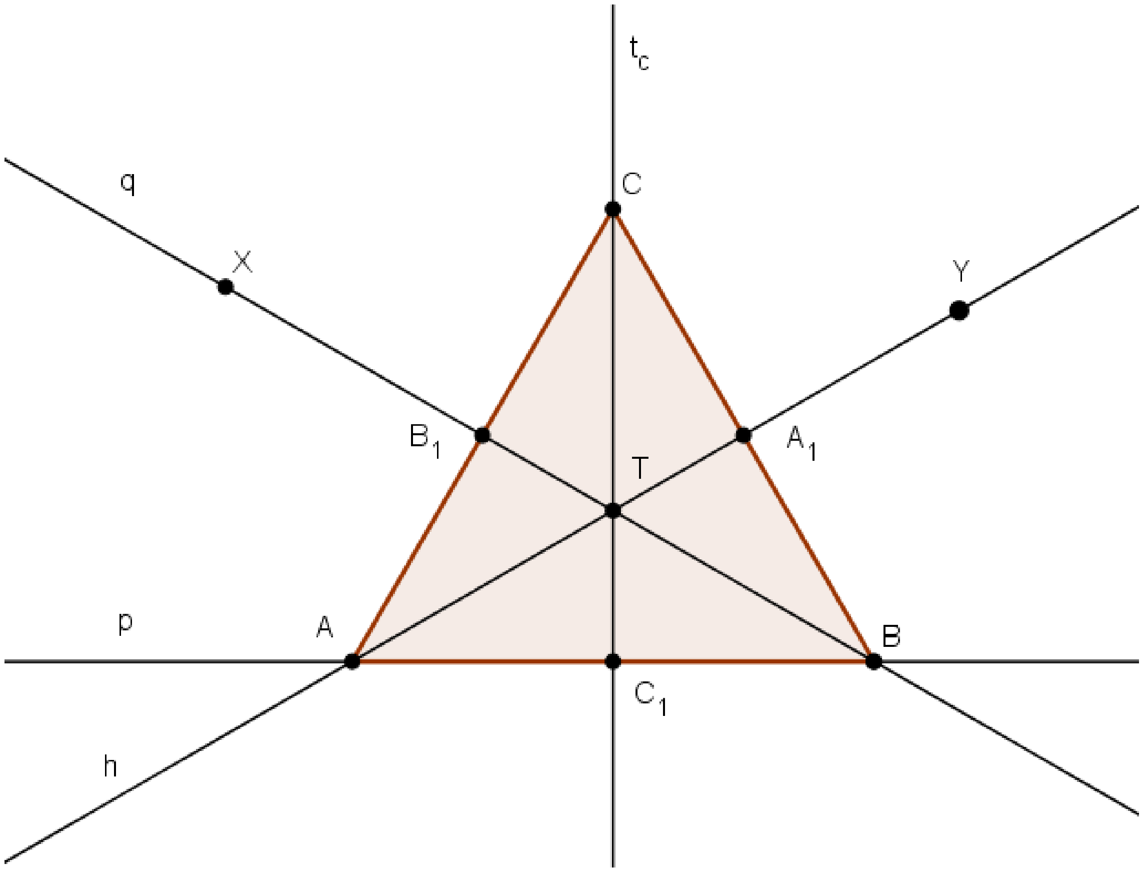
Co můžeme v tuto chvíli říct o studni?
Studna může být těžištěm trojúhelníku. Jak narýsujeme trojúhelník, když známe pouze jeho těžiště? O jaký trojúhelník se bude v našem příkladu jednat? Aby bylo od všech domů ke studni stejně daleko, musíme narýsovat pouze rovnostranný trojúhelník. Kdybychom narýsovali jakýkoliv jiný libovolný trojúhelník, už by nesplňoval podmínku ze zadání příkladu, tedy, že musí být domy ve stejné vzdálenosti od studně.

a) Těžiště rovnostranného trojúhelníku

Známe těžiště, víme, že všechny tři těžnice se v trojúhelníku protínají v těžišti a víme, že těžiště dělí těžnice v poměru 2:1 tak, že vzdálenost těžiště od vrcholu je dvakrát větší než vzdálenost těžiště od středu protější strany.
Nyní si narýsujeme libovolně jednu těžnici, zvolíme její velikost a postupnou konstrukcí narýsujeme rovnostranný trojúhelník. Tedy $t_c = 6cm,\ |TC| = 2 \cdot |TC_1|$, $|TC| = 4$cm a $|TC_1| = 2$cm.
Protože víme, že těžnice spojuje vrchol se středem protější strany, tak C_1 je zároveň střed strany c. Narýsujeme přímku kolmou na t_c, kde $C_1 \in p$. Na přímce p budou ležet zbývající vrcholy trojúhelníku.

Zápis konstrukce:

1. $t_c;\ t_c = 6cm, |TC| = 4cm, |TC_1| = 2cm$
2. $p; p \perp t_c;\ C_1 \in p$
3. $k;\ k(T, r = 4cm)$
4. $A, A \in p \cap k$
5. $B, B \in p \cap k$
6. $q; q = \leftrightarrow TB$
7. $l; l(T, r = 2cm)$na $\rightarrow TX,\ B_1,; B_1 \in q \cap l$
8. $t_b = |BB_1|$
9. $h; h = \leftrightarrow TA$
10. $m; m\ (T; r = 2cm)$na $\rightarrow TY,\ A_1,; A_1 \in h \cap m$
11. $t_a = |AA_1|$
12. trojúhelník ABC



Řešením není jen toto geometrické zobrazení, ale velikost všech těžnic může být libovolná. Ve skutečnosti může být nekonečně mnoho rovnostranných trojúhelníků. Ovšem v praxi nemůžeme mít například malé velikosti těžnic, protože dům má jistou plochu a největší problém bude s rozmístěním domů do vrcholů pomyslného rovnostranného trojúhelníku. Ve stavitelství prakticky nereálné.

Otázka:

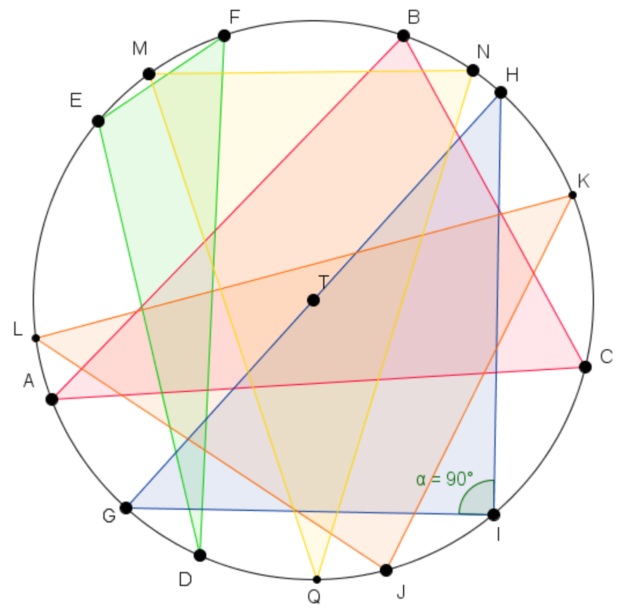
Bude těžiště fungovat i u ostatních libovolných trojúhelníků? Samozřejmě, sestrojit těžiště lze u libovolného trojúhelníku, ale pokud nebude rovnostranný, tak nebudeme mít ze všech vrcholů k těžišti stejně daleko. Musíme využít jiných znalostí z geometrie, konkrétně, kružnice opsanou trojúhelníku.

b) Kružnice opsaná trojúhelníku

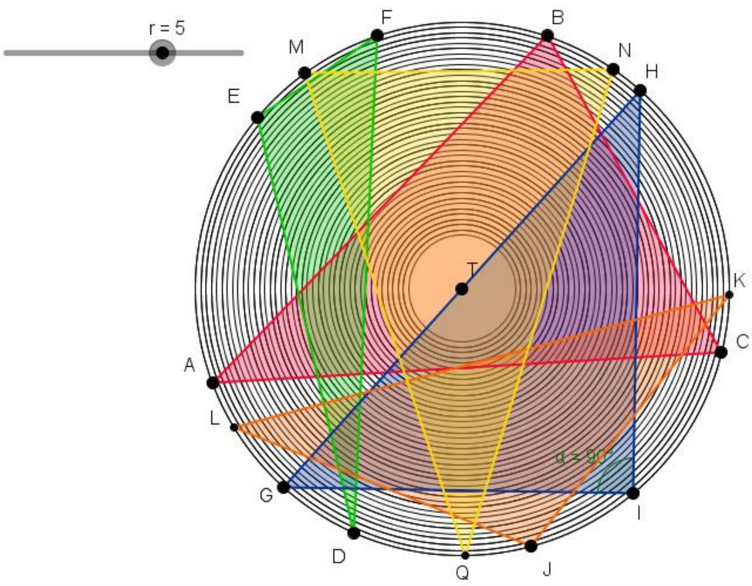
Požadavek na stejnou vzdálenost domu od studny stále přetrvává. Co bude tvořit množina všech bodů, splňujících náš nárok, že musí být ve stejné vzdálenosti od studny? Množina tvoří kružnici opsanou.

Kružnice, která prochází všemi třemi vrcholy trojúhelníku, se nazývá **kružnice opsaná trojúhelníku**. A střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran trojúhelníku. (Binterová, [4])

V našem příkladu střed kružnice známe, stačí tedy zvolit libovolný poloměr kružnice a poté kružnici narýsovat. Na této kružnici budou ležet vrcholy našeho libovolného trojúhelníku. Vrcholy představují domy, od kterých bude stejně daleko ke studni.



Řešením není jen toto geometrické zobrazení, ale můžeme si zvolit libovolnou velikost poloměru kružnice opsané. Ve skutečnosti může být nekonečně mnoho obecných trojúhelníků. Tento geometrický postup již není tak silný, dovoluje nám jiné rozmístění domů, přijatelnější, než při těžišti rovnostranného trojúhelníku.



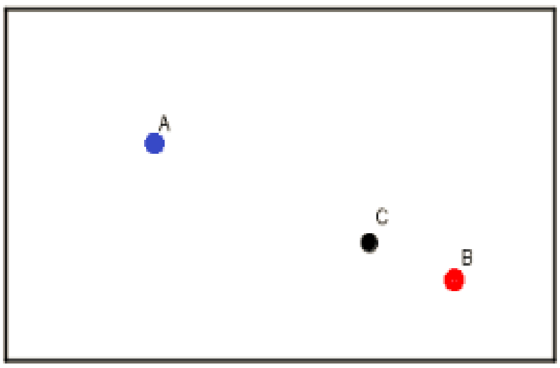
.

2. způsob řešení

Ve většině případů jsou pevně vymezené pozemky na stavbu domů a až poté se hledá a vykopává studna na onom pozemku. Studnu má obvykle každý dům vlastní. Mohou nyní nastat různá rizika, která budou bránit realizaci studny – podzemní voda v oblasti pozemku vůbec být nemusí, v oblasti může být málo vody nebo může být kontaminovaná spodní voda. Bylo by nepraktické a nereálné stavět domy, podle požadavku na studnu.

6.2 Příklad 2

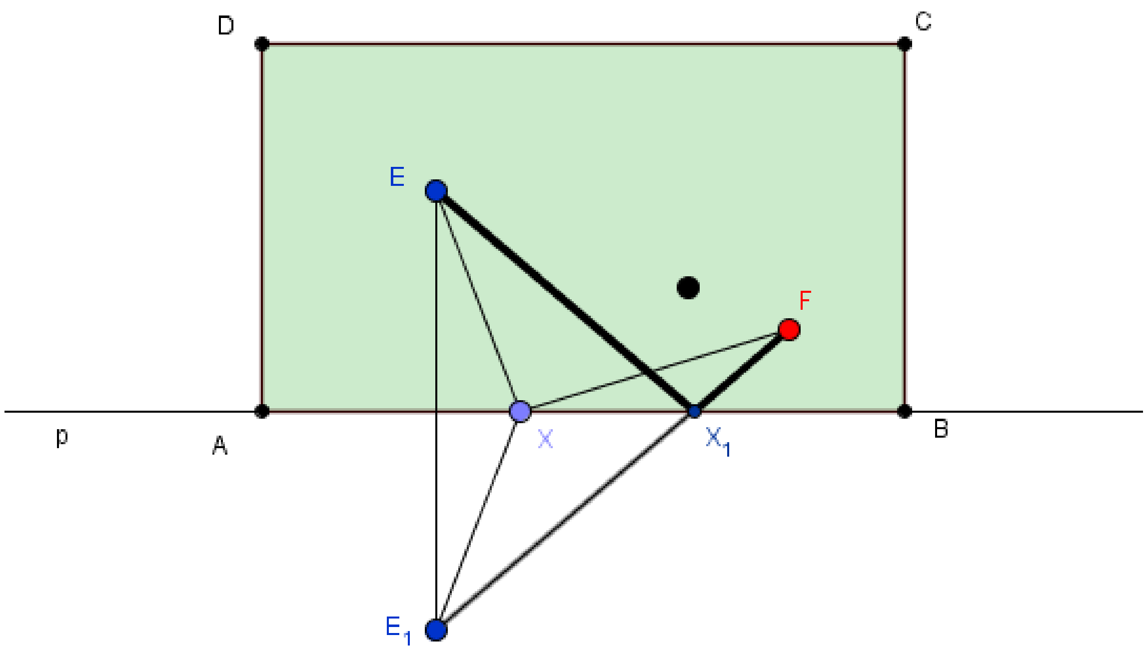
Pan Šedivý hrál s panem Málkem kulečník. Při této hře se pan Šedivý rozhodl určit dráhu kulečníkové koule z bodu A do bodu B pomocí dvou odrazů od kraje kulečníku, neboť přímému zásahu bránila koule stojící v bodě C (viz. obrázek). Nakreslete dráhu této koule, víte-li, že úhel dopadu koule na okraj kulečníku se rovná úhlu jejího odrazu. Pokuste se najít dvě řešení. ([14], str. 49)



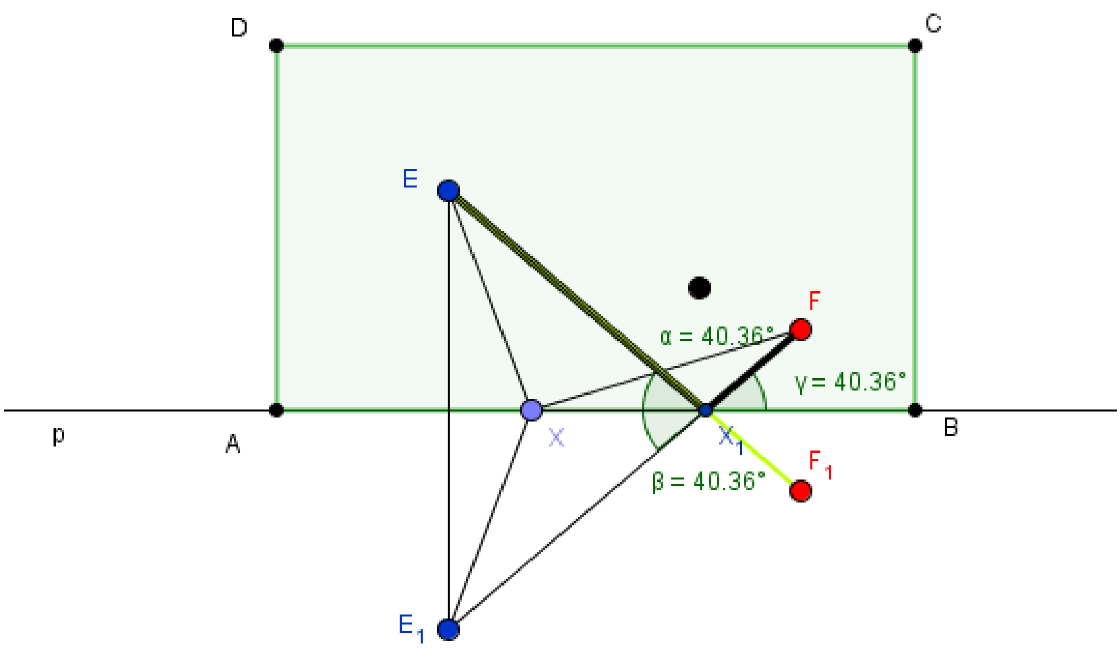
Tento příklad je z teoretické části podložen na základě informací z literatury [9].

Jak najdu bod, od kterého se má koule odrazit, pokud ji chceme dostat do konkrétního bodu, aniž bychom znali přesně daný úhel?
V tomto příkladu využíváme znalost osové souměrnosti.
Víme, že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu. Kolik muže být možných řešení? Modrou kouli můžeme v osové souměrnosti přenést přes všechny 4 strany kulečníku a to samé provedeme s červenou koulí. Celkem může nastat mnoho způsobů, jak hrát, abychom nestrefili černou kouli. Jsou ale všechny způsoby přes kombinace osových souměrností u koulí proveditelné? Následné ověření bude zrealizované pomocí matematického dynamického programu GeoGebra, kde bude využito nástroje osová souměrnost.
Příklad bude demonstrovaný pomocí Heronovy úlohy, která povede k ideálnímu řešení uvedeného příkladu. Tuto úlohu využil Heron k tomu, aby odvodil zákon odrazu světla na rovinném zrcadle nebo vodní hladině. Analogicky tuto úlohu využijeme i pro situaci s kulečníkem.

Úkolem je strefit se pomocí modré koule E do červené koule F aniž by se rozpohybovala černá koule mezi nimi. Koule E se musí odrazit od hrany kulečníkového stolu, tento bod označíme X, tak aby trajektorie z bodu E do bodu X a z bodu X do bodu F měla minimální délku.
V osové souměrnosti zobrazíme bod E_1 jako obraz bodu E. Na přímce p zvolíme libovolně bod X, tak že platí $|\mathrm{EX}| = |\mathrm{E}_1\mathrm{X}|$.
Vzniká rovnoramenný trojúhelník a platí: $s = |EX| + |XF| = |\mathrm{E}_1\mathrm{X}| + |XF| \geq |\mathrm{E}_1\mathrm{F}|$.
Úsečky $|\mathrm{E}_1\mathrm{X}|$, $|XF|$ a $|\mathrm{E}_1\mathrm{F}|$ splňují trojúhelníkovou nerovnost.
Dráha střely koule bude nejkratší jen pro bod X_1, který je průsečíkem úsečky $\mathrm{E}_1\mathrm{F}$ s hranou kulečníkového stolu – přímkou p.



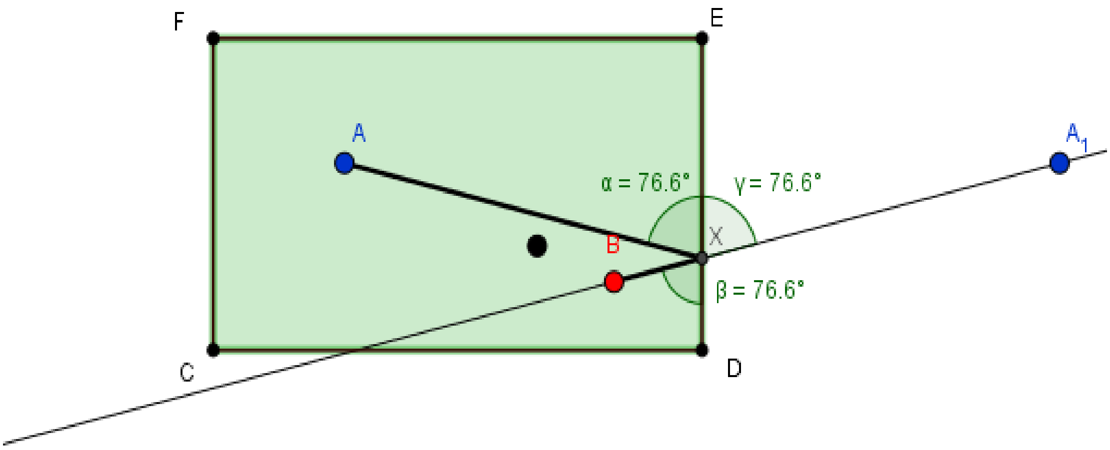
Bod X_1 můžeme získat i jiným způsobem. Jestliže přeneseme v osové souměrnosti bod F podle hrany kulečníkového stolu – přímky p.



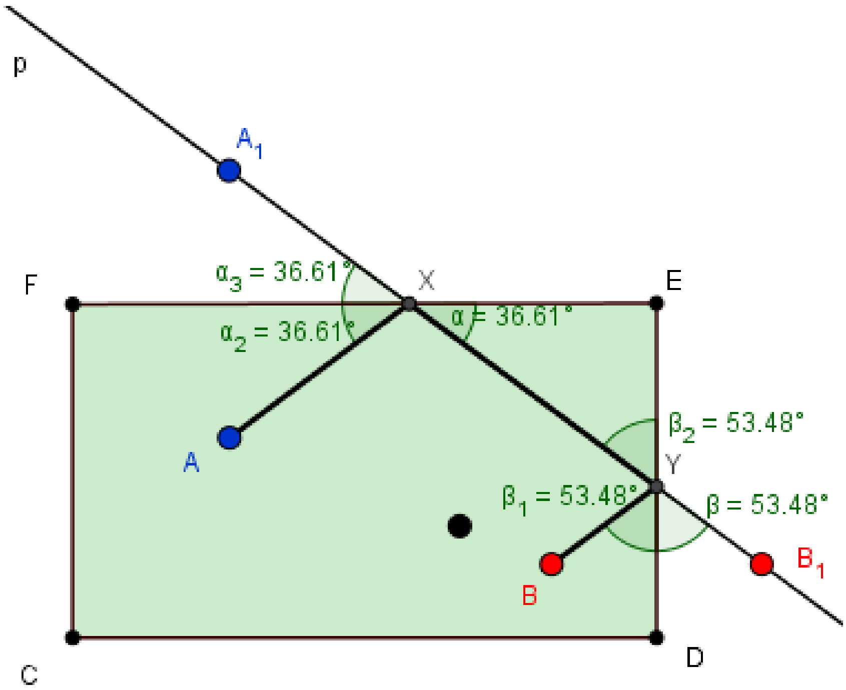
Pokud jsou trojúhelníky EE_1X_1 a FF_1X_1 rovnoramenné, tak jsem zjistili, že pro bod X_1, který má minimální součet $|EX_1| + |F_1X|$, přímky EX_1 a X_1F svírají stejný úhel.

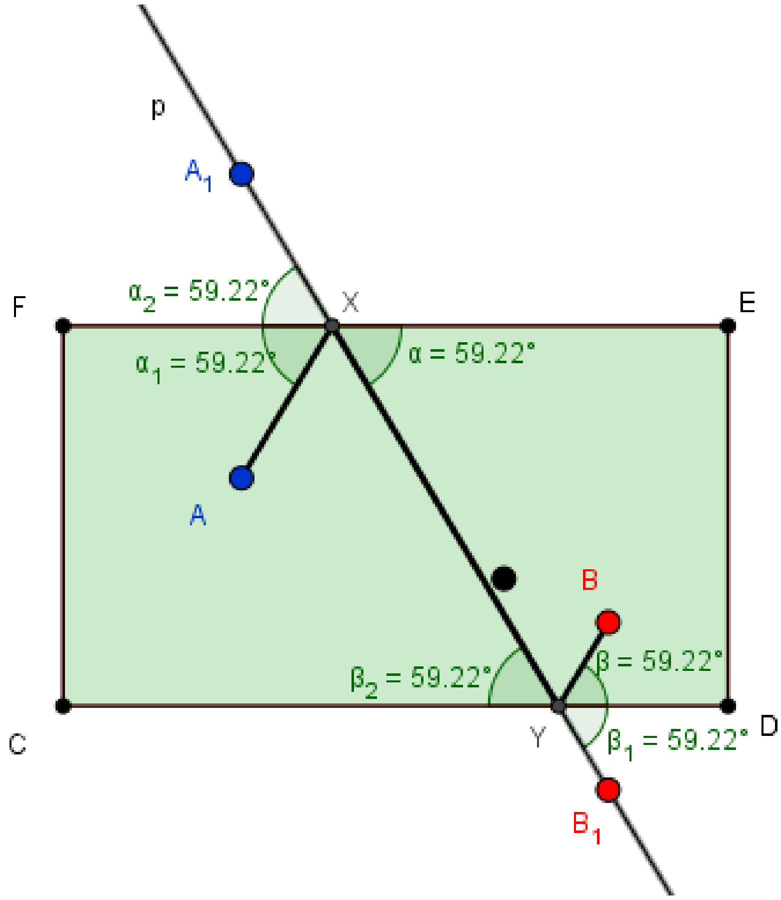
Na následujících obrázcích budou uvedeny pomocí programu Geogebra různé možnosti, jak hrát, aniž bychom nestrefili černou kouli. Bude využito jednoho až čtyř odrazů.

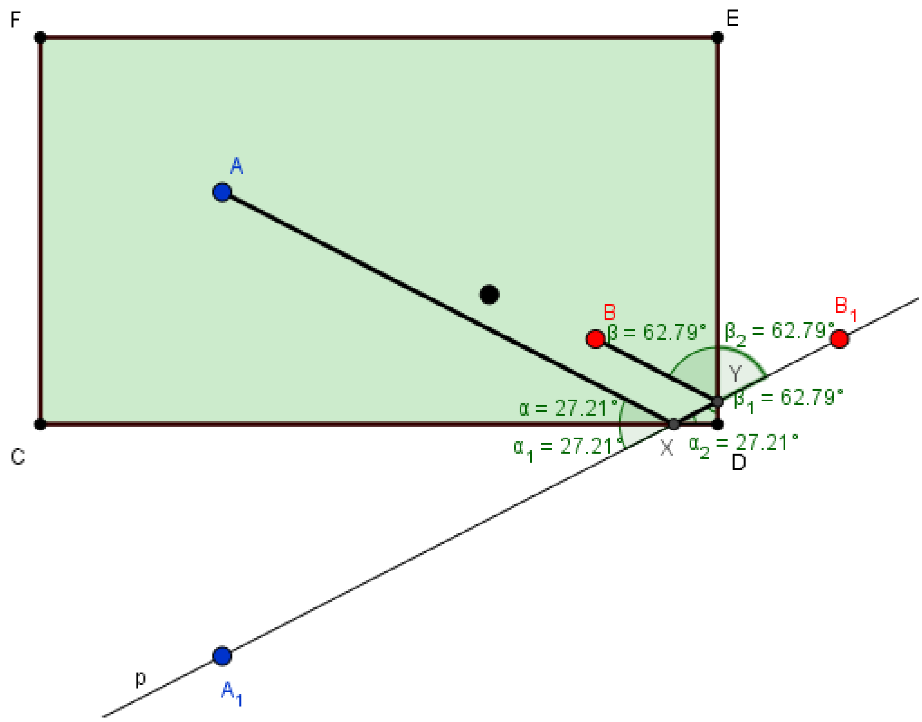
Jeden odraz



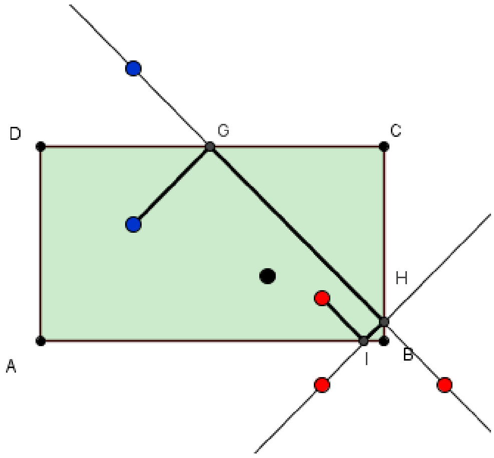
Dva odrazy

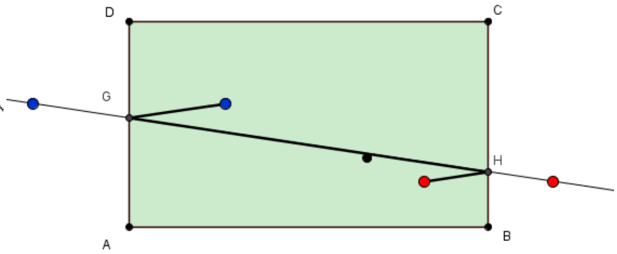


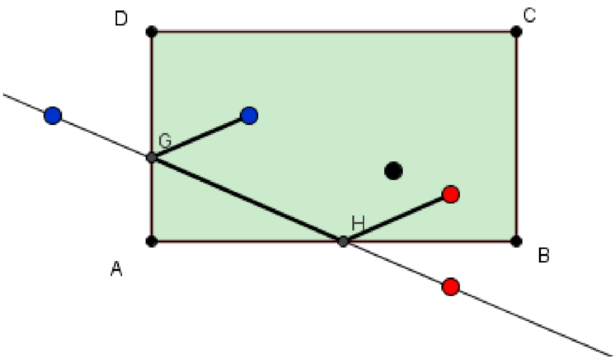

p
A1
α2 = 59.22°
X
F
E
α1 = 59.22°
α = 59.22°
A
B
β = 59.22°
β2 = 59.22°
C
Y
β1 = 59.22°
D
B1

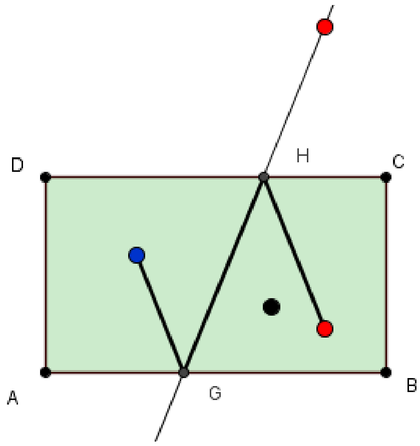

F
E
A
B
β = 62.79°
β2 = 62.79°
B1
Y
β1 = 62.79°
α = 27.21°
α1 = 27.21°
X
α2 = 27.21°
C
D
p
A1

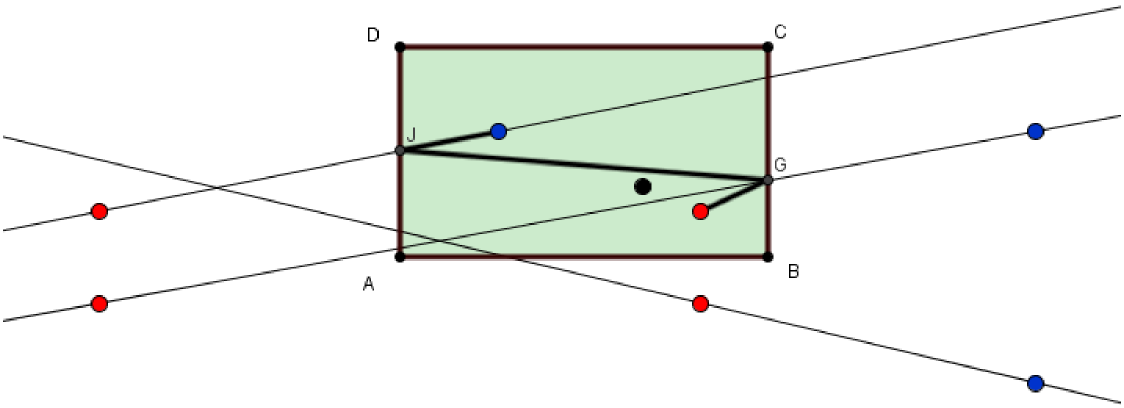
Další možné způsoby, jak hrát kouli přes dvě hrany (zjednodušený obrázek).



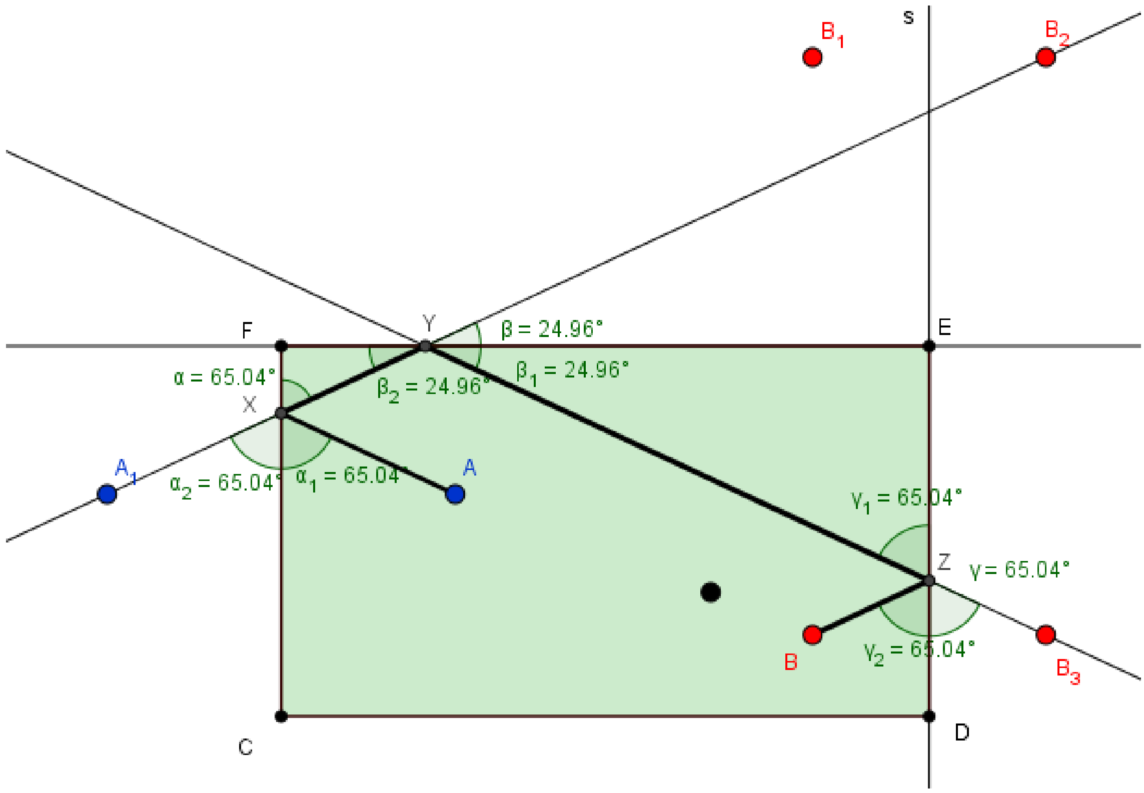




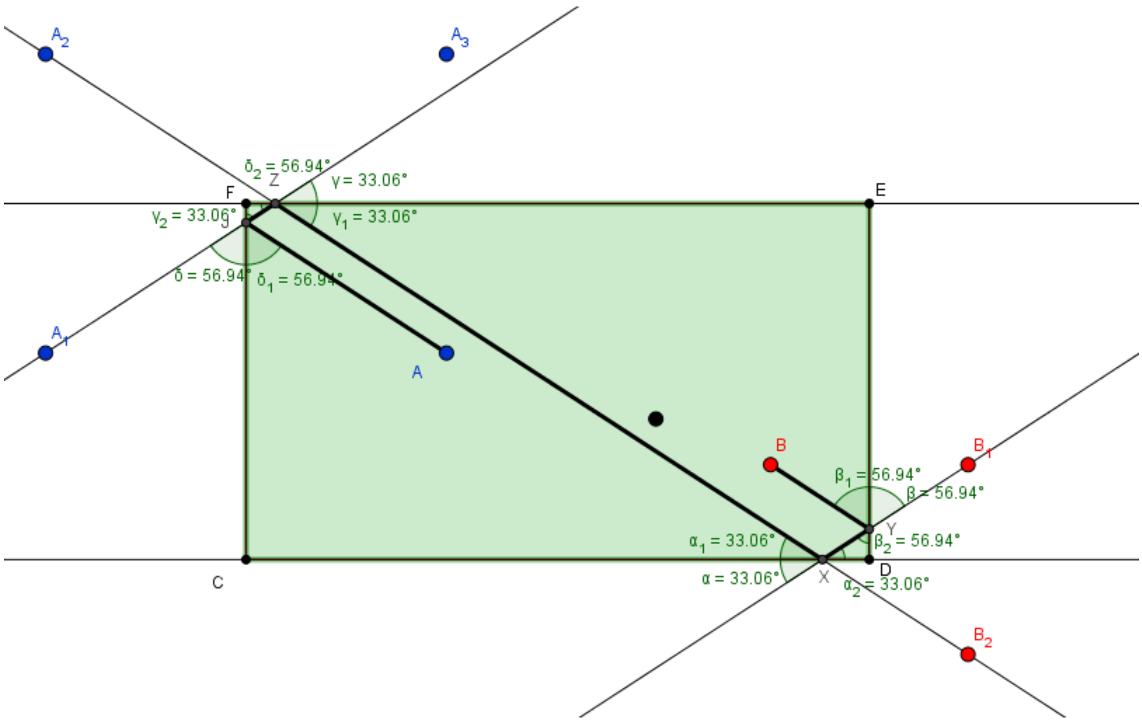




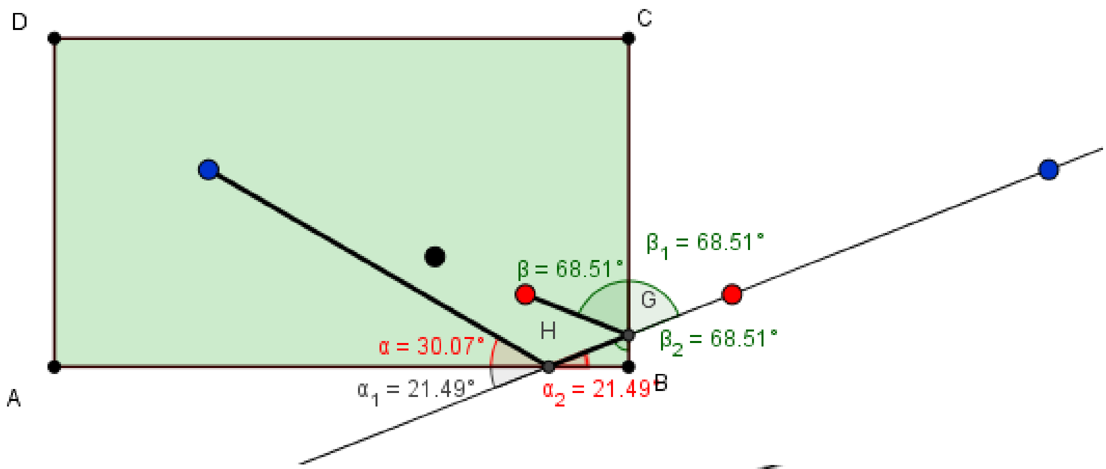
Tři odrazy

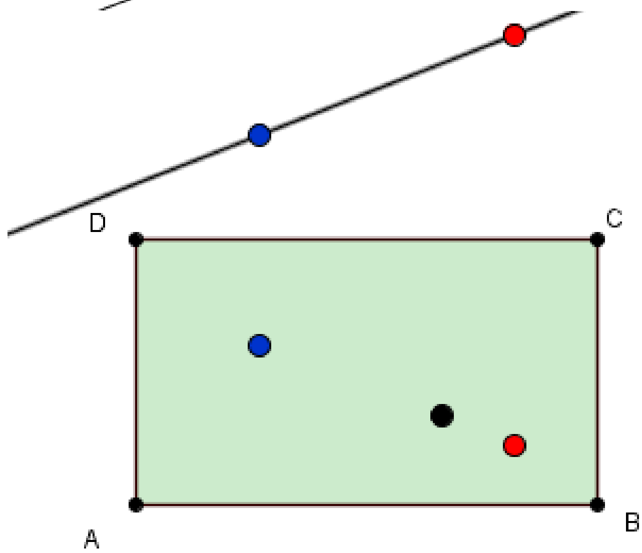


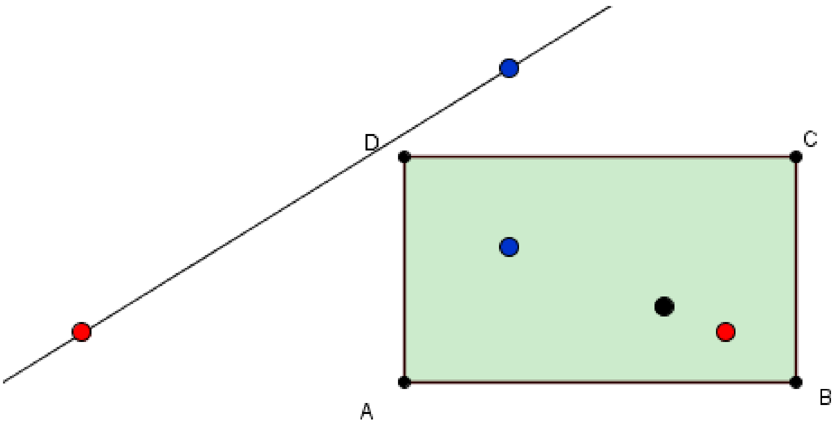
Čtyři odrazy



V úvodu úlohy jsme poznamenávali, jestli jsou všechna zobrazení bodů v osové souměrnosti proveditelná tak, abychom nestrefili černou kouli, a úhel odrazu se rovná úhlu dopadu. Nyní uvedeme způsob, kdy tyto podmínky platit nebudou.







7 TESTOVACÍ ÚLOHY

Tato část práce je věnovaná podrobnému rozboru vybraných úloh pro testování žáků. Jedná se o tři aplikační úlohy. První úloha je převzata z učebnice O. Odvárko – J. Kadleček: Matematika pro 6. ročník ZŠ. Při tvorbě druhé úlohy jsem se inspirovala v publikaci Willers, M.: Algebra bez (m)učení a poslední úloha je upravená a zjednodušená verze druhé úlohy.

7.1 Příklad 1

Pan Zajíc chová králíky. Přečetl si, že pro ně potřebuje výběh o výměře $20\ \mathrm{m}^2$. Udělá ho ve tvaru obdélníku, na oplocení použije čtvercové desky o délce strany 1 metr.

a) Zapiš všechny možnosti pro rozměry výběhu. Dělej si náčrtky a připisuj ke stranám výběhu jejich délky.

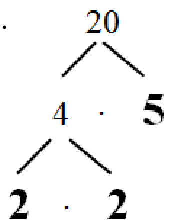
b) Zapiš rozměry výběhu, pro který spotřebuje nejméně desek. Kolik jich bude?

([10], str. 65)

Část a) Různé způsoby řešení:

<u>1. způsob</u>: Nalezení všech dělitelů čísla 20 a jejich vhodnými kombinacemi, pomocí náčrtků situace, nalézt rozměry výběhu.

Jak nalezneme všechny dělitele čísla 20? Využijeme k tomu rozklad čísla na součin prvočinitelů.



Máme tři možnosti pro počet 2 – žádnou a jednu nebo dvě.

Máme dvě možnosti pro počet 5 – žádnou a jednu.

$3 \cdot 2 = 6$ Celkem bude 6 dělitelů.

Dělitele čísla 20: $1, 2, 4, 5, 10, 20$.

Jak budou vypadat číselné kombinace rozměrů?

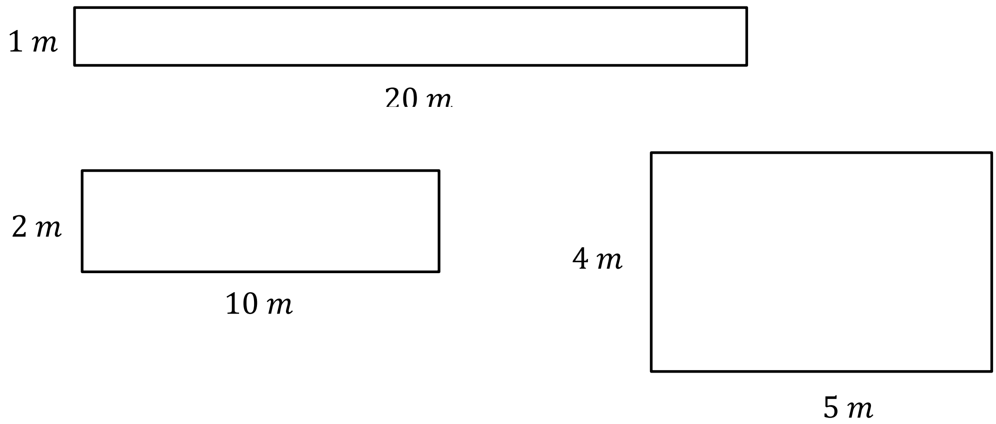
$1, 2, 4, 5, 10, 20$

$1 - 20$ nebo $20 - 1$

$2 - 10$ nebo $10 - 2$

$4 - 5$ nebo $5 - 4$

Příklady náčrtků:



Mohou se vyskytnout náčrtky v obráceném pořadí rozměrů, i tato řešení jsou správná.

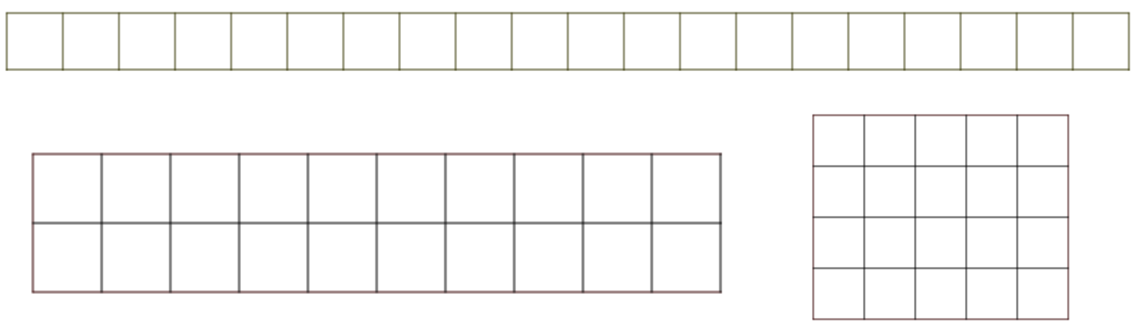
<u>2. způsob</u>: Využití vzorce pro obsah obdélníku $S = a \cdot b$.

Známe obsah výběhu, ten je $20\ m^2$. Stačí nám za jednu neznámou dosadit první rozměr a druhý dopočítáme.

$$S = a \cdot b$$
$$20\ m^2 = 4 \cdot b$$
$$b = 20 : 4$$
$$b = 5\ m$$

Tímto postupem bychom našli další vhodné kombinace rozměrů.

<u>3. způsob</u>: Grafické znázornění pomocí čtvercových desek.



Část b) Různé způsoby řešení:

1. způsob: Logická úvaha.

Z grafického řešení v předchozí části úlohy mohou žáci vydedukovat závislost mezi volbou rozměrů a velikostí obvodu. Čím budou rozměry výběhu menší, tím se spotřebuje méně desek na oplocení. Tudíž, nejvhodnější kombinace rozměrů je $4\ x\ 5$ a spotřebuje se 18 desek.

Pokud se v části a) žáci nepokusili nakreslit náčrtky, mohou je zpracovat nyní ve stejné podobě jako v první části.

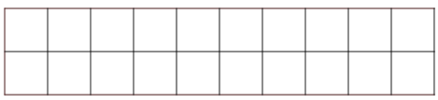
2. způsob: Využití vzorce pro obvod obdélníku $o = 2 \cdot (a + b)$.

Za neznámé a a b dosadíme námi zvolené rozměry z první části úlohy.

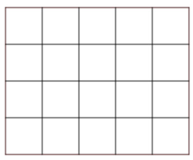
$o = 2 \cdot (a + b)$	$o = 2 \cdot (a + b)$	$o = 2 \cdot (a + b)$
$o = 2 \cdot (1 + 20)$	$o = 2 \cdot (2 + 10)$	$o = 2 \cdot (4 + 5)$
$o = 42$ desek	$o = 24$ desek	$o = 18$ desek

3. způsob: Mechanické sečtení u grafického znázornění pomocí čtvercových desek.

$1 + 20 + 1 + 20 = 42$ desek



$2 + 10 + 2 + 10 = 24$ desek



$4 + 5 + 4 + 5 = 18$ desek

7.2 Příklad 2

Jan má 42 dlaždic, kterými si chce vydláždit terasu. Získal je z výprodeje, a jelikož se přestaly vyrábět, další dokoupit nemůže. Každý kus je čtverec o straně 1 stopa (asi 30 cm). Jan je šetřivý a tak chce na terasu spotřebovat všechny dlaždice.

a) Jaké mohou být všechny možné rozměry jeho terasy?

b) Jan chce mít na terase posezení. Bude vhodná i terasa o rozměru 1 x 42 dlaždic? Jaké rozměry jsou pro tyto účely vhodné? (svoji odpověď zdůvodni)

c) Jaká bude celková výměra terasy?

d) Janova manželka si přeje po polovině obvodu terasy vysázet keříky růží. Jan jí chce vyhovět, ale nechce za růže utratit moc peněz. Jaký rozměr bude mít terasa, okolo které bude potřeba co nejméně keříků. Jaký bude její obvod?

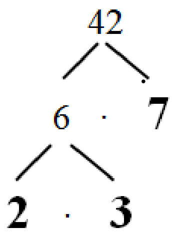
Inspirace z literatury: ([16],str.30)

Druhá úloha je založená na stejném principu postupů, které byly zvoleny v první úloze.

Část a) Různé způsoby řešení:

<u>1. způsob</u>: Nalezení všech dělitelů čísla 42 a jejich vhodnými kombinacemi, pomocí náčrtků situace, nalézt rozměry výběhu.

Jak nalezneme všechny dělitele čísla 42? Využijeme k tomu rozklad čísla na součin prvočinitelů.



Máme dvě možnosti pro počet 2 – žádnou a jednu.
Máme dvě možnosti pro počet 3 – žádnou a jednu.
Máme dvě možnosti pro počet 7 – žádnou a jednu.

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Celkem bude 8 dělitelů.

Dělitele čísla 42: $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$.

Jak budou vypadat číselné kombinace dlaždic?

$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$

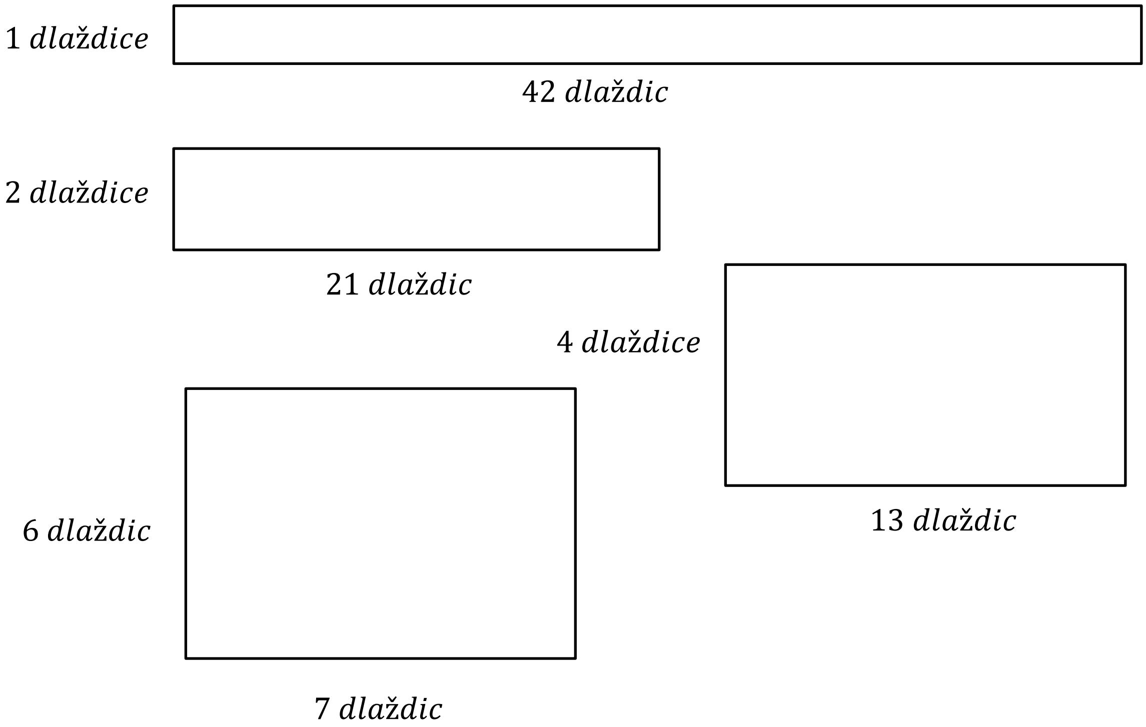
$1 - 42$ nebo $42 - 1$

$2 - 21$ nebo $21 - 2$

$3 - 14$ nebo $14 - 3$

$6 - 7$ nebo $7 - 6$

Příklady náčrtků:



Mohou se vyskytnout náčrtky v obráceném pořadí počtu dlaždic, i tato řešení jsou správná.

<u>2. způsob</u>: Využití vzorce pro obsah obdélníku $S = a \cdot b$.

Sice neznáme obsah terasy, ale víme, že obsah S se rovná obsahu 42 dlaždic.
Obsah S nahradíme číslem 42. Stačí nám za jednu neznámou dosadit počet dlaždic, kterým je číslo 42 dělitelné a druhou dopočítáme.

$$S = a \cdot b$$

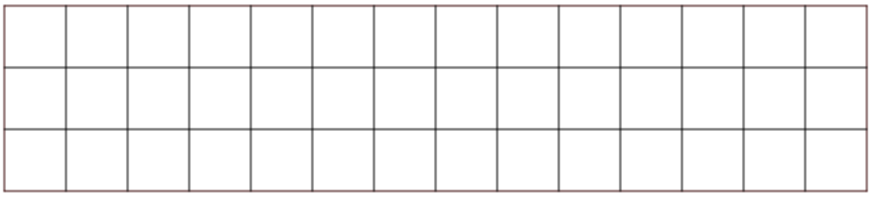
$$42 \text{ dlaždic} = 6 \text{ dlaždic} \cdot b$$

$$b = 42 : 6$$

$$b = 7 \text{ dlaždic}$$

Tímto postupem bychom našli další vhodné kombinace počtu dlaždic.

3. způsob: Grafické znázornění pomocí čtvercových desek.



Stejným způsobem jako v nákresu si žáci mohou načrtnout i zbývající 3 kombinace dlaždic, které po vynásobení dají součin 42 dlaždic.

Část b) Logická úvaha.

Záměrně je vybrán nejvíce nepraktický rozměr terasy. Na takovýto rozměr terasy se nebude moci umístit žádný zahradní nábytek na sezení. Můžeme se na rozměr podívat i ze stavitelského hlediska. Staví se dlouhé úzké terasy? Mají nějaké využití? Je reálné postavit si u domu terasu při těchto rozměrech? V tomto duchu by se mohli nést otázky i v podvědomí žáků a měli by na základě logické úvahy vydedukovat, že tento rozměr terasy není vhodný.

Podúloha může mít i více správných výsledků, pokud si žáci dokáží racionálně odůvodnit svoji odpověď. Očekává se vesměs rozměr terasy $6\ x\ 7$ dlaždic. Může se objevit i rozměr 4 x 14 dlaždic.

Část c) Využití vzorce pro obsah obdélníku $S = a \cdot b$.

V této části příkladu se nespokojíme jen s dlaždicí, jako jednotkou míry, ale potřebujeme znát konkrétní číselné údaje. To znamená, že potřebujeme vypočítat obsah 1 dlaždice.

Obsah 1 dlaždice: $S = a \cdot a$

$$S = 30\ \text{cm (1 stopa)} \cdot 30\ \text{cm (1 stopa)}$$

$$S = 900\ cm^2\ \text{(30 stop)}$$

V tuto chvíli můžeme vypočítat výměru terasy, pomocí vzorce pro obsah $S = a \cdot b$.

$$S = a \cdot b$$

$$S = 3 \cdot 42\ \text{dlaždic}$$

$$S = 3 \cdot 42 \cdot 900\ cm^2$$
$$S = 37800\ cm^2 (1260 \text{ stop})$$

Žáci mohou pro výpočet zvolit opět jiné číselné kombinace. Výsledek bude správně v cm^2 i ve stopách. Postačí, když budou mít výsledek v jedněch jednotkách.

Část d) Žáci mohou na výsledek přijít opět různými způsoby.
Různé způsoby řešení:
1. způsob: Logická úvaha.

Z grafického řešení v předchozí části úlohy mohou žáci vydedukovat závislost mezi volbou rozměrů a velikostí obvodu. Čím budou rozměry terasy menší, tím bude potřeba méně keříků růží. Tudíž, nejvhodnější kombinace rozměrů je 6 x 7 dlaždic.
Pokud se v části a) žáci nepokusili nakreslit náčrtky, mohou je zpracovat nyní ve stejné podobě jako v první části.

2. způsob: Využití vzorce pro obvod obdélníku $o = 2 \cdot (a + b)$.

Za neznámé a a b dosadíme námi zvolené rozměry z první části úlohy.

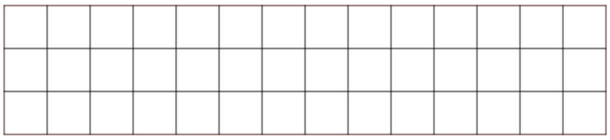
$o = 2 \cdot (a + b)$	$o = 2 \cdot (a + b)$	$o = 2 \cdot (a + b)$
$o = 2 \cdot (1 + 42 \text{ dlaždic})$	$o = 2 \cdot (2 + 21)$	$o = 2 \cdot (3 + 14)$
$o = 86 \text{ dlaždic}$	$o = 46 \text{ dlaždic}$	$o = 34 \text{ dlaždic}$

$o = 2 \cdot (a + b)$
$o = 2 \cdot (6 + 7 \text{ dlaždic})$
$o = 2 \cdot (6 + 7 \text{ dlaždic})$
$o = 26 \text{ dlaždic}$

Nesmíme zapomenout podmínku ze zadání a počítat jen s polovičním obvodem, tudíž, výsledky musíme vydělit číslem 2.

Nejmenší a zároveň nejideálnější obvod bude mít terasa o rozměru 6 x 7 dlaždic. Její obvod bude $o = 26$ dlaždic. Pokud chceme mít vyjádřený obvod v jednotkách délky, je potřeba vynásobit výsledek navíc číslem 30 (délka jedné dlaždice je 30 cm nebo 1 stopa).
Obvod terasy bude $o = 26 \cdot 30 \text{ cm} = 780 \text{ cm}$.

3. způsob: Mechanické sečtení u grafického znázornění pomocí čtvercových desek.
Opět si možný způsob ukážeme na jedné grafické ukázce. Analogicky bude postup stejný i u dalších rozměrů.



$3 + 14 + 3 + 14 = 34$ dlaždic

7.3 Příklad 3

Jan má 42 čtvercových dlaždic, kterými si chce vydláždit terasu. Získal je z výprodeje, a jelikož se přestaly vyrábět, další dokoupit nemůže. Jan je šetřivý a tak chce na terasu spotřebovat všechny dlaždice.

a) Jaké mohou být všechny možné rozměry jeho terasy?
b) Jan chce mít na terase posezení. Bude vhodná i terasa o rozměru 1 x 42 dlaždic?
c) Janova manželka si přeje po polovině obvodu terasy vysázet keříky růží. Jan jí chce vyhovět, ale nechce za růže utratit moc peněz. Jak bude vypadat terasa, okolo které bude potřeba co nejméně růží? (vlastní příklad)

Část a) Tato podúloha má skoro stejné způsoby řešení jako část a) příkladu č. 2, jen s tím rozdílem, že 2. způsob řešení přes využití vzorce pro obsah obdélníku je zde vynechaný.

Jen pro přehlednost si způsoby uvedeme ještě jednou:

1. způsob: Nalezení všech dělitelů čísla 42 a jejich vhodnými kombinacemi, nalézt rozměry terasy. Žáci si mohou pro přehlednost dělat náčrtky situací.

2. způsob: Grafické znázornění pomocí čtvercových dlaždic.

Část b) Tato podúloha je zjednodušená v tom, že žáci nemusí uvádět důvody svého výsledku.

Část c) Podúlohu žáci mohou řešit opět stejnými způsoby jako část d) příkladu 2. Je ulehčená v tom, že nepotřebujeme výsledek obvodu a žáci nejsou zatěžováni dvěma jednotkami délky.

8 VÝZKUM

Otestování úlohy č. 1 (Výběh pro králíky) a úlohy č. 2 (Vydláždění terasy) proběhlo 10. 4. 2017 v šestém ročníku Základní školy Horažďovice, Blatenské 540. Při testování bylo ve třídě celkem 16 žáků a probíhalo v klasické hodině matematiky. Na samotné vypracování obou úloh měli žáci 30 minut. Každý žák dostal obě zadání současně, papíry si podepsali a později mohli začít vypracovávat řešení. Podpisy sloužily jen jako informace o výkonech pro učitele – čistě ze zajímavosti, jména nebudou nikde zveřejňována. V práci budou žáci prezentováni pod čísly, která jim byla náhodně přiřazena.

Ještě před samotným rozdáním úloh bylo žákům sděleno, že se nejedná o žádnou prověrku na známky, ale že předložené pracovní listy poslouží jako materiál pro účely diplomové práce. Tato aktivita v hodině matematiky nebyla žádným způsobem zakomponovaná do klasifikace.

Žáci dopředu nebyli obeznámeni s faktem, že v hodině budou vypracovávat úlohy na obvod a obsah rovinných útvarů, tudíž se nemohli dopředu žádným způsobem připravit. Nevěděli ani, že jim přijde cizí osoba, která úlohy bude zadávat. Jediné informace se dozvěděli v úvodu hodiny od svého učitele, o tom, že budou řešit úlohy, se kterými se mohou setkat v praxi.

O týden později, tedy 18. 4. 2017 proběhlo ještě další testování - jednalo se o testování úlohy č. 3. Pro upřesnění, testovala se zjednodušená verze úlohy č. 2 (Vydláždění terasy). Testování probíhalo opět v šestém ročníku, ale na jiné základní škole, a to na Základní škole ve Stachách. Podmínky pro tento druhý výzkum byly stanovené tak, že žáci musí být ze stejného ročníku, jako u prvního testování a ideální by bylo, kdyby výuka probíhala podle stejných učebnic nebo alespoň podobných materiálů. Obě podmínky byly splněny. Na obou základních školách probíhá výuka podle učebnic O. Odvárko – J. Kadleček: Matematika pro 6. až 9. ročník ZŠ.

Možná může vyplout na povrch otázka: Proč další testování úlohy, která musela být ještě zjednodušena? Důvod je prostý, výsledky u testování úlohy č. 2 nedopadly zcela podle očekávání. Žáci měli velké problémy s řešitelností, úspěšnost v řešení jednotlivých podúloh nebyla uspokojivá. Proto po vzájemné domluvě, s vedoucí mé práce, se šetření uskutečnilo v podobě úlohy č. 3 ještě jednou.

8.1 Výběr úloh a jejich cíl

Do plánovaného testování byly vybrány záměrně úlohy č. 1 a 2. Vycházelo se z podmínek, aby možnosti řešitelnosti byly poměrně nenáročné, a aby žáci zapojili logické myšlení a praktický úsudek. Výběr byl zohledněný také vzhledem k časovému limitu, při kterém žáci nemuseli hledat doplňující informace na internetu, nebo v jiných zdrojích nebo aby nebyly např. úlohy formou projektu. Další ze záměrů pro výběr úloh byl především čistě praktický a informativní, protože jsem se chtěla dozvědět, na jaké způsoby řešitelnosti žáci přijdou a jak jsou následně schopni jednotlivé jejich postupy zrealizovat. V neposlední řadě jsem se zajímala o to, jak jim takto zadané úlohy vyhovují, z hlediska způsobu zadání a množství textu.

Cílem vybraných úloh bylo zjistit, jak žáci dokáží propojit svět matematiky s reálným světem. Jestli dokáží řešit úlohy různými způsoby a jestli se nad nimi zamýšlejí z hlediska logiky a smysluplnosti. Jestli jim takovéto zadání úloh vyhovuje, jak jsou schopni přemýšlet nad řešitelností příkladů, které nemají v zadání přesně řečený návod na vypočítání.

8.2 Průběh testování

Začátek hodiny proběhl ve znamení představení se a podání základních informací o průběhu testování, které žáky v následujících 30 minutách čekalo. Po krátkém úvodu byly žákům rozdané obě úlohy, na každý papír se měli podepsat a bylo jim řečeno, že se nejedná o žádnou prověrku na známky. Poprosila jsem je, aby se i přesto snažili počítat a přišli ve svých postupech na co nejvíce způsobů řešení. Žákům byl v neposlední řadě sdělen cíl tohoto cvičení, který spočíval ve schopnosti řešit komplexnější úlohy z praxe. Žákům byl poskytnutý prostor pro případné dotazy a poté začalo samotné řešení příkladů.

Všichni žáci zvolili jako první úlohu č. 1 (Výběh pro králíky). Již po přečtení úlohy se u žáků vyskytovaly komplikace s pochopením první části příkladu. Někteří tápali již v samotném zadání, co znamená pojem výměra. Nyní přišla nejsložitější fáze příkladu, jak přijít na všechny rozměry výběhu. Menší polovina si nejprve začala kreslit náčrtky, kam postupně po celém obvodu obdélníku psala různé varianty rozměrů. Jiní si uvědomili, že rozměry výběhu musí být taková čísla, která po vynásobení dávají právě $20\ m^2$. I když v zadání bylo řečeno, aby si žáci dělali náčrtky, mnozí se o ně ani nepokusili. Vyskytli se zde i tací žáci, kteří nebyli schopni vymyslet k první části příkladu vůbec nic. Další část úlohy měla obdobný průběh jako předchozí. Přibližně po 15-ti minutách všichni žáci s úlohou skončili a pokračovali s příkladem č. 2 (Vydláždění terasy). Poměrně dlouhé zadání činilo žákům velké problémy v orientaci a porozumění textu. Více jak polovina skupiny odevzdala prázdné papíry. Bylo vidět, že žáci s takto zadaným typem úloh mají opravdu problémy, nedokáží se soustředit na velké množství textu a nedokáží propojit situaci ze života do matematického světa, tedy alespoň v tomto příkladu. Úplně chybělo propojení závislosti vztahu obsahu a obvodu. Po přibližně 30-ti minutách jsem si řešení od žáků vybrala a následovalo okomentování řešitelnosti, protože žáky výsledky velmi zajímali. Proto jsme si je v rychlosti sdělili. Někteří žáci si až při vysvětlování možných postupů uvědomili, že látku vlastně znají, ale ze zadání ji nebyli schopni vydedukovat.

8.3 Výsledky testování

První tabulka ukazuje úspěšnost řešitelnosti úlohy č. 1. Podúlohu a) Zapiš všechny možnosti pro rozměry výběhu. Dělej si náčrtky a připisuj se stranám výběhu jejich délky., vyřešilo se 100% úspěšností 5 žáků. Dalších 6 žáků našlo tři správné kombinace rozměrů, ale v tabulce jsou zaznamenáni jako neúspěšní řešitelé, neboť v zadání bylo uvedeno, najdi všechny možné rozměry výběhu. Ostatní měli buďto špatné výsledky nebo neměli vůbec žádné rozměry. Podúloha b) Zapiš rozměry výběhu, pro který spotřebuje nejméně desek. Kolik jich bude?, měla o trochu vyšší úspěšnost, vyřešilo ji celkem 7 žáků. Celou úlohu vyřešili dobře jen 3 žáci.

Úspěšnost řešení je v následující tabulce, kde jsou výsledky žáků označeny X nebo O.

X…………. označuje 100% úspěšnost řešení

O ………… označuje neúplné řešení, chybné řešení nebo zcela absenci řešení

	Žáci															
Úloha č. 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
100% úspěšnost v 1. části **(a)**	**X**	O	O	O	O	O	**X**	**X**	O	O	O	**X**	**X**	O	O	O
Úspěšnost ve 2.části **(b)**	**X**	**X**	**X**	**X**	O	O	**X**	**X**	O	O	**X**	O	O	O	O	O

Tabulka 1: Výsledky úspěšnosti v řešení úlohy č. 1

Druhá tabulka ukazuje úspěšnost řešitelnosti úlohy č. 2. Podúlohu a) Jaké mohou být všechny možné rozměry jeho terasy?, vyřešil se 100% úspěšností 1 žák. Dalších 5 žáků našlo tři nebo dvě správné kombinace rozměrů, ale v tabulce opět nejsou zaznamenáni jako úspěšní řešitelé, neboť v zadání vylo uvedeno, najít všechny možné rozměry výběhu. Ostatní měli buďto špatné výsledky nebo neměli vůbec žádné rozměry. Žáků, kteří nenapsali žádný výsledek, bylo 9. Podúlohu b) Jan chce mít na terase posezení. Bude vhodná terasa o rozměru 1 x 42 dlaždic? Jaké rozměry jsou pro tyto účely vhodné? (svoji odpověď zdůvodni), měla o ještě nižší úspěšnost, jen jeden žák odpověděl relativně uspokojivě. Podúloha c) Jaká bude výměra terasy?, neměla vůbec žádnou úspěšnost a podúloha d) Janova manželka si přeje po polovině obvodu terasy vysázet keříky růží. Jan jí chce vyhovět, ale nechce za růže utratit moc peněz. Jaký rozměr bude mít terasa, okolo které bude potřeba co nejméně keříků? Jaký bude její obvod?, měla 100% úspěšnost u jednoho žáka. Celou úlohu nevyřešil bohužel nikdo.

Značení v tabulce je stejné, jako u předešlé.

X………… označuje 100% úspěšnost řešení

O ………… označuje neúplné řešení, chybné řešení nebo zcela absenci řešení

	Žáci															
Úloha č. 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
100% úspěšnost v 1. části **(a)**	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	**X**	O	O	O
Úspěšnost ve 2.části **(b)**	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
Úspěšnost ve 3.části **(c)**	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
Úspěšnost ve 4.části **(d)**	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	**X**	O	O	O	O	O

Tabulka 2: Výsledky úspěšnosti v řešení úlohy č. 2

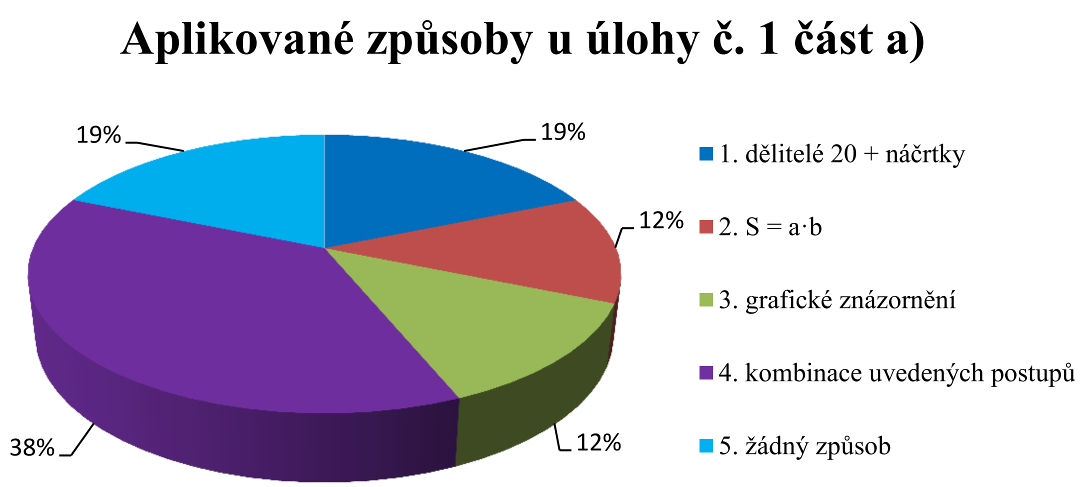
Třetí tabulka ukazuje úspěšnost řešitelnosti úlohy č. 3. Podúlohu a) Jaké mohou být všechny možné rozměry jeho terasy?, vyřešilo se 100% úspěšností 5 žáků. Dalších 6 žáků našlo tři nebo dvě správné kombinace rozměrů, ale v tabulce opět nejsou zaznamenáni jako úspěšní řešitelé, neboť v zadání vylo uvedeno, najít všechny možné rozměry výběhu. Zbytek, 4 žáci, neměli uvedené žádné varianty rozměrů. Podúlohu b) Jan chce mít na terase posezení. Bude vhodná terasa o rozměru 1 x 42 dlaždic?, měla o mnoho vyšší úspěšnost, než u původního zadání, správně odpovědělo 11 žáků, někteří uvedli i zdůvodnění. Podúloha d) Janova manželka si přeje po polovině obvodu terasy vysázet keříky růží. Jan jí chce vyhovět, ale nechce za růže utratit moc peněz. Jak bude vypadat terasa, okolo které bude potřeba co nejméně růží? Správně odpovědělo 6 žáků. Ostatní žáci se pokusili na úlohu odpovědět, i když řešení bylo nesprávné.

V tabulce o použita stejná symbolika jako v předešlých tabulkách.
X…………. označuje 100% úspěšnost řešení
O ………… označuje neúplné řešení, chybné řešení nebo zcela absenci řešení

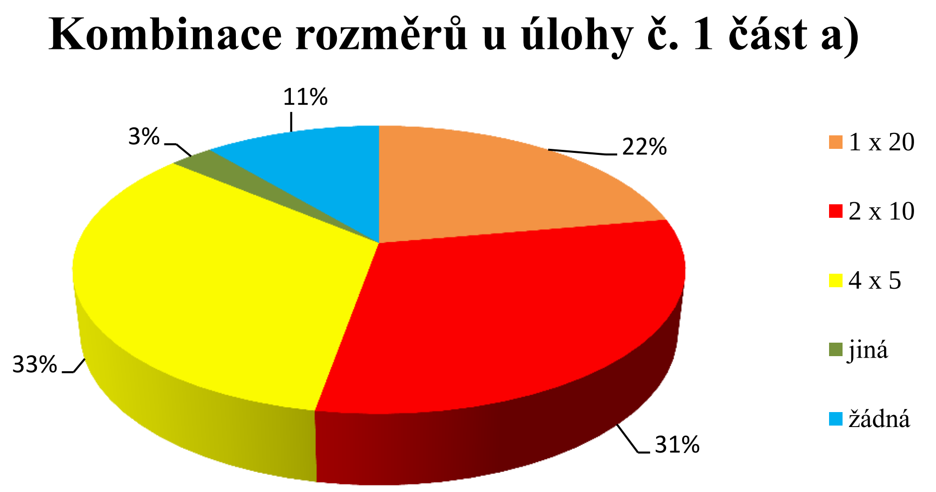
	Žáci														
Úloha č. 3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
100% úspěšnost v 1. části **(a)**	O	**X**	O	O	O	O	O	O	**X**	**X**	**X**	O	**X**	O	O
Úspěšnost ve 2.části **(b)**	O	**X**	**X**	O	**X**	O	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	O
Úspěšnost ve 3.části **(c)**	O	**X**	**X**	O	O	O	**X**	**X**	O	O	**X**	**X**	O	O	O

Tabulka 3: Výsledky úspěšnosti v řešení úlohy č. 3

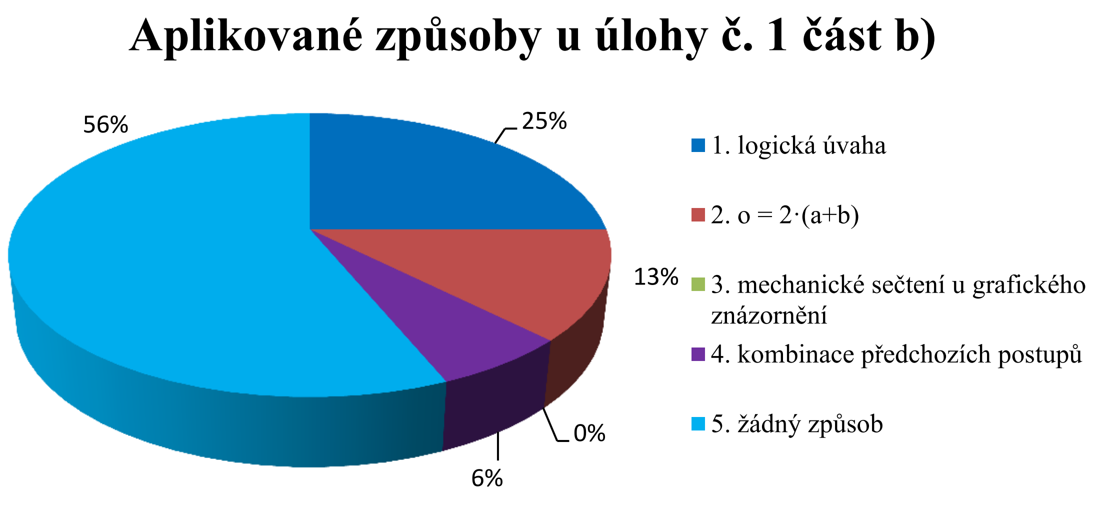
U grafů je ještě uvedený 4. způsob, který reprezentuje libovolnou kombinaci předchozích tří způsobu a 5. způsob, kdy žák nepoužil žádný postup, čili úlohu se nepokusil vyřešit.



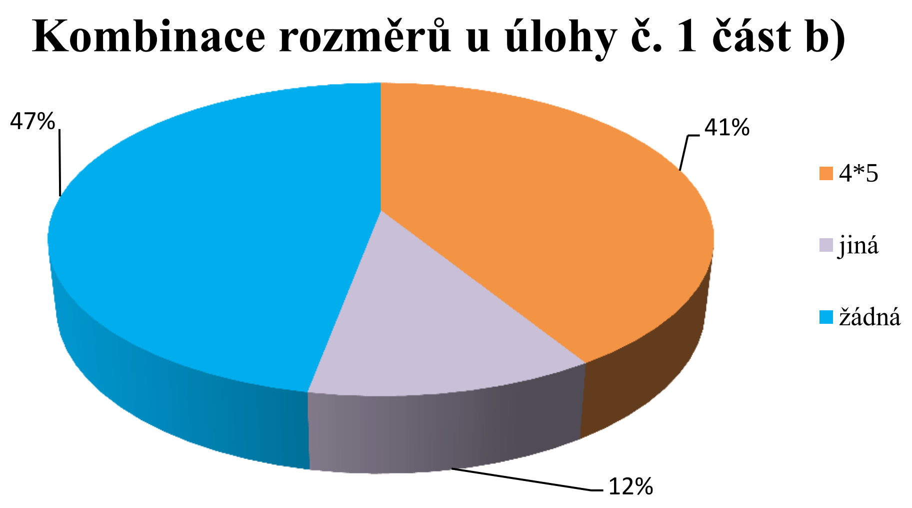
Graf 1: Aplikované způsoby u úlohy č. 1 část a)



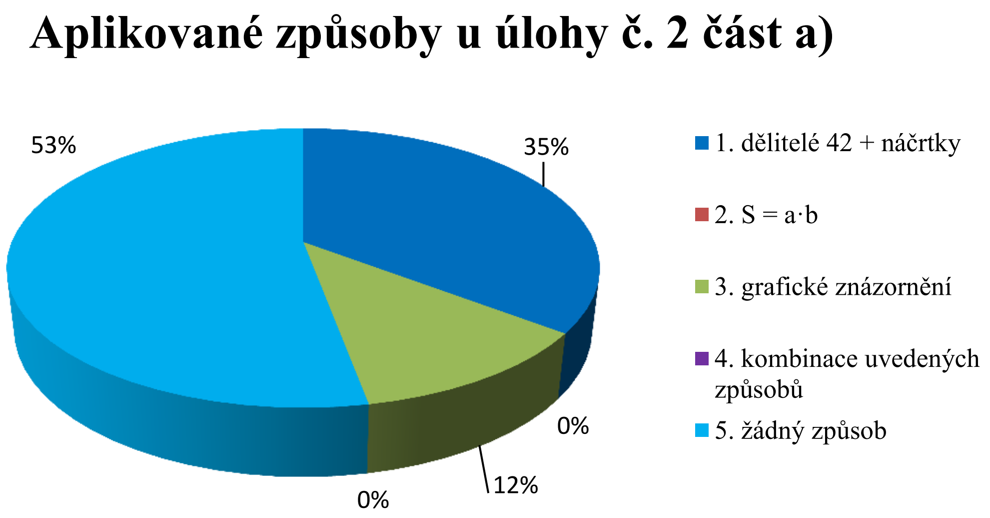
Graf 2: Kombinace rozměrů u úlohy č. 1 část a)



Graf 3: Aplikované způsoby u úlohy č. 1 část b)



Graf 4: Kombinace rozměrů u úlohy č. 1 část b)

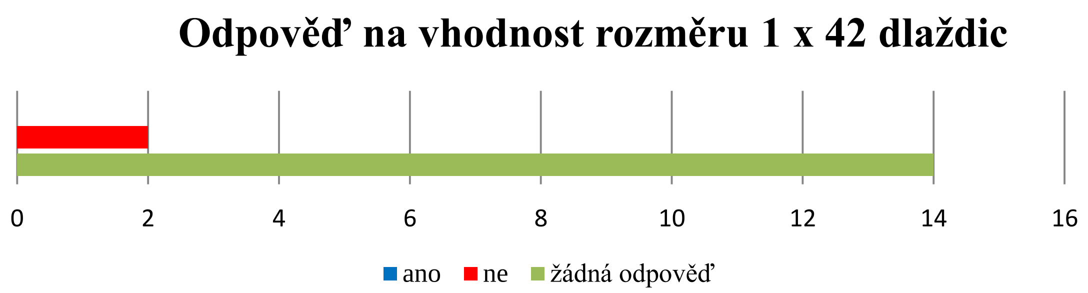


Graf 5: Aplikované způsoby u úlohy č. 2 část a)

V následujících třech pruhových grafech jsou znározněny podúlohy b), c), d) úlohy č. 2.

Podúloha b) úlohy č. 2:

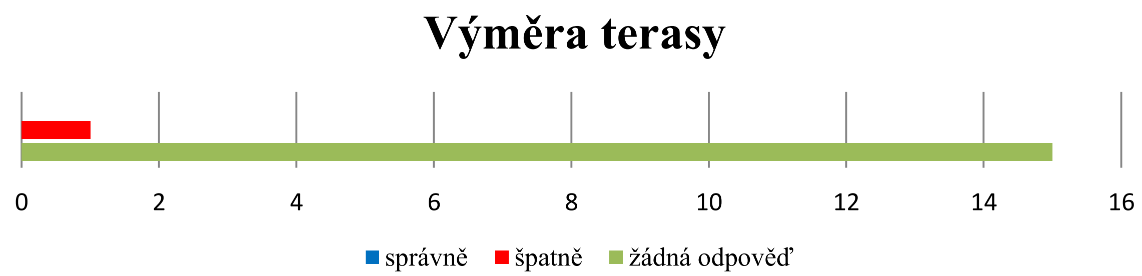
K závěru v této části úlohy žáci dojdou logickou úvahou, nepotřebují k tomu využití matematických znalostí.



Graf 6: Odpověď na vhodnost rozměru 1 x 42 dlaždic

Podúloha c) úlohy č. 2:

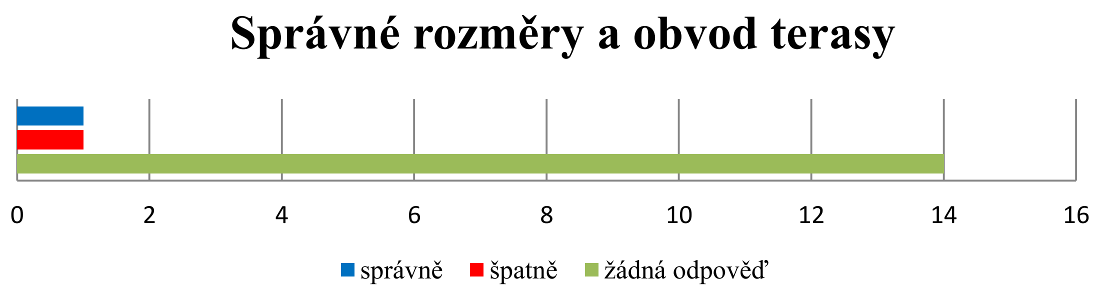
V této části úlohy je nutná znalost a aplikace vzorce pro obsah obdélníku a čtverce.



Graf 7: Výměra terasy

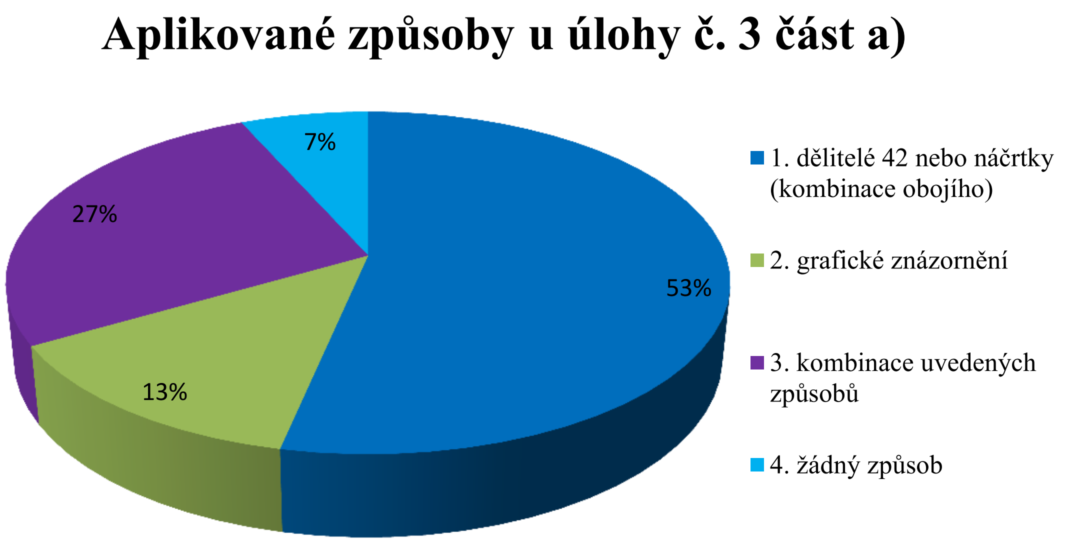
Podúloha d) úlohy č. 2:

I když vede několik cest k vyřešení výsledku (Logická úvaha; Vzorec pro obvod obdélníku; Mechanické sečtení u grafického znázornění), v následujícím grafickém přehledu se zaměřujeme pouze na správnost výsledku.



Graf 8: Správné rozměry a obvod terasy

Zde 3. způsob představuje kombinaci předešlých dvou způsobů a 4. způsob, je způsob, kdy žák nepoužil žádný postup, čili úlohu se nepokusil vyřešit.

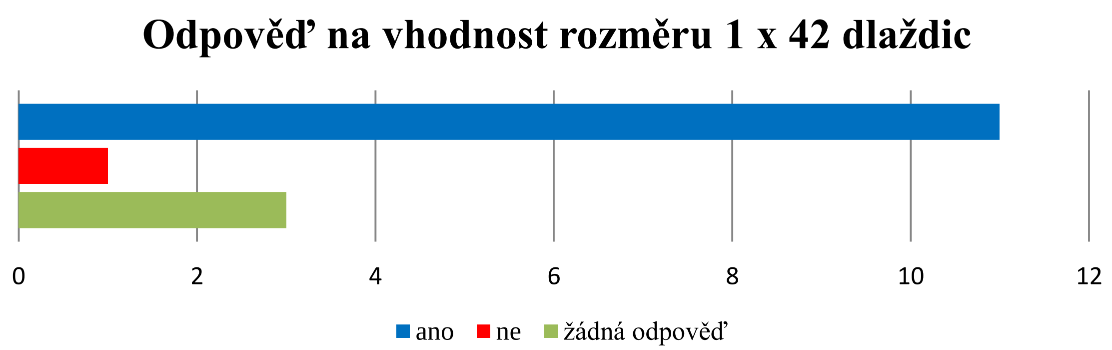


Graf 9: Aplikované způsoby u úlohy č. 3 část a)

V následujících třech pruhových grafech jsou znározněny podúlohy b), c) úlohy č. 3.

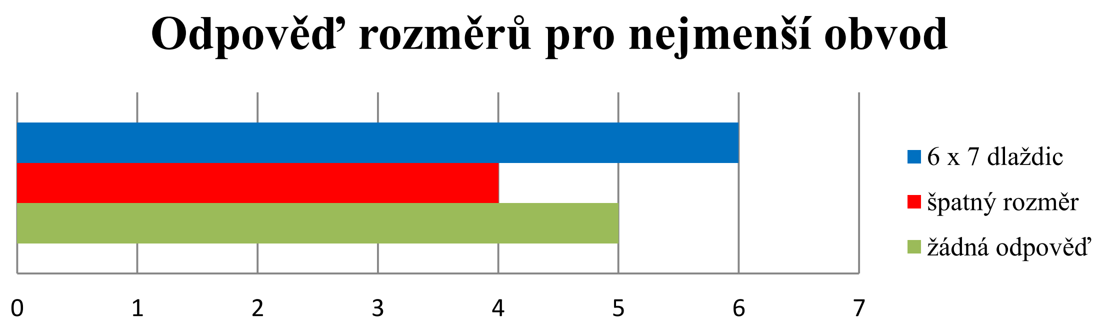
Podúloha b) úlohy č. 3:

K závěru v této části úlohy žáci dojdou logickou úvahou, nepotřebují k tomu využití matematických znalostí.



Graf 10: Odpověď na vhodnost rozměru 1 x 42 dlaždic

Podúloha c) úlohy č. 3



Graf 11: Odpověď rozměrů pro nejmenší obvod

V hodnocení výzkumu převládal u úloh, které měly více způsobů řešení, 1. způsob, při kterém žáci vytvářeli řešení pomocí abstraktního (např.: výčet dělitelů čísla) a grafického (vizuálního) postupu.

Na závěr jsou pro představu oskenované postupy řešení 5-ti žáků.

1. ukázka je úspěšné řešení úlohy č. 1,kdeje dobře viditelná kombinace matematického a grafického postupu. Jedinou výtkou zde je, neuvědomění si shodnosti variant u rozměrů výběhu – že je násobení komutativní a když není nějakým způsobem napsaná podmínka nebo rozměr pozemku v zadání, je považován rozměr 20 x 1 a 1 x 20 jen za jednu možnost. Současně je na úloze vidět uvědomění si vztahu mezi rozměry výběhu a jeho obvodem.

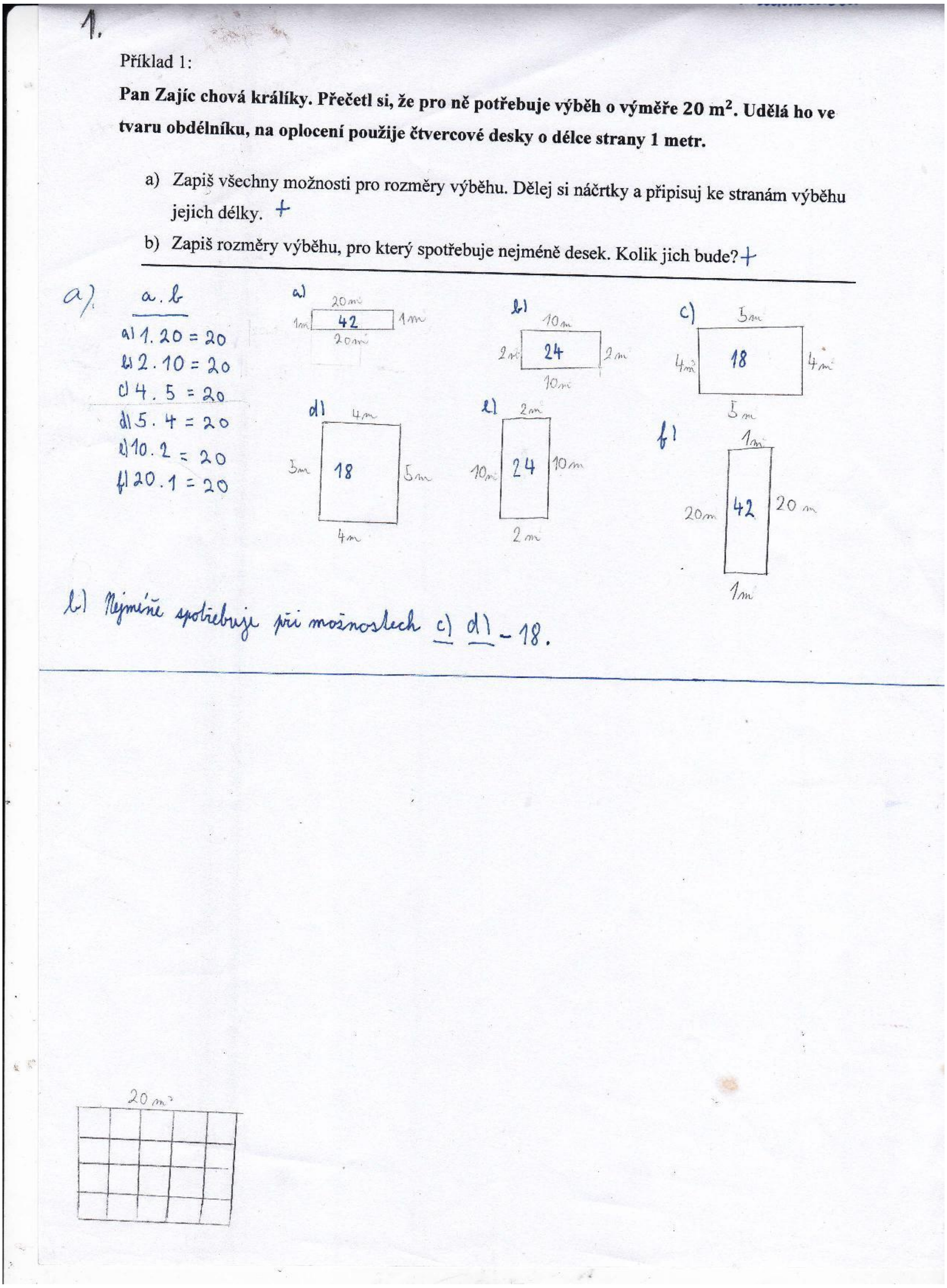
2. ukázka představuje znovu řešení úlohy č. 1, které patří také ke zdařilým pracím. U tohoto příkladu jsou předvedeny další postupy, kterými se lze dopracovat k výsledku.

Abychom neprezentovali jen zdařilá řešení, je zde představeno jedno, které je zcela chybné.

Je to 3. ukázka, řešení úlohy č. 2. Žák naprosto nepochopil požadavky zadání a ani nezapojil logický úsudek. Jediné pozitivum této práce je snaha o grafické řešení, i když s chybnými rozměry.

Následující dvě ukázky žákových řešení jsou zde uvedeny z důvodu rozdílných priorit ve vizuálním a abstraktním postupu.

4. ukázka preferuje vizuální postupy, kdy si žák musí vše nejprve graficky znázornit a poté se řídí matematickým postupem a poslední, 5. Ukázka, je zajímavá v řešení, bez grafické prezentace příkladu, vše je vyřešeno bez vizuální představy, pouze abstraktně.



1.

Příklad 1:

Pan Zajíc chová králíky. Přečetl si, že pro ně potřebuje výběh o výměře 20 m^2. Udělá ho ve tvaru obdélníku, na oplocení použije čtvercové desky o délce strany 1 metr.

a) Zapiš všechny možnosti pro rozměry výběhu. Dělej si náčrtky a připisuj ke stranám výběhu jejich délky. +

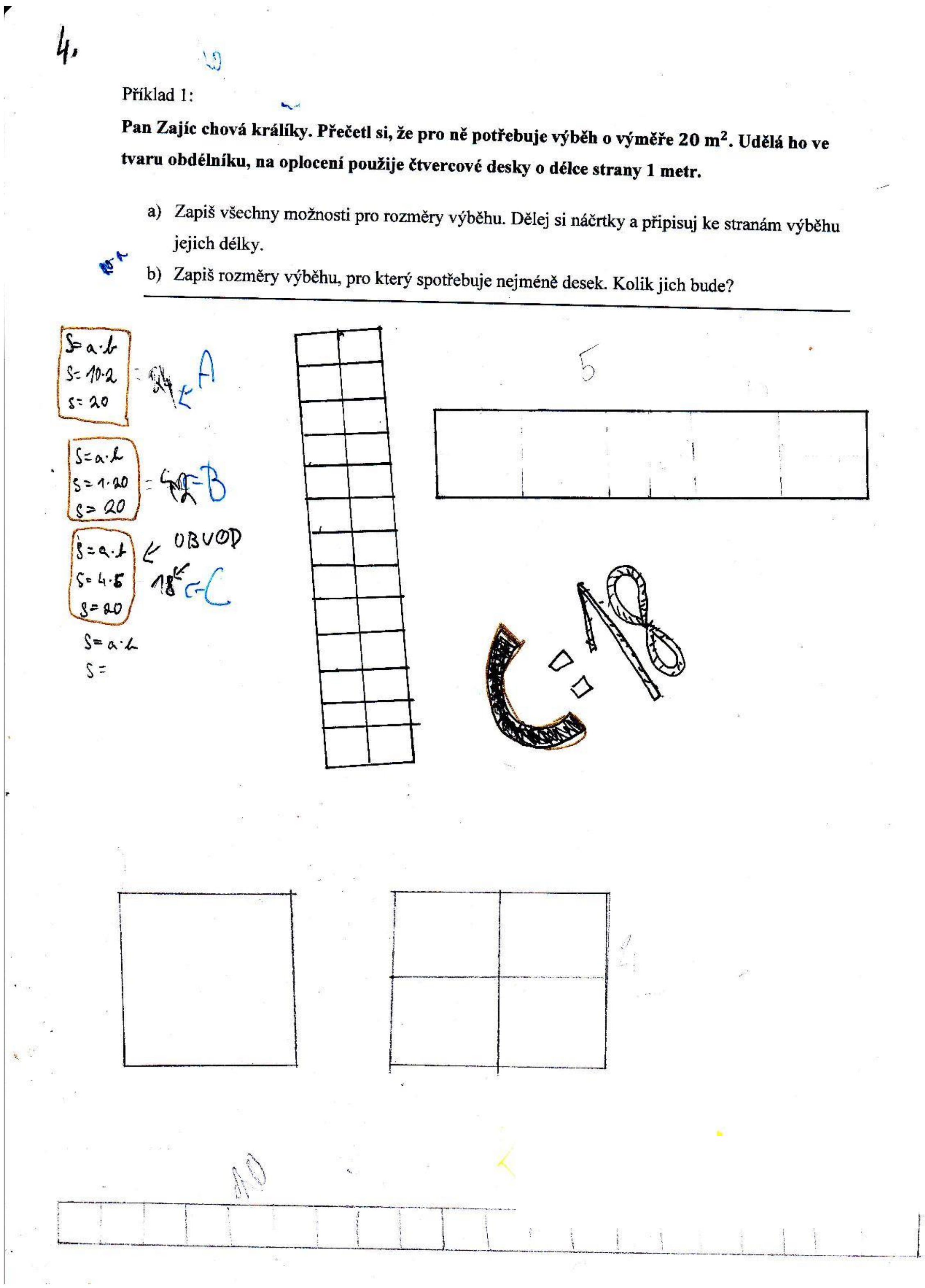
b) Zapiš rozměry výběhu, pro který spotřebuje nejméně desek. Kolik jich bude? +

a) a . b

a) 1 . 20 = 20
b) 2 . 10 = 20
c) 4 . 5 = 20
d) 5 . 4 = 20
e) 10 . 2 = 20
f) 20 . 1 = 20

b) Nejméně spotřebuje při možnostech c) d) – 18.

Obr. 1: Úspěšné řešení úlohy č. 1


4.

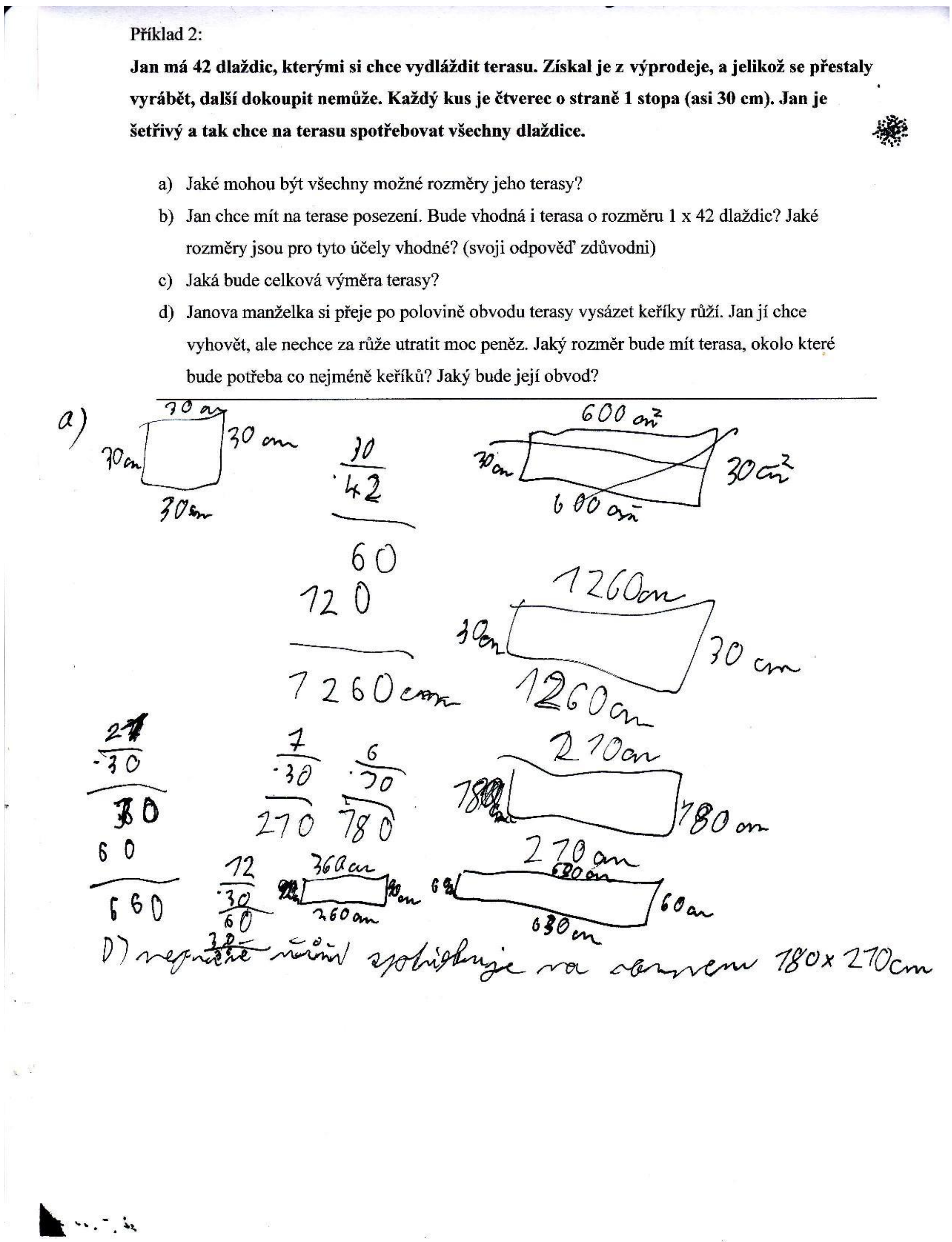
Příklad 1:

Pan Zajíc chová králíky. Přečetl si, že pro ně potřebuje výběh o výměře 20 m^2. Udělá ho ve tvaru obdélníku, na oplocení použije čtvercové desky o délce strany 1 metr.

a) Zapiš všechny možnosti pro rozměry výběhu. Dělej si náčrtky a připisuj ke stranám výběhu jejich délky.

b) Zapiš rozměry výběhu, pro který spotřebuje nejméně desek. Kolik jich bude?

Obr. 2: Úspěšné řešení úlohy č. 1

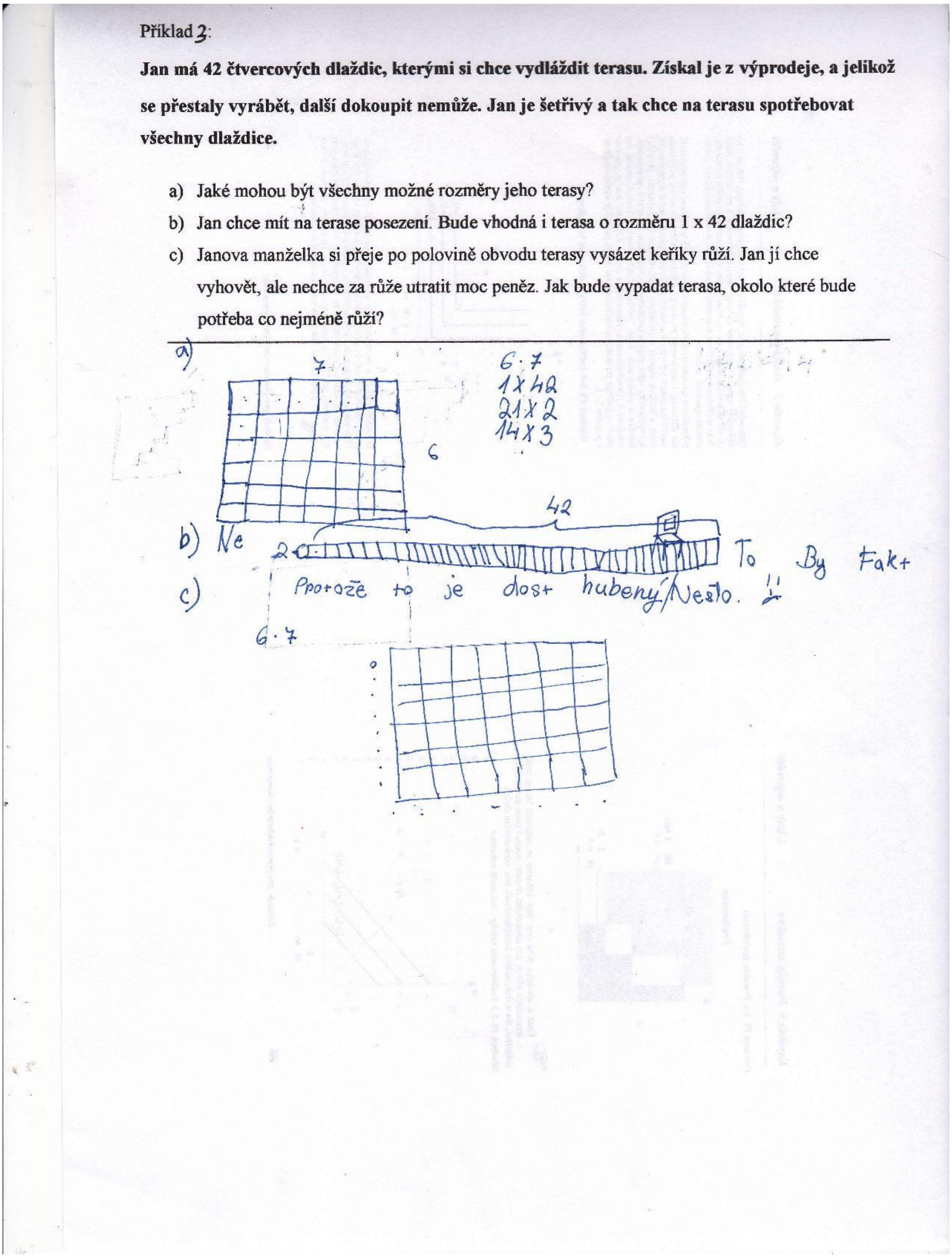


Příklad 2:

Jan má 42 dlaždic, kterými si chce vydláždit terasu. Získal je z výprodeje, a jelikož se přestaly vyrábět, další dokoupit nemůže. Každý kus je čtverec o straně 1 stopa (asi 30 cm). Jan je šetřivý a tak chce na terasu spotřebovat všechny dlaždice.

a) Jaké mohou být všechny možné rozměry jeho terasy?
b) Jan chce mít na terase posezení. Bude vhodná i terasa o rozměru 1 x 42 dlaždic? Jaké rozměry jsou pro tyto účely vhodné? (svoji odpověď zdůvodni)
c) Jaká bude celková výměra terasy?
d) Janova manželka si přeje po polovině obvodu terasy vysázet keříky růží. Jan jí chce vyhovět, ale nechce za růže utratit moc peněz. Jaký rozměr bude mít terasa, okolo které bude potřeba co nejméně keříků? Jaký bude její obvod?

Obr. 3: Zajímavá chyba při řešení úlohy č. 2



Příklad 3:

Jan má 42 čtvercových dlaždic, kterými si chce vydláždit terasu. Získal je z výprodeje, a jelikož se přestaly vyrábět, další dokoupit nemůže. Jan je šetřivý a tak chce na terasu spotřebovat všechny dlaždice.

a) Jaké mohou být všechny možné rozměry jeho terasy?

b) Jan chce mít na terase posezení. Bude vhodná i terasa o rozměru 1 x 42 dlaždic?

c) Janova manželka si přeje po polovině obvodu terasy vysázet keříky růží. Jan jí chce vyhovět, ale nechce za růže utratit moc peněz. Jak bude vypadat terasa, okolo které bude potřeba co nejméně růží?

a) 7 6

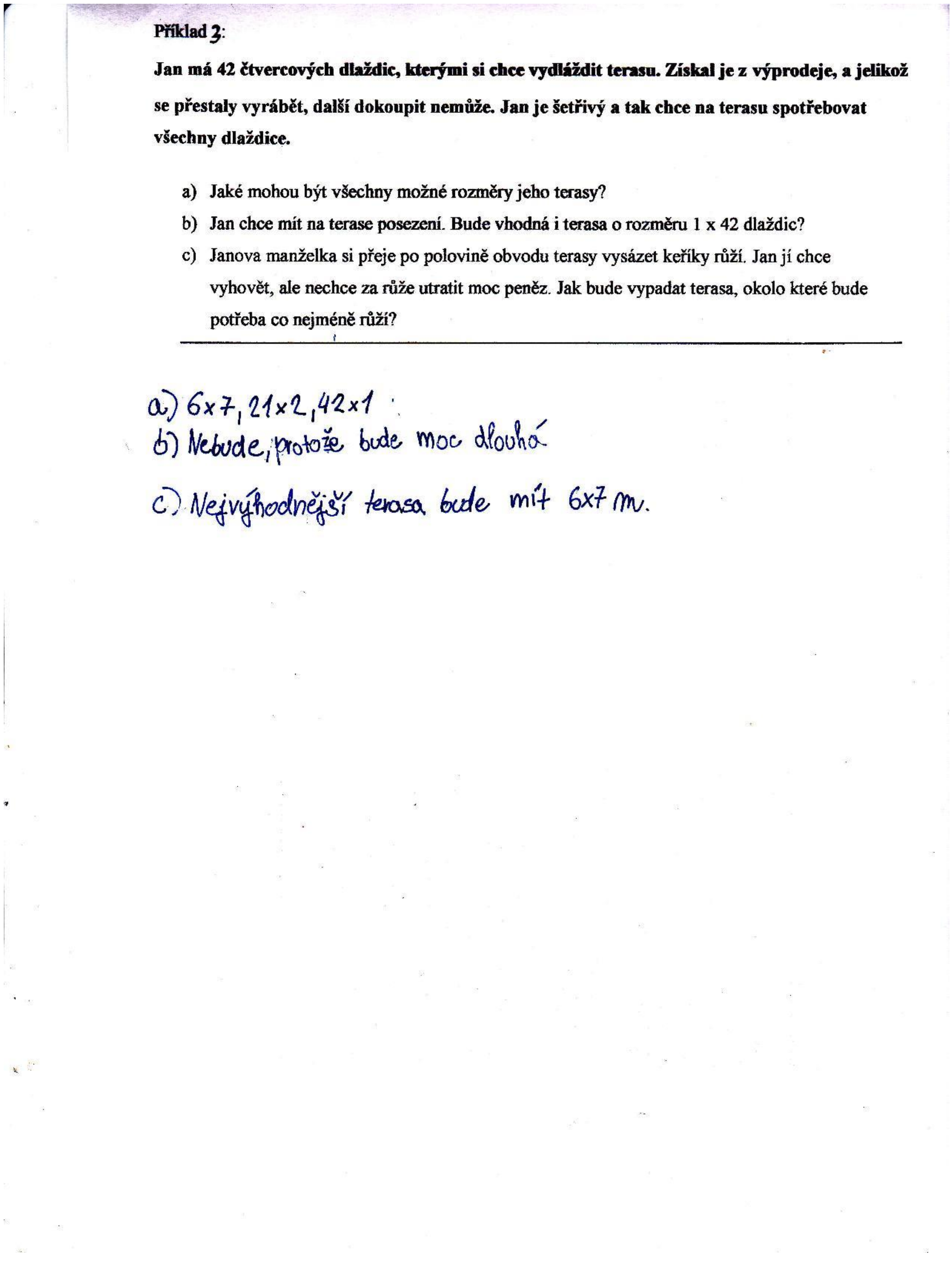
6 · 7
1 x 42
21 x 2
14 x 3

b) Ne 42 2 To By Fak+

c) Protože to je dost hubený. Neslo.

6 · 7

Obr. 4: Preference vizuálních postupu při řešení úlohy č. 3



Příklad 3:

Jan má 42 čtvercových dlaždic, kterými si chce vydláždit terasu. Získal je z výprodeje, a jelikož se přestaly vyrábět, další dokoupit nemůže. Jan je šetřivý a tak chce na terasu spotřebovat všechny dlaždice.

a) Jaké mohou být všechny možné rozměry jeho terasy?
b) Jan chce mít na terase posezení. Bude vhodná i terasa o rozměru 1 x 42 dlaždic?
c) Janova manželka si přeje po polovině obvodu terasy vysázet keříky růží. Jan jí chce vyhovět, ale nechce za růže utratit moc peněz. Jak bude vypadat terasa, okolo které bude potřeba co nejméně růží?

a) 6x7, 21x2, 42x1
b) Nebude, protože bude moc dlouhá
c) Nejvýhodnější terasa bude mít 6x7 m.

Obr 5: Řešení bez vizuálního postupu

8.4 Závěr testování

Jelikož testování úloh bylo provedeno na poměrně malém vzorku žáků a pouze v jednom ročníku, nevyvozuji z vyhodnocení žádné obecně platné závěry. Půjde pouze o konstatování postřehů z prováděného malého výzkumu. Cílem bylo zjištění, na jaké způsoby řešení žáci přijdou a jak je jsou schopni zrealizovat, což je také vyhodnocené v předchozí podkapitole.

Z mého malého výzkumu bych závěrem chtěla podotknout, že úlohy aplikačního charakteru, kde nejsou přesně dané instrukce pro řešení, jsou pro žáky poměrně obtížné. Jednak to může být z důvodu velkého obsahu textu, kdy se v něm žák nedostatečně orientuje, není schopen ho celý pojmout, ale zásadní problém vidím v instruktivním způsobu vedení výuky. Žáci nemají moc prostoru v průběhu výuky, učit se zajímavé způsoby nebo řešit úlohy i jiným způsobem, než je aktuálně probíraný.

Na zamyšlenou, všimněme si, kolik úloh aplikačního charakteru obsahují některé učebnice matematiky na 2. stupni základních škol. Jak do budoucna dosáhnout větší úspěšnost žáků při řešení tohoto druhu úloh? Jedním z řešení by teoreticky mohlo být kladení většího důrazu na konstruktivní způsob výuky. Učit žáky orientovat se v textu zadání a hlavně učit je, aby viděli v matematice smysl, logiku a měli ji rádi.

9 ZÁVĚR

Hlavním cílem této diplomové práce na téma Matematizace reálných situací na základní škole bylo přehledně vypracovat soubor řešených aplikačních úloh. Příklady jsou vyřešeny pokud možno, více způsoby, jsou doprovázeny obrázky, tabulkami a pro přehlednost i grafy. Práce byla vytvořena také z toho důvodu, že se v učebnicích málo vyskytují úlohy aplikačního charakteru. Učitelé by měli žáky učit instruktivním způsobem, ale hlavně také konstruktivním způsobem výuky. Měli by žáky vést k samostatnému řešení problému, vhodné a podložené argumentaci svého výsledku, měli by učit vzájemné provázanosti s praxí. Proto věřím, že tento soubor může být inspirací učitelům na základních školách i jako doplňující učební materiál.

Z malého výzkumu, který byl v práci provedený, můžeme vydedukovat, že žáci měli problémy s pochopením komplexnějších textů, mnohdy chybělo propojení s praxí, tedy s reálným světem, i když se jednalo o situace běžného života.

Na závěr bych ráda již jen podotkla s apelem na kolegy, učitele, aby své žáky vedli k propojení matematiky s reálným světem, k pochopení matematiky na základě logického úsudku a aby dali žákům prostor vymýšlet i jiné, než striktně vyučované způsoby řešení.

10 ZDROJE

10.1 Lieratura

[1] BĚLOUN, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8., upr. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 8071961043.

[2] BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P.: *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-656-7.

[3] BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P.: *Matematika 7 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-679-6.

[4] BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P.: *Matematika 7 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-681-9.

[5] COUFALOVÁ, J.: *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 9788071689928.

[6] HEJTMAN, P.: *Mikroekonomie: základy pro porozumění tržní ekonomice*. 3. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2002. ISBN 8070405775.

[7] KAŇKA, M., HENZLER, J.: *Matematika*. Praha: Ekopress, 2003. ISBN 8086119777.

[8] KUŘINA, F.: *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3.

[9] LEISCHNER, P.: *METODY ŘEŠENÍ PLANIMETRICKÝCH ÚLOH*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7394-378-3.

[10] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Matematika pro 6. ročník základní školy*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy. ISBN 8071960861.

[11] PRESOVÁ, J., DAVIDOVÁ, J., HERMOCHOVÁ, D.: *Hravá matematika 9: pracovní sešit pro 9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2014. ISBN 9788087881217.

[12] SAMUELSON, P., A., NORDHAUS, W., D.: *Ekonomie: 19. vydání*. Praha: NS Svoboda, 2013. ISBN 978-80-205-0629-0.

[13] Tichá, M.: Aplikace ve vyučování matematice. In: Sborník přednášek z konference Matematické vzdělávání 10-15letých žáků. Frýdek – Místek. JČMF 1999.

[14] TREJBAL, J.: *Sbírka zajímavých úloh z matematiky*. Praha: Prometheus, 1 995. ISBN 80-7196-072-1.

[15] TREJBAL, J.: *Sbírka zajímavých úloh z matematiky*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-084-5.

[16] WILLERS, M.: *Algebra bez (m)učení: od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě: fascinující čísla a rovnice*. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.

[17] Zacharová, J.: *Extrémy funkcí více proměnných – sbírka řešených příkladů*, bakalářská práce. JČU, Pedagogická fakulta, České Budějovice 2013.

10.2 Internetové zdroje

[18] Charakteristika lineární funkce – Role přehrady při povodních. [online] [cit. 2015-11-25] Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/Fibo/povodne.pdf

[19] Lineární funkce – Kde máme natankovat benzín. [online] [cit. 2015-11-12] Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/Fibo/benzina.pdf

[20] Mzdová kalkulačka [online] [cit. 2017-01-20] Dostupné z: http://www.mzdova-kalkulacka-2016.cz/index.php)

[21] Průměrná mzda 4. čtvrtletí 2015 [online] 11. 3. 2016 [cit. 2017-01-20] Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/cri/prumerne-mzdy-4-ctvrtleti-2015