Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Propojení výuky matematiky a geografie pomocí prostředí GIS

Bakalářská práce

Petr Pomije

Školitel: Mgr. Stanislav Grill

Konzultant: doc. Mgr. Lenka Zalabová, Ph.D.

České Budějovice, 2024

Pomije, P., 2024: Propojení výuky matematiky a geografie pomocí prostředí GIS. [Integration of mathematics and geography using GIS enviroment. Bc. Thesis, in Czech.] - 69 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace:

This thesis deals with problem of integrating mathematics and geography as school subjects using QGIS - an open source geographic information system. Seven selected mathematical problems for vector data are described, including their placement in curricular documents. Second part deals with evaluation of trial class and research among grammar school students. Thesis also includes suggestion of educational material for learning GIS and mathematics behind it.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem autorem této kvalifikační práce a že jsem ji vypracoval(a) pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Českých Budějovicích 10. 4. 2024

Podpis studenta: Petr Pomije

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Stanislavu Grillovi, za cenné rady a připomínky a veškerý čas, který pomoci s mojí prací věnoval. Děkuji také mojí rodině za podporu v průběhu bakalářského studia.

Obsah

1 Úvod **1**

2 Literární rešerše **3**

2.1 Mezipředmětové vztahy matematika - geografie 3

2.2 GIS a jeho úloha ve středoškolském vzdělávání 7

3 Data pro GIS **11**

3.1 Datové modely 11

3.2 Mapová zobrazení a souřadnicový referenční systém 12

4 Program QGIS **15**

4.1 Licence GIS software 15

4.2 QGIS 17

5 Vybraná matematická teorie GIS programů **18**

5.1 Základní vektorové prvky 18

5.2 Metrické vlastnosti objektů 20

5.3 Obalová zóna (Buffer) 25

5.4 Point-in-polygon problém 28

5.5 Průsečík linií 33

5.6 Teorie množin a funkce vektorové analýzy 36

5.7 Funkce síťové analýzy 39

6 Zařazení téma matematiky v GIS v rámci RVP G **43**

6.1 Zařazení v rámci vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace 43

6.2 Zařazení v rámci vzdělávacího oboru Geografie 46

7 Metodická část **49**

7.1 Metodika tvorby výukových materiálů 49

7.2 Metodika pokusného ověřování 53

8 Vyhodnocení pokusného ověření **55**

9 Závěr **62**

10 Literatura **63**

11 Seznam obrázků a grafů **68**

12 Seznam příloh **69**

1 Úvod

Tak jako zřejmě každý středoškolský student jsem si i já někdy v hodinách kladl otázku, zda má skutečně smysl se učit některé věci, a jestli je ještě někdy v budoucnu použiju. A i přesto, že pro mě matematika představovala jeden z nejoblíbenějších školních předmětů, i v jejích hodinách jsem se ptal sám sebe na smysluplnost některých věcí, které jsem se učil. Jak často se nad podobnou otázkou museli zamýšlet spolužáci, které matematika vůbec neoslovovala, se raději ani nebudu pokoušet domýšlet.

Právě tato osobní zkušenost mě vedla k myšlence, že pro matematiku je snad pro více než kterýkoliv jiný předmět důležité, aby studenti viděli skutečné uplatnění naučených postupů v praxi. Zejména u částí, jako je analytická geometrie, která může svou určitou abstraktností vést studenty právě k takovým úvahám. Vždyť k čemu je dobré analyticky popisovat geometrické útvary, které si můžeme přeci jednoduše narýsovat? A právě v takové chvíli není nic jednoduššího, než ukázat studentům počítačový program, který by se bez analytické geometrie (ale také jiných součástí matematiky) neměl šanci obejít. Jako zajímavý příklad s praktickým užitím může sloužit jakýkoliv geoinformační program.

Samozřejmě, GIS lze prakticky využívat i bez jakýchkoliv znalostí matematiky. Na druhou stranu pevně věřím, že alespoň někteří studenti střední školy ještě zcela neztratili přirozený zájem o to zjistit, jakým způsobem funguje svět kolem nich. Nespokojí se s vysvětlením „kouzelné krabičky“ (v angličitně se obvykle užívá termínu „black box“), do které se na jedné straně vloží zadání, a na druhé straně vyjede odpověď, ale budou chtít také vědět, proč vyjede právě taková odpověď a jak na ni vůbec ona „krabička“ přišla. Důsledkem tohoto poznání je pak také ztráta nedůvěry v moderní technologie, plynoucí často právě z toho, že nemáme představu, jak daný přístroj vykonává své funkce, a nemáme pak důvěru ani v ním předložené výsledky.

Cílem této práce je tak srozumitelně popsat matematické algoritmy, na jejichž bázi GIS programy pracují, a na základě tohoto popisu vytvořit pochopitelný výukový materiál, který by propojoval výuku matematiky a geografie a umožnil lépe pochopit principy a obsah probírané látky za pomocí geoinformačního programu. Pro demonstraci byl zvolen volně dostupný program QGIS. Materiál by měl co nejpřesněji, ale zároveň také nejpo-

chopitelněji vyložit nejzákladnější funkce GIS pro vektorová data, matematiku stojící na jejich pozadí a ukázat, jak vlastně s GIS pracovat. Důležitou součástí materiálu jsou pak příklady, na kterých si studenti mohou samostatně vyzkoušet fugování matematických algoritmů i práci s QGIS, a propojit si tak teorii s praxí. Přitom příklady by ideálně měly studenty alespoň trochu oslovovat a přibližovat praktické využití GIS.

Literární rešerše se zabývá obecnými vztahy mezi matematikou a geografií v rámci výuky, jejich integrací, a také současným stavem a možnostmi pro práci s GIS na školách. V teoretické části práce jsou stručně popsány nejklíčovější součásti GIS, především principy dat a souřadných systémů, a také samotný program QGIS. Nejdůležitější složkou teoretické části práce je ale popis jednotlivých vybraných matematických algoritmů, kterým je věnována poměrně rozsáhlá kapitola. Na ni navazuje zařazení jednotlivých kapitol do rámcového vzdělávacího plánu pro gymnázia, metodika tvorby výukového materiálu a metodika pokusného ověření materiálu na střední škole.

Praktická část pak sestává z vyhodnocení výsledků pokusného ověření na gymnáziu, a především ze samotného, poměrně obsáhlého výukového materiálu, tvořícího přílohu této práce. Ačkoliv jeho rozsah by se mohl zdát přehnaný, z hlediska toho, aby materiál mohl najít nějaké praktické využití, se neodvažuji vynechat žádnou z kapitol, protože z mého pohledu jsou všechny důležité pro alespoň základní seznámení se s prací v QGIS, a přitom pochopení veškeré připojené matematiky v pozadí.

2 Literární rešerše

2.1 Mezipředmětové vztahy matematika - geografie

Tato práce se zabývá propojením výuky matematiky a geografie pomocí prostředí GIS, a jedním z jejích cílů je vytvoření vhodných materiálů, které by umožnily integraci matematiky a geografie.

Integraci předmětů definuje pedagogický slovník jako „spojování předmětů blízkých svým obsahem nebo podstatnou částí, využití možností vytvářet ucelenější systémy neroztříštěného poznání. Doporučuje se dle rámcového vzdělávacího programu tvořit bloky přírodovědných, společenskovědních a estetických předmětů, nebo využít integrovaných témat.“ (Kolář, 2012)

Rakoušová (2008) vymezuje čtyři základní typy integrace vyučovacího obsahu – konsolidace, komasace, koncentrace a koordinace. Koordinace je nejvyšším stupněm integrace, představuje součinnost a spolupráci mezi učebními předměty s využíváním mezipředmětových vztahů. Dochází k využívání a aplikování poznatků nabytých v jednom předmětu v předmětu jiném, a také ke vzájemné podpoře mezi předměty. V praxi se týká hledání vztahů a souvislostí mezi tématy jednotlivých předmětů. Dosáhnutí koordinace mezi matematikou a geografií je jedním z cílů této práce.

Skalková (1962) vyzdvihuje přínos mezipředmětového vzdělávání a uvádí, že poznatky získané žáky v jednotlivých předmětech zůstávají navzájem velmi často izolovány. Žákům se pak naprosto ztrácí veškeré souvislosti, a jen velmi těžko uplatňují nabyté vědomosti při řešení praktických problémů. Vědomosti se tím stávají nepoužitelnými a odtrženými od potřeb reálného světa. Žáci se bez mezipředmětových vztahů učí myslet v jednosměrných izolovaných řadách, nerozvíjí schopnost syntézy poznatků a jejich uplatnění v praxi. Tato neschopnost řešení praktických úloh je samozřejmě v přímém rozporu s kompetencí k řešení problémů, která je jako jedna ze sedmi klíčových kompetencí definována v RVP pro gymnázia (dále jako RVP G). Student by podle RVP G měl být schopen volit vhodné metody a využívat předchozím studiem nabyté vědomosti a dovednosti k řešení problémů (RVP G, 2022).

V rámci RVP G je vzdělávací obsah rozčleněn do osmi vzdělávacích oblastí, které jsou tvořeny buď pouze jedním vzdělávacím oborem, nebo mohou být tvořeny více vzdělávacími obory, jejichž obsahy jsou si navzájem blízké. Konkrétně matematika je zařazena do samostatné oblasti Matematika a její aplikace, zatímco geografie spadá do oblasti Člověk a příroda (ačkoliv by mohla spadat také do oblasti Člověk a společnost, neboť její částí je jak fyzická geografie, tak také sociální a regionální geografie). V rámci školních vzdělávacích plánů (ŠVP) může vyučovací předmět buď převzít obsah jednoho vzdělávacího oboru, ale je také možné obsah jednoho oboru rozdělit mezi více předmětů, nebo naopak spojit více oborů v rámci jednoho předmětu. Snahou při vytváření ŠVP by pak měla být integrace tematických okruhů různých vzdělávacích oborů pro maximální podporu mezipředmětových (resp. mezioborových) vztahů (RVP G, 2022).

Přímo v RVP G je u vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace zmíněno, že „během studia žáci objevují, že matematika nachází uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti (např. v ekonomii, technice, ale i ve společenských vědách), že je ovlivňována vnějšími podněty (například z oblasti přírodních věd) a že moderní technologie jsou užitečným pomocníkem matematiky.“ (RVP G, 2022, s. 21) Konkrétně pro matematiku je tedy existence mezipředmětových vztahů nesporná, a obecně přijímaná jako klíčová pro její výuku – nutnost hledání mezipředmětových vztahů zde vychází už jen z názvu Matematika a její aplikace, který implikuje, že je nutné vzdělávat nejen v čisté matematické vědě, ale také ukazovat možné aplikace matematického učiva a přesahy do jiných oborů, včetně geografie.

Moravcová (2012) uvádí, že by učitel při výuce matematiky měl co nejčastěji připomínat skutečnost, že s matematikou se studenti v průběhu i po skončení školních docházky mohou setkávat prakticky kdekoliv, a předcházet tím dotazům na to, k čemu jim daná látka jednou bude.

Rakoušová (2008) se zabývá integrovanými slovními úlohami (takovými, jejichž obsah pochází z různých oblastí napříč RVP), které by dle jejího názoru měly být smysluplné a motivační, ideálně by se měly týkat kulturního okolí žáků a obsahovat regionální prvky. Takové úlohy by měly napomáhat žákovské aplikaci učiva jak napříč předměty, tak v mimoškolním prostředí (tedy prakticky uplatňovat nabyté matematické poznatky).

Odvárko (2012) také vyzdvihuje důležitost aplikovaných slovních úloh (které představují významný nástroj pro vytváření mezipředmětových vztahů mezi matematikou a ostatními obory) pro výuku matematiky, zároveň ale varuje před užíváním tzv. pseudoaplikací – tedy úloh, které pouze obalují matematické jádro příkladu nematematickými pojmy opravdového světa, ve skutečnosti ale nemají takové úlohy žádný smysl ani přínos. Takové úlohy pak nepřinášejí zvýšení motivace žáků k učení, což je jeden z přínosů aplikovaných úloh, ale logicky se pro svou absurditu a nerealističnost dočkají nepochopení od studentů.

Co se týče vzdělávací oblasti Člověk a příroda, do které spadá geografie, RVP G mluví spíše o mezipředmětových vztazích v rámci přírodovědných předmětů, přičemž nespecifikuje, zda matematika spadá mezi přírodovědné předměty, nebo ne. Nicméně zmiňuje, že je ve výuce přírodovědných předmětů nutné využívat multidisciplinární a interdisciplinární přístup (RVP G, 2022). Zároveň mezi cílovými zaměřeními vzdělávací oblasti je v RVP G uvedeno, že student by měl být schopen „užívání adekvátních matematických a grafických prostředků k vyjadřování přírodovědných vztahů a zákonů“ (RVP G, 2022, s. 26).

Postavení geografie na hranici přírodovědných a společenských věd zaručuje samo o sobě existenci mezipředmětových vztahů geografie s jinými předměty. Ve vztahu k matematice se jedná hlavně o práci s měřítkem map a převody jednotek, nebo o práci s grafy a diagramy (Mísařová, Hercik, 2013). Tyto vztahy jsou naznačeny přímo v RVP G, konkrétně u vzdělávacího obsahu Geografické informace a terénní vyučování je jako jeden z výstupů uvedeno, že žák „čte, interpretuje a sestavuje jednoduché grafy a tabulky, analyzuje a interpretuje číselné údaje“ (RVP G, 2022, s. 35).

Existuje několik bakalářských a diplomových prací zabývajících se podobným tématem (Vandrovcová 2017, Mlčoušek 2020, Krulec 2020, Leipertová 2010), tedy integrováním výuky matematiky a geografie. Velmi zajímavá je v tomto ohledu bakalářská práce (Vandrovcová, 2017), která se mimo jiné zabývá analýzou středoškolských učebnic matematiky a množstvím aplikovaných úloh v nich, se speciálním přihlédnutím k aplikacím geografickým. Z práce vyplývá, že v hodnocených učebnicích (konkrétně se jedná o řadu Matematika pro gymnázia od nakladatelství Prometheus, Matematika pro střední školy od nakladatelství Didaktis a Elektronická učebnice středoškolské matematiky od Mar-

tina Krynického) se podíl aplikovaných úloh na celkovém počtu úloh pohybuje mezi 12,5 % a 13,2 %, podíl úloh se zeměpisnou tematikou je pak pouze mezi 0,4 % až 1,3 %. Z výsledků navíc vyplývá, že analytická geometrie, která představuje podstatnou část této práce, má v učebnicích téměř nulový podíl aplikovaných úloh (Vandrovcová, 2017). Z těchto výsledků tedy vyplývá, že práce zaměřená na tvorbu aplikovaných geometrických příkladů by mohla najít své uplatnění.

Mlčoušek (2020) se ve své práci věnuje vybranými matematickým nástrojům v geografii, především z oblasti statistiky a teorie grafů, a zmiňuje některé možnosti využití těchto matematických nástrojů v GIS. Krulec (2020) se ve své práci také zaměřuje na možnost propojení výuky matematiky a geografie v tématech hledání vzdálenosti na kouli, proměnných charakteristik počasí v závislosti na nadmořské výšce (teplotní a tlakový gradient) a využitím statistiky v kartografii. Leipertová (2010) se ve své práci věnuje tradičním tématům propojujícím matematiku a zeměpis: měřítkem na mapách, souřadnicovými systémy, konstrukcí kartogramů a diagramů, ale neopomíjí ani zajímavé téma kartografické anamorfózy.

Společně s matematickými metodami využívanými v planetární geografii, jako je například způsob výpočtu výšky slunce nad obzorem, azimutu Slunce v danou roční dobu a hodinu či délky rovnoběžky na daném šířkovém stupni (Čapek, 2020) představují výše popsané příklady nejvyužívanější aplikace matematiky v geografii, se kterými se lze setkat v běžné výuce.

Obecně tedy existují práce zabývající se propojením matematiky a geografie, žádná z nalezených prací se však nezabývá geometrickou složkou geoinformačních systémů a jejím možným využitím pro rozšíření středoškolské výuky. Přitom některé z níže popsaných algoritmů jsou využívány pro činnosti, se kterými se člověk může setkávat v každodenním životě, aniž by nutně musel být specialistou některého náročného oboru. Ať už jde o využití teorie grafu při hledání nejkratší cesty mezi dvěma městy, či potřebu spočítat plochu nepravidelného nekonvexního mnohoúhelníku (například při zakládání stavby či měření pozemku), jedná se o věci využitelné v životě běžného člověka.

2.2 GIS a jeho úloha ve středoškolském vzdělávání

Neexistuje jednoznačná definice toho, co je to geoinformační systém (GIS). Následující definice jsou pouze vybranými možnými definicemi, které předkládají různí autoři.

„GIS je počítačový systém slouží ke shromažďování, spravování, ukládání, vytváření výstupů a distribuci prostorových dat.“ (Bolstad, Manson, 2022)

„GIS je soubor prostředků pro sběr, ukládání, vyhledávání, transformaci, analýzu a zobrazování prostorových dat reálného světa z hlediska: 1. jejich polohy vzhledem k definovanému souřadnicovému systému, 2. jejich popisných vlastností, 3. jejich prostorových vztahů k jiným objektům.“ (Burrough, 1986)

„GIS může být chápán jako systém hardwaru, softwaru a procedur vytvořených ke sběru, správě, manipulaci, analýzám, modelování a zobrazení prostorově určených dat pro řešení složitých problémů plánování a řízení.“ (Goodchild, Kemp 1990)

Definice jsou různorodé, přesto se shodnou alespoň v základní myšlence – GIS je nástroj sloužící k uchovávání, zpracovávání a zobrazování prostorových dat. Vzhledem k výše popsané problematice mezipředmětových vztahů představuje GIS ideální pole pro jejich rozvíjení, neboť v sobě přirozeně kombinuje poznatky z geografie, matematiky a informatiky, a přináší tak ukázku smysluplného využití jednoho školního předmětu v předmětech jiných (Tuček, 1998).

Problematika geoinformačních systémů (GIS), potažmo geoinformační technologií (GIT) je v rámci oboru geografie v RVP G zařazena do vzdělávacího obsahu Geografické informace a terénní vyučování. Mezi očekávanými výstupy vzdělávacího obsahu je zde specifikováno, že student „používá dostupné kartografické produkty a další geografické zdroje dat a informací v tištěné i digitální podobě pro řešení geografických problémů.“ (RVP G, 2022, s. 35) Zároveň je v rámci vzdělávacího obsahu vymezeno učivo, kde je výslovně zmíněn GIS, dálkový průzkum země (DPZ) a praktické využití GIS, DPZ a satelitní GPS (globální polohový systém) (RVP G, 2022).

Není ale nijak specifikováno, jakým způsobem by se s praktickým využitím GIS a DPZ měli studenti seznámit – tedy zda mají přímo prakticky využívat různé GIS nástroje,

nebo se pouze teoreticky seznámit s možnou praktickou aplikací. RVP G tak nijak neomezuje praktické využívání GIS ve výuce, zároveň ho ale ani striktně nenařizuje. Stejně tak blíže nespecifikuje, s jakými konkrétními (digitálními) kartografickými produkty by student měl umět pracovat, nechává tak volnost tvůrcům ŠVP a tematických plánů (RVP G, 2022).

Z výzkumu z roku 2013 uskutečněném mezi 57 gymnaziálními učiteli geografie vyplývá, že nejčastěji užívanými geoinformačními produkty užívanými ve výuce je aplikace Google Earth, nebo mapové portály (INSPIRE, mapy.cz a jiné). Využití komerčních GIS softwarů (ArcView) se týkal pouze pěti učitelů, využití QGIS pouze tří učitelů z 57. Za limitující předpoklad implementace GIS do výuky učitelé neoznačovali ani tak materiálové vybavení, ale nedostatek kvalitní české technické podpory, nedostatečnou metodickou podporu a v neposlední řadě nízkou hodinovou dotaci zeměpisu, která neumožňuje dostatečný prostor pro výuku GIS (Král, Řezníčková, 2013).

Podobně zaměřený výzkum z roku 2024 ukazuje, že mezi 94 respondenty jsou stále nejčastěji využívaným geoinformačním produktem webové prohlížeče map typu Google Maps nebo Mapy.cz, jejichž funkcionalita se ale po více než 10 letech značně rozšířila. Zhruba 30 % učitelů v průzkumu uvedlo, že využívá některé specializované geoportály. Podíl učitelů, kteří někdy využívají při práci v hodinách ArcGIS Online, je podobný jako podíl učitelů využívajících ve výuce QGIS, a pohybuje se zhruba na úrovni 10 %. Z výzkumu také vyplývá, že i po více než 10 letech (v porovnání s výše zmíněným výzkumem Krále a Řezníčkové) stále největším problémem se zařazením GIS do výuky zůstává nedostatečná časová dotace (přes 50 % respondentů) a metodologická podpora (více než 60 % respondentů) (Mísařová a kol., 2024a).

Nerad (2018) ve své diplomové práci dochází po průzkumu mezi 91 učiteli (62 ze ZŠ, 29 gymnaziálních učitelů) k závěru, že tři čtvrtiny z nich využívá GIS ve výuce pouze pasivně (tedy o něm učí pouze teoreticky), čtvrtina využívá ukázek GIS v hodinách (bez samostatné práce žáků), a pouze 15 % nechává studenty samostatně pracovat s GIS. Za největší bariéru implemenatce GIS do vzdělávání pak opět považují časovou dotaci hodin zeměpisu a časovou náročnost samotné práce s GIS, v čemž se shodují s dvěma výše uvedenými výzkumy. Stejně tak jsou za nejčastěji využívaný produkt označeny opět Google Earth a Mapy.cz, a shodně s výzkumem Mísařové a kolektivu (2024a) se využití

QGIS pohybuje na hranici 10 %.

Nerad (2018) také představuje vlastní pokus o implementaci programu QGIS do výuky na ZŠ, a konstatuje, že studenti šestých a sedmých tříd zvládli (byť s mírnými obtížemi) zadanou práci v GIS, a dle zpětné vazby působí, že pro většinu studentů byla práce s GIS zajímavější, než běžné hodiny zeměpisu. To představuje klíčový prvek také pro mou práci, neboť GIS by měl v jejím případě sloužit jako motivační prvek nejen pro výuku zeměpisu, ale také pro propojenou výuku matematiky.

Jedním ze zajímavých projektů, který se zabývá implementací geografických informačních technologií (GIT) do ZŠ i SŠ výuky je projekt „GIT do škol“ z pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Autoři projektu konstatují, že přesto, že se v každodenním životě setkáváme s geoinformačními technologiemi, v českém školství chybí podpůrné materiály pro učitele i žáky, a v českém vzdělávacím systému nejsou GIS jednoznačně terminologicky ukotveny (Mísařová a kol., 2021).

Autoři projektu představují koncepci rozvoje geoinformačních dovedností ve výuce na základních a středních školách, ve které mimo jiné specifikují principy implementace GIT do vzdělávání a jeho ukotvení v rámci kurikulárních dokumentů. (Mísařová a kol., 2021) Na webové stránce projektu je pak vytvořeno množství úloh řešených pomocí rozličných mapových portálů a aplikací, a také pomocí GIS programů (včetně ArcGIS Online nebo QGIS). Tyto úlohy jsou rozpracovány včetně zakotvení v RVP, požadovaných geoinformačních dovedností a materiálního vybavení a metodických pokynů pro vyučujícího, který bude úlohy zadávat (Mísařová a kol., 2024b).

Podobný soubor úloh nabízí i společnost ARCDATA PRAHA, spadající pod firmu ESRI, které vytváří nejvýznamnější komerční GIS software – ArcGIS. Společnost ESRI nabízí webovou verzi svého software, ArcGIS Online, v bezplatné licenci pro základní a střední školy. K nim pak nabízí výše zmíněný soubor úloh včetně poskytování dat potřebných k jejich realizaci, ovšem tentokrát už bez problematiky zařazení v rámci RVP (ARCDATA PRAHA, nedatováno).

Pomineme-li nutnost zaměření čistě na školní vzdělávání, existuje samozřejmě velké množství výukových materiálů pro práci s různými GIS software, ať už se jedná o psané návody, video tutoriály či přímo různé (placené i bezplatné) kurzy, které by účastníky

měly naučit vybrané části práce s GIS programem. Zde samozřejmě může existovat problém jazykové bariéry, neboť velká část materiálů je v anglickém jazyce, minimálně pro základní seznámení s programy už ale existuje množství návodů v češtině (ať už pro komerční software jako ArcGIS Pro, či pro nekomerční software typu QGIS). Jako příklad může sloužit Laskavý úvod do GIS na oficiálních stránkách QGIS (Sutton a kol., 2009), či český web GISMentors (GISMentors, 2014 - 2024).

Důležitým aspektem implementace GIS do vzdělávání je kromě odstraňování technických bariér a problémů s nedostatkem metodických materiálů nebo nedostatečné časové dotace také vzdělávání samotných učitelů v oblasti GIS, aby mohli oni sami v této oblasti vzdělávat své studenty. V tomto ohledu je ale situace příznivá, neboť v současné době je GIS součástí všech vysokoškolských oborů, které připravují budoucí učitel zeměpisu nebo geografie, a mělo by také stoupat zastoupení GIS v dalším vzdělávání pedagogických pracovníků (Mísařová a kol., 2021).

3 Data pro GIS

3.1 Datové modely

V GIS nepracujeme s opravdovými objekty z reálného světa, ale potřebujeme dosáhnout určitého zjednodušení reality – vytváříme tedy pouze digitální model reálného světa. Hlavním problémem je dosažení vhodné míry zjednodušení reálného stavu při zachování všech potřebných součástí. Vznikají tak geografické datové modely reprezentující reálný svět (Tuček, 1998).

Při hledání vhodné reprezentace reálného světa záleží na povaze dat a pohledu autora modelu. Existují dva základní pohledy na svět a objekty nebo jevy v něm. V prvním případě svět vnímáme jako prostor, ve kterém se vyskytují oddělené entity (objekty) s přiřazenými atributy a polohou. Základní jednotkou takového modelu je tedy daný objekt, který je nadále nedělitelný. Ve druhém případě sledujeme daný fenomén, který se vyskytuje v prostoru spojitě s měnící se intenzitou. Nelze ale reprezentovat úplně každý bod prostoru, proto se musí definovat rozdělení prostoru na určité buňky, jejichž velikost ukazuje detailnost daného modelu (Burrough a kol.,2015).

Tyto dva odlišné způsoby vedou ke dvěma různým modelům geografických dat. Prvním je vektorový datový model, který reprezentuje oddělené entity, a využívá k tomu nespojité vektorové prvky – body, linie a polygony (přesnější definice v podkapitole Základní vektorové prvky). Každý objekt reprezentuje jednu entitu reálného světa – vzniká tak relace entita-objekt. Vektorové prvky mají svou geometrii uloženou jako souřadnice lomových bodů jednotlivých prvků (Bolstad, Manson, 2022).

Druhý způsob chápání reálného světa vede k vyplnění celého zájmového území sítí (teselace), která přitom může být pravidelná i nepravidelná. Objekty jako takové neexistují, existuje pouze atribut rozmístěný v prostoru, a každé buňce sítě je přiřazena hodnota tohoto atributu. Nejobvyklejší volbou sítě je pravidelná čtvercová síť zcela vyplňující prostor, kterým se zabýváme. Velikost jedné buňky (pixel) určuje míru přesnosti a zjednodušení modelu – čím větší je velikost pixelu, tím je menší prostorové rozlišení, a model tedy více zjednodušuje realitu (Tuček, 1998).

Existují i nepravidelné teselace – jako příklad lze uvést nepravidelnou trojúhelníkovou síť (TIN – Triangular Iregular Network), používanou nejčastěji pro záznam podoby terénu. Pravidelná mřížka také nemusí mít podobu čtvercové sítě, může být například trojúhelníková nebo hexagonální, nicméně se čtvercovou sítí se nejsnadněji provádí počítačové výpočty, a také odpovídá kartézské souřadné soustavě. Stejně tak čtvercová síť nejlépe funguje pro digitální senzory určené ke sběru dat (Tuček, 1998).

Obecně se teselace (potažmo rastrový model) doporučuje využívat pro data spojitá v prostoru – tedy například pro mapování rozložení srážek, nadmořskou výšku atd. Naopak vektorový model se užívá pro data nespojitá, nevyplňující celý prostor – je vhodný například pro záznam sítí infrastruktury (silnice, produktovody) nebo jednotlivých objektů (například stavby, vodní plochy nebo oddělené plochy lesa) (Burrough a kol., 2015).

Oba hlavní datové modely (rastrový a vektorový) využívají rozdělení do tematických vrstev - tedy jedna vrstva obvykle reprezentuje jeden jev. Vytváří se tedy například samostatná vrstva silniční sítě, budov, lesních porostů atd. Z těchto vrstev pak skládáme potřebný digitální model reálného světa. Kombinací existujících vrstev pak samozřejmě lze vytvářet vrstvy nové (Bolstad, Manson, 2022). Objekty dané vrstvy se shodují v typu geometrie a mají společně definované atributy (popisná složka dat) (Burrough a kol., 2015).

Tato práce se zabývá pouze vektorovými daty – ačkoliv i práce s rastrovými daty umožňuje zajímavé matematické úlohy, z mého pohledu by pro středoškolské studenty měla být zajímavější a pochopitelnější práce s vektorovými daty. Samozřejmě by byla možná varianta pracovat s oběma typy datových modelů, nicméně kvůli rozsahu práce byl zvolen pouze jeden model, a to model vektorový.

3.2 Mapová zobrazení a souřadnicový referenční systém

Zemské těleso má vlivem fyzikálních sil nepravidelný tvar, a pro účely měření a zobrazování je třeba najít ideální tvar zemského tělesa, který by byl dostatečně přesný, a zároveň jednoduchý pro matematické využití. Nejpřesnějším a nejsložitějším modelem ideálního zemského povrchu je geoid, definovaný jako nulová hladinová ekvipotencionální

plocha, která je v každém svém bodě kolmá na směr zemské tíže. Nejedná se o matematický, ale pouze o fyzikálně vyjádřený model (Čapek a kol., 1992). Pro matematické vyjádření je třeba použít jednoduššího tvaru – referenčního elipsoidu, který se rozměry svých poloos co nejvíce blíží skutečnému tvaru zemského povrchu. Referenční elipsoid je udán rozměry hlavní (rovníkové) a vedlejší (pólové) poloosy, a hodnotou zploštění. Nejvíce zjednodušujícím modelem je pak nahrazení plochy elipsoidu kulovou plochou, která je definována pouze jedním rozměrem (poloměrem), a volí se tak, aby se povrch a objem referenčního elipsoidu a koule pokud možno rovnal (Tuček, 1998).

Práce se zakřivenými povrchy je náročná, proto byly vyvinuty způsoby převedení trojrozměrného zakřiveného povrchu do roviny – kartografická zobrazení. Jedná se o transformaci geografických souřadnice (zeměpisná šířka φ a délka λ) do pravoúhlých souřadnic (x, y), která může být obecně vyjádřena dvěma funkcemi dvou proměnných, konkrétně jako $x = f_1(\varphi, \lambda)$, $y = f_2(\varphi, \lambda)$ (Rapant, 2002).

Hlavní dělení kartografických zobrazení probíhá na základě využité projekční plochy na azimutální (zobrazovací plochou je rovina), válcové nebo kuželové. Existují taktéž nepravá zobrazení, která využívají jiné způsoby zobrazení. Zobrazení lze také dělit dle toho, jaké vlastnosti zachovávají, na konformní/úhlojevná (zachovávající azimuty mezi jednotlivými body), plochojevná (zachovávající obsahy ploch) nebo délkojevná (zachovávající délky v určitých směrech) (Burrough a kol., 2015).

Prostorová data odlišuje od jiných typů dat právě to, že mimo jiné zahrnují složku udávající jejich polohu v prostoru. K definici toho, kde se objekt v prostoru nachází, je potřeba zavedení nějakého systému, který by umožňoval dobře popsat polohu objektu. Tím je souřadnicový referenční systém (dále SRS).

Existují dva hlavní typy SRS – geografický (globální) souřadný systém (Geographic coordiante systém – GCS) a do roviny projektovaný souřadnicový systém (Projected Coordinate System – PCS). GCS vychází z geografických souřadnic, které využívají sítě rovnoběžek a poledníků na tělese představujícím zemský povrch (referenční elipsoid nebo koule). Poloha je udávána vůči počátku definovanému jako průsečík rovníku (nulté rovnoběžky) a nultého poledníku. Poloha je pak vyjádřena pomocí dvou úhlů – zeměpisné délky (úhel měřený ve směru východ-západ) a zeměpisné šířky (úhel měřený ve směru

sever-jih). GCS umožňuje porovnávat polohu dvou míst kdekoliv na zemi, při práci s menším územím ale není příliš vhodný, a výpočty s využitím GCS (tedy prováděné na referenční kouli nebo elipsoidu) jsou sice přesnější, ovšem výpočetně náročnější (Bolstad, Manson, 2022).

Pro menší plochy, které jsou mapovým zobrazením převedeny na rovinu, je lepší využívat projektovaný souřadnicový systém (PCS). V tomto případě je poloha vztažena k lokálně definovanému počátku, a poloha každého bodu se udává pomocí souřadnic v pravoúhlé (kartézské) souřadné soustavě, tedy jako uspořádaná dvojice tvořená souřadnicí x (easting) a y (northing). Počátek soustavy se obvykle volí v co nejvíce jihozápadním bodě mapovaného území, aby všechny hodnoty souřadnic byla kladná čísla. Projektovaný souřadnicový systém umožňuje jednodušší práci se souřadnicemi, a především jednodušší výpočty pro prostorová data. Na druhou stranu, pro větší územní celky mohou být tyto výpočty značně zkreslené, zejména při špatné volbě zobrazení (Burrough a kol., 2015).

Všechny souřadnicové systémy programu QGIS vycházejí z databáze EPSG (European Petroleum Survey Group), de facto standardu pro souřadnicové systémy, který obsahuje popisy jednotlivých souřadnicových referenčních systémů a jejich transformací (ať už ve smyslu transformace z referenčního tělesa do roviny, nebo transformace mezi jednotlivými zobrazeními). Každé zobrazení má přiřazeno svůj jedinečný EPSG kód, který slouží jeho identifikátor (například SJTSK/ Krovak East North, užívaný pro civilní mapy ČR, je veden pod kódem EPSG:5514) (IOGP, 2022).

Příklady uváděné v praktické části této práce pracují výhradně s lokálními souřadnicovými systémy, které jsou navíc většinou upraveny tak, aby se s nimi snadněji počítalo. Například pro mapy ČR zobrazené v Lambertově zobrazení se nevyužívají skutečné souřadnice vůči počátku definovanému vlastním zobrazením, ale je zavedena nová, zjednodušující souřadná soustava, která je lépe představitelná a vhodnější pro výpočty, i za cenu určitého zkreslení postupu.

4 Program QGIS

4.1 Licence GIS software

Projekt QGIS je součástí iniciativy Free and Open Source Software (FOSS). Podle tohoto konceptu musí software splňovat následující čtyři základní svobody (označovány jako freedom 0 až 3), aby mohl být označován jako „free software“ (dle Stallman, 2002):

1. Svoboda využívat program dle přání uživatele a k libovolnému účelu (freedom 0)
2. Svoboda studovat způsob fungování programu, a svoboda měnit tento způsob fungování za účelem přizpůsobení vlastním potřebám uživatele (freedom 1). Předpokladem této svobody je volný přístup ke zdrojovému kódu programu
3. Svoboda volně šířit kopie softwaru, aby bylo umožněno pomoci ostatním (freedom 2)
4. Svoboda volně šířit vlastnoručně upravené kopie softwaru, a dát tak ostatním uživatelům možnost benefitovat z vlastní práce (freedom 3)

V tomto případě není slovo „free“ ve významu „bezplatný“, ale „svobodný“ (někdy se jako lepší výraz místo „free“ uvádí „libre“) (Stallman, 2002).

Program QGIS v současnosti spadá mezi projekty Open Source Geospatial Foundation (dále OSGeo), neziskové organizace, jejímž cílem podporovat globální rozvoj otevřených geoinformačních technologií. Organizace zajišťuje finanční, organizační a právní podporu komunitě vytvářející a využívající open source geoinformační systémy (OSGeo, 2024a).

V rámci OSGeo je pak propagována myšlenka Open Geospatial, která vymezuje čtyři základní svobodné principy: otevřená data (Open Data), otevřené vzdělávání (Open Education), otevřená věda (Open Science) a otevřené standardy (Open Standard) (OSGeo, 2024b).

Otevřená data znamenají nejen otevřenost dat z právního hlediska (tedy data legálně sdílená a bezplatně použitelná), ale je nutná také otevřenost z technického hlediska. Data

by tak měla být bezproblémově využitelná jakýmkoliv softwarem, technicky správná a doopravdy využitelná (Sui, 2014).

Otevřené vzdělávání aplikuje myšlenku open source na tvorbu výukových materiálů a svobodné a bezplatné vzdělávání v GIS. Otevřená věda pak požaduje sdílení dat s ostatními výzkumníky pro zlepšení společného dosahování výsledků, a zdůrazňuje také důležitost otevřeného softwaru pro potřeby výzkumu (OSGeo, 2024b).

Konečně otevřené standardy požadují, aby otevřená data, software a hardware měly možnost fungovat dohromady a bezproblémově. K tomu je potřeba přijmout a dodržovat určité standardy pro všechny zúčastněné strany. Důležitou roli v těchto snahách zastává Open Geospatial Consortium (OGC), které zastřešuje spojení standardů GIS napříč průmyslem, státní správou a akademickým prostředím (Sui, 2014).

GIS softwary lze tedy dělit dle přístupu ke zdrojovému kódu a možnosti jeho editace na open source programy a programy s uzavřeným kódem, a také z hlediska nutnosti vynakládání finančních prostředků na komerční a nekomerční (bezplatně přístupný) systém. Pro většinu programů platí, že varianta open source je spojena s bezplatným přístupem, a naopak software s uzavřeným kódem je obvykle spojen s komerčními produkty (Mísařová a kol., 2021). Obě tyto varianty přinášejí své výhody a nevýhody.

Výhodou komerčního GIS je především uživatelsky přívětivé prostředí a jednoduché používání nástrojů pro mapovou analýzu, u kterých komerční GIS nabízí rozsáhlé možnosti, a provedení těchto nástrojů je obvykle velmi kvalitní. Výhodou je také dobrá technická podpora od vydavatele softwaru (EARSC, 2017). Hlavní nevýhodou jsou pak obvykle vysoké vstupní náklady na pořízení softwaru, dalšími pak například nutnost delšího čekání na aktualizaci softwaru nebo nemožnost a složitost přizpůsobení nástrojů (Maurya a kol., 2015).

Výhodou nekomerčního open-source GIS je především jeho bezplatnost, flexibilnost vývoje a kratší doba čekání na aktualizace. Nevýhodou pak je většinou méně uživatelsky přívětivé prostředí (prostředí je často uzpůsobeno spíše vývojářům než začátečnickým uživatelům), neexistence profesionální technické podpory (která je však do jisté míry nahrazena množstvím volně dostupných návodů od zkušenějších uživatelů), nebo složitější použití některých analytických nástrojů (EARSC, 2017).

4.2 QGIS

Quantum GIS (dnes známý spíše pouze jako QGIS) je opensource GIS vytvořený v jazyce C++, dostupný pod veřejnou licencí GNU. QGIS byl založen Gary Shermanem roku 2002, který se rozhodl založit nový, rychlý GIS systém pro Linux (a obecně všechny operační systémy), který by podporoval široké spektrum datových zdrojů, jelikož komerční desktopové GIS programy té doby pracovaly pouze v určitém operačním systému. Oficiálně byl projekt QGIS registrován v červenci 2007 (Hugentobler, 2017).

QGIS a jeho funkce jsou průběžně aktualizovány, k čemuž dochází přibližně dvakrát do roku, s tím, že každý uživatel může také průběžně vstupovat do kódu a měnit ho dle svých potřeb. Velkou výhodou QGIS je fungování v různých operačních systémech (Linux, MacOS, Microsoft Windows), například oproti komerčnímu ArcGIS, vyvíjeného specificky pro Windows (Bolstad, Manson, 2022).

QGIS mimo jiné obsahuje hlavně následující funkce:

- Vizualizaci vektorových a rastrových dat – jednoduché importování, zobrazení a procházení dat, včetně tvorby mapových výstupů
- Import a export GPS dat – umožňuje vkládat GPS data skrze GPX provider, umožňující zaznamenávat polohu či trasy v terénu
- WMS (web map service)/WFS (web feature service) klient – umožňuje využívat online WMS zdroje jako rastrovou a WFS jako vektorovou vrstvu, které pro jejich velikost zpracovává jako virtuální vrstvy
- Prostorová analýza – umožňuje analyzovat rastrová nebo vektorová data a provádět na nich prostorové operace. Kromě vlastních nástrojů programu jsou zařazeny i funkce převzaté z programů GRASS nebo SAGA (Hugentobler, 2017)

Software QGIS byl pro účely této práce vybrán především pro jeho bezplatnost (s přihlédnutím k aplikaci v rámci výuky na středních školách je tento aspekt považován za nejdůležitější), dále pro stále poměrně jednoduché využití nástrojů analýzy a také dobře zpracované grafické rozhraní, které výrazně nekomplikuje uživateli práci s programem.

5 Vybraná matematická teorie GIS programů

5.1 Základní vektorové prvky

QGIS podobně jako další geoinformační systémy rozlišuje tři základní vektorové prvky: body, linie (linestring) a polygony, s tím, že umožňuje existenci i jejich multivariant (tedy multipoint, multiline a multipolygon). Tyto objekty jsou ukládány ve formě řetězců pomocí značkovacího jazyka WKT (Well-known text), jako prostý textový zápis (OGC, 2010).

Bod

Nejjednodušší variantou vektorového objektu je bod, který je jako 0-dimenzionální prvek reprezentován pouze jednou dvojicí souřadnic $[x; y]$, které odpovídají jeho poloze ve zvoleném souřadnicovém systému. Ve WKT je bod reprezentován jako POINT $(x\ y)$. Je-li daný objekt reprezentován více body, je daný objekt obsahující k bodů pomocí WKT popsán jako MULTIPOINT $((x_1\ y_1)(x_2\ y_2)\ldots(x_k\ y_k))$ (OGC, 2010). Obě varianty (POINT a MULTIPOINT) jsou umožněny jak v rámci geodatabáze GeoPackage, tak i v rámci jednoduššího uložení jako Shapefile.

Linie

Linie je jednodimenzionální prvek. V GIS programech nemusí linie představovat pouze jednoduchou úsečku ohraničenou svými koncovými body, ale i lomenou čáru (polyline), která je popsána svými lomovými body (krajní body jednotlivých úseček). Obecně je lomená čára popsaná posloupností vrcholů zapsána v jazyce WKT jako LINESTRING $(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)$ (OGC, 2010). Pokud tedy máme lomenou čáru popsanou trojicí bodů A, B, C, které v daném souřadném systému mají souřadnice $A = [1; 3], B = [2; -2], C = [-1; -1]$, bude prvek uložen jako LINESTRING (1 3, 2 −2,−1 −1). Podobně jako u bodů i zde existuje multivarianta, označená jako MULTILINESTRING – tuto variantu ale lze v rámci QGIS vytvořit pouze pro geodatabázi. QGIS taktéž umožňuje kromě lomených čar sestávajících z rovných úseků vytvářet i libovolné křivky – ty ale v této práci nejsou zahrnuty kvůli zvýšené složitosti pro práci s popsanými algoritmy.

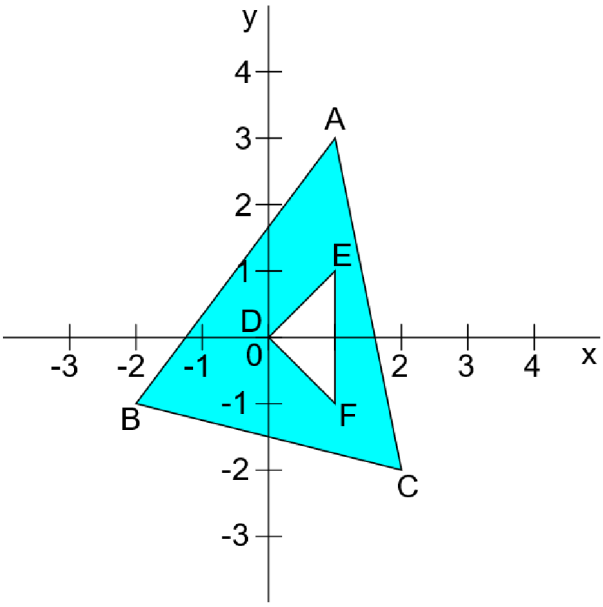
Polygon

Polygonem (mnohoúhelníkem) se v matematice rozumí část roviny ohraničená uzavřenou lomenou čarou. Opět je tedy popsán souřadnicemi jednotlivých vrcholů. Rozdíl v zápisu pomocí WKT mezi linestring a polygonem je ten, že u polygonu se počáteční bod zapíše znovu na konec řetězce, čímž se řetězec uzavře. Obecně je polygon v jazce WKT zapsán jako POLYGON $(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, x_1y_1)$ (OGC, 2010). Trojúhelník ABC s body totožnými jako linie popsaná výše (tedy $A = [1; 3], B = [-2; -1], C = [2; -2]$) bude popsán jako POLYGON (1 3, −2 −1, 2 −2,1 3).

Polygon v GISu ale nutně nemusí být lomenou čarou ohraničený pouze zvenku, ale může v sobě obsahovat také díry (Holes). Pak je tedy kromě uzavřené křivky, která ho odděluje od zbytku roviny popsán také jednou nebo více uzavřenými křivkami, které v něm danou díru vytyčují (OGC, 2010).

Pro činnost některých algoritmů (jako jsou v této práci níže popsané point in polygon algoritmus nebo algoritmus pro výpočet obsahu polygonu) je podstatné, aby řetězce představující vnitřní linie byly zapsány v opačném smyslu než řetězec představující vnější hranici. Standard OGC stanovuje, že body vnější hrany polygonu jsou zapsány proti směru hodinových ručiček (matematicky v kladném smyslu), a vnitřní hrany v opačném smyslu, tedy po směru hodinových ručiček (OGC, 2010).

Pokud by tedy výše popsaný trojúhelník ABC měl v sobě díru tvaru trojúhelníku s vrcholy D, E, F, kde $A = [1; 3], B = [-2; -1], C = [2; -2], D = [0; 0], E = [1; 1], F = [1; -1]$, pak bude tento objekt popsán jako POLYGON (1 3, −2 −1, 2 −2,1 3),(0 0, 1 1, 1 −1, 0 0)). Polygon se správným pořadím vrcholů je znázorněn v obrázku 1. Obecně je polygon zapsán ve WKT jako POLYGON((...),(...),...,(...)), kde první závorka udává vnější hranici (Exterior Ring) a libovolný počet dalších závorek udává vnitřní hranice (Interior Ring). Platí přitom, že žádné dvě hranice se nesmí vzájemně protínat (OGC, 2010). Neexistuje žádné pravidlo, které by zakazovalo, aby hranice polygonu protínala sama sebe, přesto ani tato možnost nebude v této práci pro zjednodušení uvažována, neboť některé algoritmy by se kvůli tomu zbytečně komplikovaly. Navíc se moc často v geografii nesetkáváme s polygony, jejichž hranice by protínala sama sebe.



Obrázek 1: Znázornění polygonu s dírou, vlastní tvorba

Také pro polygon existuje varianta MULTIPOLYGON, tedy vytvoření dvou či více ohraničených částí prostoru, které na sebe nemusí navazovat, ale jsou programem chápány jako jediný prvek. Jako příklad lze uvést stát Kanada, který se skládá z kontinentální části a množství ostrovů, a je tak představován několika oddělenými polygony, nicméně je žádoucí, aby se tyto oddělené části chovaly jako jeden polygon (například pokud cheme pro množinu nějakých bodů posoudit, zda leží ve státu Kanada, a nezajímá nás, zda se jedná o kontinentální nebo ostrovní část). V QGIS lze variantu MULTIPOLYGON vytvořit pouze pro formát uložení jako geodatabáze.

5.2 Metrické vlastnosti objektů

V GIS lze stejně jako v obecné analytické geometrii rozlišit dva základní typy úloh – polohové úlohy (v GIS uváděné spíše jako topologické problémy) řešící vzájemný vztah dvou objektů, jako je například existence jejich průniku, a metrické úlohy, které se zabývají měřením vlastností, jako je délka nebo plocha objektu a jejichž výsledkem je číslo.

Vzdálenost bodů a délka linie

Existuje několik způsobů, jak lze počítat vzdálenost dvou bodů (respektive délku linie) na zemském povrchu, přičemž způsoby výpočtu se odvíjejí od toho, jak chápeme prostředí,

ve kterém se tyto body nalézají – tedy zda uvažujeme body ležící v rovině, nebo body uvažujeme na kouli, respektive ellipsoidu.

Vzdálenost v rovině

Nejjednodušším případem je vzdálenost bodů v rovině, respektive délka linie, přičemž tyto dva pojmy lze v rovině považovat za totožné. Máme-li v rovině dané dva body o souřadnicích $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$, pak jejich vzdálenost (značenou $|AB|$) lze spočítat jako

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Chceme-li pak znát délku lomené čáry tvořené libovolným počtem úseček, nebo obvod polygonu v rovině (kde hranici polygonu tvoří lomená čára, jejíž počáteční bod se shoduje s koncovým), jedná se vždy o sumu délek jednotlivých úseček tvořící lomenou čáru, respektive hranici polygonu. Výpočet se samozřejmě komplikuje, pokud jsou úseky nelineární, ale jedná se o obecnou křivku, pro účely této práce jsou ale brány v úvahu pouze prvky tvořené rovnými liniemi.

Vzdálenost na sféře a elipsoidu

Vzdálenost na sféře, respektive elipsoidu, je vzhledem ke stejnému problému v rovině daleko komplikovanější záležitostí. Jednodušším případem je nalezení vzdálenosti dvou bodů při zjednodušení zemského tělesa na kouli, kterou je možno popsat jejím středem a poloměrem R. Nejkratší vzdálenost dvou bodů na sféře se nazývá ortodroma, a je definována jako kratší úsek hlavní kružnice procházející oběma body (přitom hlavní kružnice je definována jako průnik sféry a roviny procházející středem koule, příkladem takové hlavní kružnice může být například rovník). Výpočet vychází z kosinové věty pro kulovou plochu, a platí:

$$d_{ij} = R \cdot arccos(sin\varphi_i \cdot sin\varphi_j + cos\varphi_i \cdot cos\varphi_j \cdot cos|\lambda_i - \ \lambda_j|)$$

kde R je poloměr referenční koule, φ označuje zeměpisnou šířku bodu a λ zeměpisnou délku, kde $-90 \leq \varphi \leq 90$ a $-180 \leq \lambda \leq 180$, kde záporné hodnoty znamenají polohu na jižní (pro šířku), respektive na západní (pro délku) polokouli (Čapek a kol., 1992).

V praxi se využívá spíše Haversinova formule, která se na rozdíl od vzorce vycházejícího z kosinové věty vyhýbá některým výpočetním problémům, které vznikají pro malé hodnoty rozdílu úhlů (de Smith a kol., 2007). Výpočet pak probíhá podle vzorce:

$$d_{ij} = 2R \cdot arcsin\left(\sqrt{sin^2\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right) + sin^2\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}\right) \cdot cos\varphi_i \cdot cos\varphi_j}\right)$$

Výpočet délky na elipsoidu je náročnější záležitostí, která vzhledem k rozsahu práce a hlavně jejímu účelu (tedy využití na středních školách) není zařazena. V QGIS je sice výpočet délky linie využíván primárně s použitím výpočtu na elipsoidu, ale algoritmus, který tento výpočet zpracovává, by nebyl pro středoškolského studenta ničím jiným než dosazováním do vzorce, kterému by jen těžko porozuměl.

Plocha polygonu v rovině

QGIS uchovává polygon tak, jak bylo popsáno výše, tedy posloupností dvojic souřadnic v daném souřadnicovém systému (s pravoúhlými souřadnými osami), která začíná a končí stejnou dvojicí, čímž je zajištěno uzavření polygonu. Obecně posloupnost, která uchovává informace o souřadnicích polygonu o n vrcholech, vypadá jako $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_n, y_n]$, $[x_1, y_1]$. Přitom posloupnost by měla být seřazena tak, že body zakreslené v kartézské soustavě jdou proti směru hodinových ručiček (matematicky kladném smyslu). Výpočet obsahu polygonu v QGIS probíhá podle tzv. lichoběžníkového (Simpsonova) pravidla (de Smith a kol., 2007). Pro obsah S obecného polygonu daného n vrcholy v rovině platí:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k+1})(y_{k+1} + y_k)$$

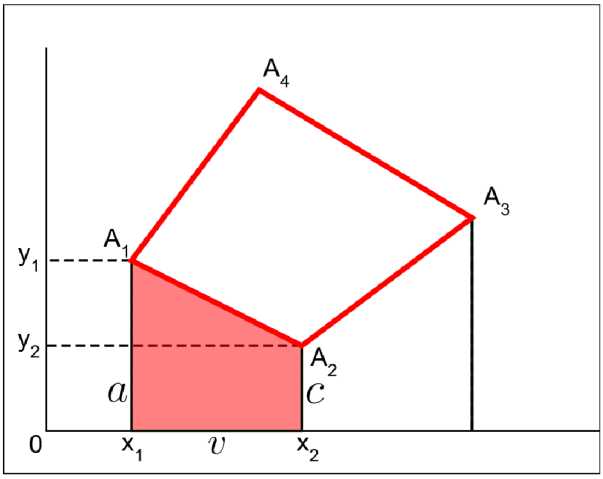
Základní myšlenka, která stojí za tímto algoritmem, je následující: pro každé dva po sobě jdoucí vrcholy polygonu (obecně označené souřadnicemi $[x_k, y_k]$ a $[x_{k+1}, y_{k+1}]$, u něhož budeme pro jednoduchost zatím předpokládat, že všechny jeho souřadnice jsou kladné, a tedy celý polygon leží v prvním kvadrantu kartézské souřadné soustavy) vypočteme obsah lichoběžníku, který se vytvoří spuštěním kolmic z vrcholů polygonu na osu x. Vrcholy takového lichoběžníku budou mít souřadnice $[x_k, y_k], [x_k, 0], [x_{k+1}, 0]$ a $[x_{k+1}, y_{k+1}]$.

Obsah obecného lichoběžníku se vypočte jako $\frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot v$, kde a, c jsou dvě rovnoběžné

strany (základny) lichoběžníku a v je výška lichoběžníku, tedy nejkratší vzdálenost těchto rovnoběžných stran. V takto vytvořeném lichoběžníku je ale velikost stran a, c rovna souřadnicím y_k, y_{k+1} (platí pouze pro kladné hodnoty souřadnic, v jiném případě by bylo nutné využít absolutní hodnoty), a výška lichoběžníku je pak vzdálenost bodů $[x_k, 0], [x_{k+1}, 0]$, tedy

$$v = \sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (0 - 0)^2} = |x_k - x_{k+1}|$$

Na obrázku 2 je naznačena podoba tohoto lichoběžníku pro hranu A_1A_2 čtyřúhelníku $A_1A_2A_3A_4$.



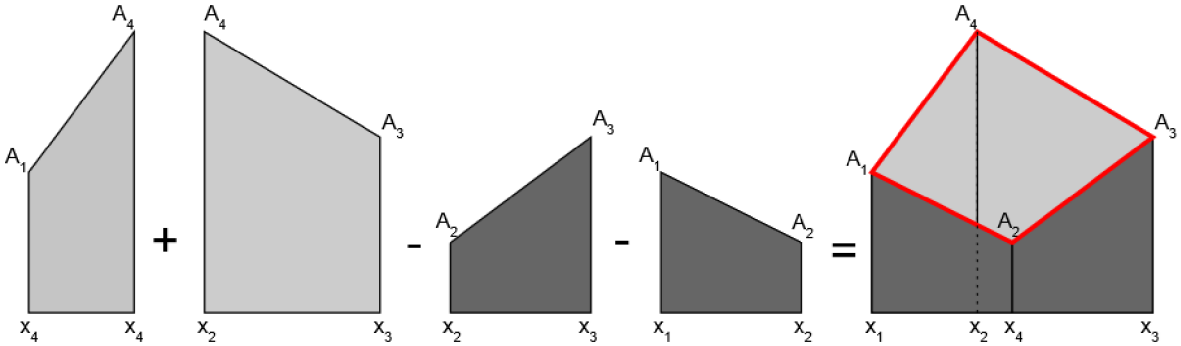
Obrázek 2: Lichoběžník pod hranou A_1A_2, vlastní tvorba

Obsah v pořadí k-tého lichoběžníku lze tedy vypočítat jako:

$$S_k = \frac{1}{2}(y_k + y_{k+1}) \cdot |x_k - x_{k+1}|$$

Simpsonovo pravidlo ale záměrně vynechává u výšky $|x_k - x_{k+1}|$ absolutní hodnotu. To vede k tomu, že některé obsahy lichoběžníků vyjdou jako záporné číslo. Konkrétně se jedná o ty lichoběžníky, u kterých platí $x_{k+1} > x_k$. Tedy pokud $x_k > x_{k+1}$, potom se obsah lichoběžníku přičítá, a naopak pokud $x_{k+1} > x_k$, obsah lichoběžníku se od celkového součtu odečítá. Jednodušší pohled říká, že pokud jdeme po hraně polygonu od bodu A_k k A_{k+1} směrem zleva doprava, obsah lichoběžníku pod hranou se odečte, a při pohybu zprava doleva se obsah lichoběžníku přičte.

Na obrázku 3 je naznačen smysl využití odečítání a přičítání obsahu lichoběžníků. Pro získání obsahu polygonu $A_1A_2A_3A_4$ je potřeba sečíst obsahy lichoběžníků pod hranami A_3A_4 a A_4A_1 (pro které platí, že $x_3 > x_4$ a $x_4 > x_1$, tedy i dle vzorce dojde k jejich přičtení), a od nich odečíst obsahy polygonů pod hranami A_1A_2 a A_2A_3 (pro které pro změnu platí, že $x_2 > x_1$ a $x_3 > x_2$, a dle vzorce dojde naopak k jejich odečtení). Výsledný součet obsahů lichoběžníků skutečně dává obsah požadovaného polygonu.



Obrázek 3: Složení obsahu polygonu z jednotlivých lichoběžníků, vlastní tvorba

Tento přístup pouze nastiňuje základní myšlenku algoritmu, navíc pouze pro polygon s kladnými hodnotami souřadnic. Za využití Greenovy věty, která se týká křivkových integrálů druhého druhu, lze dokázat, že tento algoritmus funguje pro jakékoliv hodnoty souřadnic, tedy i pro polygony v jiném než prvním kvadrantu kartézské soustavy souřadnic. Důkaz ovšem překračuje znalosti středoškolských studentů, proto nemá smysl ho uvádět.

Algoritmus funguje také v případě, kdy bude mít polygon kromě vnější hranice i nějakou hranici vnitřní, a budou se v něm tedy vyskytovat díry. Vrcholy vnitřní hranice jsou obecně dle definice polygonu zaznamenány ve směru chodu hodinových ručiček. Tento zápis obrací chod algoritmu, tedy ty plochy, které by se u proti směru ručiček orientované hranice měly v celkové sumě přičítat, se nyní budou odečítat, a opačně - obsah díry tedy vyjde jako záporné číslo.

Pro výpočet obsahu polygonu s dírami tedy není třeba ve vzorci nic měnit, pouze dodržet správné pořadí vrcholů polygonu, a následně sečíst plochy získané výpočtem z vnější hranice (který vyjde jako kladné číslo) a z vnitřních hranic (které vyjdou jako záporná čísla). Je samozřejmě nutné chápat vnější a vnitřní hranice jako oddělené subjekty, tedy například nepočítat obsah pod spojnicí posledního vrcholu vnější hranice a prvního vr-

cholu vnitřní hranice, neboť žádná taková hrana v polygonu neexistuje. Ukázka výpočtu pro polygon s dírou je součástí přílohy 1.

Plocha polygonu na elipsoidu

Vhodnější (ve smyslu lépe odpovídající reálné problematice) a na použití jednodušší funkcí v QGIS je výpočet plochy polygonu na elipsoidu. Vzhledem k výpočetní náročnosti ani tento výpočet není zařazen do této práce, protože využívá pokročilé matematické znalosti. Smysl algoritmu, který QGIS využívá, by zcela jistě nebyl pro středoškolského studenta pochopitelný, což je ale v rozporu s účelem této práce. Lze zmínit, že algoritmus pro výpočet plochy polygonu na elipsoidu vychází z podobného principu, jako v případě polygonu v rovině, pouze se nevytváří lichoběžníky spuštěním kolmic na osu x, ale vytváří se sférické trojúhelníky, jejichž jednou hranou je vždy hrana polygonu, a zbylé dvě jsou spojnice koncových bodů hrany se zeměpisným pólem. Samotný kód v QGIS je převzat z jiného open-source GIS programu GRASS GIS (GRASS GIS 8 Programmer's Manual, 2001 - 2013).

5.3 Obalová zóna (Buffer)

Funkci obalová zóna, jednu z nejvýznamnějších funkcí prostorové analýzy v GIS, lze definovat jako množinu bodů dané vlastnosti. Konkrétně ji lze definovat jako množinu všech bodů, které mají od daného vektorového prvku (tedy bodu, linie nebo polygonu) vzdálenost menší nebo rovnou zadané hodnotě. QGIS samozřejmě nutně potřebuje určitou formu analytického vyjádření obalové zóny, aby ji mohl správně zobrazovat a používat ji pro prostorové analýzy, pro její složitost ale budeme pracovat s myšlenkou obalové zóny pouze v rámci konstrukční geometrie.

Studenti se v rámci středoškolské matematiky setkají například s definicí kružnice jako množiny bodů, které mají od daného bodu S (zvaný také „střed kružnice“) danou vzdálenost r (nazývanou „poloměr“). Podobně se také setkají s množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímky – tedy dvěma rovnoběžkami v dané vzdálenosti d (Pomykalová, 2013). Za použití spojení těchto poznatků už lze definovat obalovou zónu pro bod, lomenou čáru a polygon.

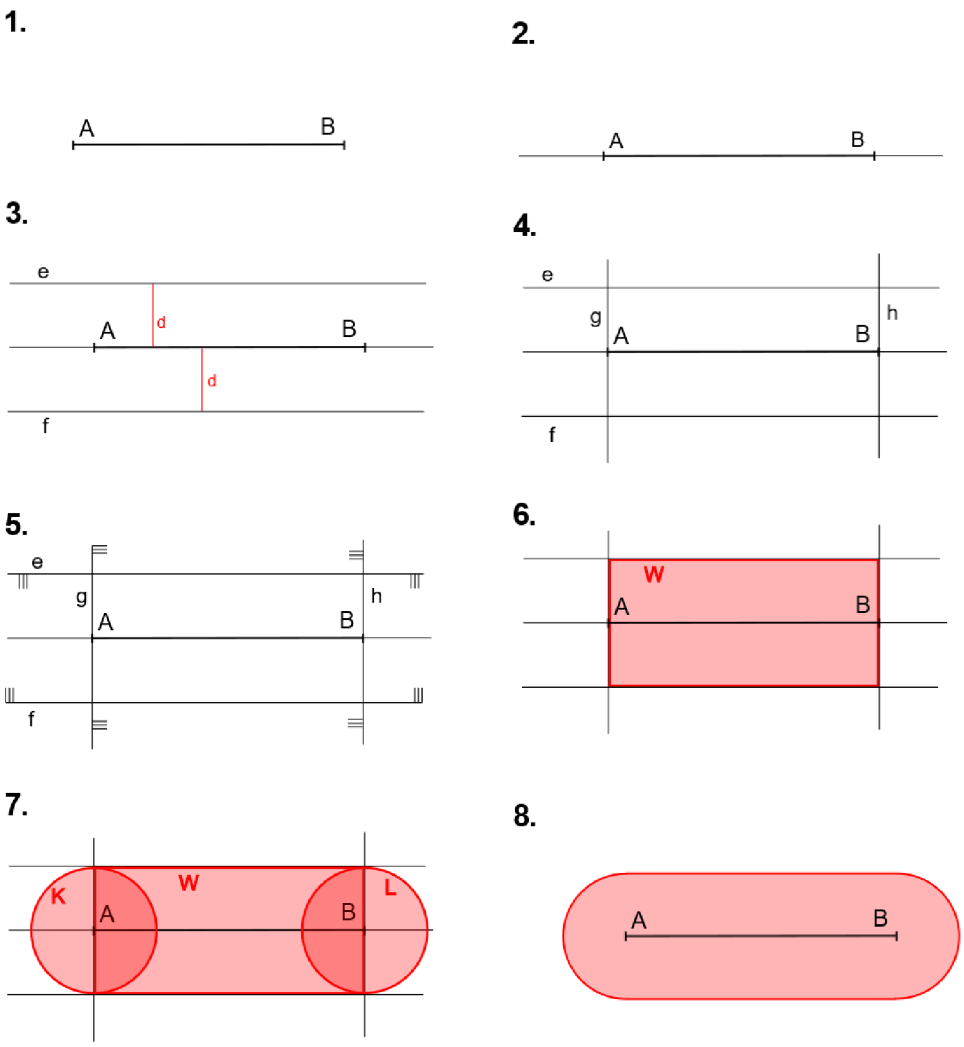
Nejjednodušším případem je obalová zóna bodové vrstvy. Množina bodů, které mají od bodu vzdálenost menší nebo rovnou dané hodnotě, je kruh o poloměru dané hodnoty – obalovou zónu tedy tvoří kružnice a její vnitřní oblast. Specifikem QGIS je to, že obalovou zónu nevytváří jako kruhovou, ale pouze ji aproximuje jako pravidelný mnohoúhelník, jehož vrcholy leží na kružnici o zadaném rozměru obalové zóny. Přesnost této aproximace je dána zadaným počtem segmentů. Tyto segmenty jsou u bufferu v QGIS udávány pro čtvrtkruh, tedy pokud je počet segmentů zadán jako 5, nebude buffer aproximován jako pětiúhelník, ale jako mnohoúhelník se čtyřnásobným počtem vrcholů, tedy dvacetiúhelník. Samozřejmě čím více vrcholů zvolíme pro aproximaci, tím přesněji bude odpovídat vzniklý mnohoúhelník kruhu (na druhou stranu se ale bude zvyšovat časová náročnost například u operací překryvu).

Složitějším případem je způsob, jak definovat buffer pro linie. Množina bodů nacházejících se ve vzdálenosti menší nebo rovné udané hodnotě od úsečky se běžně mezi definované množiny bodů ve středoškolské matematice nezařazuje. V tomto případě lze zvolit například tento vlastní způsob definice:

Mějme úsečku AB, pro kterou chceme zkonstruovat její obalovou zónu o velikosti d. Body A, B jednoznačně zadávají přímku AB, která prochází těmito body. Dále zkonstruujeme dvě rovnoběžné přímky e a f, jejichž vzdálenost od přímky AB je d. V dalším kroku zkonstruujeme dvě přímky g, respektive h, které jsou kolmé na AB, a procházejí bodem A, respektive B. V posledním kroku zkonstruujeme kružnici k se středem A a poloměrem d a kružnici l se středem B a poloměrem d.

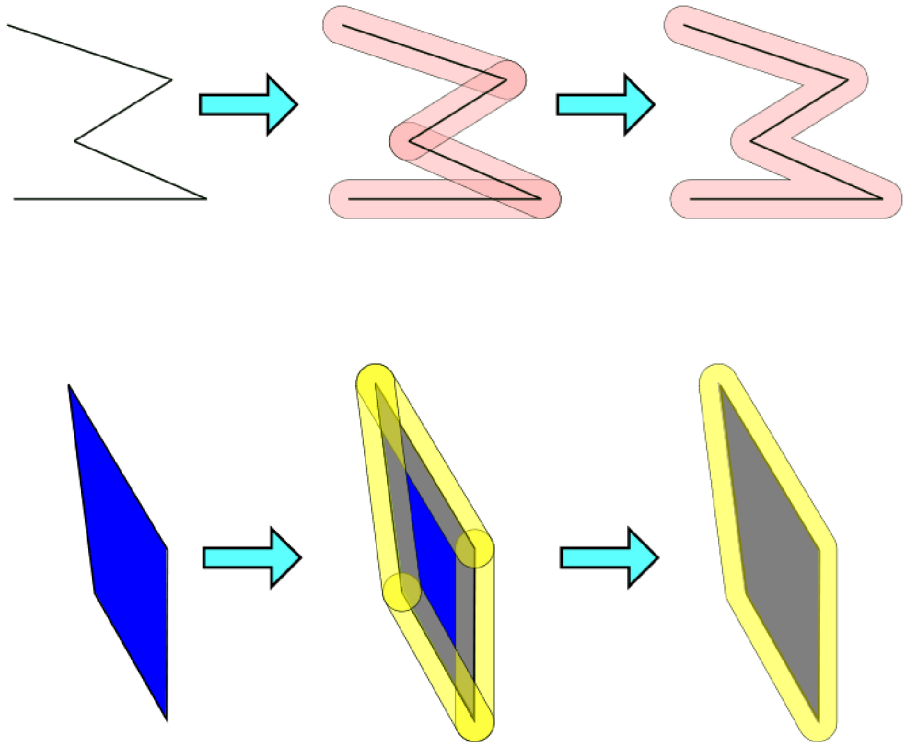
Nyní definujeme obalovou zónu pomocí průniků a sjednocení polorovin. Polorovinu vzhledem k přímce e, ve které leží bod A, pojmenujeme $\overrightarrow{eA}$. Podobně pro f a A definujeme $\overrightarrow{fA}$. Dále pro hraniční přímku g a bod B definujeme polorovinu $\overrightarrow{gB}$ a pro h a bod A polorovinu $\overrightarrow{hA}$. Průnikem těchto polorovin $\overrightarrow{eA} \cap \overrightarrow{fA} \cap \overrightarrow{gB} \cap \overrightarrow{hA}$ včetně jejich hraničních přímek vznikne v rovině obdélníková oblast, označená v obrázku jako W

Posledním krokem je vytyčení obalové zóny koncových bodů úsečky, které představují kruhy o poloměru d včetně hraniční kružnice (označme tyto oblasti jako K a L). Sjednocením $W \cup K \cup L$ získáme požadovanou množinu bodů - obalovou zónu úsečky AB. Postup konstrukce je znázorněn na obrázku 4.



Obrázek 4: Definice obalové zóny úsečky, vlastní tvorba

Pro lomenou čáru sestávající z jednoduchých úseček je pak obalovou zónou sjednocení obalových zón jednotlivých úseček. Podobně pro polygon je obalovou zónou sjednocení obalových zón úseček tvořících hranice tohoto polygonu, v pojetí QGIS ale navíc sjednocené s plochou původního polygonu, jak je znázorněno na obrázku 5. Praktická otázka konstrukce obalové zóny pro lomenou čáru a polygon je řešena v rámci přiloženého výukového materiálu (Příloha 1).



Obrázek 5: Tvorba obalové zóny lomené čáry a polygonu, vlastní tvorba

5.4 Point-in-polygon problém

Nejzákladnějším a na pochopení i zpracování nejjednodušším problémem prostorové analýzy pro vektorové prvky je tzv. point in polygon (zkráceně PIP) problém. PIP řeší úlohu, zda se daný bod nachází uvnitř, nebo mimo daný polygon. Existují dva hlavní elementární přístupy, kterými GIS programy řeší tento problém.

Even-odd algoritmus

Prvním způsobem je tzv. Even-odd algoritmus (zvaný též jako Ray casting algoritmus), jehož základní myšlenka je jednoduchá: ze zkoumaného bodu vyšleme polopřímku a pozorujeme, kolikrát protne linie tvořící hranici daného polygonu. Jestliže je počet průsečíků lichý, pak bod leží uvnitř daného polygonu. Jestliže počet průsečíků je sudý, potom bod leží mimo polygon (Xiao, 2016). V tomto případě je nutné si uvědomit, že nula je také sudé číslo, jelikož paritu čísla (tedy sudost nebo lichost) určujeme podle zbytku po vydělení čísla dvěma. Je-li zbytek 0, je číslo sudé, je-li zbytek 1, je liché. Díky tomu je nula chápána jako sudé číslo, a tedy pokud neexistuje žádný průsečík, leží bod mimo polygon.

Algoritmus vychází z věty nazývané Jordan Curve Theorem. Ta (ve značném zjednodušení) říká, že každá uzavřená křivka v rovině (v tomto případě hranice polygonu) rozděluje rovinu na dvě části, které můžeme nazvat jako vnitřní oblast polygonu (Interior) a vnější oblast (Exterior) (Tverberg, 1980). Tím pádem při každém překročení hrany polygonu se musíme dostávat z vnitřku polygonu vně, nebo naopak. Zároveň víme, že polopřímka vedená z bodu je nekonečná, čili se musí nakonec dostat zcela mimo polygon, který má na rozdíl od ní konečné rozměry.

Při každých dvou překročeních hrany polygonu se ocitáme na stejné straně (myšleno vnitřek/vnějšek) polygonu. Je-li tedy počet průsečíků sudý, potom musí být bod, ze kterého je polopřímka vyslána, ve stejné části roviny, ve které nakonec od určitého bodu zůstance polopřímka směřující do nekonečna, tedy mimo polygon. Naopak pro lichý počet průsečíků musí bod ležet uvnitř polygonu, v opačené části roviny než koncová část polopřímky.

Winding-number algorithm

Druhým způsobem, jak zjistit polohu bodu vůči polygonu, je tzv. Winding-number algoritmus. Tento algoritmus počítá tzv. winding number (wn), tedy číslo vyjadřující, kolikrát se uzavřená křivka (v tomto případě hranice polygonu) otočí kolem daného bodu (de Smith a kol., 2007). Mějme polygon o vrcholech $V_1, V_2 \ldots, V_n = V_0$ a bod P, pro který chceme vyhodnocovat jeho polohu vůči polygonu. Algoritmus vychází ze vzorce pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory, tedy:

$$\varphi_i = arccos\left(\frac{\boldsymbol{PV_i} \cdot \boldsymbol{PV_{i+1}}}{|\boldsymbol{PV_i}||\boldsymbol{PV_{i+1}}|}\right)$$

kde $\boldsymbol{PV_i} = V_i - P$ a $\boldsymbol{PV_{i+1}} = V_{i+1} - P$ značí vektor mezi body P a V_i, respektive P a V_{i+1}, operace $\boldsymbol{PV_i} \cdot \boldsymbol{PV_{i+1}}$ skalární součin těchto vektorů a $|\boldsymbol{PV_i}||\boldsymbol{PV_{i+1}}|$ součin velikostí (norem) těchto vektorů, počítaných pro obecný dvoudimenzionální vektor $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ jako $|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$. Z tohoto vzorce lze vypočítat úhel svíraný vektory $\boldsymbol{PV_i}$ a $\boldsymbol{PV_{i+1}}$, značený jako φ_i. (Xiao, 2016)

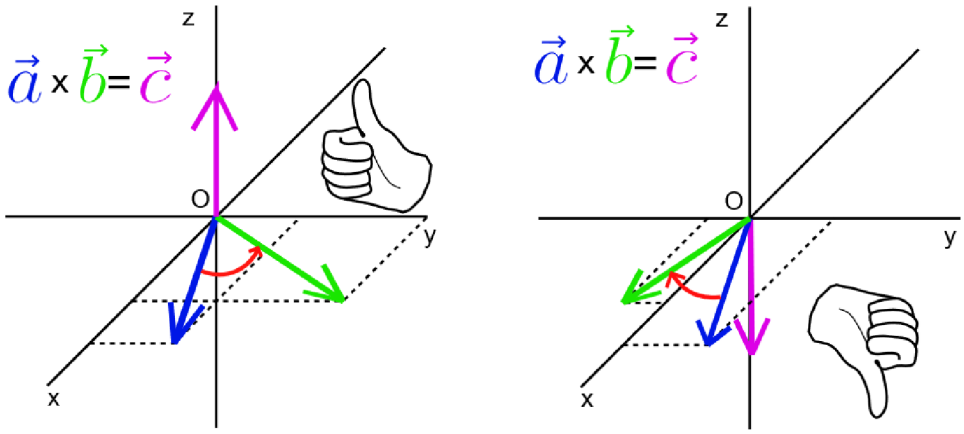
Algoritmus tedy vytvoří vektory z bodu P ke každému vrcholu polygonu, a následně pro každé dva po sobě jdoucí vrcholy polygonu zjistí úhel, který svírají jim příslušné vektory.

Tento úhel je potřeba brát včetně jeho znaménka, které ukazuje, zda dochází k otočení proti směru hodinových ručiček, nebo po směru (de Smith a kol., 2007). Uvedený vzorec pro úhel mezi vektory ale nereflektuje smysl otáčení úhlu (lze snadno ověřit, že výsledek skalárního součinu zůstává stejný bez ohledu na pořadí vektorů), je tedy potřeba ho rozšířit, aby byl použitelný bez nutnosti dále uvažovat nad smyslem otáčení.

K tomu lze využít vektorový součin vektorů $\boldsymbol{PV_i}$ a $\boldsymbol{PV_{i+1}}$. Je třeba tyto dvoudimenzionální vektory (určujeme polohu bodu vůči polygonu v rovině, souřadnice všech bodů a vektorů mají proto dvě složky) rozšířit o třetí, nulovou složku, aby bylo možné provést vektorový součin. Pro vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, platí, že v tomto pořadí tvoří pravotočivou bázi (za podmínky, že vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ nejsou lineárně závislé, tedy že $\boldsymbol{a} \neq k\boldsymbol{b}$ pro libovolné $k \in R$), a vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ (tedy i na rovinu, ve které tyto vektory leží). Tím pádem pro vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, které leží v rámci trojrozměrného kartézského systému $Oxyz$ v rovině Oxy (neboť mají nulovou třetí složku), bude vektor $\boldsymbol{c}$ kolmý na rovinu Oxy, a bude mít první dvě složky nulové a třetí složku nenulovou.

Definujme ještě, co budeme chápat pod pojmem otočení od vektoru k vektoru. Otočením od vektoru $\boldsymbol{u}$ k vektoru $\boldsymbol{v}$ budeme rozumět transformaci, která pro dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ umístěné ve shodném bodu transformuje $\boldsymbol{u}$ tak, že bude mít shodný směr a orientaci jako $\boldsymbol{v}$, ale ne nutně stejnou velikost.

Pro vektorový součin lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, 0)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, 0)$ platí, že $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$. Vzhledem k pravotočivosti báze vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ bude v případě otočení od vektoru $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$ proti směru hodinových ručiček hodnota třetí složky vektoru $\boldsymbol{c}$ kladná, při otáčení od $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$ po směru hodinových ručiček záporná. To lze vyvodit pomocí tzv. pravidla pravé ruky, které platí pro vektorový součin. To říká, že pokud prsty pravé ruky stočíme ve směru otáčení od vektoru $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$, bude vztyčený palec pravé ruky ukazovat směr vektoru $\boldsymbol{c}$. Princip je naznačen na obrázku 6. V prvním případě směřuje vektor $\boldsymbol{c}$ „vzhůru“ (kladnost třetí složky vektoru), ve druhém případě „dolů“ (zápornost třetí složky).



Obrázek 6: Vektorový součin a pravidlo pravé ruky, vlastní tvorba

Směr rotace od $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$ lze tedy poznat čistě ze znaménka třetí složky, která se rovná výrazu $a_1b_2 - a_2b_1$. V tomto případě lze využít funkce signum (dále jako sgn). Pro tu platí následující definice:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & pro\ x < 0, \\ 0 & pro\ x = 0 \\ 1 & pro\ x > 0 \end{cases}$$

Definujme proto výraz O_i, který bude určovat smysl otáčení od vektoru $\boldsymbol{PV_i} = (a_1, a_2, 0)$ k vektoru $\boldsymbol{PV_{i+1}} = (b_1, b_2, 0)$. Jeho hodnota pak bude $O_i = a_1b_2 - a_2b_1$ (tedy třetí složka vektorového součinu $\boldsymbol{PV_i} \times \boldsymbol{PV_{i+1}}$), a pomocí $sgn(O_i)$ tak můžeme každému úhlu přiřadit i směr otáčení - otočení proti směru hodinových ručiček se budou přičítat, otočení v opačném směru odečítat.

Konečný vzorec pro wn lze tedy zapsat jako:

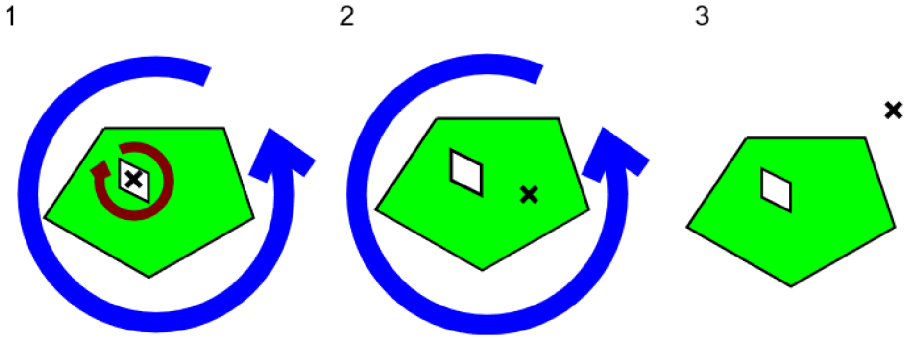
$$wn = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n} arccos\left(\frac{\boldsymbol{PV_i} \cdot \boldsymbol{PV_{i+1}}}{|\boldsymbol{PV_i}||\boldsymbol{PV_{i+1}}|}\right) \cdot sgn(O_i)$$

Pokud je wn nulové, znamená to, že bod leží mimo polygon, pro nenulová wn leží bod uvnitř polygonu (de Smith a kol., 2007). Smyslem vydělení celé sumy hodnotou 2π je počítání celých otáček hranice polygonu namísto celkového úhlu (samozřejmě uvažujeme výsledek v radiánech, pro stupně by bylo nutno dělit 360°). Algoritmus by nicméně fungoval i bez tohoto vydělení.

Při ručním výpočtu je třeba brát ohled na zaokrouhlování - vyjde-li nenulová hodnota, která je ale velmi blízko nule (například v řádu setin), pak se jedná pravděpodobně pouze o chybu vzniklou zaokrouhlováním, a bod ve skutečnosti leží mimo polygon (měl by tedy správně mít hodnotu wn = 0).

Tento algoritmus je jedním z těch, pro které je klíčová definice vnitřních hranic (a jimi vzniklých „děr“) v polygonu. Je důležité, aby posloupnost bodů tvořících vnitřní hranici polygonu měla opačný smysl otáčení než hranice vnější.

Na obrázku 7 jsou naznačeny tři možné případy polohy bodu vůči polygonu s dírou. V prvním případě leží bod uvnitř díry, algoritmus tedy vůči vnější hranici vyhodnotí jedno otočení o plný úhel proti směru hodinových ručiček, ovšem následně dojde k otočení v opačném smyslu vůči vnitřní hranici. Součtem jedné otočky s kladným znaménkem a jedné otočky se záporným znaménkem se celkový počet otoček vynuluje, a bod je vyhodnocen jako ležící vně polygonu (díra není součástí vnitřní oblasti polygonu).



Obrázek 7: Winding number algoritmus pro polygon s dírou, vlastní tvorba

Ve druhém případě na obrázku 7 algoritmus vyhodnotí otočku vůči vnější hranici, vůči vnitřní hranici je počet otoček nulový - bod leží mimo díru. Celkový výsledek je jedna otočka a bod ležící uvnitř polygonu. Ve třetím případě pak bod leží vně polygonu, počet otoček proto bude nulový vůči vnitřní i vnější hranici.

Závěrem je nutné podotknout, že algoritmus, který ve skutečnosti používají GIS programy, není ani jeden z výše uvedených, ale kvůli optimalizaci procesu je užíván algoritmus, který lze nazvat jejich kombinací. Tento algoritmus využívá počítání průsečíků polopřímky vyslané ze zkoumaného bodu s hranami polygonu s tím, že navíc počítá, zda hrana prochází přes polopřímku „shora dolů“ nebo naopak (Kumar, Bangi, 2018). To slouží jako alternativní výpočet winding number bez nutnosti využívat funkce inverzního

kosinu, která je pro počítač v rámci algoritmu časově nejnáročnější výpočetní záležitost (de Smith a kol., 2007). Tento algoritmus navíc pomáhá řešit některé momenty, ve kterých Even-odd algoritmus selže, například pokud vyslaná polopřímka prochází přesně přes vrchol polygonu (Kumar, Bangi, 2018).

Přesto byly pro tuto práci vybrány dva výše popsané algoritmy, a to především proto, že pracují s pojmy jako úhel mezi vektory nebo vektorový součin, a umožňují tak smysluplně využít středoškolské učivo matematiky. Naopak v realitě GIS využívaný algoritmus musí zavádět některé nové, pro studenta pravděpodobně méně intuitivní znalosti.

5.5 Průsečík linií

Druhým důležitým algoritmem pro funkce vektorové analýzy je hledání průsečíku linií. Nejde pouze o hledání průsečíků mezi liniovými vrstvami, významnější je užití v překryvných funkcích. V kombinaci s PIP je hledání průsečíků linií klíčovou součástí všech funkcí překryvné analýzy jako Protnutí, Sjednocení nebo Rozdíl.

Mějme dvě linie (úsečky), pro které chceme určit jejich vzájemné průsečíky. Prvním krokem algoritmu pro nalezení průsečíku dvou linií je určit, zda vůbec existuje průsečík těchto linií. Uvažujme dvě úsečky, kde AB je dána krajními body $A = [x_a, y_a]$ a $B = [x_b, y_b]$, a úsečka CD je dána body $C = [x_c, y_c], D = [x_d, y_d]$. Dále uvažujme přímky p_1, která prochází body A, B, a přímku p_2, která prochází body C a D. Průsečík úseček AB, CD může existovat jen v případě, že krajní body jedné úsečky leží v opačných polorovinách oddělených přímkou procházející body druhé úsečky (tedy body A, B neleží ve stejné polorovině vzhledem k přímce CD a C, D neleží ve stejné polorovině vzhledem k AB) (Xiao, 2016).

Algoritmus pro vyhodnocení polohy využívá vlastností vektorového součinu, podobně jako winding number algoritmus v předchozí podkapitole. Mějme dány body $A = [x_a, y_a]$, $B = [x_b, y_b], C = [x_c, y_c]$ a $D = [x_d, y_d]$, kde body C, D zadávají přímku, vůči které vyhodnocujeme polohu bodů A a B. Definujme vektory $\boldsymbol{AC} = (x_c - x_a, y_c - y_a), \boldsymbol{AD} = (x_d - x_a, y_d - y_a), \boldsymbol{BC} = (x_c - x_b, y_c - y_b)$ a $\boldsymbol{BD} = (x_d - x_b, y_d - y_b)$.

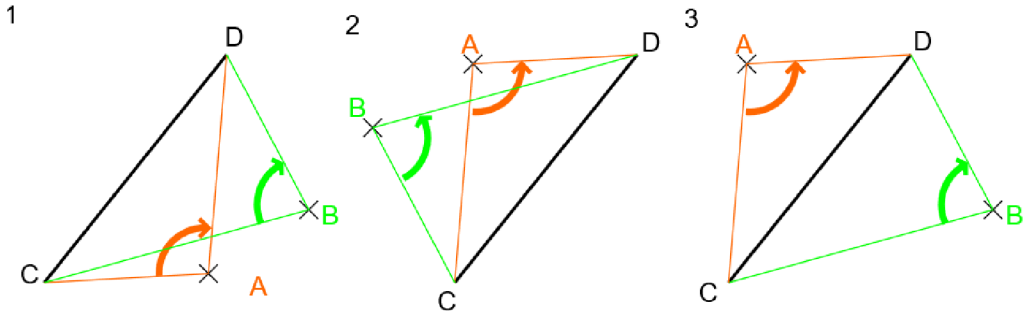
Vektorový součin není definován ve dvojrozměrném prostoru, je tedy nutné pomoci si

tím, že z dvojdimenzionálních vektorů vytvoříme třídimenzionální, a to přidáním nuly jako třetí souřadnice (vektory se tím de facto nezmění, stále budou ležet ve stejné rovině, pouze tuto rovinu nyní uvažujeme v trojrozměrném prostoru). Vektory tedy budou definovány jako $\boldsymbol{AC} = (x_c - x_a, y_c - y_a, 0)$ atd. Následně vypočteme vektorové součiny $\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD} = (0, 0, (x_c - x_a)(y_d - y_a) - (x_d - x_a)(y_c - y_a))$ a $\boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD} = (0, 0, (x_c - x_b)(y_d - y_b) - (x_d - x_b)(y_c - y_b))$.

Vektor vzniklý vektorovým součinem vektorů $\boldsymbol{AC}$ a $\boldsymbol{AD}$ tvoří s těmtito vektory pravotočivou bázi (je nutné zachovat pořadí vektorů $\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{AD}, \boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$) – můžeme tedy uplatňovat pravidlo pravé ruky. Stejně jako v případě winding number algoritmu bude třetí složka vektoru $\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ kladná, pokud je smysl otáčení od vektoru $\boldsymbol{AC}$ k $\boldsymbol{AD}$ proti směru hodinových ručiček, a záporná, pokud je smysl otáčení po směru hodinových ručiček (viz obrázek 6).

Na obrázku 8 jsou naznačeny tři případy možné polohy bodů A a B vzhledem k přímce CD. V prvních dvou případech je smysl otáčení od $\boldsymbol{AC}$ k $\boldsymbol{AD}$ shodný se smyslem otáčení od $\boldsymbol{BC}$ k $\boldsymbol{BD}$, a body A, B leží ve stejné polorovině. V těchto případech je třetí složka vektorů $\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ a $\boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD}$ shodná - v prvním případě mají oba vektory zápornou třetí složku (dochází k otáčení po směru hodinových ručiček, a vzniklý vektor tedy směřuje směrem „od nás“), ve druhém případě mají oba vektory vzniklé vektorovým součinem kladnou třetí složku (a směřují dle pravidla pravé ruky směrem „k nám“).

Ve třetím případě leží body A, B v opačných polorovinách, a vektory $\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ a $\boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD}$ mají opačné znaménko třetí složky – v tomto případě vektor $\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ kladnou, $\boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD}$ zápornou. Body A, B tedy leží v opačných polorovinách vůči CD právě tehdy, když výše posané vektorové součiny mají opačné znaménko třetí složky. Stejné pravidlo (pouze s pozměněnými vektory) pak platí pro polohu bodů C, D vůči AB – ty pro existenci průsečíku úseček musí také ležet v opačných polorovinách vůči AB (Xiao, 2016).



Obrázek 8: Určení polohy bodů A, B vzhledem k přímce CD, vlastní tvorba

Zjistíme-li, že koncové body úseček AB a CD skutečně leží v navzájem různých polorovinách, víme tím automaticky, že existuje jejich průsečík, a problém průsečíku úseček lze převést na problém průsečíku přímek (Xiao, 2016). GIS uvažuje přímky ve směrnicovém tvaru, obecně zapsaném jako $y = \alpha x + \beta$, kde α, β jsou reálné koeficienty. Směrnice je vyjádřením rychlosti růstu přímky, tedy rozdíl souřadnic na ose y dělený rozdílem souřadnic na ose x. Pro body $A = [x_a, y_a], B = [x_b, y_b]$ získáme směrnicový tvar přímky jako:

$$y = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \cdot (x - x_a) + y_a$$

Podobně pro body C, D získáme rovnici:

$$y = \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} \cdot (x - x_c) + y_c$$

Pro zjednodušení nahradíme směrnice jako:

$$\alpha_1 = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}; \ \alpha_2 = \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c}$$

Levé strany obou rovnic přímek jsou y, můžeme tedy porovnat pravé strany, které se nutně musí rovnat. Získáme tím:

$$\alpha_1 \cdot (x - x_a) + y_a = \alpha_2 \cdot (x - x_c) + y_c$$

Úpravami získáme postupně:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot x - \alpha_1 \cdot x_a + y_a &= \alpha_2 \cdot x - \alpha_2 \cdot x_c + y_a \\
\alpha_1 \cdot x - \alpha_2 \cdot x &= \alpha_1 \cdot x_a - \alpha_2 \cdot x_c + y_a - y_c \\
x &= \frac{\alpha_1 \cdot x_a - \alpha_2 \cdot x_c + y_a - y_c}{\alpha_1 - \alpha_2}
\end{aligned}$$

Zpětným dosazením za x (například do rovnice úsečky AB) pak dopočítáme souřadnici y průsečíku úseček:

$$y = \alpha_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1 \cdot x_a - \alpha_2 \cdot x_c + y_a - y_c}{\alpha_1 - \alpha_2} - x_a \right) + y_a$$

Tímto postupem tedy lze zjistit existenci a polohu průsečíku dvou úseček. Ten bude mít obecně souřadnice:

$$[x, y] = \left[\frac{\alpha_1 \cdot x_a - \alpha_2 \cdot x_c + y_a - y_c}{\alpha_1 - \alpha_2}, \alpha_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1 \cdot x_a - \alpha_2 \cdot x_c + y_a - y_c}{\alpha_1 - \alpha_2} - x_a \right) + y_a \right]$$

Samozřejmě při vyhodnocování průsečíku úseček lze využít také jiný způsob zápisu přímek, například parametrický či obecný. Praktická ukázka výpočtu je součástí přílohy 1.

5.6 Teorie množin a funkce vektorové analýzy

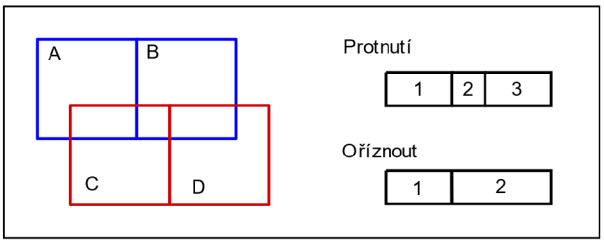
Klíčovou součástí programů QGIS jsou funkce překryvné analýzy. Samotné algoritmy pro přesné výpočty překryvné analýzy jsou pro ruční počítání velmi náročné, a to hlavně z časového hlediska. Navíc vyžadují i zavedení specifické datové struktury (Xiao, 2016).

Tato podkapitola se proto zaměřuje na jednodušší úlohu, kterou je ztotožnění jednotlivých překryvných funkcí a operací s množinami, které by studenti středních škol měli ovládat. Definice množinových operací vycházejí z gymnaziální učebnice matematiky Základní poznatky z matematiky (Bušek, Calda, 2013).

Průnik

Průnik dvou množin $A \cap B$ je definován jako množina všech prvků, které náleží zároveň do množiny A i do množiny B. Z funkcí překryvné analýzy lze s těmito funkcemi ztotožnit dvě funkce – Protnutí (Intersect) a Oříznout (Clip). Obě funkce lze z pohledu geometrie vrstev chápat jako průnik množin, a liší se pouze v zachování atributů jednotlivých vrstev a způsobu rozdělování polygonů ve výsledné vrstvě. Obě funkce v rámci QGIS využívají při zadávání parametry Vstupní (Input) vrstvy a Překryvné (Overlay) vrstvy.

Funkce Protnutí zachovává u prvků nově vzniklé vektorové vrstvy všechny atributy jak ze vstupní vrstvy, tak z vrstvy překryvné. Naopak funkce Oříznout zachovává pouze atributy vstupní vrstvy. Funkce Protnutí rozděluje výsledné polygony dle hranic vstupní i překryvné vrstvy. Funkce Oříznout zanechává rozdělení na jednotlivé polygony pouze dle vstupní vrstvy, překryvnou vrstvu chápe jako vrstvu s rozpuštěnými hranicemi mezi polygony (naznačeno na obrázku 9).

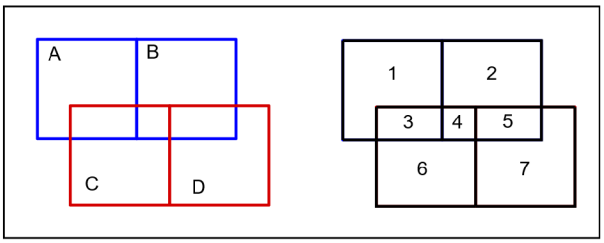


Obrázek 9: Srovnání funkcí Protnutí a Oříznout, vlastní tvorba

Sjednocení

Sjednocení dvou množin $A \cup B$ je definováno jako množina prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B. Z funkcí programu QGIS odpovídá této operaci funkce Sjednotit (Union), která pro dvě nebo více vrstev vytvoří sjednocenou vrstvu s tím, že odděluje překrývající se a nepřekrývající se části vrstev, jak je naznačeno na obrázku 10, kde ze dvou vrstev vzniká nová vrstva s celkem sedmi oddělenými polygony.

Jako určitou formu operace sjednocení množin lze chápat i funkci Rozpustit (Dissolve), která pro jednu polygonovou vrstvu rozpustí hranice mezi všemi jejími prvky a vytvoří z nich jeden polygon - zde se ovšem nejedená o operaci pro dvě různé vrstvy (jejichž analogií jsou dvě různé množiny), ale o operaci týkající se pouze jedné vrstvy a jejích prvků.



Obrázek 10: Dělení polygonů v rámci funkce Sjednotit, vlastní tvorba

Rozdíl

Pro dvě množiny A, B je rozdíl množin $A \backslash B$ definován jako množina všech prvků množiny A, které zároveň nenáleží množině B (a opačně $B \backslash A$ jako množina všech prvků B, které nenáleží do A). Odpovídající funkce v QGIS je funkce Rozdíl (Difference), která ze vstupní vrstvy odstraní všechny části, které jsou překryty vrstvou překryvnou (vstupní vrstva představuje v rozdílu $A \backslash B$ množinu A, překryvná množinu B)

Doplněk množiny

Je- li B podmnožinou množiny A (tedy všechny prvky množiny B jsou zároveň prvky množiny A), můžeme definovat doplněk množiny B v množině A (značeno jako B'_A). Doplněk B v A je pak definován jako množina všech prvků A, které zároveň nenáleží do B. Doplněk množiny je tak vlastně speciálním případem rozdílu množin s podmínkou, že odečítaná množina je podmnožinou druhé množiny. V QGIS tak lze doplněk vytvořit pomocí funkce Rozdíl, za předpokladu, že všechna území jedné vrstvy zcela spadají do vrstvy druhé.

Symetrický rozdíl

Pro dvě množiny A, B je symetrický rozdíl $A \triangle B$ definován jako množina prvků, které náleží A nebo B, ale zároveň nenáleží do průniku obou množin. Symetrický rozdíl je definovatelný také jako $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$. QGIS obsahuje speciální funkci Symetrický rozdíl (Symetric Difference), která pro dvě vrstvy polygonů odstraní navzájem se překrývající části a zbylé části sjednotí do jedné vrstvy.

5.7 Funkce síťové analýzy

Základní pojmy teorie grafu

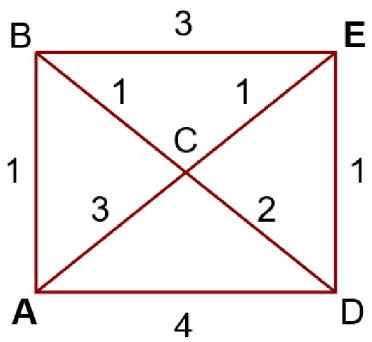
Teorie grafu představuje samostatnou a velice obsáhlou matematickou disciplínu s množstvím definovaných pojmů. Na středních školách se teorie grafu většinou nevyučuje a není zařazeno v současné verzi RVP G (respektive ne v rámci oblasti Matematika a její aplikace), chápání grafu je ale poměrně intuitivní a dobře představitelné na příkladech. Teorie grafu je nedílnou součástí GIS a také obecně geografie (například v geografii dopravy). Pro potřeby této práce jsou uvedeny pouze vybrané definice, nutné pro pochopení algoritmu pro hledání nejkratší cesty.

Grafem rozumíme v teorii grafu dvojici (V, E), kde V představuje neprázdnou množinu vrcholů a E množinu hran, kde hrany představují propojení mezi dvěma vrcholy (a lze je zapisovat pomocí bodů, které spojují) (Žambochová, 2007).

Uspořádaná dvojice uzlů, z nichž jeden je počáteční a jeden koncový, se nazývá orientovaná hrana. Naopak neorientovaná hrana nemá pevně stanovený počáteční a koncový bod (Žambochová, 2007). Orientovanou hranu si lze na příkladu měst a silnic představit jako jednosměrnou silnici, po které se lze dostat z města A do města B, ale opačným směrem jet nelze. Naopak neorientovaná hrana by v příkladu byla silnicí obousměrnou.

Pokud je každé hraně z množiny E přiřazena reálná hodnota, pak graf nazýváme hranově ohodnoceným grafem (Žambochová, 2007). Reálná hodnota může být představována například vzdáleností mezi městy, ale také dobou dojezdu mezi městy nebo například nákladem na cestu mezi městy. Ohodnocení může být kladné i záporné, pro správné fungování Dijkstrova algoritmu pro získání nejkratší cesty mezi body ale potřebujeme graf, který má kladné ohodnocení hran (Wroblewski, 2013).

Příklad ohodnoceného neorientovaného grafu s množinou vrcholů $V = \{A, B, C, D, E\}$ a množinou hran $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}\}$ je znázorněn na obrázku 11.



Obrázek 11: Příklad ohodnoceného neorientovaného grafu, vlastní tvorba

Posloupnost vrcholů $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ neorientovaného (respektive orientovaného) grafu, kde $u_0 = a, u_k = b$ a $h_1 = \{a, u_1\}$, $h_i = \{u_{i-1}, u_i\}$ pro $i = 2, 3, \ldots, k-1$, $h_k = \{u_{k-1}, b\}$ jsou hrany grafu se nazývá neorientovaný (respektive orientovaný) sled z vrcholu a do vrcholu b. Sled, ve kterém se žádný vrchol nevyskytuje dvakrát, se nazývá cesta (Žambochová, 2007). Sled je tedy libovolná trasa, kterou projedeme na cestě mezi městy A a B, cesta je pak taková trasa, na které neprojedeme žádným městem více než jednou.

Nejkratší cesta mezi vrcholy grafu

Klasickým příkladem využití teorie grafu je nalezení nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy v kladně ohodnoceném grafu. Jedná se o často používanou aplikaci teorie grafu nejen v GIS, algoritmus pro nalezení nejkratší (ať už vzdálenostně, nebo časově) cesty mezi dvěma body využívá každá navigace.

Princip algoritmu je následující: mějme graf s několika vrcholy a kladně ohodnocenými hranami, které tyto vrcholy spojují (přitom mezi každými dvěma vrcholy nemusí existovat hrana, která je spojuje). Příkladem takového grafu je graf na obrázku 11. Vyberme vrchol A, ze kterého hledáme nejkratší cestu ke zvolenému vrcholu E. V prvním kroku přiřadí algoritmus vrcholu A nulovou vzdálenost od A, a všem ostatním vrcholům přiřadí dočasnou nekonečnou vzdálenost (vrcholy jsou momentálně nedosažitelné). V dalším kroku pak přiřadí všem vrcholům, u kterých existuje hrana spojující daný vrchol s vrcholem A, kladnou hodnotu této hrany. Z těchto nově přiřazených hodnot vybere tu nejnižší – pokud je například nejnižší hodnota přiřazena vrcholu B (hrana AB má hodnotu 1), pak vybere tuto, a tato hodnota je nadále považována za potvrzenou nejkratší vzdálenost z A do B (Wroblewski, 2013).

V dalším kroku pak algoritmus zkoumá hrany, jejichž jedním vrcholem je B (bod s nově potvrzenou nejnižší hodnotou). Hodnotu hrany sečteme se vzdáleností z A do B, a pokud je výsledek menší nebo roven hodnotám, které byly bodům přiřazeny po prozkoumání hran vedoucích z bodu A, přiřadí těmto vrcholům tuto novou hodnotu (Wroblewski, 2013). Například hodnota hrany AC je rovna 3, ale protože hodnota hrany AB je 1 a hodnota BC je 1, přiřadí algoritmus bodu C novou hodnotu $1+1 = 2$. Tyto kroky (potvrzení bodu s nejnižší nepotvrzenou hodnotou a zkoumání hran, které z něj vedou) se poté opakují do doby, kdy se hodnota přiřazená bodu E stane potvrzenou hodnotou nejkratší cesty z A do E. Pak je tato hodnota prohlášena nejkratší cestou mezi body A a E. Celý postup algoritmu včetně řešených příkladů je popsán v příloze 1.

Pokud chceme nejen znát délku této nejkratší cesty, ale zároveň i vědět, kudy cesta jde, je potřeba pro každý vrchol zaznamenat hrany kterého vrcholu jsme vyhodnocovali ve chvíli, kdy tento vrchol nabyl dané hodnoty (Wróblewski, 2013).

Výhodou tohoto algoritmu je, že nemusí nutně projít všechny hrany grafu, ale stačí mu procházet graf do doby, než vyhodnotí danou cestu jako nejkratší k danému bodu. Algoritmus ale potřebuje nutně, aby ohodnocení hran bylo kladné, protože pokud by existovaly i hrany se záporným ohodnocením, algoritmus by nefungoval správně. Díky tomu, že vybíráme vždy vrchol s nejnižší dočasnou hodnotou, a že všechny hrany mají kladné ohodnocení, nemůže nastat situace, kdy by došlo ke snížení hodnoty již potvrzené nejkratší cesty k některému z bodů (Wroblewski, 2013).

Servisní oblast

Jednou z možných dalších aplikací algoritmu pro nalezení nejkratší cesty mezi vrcholy grafu je vytvoření servisních oblastí (Service Area). Servisní oblastí se rozumí množina všech vrcholů, pro které je hodnota nejkratší cesty z vybraného bodu (kde hodnoty hran mohou vyjadřovat znovu jak vzdálenost, tak čas) menší nebo rovna zadané hodnotě. Servisní oblast lze uvažovat například pro stanice zdravotní záchranné služby, kdy výjezd sanitky potřebuje být u pacienta do určité doby (například do 20 minut), a pomocí vytvoření obslužné zóny, kde ohodnocení hran grafu je doba, za kterou lze daný úsek zvládnout, lze určit, do kterých vrcholů grafu (v tomto příkladě reprezentující například obce) se sanitka stihne dostat v kratším než udaném čase.

QGIS navíc kromě vrcholů dosažitelných v zadaném čase dokáže dopočítat i poměrné části hran, které jsou taktéž ještě v potřebné dojezdové vzdálenosti. Servisní oblast tak nekončí ve vrcholech grafu (např. na křižovatkách silnic), ale může například končit v polovině hrany (silnice mezi městy).

Pro obslužnou zónu není potřeba žádný nový algoritmus, lze použít Dijkstrův. Pouze v tomto případě nebude algoritmus končit ve chvíli, kdy zjistí vzdálenost k některému z bodů, ale bude pokračovat do chvíle, dokud nebude jasné, že žádný další vrchol nemá vzdálenost menší nebo rovnou požadované vzdálenosti. To musí nastat ve chvíli, kdy vrchol, jehož hrany v daném kroku algoritmus vyhodnocuje, má vzdálenost od počátečního vrcholu větší, než je velikost servisní oblasti. V tu chvíli musí i všechny ostatní dosud nevyhodnocené vrcholy mít vzdálenost větší než požadovanou, a algoritmus může být ukončen. To je dáno znovu kladným ohodnocením hran grafu.

6 Zařazení téma matematiky v GIS v rámci RVP G

6.1 Zařazení v rámci vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace

Tato kapitola se snaží o zařazení výše popsaných matematických algoritmů do učiva dle rámcového vzdělávacího plánu pro gymnázia. Ke každé kapitole jsou uvedeny jak očekávané výstupy v rámci RVP (popisující, jaké schopnosti, dovednosti a znalosti by měl student vykazovat po ukončení vzdělávání na gymnáziu), tak také učivo vymezené dle RVP (ukazující, jaké faktické znalosti by měl student mít). Zařazení vychází jak z RVP G, tak částečně také z Rámcového vzdělávacího plánu pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2023), neboť některá témata jsou zařazena už v rámci základního vzdělávání a ve středoškolském pojetí jsou tyto znalosti pouze prohlubovány.

Základní vektorové prvky

Vzdělávací obsahy: Závislosti, vztahy a práce s daty (RVP ZV), Geometrie

Očekávané výstupy:

- Vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data
- Používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary

Učivo:

- **Funkce** – pravoúhlá soustava souřadnic
- **Geometrie v rovině** – rovinné útvary (klasifikace)

Metrické úlohy

Vzdělávací obsah: Geometrie

Očekávané výstupy:

- V úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly

- Řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině

Učivo:

- **Geometrie v rovině** – obvody a obsahy, Pythagorova věta
- **Analytická geometrie v rovině**

Obalová zóna

Vzdělávací obsah: Geometrie

Očekávané výstupy:

- Řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu
- Řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí

Učivo:

- **Geometrie v rovině** – množiny bodů dané vlastnosti

Point in polygon

Vzdělávací obsah: Geometrie

Očekávané výstupy:

- Řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí
- Řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině

Učivo:

- **Analytická geometrie v rovině** – vektory a operace s nimi (skalární součin, úhel mezi vektory, vektorový součin)

Průsečík linií

Vzdělávací obsah: Geometrie

Očekávané výstupy:

- Užívá různé způsoby analytického vyjádření přímky v rovině (geometrický význam koeficientů)
- Řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině

Učivo:

- **Analytická geometrie v rovině** – vektory a operace s nimi (vektorový součin); analytická vyjádření přímky v rovině

Množiny

Vzdělávací obsah: Argumentace a ověřování

Očekávané výstupy:

- Čte a zapisuje tvrzení v symbolickém jazyce matematiky
- Zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému

Učivo:

- **Množiny** – inkluze a rovnost množin, operace s množinami

Funkce síťové analýzy

Učivo teorie grafu není v rámci RVP G definováno ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, ale v rámci oblasti Informatika

Vzdělávací obsah: Data, informace a modelování

Očekávané výstupy:

- Formuluje problém a požadavky na jeho řešení; získává potřebné informace, posuzuje jejich využitelnost a dostatek (úplnost) vzhledem k řešenému problému; používá systémový přístup k řešení problémů; pro řešení problému sestaví model, simulaci

Učivo:

- **Modelování** - graf, vrcholy, hrany, orientovaný graf, ohodnocený graf, kritická cesta

6.2 Zařazení v rámci vzdělávacího oboru Geografie

Obecně se všechny kapitoly v této práci dají zařadit do vzdělávacího obsahu Geografické informace a terénní vyučování.

Vzdělávací obsah: Geografické informace a terénní vyučování

Očekávané výstupy:

- Používá dostupné kartografické produkty a další geografické zdroje dat a informací v tištěné i digitální podobě pro řešení geografických problémů
- Čte, interpretuje a sestavuje jednoduché grafy a tabulky, analyzuje a interpretuje číselné geografické údaje
- Vytváří a využívá vlastní mentální schémata a mentální mapy pro orientaci v konkrétním území

Učivo:

- **Geografická kartografie a topografie** – praktické aplikace s kartografickými produkty, s mapami různých funkcí, s kartogramy
- **Geografické informační a navigační systémy** – geografický informační systém (GIS), praktické využití GIS a satelitních navigačních přístrojů GPS (globální polohový systém)
- **Terénní geografická výuka, praxe a aplikace** - zobrazování a hodnocení přírodních a společenských prvků krajiny a jejich interakce

Dále pak lze nalézt průniky vytvořeného výukového materiálu (příloha 1 této práce) s různými tématy v rámci RVP G v jednotlivých praktických příkladech. Vzdělávacím geografickým obsahem, kterým se příklady (jak matematické, tak ty řešené v QGIS) zabývají nejčastěji, je téma místního regionu. Velká část úloh pro QGIS ve výukovém materiálu je orientována na SO ORP, ve kterém student bydlí či studuje.

Vzdělávací obsah: Regiony

Očekávané výstupy:

- Rozlišuje na konkrétních územních příkladech mikroregionální, regionální, státní, makroregionální a globální geografickou dimenzi
- Vymezí místní region (podle bydliště, školy) na mapě podle zvolených kritérií, zhodnotí přírodní, hospodářské a kulturní poměry mikroregionu a jeho vazby k vyšším územním celkům a regionům

Učivo:

- **Místní region** – možnosti rozvoje mikroregionu, strategické a územní plánování

Propojení ale lze nalézt i pro zbývající vzdělávací obsahy, kterými jsou kromě dvou výše zmíněných také Přírodní prostředí, Sociální prostředí a Životní prostředí (RVP G). Zařazení těchto úloh už není provedeno tak detailně, jako v předchozích příkladech, pouze poukazuji na některé konkrétní případy.

S obsahem Přírodní prostředí lze propojit například úlohu 3.8 s výpočtem délky řeky, celkově je ale tento obsah zastoupen nejméně.

Naopak s obsahem Sociální prostředí lze propojit například všechny úlohy osmé kapitoly výukového materiálu, zabývající se teorií grafu a na ni v rovině geografické navazující otázkou dopravy. Propojení lze také najít například v kapitolách Množiny (úloha 7.4 a), resp. 7.4 b), které se týkají těžby v okrese Most) nebo kapitole Point in polygon (úloha 5.4 týkající se těžby ropy, úloha 5.7 k tématu zemědělství nebo 5.8 s tématem energetiky).

Posledním z těchto tří obsahů je Životní prostředí, se kterým lze propojit například úlohy z kapitoly Obalová zóna (úloha 4.3 o desertifikaci, 4.4 o šíření kůrovce v lesních porostech) či z kapitoly Metrické úlohy (úloha 3.11 s tématem degradace půd nebo 3.12 s úlohou výpočtu plochy rybníku).

Úlohy výukového materiálu tak lze zařadit jako zpestření výuky v rámci libovolného probíraného tématu, za předpokladu, že je student obeznámen s problematikou potřebného matematického aparátu nebo práce s QGIS. Mohou posloužit například jako motivační

prvek pro výuku či pro pochopení praktického významu teoreticky probíraného učiva. Úlohy lze také chápat jako inspiraci k vlastním úlohám, potenciální vyučující si může zadání úlohy vhodně upravit dle svých aktuálních potřeb – například úlohu 5.5 týkající se sporu Spojeného království a Argentiny o Falklandy lze jednoduchou změnou názvu převést na otázku prakticky jakéhokoliv jiného územního sporu na světě.

Samozřejmě s použitím úloh je stále nutné myslet na jejich omezení jako pouhých modelů opravdového světa, a ideálně se studenty diskutovat možné nedostatky dané úlohy a jejich potenciální zlepšení.

7 Metodická část

7.1 Metodika tvorby výukových materiálů

Výukové materiály, jejichž tvorba je hlavním cílem této práce, sestávají ze dvou částí: z metodické části (vysvětlující matematické principy a navazující způsob práce v programu QGIS) a řešených příkladů (matematických, aplikovaných a geoinformatických). Výukový materiál je členěn do sedmi kapitol, které odpovídají jednotlivým matematickým kapitolám a s nimi propojené práci s GIS. Těmto kapitolám předchází kapitola, která seznamuje se základy práce s QGIS, která se následně využívá ve všech ostatních kapitolách. Tato kapitola se týká například obecného rozložení uživatelského prostředí programu QGIS, načtení vrstev do projektu, nastavením souřadnicového systému a práce s atributovou tabulkou.

Vysvětlení matematického aparátu

Část vysvětlení matematického aparátu se opírá o teoretickou část této práce, ve které byly definovány a popsány matematické algoritmy, které byly shledány jako potenciálně zajímavé pro studenty a zároveň poměrně srozumitelné. Náročnost a způsob vysvětlování jednotlivých algoritmů byl uzpůsoben gymnaziálním učebnicím matematiky od vydavatelství Prometheus, které byly brány jako standard pro úroveň znalostí studenta střední školy. Konkrétně byly využity díly Základní poznatky (Bušek, Calda, 2013), Rovnice a nerovnice (Charvát a kol., 2013), Planimetrie (Pomykalová, 2013) a Analytická geometrie (Kočandrle, Boček, 2015).

Výukový materiál se snaží nejen ukázat příslušný vzorec či algoritmus, který se k výpočtu dané problematiky používá, ale nastíněním základních myšlenkových postupů a vhodných ilustrativních obrázků předvést, proč vlastně vzorec/algoritmus funguje. Na druhé straně nejsou prezentovány opravdové matematické důkazy korektnosti jednotlivých algoritmů, které jsou jednak většinově otázkou vyšší úrovně matematiky, než jaké dosahují středoškolští studenti, a jednak studentům nepřinesou potřebný vhled do dané problematiky. Tento postup byl převzat z výše zmíněných gymnaziálních učebnic, jejichž autoři se také spíše než k úplným důkazům korektnosti uchylují k nastínění základních myšlenek.

Snahou bylo také neustále vyvažovat matematický obsah mezi realitou programu QGIS se všemi optimalizacemi a mezi očekávanými schopnostmi studentů. Příkladem může být kapitola týkající se obsahů polygonu. V QGIS bude uživatel skoro jistě využívat pro výpočet obsahu polygonu algoritmus počítající plochu na elipsoidu, neboť je na použití výrazně jednodušší a také přesnější. Vysvětlit ale studentovi střední školy, jak funguje tento algoritmus, by bylo velmi obtížné, proto je místo něj vysvětlen algoritmus pro výpočet obsahu polygonu v rovině, který je o mnoho jednodušší. Algoritmy se přitom alespoň v základní myšlence shodují, což bylo chápáno jako důležité kritérium při volbě, zda je možné se uchýlit k jednodušší z variant.

Práce s programem QGIS

Část popisující postup práce v QGIS ukazuje krok za krokem včetně obrazových ilustrací práci s programem. Na oficiálních stránkách programu QGIS lze nalézt velmi podrobné popisy postupů a funkcí programu, a tato část by sama o sobě nebyla velkým přínosem – student má jednoduše možnost sám si příslušné postupy vyhledat (ačkoliv jsou často v angličtině). Nicméně z hlediska funkčnosti výukového materiálu jako samostatně stojící publikace považuji za nutné zpracovat i tuto část, minimálně proto, aby bylo ukázáno, které funkce programu navazují na předtím popsanou matematickou část. Pro práci s materiálem je také samozřejmě jednodušší, pokud má student všechny potřebné informace u sebe. Zpracování této části stojí na již zmíněných popisech funkcí na oficiálních stránkách QGIS (např. Sutton a kol., 2009) a také na nápovědě uvnitř programu QGIS (QGIS.org, 2024), do popisu jsou pak také promítnuty vlastní zkušenosti autora.

Příklady

Posloupnost příkladů je také volena na základě výše uvedených středoškolských učebnic matematiky. I zde autoři volí nejprve čistě matematické příklady, sloužící k upevnění naučených postupů a kontrole, zda došlo k pochopení látky. Teprve následně autoři zařazují příklady aplikované, které mají ukázat praktické použití naučené látky – ta by měla být po spočítání čistě matematických příkladů zřejmá. Tato práce navíc aplikované příklady rozšiřuje o práci s QGIS, která představuje vyšší rovinu aplikovaných matematických příkladů, a ještě více tak rozšiřuje matematickou problematiku na problémy reálného světa.

Toto řazení příkladů by mělo v ideálním případě mít dva hlavní přínosy:

1. Student by měl pochopit, kde se v programu QGIS skrývá daný matematický problém, a tím pádem si ujasnit, jaký smysl má vlastně učit se danou matematickou problematiku.

2. Popsané matematické algoritmy nejsou myšlenkově až tak náročné, ale velmi náročné časově, tedy na dobu výpočtu a také na přesnost výpočtu – jedná se často o mechanické dosazování do vzorců. Student by tak měl pochopit jeden z hlavních přínosů GIS a obecně počítačových programů – tedy schopnost programu provádět obrovské množství výpočtů a tím zpracovat velké množství dat. Algoritmy by ideálně měl student snadno pochopit, ale po spočítání pár příkladů by měl dojít k tomu, že jejich využívání je pro ruční výpočet velmi zdlouhavé a hodilo by se k nim mít nějaký program, který by tyto výpočty algoritmizoval. Tím se vracíme znovu k bodu 1, tedy abychom mohli mít takový program, je třeba mít někoho, kdo takový program bude schopen napsat, a tedy musí rozumět danému matematickému problému.

Při tvorbě příkladů bylo snahou vycházet z myšlenky z článku Odvárka (2012), který varuje před tvorbou pseudoaplikačních úloh, tedy úloh snažících se o jakési převedení naučených matematických znalostí do života, ovšem využívajících naprosto nerealistických myšlenkových postupů. Takové úlohy pouze obalují matematické znalosti do nematematického obalu, který ale nedává studentům žádný smysl, a ve výsledku vede k jejich znechucení a výsměchu rádoby úlohám ze života.

Příklady proto byly tvořeny s úmyslem vyhnout se nesmyslným aplikacím a vytvořit takové, jejichž výsledek by mohl najít alespoň nějaké smysluplné využití. Samozřejmě zde narážíme na problém, že se zároveň příklad snaží vysvětlit přechod od matematiky k počítačovému algoritmu, a některé postupy by student při opravdovém řešení takového příkladu nevyužil. Příkladem mohou být úlohy na point-in-polygon problém, kde polohu bodu uvnitř polygonu člověk samozřejmě vidí pouhým okem bez potřeby jakýchkoliv výpočtů. V tomto případě je ale třeba ospravedlnit tato zadání tím, že se snaží osvětlit fungování algoritmu, který používá QGIS.

Pro příklady řešené v QGIS bylo nutné využívat taková data, ke kterým budou mít snadný přístup i potenciální uživatelé z řad středoškolských studentů - tedy buďto data, která si sami vytvoří, nebo data z volně dostupných vektorových databází. K tomuto účelu byly nakonec zvoleny dvě databáze - Základní báze geografických dat (ZABAGED®) ve verzi 4.1 (ČÚZK, 2024) a databáze ArcČR® ve verzi 4.2 (ARCDATA PRAHA, 2023a).

Databáze ZABAGED obsahuje 139 typů geografických objektů, které patří do polohopisné, nebo výškopisné části. Samotná polohopisná část obsahuje 136 typů objektů řazených do 8 kategorií: sídla, hospodářské a kulturní objekty, komunikace, rozvodné sítě a produktovody, vodstvo, územní jednotky včetně chráněných území, vegetace a povrch, terénní reliéf a geodetické body. Všechna data mají dvojrozměrných charakter (Zeměměřický ústav, 2023).

Databáze ArcČR 4.2 zobrazuje administrativní členění ČR na administrativní jednotky, pokrývající rozsah od základních územních jednotek, přes obce a správní obvody obcí s rozšířenou působností, až po kraje a celou ČR. Součástí atributové složky jsou data pro jednotlivé administrativní jednotky vycházející ze Sčítání lidu, domů a bytů 2021, jako jsou data o přirozené a mechanické měně obyvatelstva, data o výměře jednotlivých typů využití půdy či údaje o vzdělanosti a národnostním složení (ARCDATA PRAHA, 2023b). Společně mají databáze ZABAGED a ArcČR dostatečný rozsah pro úlohy navržené pro GIS ve výukovém materiálu.

K většině příkladů je v rámci kapitoly Výsledky zpracováno i řešení – většinou u úvodních příkladů každé kapitoly je řešení rozepsáno detailněji, u dalších, typově podobných příkladů je pak uveden pouze výsledek. Také pro úlohy řešené v QGIS je mezi výsledky zobrazena mapa nebo číslo, pokud se úloha zabývá zjištěním nějaké hodnoty. Tyto výsledky je ale potřeba chápat pouze jako orientační – tištěné mapové výstupy obvykle nejsou v těchto případech nejvhodnější možností pro prohlížení dat, daleko lépe studentům poslouží prohlížení dat přímo v mapovém okně programu QGIS. Úlohy jsou také často směřovány na region školy/bydliště studenta (v zadání figuruje často SO ORP, ve kterém student studuje či bydlí). Proto mapové výstupy a výsledky nelze chápat jako univerzální a jedinou platnou odpověď, ale pouze jako její možnou podobu, která se bude při využití na různých školách lišit.

7.2 Metodika pokusného ověřování

Pokusné ověření vytvořených materiálů proběhlo 29. února 2024 na gymnáziu v Českém Krumlově, a to ve třech různých třídách, přičemž dvě byly paralelní třídy třetího ročníku střední školy (sedmý ročník osmiletého studia a třetí ročník čtyřletého studia), a jedna třída prvního ročníku SŠ (pátý ročník osmiletého studia). Celkem bylo získáno 51 relevantních odpovědí ve třetích ročnících a 24 v prvním ročníku. Vzhledem k odlišným časovým možnostem a znalostem žáků byly voleny odlišné způsoby výuky a také otázky pokládané v dotazníku (příloha 2 a příloha 3 této práce). Výuka vždy vycházela z připraveného výukového materiálu, který je přílohou 1 této práce.

Ve třetích ročnících byla k dispozici jedna vyučovací hodina matematiky (45 minut), a výuka se tak vztahovala zejména k matematické části vybraného tématu, kterým byl výpočet plochy obecného polygonu. Studentům nejdříve bylo pomocí frontální výuky vysvětleno, jakým způsobem se odvozuje vzorec pro výpočet plochy polygonu, a následně společnými silami měli spočítat plochu České republiky ve zjednodušeném příkladě. Nakonec studenti shlédli ukázku, jakým způsobem využít výpočet plochy v programu QGIS.

V prvním ročníku byly k dispozici dvě vyučovací hodiny, po jedné matematiky a geografie (90 minut celkem). Na přání pana učitele se studenti nejprvě dozvěděli obecné nejzákladnější informace o GIS a jeho využití v praxi, a teprve následně bylo přistoupeno k pokusnému ověřování samotného materiálu. Nejprve bylo studentům vysvětleno, jakým způsobem počítač uchovává informace o geometrických prvcích (bod, linestring, polygon), což si studenti samostatně vyzkoušeli na dvou příkladech. Následně proběhla ukázka tvorby vektorových vrstev, kterou si studenti mohli také vyzkoušet na 1 PC.

Vzhledem k odlišnostem mezi prvním a třetím ročníkem a jejich existujícím matematickým znalostem tak musela být volena nejen odlišná témata výuky, ale také odlišné otázky v dotazníku, který byl po výuce v rámci pokusného ověření studenty vyplněn. První větší rozdíl tkví v tom, že ve třetích ročnících se v době uskutečnění průzkumu studenti příhodně učili analytickou geometrii, a téma výpočtu obsahu polygonu tak šlo napojit na jejich předchozí znalosti. Problematika tak mohla být vnímána jako praktická aplikace jim dobře známého učiva, a mohla tedy být zařazena otázka, zda po seznámení se s využitím analytické geometrie v praxi ji nyní považují za více smysluplnou. Nao-

pak pro první ročníky bylo téma víceméně nové, v matematice se sice již setkali s prací s kartézskou soustavou souřadnic, ale přesto jim téma spíše ukazovalo, jaké jsou rozšiřující možnosti využití matematiky.

Druhým hlavním rozdílem bylo, že studenti třetích ročníků neměli příležitost si v rámci výuky vyzkoušet práci s QGIS, zatímco studenti prvního ročníku tuto možnost měli. Tím pádem samozřejmě nemělo smysl se dotazovat ve třetích ročnících, zda mají v úmyslu použít v budoucnu QGIS, protože z pro ně určené krátké ukázky si zjevně nemohli udělat obrázek o tom, k čemu všemu by jim GIS mohl sloužit.

Limitem pokusného ověření v prvním ročníku byly technické a materiální problémy. Dvěma nejvýraznějšími byly absence QGIS na školních počítačích (a obecně složitý přístup do učeben informatiky v rámci stávajícího rozvrhu), a dále také problémy s projektorem, který výrazně narušoval dojem z výuky.

Cílem průzkumu bylo zjistit, zda díky praktické ukázce využití analytické geometrie ji budou studenti považovat za více smysluplnou a využitelnou (pouze ve třetích ročnících), zda by měli studenti zájem o větší využití GIS (v prvním ročníku) a jestli by měli zájem o další podobné příklady, které by propojovaly matematiku a geografii (v prvním i třetím ročníku). Hypotézou na základě poznatků o aplikovaných matematických úlohách (Odvárko, 2012) a mezipředmětových vztazích (Skalková, 1962, Rakoušová, 2008) bylo především, že po praktické ukázce budou studenti považovat analytickou geometrii za více smysluplnou. V ideálním případě by ve většině studentů měl vzbudit zájem GIS a také by měli projevit zájem o další integrované úlohy. Nicméně zde lze vzhledem k odlišným preferencím různých žáků těžko vytvářet hypotézy, a tyto otázky tak slouží spíše jako průzkum, zda vytvořený výukový materiál najde v budoucnu nějaké uplatnění.

V rámci průzkumu byly studenti tázáni, zda mají v oblibě matematiku, respektive geografii, aby bylo možné získaná data vyhodnotit i v rámci těchto skupin. Tedy například zda budou praktické využití matematiky považovat za přínosné pouze ti, kteří mají matematiku v oblibě, nebo budou příklady přínosné naopak pro ty, kteří běžně matematiku příliš v oblibě nemají. Všechny otázky byly uzavřené s dvěmi možnými variantami odpovědí. První variantou byly dvě možnosti ANO/NE, druhou variantou byly 4 možnosti odpovědí, a to: ROZHODNĚ ANO/SPÍŠE ANO/SPÍŠE NE/ROZHODNĚ NE.

8 Vyhodnocení pokusného ověření

Vzhledem k poměrně malému počtu žáků, kteří se zúčastnili pokusného ověření materiálů, se vyhodnocení omezuje pouze na popis a jednoduchou interpretaci výsledků. Ke skutečnému smysluplnému statistickému šetření (například se stanovováním charakteristik polohy a variability statistického souboru, či testováním hypotéz) by bylo nutné získat větší množství dat.

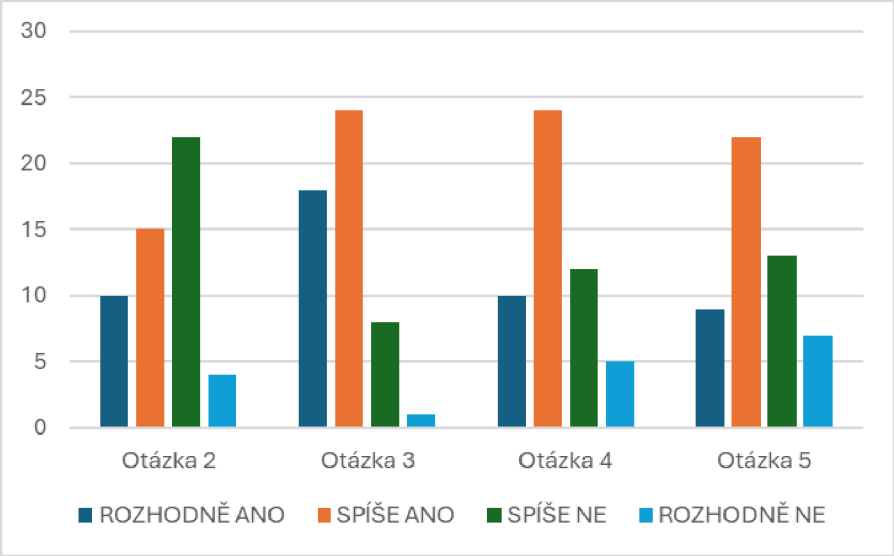
Třetí ročníky

Dotazník pro třetí ročníky obsahoval následujících pět otázek a s nimi úlohu na zjednodušený výpočet rozlohy České republiky:

1. Máš rád matematiku (ANO/NE) a geografii (ANO/NE)?
2. Vidíš v analytické geometrii smysluplné uplatnění? (4 možnosti)
3. Je pro tebe důležité vidět uplatnění učiva v praxi? (4 možnosti)
4. Poté, co jsi viděl/a řešení příkladu a počítačovou ukázku, přijde ti analytická geometrie smysluplnější a využitelnější? (4 možnosti)
5. Měl/a bys zájem o další podobné úlohy propojující matematiku a geografii? (4 možnosti)

Celkem bylo v rámci dvou tříd třetího ročníku získáno 51 odpovědí. Zhruba poloviční byla mezi studenty oblíbenost matematiky (27 ano, 24 ne), větší oblíbenost pak měla mezi studenty geografie (32 ano, 19 ne).

První tři otázky vyplňovali studenti před výpočtem příkladu, další dvě až po výpočtu – smyslem tohoto rozdělení bylo porovnat změnu ve vnímání analytické geometrie před a po výpočtu aplikovaného příkladu, který by měl více objasnit využití učiva.

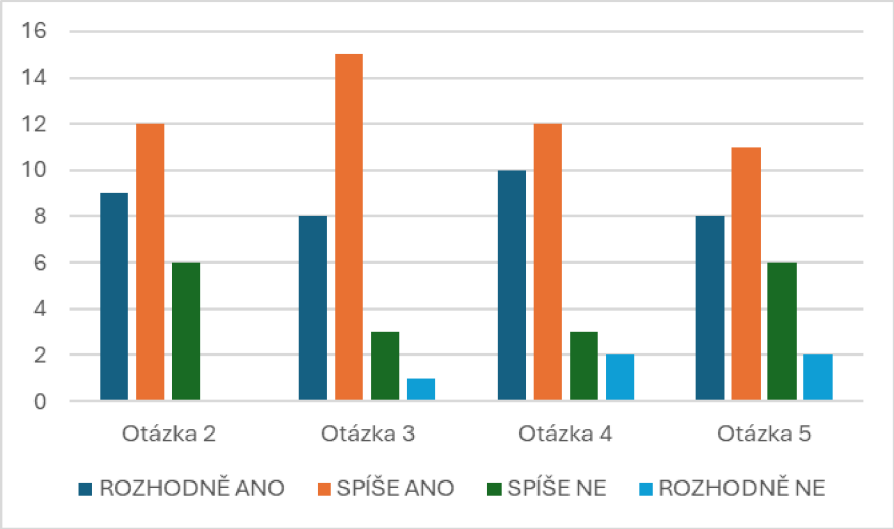


Graf 1: Odpovědi studentů třetích ročníků

V průzkumu neděleném na jednotlivé skupiny (tedy z celého souboru 51 odpovědí) spatřuje v analytické geometrii smysl 25 studentů (10 rozhodně ano, 15 spíše ano), zatímco 22 ze zbylých 26 studentů v ní spíše smysl nespatřuje, vůbec žádný smysl v ní pak nevidí 4 studenti. Ačkoliv tedy mírně převažují studenti, kteří nevidí smysl v analytické geometrii, jejich podíl oproti očekávání není ani zdaleka tak vysoký, a téměř polovina studentů smysl v tomto učivu spatřuje.

V otázce důležitosti uplatnění učiva v praxi 82 % studentů pokládá za důležité (18 rozhodně ano, 24 spíše ano), ze zbylých devíti studentů pouze jeden zvolil možnost „rozhodně ne“. Celkem očekávatelně tedy studenti vyžadují, aby to, co se ve škole učí, mělo nějaké uplatnění i v jejich pozdějším životě.

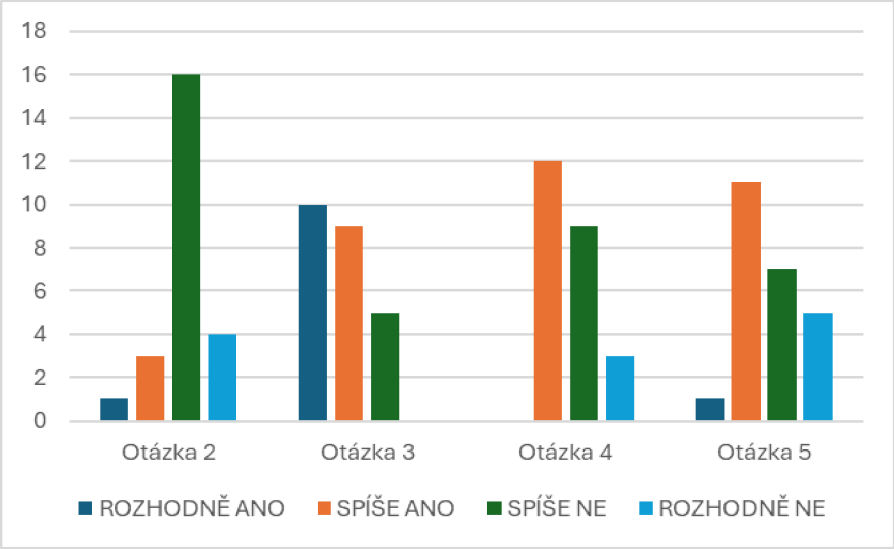
Ve čtvrté otázce, jejíž vyplnění proběhlo až po výpočtu praktického příkladu a ukázce využití naučeného matematického algoritmu v GIS, se oproti druhé otázce zvýšil počet studentů, kteří nyní spíše vidí analytickou geometrii jako smysluplnější, konkrétně o 9 studentů, a naopak o 10 klesl počet studentů v kategorii „spíše ne“. V páté otázce pak zhruba tři pětiny studentů vyjádřily zájem o další podobné úlohy, ačkoliv variantu rozhodně ano zvolilo pouze 9 studentů. Kombinace těchto dvou otázek tedy ukazuje, že bakalářská práce a vytvoření výukového materiálu mělo nějaký smysl a materiál by mohl najít využití.



Graf 2: Odpovědi studentů třetích ročníků, kteří mají v oblibě matematiku

Mezi 27 studenty, kteří označili matematiku jako svůj oblíbený předmět, je vidět vyšší podíl těch, kteří i před ukázkou příkladu viděli analytickou geometrii jako smysluplnou (33 % rozhodně ano, 44 % spíše ano). Odpovědi na třetí otázku ohledně důležitosti uplatnění učiva v praxi se příliš neliší od statistky pro všech 51 studentů, naopak ale ve čtvrté otázce není vidět výrazná pozitivní změna ohledně vnímání analytické geometrie jako přínosné po výpočtu aplikovaného příkladu, naopak vzrostl oproti druhé otázce počet studentů, kteří volili odpověď „rozhodně ne“. Ukázka aplikovaného příkladu tedy příliš nezměnila náhled studentů na analytickou geometrii, což mohlo být způsobeno buď tím, že už předtím ji považovali za užitečnou, nebo jim příklad prostě jen nepřipadal zajímavý.

Nicméně podíl těch se zájmem o podobné matematicko-geografické úlohy je o 10 % vyšší než u celého souboru, nerozděleného dle zájmu o matematiku – logicky mezi studenty s vyšším zájmem o matematiku lze očekávat i vyšší zájem o podobné aplikované úlohy.



Graf 3: Odpovědi studentů třetích ročníků, kteří nemají v oblibě matematiku

Studenti, kteří označili matematiku za neoblíbený předmět (n = 24), ve více než 80 % (67 % spíše ne, 17 % rozhodně ne) nevidí smysl v analytické geometrii, což lze vzhledem k obecné neoblíbenosti matematiky u této skupiny předpokládat. Potěšujícím výsledkem proto je, že přesně 50 % z nich (12 z 24) se po zhlédnutí výpočtu a ukázky využití v GIS rozhodlo pro odpověď „spíše ano“ na otázku, zda nyní vnímají analytickou geometrii jako využitelnější. Možnost „rozhodně ano“ sice v tomto případě volena nebyla, nicméně i tak je pozitivním výsledkem, že příklad dokázal alespoň části studentů bez zájmu o matematiku přinést trochu více smyslu do jejich učení.

Stejně tak jako pozitivní výsledek vnímám fakt, že i v této skupině se polovina studentů rozhodla pro kladnou odpověď na poslední otázku (1 rozhodně ano, 11 spíše ano), a tedy že i v této skupině projevila alespoň část studentů zájem o podobné příklady s geografickou tematikou.

Při obdobném dělení studentů na ty, kteří označili geografii jako oblíbený předmět, a na ty, pro které je předmětem neoblíbeným, se obě skupiny nijak zásadně ve svých odpovědích nelišili – snad až na poslední otázku, kde opět studenti se zájmem o geografii celkem očekávatelně projevili větší zájem o další integrované úlohy. Konkrétně z 32 studentů se zájmem o geografii jich 28 % označilo variantu „rozhodně ano“ a 38 % „spíše ano“. Oproti tomu mezi 19 studenty, pro které je geografie neoblíbená, nikdo nevolil u páté otázky možnost „rozhodně ano“, na druhou stranu „spíše ano“ volilo 53 % odpovídajících.

Co se týče příkladu počítaného společně na hodině, studenti se nakonec společnými silami dostali k poměrně přesným výsledkům (v obou případech vyšla výsledná plocha kolem 80 000 km^2). Zde nelze porovnat úspěšnost jednotlivých studentů, jelikož se jednalo o společnou práci.

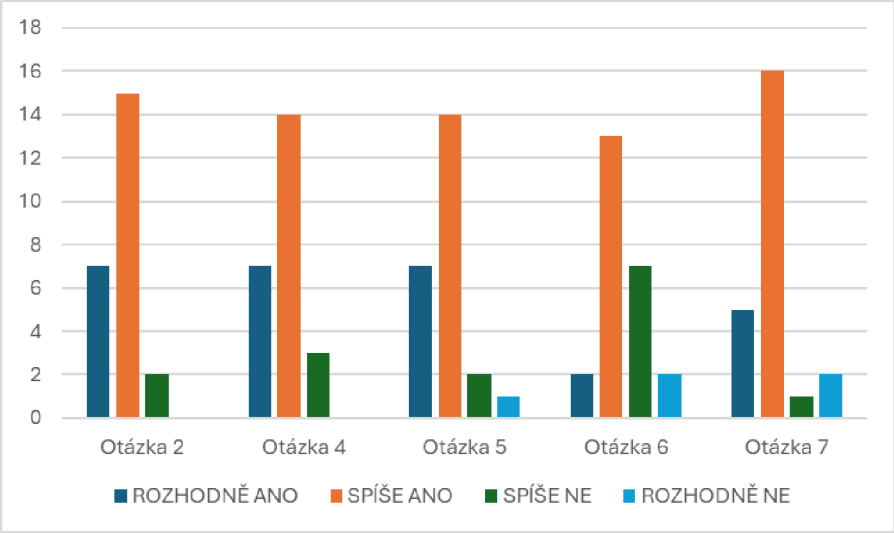
První ročník

V prvním ročníku bylo sesbíráno celkem 24 vyplněných dotazníků. I v tomto případě se první otázka týkala obliby matematiky a geografie, z porovnání dat ale vyplývá, že při rozdělení na jednotlivé skupiny dle obliby předmětů se relativní četnosti odpovědí na jednotlivé otázky příliš nemění oproti celkovému souboru dat, a nemá tedy smysl samostatně vyhodnocovat jednotlivé skupiny podle obliby předmětů. Lze tak pouze poznamenat že z 24 studentů 18 shodně označilo matematiku i geografii jako svůj oblíbený předmět, a 6 pak v obou případech matematiku (respektive geografii) jako předmět neoblíbený.

Otázky v dotazníku pro 1. ročník:

1. Máš v oblibě matematiku (ANO/NE) a geografii (ANO/NE)?
2. Je pro tebe důležité vidět uplatnění probírané látky v praxi? (4 možnosti)
3. Vidíš praktické využití toho, co se učíte v matematice (ANO/NE)? A v geografii (ANO/NE)?
4. Zaujala tě prezentace o praktickém využití GIS? (4 možnosti)
5. Líbila se ti ukázka využití matematiky v GIS? (4 možnosti)
6. Líbil se ti program QGIS? Máš v úmyslu ho někdy v budoucnu použít? (4 možnosti)
7. Měl/a bys zájem o podobné příklady na využití matematiky v geografii? (4 možnosti)

Kromě dotazníku obsahoval pracovní list ještě dva příklady orientované na popis vektorových objektů pomocí matematických souřadnic. V prvním příkladě měli studenti za pomoci zadaných souřadnic zakreslit vektorové objekty do kartézské soustavy, ve druhém naopak měli popsat pomocí jazyka WKT zakreslené vektorové objekty.



Graf 4: Odpovědi studentů prvního ročníku

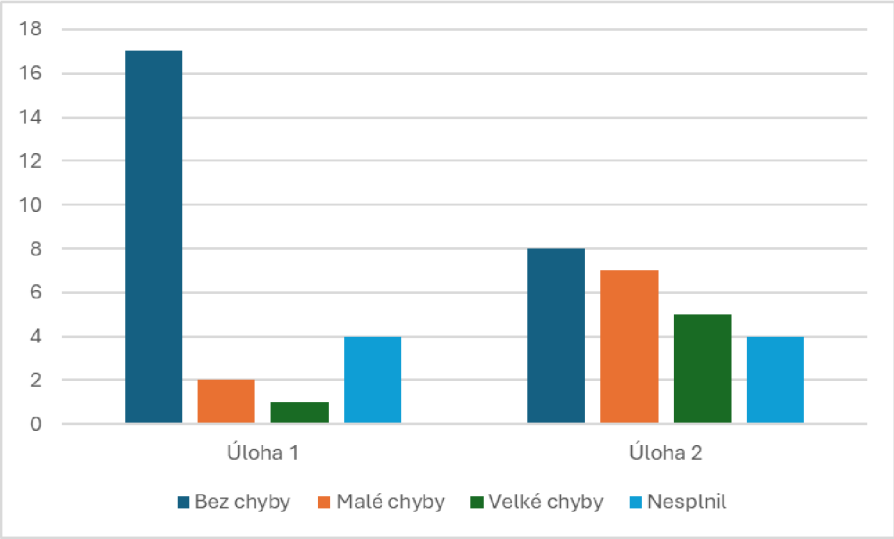
Celkem očekávatelně i v prvním ročníku je pro studenty důležité vidět uplatnění látky v praxi, dokonce ve větší míře, než tomu bylo u třetích ročníků, neboť z 24 dotázaných pouze 2 zvolili negativní odpověď. Překvapivě pak pouze 10 z 24 studentů vidí praktické využití učiva matematiky, na rozdíl od geografie, kde smysl vidí 20 studentů (není zobrazeno v grafu 4).

Také je z grafu vidět, že studentům se líbila jak ukázka využití GIS, tak také matematické příklady propojené s GIS, protože 87 % shodně v obou případech volilo kladnou odpověď (29 % rozhodně ano, 58 % spíše ano).

Pouze u předposlední otázky týkající se toho, zda v budoucnu mají v úmyslu používat program QGIS (v tištěném dotazníku bylo nejednoznačné, zda se ptám na to, jestli se program QGIS líbil, anebo na to, zda ho v budoucnu plánují použít, nicméně bylo slovně upřesněno, že se ptám na druhou z otázek) byl mezi studenty prvního ročníku větší podíl záporných odpovědí (29 % spíše ne, 8 % rozhodně ne), přesto ale převažovaly kladné odpovědi. Na vině je v tomto případě možná také špatná technika (ať už to, že studenti neměli větší možnost sami si vyzkoušet práci s QGIS, stejně jako technické problémy s projektorem při společné tvorbě vrstvy). Samozřejmě je ale možné, že některé studenty program QGIS na první pokus nenadchnul a z krátké ukázky použití programu si nedokázali udělat obrázek o tom, k čemu by jim program mohl být.

Příčina záporných odpovědí může tkvět také v tom, že mezi devíti studenty, kteří by neměli v budoucnu zájem využít QGIS, je všech šest, kteří označili geografii jako neoblíbený předmět – možná se tedy jedná pouze o obecnou nechuť k předmětu spjatému s mapováním. Zde se jedná o jediný případ, kdy se projevilo rozdělení na skupiny studentů dle jejich obliby geografie. I vzhledem k odpovědím na předposlední otázku je výsledek poslední otázky opět velmi pozitivní, protože 21 z 24 studentů projevilo zájem o další úlohy propojující matematiku a geografii, což je ještě vyšší podíl, než u třetích ročníků. I vzhledem k nadpoloviční většině studentů, kteří ve třetí otázce odpověděli, že nevidí smysl v učivu matematiky, jsou odpovědi na otázku 7 velmi uspokojivé.

Hodnocení samostatně vypracovaných příkladů



Graf 5: Výsledky úloh studentů prvního ročníku

Matematické příklady s návazností na GIS (konkrétně zápis geometrických objektů pomocí jazyka WKT) zvládli studenti kvinty poměrně dobře. Zejména u první úlohy jich většina byla schopna z matematických souřadnic správně zakreslit geometrické prvky, problematičtější pak byla druhá úloha, ve které pouze třetina studentů zvládla zapsat souřadnice prvků bezchybně. Dalších sedm studentů ale úkol splnilo úkol s menší chybou (nejčastěji zápis vrcholů polygonu po směru hodinových ručiček, chybějící zopakování počáteční souřadnice polygonu i na konci posloupnosti souřadnic nebo špatně vyčtené souřadnice některého bodu ze souřadného systému). Celkově tedy studenti dokázali zadané matematické úlohy zvládnout.

9 Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo jasně a srozumitelně popsat matematické algoritmy na pozadí geoinformačních systémů, a na základě tohoto popisu vytvořit výukový materiál, který by propojoval výuku matematiky a geografie pomocí programu QGIS. V teoretické části jsou popsány vybrané matematické algoritmy, které umožňují fungování GIS programů, a to takovým způsobem, aby zároveň co nejlépe odpovídaly realitě programu a zároveň byly srozumitelné pro středoškolského studenta. Teoretická část zahrnuje také zařazení jednotlivých kapitol týkajících se algoritmizace v GIS do rámcového vzdělávacího plánu, a to jak z pohledu matematiky, tak také z pohledu geografie.

Výsledkem práce je pak obsáhlý, materiál, který sestává z úvodní kapitoly seznamující se základy QGIS, následovaný sedmi kapitolami propojujícími matematické algoritmy a práci v QGIS. Součástí každé kapitoly jsou pak praktické příklady pro ruční výpočty i tvorbu v QGIS, a nechybí ani řešení všech příkladů. Rozsáhlost materiálu je z mého pohledu nutná zejména proto, aby byla smysluplně pokryta alespoň základní práce s GIS.

Při pokusném ověřování na gymnáziu v Českém Krumlově bylo zjištěno, že o téma GIS a propojení matematiky a geografie by mezi studenty středních škol mohl být zájem, a že by tento materiál mohl přinést motivaci pro jejich učení. Tím by byl naplněn smysl integrace předmětů. Více než polovina z 51 studentů třetích ročníků a dokonce přes 85 % ze 24 studentů prvního ročníku projevilo alespoň mírný zájem o další podobné úlohy propojující matematiku a geografii. Stejně tak pokusná hodina přinesla alespoň částečný kýžený efekt mezi studenty třetích ročníků, kteří po výpočtu aplikovaného příkladu projevili pozitivnější reakce ohledně smysluplnosti analytické geometrie než před samotným výpočtem.

Tato bakalářská práce zdaleka nepokrývá veškerou matematiku stojící za GIS, a existuje mnoho variant pro její další rozšíření - ať už pokračování s dalšími zajímavými tématy pro vektorová data, jako jsou například metody rozdělování dat do intervalů při tvorbě kartogramů nebo otázka matematického popisu kartografických zobrazení, na které už nezbylo v této práci místo, tak také rozšíření na data rastrová s takovými tématy, jako jsou interpolace nebo obecně využití matic při práci s rastrovými daty. I tato témata by mohla být zajímavá pro využití ve výuce na střední škole.

10 Literatura

ARCDATA PRAHA. *Digitální geografická databáze ArcČR® 4.2. - Popis dat.* Praha, 2023b. Dostupné z: https://www.arcdata.cz/content/dam/distributor-share/arcdata-cz/geograficka-data/arccr/licence/arccr-4-2-popis-dat.pdf

BOLSTAD, Paul a Steven MANSON. *GIS Fundamentals: A first text on geographic information systems.* 7. vydání. Eider Press, 2022. ISBN 978-0-9717647-5-0

BURROUGH, Peter. *Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment.* Oxford: Oxford University Press, 1986.

BURROUGH, P. A.; MCDONNELL, Rachael a LLOYD, Christopher D. *Principles of geographical information systems.* 3. vydání. Oxford: Oxford University Press, 2015. ISBN 978-0-19-874284-5.

BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie.* 4. vydání. Praha: Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-366-0.

ČAPEK, Richard. *Úvod do matematické geografie.* 3. vydání , upravené a doplněné; první v rámci UJEP v Ústí nad Labem. V Ústí nad Labem: Univerzita J.E.Purkyně, 2020. ISBN 978-80-7561-253-3.

ČAPEK, Richard; MIKŠOVSKÝ, Miroslav a MUCHA, Ludvík. *Geografická kartografie.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. ISBN 80-04-25153-6

DE SMITH, Michael John; GOODCHILD, Michael F. a LONGLEY, Paul. *Geospatial analysis: a comprehensive guide to principles, techniques and software tools.* 2. vydání. Leicester: Matador, 2007. ISBN 978-1906221-522

GOODCHILD, Michael a Karen KEMP. *Introduction to GIS: NCGIA Core Curriculum.* Santa Barbara: National Center for Geographic Information and Analysis, University of California, 1990.

HUGENTOBLER, Marco. *Quantum GIS.* In: SHEKTAR, Shashi a Hui XIONG. *Encyclopedia of GIS.* 2. vydání. Springer Cham, 2017, s. 935-938. ISBN 978-3-319-17885-1.

CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice.* 4. vydání. Praha: Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-362-2.

INTERNATIONAL ASSOCIATION OF OIL & GAS PRODUCERS (IOGP). *Understanding the EPSG Geodetic Parameter Dataset.* 9. vydání. 2022.

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-390-5.

KOLÁŘ, Zdeněk. *Výkladový slovník z pedagogiky: 583 vybraných hesel.* Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-3710-2.

KRÁL, Luboš a Dana ŘEZNÍČKOVÁ. Rozšíření a implementace GIS ve výuce na gymnáziích v Česku. *Geografie.*2013, roč. 118,č. 3, s. 265-283.

KRULEC, Radek. *Mezipředmětové vztahy ve výuce matematiky a geografie na střední škole.* České Budějovice, 2020. Závěrečná práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

KUMAR, G. Naresh a Mallikarjun BANGI. An Extension to Winding Number and Point-in-Polygon Algorithm.*IFAC PapersOnLine.* 2018, roč. 51, č. 1, s. 548-553

LEIPERTOVÁ, Gabriela. *Matematické dovednosti aplikované ve výuce kartografie na gymnázium.* Praha, 2010. Bakalářská práce. Univerzita Karlova

MAURYA, S.P., OHRI, A. and MISHRA, S. (2015) Open Source GIS: A Review. *National Conference on Open Source GIS: Opportunities and Challenges*, Varanasi, 2015, s. 150-155

MÍSAŘOVÁ, Darina a Jan HERCIK. *Kapitoly z didaktiky geografie 1.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3849-8

MÍSAŘOVÁ, Darina, Hana SVOBODOVÁ, Vendula MAŠTEROVÁ a Kateřina NOVOTNÁ. Czech education system's conditions for the implementation of GIS in the curriculum in an international context. *International Research in Geographical and Environmental Education.* 2024a. Dostupné z: doi:10.1080/10382046.2023.2299602

MÍSAŘOVÁ, Darina, Hana SVOBODOVÁ, Vendula MAŠTEROVÁ a Radek DURNA. *Koncepce rozvoje geoinformačních dovedností ve výuce na základních a středních školách.* Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2021. ISBN 978-80-280-0011-0.

MLČOUŠEK, Jan. *Vybrané matematické nástroje v geografii.* Liberec, 2022. Bakalářská práce. Technická univerzita v Liberci

MORAVCOVÁ, Vlasta. Matematika v mezipředmětových vztazích. *Matematika a reálný svět.* Praha: MATFYZPRESS, 2012, s. 105 - 107. ISBN 978-80-7378-231-3.

NERAD, Jiří. *Návrhy využití geografických informačních systémů v hodinách zeměpisu na základních a středních školách.* České Budějovice, 2018. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

ODVÁRKO, Oldřich. Aplikační úlohy ve výuce středoškolské matematiky. *Matematika a reálný svět.* Praha: MATFYZPRESS, 2012, s. 18 - 23. ISBN 978-80-7378-231-3

OPEN GEOSPATIAL CONSORTIUM INC (OGC). OpenGIS® *Implementation Standard for Geographic information - Simple feature access - Part 1: Common architecture.* 2010.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia - Planimetrie.* 5. vydání. Praha: Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-358-5.

RAKOUŠOVÁ, Alena. *Integrace obsahu vyučování: integrované slovní úlohy napříč předměty.* Praha: Grada, 2008. ISBN 978-80-247-2529-1

RAPANT, Petr. *Úvod do geografických informačních systémů.* Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2002

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G). Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 2022. ISBN 978-80-87000-11-3.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV). Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 2023.

SKALKOVÁ, J. Příspěvek k otázce mezipředmětových souvislostí. *Pedagogika.* 1962, roč.

12, č. 3, s. 316–325.

STALLMAN, Richard, GRAY, Joshua, ed. *Free Software, Free Society: Selected Essays of Richard M. Stallman*. Free Software Foundation, 2002. ISBN 1-882114-98-1.

SUI, Daniel. Impediments for Open GIS. *Transaction in GIS*. 2014, roč. 18, č. 1, s. 1-24

TUČEK, Ján. *Geografické informační systémy: Principy a praxe. CAD & GIS. Rychle a jistě*. Praha: Computer Press, 1998. ISBN 80-7226-091-X

TVERBERG, Helge. A proof of Jordan curve theorem. *Bulletin of London Mathematical Society*. 1982, roč. 12,s. 34-38

VANDROVCOVÁ, Jana. *Mezipředmětové vztahy ve výuce matematiky a zeměpisu ve výuce na gymnáziu na úrovni zamýšleného kurikula*. Praha, 2017. Bakalářská práce. Univerzita Karlova

WRÓBLEWSKI, Piotr. *Algoritmy*. Brno: Computer Press, 2015. ISBN 978-80-251-4126-7.

XIAO, Ningchuan. *GIS algorithms*. Los Angeles: Sage, 2016. ISBN 978-1-4462-7432-3

Zeměměřický úřad. *Katalog objektů ZABAGED ®*. Praha, 2023. Dostupné z: https://geoportal.cuzk.cz/Dokumenty/KATALOG_OBJEKTU_ZABAGED_2024.pdf

ŽAMBOCHOVÁ, Marta. *Teorie grafů v příkladech*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně (Ústí nad Labem). Fakulta sociálně ekonomická, 2007. ISBN 978-80-7044-962-2.

Internetové zdroje

ARCDATA PRAHA. *Výukové materiály pro ArcGIS*. Online. Nedatováno. Dostupné z:https://www2.arcdata.cz/oborova-reseni/gis-v-oborech/vzdelavani-a-vyzkum/zakladni-a-stredni-skoly/vyukove-materialy [citováno 2024-03-18].

EARSC. *10 Differences Between Commercial And Open Source GIS Software*. Online. 2017. Dostupné z: https://eomag.eu/10-differences-between-commercial-and-open-source-gis-software/ [citováno 2024-03-08].

GISMentors. Online. © 2014 - 2024. Dostupné z: https://gismentors.cz/ [citováno 2024-03-20]

GRASS GIS 8 Programmer's Manual. *area_poly1.c*. Online. © 2001-2013. Dostupné z: https://grass.osgeo.org/programming8/area__poly1_8c_source.html [citováno 2024-03-13].

MÍSAŘOVÁ, Darina a kolektiv autorů. *GIT do škol*. Online. © 2024b. Dostupné z: https://gitdoskol.ped.muni.cz/ [citováno 2024-03-20].

OPEN SOURCE GEOSPATIAL FOUNDATION (OSGEO). *About OSGeo*. Online. © 2024a. Dostupné z: https://www.osgeo.org/about/ [citováno 2024-03-19].

OPEN SOURCE GEOSPATIAL FOUNDATION. *What is Open Source?*. Online. © 2024b Dostupné z: https://www.osgeo.org/about/what-is-open-source/ [citováno 2024-03-18].

SUTTON, T., O. DASSAU a M. SUTTON. *Laskavý úvod do GIS*. Online. 2009. Dostupné z: https://docs.qgis.org/2.18/cs/docs/gentle_gis_introduction/index.html [citováno 2024-03-20]

Software

QGIS.org. *QGIS Geographic Information System*. QGIS Association. 2024. Dostupné z: http://www.qgis.org

Zdroje vektorových dat

Český úřad zeměměřický a katastrální (ČÚZK). *Základní báze geografických dat České republiky (ZABAGED®)*. Online. 2024. Dostupné z: https://geoportal.cuzk.cz/(S(y0qnwwsqhl5ldwyjzmqotey1))/default.aspx?mode=TextMeta&text=dSady_zabaged&side=zabaged&menu=24

ARCDATA PRAHA, ČÚZK, ČSÚ. *Data ArcČR©*. Online. 2023a. Dostupné z: https://www.arcdata.cz/cs-cz/produkty/data/arccr

11 Seznam obrázků a grafů

Obrázky

Veškeré obrázky v této práci byly vytvořeny v programu Inkscape: Inkscape Project, 2020. *Inkscape*, dostupné z: https://inkscape.org.

Obrázek 1: Znázornění polygon s dírou, vlastní tvorba

Obrázek 2: Lichoběžník pod hranou A_1A_2, vlastní tvorba

Obrázek 3: Složení obsahu polygonu z jednotlivých lichoběžníků, vlastní tvorba

Obrázek 4: Definice obalové zóny úsečky, vlastní tvorba

Obrázek 5: Tvorba obalové zóny lomené čáry a polygonu, vlastní tvorba

Obrázek 6: Vektorový součin a pravidlo pravé ruky, vlastní tvorba

Obrázek 7: Winding number algoritmus pro polygon s dírou, vlastní tvorba

Obrázek 8: Určení polohy bodů A, B vzhledem k přímce CD, vlastní tvorba

Obrázek 9: Srovnání funkcí Protnutí a Oříznout, vlastní tvorba

Obrázek 10: Dělení polygonů v rámci funkce Sjednotit, vlastní tvorba

Obrázek 11: Příklad ohodnoceného neorientovaného grafu, vlastní tvorba

Grafy

Graf 1: Odpovědi studentů třetích ročníků

Graf 2: Odpovědi studentů třetích ročníků, kteří mají v oblibě matematiku

Graf 3: Odpovědi studentů třetích ročníků, kteří nemají v oblibě matematiku

Graf 4: Odpovědi studentů prvního ročníku

Graf 5: Výsledky úloh studentů prvního ročníku

12 Seznam příloh

Příloha 1: Výukový materiál - Propojení výuky matematiky a geografie pomocí prostředí GIS

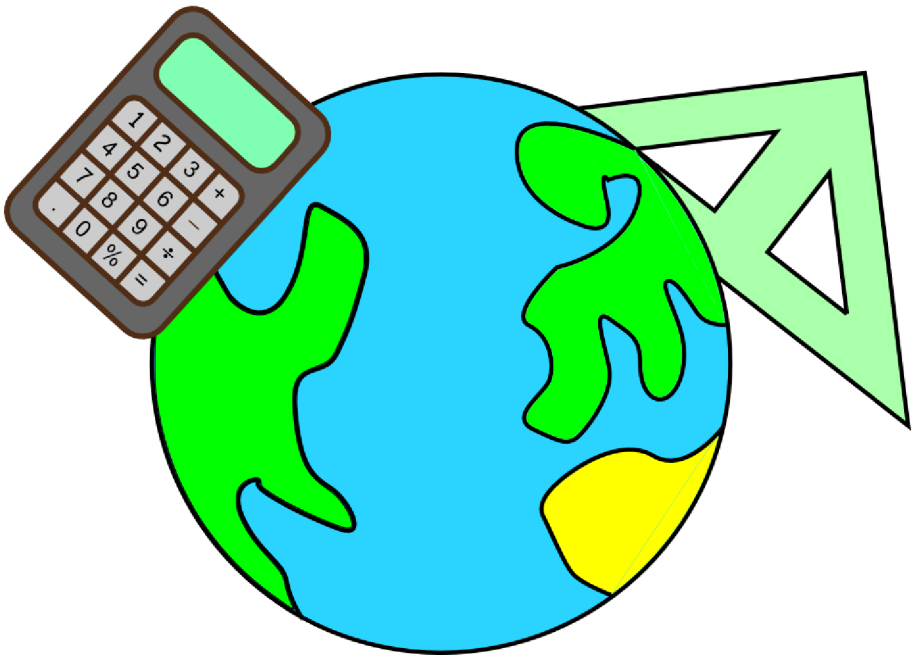
Příloha 2: Dotazník pro třetí ročníky gymnázia

Příloha 3: Dotazník pro první ročníky gymnázia

Příloha 1: Výukový materiál

Propojení výuky matematiky a geografie pomocí prostředí GIS

Výukový materiál



Petr Pomije

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta
2024

Obsah

Úvod **6**

1 Základní práce s QGIS **7**

1.1 Stažení a instalace QGIS 7

1.2 Založení projektu 8

1.3 Základní rozložení panelů QGIS 9

1.4 Datové modely 10

1.5 Načtení vrstvy 14

1.6 Globální a lokální souřadnicový systém 16

1.7 Nastavení souřadnicového systému 17

1.8 Podkladová mapa 19

1.9 Funkce Oříznout 20

1.10 Atributová tabulka 21

1.11 Výběr prvků 22

1.12 Export vybraných prvků 24

1.13 Symbologie 25

1.14 Rozvržení tisku 26

2 Základní vektorové prvky **31**

2.1 Jak na to v QGIS? 34

2.2 Příklady 38

3 Metrické úlohy **42**

3.1 Délka linií v rovině 42

3.2 Plocha polygonu v rovině 43

3.3 Jak na to v QGIS? 48

3.4 Příklady 52

4 Obalová zóna **57**

4.1 Jak na to v QGIS? 62

4.2 Příklady 65

5 Point in polygon **68**

5.1 Even-odd algoritmus 68

5.2 Winding number algoritmus 70

5.3 Jak na to v QGIS? 76

5.4 Příklady 79

6 Průsečík linií **82**

6.1 Jak na to v QGIS? 88

6.2 Příklady 89

7 Množiny **91**

7.1 Jak to souvisí s QGIS? 91

7.2 Jak na to v QGIS? 96

7.3 Příklady 97

8 Funkce síťové analýzy **102**

8.1 Klíčové pojmy teorie grafu 102

8.2 Dijkstrův algoritmus 103

8.3 Servisní oblast 105

8.4 Způsob zápisu 106

8.5 Jak na to v QGIS? 109

8.6 Příklady 113

9 Výsledky **117**

Seznam zkratek

EPSG	European Petroleum Survey Group
GIS	geoinformační systém
kV	kilovolt
LM	levé tlačítko myši
OSGeo	Open Source Geospatial Foundation
PM	pravé tlačítko myši
RÚIAN	Registr územní identifikace, adres a nemovitostí
SLDB	sčítání lidu, domů a bytů
SO ORP	správní obvod obce s rozšířenou působností
SRS	souřadnicový referenční systém
WKT	Well-known text
ZABAGED	Základní báze geografických dat České republiky

Úvod

Tento výukový materiál vznikl v rámci bakalářské práce na téma „Propojení výuky matematiky a geografie pomocí prostředí GIS“ na Přírodovědecké fakultě Jihočeské univerzity.

V rámci výukového materiálu máte možnost zjistit více o tom, na jakém principu fungují geoinformační systémy, a to na příkladu opensource programu QGIS. Dozvíte se, jak pracují vybrané nejzajímavější matematické algoritmy, a jak lze v geografii uplatnit látku naučenou v matematice na střední škole, u které jste možná často neměli představu o jejím reálném využití. Samozřejmě se také seznámíte přímo s prací v programu QGIS.

Materiál je členěn na osm kapitol, přičemž první kapitola obsahuje seznámení se základními pojmy, instalací a nejzákladnější prací s programem QGIS. Následujících sedm kapitol je členěno vždy na část vysvětlující matematický aparát, následovanou podrobným postupem práce v programu QGIS. Každá kapitola je pak zakončena několika příklady, které jsou znovu děleny na příklady řešené ručně či s pomocí kalkulačky, a příklady řešené v programu QGIS. Samozřejmě součástí materiálu jsou také výsledky k jednotlivým příkladům, abyste měli možnost ověřit si správnost vašich postupů.

1 Základní práce s QGIS

V tomto materiálu bychom se měli seznámit s aplikacemi matematiky v geografii a kartografii a reálným využitím geoinformačních systémů. Pojďme si nejprve představit, co to vlastně geoinformační systém je.

Pro geoinformační systémy (dále jako GIS) neexistuje jednoznačná a přesná definice, proto si uveďme následující definici jako jednu z možných:

„GIS může být chápán jako systém hardwaru, softwaru a procedur vytvořených ke sběru, správě, manipulaci, analýzám, modelování a zobrazení prostorově určených dat pro řešení složitých problémů plánování a řízení.“ (Goodchild, Kemp 1990 in Voženílek 1998)

Nadále se budeme bavit o GIS spíše jako o softwaru (programu), nicméně je samozřejmě nutná i hardware složka (počítač, zařízení jako GPS nebo družice pro získávání dat atd.). V našem pojetí tedy bude GIS představován programem, díky kterému můžeme tvořit, ukládat a nějakým způsobem analyzovat prostorová data a vytvářet z nich mapové výstupy.

Programem, který budeme využívat pro práci s prostorovými daty, bude QGIS. QGIS je opensource program (tedy program s otevřeným zdrojovým kódem, do nějž může kdokoliv zasahovat a přetvářet ho), spadající mezi projekty Open Source Geospatial Foundation (OSGeo) - neziskové organizace, jejímž cílem je podporovat globální rozvoj otevřených geoinformačních technologií.

1.1 Stažení a instalace QGIS

QGIS je open source GIS, je tedy volně a zdarma dostupný na stránkách projektu (www.qgis.org), odkud si ho lze zdarma stáhnout. Po otevření *For Users* na horní liště stránky lze kliknout na *Download QGIS*. Zde si lze stáhnout nejnovější verzi QGIS pro Windows, Linux nebo macOS. Po kliknutí na příslušné zelené tlačítko s nápisem *Download QGIS* (a označením verze) se stáhne instalátor QGIS. Ten stačí otevřít dvojklikem ve stažených souborech, čímž se spustí instalátor programu.

Po spuštění instalátoru je třeba postupně odklikat:

1. Souhlas s licenčními podmínkami (je třeba zaškrtnout „I accept the terms in the License Agreement“). Po zaškrtnutí zvolte *Next*

2. Výběr umístění pro instalaci programu (přednastaveno C:\Program Files, což lze ponechat, pokud nechceme instalovat program jinam). Také zde lze zvolit, zda vytvořit zástupce na ploše (*desktop shortcuts*) nebo v menu Start (*start shortcuts*). Poté je třeba zvolit znovu *Next*.

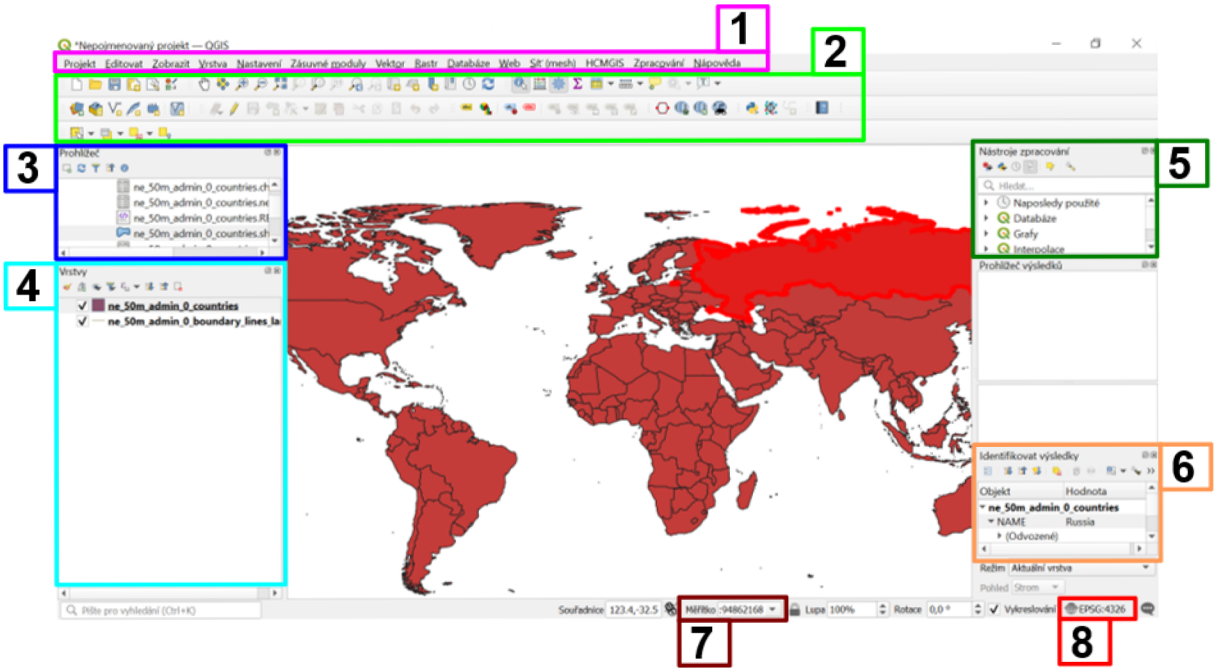
3. Následně je potřeba kliknout na *Install* a počkat, až QGIS provede instalaci. Po dokončení instalace klikni na *Finish*. Nyní se zobrazí ikona QGIS na ploše nebo v menu Start (případně ji zde možná budeš muset vyhledat). Kliknutím otevřeme program, se kterým nyní lze pracovat.

1.2 Založení projektu

Po spuštění nainstalovaného QGIS je třeba založit nový projekt. Klikněte tedy na *Nový prázdný projekt*. Projekt v QGIS se ukládá jako soubor s příponou *.qgs* a obsahuje záznamy o všech cestách k jednotlivým datům uloženým na disku, informace o nastaveních projektu (jako je například nastavení souřadného systému) a podobně. Sám o sobě projekt nepředstavuje žádnou vrstvu dat, pouze propojuje data mezi sebou.

Je třeba proto dávat pozor na to, že pokud chceme například sdílet své výsledky s ostatními, nestačí poslat pouze soubor *.qgs* s projektem - ten se totiž pouze odkazuje na data ve vašem počítači, a pokud člověk, se kterým projekt sdílíte, nemá potřebná data ve svém počítači, QGIS mu nedokáže nic zobrazit. Je proto třeba při případném sdílení sdílet také všechna data, kterých se projekt týká.

1.3 Základní rozložení panelů programu QGIS

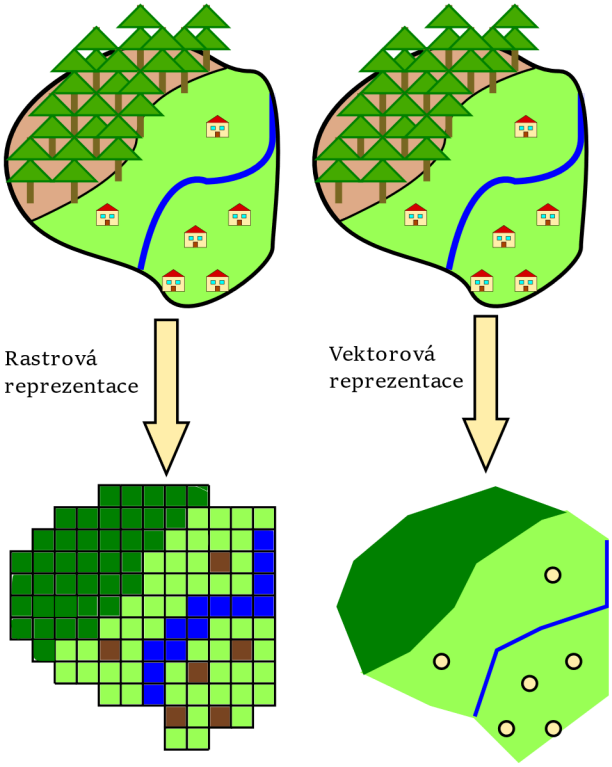


1 - Horní lišta
2 - Hlavní panel nástrojů
3 - Prohlížeč souborů
4 - Seznam načtených vrstev
5 - Nástroje zpracování
6 - Prohlížeč informací o prvku vrstvy
7 - Měřítko mapy
8 - Zvolený souřadnicový referenční systém

Obrázek 1: Rozložení panelů programu QGIS, vlastní tvorba

1.4 Datové modely

GIS umožňuje každému uživateli tvorbu geografických dat, která se skládají ze dvou složek - polohové a popisné. Nicméně velké množství dat již bylo vytvořeno dříve a je dostupné zdarma, a není tedy nutné se zdržovat jejich tvorbou. Existují dva hlavní způsoby, jak konceptualizovat data z reálného světa (tedy vytvořit model, který by vhodně zjednodušoval a reprezentoval realitu): rastrový a vektorový datový model.

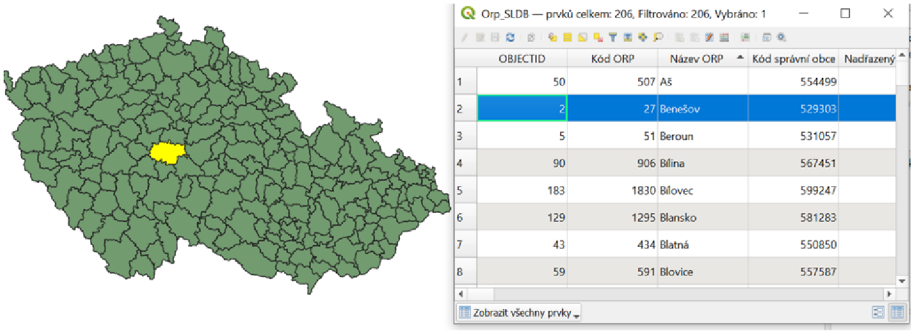


Obrázek 2: Základní způsoby reprezentace prostorových dat, vlastní tvorba

Rastrová data reprezentují daný region a prvky/jevy v něm pomocí pevně stanovené mřížky (obvykle čtvercové). Každé buňce (pixelu) mřížky je přiřazena hodnota, která udává její kvalitativní (například číslo rozlišující typ vegetačního pokryvu) nebo kvantitativní (například množství srážek) vlastnosti. Rastrový model je vhodnější k reprezentaci spojitých dat (například mapa srážek, kdy nás zajímá rozmístění v celé ploše). Výhodou rastru je celková jednoduchost struktury dat a jednoduchá kombinace s jinými rastrovými daty, nevýhodou pak náročnost na paměť přístroje nebo snížení kvality při přiblížení. V tomto výukovém materiálu se rastrovými daty zabývat nebudeme.

Vektorová data naproti tomu reprezentují prvky/jevy za pomocí bodových, liniových nebo plošných geometrických prvků (více v kapitole Základní vektorové prvky). Každý prvek má polohovou informaci reprezentovanou výčtem souřadnic, a navíc také nepolo-

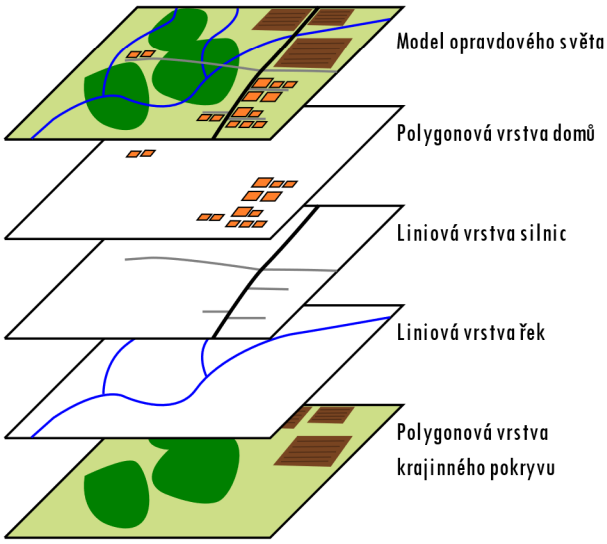
hovou (atributovou) informaci (obrázek 3). Vektorový model je vhodnější k reprezentaci diskrétních (nespojitých) dat – například body zdrojů pitné vody je lepší reprezentovat jako vektorové body, než vybarvováním pixelů v rastru. Výhodami vektorového modelu jsou menší paměťová náročnost, neztrácení kvality grafiky při přiblížení a přenost, nebo množství analytických operací (z nichž některé jsou uvedeny níže). Nevýhodou je například výpočetní náročnost. V tomto materiálu se budeme zabývat právě vektorovou reprezentací dat a matematikou s nimi spojenou.



	OBJECTID	Kód ORP	Název ORP	Kód správní obce	Nadřazený
1	50	507	Aš	554499	
2	2	27	Benešov	529303	
3	5	51	Beroun	531057	
4	90	906	Bílina	567451	
5	183	1830	Bílovec	599247	
6	129	1295	Blansko	581283	
7	43	434	Blatná	550850	
8	59	591	Blovice	557587	

Obrázek 3: Vektorová vrstva ORP_SLDB z ArcČR 4.2 včetně atributové tabulky

Model reálného světa lze složit z jednotlivých vrstev, například následujícím způsobem:



Obrázek 4: Rozložení krajiny na jednotlivé vektorové vrstvy, vlastní tvorba

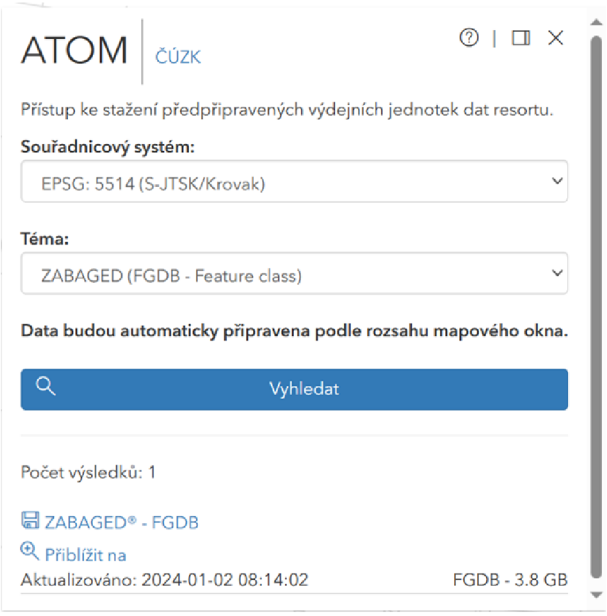
Volně dostupné vektorové databáze

V tomto výukovém materiálu budeme využívat dvě volně dostupné vektorové databáze mapující Českou republiku: ZABAGED 4.1 a ArcČR 4.2.

ZABAGED 4.1

ZABAGED (Základní báze geografických dat ČR) je vektorový digitální model území České republiky, spravovaný Zeměměřickým úřadem. Jeho obsahem je 139 základních typů geografických objektů v osmi kategoriích - sídla, komunikace, rozvodné sítě a produktovody, vodstvo, územní jednotky a chráněná území, vegetace a povrch a prvky terénního reliéfu. Každý prvek má jak prostorovou, tak popisnou informaci v rámci atributové tabulky.

Geodatabázi ZABAGED lze získat z geoportálu ČÚZK. Zde je potřeba rozkliknout v panelu po pravé straně záložku *Polohopis* a vybrat možnost *Stáhnout data*. Otevře se geoprohlížeč ČÚZK a dialogové okno pro stažení. Zde je třeba zvolit souřadnicový systém EPSG: 5514 (S-JTSK/Krovak) a ve spodní části kliknutím na modrý nápis *Zabaged – FGDB* začít stahování (pozor, geodatabáze má 3,8 GB, budeš potřebovat místo na disku). Geodatabáze je zazipovaná, je potřeba pomocí nějakého programu (například 7-zip nebo WinRAR) soubor rozbalit. Geodatabáze je uložena jako složka obsahující soubory (do které hlavně nezasahujte, nic v ní neměňte), stačí celou složku zkopírovat na příslušné místo na disku.



Obrázek 5: Stažení dat z geoportálu ČÚZK

Uložte si stažené geodatabáze do složky na disku C – odtud budou dobře dostupné v prohlížeči souborů. Složku pojmenujte například „GIS“, ať se v souborech vyznáte. Samozřejmě si můžete geodatabázi uložit do jiné libovolné složky, nicméně odtud soubory už tak dobře dostupné nebudou.

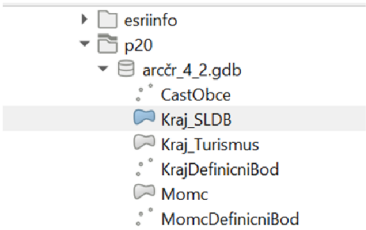
ArcČR 4.2

Databáze ArcČR 4.2 obsahuje databázi Administrativního členění České republiky, odvozenou z databáze RÚIAN (Registr územní identifikace, adres a nemovitostí) a vybrané statistické údaje z ČSÚ – turismus, naději dožití a data z Územně analytických podkladů. Databáze obsahuje členění ČR na obce, správní obvody obcí s rozšířenou působností, okresy, kraje, státní hranice, základní územní jednotky a městské a obecní části.

Geodatabázi ArcČR 4.2 lze stáhnout ze stránek ARCDATA Praha. Zmáčkni *Stáhnout verzi 4.2*. Budete přesměrováni na stránky ArcGIS, kde je ještě jednou třeba zvolit *Stáhnout*, tentokrát po pravé straně. Nyní už dojde ke stažení geodatabáze. Stažená data jsou ale koncipována primárně jako projekt pro jiný GIS program – komerční program ArcGIS Pro od ESRI. Pro využití v QGIS je proto ještě nutné rozbalit soubor (například za použití programu WinRAR nebo 7-Zip). Geodatabázi nalezneš ve složce *p20* v rozbaleném souboru – tuto složku přesuneme do složky na disku C, do které si budeme ukládat data.

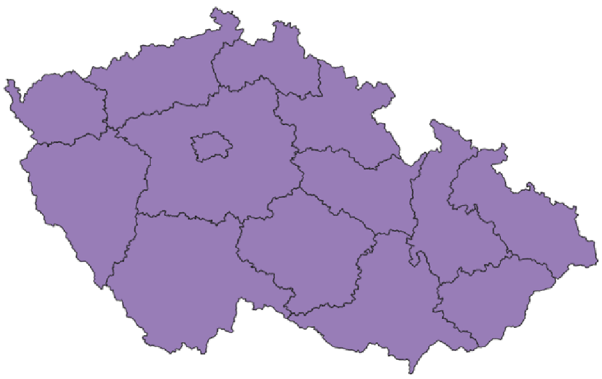
1.5 Načtení vrstvy

V prohlížeči souborů po levé straně najdeme složku ve svém počítači, do které jsme uložili geodatabáze ZABAGED a ArcČR 4.2. Postupným rozbalováním složek se dostaneme až dovnitř geodatabáze (značka kontejneru/válce). Rozbalením se dostaneme k seznamu všech vrstev v databázi. Značky vedle nápisu ukazují, jakého geometrického typu je daná vrstva – bod značí bodovou vrstvu, lomená čára liniovou, ploška polygonovou vrstvu. Chycením vrstvy a tažením LM z prohlížeče souborů do mapového okna načteme vrstvu do projektu. Najdeme vrstvu *Kraj_SLDB* v databázi ArcČR 4.2 a potažením doprostřed obrazovky ji otevřeme v mapovém okně.



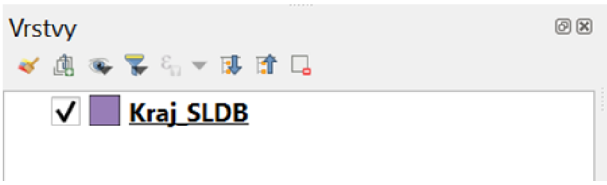
Obrázek 6: Načtení vrstvy z geodatabáze ArcČR 4.2 v QGIS

Vrstva se zobrazí v mapovém okně:



Obrázek 7: Načtená vrstva z geodatabáze ArcČR 4.2 v programu QGIS

Vrstva se nyní také zobrazí vlevo v panelu načtených vrstev, kde s ní lze stisknutím PM provádět změny.



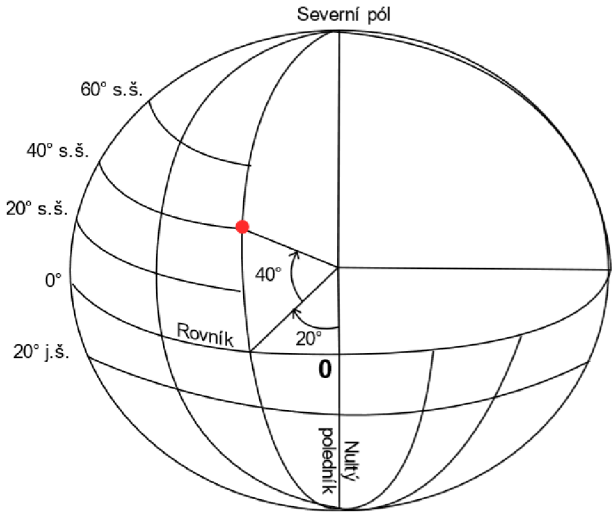
Obrázek 8: Seznam načtených vrstev v QGIS

Pokud zrušíme zaškrtnutí políčka vedle názvu a symbolu vrstvy, vrstva se stane skrytou – i nadále je načtena v projektu, pouze se nezobrazuje v mapovém okně. To se hodí například při práci s velkými polygonovými vrstvami s mnoha prvky, jejichž vykreslování trvá QGIS dlouho (a případně hrozí i zamrznutí programu). Se skrytou vrstvou lze nadále provádět všechny možné operace.

Dobré je také měnit názvy vrstev – například při používání překryvných analýz v dalších kapitolách se všechny výsledné vrstvy pojmenovávají automaticky stejně. Jejich název změníme kliknutím pravého tlačítka na název vrstvy v seznamu vrstev a výběrem možnosti *Přejmenovat vrstvu*. Po přepsání názvu stisknutím Enter vrstvu přejmenujeme.

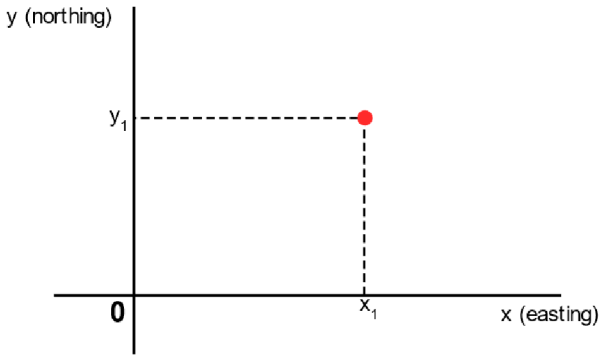
1.6 Globální a lokální souřadnicový systém

Pro práci s GIS existují dva hlavní koncepty souřadnicového systému – globální a lokální. Globální souřadnicový systém udává polohu daného bodu v rámci celého zemského povrchu – můžeme si ho představit jako zeměpisné souřadnice, které známe z klasického atlasu celého světa. Poloha bodu je tedy udána zeměpisnou šířkou, která představuje úhel mezi rovníkem a rovnoběžkou, na které daný bod leží, a zeměpisnou délkou, která vyjadřuje úhel mezi nultým (Greenwichským) poledníkem a poledníkem, na kterém leží daný bod. Počátečním bodem celé soustavy souřadnic je průsečík rovníku a nultého poledníku.



Obrázek 9: Globální soustava souřadnic, vlastní tvorba

Pro práci s menšími oblastmi se více hodí pracovat s lokálním souřadnicovým systémem. Ten vzniká při využití vhodného zobrazení kulového povrchu Země do plochy, a je založen na pravoúhlé (kartézské) souřadné síti s daným počátkem soustavy (bod 0). Poloha bodu se pak vyjadřuje vůči počátku soustavy souřadnic, a to pomocí dvou souřadnic – x (zvaná též jako easting, která vyjadřuje, jako moc na východ od počátku soustavy jsme) a y (zvaná též jako northing). Výhodou lokálního systému souřadnic je snadnější práce se souřadnicemi, a především snadnější výpočty – je jednodušší cokoliv počítat v rovině, než na kulové ploše. S tím se ale zároveň pojí i hlavní riziko: výpočty v rovině mohou být kvůli způsobu převedení povrchu koule do roviny zkreslené, je tedy nutné dávat dobrý pozor, abychom vhodně volili zobrazení, které bude povrch zkreslovat minimálně, v ideálním případě vůbec.



Obrázek 10: Lokální soustava souřadnic, vlastní tvorba

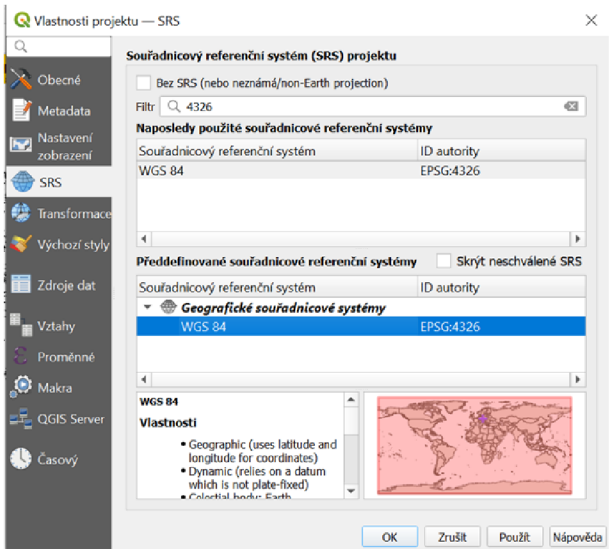
V tomto materiálu budeme v matematických úlohách bez výjimky využívat lokálního souřadnicového systému. Ten navíc bude obecně trochu zjednodušený, například při práci se souřadnicemi v rámci celé ČR nebudeme využívat skutečné souřadnice Křovákova nebo Lambertova kuželového plochojevného zobrazení, ale zjednodušený souřadnicový systém. Také budeme obecně zanedbávat dopady zkreslení daného zobrazení na výsledek – většinou pracujeme s malým územím, na kterém by dopad zkreslení neměl být znát, případně je zkreslení malé a můžeme si dovolit ho zanedbat.

1.7 Nastavení souřadnicového systému

Existuje množství způsobů, jak zobrazit povrch zemského tělesa (nebo jeho část) do roviny – těmto způsobům říkáme mapová zobrazení. Každá vrstva by měla mít přednastavený svůj souřadnicový systém od autora vrstvy. Při načtení první vrstvy do projektu se automaticky její souřadnicový systém (dále jako SRS – souřadnicový referenční systém) nastaví i jako souřadnicový systém projektu - ten v sobě zahrnuje i to, jakým způsobem je provedeno mapové zobrazení. Pokud však chceš změnit SRS projektu, stačí dvojklikem LM na název souřadnicového systému v pravé dolní části obrazovky (symbol zeměkoule se souřadnou sítí a nápis EPSG s číslem). Alternativně lze rozbalit záložku *Projekt* v horní liště a vybrat *Vlastnosti projektu*, a následně zvolit v dialogovém okně v panelu po levé straně záložku *SRS*.

Nyní se zobrazí volba SRS projetku. Jednotlivé souřadnicové systémy pocházejí z databáze EPSG (European Petrology Survey Group), která sdružuje jednotlivé definicie SRS a transformace mezi nimi. Každé zobrazení má v EPSG přiřazeno své číslo – například Křovákovo zobrazení S-JTSK/Krovak East North, které se běžně používá pro zobra-

zení České republiky, má kód 5514. Souřadnicové systémy lze hledat také pouze na základě tohoto čísla – například pokud chceme souřadnicový systém změnit na WGS 84 (EPSG:4326), který se využívá na zobrazování celé planety, stačí do vyhledávače napsat číslo 4326. Nyní stačí vybrat zvolený systém a kliknutím OK nechat QGIS převést mapu do tohoto SRS.

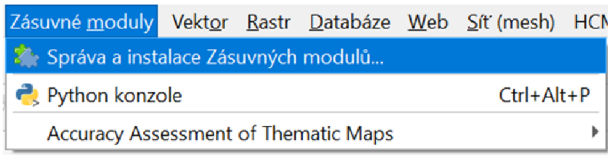


Obrázek 11: Volba souřadnicového systému v QGIS

Po stisknutí OK se může stát, že se objeví ještě jedno dialogové okno – většinou totiž existuje více možností, jak přejít od jednoho souřadného systému k druhému (více variant přepočtu). Můžeme tedy vybírat z variant, které QGIS nabídne, nicméně pokud toto dialogové okno pouze přejdeme stisknutím OK, pravděpodobně získáme dobrou transformaci.

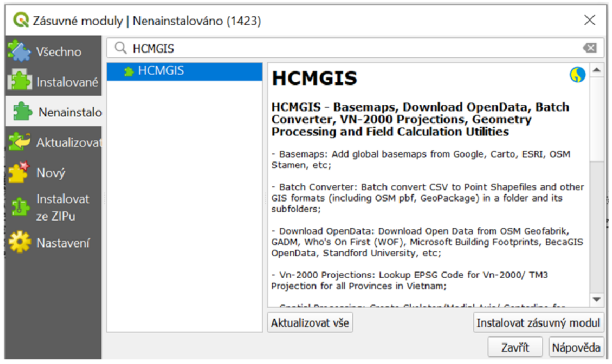
1.8 Podkladová mapa

Až budeme v dalších kapitolách vytvářet nové vrstvy, bude se nám s velkou pravděpodobností hodit nějaký existující mapový základ – například satelitní snímky, nebo rovnou hotové vektorizované mapy. Tento mapový základ budeme nazývat jako podkladová mapa. QGIS v základní formě nemá žádné takové mapy, je tedy potřeba využít jednoho z zásuvných modulů (pluginů) – ty přidávají další možné funkce vytvořené uživateli QGIS, které nejsou obsaženy v základní verzi. Zásuvné moduly lze jednoduše získat rozkliknutím *Zásuvné moduly* na horní liště a výběrem možnosti *Správa a instalace Zásuvných modulů.*



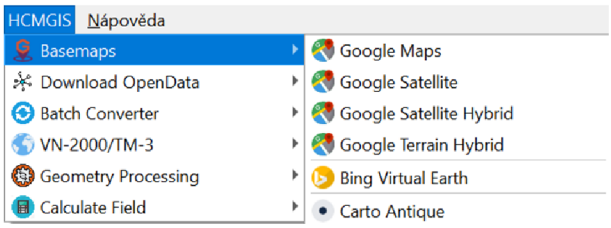
Obrázek 12: Zásuvné moduly v QGIS

Otevře se dialogové okno zásuvných modelů. V něm je třeba do vyhledávače napsat „*HCMGIS*“ a zvolit tlačítko *Instalovat zásuvný modul.*



Obrázek 13: Správa zásuvných modulů v QGIS

Nyní se na horní liště objeví záložka HCMGIS – rozkliknutím se otevře seznam. Zde můžeme přistupovat k různým podkladovým mapám (*basemaps*). Nejjednodušší variantou je využít první kolonku *Basemaps* – zde pak máme na výběr různé varianty podkladových map, včetně satelitních a běžných map od Google, se kterými jsi pravděpodobně již někdy pracoval/a. Kliknutím na vybranou mapu se tato podkladová mapa otevře jako jedna vrstva v panelu vrstev po levé straně.

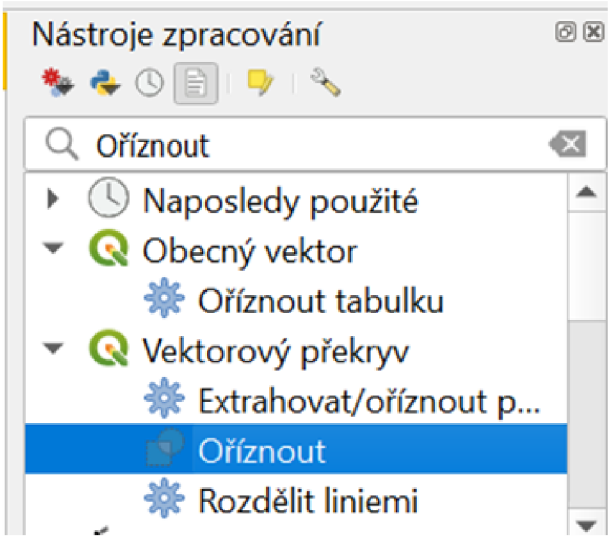


Obrázek 14: Užití pluginu HCMGIS

1.9 Funkce Oříznout

Rozsahy dat v používaných geodatabázích (zejména v databázi ZABAGED) jsou dost značné a obsahují velké množství prvků. Pro dobré fungování některých níže popsaných funkcí budeme potřebovat ořezávat vrstvy na menší části, které následně budeme využívat – jinak hrozí, že se QGIS zasekne nebo úplně spadne kvůli přetížení výpočetní kapacity.

V panelu po pravé straně (panel *Nástroje zpracování*) napíšeme do vyhledávače „Oříznout“. Pokud se panel *Nástroje zpracování* nezobrazuje, je třeba ho zapnout na horní liště v sekci *Zobrazit* → *Panely* a zaškrtnout *Nástroje zpracování*. Zde v sekci *Vektorový překryv* vyberme funkci *Oříznout*. Otevře se dialogové okno.

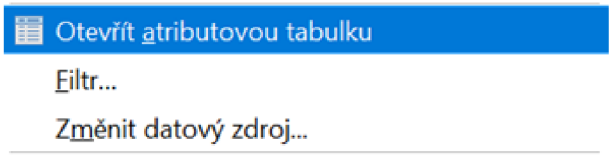


Obrázek 15: Funkce oříznout v QGIS

Po otevření dialogového okna je třeba vyplnit *Vstupní vrstvu* (kterou chceme oříznout, a pak nadále používat) a *Překryvnou vrstvu* (jejímiž okraji pouze ořízneme vstupní vrstvu).

1.10 Atributová tabulka

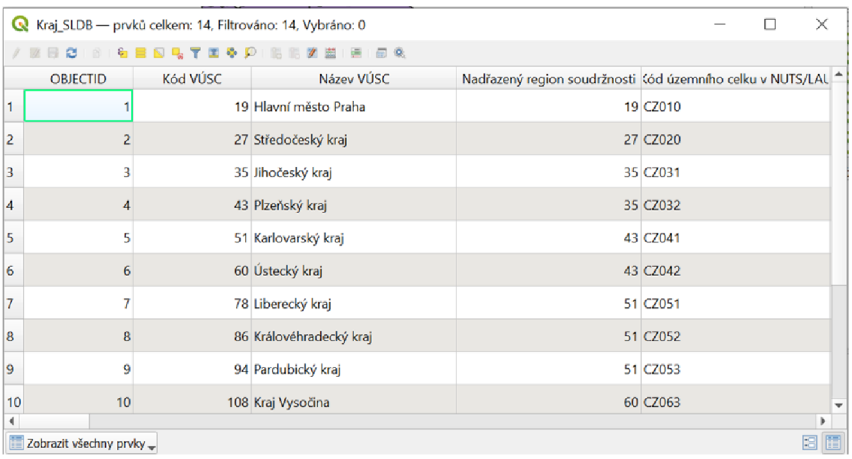
Vektorová data kromě dat o poloze obsahují ještě atributovou (popisnou) složku. Pro každý prvek tak lze zadat jeho název, identifikační číslo, ale také různé hodnoty (například počty obyvatel v polygonech reprezentujících územní celky). Zobrazit tyto atributové informace lze v atributové tabulce. Klikneme PM na načtenou vrstvu a v nabídce vybereme možnost *Otevřít atributovou tabulku.*



Obrázek 16: Možnosti vrstvy v QGIS

Dojde k otevření atributové tabulky. Ta vypisuje všechny prvky dané vrstvy – každý řádek tabulky reprezentuje jeden prvek vrstvy. Například vrstva *Kraj_SLDB* obsahuje pro každý prvek (postupně zleva doprava) jeho ID v rámci QGIS, kód a název kraje, kód nadřazeného regionu soudržnosti a další kódy a statistiky ze Sčítání lidu, domů a bytů. Tyto hodnoty jsou různého datového typu (text, celé číslo, desetinné číslo – viz kapitola Základní vektorové prvky). Pokud chceme pro nějaké atributy v atributové tabulce znát jejich přesný význam, je třeba hledat v popisech dat – pro ZABAGED i ArcČR 4.2 lze najít tyto popisy na stránkách, ze kterých jsme je stahovali.

V záhlaví atributové tabulky pak najdeme číselné údaje o počtu prvků vrstvy a počtu vybraných prvků vrstvy (to se hodí v případě, že potřebujeme rychle zjistit, kolik prvků má daná vrstva).



	OBJECTID	Kód VÚSC	Název VÚSC	Nadřazený region soudržnosti	Kód územního celku v NUTS/LAU
1	1	19	Hlavní město Praha	19	CZ010
2	2	27	Středočeský kraj	27	CZ020
3	3	35	Jihočeský kraj	35	CZ031
4	4	43	Plzeňský kraj	35	CZ032
5	5	51	Karlovarský kraj	43	CZ041
6	6	60	Ústecký kraj	43	CZ042
7	7	78	Liberecký kraj	51	CZ051
8	8	86	Královéhradecký kraj	51	CZ052
9	9	94	Pardubický kraj	51	CZ053
10	10	108	Kraj Vysočina	60	CZ063

Obrázek 17: Atributová tabulka vrstvy Kraje_SLDB z ArcČR 4.2

1.11 Výběr prvků

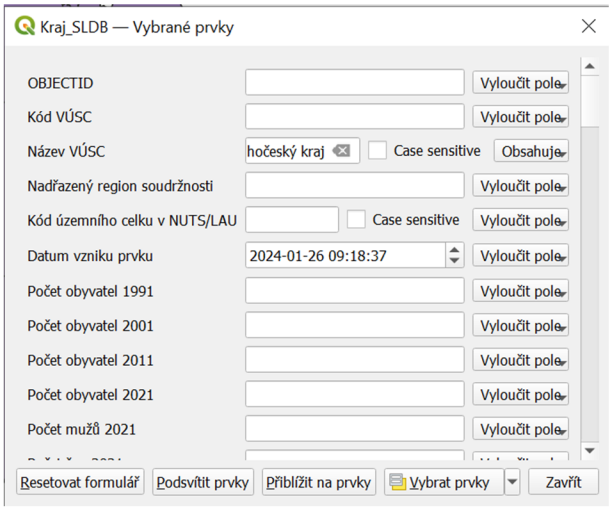
Často nepotřebujeme všechny prvky vrstvy, ale zajímá nás pouze výběr určitých prvků. K tomu slouží nástroje výběru v liště nástrojů v horní části obrazovky.

Obrázek 18: Tlačítka výběru prvků v QGIS

První tlačítko slouží k ručnímu výběru – kliknutím na prvek ve vrstvě se příslušný prvek vybere. Prvky lze přidávat do zahájeného výběru podržením *Shift*, a naopak odebírat při podržení *Ctrl*. Šipkou vedle tlačítka lze otevřít také další možnosti – lze vybírat například za nakreslením obdélníku či tvaru nakresleného od ruky. Důležité je, že v seznamu načtených vrstev musíme mít označenou danou vrstvu, jinak ruční výběr nebude fungovat.

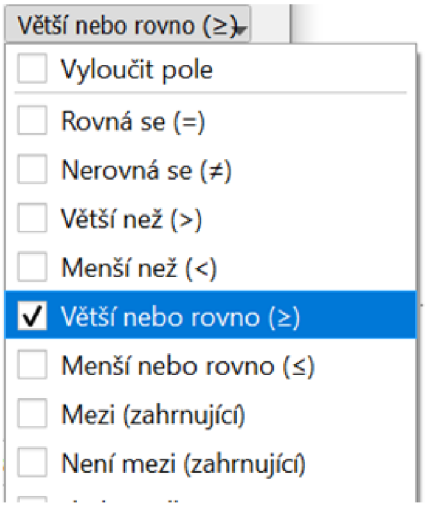
Druhé tlačítko umožňuje vybírat prvky dle jejich hodnot v atributové tabulce. Lze tak vybírat například prvky s určitou hodnotou (třeba se zvoleným jménem v případě naší vrstvy krajů), ale také třeba všechny prvky, která mají větší plochu, než je zadaná hodnota.

Po stisknutí tlačítka dojde k otevření dialogového okna *Výběr podle hodnoty*. Zde je třeba zadat hodnotu, podle které chceme výběr uskutečnit. Například chceme najít jeden z krajů dle jména, konkrétně Jihočeský. Do kolonky *Kód VÚSC* tedy napíšeme "Jihočeský kraj"



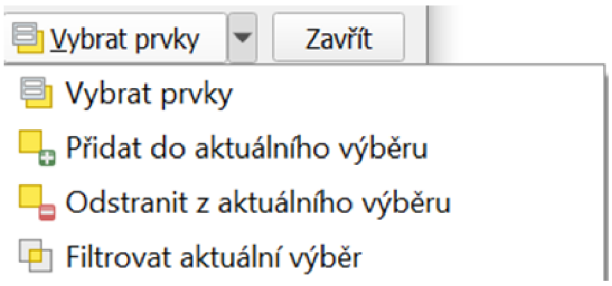
Obrázek 19: Výběr prvků dle hodnoty v QGIS

Kromě výběru přesných hodnot lze vybírat podle určité podmínky – například pokud chceme vybrat všechny kraje, které měly při SLDB 2021 více než milion obyvatel. Potom do kolonky *Počet obyvatel 2021* napíšeme "1 000 000"a rozklikneme tlačítko se šipkou vedle kolonky – objeví se rozbalovací seznam, ve kterém lze zvolit různé varianty podmínek. V tomto případě chceme všechny kraje s milionem nebo více obyvatel – vybereme proto variantu *větší nebo rovno*. Stejně tak lze zvolit variantu *menší, menší nebo rovno, nerovná se* atd.



Obrázek 20: Možnosti pro výběr prvků pomocí hodnoty v QGIS

Stisknutím tlačítka *Vybrat prvky* dojde k výběru všech prvků splňujících námi zadané podmínky. Výběr lze také různě modifikovat – k tomu slouží rozbalovací seznam vedle tlačítka *Vybrat prvky*. Pokud chceme například k už vybraným krajům s více než milionem obyvatel v roce 2021 přidat ještě kraje s více než milionem obyvatel v roce 2011, vyplníme kolonku *Počet obyvatel 2011* (hodnota "1 000 000"a vybereme *větší nebo rovno než*), tentokrát ale zvolíme variantu *Přidat do aktuálního výběru*.



Obrázek 21: Možnosti výběru prvků v QGIS

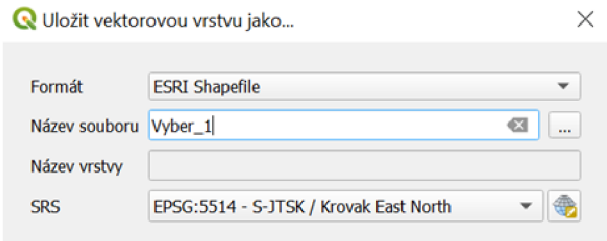
Podobně můžeme naopak odstranit z výběru krajů s milionem a více obyvatel všechny s počtem mužů menším než 600 000 – nejprve znovu vyber všechny prvky s počtem

obyvatel více než 1 000 000, následně vyplníme kolonku *Počet mužů 2021* (hodnota "600 000", varianta *menší než*) a zvolíme možnost *Odstranit z aktuálního výběru.*

Konečně varianta *Filtrovat aktuální výběr* vybere všechny prvky, které splňují postupně všechny zadané podmínky – pokud tedy nejprve vybereme všechny prvky nad milion obyvatel v roce 2021 a následně pomocí varianty *Filtrovat aktuální výběr* vybereme prvky s více než 600 tisíci muži v roce 2021, vyberou se pouze ty prvky, které splňují obě zvolené podmínky.

1.12 Export vybraných prvků

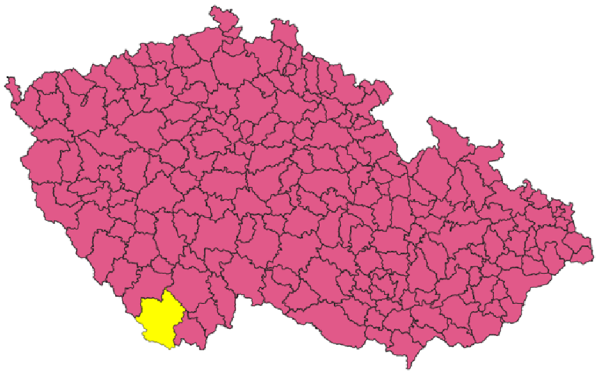
Pokud chceme vybrané prvky nadále využívat, je potřeba je uložit – jinak se při uskutečnění jiného výběru původní výběr smaže. Uložení lze provést kliknutím PM na vrstvu v seznamu vrstev, zde zvolíme možnost *Export* a vybereme *Uložit vybrané prvky jako.* V dialogovém okně je nutné vyplnit název souboru a tlačítkem se symbolem ... vybrat umístění souboru na disku. Lze volit i různé datové formáty, nicméně ten budeme nechávat jako *ESRI Shapefile.*



Obrázek 22: Export vybraných prvků v QGIS

V příkladech řešených v QGIS budeme hodně využívat ořezávání dat na velikost území tvého správního obvodu obce s rozšířenou působností (dále jen SO ORP). Z databáze ArcČR 4.2 tedy načteme polygonovou vrstvu *ORP_SLDB.* Pomocí nástroje ručního výběru provedeme výběr našeho SO ORP.

Následně klikneme PM na vrstvu *ORP_SLDB* v seznamu načtených vrstev, klikneme na *Export* a následně *Uložit vybrané prvky jako.* Vrstvu pojmenujme jako *ORP_názevORP* (například *ORP_Cesky_Krumlov*) – je lepší nepoužívat v názvech diakritiku a mezery. Uložíme si vrstvu do složky na disku C, ve které máme uložené databáze ZABAGED a ArcČR, abychom ji měli snadno po ruce.

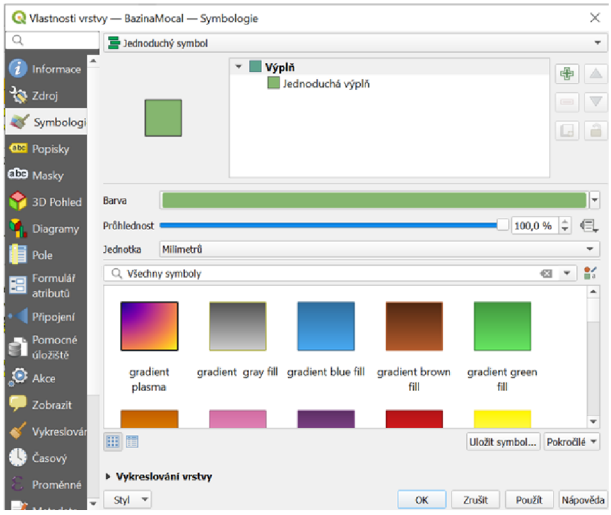


Obrázek 23: Výběr prvku pro export v QGIS

1.13 Symbologie

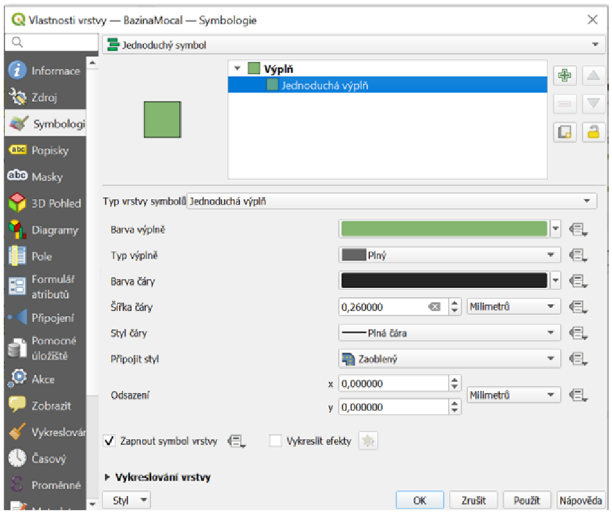
Pro správnou a přehlednou vizualizaci mapových výstupů je někdy potřeba měnit grafické vlastnosti jednotlivých vrstev. Toho lze dosáhnout za pomocí nastavení symbologie. Nastavení symbologie otevřeme kliknutím PM na název vrstvy v panelu vrstev a zvolením *Vlastnosti* (alternativně dvojklikem LM na název vrstvy). V otevřeném dialogovém okně *Vlastnosti vrstvy* zvolíme záložku *Symbologie* ze seznamu na levé straně.

Nyní můžeme měnit barvu (po rozkliknutí se objeví barevné kolo, na kterém lze vybírat z barev), nastavit průhlednost (100 % znamená neprůhlednost vrstvy, 0 % naprosto průhlednou vrstvu). Lze také vybírat z několika předdefinovaných podob značek.



Obrázek 24: Základní možnosti symbologie v QGIS

Kliknutím na nápis *Jednoduchá výplň* se otevřou další možnosti úpravy grafické podoby vrstvy – lze volit různé typy výplně, styl čáry/okraje, tloušťku čáry a další. Lze si vyzkoušet, jakým způsobem se dá upravovat podobu jednotlivých typů vrstev.



Obrázek 25: Rozšířené možnosti symbologie v QGIS

1.14 Rozvržení tisku

Chceme-li vytvořenou mapu vytisknout, je třeba vytvořit *Nové rozvržení tisku*. To otevřeme v horní liště v záložce *Projekt* volbou možnosti *Nové rozložení tisku* (nebo zkratkou *Ctrl+P*). Následně se otevře dialogové okno, ve kterém je třeba vyplnit název nového tiskového rozložení. Poté dojde k otevření okna rozvržení tisku.

Ikona s listem papíru v panelu po pravé straně umožňuje přidat nové mapové okno. Potáhnutím LM po papíře uprostřed obrazovky představujícím plánované rozvržení tisku vytvoříme mapové okno příslušné velikosti.

Obrázek 26: Přidání mapového listu

Ikonou se šipkami lze posouvat a měnit měřítko obsahu v mapovém okně. Po stisknutí tlačítka stačí „chytit“ mapový obsah pomocí LM a posouvat do příslušné polohy. Točením kolečka myši lze dosáhnout přiblížení nebo oddálení (změnu měřítka).

Obrázek 27: Tlačítko posunu mapového obsahu

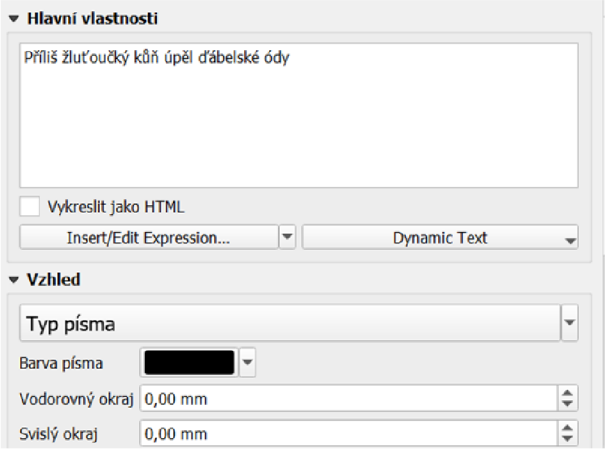
Vlastnosti mapového okna lze dále upravovat v panelu po pravé straně. U mapového okna je to hlavně změna měřítka, rotace mapy a souřadnicového systému, po scrollování dolů lze nastavit například rozsah vrstvy (to lze i ručně, potažením rohu mapy), vytvořit rám okna, barvu pozadí mapy a jiné.

Následující ikony umožňují přidat prvky nutné pro správnost každého kartografického výstupu. První ikona umožnuje přidat libovolný obrázek. Druhá ikona umožňuje přidat text – nadpis mapy nebo tiráž, tedy příslušné informace o autorovi mapy, zobrazení, měřítku, použitých datech. Prostřední tlačítko přidává automatickou legendu mapy. Poslední dvě ikony umožňují přidání grafického měřítka mapy a směrovky ukazující sever.

Obrázek 28: Tlačítka pro přidání prvků mapového výstupu

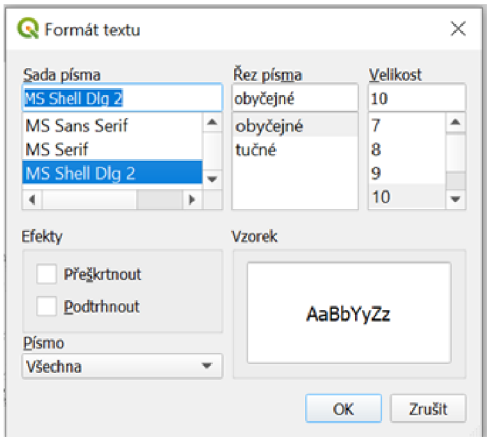
Text

Po stisknutí tlačítka vložení textu potáheme myší po mapovém listu – tím se vytvoří textové pole. Text lze upravovat v panelu *Vlastnosti položky* po pravé straně. Obsah textu lze měnit v kolonce *Hlavní vlastnosti*, kde se dá text libovolně přepisovat.



Obrázek 29: Možnosti úpravy textu v tiskovém rozložení

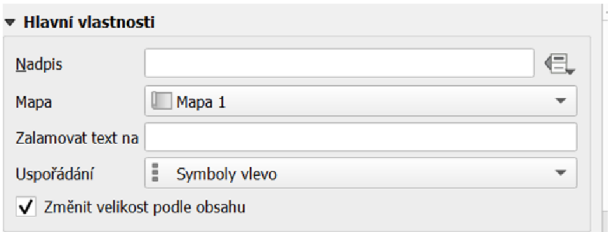
Grafickou podobu textu změníme v kolonce *Vzhled*, kde lze nastavit typ písma – po kliknutí se otevře dialogové okno, ve kterém jde nastavit font, velikost či řez písma dle vlastní vůle.



Obrázek 30: Možnosti úpravy textu v tiskovém rozložení

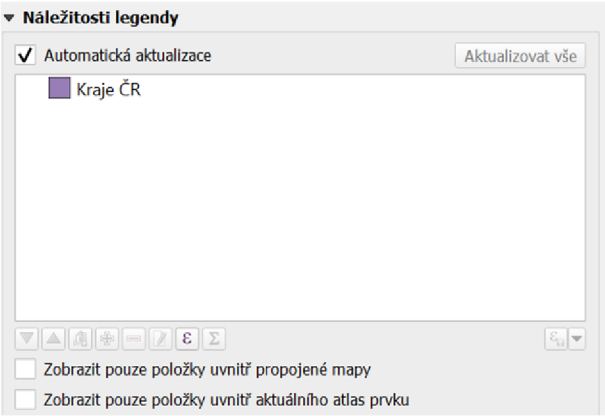
Legenda

Legenda funguje automaticky na základě vrstev zobrazených v mapě. Ve *Vlastnosti položky* lze nastavit nadpis legendy. Pokud vytváříme více map najednou, v kolonce *Mapa* lze zvolit, kterého mapového okna se legenda týká. Lze měnit i uspořádání (zarovnání symbolů vpravo nebo vlevo).



Obrázek 31: Úprava legendy v tiskovém rozložení

Důležitá je část *Náležitosti legendy*, kde lze nastavit, aby se legenda automaticky aktualizovala dle obsahu mapy (vrstvy načtené a vytvořené v projektu). Klíčová je také kolonka *Zobrazit pouze položky uvnitř propojené mapy* – v případě, že máme nějaké vrstvy načtené v projektu, ale jsou nastaveny jako skryté, nebudou se zobrazovat jako položky v legendě. Názvy i barvy se automaticky mění podle symbologie, kterou jste nastavili v projektu.



Obrázek 32: Změna položek zobrazovaných v legendě

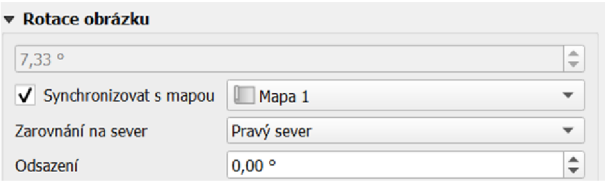
Měřítko

U měřítka lze ve *Vlastnosti položky* nastavit styl (na výběr jsou různé styly, například černobílá přerušovaná čára nebo čára s kolmými značkami délky). Dále lze nastavit jednotky měřítka (kilometry nebo metry dle rozsahu mapy), a popisek jednotek. Také lze nastavit počet segmentů a délku segmentu (například pokud chceme, aby měřítko mělo čtyři segmenty po 25 kilometrech, nastavíme segmenty napravo 4 a 25 jednotek). Lze přidat i segementy nalevo od nuly.

Obrázek 33: Změna vlastností měřítka

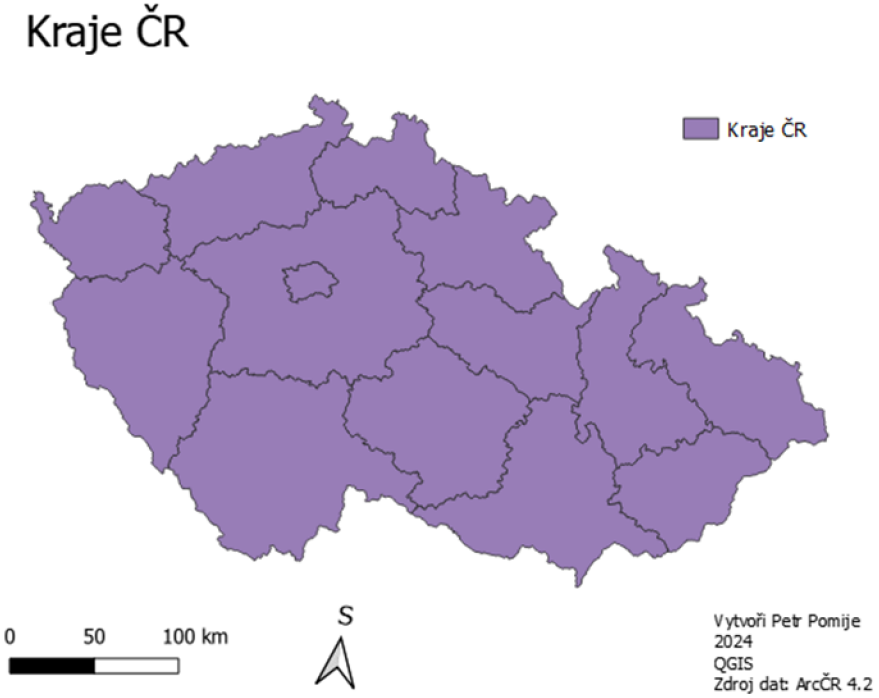
Směrová růžice

Směrová růžice ukazuje, kde na mapě je skutečný sever. Její podobu lze měnit, například v záložce *SVG Browser* lze najít několik možných podob směrovky. Důležité je v *Rotace obrázku* zvolit v kolonce *Zarovnání na sever* možnost *Pravý sever* – například Křovákovo zobrazení má pravý sever otočený o 7,33 stupně, proto by původní nastavení nezobrazovalo skutečný sever v mapě.



Obrázek 34: Změna vlastností směrové růžice

Výsledné tiskové rozložení může vypadat například následovně:



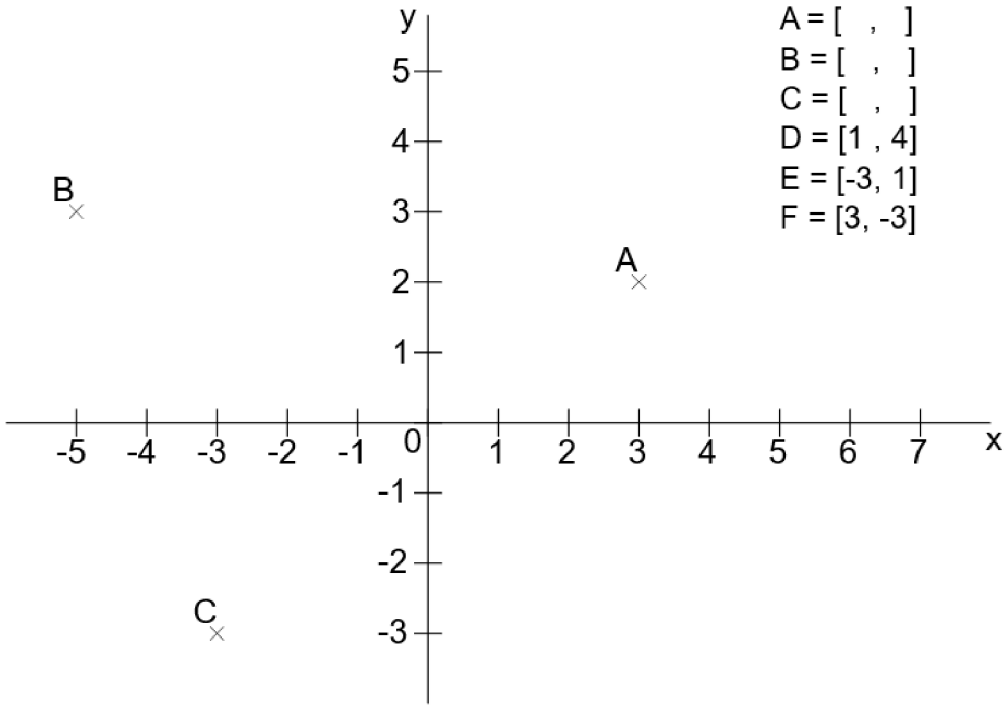
Obrázek 35: Možná podoba tiskového rozložení v QGIS

2 Základní vektorové prvky

Potřebné vstupní znalosti: kartézská soustava souřadnic

Už na základní škole jste se určitě setkali s kartézskou soustavou souřadnic a tím, že body v rovině lze popsat pomocí uspořádané dvojice souřadnic, které udávají jejich polohu vzhledem k osám x a y. Pro připomenutí si na následujícím cvičení vyzkoušejme, jak se se souřadnou soustavou pracuje.

Zapiš souřadnice bodů A, B, C v kartézské souřadné soustavě, a následně do ní zakresli body D, E, F s danými souřadnicemi:



Obrázek 36: Souřadnice bodů, vlastní tvorba

Podobný princip používá i QGIS – ve chvíli, kdy se nám podaří najít vhodné mapové zobrazení, které dobře zobrazí část povrchu zemského tělesa do roviny, můžeme v této rovině definovat souřadnou soustavu s kolmými osami – tedy soustavu kartézskou. Do této roviny se nám pak budou dobře vynášet jednotlivé vektorové prvky.

QGIS rozeznává tři základní typy vektorových prvků: bod, linestring a polygon. Pro jejich popis používá značkovací jazyk WKT – Well-known text representation of geometry. Jedná se o prostý textový záznam, pomocí kterého uchovává QGIS informace o poloze

bodů, jimiž charakterizuje daný vektorový prvek. Jak taková reprezentace vypadá?

Bod

Bod je 0-dimenzionální prvek, který je charakterizován jednou dvojicí souřadnic. Ve WKT je zaznamenán jako POINT (x_1 y_1), kde x_1, y_1 jsou příslušné souřadnice. Pro bod A, který má v dané souřadné soustavě souřadnice $[x; y] = [-2; 3]$, bude jeho reprezentace ve WKT A = POINT(-2 3) (Obrázek 37). Pozor tedy na to, že zde souřadnice v rámci dvojice odděluje mezera, nikoliv čárka - stejně to platí pro ostatní vektorové prvky.

Linestring

Linestring je 1-dimenzionální prvek, který je charakterizován pomocí svých lomových bodů – jedná se o reprezentaci lomené čáry, doslova řetězec bodů reprezentujících linii. Linestring v QGIS nemusí představovat pouze jednoduchou úsečku s počátečním a koncovým bodem (*Line*), ale může být libovolnou lomenou čarou, tedy několika na sebe navazujícími úsečkami. Například lomená čára, která začíná v bodě $B = [-3, -2]$, prochází body $C = [2, -3]$ a $D = [4, -2]$ a končí v bodě $E = [6, -3]$, bude ve WKT zapsána jako LINESTRING (-3 -2, 2 -3, 4 -2, 6 -3) (Obrázek 37). Jednotlivé body jsou od sebe odděleny čárkami, souřadnice jednoho bodu jsou odděleny mezerou.

Polygon

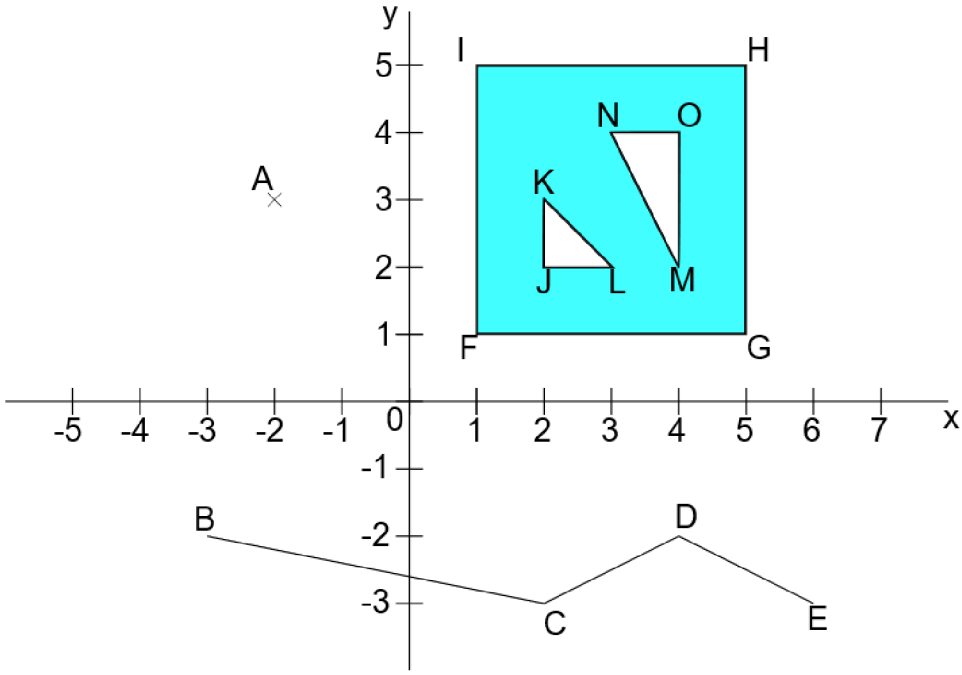
Polygon je 2-dimenzionální prvek, který je charakterizován pomocí lomových bodů své vnější hranice. Hranicí polygonu je obecně lomená čára, pro kterou platí, že její počáteční a koncový bod je shodný. V matematice bychom hranici polygonu označili za spojitou uzavřenou křivku. To je důležité, protože bez uzavřenosti hranice polygonu bychom nebyli schopni říci, jaká část roviny se nachází uvnitř polygonu a jaká mimo polygon.

Kromě vnější hranice (ta musí být vždy jen jedna) může mít polygon i libovolný počet vnitřních hranic. Tyto vnitřní hranice vymezují v polygonu díry, které do něj nepatří, a znovu musí být reprezentovány uzavřenou křivkou.

Důležité je pak pořadí, ve kterém zapisujeme lomové body. Pro vnější hranici zapisujeme její lomové body za sebou tak, že jdou proti směru hodinových ručiček (matematicky v kladném smyslu otáčení). Naopak všechny vnitřní hranice zapisujeme tak, aby šly po

směru hodinových ručiček (a tedy matematicky v záporném směru). Při tvorbě polygonů přímo v QGISu na to ale myslet nemusíte, QGIS dokáže body přerovnat automaticky. Tento princip je důležitý nejen pro rozlišení, zda se jedná o vnitřní nebo vnější hranici, ale je klíčový pro fungování některých algoritmů popsaných v dalších kapitolách.

Reprezentace polygonu ve WKT pak vypadá následovně: mějme například čtvercový polygon, ve kterém budou dvě trojúhelníkové díry. Vnější čtvercová hranice je vymezena body $F = [1, 1], G = [5, 1], H = [5, 5]$ a $I = [1, 5]$. Vnitřní hranice pak budou vymezeny body $J = [2, 2], K = [2, 3]$ a $L = [3, 2]$, respektive $M = [4, 2], N = [3, 4], O = [4, 4]$. Zápis ve WKT pak je POLYGON ((1 1, 5 1, 5 5, 1 5, 1 1),(2 2, 2 3, 3 2, 2 2),(4 2, 3 4, 4 4, 4 2)) (Obrázek 37). Jednotlivé hranice jsou zapsány v samostatných závorkách, první závorka představuje vnější hranici, všechny další závorky hranice vnitřní. Pokud má polygon zapsanou pouze jednu závorku, potom existuje pouze vnější hranice a polygon neobsahuje žádné díry. Všimněme si, že posloupnosti v jednotlivých závorkách začínají a končí stejným bodem a pokud si je nakreslíme, půjdou za sebou proti směru hodinových ručiček pro první (vnější) hranici a po směru pro ostatní (vnitřní) hranice.



Obrázek 37: Souřadnice vektorových prvků, vlastní tvorba

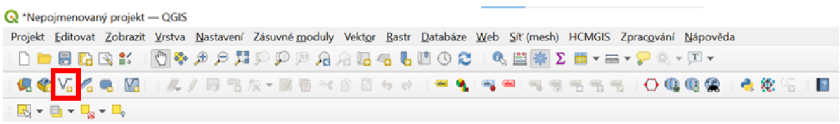
2.1 Jak na to v QGIS?

V QGIS můžeme vektorové prvky tvořit jako dva různé typy: buď jako jednotlivé soubory typu Shapefile, nebo jako geodatabázi GeoPackage. Pro naše potřeby bude stačit jednodušší typ Shapefile, ukládající vrstvy do samostatných souborů.

Bodovou vektorovou vrstvu vytvoříme následovně:

1. Novou vektorovou vrstvu budeme pravděpodobně potřebovat tvořit na nějaké podkladové mapě. Jako příklad může sloužit mapa satelitních snímků Google z pluginu *HCMGIS*, případně jiná podkladová mapa, která bude dobře sloužit svému účelu.

2. V horní liště vybereme tlačítko *Nová vrstva Shapefile*

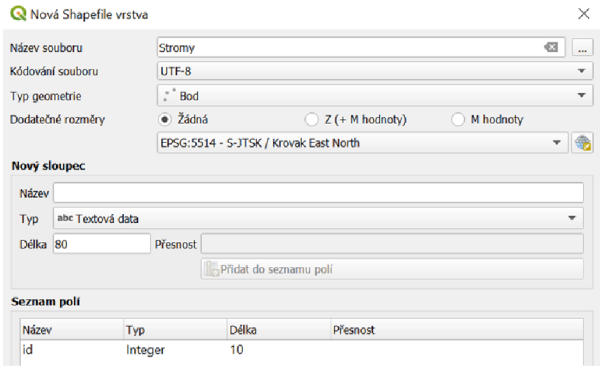


Obrázek 38: Nová vrstva Shapefile v QGIS

3. V dialogovém okně je třeba vyplnit minimálně následující údaje:

- *Název souboru* – v tomto případě například „Stromy“
- *Typ geometrie* – v tomto případě vyber z nabídky „Bod“
- *Dodatečné rozměry* – v tomto případě necháme zaškrtnuto „Žádné“. Tyto hodnoty slouží pro případ, že chceme kromě polohy bodu v rovině zaznamenat i jeho nadmořskou výšku (Z hodnoty) nebo jiné libovolné hodnoty (M hodnoty)
- Lze zvolit i souřadnicový systém přiřazený dané vrstvě – je dobré ho přizpůsobit souřadnicovému systému projektu (S-JTSK/ Krovak East North).

4. Také je potřeba pomocí tlačítka se třemi tečkami za kolonkou *Název souboru* vybrat umístění souboru na disku. Vybíráme ideálně složku na disku C, kam si ukládáme databáze pro QGIS a která je snadno dostupná v panelu *Prohlížeč*.



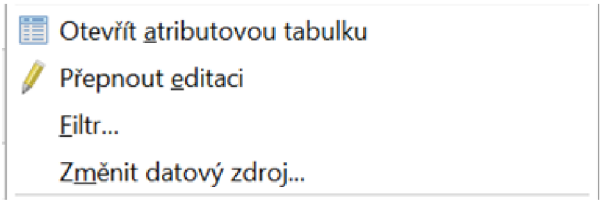
Obrázek 39: Nastavení nové vrstvy, QGIS

5. V kolonce *Nový sloupec* lze přidávat sloupce do atributové tabulky. V seznamu polí je automaticky sloupec *id* jako základní rozlišení jednotlivých prvků. Do seznamu pak lze přidat libovolné hodnoty. V kolonce *typ* lze vybrat z variant:

- *Textová data* – například název daného objektu, popis...
- *Celé číslo* – pro přidání libovolné hodnoty (např. výšky stromu, počet obyvatel kraje)
- *Desetinné číslo* – pokud pro zadání hodnoty nestačí celočíselná hodnota (např. výška stromu na desetinu metru)
- *Datum* – pro přiřazení např. data vytvoření vektorového objektu

V případě vrstvy stromů stačí ponechat pouze pole id.

6. Nyní v levé liště *Vrstvy* přibyla vrstva *Stromy*. Jedná se pouze o základ pro vrstvu, která ještě nemá žádné prvky. Ty je třeba přidat editací vrstvy. Kliknutím PM na vrstvu otevřeme možnosti vrstvy. Klikni na *Přepnout editaci* se symbolem tužky.

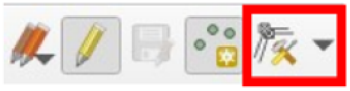


Obrázek 40: Možnosti nové vrstvy, QGIS

7. Nyní v horní liště v sekci editace vyberme možnost *Přidat bodový prvek*. Po zakliknutí se kurzor změní na „zaměřovač“. Kliknutím LM do mapového okna přidáme bodový prvek do mapy. Po zakliknutí v mapě je potřeba vyplnit dialogové okno. V tomto případě je třeba pouze vyplnit kolonku *id*. Pokud nemáme stanovený nějaký vlastní systém číslování, je nejjednodušší začít číslovat prvky od 1. V případě, že přidáváme další sloupce, je třeba vyplnit i jejich kolonky (název, hodnoty...). Zakliknutím OK se prvek zobrazí v mapě.

Obrázek 41: Přidání nových prvků vrstvy, QGIS

8. V případě, že nejsme spokojeni s polohou daného bodu, tlačítkem *Vertex Tool* lze změnit jejich polohu. Po zmáčknutí *Vertex Tool* posuneme LM daný bod do potřebné polohy.



Obrázek 42: Úprava polohy bodů, QGIS

9. Pokud jsme přidali všechny prvky, klikneme na tlačítko *Uložit změny vrstvy* (disketa) a poté kliknutím na *Přepnout editaci* (žlutá tužka) vypneme režim editace.

Obrázek 43: Uložení a ukončení editace, QGIS

Liniové prvky

Tvorba liniového prvku je shodná s tvorbou bodového prvku, liší se pouze v bodě 7. V tomto bodě tlačítkem *Přidat liniový prvek* můžeme začít s přidáváním linií. Nyní LM klikáme na místa, kde chceme vytvořit lomové body liniového prvku. Tvorbu daného liniového prvku ukončíme kliknutím LM. Dále se vyplněním dialogového okna se sloupci tabulky a stisknutím OK zobrazí prvek v mapě.

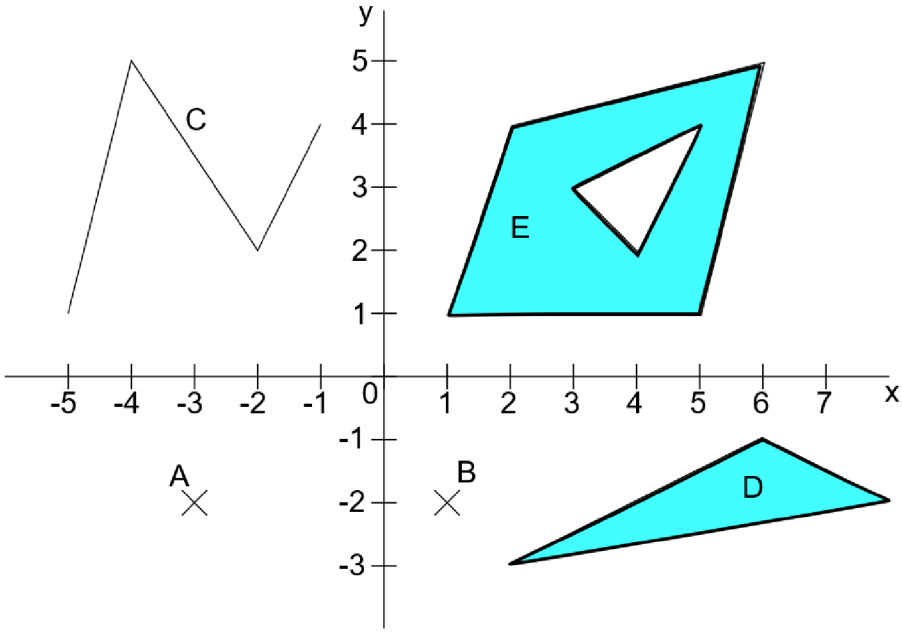
Polygonové prvky

I tvorba polygonového prvku je do bodu 7 shodná s bodovým a liniovým prvkem. Zde znovu tlačítkem *Přidat polygonový prvek* začneme s přidáváním polygonu. LM zadáme lomové body vnější hranice polygonu, PM ukončíme tvorbu daného polygonu.

V případě, že chceme v polygonu vytvořit díry, v horní liště rozklikneme *Editovat*. Zde vybereme *Edit Geometry* a *Přidat prstenec*. Stejným postupem jako při tvorbě polygonu (LM pro přidání lomových bodů, PM pro ukončení tvorby hranic) přidáme díru do polygonu. Ta by neměla protínat vnější hranici polygonu. Po ukončení editace nesmíme zapomenout editaci uložit a vypnout režim editace.

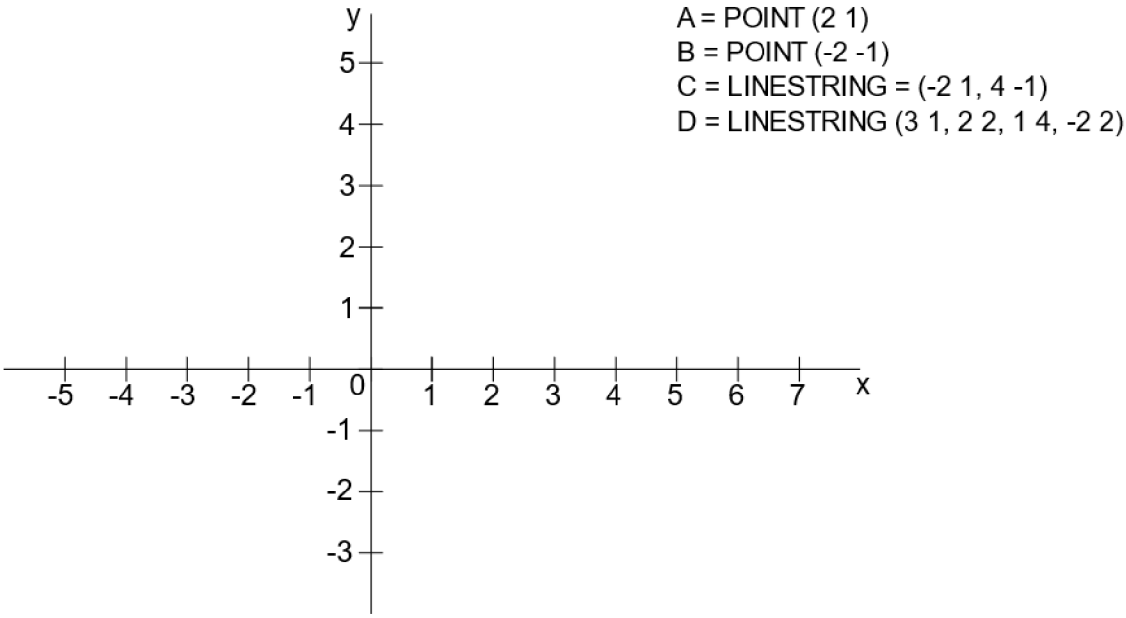
2.2 Příklady

2.1 Pro následující prvky (A - E) zapiš jejich reprezentaci ve WKT (tedy jako POINT, LINESTRING nebo POLYGON)



Obrázek 44: K úloze 2.1

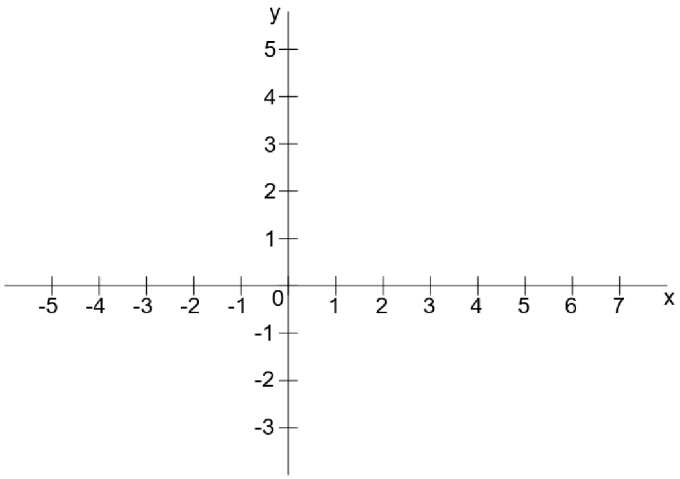
2.2 Zakresli do soustavy souřadnic prvky popsané v jazyce WKT



Obrázek 45: K úloze 2.2

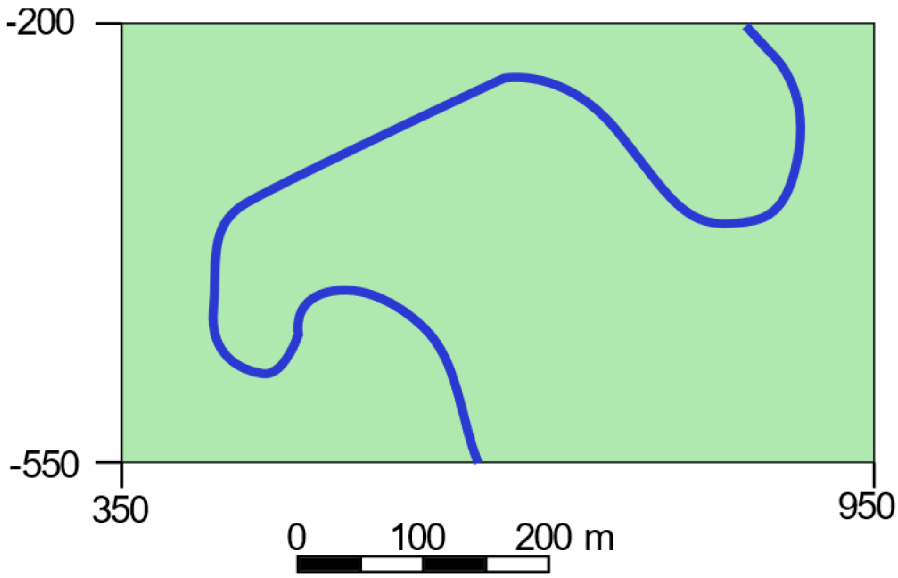
2.3 Zakresli do soustavy souřadnic prvky popsané v jazyce WKT

POLYGON = (-3 3, 3 1, 6 4, 2 5, -3 3))
POLYGON = ((2 -3, 7 -1, 5 2, 2 -3),(3 -2, 5 1, 5 -1, 3 -2))



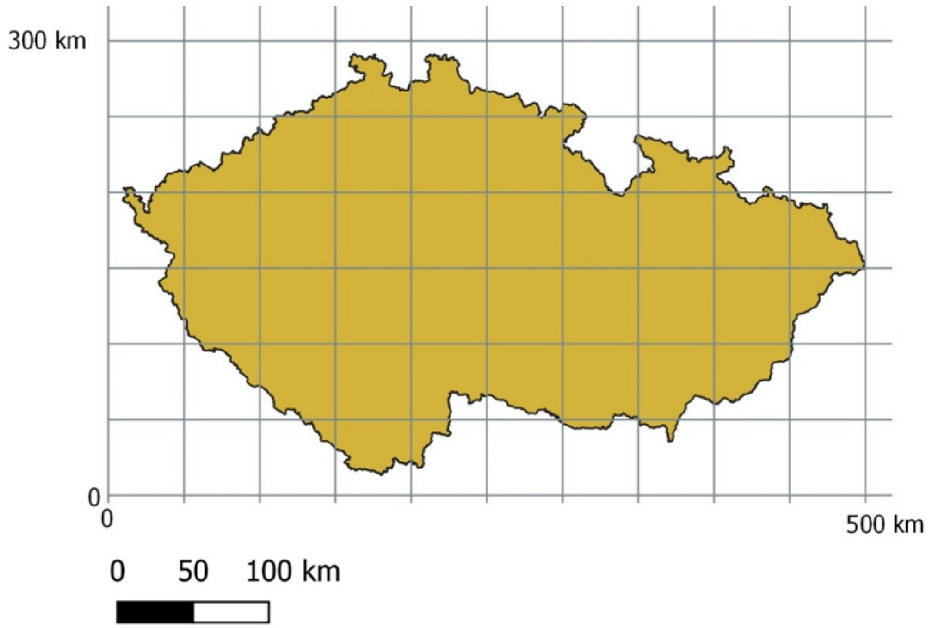
Obrázek 46: K úloze 2.3

2.4 V tomto příkladu si vyzkoušej zjednodušení modré křivky představující koryto řeky na lomenou čáru (linestring). Pokus se co nejpřesněji napodobit koryto řeky pomocí lomené čáry, která má a) 4 lomové body, b) 7 lomových bodů, c) 10 lomových bodů (počítáno včetně počátečního a koncového bodu). Následně se pokus co nejpřesněji daný vektorový prvek vyjádřit v jazyce WKT. Čísla při okrajích mapy představují souřadnice v metrech ve zvolené kartézské soustavě souřadnic. Souřadnice si odměř pravítkem a přepočítej v měřítku daném grafickým měřítkem pod mapkou.



Obrázek 47: K úloze 2.4

2.5 Nyní se pokus zjednodušit polygon hranic České republiky, a to a) 6 body, b) 9 body, c) 12 body. Výsledný polygon znovu zapiš pomocí WKT v dané souřadné soustavě naznačené čtvercovou sítí (dej přitom pozor na správné pořadí bodů – musí jít proti směru hodinových ručiček). Dále se s pomocí atlasu pokus co nejpřesněji zanést pomocí bodů polohu 5 největších měst v ČR. Také pro tyto body proveď jejich zápis ve WKT.



Obrázek 48: K úloze 2.5, ArcČR 4.2, QGIS

Úlohy řešené v QGIS

2.6 V QGIS podle satelitní mapy (pomocí pluginu HCMGIS) vytvoř následující vrstvy. Zamysli se podle zadaného účelu nad tím, jaký typ geometrie zvolit – bude potřeby nejlépe naplňovat bodová, liniová nebo polygonová vrstva? Hranaté závorky udávají, jaká pole by měla obsahovat atributová tabulka. Například [ID, Název] znamená, že bude kromě automatického pole ID obsahovat i pole s názvem daného prvku.

1. Obecní úřad chce vrstvu domů v jedné z ulic ve tvé obci, aby mohl vyměřit zastavěné plochy (10 domů). Pozor na to, že snímky většinu budov snímají ze šikma – raději tedy tvoř obrysy domu podle střechy. [ID]

2. Vrstvu, která bude obsahovat cestu po silnici vedoucí od tvého domu ke tvé škole/tvému oblíbenému místu/k domu prarodičů (nebo jiných příbuzných). Pomocí vrstvy budeme chtít určovat délku trasy. [ID, Popis koncového bodu (škola/dům prarodičů/oblíbené místo)]

3. Pro potřeby silničářů vytvoř vrstvu se třemi ulicemi ve vaší obci, které bude chtít obec nově asfaltovat, a potřebuje tedy znát jejich plochy. [ID, Jméno ulice]

4. Pro účely památkové péče vytvoř vrstvu malých sakrálních objektů (tedy kapliček, božích muk...) v okolí tvé obce (5 objektů). Zajímá nás čistě jejich poloha. Ze satelitní mapy nejspíš nejsou tyto objekty vidět, je tedy možná načase udělat si procházku po okolí. [ID, Typ stavby]

2.7 Navrhni trasu nové cyklostezky někde ve tvém SO ORP, ideálně pokud povede po již existujících cestách (ať už jsou v současné době zpevněné, či nikoliv), aby byla trasa co nejvíce realistická. Vytvoř liniovou vrstvu trasy. Dále vytvoř následující vrstvy:

- bodovou vrstvu ukazatelů směru cyklostezky (v atributové tabulce přidej pole, které bude udávat, kterým směrem cyklista jede – hodnoty tedy budou název buď jednoho, nebo druhého koncového bodu cyklotrasy, do kterého cyklista směřuje)
- bodovou vrstvu informačních tabulí u zajímavých míst (do atributové tabulky přidej pole s názvem tohoto místa, a kategorii – tedy přírodní památka, architektonická památka, historická památka atd.)
- polygonovou vrstvu odpočívadel a přístřešků.

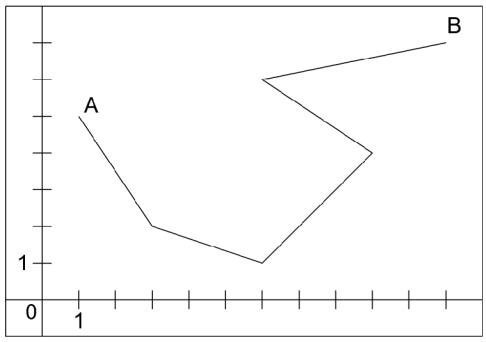
2.8 Vyber si libovolný rybník, který v sobě obsahuje jeden nebo více ostrůvků. Tvým úkolem bude vytvořit polygon vodní plochy. Vytvoř jeho vnější hranice, a následně v něm pomocí výše popsaných nástrojů vytvoř „díry“ tam, kde se nacházejí ostrůvky. Polygon si ulož, využiješ ho v dalších úlohách.

3 Metrické úlohy

Potřebné vstupní znalosti: kartézská soustava souřadnic, analyticky řešená vzdálenost dvou bodů v rovině

3.1 Délka linií v rovině

Představme si následující problém: v rovině s danou pravoúhlou (kartézskou) soustavou souřadnic máme lomenou čarou zaznamenanou cestu mezi body A a B. Naším úkolem bude zjistit, jaká je délka této lomené čáry, a tím i cesty z A do B.

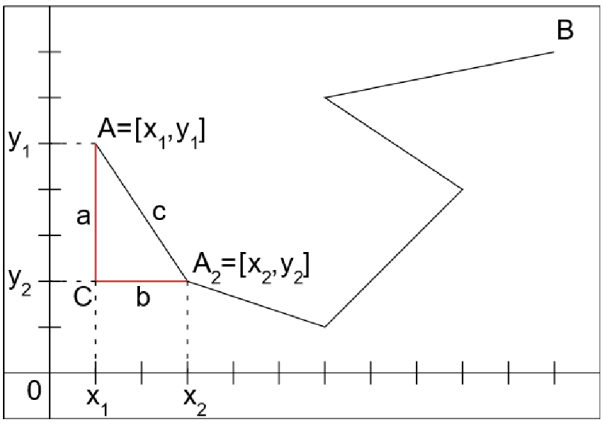


Obrázek 49: Lomená čára v souřadné soustavě, vlastní tvorba

Nejprve si musíme uvědomit, že délka lomené čáry není nic jiného než součet délek jednotlivých úseček, které ji tvoří. Každou úsečku doplníme na pravoúhlý trojúhelník a hledanou délku úsečky vypočteme z Pythagorovy věty. Na obrázku 50 hledáme délku úseku AA_2. Doplníme bodem C na pravoúhlý trojúhelník, kde AA_2 bude přeponou. Potom z Pythagorovy věty platí, že:

$$AA_2 = \sqrt{|AC|^2 + |CA_2|^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}.$$

Celková délka lomené čáry pak není ničím jiným než součtem délek jednotlivých úseček, které ji tvoří. Stejným způsobem tedy vypočítáme délku všech úseček a sečteme je pro konečný výsledek.

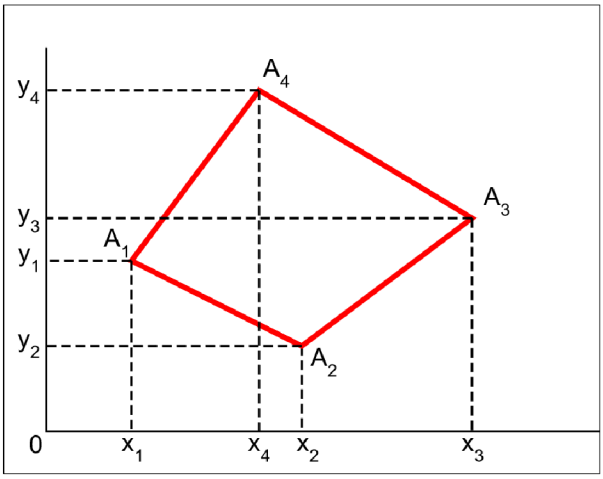


Obrázek 50: K výpočtu jednoho úseku lomené čáry, vlastní tvorba

3.2 Plocha polygonu v rovině

Už na základní škole jste se učili vypočítat obsahy různých mnohoúhelníků – trojúhelníku, čtverce, rovnoběžníku nebo lichoběžníku. V této části se podíváme na to, jakým způsobem vypočítat obsah libovolného mnohoúhelníku (polygonu) - klidně i nekonvexního. Algoritmus, který se k výpočtu využívá, se nazývá Simpsonovým nebo lichoběžníkovým algoritmem.

Mějme libovolný mnohoúhelníku o n vrcholech. Takový n-úhelník je definován pomocí n vrcholů, a ve WKT bude zaznamenán jako POLYGON $(x_1\ y_1, x_2\ y_2, \ldots, x_n\ y_n, x_1\ y_1)$. V obrázku 51 vidíme čtyřúhelník $A_1A_2A_3A_4$, který bude ve WKT zaznamenán jako POLYGON $(x_1\ y_1, x_2\ y_2, x_3\ y_3, x_4\ y_4, x_1\ y_1)$ – vrcholy tedy jdou z našeho pohledu proti směru hodinových ručiček.



Obrázek 51: Polygon $A_1A_2A_3A_4$, vlastní tvorba

Vytvořme nyní lichoběžník spuštěním kolmic z vrcholů A_1 a A_2 na osu x a průsečíky s osou x označme jako $X_1 = [x_1, 0]$ a $X_2 = [x_2, 0]$. Obsah libovolného lichoběžníku se vypočítá jako:

$$S_l = \frac{(a+c)}{2} \cdot v$$

kde a, c představují délky rovnoběžných stran (základen) lichoběžníku a v výšku lichoběžníku, tedy vzdálenost stran a a c. V případě našeho lichoběžníku jsou rovnoběžnými stranami úsečky A_1X_1 a A_2X_2, jejich délka se vypočte jako rozdíl souřadnic bodů A_1 a X_1, respektive A_2 a X_2 na ose y. Vzhledem k tomu, že X_1 a X_2 leží na ose x, jejich ypsilonová souřadnice je nulová, délka A_1X_1 bude rovna hodnotě y_1 a délka A_2X_2 bude rovna y_2. To platí samozřejmě pouze v případě, že y_1, y_2 jsou kladné, což vzhledem k tomu, že se nyní omezujeme na první kvadrant, platí. V jiném případě by bylo nutné užít absolutních hodnot.

Výška lichoběžníku je pak délkou úsečky X_1X_2, a vzhledem k tomu, že ypsilonová souřadnice bodů X_1 a X_2 je nulová, délka úsečky X_1X_2 bude rovna

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

Obsah lichoběžníku $A_1X_1X_2A_2$ z obrázku 49 tedy spočteme jako:

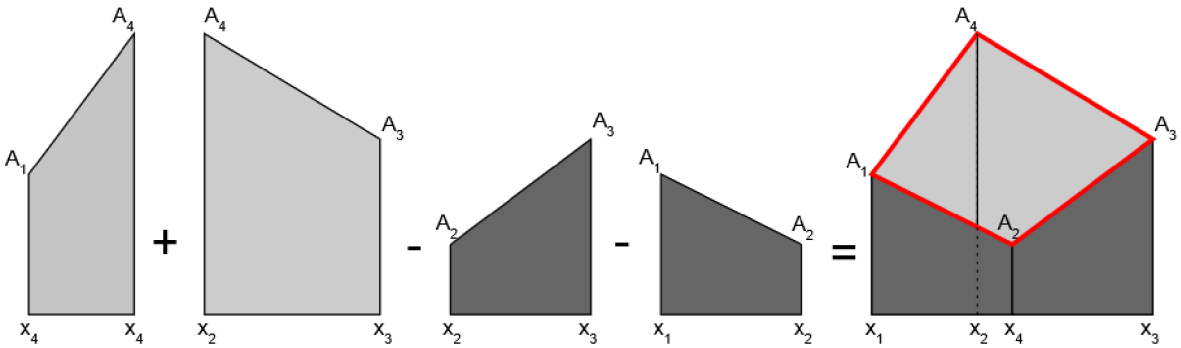
$$S_l = \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2| \cdot (y_1 + y_2)$$

Stejný výpočet můžeme provést pro libovolné dva po sobě jdoucí vrcholy v polygonu. Obecně je obsah lichoběžníku vytvořeného pod hranou A_kA_{k+1} (značeno S_k jako obsah k-tého lichoběžníku) vyjádřen jako:

$$S_k = \frac{1}{2}|x_k - x_{k+1}| \cdot (y_k + y_{k+1}) \tag{1}$$

Nyní si v obrázku 52 povšimněme zajímavého jevu: pokud sečteme obsahy lichoběžníků pod hranami A_3A_4 a A_4A_1 a odečteme od nich obsahy ploch lichoběžníků pod hranami

A_1A_2 a A_2A_3, získáme hledanou plochu čtyřúhelníku. Jak ale poznat, které lichoběžníky přičítat a které odečítat? Jednoduše – pokud je souřadnice na ose x prvního bodu hrany (dle pořadí ve WKT zápisu polygonu) menší než souřadnice na ose x u druhého bodu hrany, obsah lichoběžníku se přičte. Pokud je situace naopak, obsah lichoběžníku se odečte. Ve vzorci (1) tak prostě pouze odstraníme absolutní hodnotu – v tu chvíli, pokud $x_k > x_{k+1}$, bude se obsah lichoběžníku přičítat, a pokud $x_k < x_{k+1}$, obsah se odečte. Jednodušší pohled je, že směřujeme-li od bodu A_k k bodu A_{k+1} zprava doleva, obsah se přičítá, a naopak při pohybu zleva doprava se obsah lichoběžníku od celkového součtu odečítá. Nezapomeňme v tomto případě na to, že A_1 je počátečním a zároveň koncovým bodem posloupnosti zadávající polygon – v případě hrany A_4A_1 je tedy směr postupu skutečně od A_4 k A_1.



Obrázek 52: Naznačení výpočtu obsahu polygonu, vlastní tvorba

Důkaz korektnosti algoritmu vychází z integrálního počtu vektorových funkcí a křivkových integrálů, proto se jím zabývat nebudeme. Vzorec nicméně platí v libovolném kvadrantu, neomezuje se pouze na první kvadrant, a nevadí dokonce ani průchod hran polygonu přes souřadnicové osy - to si můžete zkusit samostatně rozmyslet.

Konečný vzorec je tedy součtem obsahů jednotlivých lichoběžníků, které se pro obecnou hranu A_kA_{k+1} vypočítají jako

$$S_k = \tfrac{1}{2}(x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}).$$

Pro obecný n-úhelník $A_1A_2...A_n$ lze tedy vzorec zapsat jako:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1})$$

Tento algoritmus funguje i pro polygony, které mají kromě vnější hranice i libovolný počet hranic vnitřních, a obsahují v sobě tedy „díry“. Tyto vnitřní hranice mají totiž své lomové body zapsané v opačném smyslu než hranice vnější – po směru hodinových ručiček. Pokud změníme směr procházení vrcholů, změní se i znaménka výrazu $(x_k - x_{k+1})$, neboť vrchol, který byl při původním směru procházení označen jako A_{k+1}, se nyní stává vrcholem A_k, a opačně.

Pokud bychom v našem čtyřúhelníku šli po vrcholech v opačném pořadí (po směru hodinových ručiček), potom by například pro hranu A_1A_4 bylo $x_k = x_1$ a $x_{k+1} = x_4$. Protože $x_4 > x_1$, obsah lichoběžníku pod hranou A_1A_4 by se odečítal. To samé platí pro všechny ostatní lichoběžníky vzniklé pod jednotlivými hranami, a celkový součet obsahů bude tedy stejný, pouze se záporným znaménkem.

Díky opačnému pořadí zápisu vnitřních hran oproti hranám vnějším tedy vyjde obsah „díry“ jako záporné číslo, a v celkovém sumě obsahu polygonu se bude odečítat - pro vzorec v programu tak není nutné, aby rozlišoval vnitřní a vnější hranice, neboť to už obstarává samotný zápis hranic. Je pouze nutné dát pozor, abychom obsahy dané vnější a vnitřními hranicemi počítali zvlášť, a nespojovali spolu body, které ve skutečnosti propojeny nejsou.

Příklad výpočtu

Mějme zadaný čtyřúhelník $ABCD$, kde $A = [1; 3], B = [3; 1], C = [6; 3]$, $D = [3; 5]$, který v sobě má trojúhelníkovou díru EFG, $E = [3; 2], F = [3; 4], G = [4; 2]$. Vypočítej obsah polygonu (bez díry) pomocí výše popsaného algoritmu.

Využijeme vzorec

$$S = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}).$$

Ještě předtím je dobré ověřit, zda vrcholy $ABCD$ jdou skutečně proti směru hodinových ručiček a vrcholy EFG po směru hodinových ručiček (například zakreslením bodů do kartézské soustavy souřadnic).

Následně pro každou hranu čtyřúhelníku $ABCD$ dosadíme do vzorce. Pro hranu AB je $A = [x_1; y_1] = [1; 3]$ a $B = [x_2; y_2] = [3; 1]$. Dosazením získáme:

$$S_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(1 - 3)(3 + 1) = -4$$

Pro hrany BC, CD a DA stejným způsobem získáme hodnoty $S_2 = -6, S_3 = 12$ a $S_4 = 8$. Celkovou plochu čtyřúhelníku $ABCD$ získáme součtem hodnot S_1, S_2, S_3, S_4, tedy:

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = -4 - 6 + 12 + 8 = 10 \text{ jednotek.}$$

Nyní spočtěme obsah díry. Dosadíme do vzorce vrcholy hran EF, FG a GE (v tomto pořadí). Získáme hodnoty $S_5 = 0, S_6 = -3, S_7 = 2$. Obsah díry musí vyjít záporný (díru z polygonu vynecháváme):

$$S_{EFG} = S_5 + S_6 + S_7 = 0 - 3 + 2 = -1 \text{ jednotka}$$

Celkový obsah polygonu bez díry získáme jako:

$$S = S_{ABCD} + S_{EFG} = 10 + (-1) = 9 \text{ jednotek}$$

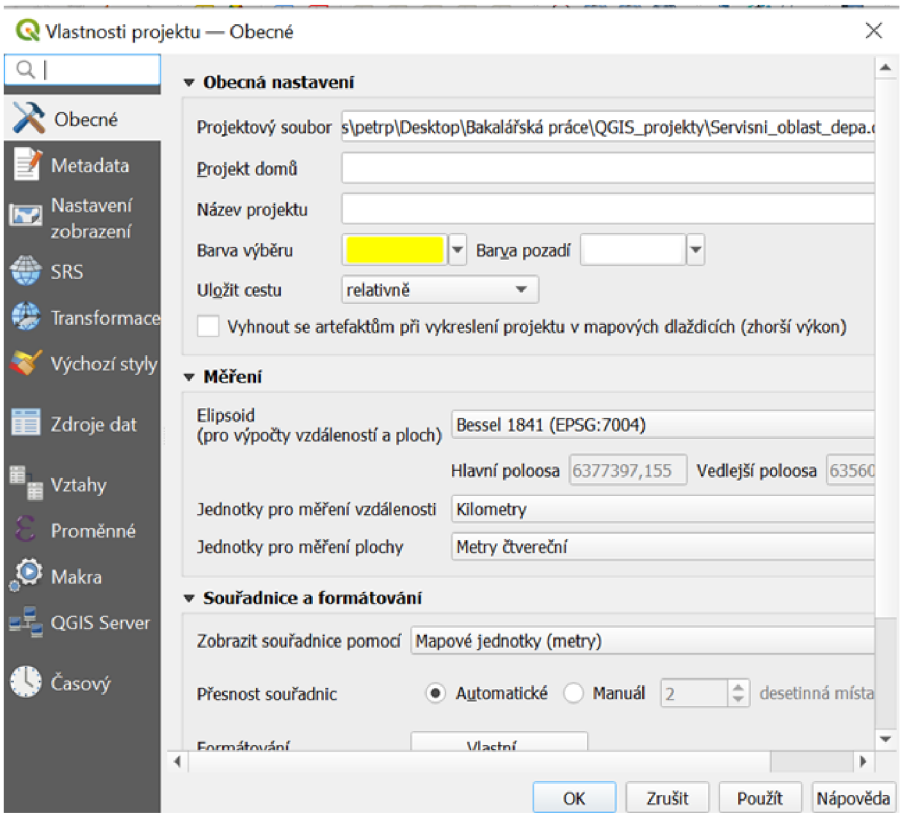
3.3 Jak na to v QGIS

Délka linie

Máme-li liniovou vrstvu, pro kterou chceme znát délky jejích jednotlivých prvků, je postup následující:

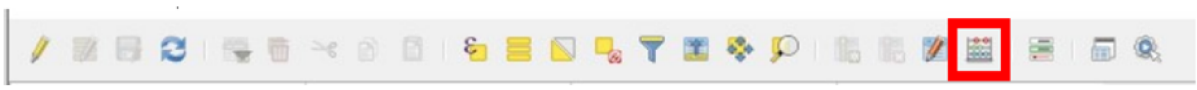
1. Liniovou vrstvu načteme do projektu a otevřeme atributovou tabulku.

2. Funkce, kterou použijeme, vypočítává délku linie na elipsoidu (pokud má projekt zadaný elipsoid) v jednotkách projektu. Obojí lze změnit v horní liště kliknutím na *Projekt* → *Vlastnosti*. V dialogovém okně v kolonce *Obecné* v sekci *Měření* lze změnit používaný elipsoid a jednotky pro měření vzdálenosti a plochy. Zde je nutné uvažovat, s jak velkými daty pracuješ – pro měření délky silniční sítě v ČR budou vhodnější kilometry, pro měření ulic ve vaší obci jsou lepší metry.



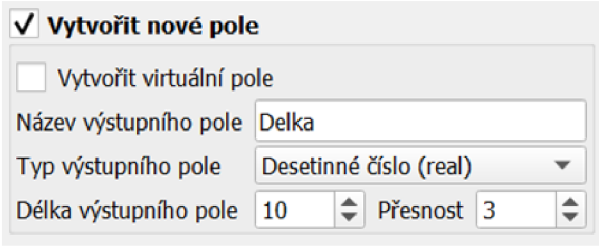
Obrázek 53: Změna elipsoidu a jednotek projektu, QGIS

3. V atributové tabulce otevřeme v horní liště kalkulátor polí.



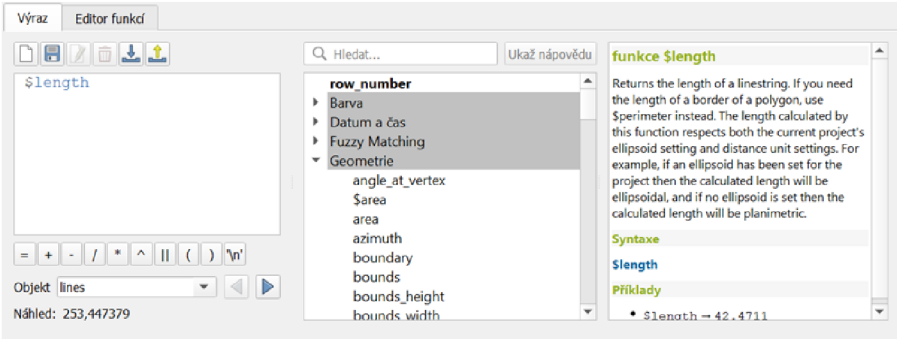
Obrázek 54: Tlačítko kalkulátoru polí, QGIS

4. V dialogovém oknu kalkulátoru polí lze vytvářet nová pole. Vyplňme kolonku *Název výstupního pole* jako „Delka“. V nabídce typ výstupního pole lze měnit, jaký typ budou hodnoty v tabulce – nabídka je stejně jako při tvorbě vrstev *Celé číslo (integer), Desetinné číslo (real), Text (string)* nebo *Datum*. Pro účely délky bude nejvhodnější varianta *Desetinné číslo*, pokud by nám stačila hodnota na celé metry, můžeme použít i variantu *Celé číslo*.



Obrázek 55: Vytvoření nového pole, QGIS

5. V prostředním panelu dialogového okna najdeme sekci *Geometrie* a v ní nalezneme funkci *$length*. Dvojklikem ji otevřeme. Po zaklinutí OK se vypočítá délka pro všechny řádky v atributové tabulce - hodnoty nalezneme ve sloupci pojmenovaném „Delka“.



Obrázek 56: Výpočet délky v kalkulátoru polí, QGIS

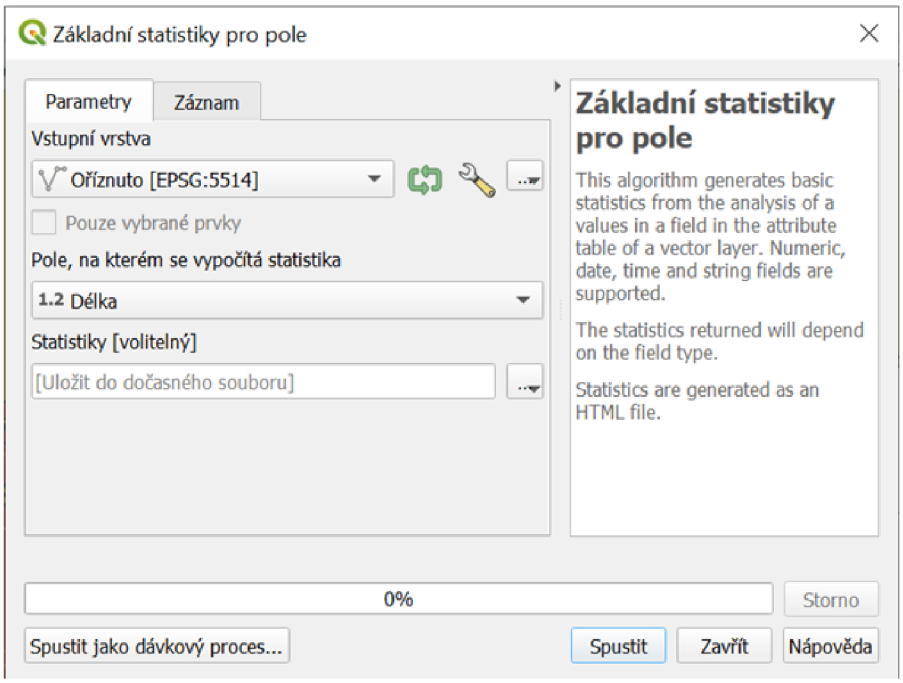
Plocha polygonu

Výpočet plochy polygonu probíhá prakticky totožně. Nejprve změníme ve vlastnostech projektu jednotky na vhodné (znovu je třeba si rozmyslet, jestli jsou lepší metry čtvereční nebo kilometry čtvereční). Následně otevřeme kalkulátor polí v atributové tabulce vrstvy, pro kterou chceme počítat obsahy ploch. Vyplň název pole a typ výstupního pole. Tentokrát ale v sekci *Geometrie* hledáme funkci *$area*. Dvojklikem LM ji otevřeme a stisknutím OK necháme QGIS vypočítat hodnoty pro všechny řádky. Hodnoty se pro každý prvek zobrazí v atributové tabulce.

Funkce Základní statistiky pro pole

V některých případech budeme chtít znát nejen délky, respektive plochy pro jednotlivé prvky vrstvy, ale i nějakou souhrnnou statistiku (například součet délek všech prvků vrstvy). K tomu slouží funkce *Základní statistiky pro pole*.

1. V horní liště v sekci *Vektor* nalezneme podsekci *Analytické nástroje* a zde funkci *Základní statistiky pro pole*. Po rozkliknutí se otevře dialogové okno, kde je třeba vyplnit vstupní vrstvu (pro kterou chceme statistiku počítat) a pole, na kterém chceme statistiku počítat (tedy předtím spočítané pole délky nebo plochy).



Obrázek 57: Dialogové okno *Základní statistiky pro pole*, QGIS

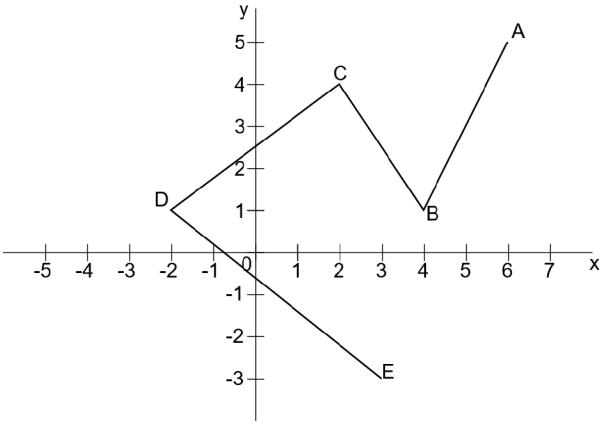
2. Po spuštění spočítá QGIS statistiku. Výsledek se objeví v pravém dolním rohu obrazovky jako odkaz na internetovou stránku – po jeho rozkliknutí se otevře internetový prohlížeč s různými statistikami pro pole (například minimální a maximální hodnota, rozsah hodnot, směrodatná odchylka atd.). Nás ale v tuto chvíli zajímá kolonka součet.

Obrázek 58: Odkaz na statistky, QGIS

3.4 Příklady

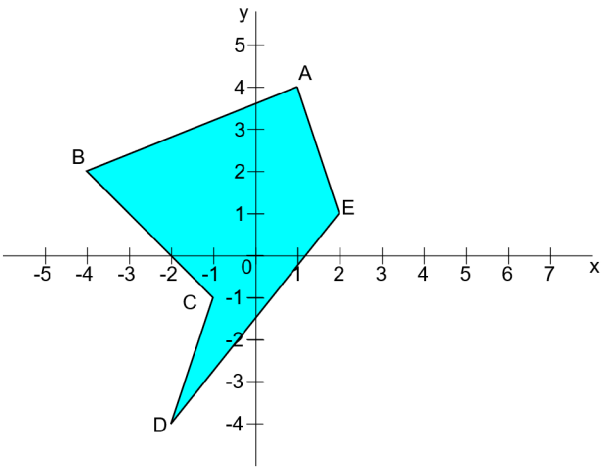
3.1 V kartézské soustavě souřadnic je dána lomená čára s počátkem v bodě A, koncem v bodě D, a lomovými body B, C, kde $A = [2; 1], B = [5; 3], C = [-1; 4], D = [-3; 0]$. Spočti její délku.

3.2 V kartézské souřadné soustavě je zakreslena lomená čára ABCDE, jejíž lomové body mají vždy celočíselné souřadnice. Spočítej délku lomené čáry.



Obrázek 59: K úloze 3.2

3.3 V kartézské souřadné soustavě je zakreslen mnohoúhelník ABCDE, kde lomové body jeho hranice mají celočíselné souřadnice. Spočítej obsah mnohoúhelníku ABCDE podle výše popsaného algoritmu.



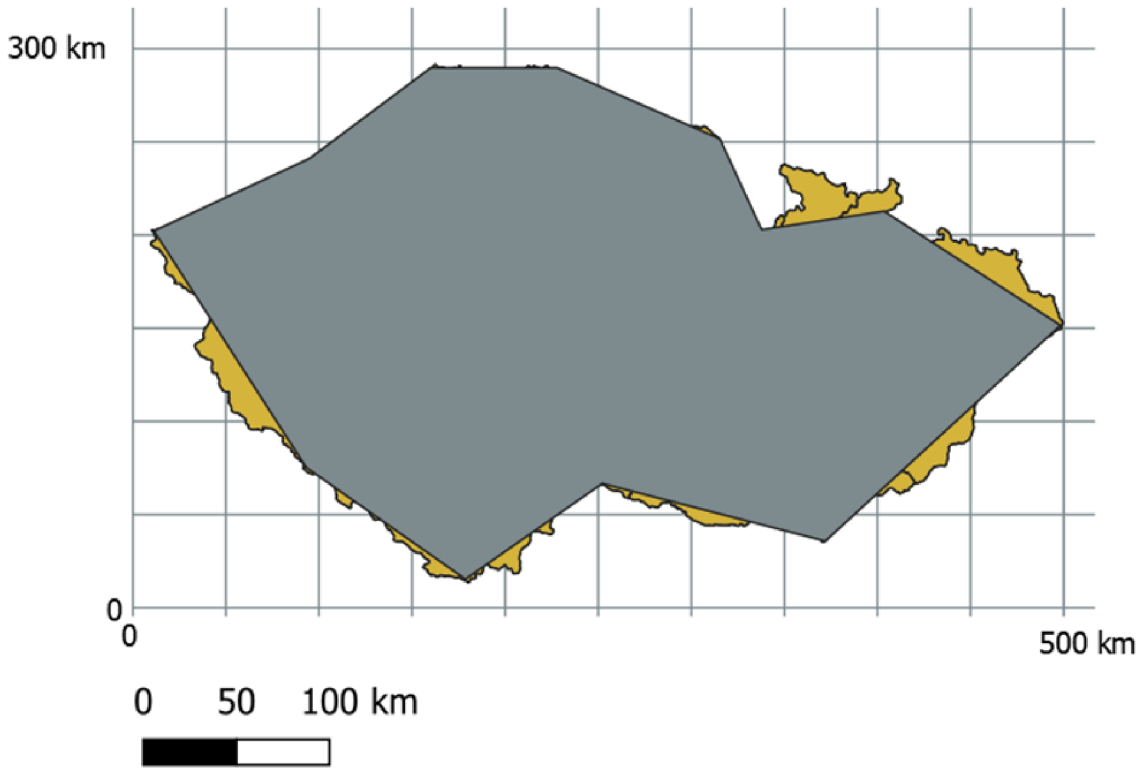
Obrázek 60: K úloze 3.3

3.4 v kartézské souřadné soustavě je dán čtyřúhelník OPQR, kde $O = [2; 4], P = [4; -2], Q = [10; 3], R = [6; 8]$. V čtyřúhelníku se ale nachází díra tvaru trojúhelníku STU

o souřadnicích $S = [4; 4], T = [6; 6], U = [8; 2]$ Spočítej obsah tohoto mnohoúhelníku pomocí výše popsaného algoritmu (body vnější i vnitřní hranice jsou řazeny v požadovaném směru, tedy proti, respektive po směru hodinových ručiček).

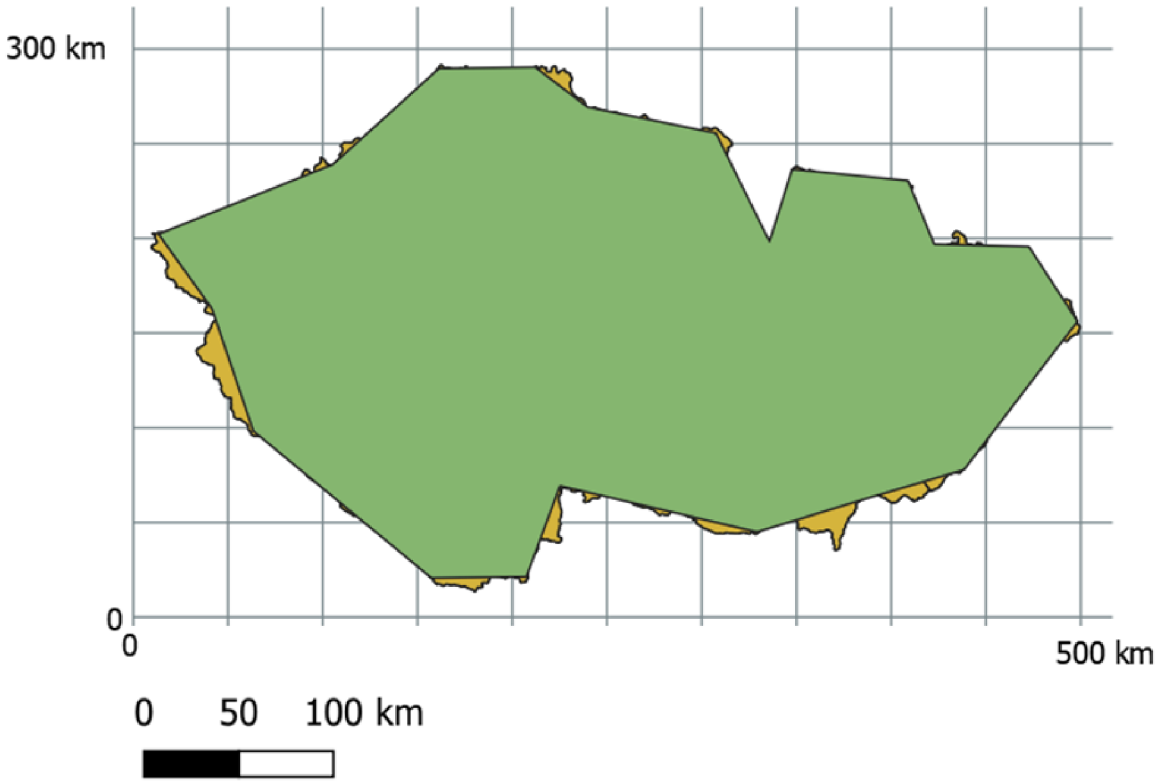
3.5 Ve vhodné pravoúhlé souřadné soustavě je potok zaznamenán ve WKT jako LINESTRING (-3 -4, 2 -1, 1 2, 2 4, 0 10). Spočítej jeho délku, pokud jednotkou souřadnicového systému jsou kilometry.

3.6 Na následující mapě je zobrazena Česká republika v měřítku 1:5 000 000 v Lambertově plochojevném zobrazení, pravoúhlá souřadná síť v kilometrech (jeden malý čtvereček má stranu 50 km) a polygon, který zjednodušuje tvar ČR pomocí dvanácti lomových bodů. Změř souřadnice lomových bodů zjednodušujícího polygonu a vypočítej jeho obsah. Jak moc přesně jeho obsah odpovídá rozloze ČR? Proč je k zobrazení ČR využito toto zobrazení, a ne klasické Křovákovo, které se běžně pro zobrazení ČR používá?



Obrázek 61: K úloze 3.6

3.7 Nyní dle stejného zadání jako v úloze 6 vypočítej obsah zjednodušujícího polygonu ČR, který má tentokrát 20 lomových bodů. Pokud se ti nechce mechanicky opakovat výpočet, pokus se vymyslet, jakým způsobem lze algoritmus realizovat například v tabulkovém kalkulátoru (Microsoft Excel, LibreOffice Calc atd.)



Obrázek 62: K úloze 3.7

3.8 Pomocí mapy ČR v Lambertově plochojevném zobrazení v měřítku 1:5 000 000 se čtvercovou souřadnou sítí (černé čtverce se stranou 50 km a zelené se stranou 10 km) vyřeš následující úlohy:

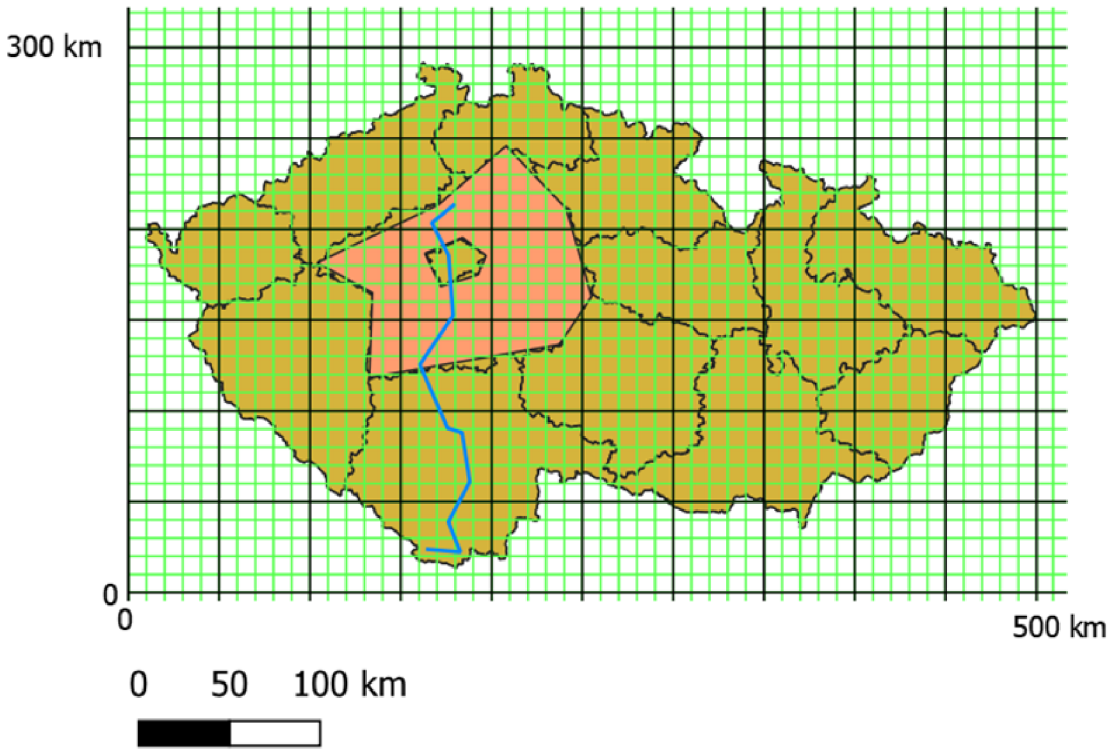
a) V mapě je modrou linií znázorněn zjednodušený tok řeky Vltavy od vodní nádrže Lipno až po soutok s Labem. Nalezni souřadnice lomových bodů a zjisti délku řeky Vltavy. Proč toto zobrazení nemusí být úplně vhodné pro tento výpočet? Vltava od hráze vodní nádrže měří asi 325 km, tvůj výsledek však bude určitě výrazně nižší. Pokus se zdůvodnit proč (zamysli se nad podobou toku řeky).

b) Vyber si jinou libovolnou řeku a pomocí maximálně deseti lomových bodů zakresli do mapy co nejpřesněji její tok jako lomenou čáru. Následně znovu vypočítej její délku.

c) V mapě je jako oranžový polygon zjednodušeně zakreslen Středočeský kraj. Nalezni

souřadnice vrcholů polygonu a spočítej jeho obsah. Nezapomeň, že Praha do Středočeského kraje nepatří. Výsledek nakonec porovnej se skutečnou rozlohou kraje.

d) Vyber si libovolný jiný kraj a pomocí maximálně deseti bodů zakresli zjednodušené hranice kraje do mapy. Následně vypočítej plochu tohoto kraje.



Obrázek 63: K úloze 3.8

Úlohy řešené v QGIS

3.9 Silničáři ve vašem SO ORP chtějí znát délku silničních tahů, které budou muset v zimě prohrnovat. Ořízni vrstvu *SilniceDalnice* na území tvého SO ORP a nech QGIS vypočítat délku všech linií. Poté pomocí funkce *Základní statistiky pro pole* zjisti celkový součet délek silnic v ORP. Pokud by jedno odklízecí auto průměrně odklidilo 30 km silnic za hodinu (počítej s nutností přesunů, odklízení obou pruhů atd.) a silničáři měli k dispozici 5 aut na odklízení, jak dlouho jim bude trvat zprůjezdnění veškerých silnic?

3.10 Pomocí QGIS spočítej délku navržené cyklostezky z úlohy 2.7. Pokud by se nově musela celá vyasfaltovat, a její šířka by byla 3 metry, jaká bude celková plocha? Jaká bude cena vyasfaltování, pokud za m^2 nového asfaltu zaplatíme 500 Kč?

3.11 Vytvoř dle satelitní mapy polygon tří největší souvislých polí (nepřerušených dopravní komunikací, pěšinou, remízkem, linií stromů atd.), která nalezneš v okolí tvého bydliště. Následně nech QGIS spočítat jejich plochu. Od roku 2021 nesmí zemědělci na ploše pole větší než 30 hektarů pěstovat pouze jednu plodinu. Kterých polí ze tvého výběru se to týká? Jaký má toto opatření smysl a na co se snaží reagovat? Pokud by se limit snížil ze 30 na 10 hektarů, kterých polí ze tvého výběru by se zákon týkal?

3.12 Pro polygon rybníku s ostrůvky, který jsi tvořil/a v úloze 2.8, nyní spočítej jeho plochu. Pokus se na internetu najít objem tohoto rybníku, a spočítej jeho průměrnou hloubku (jako h = V/S, kde h je průměrná hloubka, V objem vody a S plocha rybníku).

3.13 Pro polygon ulic ve tvojí obci, které jsi tvořil/a v úloze 2.6, nyní spočítej objem asfaltu potřebný pro vyasfaltování, pokud je výška asfaltové vrstvy 5 cm. Obsah plochy spočítej pomocí QGIS. Jaká bude hmotnost asfaltu, pokud hustota asfaltu je 2300 kg/m^3?

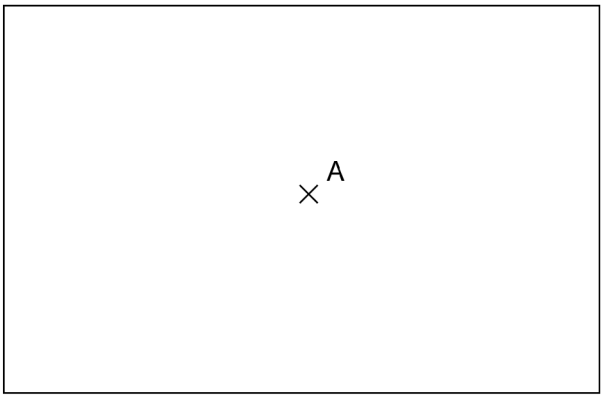
4 Obalová zóna – Buffer

Potřebné vstupní znalosti: množina bodů v dané vzdálenosti od bodu a od přímky

Jedním z nejdůležitějších pojmů při práci s vektorovými prvky v GIS je funkce obalové zóny, pro kterou se používá spíše anglický termín – buffer.

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak z matematického hlediska správně konstruovat obalovou zónu. Ve škole jste se pravděpodobně setkali s pojmem „množina bodů dané vlastnosti“. Například kružnice je množina bodů, pro které platí, že mají od daného bodu (středu kružnice) danou vzdálenost (poloměr kružnice). A právě za takovou množinu dané vlastnosti lze považovat i obalové zóny vektorových prvků. Obecně lze obalovou zónu definovat jako množinu všech bodů, které mají od daného prvku (bodu, linie, polygonu) vzdálenost menší nebo rovnou dané hodnotě.

Nejjednodušší vektorový prvek – bod – bude mít i nejjednodušší konstrukci obalové zóny. Pokud budeme chtít obalovou zónu bodu A o velikosti 2 cm, tedy množinu všech bodů, které leží ve vzdálenosti menší nebo rovné 2 cm od bodu A, určitě sám/a přijdeš na to, jakým způsobem takovou množinu najít. Do obrázku 64 narýsuj obalovou zónu (buffer) bodu A o velikosti 2 cm.



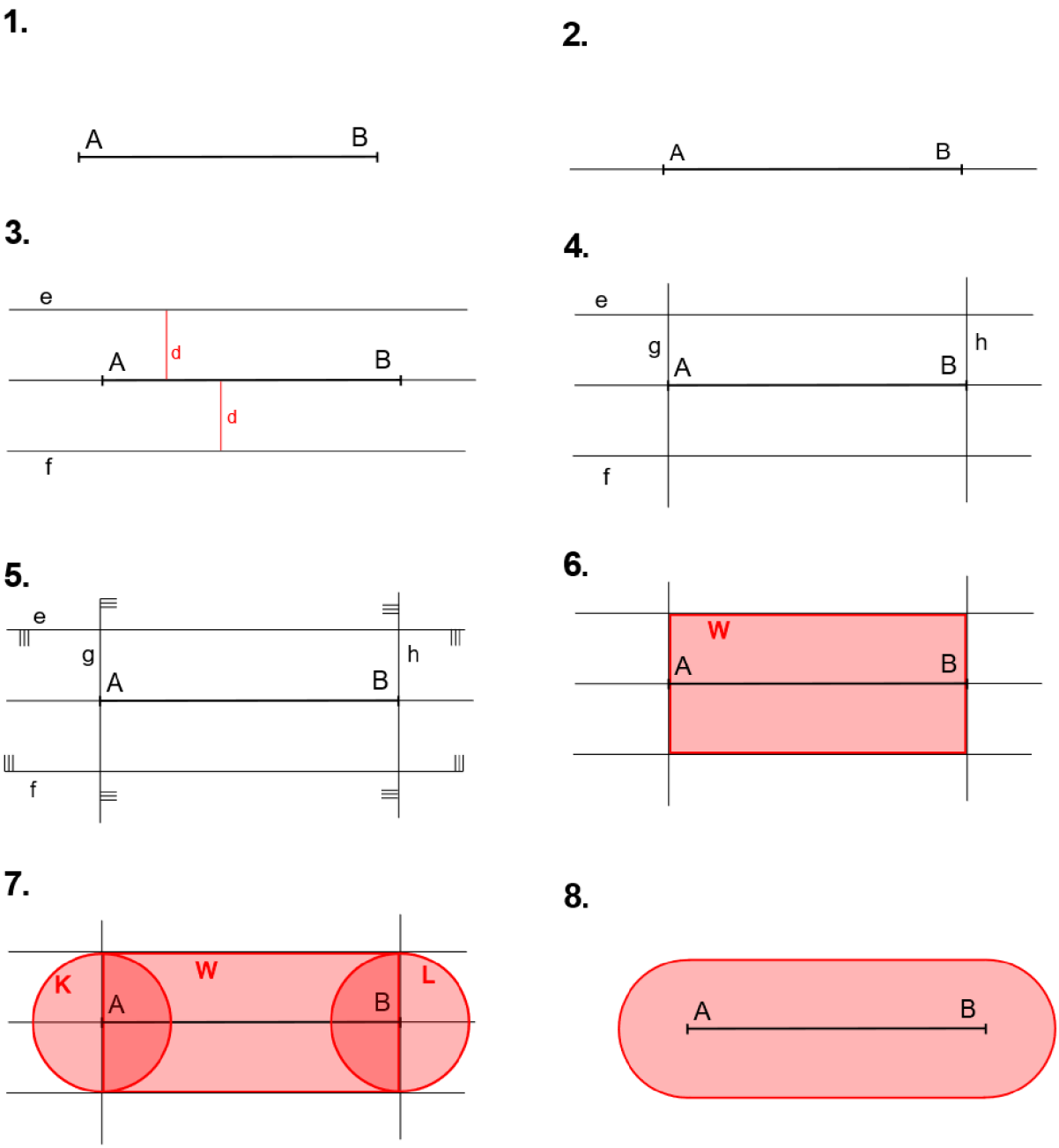
Obrázek 64: Úloha obalové zóny bodu, vlastní tvorba

Jestliže jsi zkonstruoval/a kruh o poloměru 2 cm, pochopil/a jsi základní myšlenku toho, co je buffer. Nezapomeň zvýraznit, že množinou není pouze hraniční kružnice, ale také vnitřek kruhu (nehledáme body pouze s danou vzdáleností, ale i se vzdáleností menší).

Náročnější definicí bude obalová zóna úsečky. Jako taková se množina bodů ve vzdálenosti

od úsečky většinou nedefinuje, musíme proto zkombinovat různé definice k sobě. Mějme zadanou úsečku AB, pro kterou chceme vytvořit obalovou zónu o velikosti d. Možná definice takové množiny bodů je naznačena na obrázku níže. Pro jednoduchost je postup rozdělen do bodů, a je znázorněn v obrázku 65:

1. Máme danou úsečku AB
2. Zkonstruujeme přímku danou body A a B
3. K přímce zkonstruujeme rovnoběžky e, f ve vzdálenosti d. Tyto rovnoběžky se také někdy nazývají ekvidistanty a jedná se o množinu bodů, které mají od přímky danou vzdálenost.
4. Zkonstruujeme přímky g, h, které jsou kolmé na přímku AB a prochází body A, respektive B
5. Vybereme vhodné poloroviny včetně jejich hraničních přímek:
   - Polorovinu $\overrightarrow{eA}$, kde e je hraniční přímka a A bod určující polorovinu
   - Polorovinu $\overrightarrow{fA}$, kde f je hraniční přímka a A bod určující polorovinu
   - Polorovinu $\overrightarrow{gB}$, kde g je hraniční přímka a B bod určující polorovinu
   - Polorovinu $\overrightarrow{hA}$, kde h je hraniční přímka a A bod určující polorovinu
6. Průnikem polorovin včetně hraničních přímek je část roviny $W = \overrightarrow{eA} \cap \overrightarrow{fA} \cap \overrightarrow{gB} \cap \overrightarrow{hA}$)
7. Vytvoříme obalové zóny K a L bodů A a B. Tyto obalové zóny jsou kruhem včetně hraniční kružnice.
8. Sjednocením částí roviny W, K a L vznikné obalová zóna úsečky AB



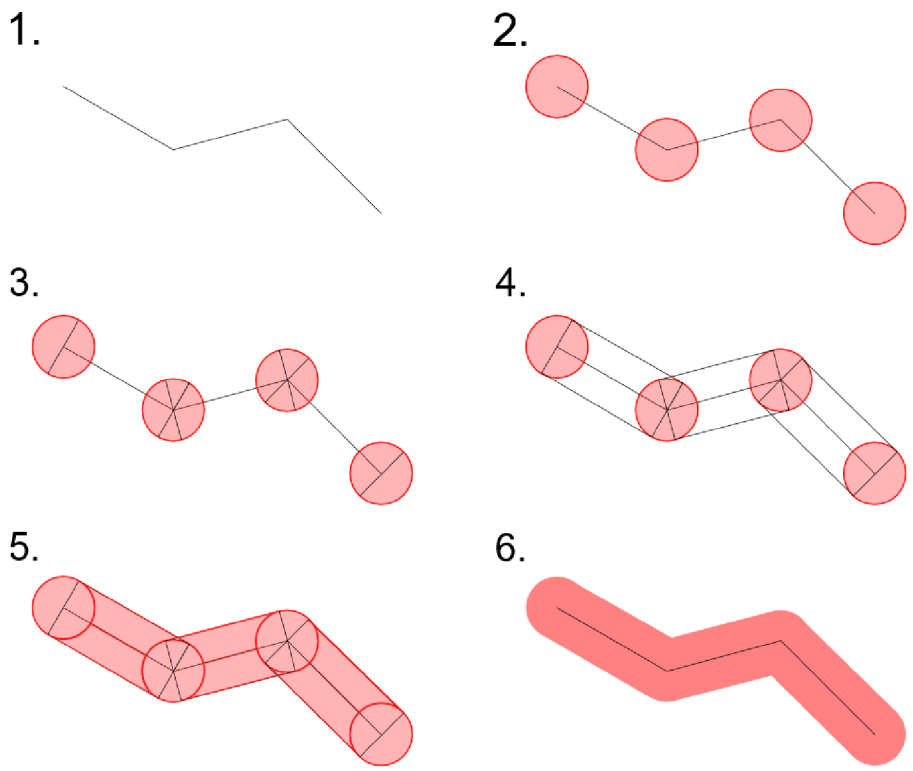
Obrázek 65: Definice obalové zóny úsečky, vlastní tvorba

V praxi ale není nutná takto složitá konstrukce pokaždé, kdy budeme chtít buffer liniové vrstvy. Konstrukce bufferu pro liniový prvek může probíhat například následujícím způsobem:

1. Kolem všech lomových bodů linie zkonstruujeme kružnice požadovaného poloměru.
2. Zkonstruujeme kolmice na všechny úsečky v jejich krajních bodech. Tyto kolmice vedou vždy z krajního bodu úsečky po kružnici se středem v daném bodu.

3. Průsečík kolmice a kružnice spojíme úsečkou rovnoběžnou s daným úsekem lomené čáry s průsečíkem kolmice vzniklým kolem druhého krajního bodu dané úsečky. Vytvoříme tedy obdélník kolem každé úsečky tvořící lomenou čáru.

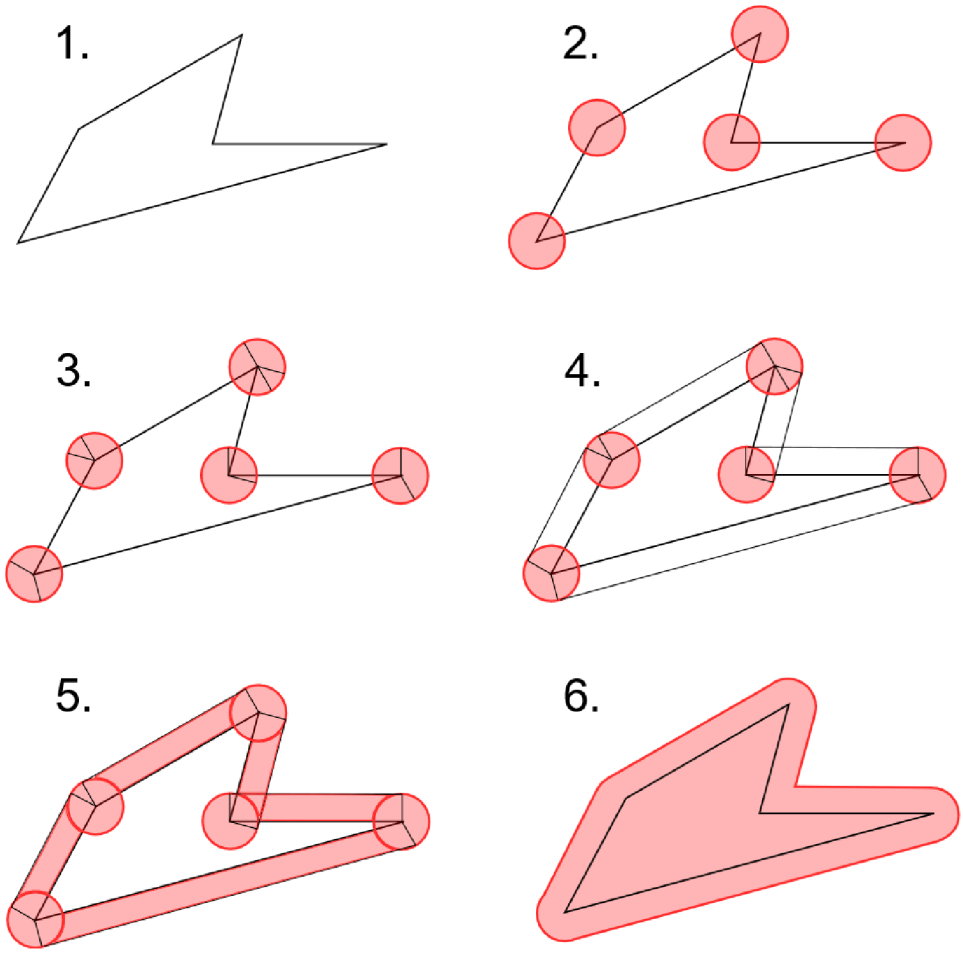
4. Výsledná obalová zóna sestává ze sjednocení kruhových oblastí kolem jednotlivých lomových bodů (včetně hranice těchto oblastí, tedy kružnic), a obdélníků, které vznikly propojením kolmic na úsečky a rovnoběžek s úsečkami



Obrázek 66: Postup konstrukce obalové zóny lomené čáry, vlastní tvorba

Konečně obalová zóna polygonu se konstruuje obdobným způsobem:

1. Kolem každého lomového bodu hraniční linie polygonu zkonstruujeme kružnici o požadovaném poloměru.
2. Zkonstruujeme kolmice ze všech lomových bodů na příslušné úsečky, které v nich začínají/končí. Můžeme zkonstruovat všechny kolmice, ale lze si také rozmyslet, které nebudou zapotřebí.
3. Průsečíky kolmic a příslušných kružnic propojíme rovnoběžkami
4. Výsledné obdélníkové plochy sjednotíme s kruhovými plochami kolem lomových bodů
5. Na rozdíl od obalové zóny liniových prvků se plocha vzniklá v bodě 4 sjednotí s plochou samotného polygonu



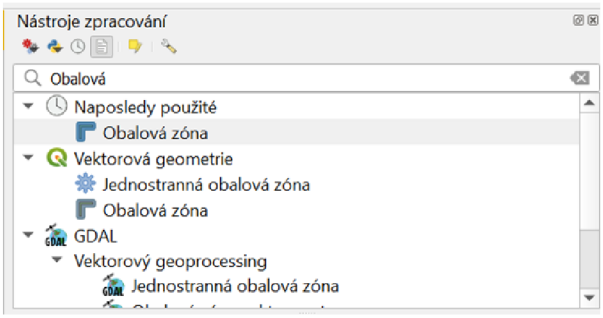
Obrázek 67: Postup tvorby obalové zóny polygonu, vlasntí tvorba

4.1 Jak na to v QGIS?

V následujícím návodu si ukážeme, jak pomocí QGIS zkonstruovat obalovou zónu – v tomto případě obalovou zónu 5 km kolem všech továrních komínů v ČR (z databáze ZABAGED – bodová vrstva *TovarniKomin*)

1. Načteme do projektu vrstvu, pro kterou budeme chtít vytvářet obalovou zónu (může jít o libovolnou bodovou, liniovou nebo polygonovou vrstvu).

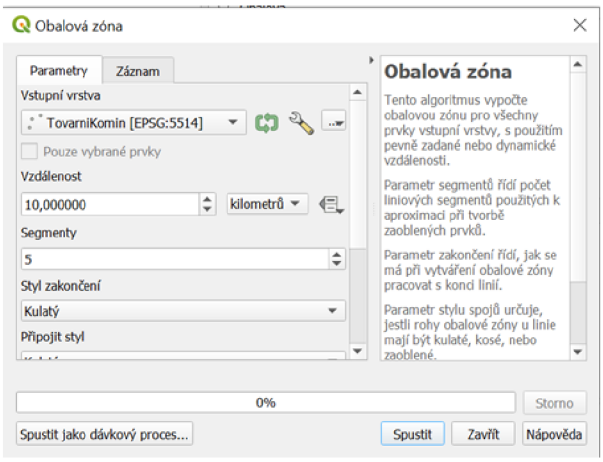
2. V panelu *Nástroje zpracování* po pravé straně napíšeme do vyhledávání *Obalová zóna* a vybereme tuto funkci ze sekce *Vektorová geometrie*.



Obrázek 68: Funkce obalová zóna, QGIS

3. Nyní je potřeba v dialogovém okně nastavit parametry obalové zóny. Do *Vstupní vrstva* zadáme název načtené vrstvy, pro kterou chceme vytvořit obalovou zónu (tedy např. *TovarniKomin*). Dále do kolonky *Vzdálenost* zadáme „5“ a změníme na požadované jednotky (km).

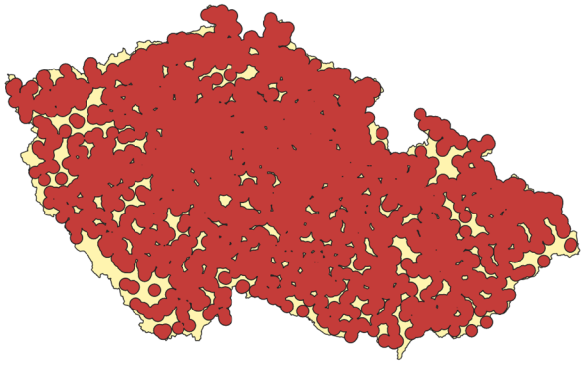
4. Specialitou QGIS je, že zakulacené okraje nevytváří přímo jako kružnici, ale přibližně je odhaduje pomocí pravidelných mnohoúhelníků. V parametru *Segmenty* můžeme zvolit, kolika liniemi chceme aproximovat čtvrtinu kružnice (pokud tedy zadáš například 5, výsledný mnohoúhelník, který bude aproximovat kružnici, nebude pětiúhelník, ale dvacetiúhelník). Platí, že čím větší počet segmentů, tím přesnější aproximace, ale zároveň také větší náročnost pro počítač. Ponecháme proto například 5 segmentů.



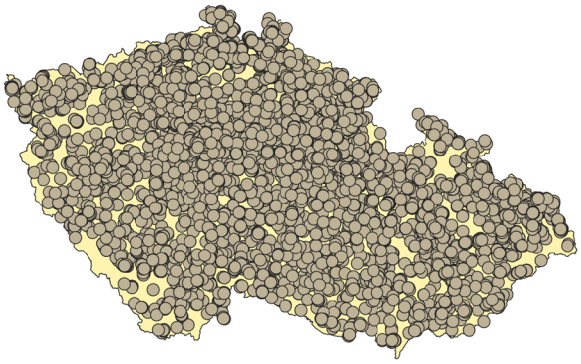
Obrázek 69: Parametry funkce obalová zóna, QGIS

5. Dále lze vybrat *Styl zakončení* – tedy jak bude vypadat obalová zóna kolem koncových bodů u liniových prvků. Stejně tak lze vybrat *Připojit styl* (v originále *Joint style*, správný překlad by měl být spíše *Styl připojení*) – tedy jak bude vypadat obalová zóna kolem lomových bodů – v obou případech jsou na výběr kulatá, čtvercová nebo plochá/kosá varianta. V našem případě ponecháme kulatou.

6. Poslední možnost je zaškrtnutí políčka *Výsledek rozpuštění* (lepší překlad by byl opět *Rozpustit výsledek*) – v případě zaškrtnutí QGIS sjednotí plochy překrývajících se obalových zón jednotlivých prvků do jednoho polygonu (obrázek 70). Pokud ho ponecháme nezaškrtnuté, QGIS plochu sjednocovat nebude (obrázek 71).



Obrázek 70: Sjednocené obalové zóny, QGIS, ZABAGED 4.1



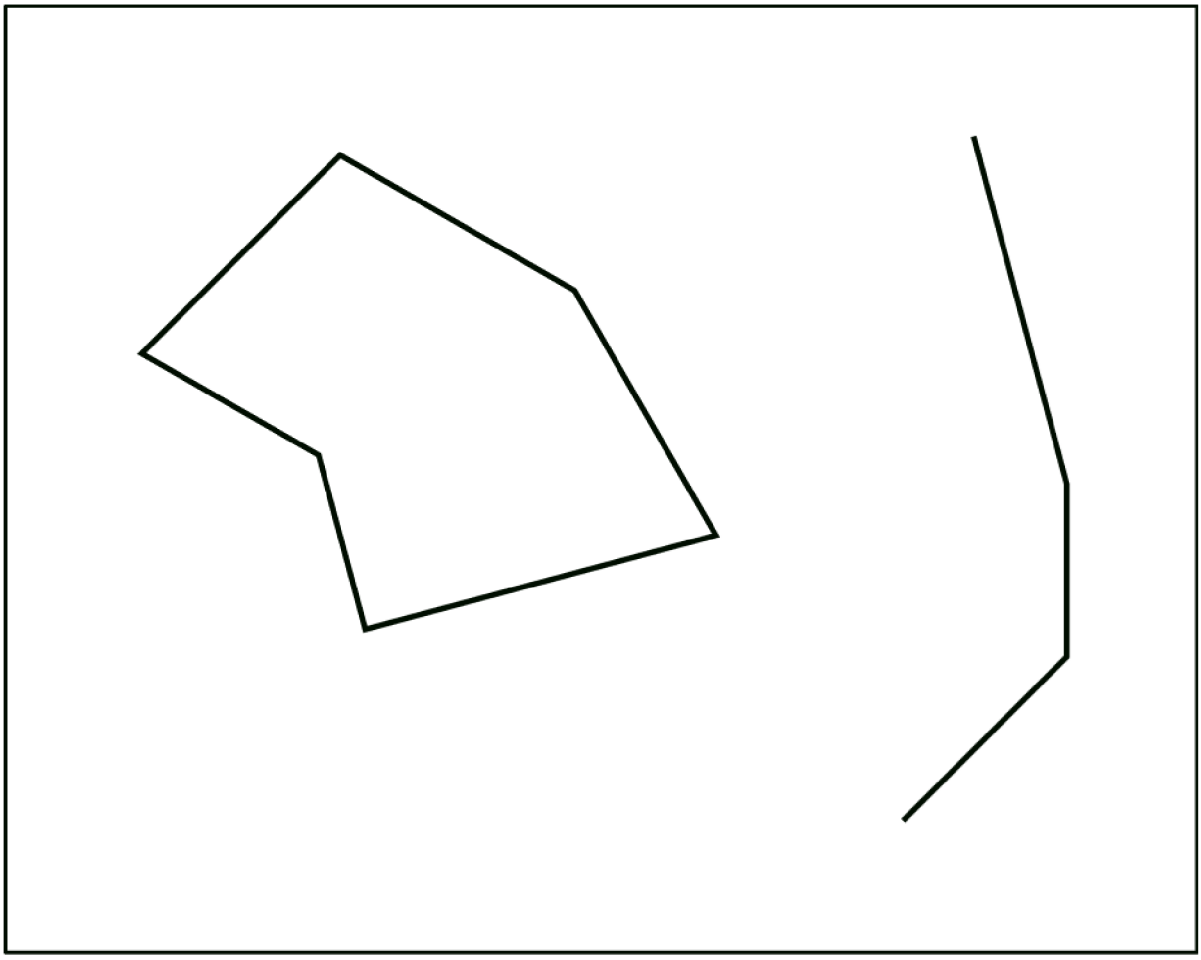
Obrázek 71: Nesjednocené obalové zóny, QGIS, ZABAGED 4.1

Nyní máme obalovou zónu 5 km kolem továrních komínů. Vyzkoušej si různé možnosti zvolených parametrů (různý počet segmentů, různé velikosti, různé styly zakončení a připojení pro liniové a polygonové vrstvy).

Obalovou zónu lze také tvořit pouze pro vybrané prvky z vrstvy - po uskutečnění výběru je třeba v dialogovém okně obalové zóny zaškrtnout políčko *Pouze vybrané prvky*. Není tedy třeba tvořit obalové zóny pro všechny prvky, ale pouze pro vybrané. Například lze vybrat pouze komíny určité výšky a vytvořit obalovou zónu pouze kolem nich.

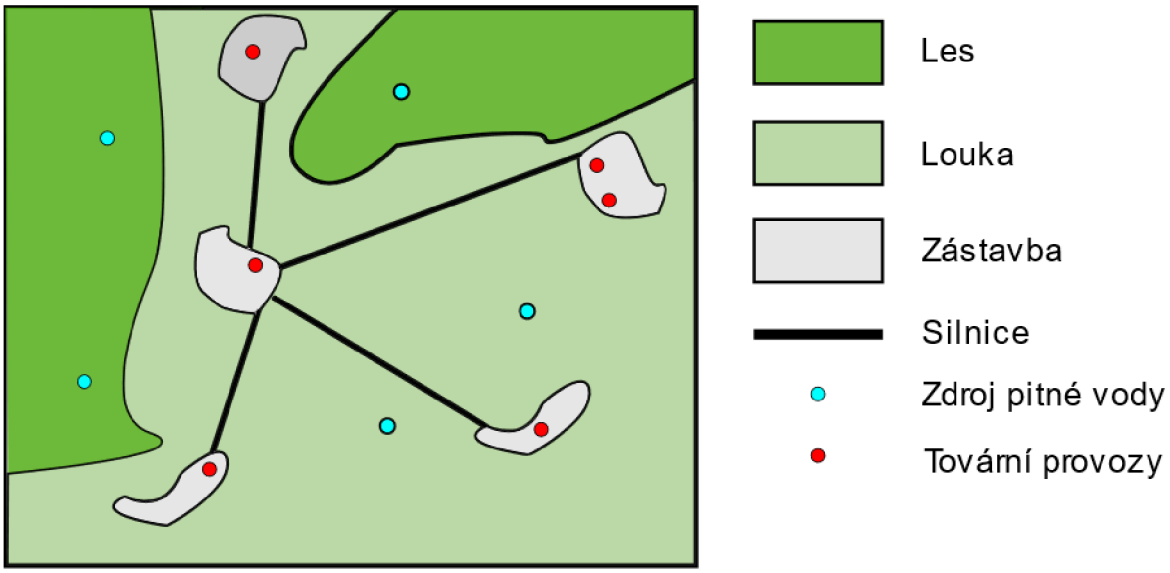
4.2 Příklady

4.1 Vytvoř pro následující vektorovém prvky obalovou zónu o poloměru 2 cm.



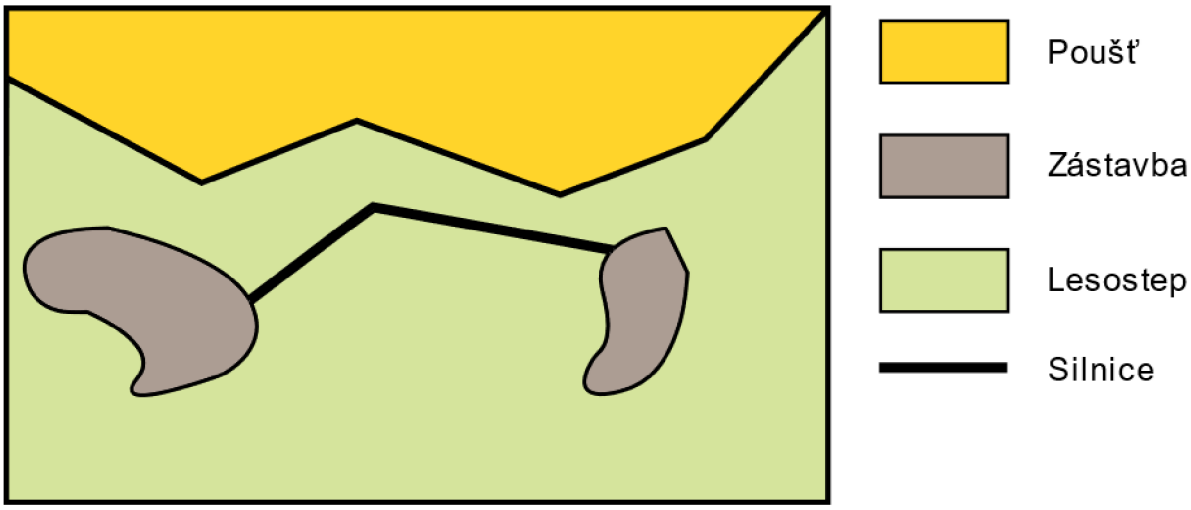
Obrázek 72: K úloze 4.1

4.2 V následující mapce s měříkem 1:5000 rozhodni pomocí obalových zón, které zdroje pitné vody (světle modré body) jsou vzdáleny 100 metrů nebo méně od továrního provozu (červené body).



Obrázek 73: K úloze 4.2

4.3 Velkým projektem v Africe je tzv. Velká zelená zeď – tedy výsadba 15 km širokého pásu zeleně na hranici pouště, která má chránit nepouštní oblasti přilehlé k Sahaře proti desertifikaci. V mapě s měřítkem 1:1 000 000 vyznač území, na které by měla být vysazena zeleň. Jak se to dotkne měst? Povede silnice mezi nimi celá lesem?



Obrázek 74: K úloze 4.3

Úlohy řešené v QGIS

4.4 Z polygonové vrstvy *LesniPudaSeStromy* ze ZABAGED si vyber jeden polygon poblíž místa tvého bydliště. Vybraný polygon lesa bude reprezentovat porost napadený kůrovcem. Vytvoř z tohoto polygonu samostatnou vrstvu (*Export* → *Uložit vybrané prvky jako...*). V modelovém příkladu je kůrovec schopen dolétnout 500 m do sousedních porostů. Pomocí obalové zóny rozhodni, které další porosty jsou v ohrožení a vytvoř z nich novou vrstvu. Tato vrstva představuje porosty, které kůrovec napadl v první generaci. Následně stejným způsobem rozhodni, které porosty budou v ohrožení druhou generací kůrovce – tedy jaké porosty jsou v dosahu 500 m od vrstvy představující lesy napadené v první generaci. Jaká je plocha lesa napadená 1. a 2. generací kůrovce?

4.5 Pro dráty vysokého napětí je potřeba vytvářet ochranné pásmo, tak, aby nedošlo například k pádu stromů na dráty a poruše soustavy. Vyzkoušej si naplánování takového pásma v rámci tvého SO ORP. Ořež vrstvy *LesniPudaSeStromy* a *ElektrickeVedeni* na území tvého SO ORP, a vytvoř obalovou zónu 20 metrů kolem elektrického vedení. Při vytváření obalové zóny využij možnosti *Výsledek rozpuštění.*

Následně pomocí funkce *Oříznout* urči všechny plochy lesa, která se nacházejí v ochranném pásmu elektrického zařízení. Jaká je plocha lesa, kterou bude potřeba pravidelně prořezávat (využij funkce předchozí kapitoly)? Podívej se do mapy, zda už někde průseky lesa nejsou značeny.

4.6 V této úloze modifikujeme předchozí úlohu - v reálném případě se totiž udávají různé šířky ochranného pásma, a to v závislosti na hodnotě napětí v drátech.

Proto s pomocí výběru dle hodnoty vytvoř následující obalové zóny: 30 metrů kolem vedení s napětí 400 kV, 20 metrů kolem vedení s 220 kV, 15 metrů kolem vedení s 110 kV, a kolem ostatních vedení zónu 12 metrů (používej možnost vytvoření obalové zóny kolem výběru zaškrtnutím *Pouze vybrané prvky*). Vrstvy si prozatím nech uložené, až si projdeš kapitolu o množinách a naučíš se práci s funkcí *Sjednotit*, sjednoť tyto vrstvy do jedné a ořízni pomocí této vrstvy plochu lesa. Jak se nyní změní plocha, kterou bude třeba prořezávat?

5 Point in polygon

Potřebné vstupní znalosti: polopřímka, skalární a vektorový součin, úhel svíraný dvěma vektory

Nyní už víme, jak vytvořit vektorové prvky a měřit jejich metrické vlastnosti. Jednou z nejdůležitějších funkcí, které poskytuje QGIS, je možnost překryvné analýzy, tedy určování vzájemného překrývání jednotlivých vrstev. Jejím základním stavebním kamenem je pak schopnost programu rozpoznat, zda zvolený bod leží uvnitř daného polygonu, nebo mimo něj. Ukažme si nyní dva možné způsoby, kterými GIS programy dokáží zjistit polohu bodu vůči polygonu.

5.1 Even-odd algoritmus

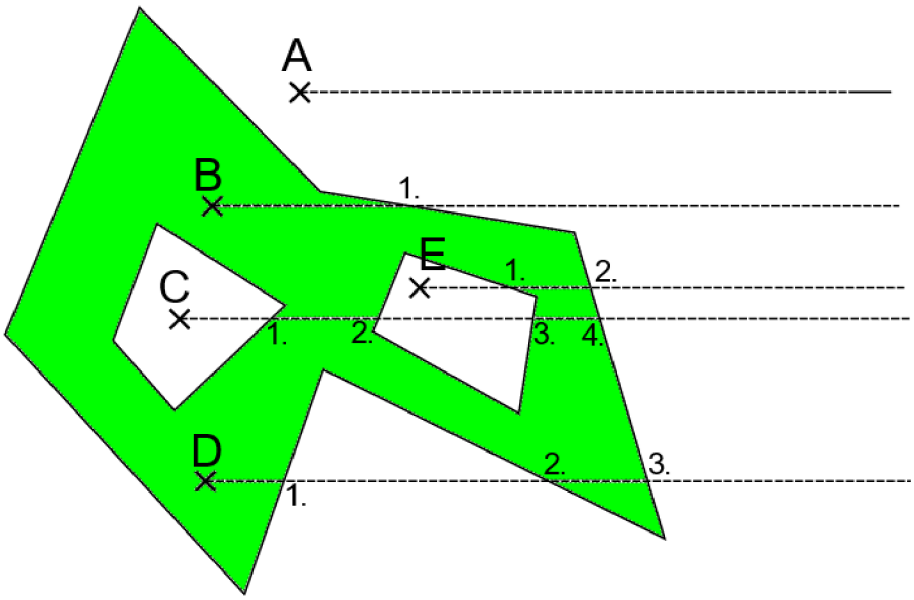
Prvním způsobem je tzv. Even-odd algoritmus (do češtiny lze přeložit jako Sudý-lichý algoritmus). Někdy lze algoritmus najít pod názvem Ray casting algoritmus, tedy algoritmus vyslání paprsku. Ten vychází z jednoduchého principu – z bodu vyšleme polopřímku (obecně lze libovolným směrem, ale volí se směr rovnoběžný s jednou ze souřadnicových os), a sledujeme, kolikrát tato polopřímka protne hranice daného polygonu. Jak nám ale počet protnutí pomůže poznat, zda se bod nachází uvnitř, nebo vně polygonu?

Uvědomme si, že polopřímka směruje teoreticky do nekonečna, zatímco polygon je určitě konečný – to znamená, že od určitého bodu musí polopřímka opustit polygon a už do něj nevstoupit (uvažujeme-li pohyb po polopřímce směrem od počátečního bodu). Druhá důležitá věc pro uvědomění si je, že každá hrana polygonu od sebe odděluje vnitřní a vnější oblast polygonu – a tedy s každým překročením hrany se ocitneme v odlišné části roviny. Pokud jsme byli uvnitř polygonu, překročením hrany se dostaneme vně polygonu, a opačně.

Víme tedy, že při cestě po polopřímce směrem od počátečního bodu skončíme venku a při každém průsečíku s hranicí se změní náš stav z „venku“ na „uvnitř“, nebo opačně. Pokud při cestě po polopřímce překročíme hranici pouze jednou, změní se stav z „uvnitř“ na konečné „venku“ – tím pádem jsme ale museli začínat uvnitř polygonu, a bod tedy leží

v polygonu. Naopak pokud napočítáme dva průsečíky, potom jsme nejdřív museli být ve stavu „venku“, po prvním překročení „uvnitř“ a po druhém překročení opět „venku“. Podobně si lze rozmyslet, jak bude fungovat algoritmus pro tři průsečíky, čtyři průsečíky atd.

Konečný výsledek je tedy jasný – pokud jsme napočítali lichý počet průsečíků, musí počáteční bod ležet uvnitř polygonu. Pokud je počet průsečíků sudý, potom musí počáteční bod ležet vně polygonu. Na obrázku 75 lze dobře vidět funkci algoritmu - body A, C a E mají sudé počty průsečíků polopřímky z nich vyslané s hranicemi polygonu, a algoritmus je proto vyhodnotí jako ležící vně polygonu. Naopak body B, D mají liché počty průsečíků, a algoritmus je vyhodnotí jako ležící uvnitř polygonu.



Obrázek 75: Ilustrace even-odd algoritmu, vlastní tvorba

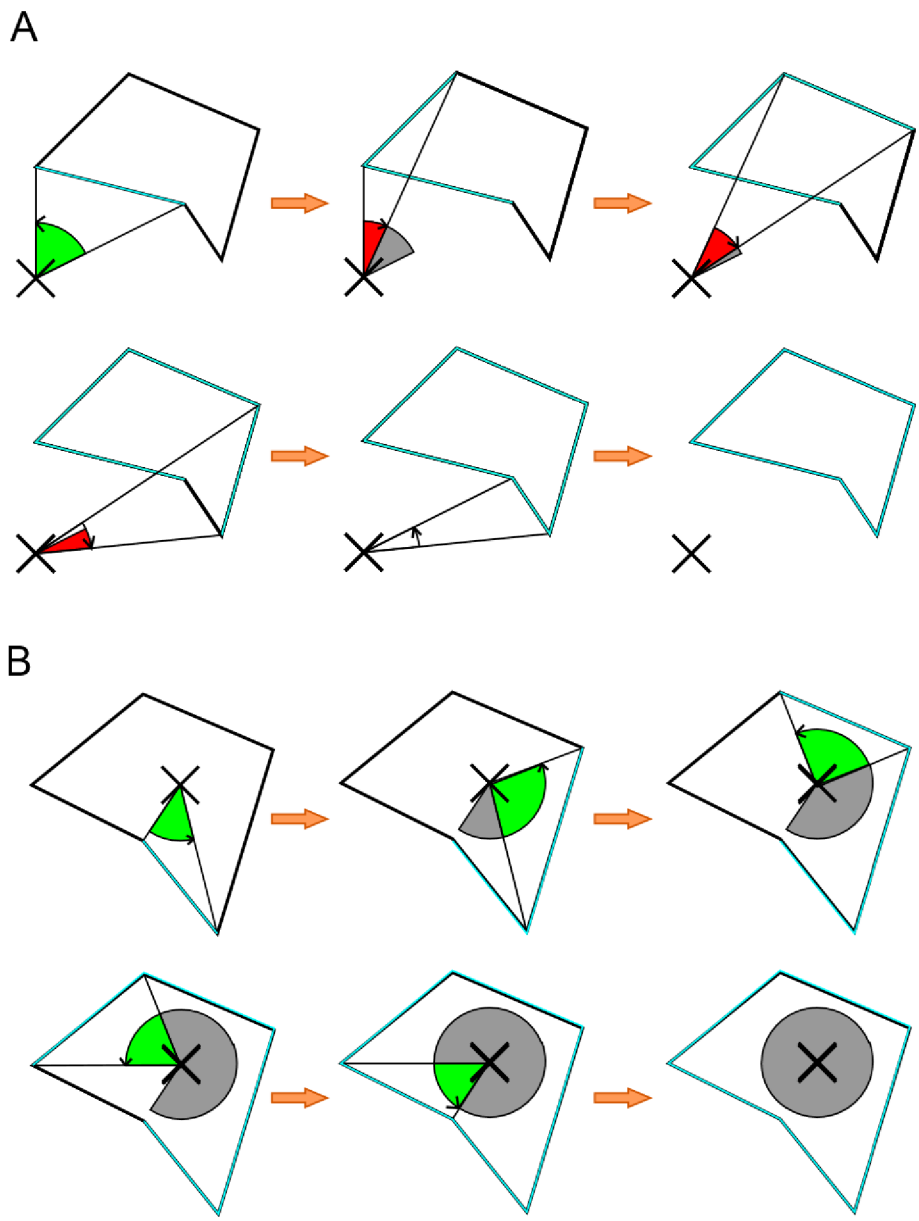
5.2 Winding number algoritmus

Druhý algoritmus pracuje s tzv. winding number (dále „wn“). Místo vyslání polopřímky pracuje s myšlenkou počítání otoček, které vykoná „pozorovatel“, který stojí ve zkoumaném bodě, pokud se otáčí k jednotlivým lomovým bodům hranice polygonu tak, jak jsou po sobě zaznamenány v souboru uchovávajícím jejich polohu. Pokud je tento počet otáček nulový, vyhodnotí algoritmus, že bod leží vně polygonu. V případě, že je počet otoček nenulové celé číslo, leží bod uvnitř polygonu. Otáčky musíme chápat včetně smyslu otáčení, a otočení s opačným smyslem se odečítají.

„Pozorovatel“ v daném bodě tedy sčítá úhly, o které se otočí při otáčení mezi jednotlivými vrcholy, a to včetně znaménka, kdy otočení proti směru hodinových ručiček přičítá, a otočení po směru hodinových ručiček odečítá. Algoritmus lze také chápat z pohledu hranice polyognu, která se buďto obtočí kolem zkoumaného bodu, a ten tak leží uvnitř polygonu, nebo se neobtočí, a bod leží mimo.

Na obrázku 76 je vidět postup algoritmu – v případě A se nejprve úhly přičítají (zelený úhel při otáčení proti směru hodinových ručiček), ale od druhého obrázku naopak dochází k postupnému odečítání úhlu (červené úhly při otáčení proti směru hodinových ručiček), až nakonec dojde k vynulování celkového úhlu, o který se „pozorovatel“ v bodě otočí – bod tedy leží mimo polygon. V případě B mají všechna otočení stejný smysl, a postupně tak dochází k přičítání úhlů proti směru hodinových ručiček, až ke konečné celé otáčce.

Pro algoritmus není až tak podstatné, zda vyjde počet otočení kladný, nebo záporný – důležité je pouze rozlišení, zda je nenulový. Naprosto klíčové je ale správné dodržení pořadí vrcholů hranice polygonu, tak, jak jsou zadány dle standardů. Stejně tak je nutné doržovat konvenci, že při otáčení od jednoho vrcholu k vrcholu následujícímu proti směru hodinových ručiček úhel přičítáme, a při otáčení v opačném smyslu odečítáme.

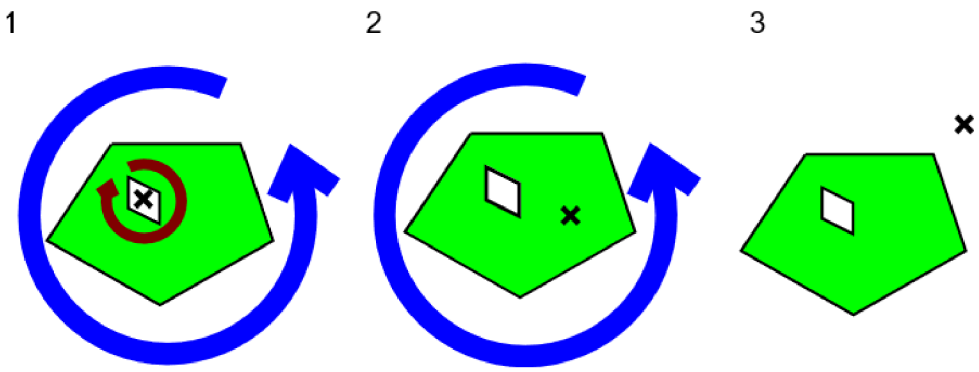


Obrázek 76: Postup winding number algoritmu, vlastní tvorba

Tento algoritmus je jedním z mnoha, které využívají způsobu zápisu hranic polygonu – tedy že body vnější hranice uchovává QGIS v pořadí, který jde proti směru hodinových ručiček, a vnitřní hranice naopak ve směru chodu hodinových ručiček. Na obrázku 76 jsou ilustrovány tři situace možné polohy bodu vůči polygonu s dírou. V prvním případě se nejprve „pozorovatel“ ve vyhodnocovaném bodě otočí o úhel 2π proti směru hodinových ručiček při otáčení se k vrcholům vnější hranice, následně se ale otočí o 2π po směru hodinových ručiček vůči vnitřní hranici – tím pádem se počet otočení vynuluje a bod je správně vyhodnocen jako ležící mimo polygon (uvnitř díry).

Ve druhém případě na obrázku 77 se otočí o 2π vůči vnější hranici polygonu, a vůči

vnitřní hranici je počet otáček nulový – jedná se o stejný případ, jako bod mimo polygon v obrázku 76. Vykoná tedy 1 celou otočku, tím pádem leží uvnitř polygonu. Konečně ve třetím případě leží bod úplně mimo polygon, a počet otočení je nulový jak pro vnější, tak pro vnitřní hranici.



Obrázek 77: Winding number pro polygon s dírou, vlastní tvorba

Jak spočítat úhel, o který se daný pozorovatel otočí? Nejprve vypočtěme úhel, který svírají vektory mezi vyhodnocovaným bodem P a dvěma po sobě jdoucími lomovými body hranice polygonu V_i a V_{i+1}. Tedy úhel mezi vektory (které nadále budeme značit tučným písmem) $\boldsymbol{PV_i}$ a $\boldsymbol{PV_{i+1}}$, který se vypočte dle vzorce:

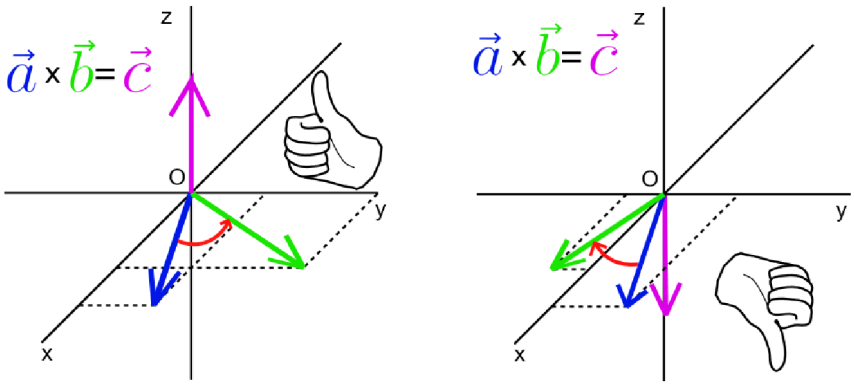
$$\varphi_i = arccos\left(\frac{\boldsymbol{PV_i} \cdot \boldsymbol{PV_{i+1}}}{|\boldsymbol{PV_i}||\boldsymbol{PV_{i+1}}|}\right)$$

kde v čitateli máme skalární součin vektorů a ve jmenovateli součin velikostí jednotlivých vektorů. Funkce arkus kosinus ($arccos$) je pak inverzní funkcí ke kosinu. Pokud bychom však pouze sečetli hodnoty všech úhlů, které nám vyjdou, algoritmus by nefungoval. Obor hodnot inverzního kosinu je $< 0, \pi >$, tím pádem může hodnota úhlu svíraného dvěma vektory nabývat pouze kladných hodnot z tohoto intervalu. To je ale proti myšlence algoritmu – ten potřebuje, aby se při otáčení proti směru hodinových ručiček hodnoty úhlu přičítaly, a při opačném směru otáčení odečítaly. Pro účely rozlišení smyslu otáčení (tedy zda dochází k otáčení po, nebo proti směru hodinových ručiček) lze využít vektorového součinu.

Jednou z vlastností vektorového součinu je, že vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, tvoří v tomto pořadí pravotočivou bázi. Funguje zde tzv. pravidlo pravé ruky – jestliže prsty stočíme ve směru otočení od vektoru $\boldsymbol{a}$ k vektoru $\boldsymbol{b}$, vztyčený palec pravé ruky bude ukazovat ve

směru vektoru $\boldsymbol{c}$. Můžete si vyzkoušet, že pokud provedete opačný součin (tedy $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$), bude výsledný vektor $\boldsymbol{c}$ směřovat opačným směrem, než pokud vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

Naše vektory $\boldsymbol{PV_i}$ a $\boldsymbol{PV_{i+1}}$ jsou pouze dvojdimenzionální – abychom mohli vůbec počítat jejich vektorový součin, je nutné přidat jim třetí, nulovou složku. Je tak nutné si vektory představit nikoliv ve dvojrozměrné kartézské souřadné soustavě (Oxy), ale v soustavě trojrozměrné ($Oxyz$), kde vektory $\boldsymbol{PV_i}$ a $\boldsymbol{PV_{i+1}}$ leží rovině Oxy. Další vlastností vektoru $\boldsymbol{c}$ je kolmost na oba vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, jejichž vektorovým součinem vznikl – tím pádem je $\boldsymbol{c}$ kolmý na rovinu Oxy, a pouze jeho poslední složka tak bude nenulová. Vektor $\boldsymbol{c}$ tak bude vždy směřovat rovnoběžně s osou z, a podle smyslu otáčení od $\boldsymbol{a}$ do $\boldsymbol{b}$ bude jeho třetí složka buď kladná (pokud je smysl otáčení kladný, proti směru hodinových ručiček) nebo záporný (pro záporný smysl otáčení), jak je naznačeno na obrázku 78. Máme tedy poslední potřebné doplnění pro korektnost algoritmu.



Obrázek 78: Pravidlo pravé ruky, vlastní tvorba

Není ale nutné počítat celý vektorový součin – vzhledem k tomu, že jsme odvodili, že pro vektory ležící v rovině Oxy budou první dvě složky výsledného vektoru nulové, stačí spočítat pouze poslední složku. Pro vektory $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, 0)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, 0)$ bude výsledný vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$. Zde si prosím připomeňte, jakým způsobem se vektorový součin počítá. Pokud je tedy výraz $a_1b_2 - a_2b_1$ kladný, bude smysl otáčení kladný, a velikost úhlu mezi vektory přičteme, v opačném případě odečteme.

V našem případě vektor $\boldsymbol{a}$ představuje vektor $\boldsymbol{PV_i} = (a_1, a_2, 0)$ a vektor $\boldsymbol{b}$ představuje vektor $\boldsymbol{PV_{i+1}} = (b1, b2, 0)$. Definujeme výraz O_i, jehož hodnota pro vektory $\boldsymbol{PV_i} = (a_1, a_2, 0)$ a $\boldsymbol{PV_{i+1}} = (b1, b2, 0)$ je definována jako $O_i = (a_1b_2 - a_2b_1)$. My potřebujeme pouze rozhodnout, zda je O_i kladné nebo záporné. To vyjádříme pomocí funkce signum (zkráceně sgn(x)). Funkce signum je zadána následovně:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & pro\, x < 0, \\ 0 & pro\, x = 0, \\ 1 & pro\, x > 0 \end{cases}$$

Tedy pokud O_i je kladné, $sgn(O_i)$ bude rovno $+1$, pro záporné O_i je $sgn(O_i)$ rovno -1.

Konečný vzorec tedy bude:

$$wn = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} arccos \left(\frac{\boldsymbol{PV_i} \cdot \boldsymbol{PV_{i+1}}}{|\boldsymbol{PV_i}||\boldsymbol{PV_{i+1}}|} \right) \cdot sgn(O_i)$$

Tento vzorec již reflektuje také smysl otáčení. Smysl vydělení celého součtu 2π je, že počítáme počet celých otočení hranice kolem bodu - místo hodnoty v radiánech je tak výsledek skutečně počtem otáček hranice kolem bodu. Připomeňme si znovu, že bod leží mimo polygon právě tehdy, když je výsledný počet otočení 0, a uvnitř tehdy, pokud je výsledný počet otočení nenulový.

Příklad výpočtu

Mějme v kartézské souřadné soustavě Oxy zadaný trojúhelník ABC, kde $A = [3, 0], B = [0, 3], C = [0, 0]$. Dále jsou dány body $D = [2, 2]$ a $E = [1, 1]$. Urči pro body D a E jejich winding number vzhledem k trojúhelníku ABC a rozhodni, zda leží, či neleží uvnitř trojúhleníku.

Začněme případem bodu D. Nejprve vypočítejme vektory $\boldsymbol{DA}$, $\boldsymbol{DB}$ a $\boldsymbol{DC}$. Platí tedy $\boldsymbol{DA} = A - D = (1, -2)$, $\boldsymbol{DB} = B - D = (-2, 1)$, $\boldsymbol{DC} = C - D = (-2, -2)$. Nyní vypočteme pro každé dva po sobě jdoucí vrcholy polygonu orientovaný úhel, který svírají vektory od bodu D k těmto vrcholům. Tedy pro vektory $\boldsymbol{DA}$ a $\boldsymbol{DB}$ bude velikost orientovaného úhlu dána vzorcem:

$$\varphi_1 = arccos \left(\frac{\boldsymbol{DA} \cdot \boldsymbol{DB}}{|\boldsymbol{DA}||\boldsymbol{DB}|} \right) \cdot sgn(O_1) = arccos \left(\frac{(1, -2) \cdot (-2, 1)}{|(1, -2)||(-2, 1)|} \right) \cdot sgn(1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2))$$
$$= arccos \left(\frac{-4}{5} \right) \cdot sgn(-3) = 2,498 \cdot (-1) = -2,498\, rad$$

Stejným způsobem spočteme hodnotu orientovaného úhlu φ_2 mezi vektory $\boldsymbol{DB}$ a $\boldsymbol{DC}$ a

úhlu φ_3 mezi vektory $\boldsymbol{DC}$ a $\boldsymbol{DA}$ (pořadí je v tomto případě klíčové, pro obrácené pořadí vektorů bude vycházet opačná hodnota úhlu.

Hodnoty úhlů jsou v tomto případě:

$$\varphi_2 = arccos\left(\frac{\boldsymbol{DB}\cdot\boldsymbol{DC}}{|\boldsymbol{DB}||\boldsymbol{DC}|}\right)\cdot sgn(O_2) = arccos\left(\frac{(-2,1)\cdot(-2,-2)}{|(-2,1)||(-2,-2)|}\right)\cdot sgn(4-(-2))$$
$$= arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{10}}\right)\cdot sgn(6) = 1,249\cdot(1) = 1,249\ rad$$

$$\varphi_3 = arccos\left(\frac{\boldsymbol{DC}\cdot\boldsymbol{DA}}{|\boldsymbol{DC}||\boldsymbol{DA}|}\right)\cdot sgn(O_3) = arccos\left(\frac{(-2,-2)\cdot(1,-2)}{|(-2,-2)||(1,-2)|}\right)\cdot sgn(4-(-2))$$
$$= arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{10}}\right)\cdot sgn(6) = 1,249\cdot(1) = 1,249\ rad$$

Potom

$$wn = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\varphi_k = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) = \frac{1}{2\pi}(-2,498+1,249+1,249) = 0\ otoček$$

Winding number vychází jako 0, tím pádem bod D leží mimo trojúhelník ABC

Stejný postup uplatníme pro bod E, tzn. vytvoříme vektory $\boldsymbol{EA}$, $\boldsymbol{EB}$ a $\boldsymbol{EC}$ a určíme orientované úhly φ_1, φ_2 a φ_3. V tomto případě hodnoty orientovaných úhlů vychází jako:

$$\varphi_1 = 2,498\ rad;\ \varphi_2 = 1,893\ rad \text{ a } \varphi_3 = 1,893\ rad$$

Pro winding number tedy platí:

$$wn = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) = \frac{1}{2\pi}(2,498+1,893+1,893) \doteq 1\ otočka$$

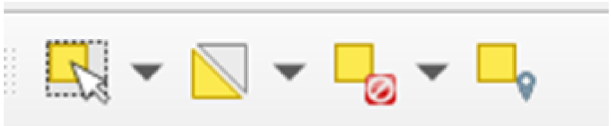
"Pozorovatel" v bodě E tedy vykoná celou jednu otočku, a podle výše popsaného algoritmu tedy stojí uvnitř trojúhelníku ABC.

5.3 Jak na to v QGIS?

Pomocí Even-odd algoritmu nebo Winding number algoritmu je QGIS schopen určit, zda nějaké body leží v polygonu, nebo naopak zda polygon obsahuje body. Nejzákladnější funkcí, která tuto problematiku využívá, je funkce výběru prvků z vrstvy dle umístění. Vyzkoušejme si na polygonové vrstvě *ObcePolygony* z ARCČR 4.2 a na bodové vrstvě *SkolaDefinicniBod* ze ZABAGED určit, které obce mají na svém území školu.

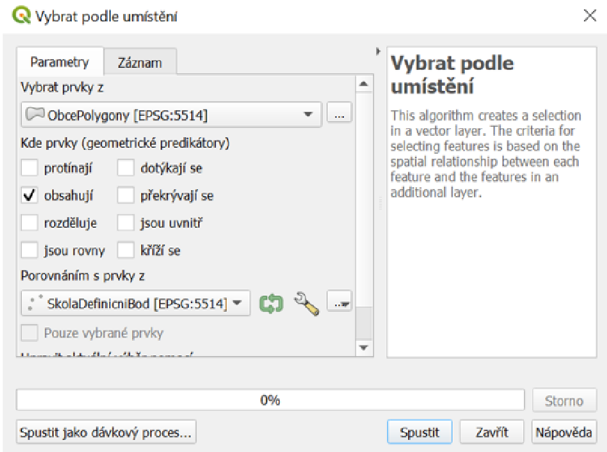
1. Načteme do projektu vrstvy *ObcePolygony* a *SkolaDefinicniBod*

2. V horní liště projektu najdeme panel výběrů a zde použijeme poslední tlačítko – *Vybrat podle umístění.*



Obrázek 79: Možnosti výběru, QGIS

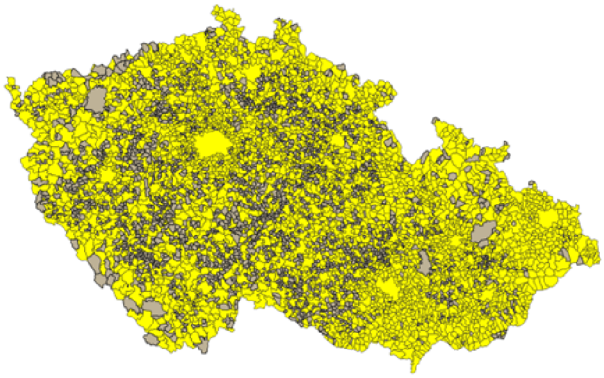
3. Chceme najít všechny obce, které na svém území mají školu. Proto v kolonce *Vybrat prvky z* zvolíme vrstvu *ObcePolygony.* Dále mezi geometrickými predikátory zvolíme *obsahují* a nakonec v kolonce *Porovnáním s prvky z* zvolíme bodovou vrstvu škol. Pomocí tlačítka spustit vytvoříme výběr.



Obrázek 80: Výběr dle umístění, QGIS

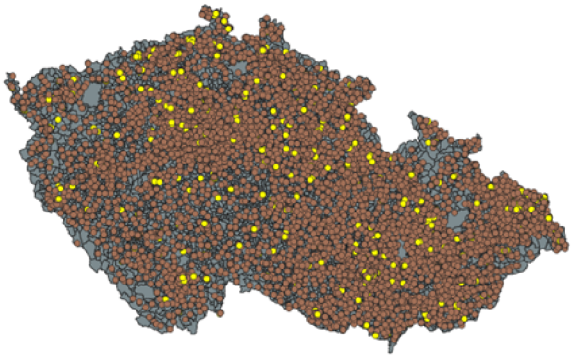
4. Nyní se v mapovém okně žlutě vybarví všechny vybrané prvky z vrstvy *ObcePolygony* – ty patří do aktuálního výběru. Můžeme je uložit jako novou vrstvu kliknutím PM na vrstvu *ObcePolygony* v seznamu načtených vrstev → *Export* → *Uložit vybrané prvky jako.* Nebo

lze s výběrem provádět různé překryvné funkce – lze vytvořit buffer pouze pro vybrané prvky, nebo lze provádět analýzu překryvu (funkce *Sjednocení, Rozdíl, Oříznout...* – viz následující kapitoly).



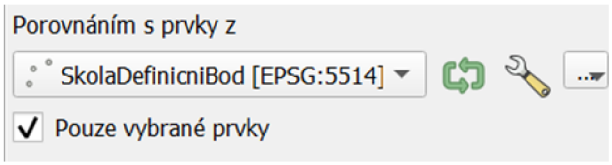
Obrázek 81: Vybrané prvky v mapovém okně, QGIS, ArcČR 4.2

5. Porovnávanou vrstvu nemusíme nutně brát celou – lze porovnávat také jen s vybranou částí. Například v našem případě nebudeme chtít obce s jakýmkoliv typem školy, ale pouze obce se střední školou. Nejprve tedy musíme funkcí *Vybrat prvky dle hodnoty* z vrstvy *SkolaDefinicniBod* vybrat pouze střední školy – do kolonky *vzdelani_p* napíšeme „střední škola běžná“. Nyní se vyberou pouze střední školy.



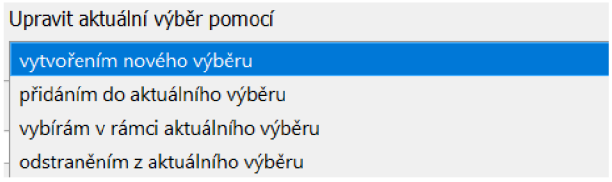
Obrázek 82: Vybrané prvky vrstvy SkolaDefinicniBod, QGIS, ArcČR 4.2, ZABAGED 4.1

6. Následně v dialogovém okně výběru dle umístění zaškrtneme možnost *Pouze vybrané prvky*. Nyní se vyberou pouze obce se střední školou.



Obrázek 83: Výběr dle umístění vybranou množinou prvků, QGIS

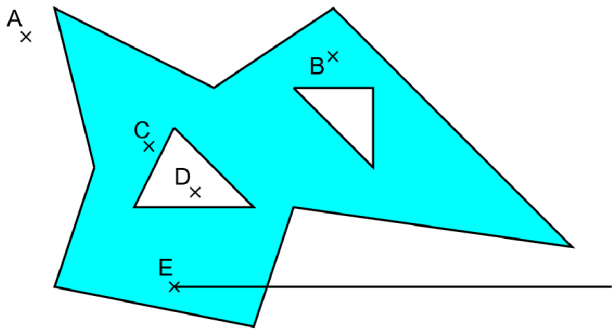
7. Výběr lze také nastavením varianty kolonky *Upravit aktuální výběr pomocí* v dialogovém okně výběru různě měnit. Pokud tedy například máme aktuálně vybrané obce, které mají na svém území školu, můžeme tento výběr zúžit na obce, které mají školu a zároveň poštu. Výběr provedeme stejným způsobem, pouze namísto přednastavené varianty *Vytvořením nového výběru* zvolíme variantu *Vybírám v rámci aktuálního výběru*. Stejně tak lze výběrem varianty *Odstraněním z aktuálního výběru* odebrat z aktuálně vybraných obcí se školou všechny obce, které mají na svém území poštu. Samozřejmě je nutné vrstvu *Porovnáním s prvky z* změnit ze *SkolaDefinicniBod* na *PostaDefinicniBod*.



Obrázek 84: Úprava možností výběru, QGIS

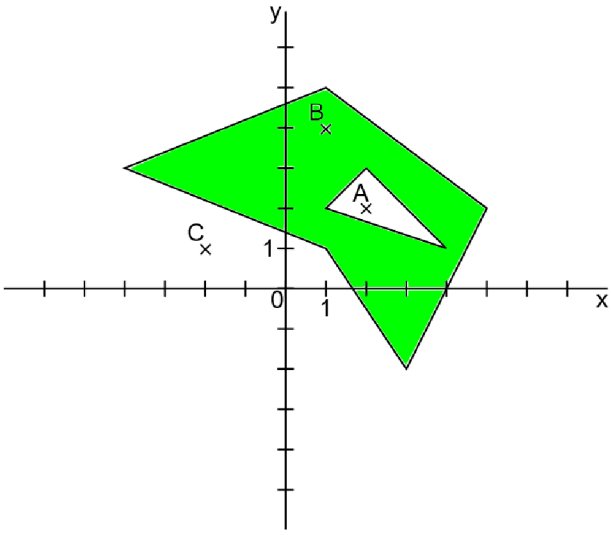
5.4 Příklady

5.1 Na následujícím obrázku je polygon se dvěma dírami a modře vybarvenou vnitřní oblastí, a body A, B, C, D, E. Polopřímka z bodu E má jeden průsečík s hranicí polygonu, a leží tedy dle Even-odd algoritmu uvnitř. Rovnoběžnými polopřímkami z ostatních bodů zdůvodni s využitím Even-odd algoritmu stroji (který není pouhým pohledem schopen vyhodnotit polohu bodu vůči polygonu), zda bod leží, nebo neleží uvnitř polygonu.



Obrázek 85: K úloze 5.1

5.2 Na následujícím obrázku je polygon s jednou dírou a zeleně vybarvenou vnitřní oblastí, a body A, B, C. Urči souřadnice vrcholů polygonu a bodů (souřadnice jsou vždy celočíselné), zapiš ve WKT, a následně spočítej jejich winding number. Podle něj vysvětli nevidícímu stroji, zda body A, B, C leží uvnitř polygonu. Pozor na pořadí bodů v rámci vnější a vnitřní hranice polygonu.



Obrázek 86: K úloze 5.2

5.3 Je dán polygon P, který je v jazyce WKT zapsán jako P = POLYGON (2 1, 5 3, 3 5, 0 2, 2 1) a body A, B, zapsané jako A = POINT (3 3) a B = POINT (1 4). Výpočtem bez zakreslování do souřadné soustavy urči winding number bodů A a B vzhledem k polygonu P a podle něj vyhodnoť, zda body leží uvnitř polygonu.

5.4 Ve zvolené pravoúhlé lokální soustavě souřadnic zanesli skotští výzkumníci malý bezejmenný ostrůvek v souostroví Orkneje jako POLYGON (−500 −150, −300 −200, −150 −50, −300 150, −500 −150). Zároveň z předchozích geologických výzkumů vědí, že v bodech A = POINT (−200 −150) a B = (−300 −50) ve stejné souřadné soustavě by se měla nacházet podzemní zásoba ropy. Ropné společnosti se takto malé ložisko vyplatí těžit pouze pomocí ropného vrtu na souši, proto chce vyhodnotit, zda body leží na ostrově, nebo na mořském šelfu. Pomocí Winding number nejprve spočítej, zda body leží na ostrově. Následně si zkonstruuj kartézskou souřadnou soustavu s vhodnou velikostí jednotek a body a polygon do ní zakresli – tím si ověříš správnost výpočtu.

5.5 Ve zvolené pravoúhlé lokální soustavě souřadnic se poblíž britského souostroví Falklandy nachází ostrůvek, jehož střed je zanesen jako POINT (460 780). Hranice britského území v této oblasti je dána čtyřúhelníkem POLYGON (400 800, 600 400, 1000, 200, 1400 600, 400 800). Patří ostrůvek Velké Británii, nebo leží mimo její území? Se kterým státem vede Británie spor o toto území, a v jakém roce došlo k největšímu vyhrocení tohoto sporu?

Úlohy řešené v QGIS

5.6 Státní správa potřebuje za účelem dotačních programů vytvořit vrstvy všech obcí ve tvém kraji (z vrstvy *ObcePolygony*), které mají na svém katastrálním území:
a) skládku (*Skladka_c*)
b) rozvodnu elektrické energie (*RozvodnaTransformovna_c*)
c) povrchovou těžbu nebo lom (*PovrchovaTezbaLom_c*)
Následně najdi všechny obce, kterých se budou týkat všechny tři dotační programy.

5.7 Ministerstvo zemědělství chce vrstvu všech SO ORP, které mají na svém území:
a) vinice (*Vinice_c*)
b) chmelnice (*Chmelnice_c*)
c) chmelnice a vinice zároveň
d) Vinice, ale ne chmelnice.

e) Chmelnice, ale ne vinice

ORP s alespoň jednou chmelnicí dostanou dotaci 3 000 000 Kč, ORP s alespoň jednou vinicí 1 500 000 Kč. Pokud je na území SO ORP zároveň chmelnice a vinice, není dotace 4 500 000 Kč, ale pouze 3 500 000 Kč. Jakou částku vyplatí ministerstvo v rámci tohoto dotačního programu?

5.8 Vytvoř mapu všech SO ORP s:

a) jadernou elektrárnou

b) plynovou nebo spalovací elektrárnou

c) vodní elektrárnou

Využij bodovou vrstvu *Elektrarny_c*. Filtruj podle pole *podtypel_p* pomocí výběru dle hodnoty.

6 Průsečík linií

Potřebné vstupní znalosti: vektorový součin, analytické vyjádření přímky, vzájemná poloha přímek v rovině a analytické určení jejich průsečíku

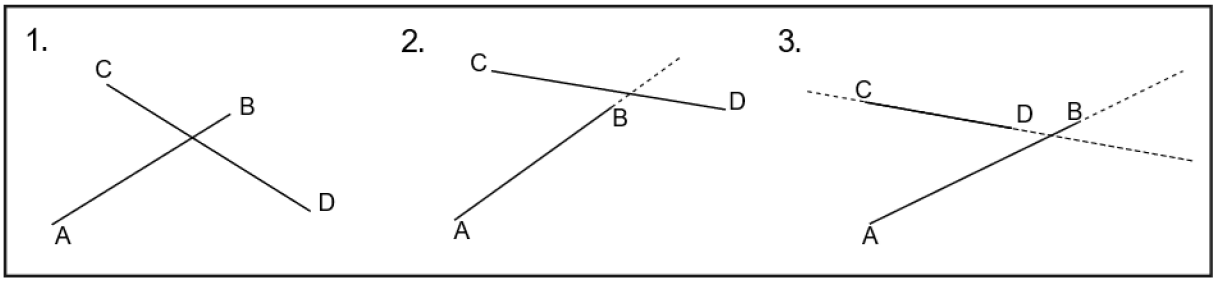
V analytické geometrii se běžně učí, jak nalézt průsečík dvou přímek v rovině. V této kapitole se podíváme na problém, který trochu lépe odpovídá reálné situaci – namísto přímek budeme hledat průsečík dvou úseček. Pokud se totiž rozhlédnete kolem sebe, nejspíš neobjevíte žádnou přímku – všechny linie, které kolem sebe vidíte, jsou s vysokou pravděpodobností konečné, a tím pádem se namísto přímek jedná o úsečky. Ačkoliv by se problém hledání průsečíku úseček mohl zdát náročnější než hledání průsečíku přímek, ve skutečnosti lze oba problémy řešit stejným způsobem – pouze je třeba pro úsečky udělat jeden krok navíc.

Na obrázku 87 (kde plná čára značí úsečku a přerušovaná přímku, která prochází krajními body úsečky) si všimněme zajímavého jevu: v první případě se úsečky protínají, ve druhém a třetím ne. Pokud se pozorně podíváme, můžeme si všimnout, že:

1. V prvním případě body C a D leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce AB, stejně tak ale A a B leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce CD

2. Ve druhém případě C a D leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce AB, ale body A i B leží vzhledem k přímce CD ve stejné polorovině.

3. Ve třetím případě naopak A a B leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce CD, ale C a D leží ve stejné polorovině vzhledem k AB.

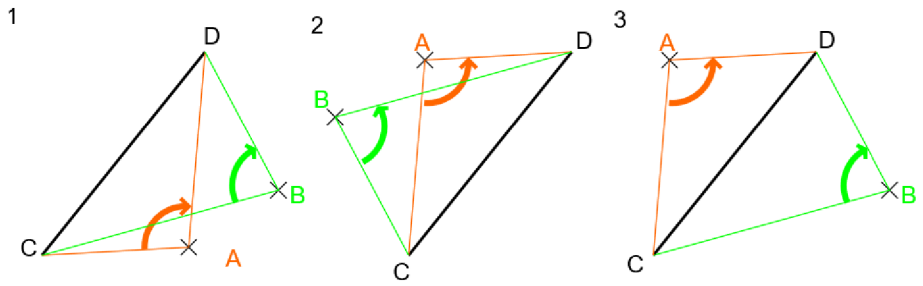


Obrázek 87: Případy vzájemné polohy koncových bodů úseček, vlastní tvorba

Z tohoto pozorování můžeme vyvodit podstatu základu algoritmu pro hledání průsečíku úseček – aby existoval průsečík úseček, musí pro obě úsečky platit, že krajní body jedné

úsečky leží vzhledem k přímce procházející body druhé úsečky v navzájem různých polorovinách. Ve chvíli, kdy víme, že průsečík existuje, můžeme už postupovat jako při hledání průsečíku přímek. Jak ale vyhodnotit bez rýsování, zda body skutečně leží v opačných polorovinách?

Mějme úsečku CD a body A, B, pro které chceme rozhodnout, zda leží ve stejné, nebo opačné polorovině vzhledem k přímce CD. V prvním případě na obrázku 88 leží A a B ve stejné polorovině. Smysl otáčení, který musí vykonat polopřímka AC, aby měla stejný směr jako polopřímka AD, je stejný, jako smysl otáčení polopřímky BC na BD – v obou případech dochází k otočení ve směru hodinových ručiček. Stejně tak ve druhém případě body A, B leží v jedné polorovině a smysl otáčení AC na AD (resp. BC na BD) je shodný – tentokrát proti směru hodinových ručiček.



Obrázek 88: Určení polohy bodů pomocí rotace, vlastní tvorba

Naopak ve třetím případě je smysl otáčení u obou bodů různý – při otočení AC na AD dochází k otočení proti směru hodinových ručiček, zatímco v případě otočení BC na BD dochází k otočení po směru hodinových ručiček. Body A, B tak leží v opačných polorovinách vzhledem k CD právě tehdy, když otočení polopřímky AC do stejného směru, jako má AD, má opačný smysl, než má otočení polopřímky BC do stejného směru, jako má orientovaná úsečka BD. Veškerá otáčení je třeba brát v úvahu se středem otáčení v bodě A (pro AC a AD), respektive B (pro BC a BD).

K analytickému určování se využije vektorový součin. Výsledkem vektorového součinu vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ neležících na jedné přímce je vektor $\boldsymbol{w}$, který má mimo jiné následující vlastnosti:

1. Vektor $\boldsymbol{w}$ je kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (a tedy i k rovině, ve které $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ leží)

2. Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ (v tomto pořadí) tvoří pravotočivou bázi

Mějme tedy vektory $\boldsymbol{AC} = C - A, \boldsymbol{AD} = D - A, \boldsymbol{BC} = C - B$ a $\boldsymbol{BD} = D - B$. Z nich vytvoříme vektorovým součinem vektory $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ a $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BC}$. Vektorový součin není možné spočítat pro dvojdimenzionální vektory – proto vektorům $\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{AD}, \boldsymbol{BC}$ a $\boldsymbol{BD}$ přidáme třetí, nulovou složku. V třírozměrné kartézské soustavě $Oxyz$ budou tedy ležet v rovině Oxy. Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ pak budou směřovat kolmo na tuto rovinu. V případě, že A a B leží ve stejné polorovině, budou tyto vektory mít stejný směr, a to takový, aby vytvořily pravotočivou bázi. Naopak v případě, že A, B leží v opačných polorovinách, budou vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ směřovat do opačných poloprostorů.

V první případě na obrázku 88 by vektory $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ směřovaly směrem do nákresy (směrem od nás), ve druhém případě naopak směrem z nákresny (k nám). Tento směr lze určit pomocí pravidla pravé ruky – pokud chceme například určit směr vektoru $\boldsymbol{p}$, stočíme prsty pravé ruky směrem od vektoru AC k vektoru AD. Vztyčený palec pravé ruky pak ukazuje směr, kterým směřuje vektor $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$.

Ve třetím případě na obrázku 88 vektor $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ směřuje podle pravidla pravé ruky směrem k nám, a vektor $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD}$ naopak směrem od nás. Stačí tedy určit vektorové součiny popsaných vektorů a následně se kouknout na jejich orientaci.

Obecně pro vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí, že $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. Vzhledem k tomu, že všechny naše vektory jsou původně dvojrozměrné a my jim pouze dodáme nulovou třetí složku, bude v tomto případě platit, že $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0) = (u_2 \cdot 0 - 0 \cdot v_2, 0 \cdot v_1 - u_1 \cdot 0, u_1v_2 - u_2v_1) = (0, 0, u_1v_2 - u_2v_1)$. Tím pádem se stačí pouze dívat na znaménko výrazu $u_1v_2 - u_2v_1$. Pokud pro oba vektory $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ a $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD}$ bude znaménko třetí složky vektoru stejné, znamená to, že A, B leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce CD. Pokud se znaménka liší, leží A, B v opačných polorovinách vzhledem k CD.

První část postupu při hledání průsečíku úseček je tedy zřejmá - pro koncové body úsečky AB musíme rozhodnout podle výše popsaného postupu, zda leží v rozdílných polorovinách vzhledem k úsečce CD (respektive přímce procházející krajní body úsečky), a stejně tak zda leží krajní body úsečky CD v opačných polorovinách vůči přímce AB. Pokud alespoň jedna dvojice koncových bodů neleží v opačných polorovinách vzhledem k druhé úsečce, potom průsečík neexistuje a nemá smysl ho hledat. Ukažme si nyní způsob výpočtu.

Příklad 1

V souřadné soustavě Oxy jsou dány úsečky AB, CD a EF, kde $A = [1; 1], B = [3; 5], C = [6; 2], D = [-2; 4], E = [0; 2], F = [1; 5]$. Zjistěte, zda existují průsečíky a) úseček AB a CD b) úseček AB a EF.

a) Nejprve ověříme, zda A, B leží v opačných polorovinách vůči přímce CD. Sestavme vektory $\boldsymbol{AC} = C - A = (5; 1), \boldsymbol{AD} = D - A = (-3; 3), \boldsymbol{BC} = C - B = (3; -3)$ a $\boldsymbol{BD} = D - B = (-5; -1)$. Nyní přidejme každému vektoru třetí, nulovou složku, čímž získáme $\boldsymbol{AC} = C - A = (5; 1; 0), \boldsymbol{AD} = D - A = (-3; 3; 0), \boldsymbol{BC} = C - B = (3; -3; 0)$ a $\boldsymbol{BD} = D - B = (-5; -1; 0)$.

Dále vypočteme vektorové součiny $\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}$ a $\boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD}$:

$$\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD} = (5; 1; 0) \times (-3; 3; 0) = (0; 0; 18)$$

$$\boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BD} = (3; -3; 0) \times (-5; -1; 0) = (0; 0; -18)$$

Vektory $AC \times AD$ a $BC \times BD$ mají tedy opačný směr (třetí složky vektorů mají opačná znaménka). Z toho plyne, že body A a B leží v opačných polorovinách vzhledem k CD. Nyní musíme ověřit, že také body C a D leží v opačných polorovinách vzhledem k AB.

Postup je totožný - sestavíme vektory $\boldsymbol{CA} = A - C = (-5; -1), \boldsymbol{CB} = B - C = (-3; 3), \boldsymbol{DA} = A - D = (3; -3)$ a $\boldsymbol{DB} = B - D = (5; 1)$. Přidáme všem vektorům třetí složku a znovu spočítáme vektorové součiny $\boldsymbol{CA} \times \boldsymbol{CB}$ a $\boldsymbol{DA} \times \boldsymbol{DB}$

$$\boldsymbol{CA} \times \boldsymbol{CB} = (-5; -1; 0) \times (-3; 3; 0) = (0; 0; -18)$$
$$\boldsymbol{DA} \times \boldsymbol{DB} = (3; -3; 0) \times (5; 1; 0) = (0; 0; 18)$$

Vektory $\boldsymbol{CA} \times \boldsymbol{CB}$ a $\boldsymbol{DA} \times \boldsymbol{DB}$ mají také opačný směr (třetí složky vektorů mají opačná znaménka). Z toho plyne, že i body C a D leží v opačných polorovinách vzhledem k AB. Tím pádem víme, že existuje průsečík úseček AB a CD.

b) Jako první zjistíme, zda E a F leží v opačných polorovinách vzhledem k přímce AB. Vytvoříme vektory $EA = A - E = (1; -1), EB = B - E = (3; 3), FA = A - F = (0; -4)$ a $FB = B - F = (2; 0)$. Přidáme všem vektorům nulovou třetí složku a znovu spočítáme

potřebné vektorové součiny:

$$EA \times EB = (1; -1; 0) \times (3; 3; 0) = (0; 0; 6)$$

$$FA \times FB = (0; -4; 0) \times (2; 0; 0) = (0; 0; 8)$$

Znaménka třetí složky vektorových součinů jsou stejná, E i F tedy leží ve stejné polorovině vůči AB. Můžeme tedy rovnou bez dalšího počítání říct, že průsečík úseček AB a EF neexistuje.

Pokud je podmínka polohy koncových bodů v opačných polorovinách splněna, pak průsečík úseček určitě existuje, a lze ho hledat stejně, jako bychom hledali průsečík dvou přímek. GIS programy hledají polohu průsečíku ze směrnicového tvaru přímek (tedy $y = kx + q$) - ta je sice dobrá pro počítačový výpočet, pro naše účely ale bude snazší najít průsečík pomocí parametrického vyjádření přímek. Obecné řešení tohoto problému je komplikované a nepřináší jasný vhled do problematiky, proto si postup budeme ilustrovat raději na konkrétním příkladu.

Příklad 2

V souřadné soustavě Oxy jsou dány úsečky AB a CD (shodné s příkladem 1), kde $A = [1; 1], B = [3; 5], C = [6; 2], D = [-2; 4]$. Najděte jejich průsečík.

V předchozím příkladě jsme si ukázali, že průsečík těchto úseček musí existovat. Nyní tedy přejdeme od problému hledání průsečíku úseček k hledání průsečíku přímek. Zapíšeme přímky parametricky, tj. ve tvaru $X = P + tu, t \in R$, kde P je libovolný bod ležící na přímce a u je směrový vektor přímky, zjištěný z libovolných dvou bodů Q, R ležících na přímce jako $u = Q - R$. Pro náš konkrétní případ je přímka AB dána například jako $X = A + (B - A)s$, tedy:

$$x = 1 + 2s$$

$$y = 1 + 4s; s \in R$$

A přímka CD je dána jako $X = C + (D - C)t$, tedy jako:

$$x = 6 - 8t$$
$$y = 2 + 2t; t \in R$$

Chceme zjistit, který bod $X = [x; y]$ leží na obou přímkách zároveň, tedy splňuje všechny čtyři rovnice. Levé strany rovnic pro jednotlivé souřadnice jsou pro obě přímky stejné, můžeme tedy dát do rovnosti jejich pravé strany. Získáme:

$$1 + 2s = 6 - 8t$$

$$1 + 4s = 2 + 2t$$

A vyřešíme soustavu. Vynásobíme strany druhé rovnice 4:

$$1 + 2s = 6 - 8t$$
$$4 + 16s = 8 + 8t$$

Obě rovnice sečteme (t se odečtou):

$$5 + 18s = 14$$
$$18s = 9$$
$$s = \frac{1}{2}$$

Dosazením $s = \frac{1}{2}$ do rovnice $1+2s = 6-8t$ získáme $1+1 = 6-8t$, z čehož plyne $t = \frac{1}{2}$. My ale chceme souřadnice průsečíku, proto do libovolného parametrického vyjádření přímky (například přímky CD) dosadíme získané hodnoty parametru (tedy $t = \frac{1}{2}$):

$$x = 6 - 8 \cdot \tfrac{1}{2} = 2$$

$$y = 2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 3$$

Průsečík úseček AB a CD je tedy bod $X = [2; 3]$

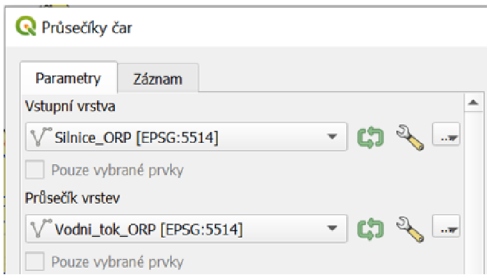
6.1 Jak na to v QGIS

Pro nalezení všech průsečíků dvou liniových vrstev v QGIS lze postupovat následovně:

1. Načteme do projektu obě liniové vrstvy (například vrstvy *VodniTok* a *SilniceDalnice* z databáze ZABAGED)

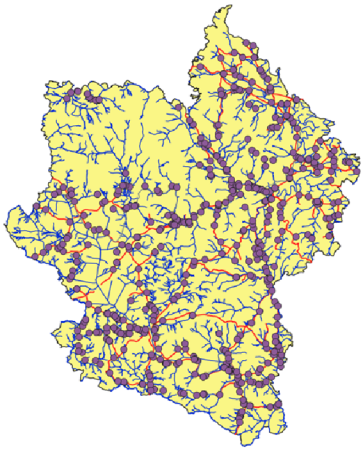
2. V panelu *Nástroje zpracování* najdeme v sekci *Vektorový překryv* funkci *Průsečíky čar*. Snadnější ale je zadat *Průsečíky čar* rovnou do vyhledávacího okénka.

3. V dialogovém okně v kolonce *Vstupní vrstva* vybereme jednu z načtených vrstev a do *Průsečík vrstev* druhou. Pořadí v tomto případě nemá vliv, pouze odlišuje obě vrstvy pro následné volby atributů v atributové tabulce – těmi se ale zabývat nemusíme.



Obrázek 89: Funkce průsečíky čar, QGIS

4. Kliknutím na OK QGIS vypočítá všechny průsečíky obou liniových vrstev, a vytvoří bodovou vrstvu všech průsečíků. Pozor na to, že výsledná vrstva se uloží pouze jako pracovní – pokud nechceme, aby s uzavřením projektu zanikla, musíme si ji uložit.



Obrázek 90: Průsečíky vodních toků a silnic v SO ORP Český Krumlov, ZABAGED 4.1

6.2 Příklady

6.1 Mějme dány úsečky AB, CD a EF, kde $A = [2; 2], B = [5; 0], C = [2; 0], D = [4; 3], E = [-1; 3], F = [4; 2]$. Najdi jejich vzájemné průsečíky a)úseček AB a CD, b)úseček AB a EF, c)úseček CD a EF, nebo odůvodni jejich neexistenci.

6.2 Mějme dány lomené čáry ABC a DEF, kde $A = [5; -2], B = [4; 2], C = [9; 4], D = [9; 0], E = [5; 4], F = [3; 2]$. Najdi průsečíky těchto lomených čar, nebo odůvodni, proč žádné průsečíky neexistují (je nutné ověřit pro každé dvě úsečky patřící k jiné lomené čáře, zda se protínají, či nikoliv).

6.3 Ve vhodně zvolené pravoúhlé souřadné soustavě je průběh do budoucna plánované silnice zaznamenán třemi body jako LINESTRING (2 -4, -1 1, 0 4). Ve stejné souřadné soustavě byl už dříve zaznamenán průběh potoka jako LINESTRING (-5 -2, 1 0, -2 3). Urči polohu mostu/mostů (tj. průsečíku mezi linií silnice a potoka) v souřadnicové soustavě.

Úlohy řešené v QGIS

6.4 Nalezni pomocí QGIS ve svém ORP všechny průsečíky silniční sítě a vodních toků. Ořízni liniové vrstvy *SilniceDalnice* a *VodniTok* z databáze ZABAGED na území tvého SO ORP a pomocí funkce *Průsečíky čar* nalezni všechny průsečíky obou liniových vrstev. Následně porovnej s vhodnou podkladovou mapou a zjisti, jakým způsobem jsou jednotlivé průsečíky řešeny – tedy zda je v daném místě most, nebo je vodní tok veden podzemím atd. Pravděpodobně ti vyjde velké množství bodů, soustřeď se proto pouze na několik vybraných. Věděl/a jsi o všech vybraných bodech, že se zde silnice kříží s vodním tokem, nebo tě některé místo překvapilo?

6.5 Nalezni pomocí QGIS ve svém SO ORP všechny průsečíky silniční a železniční sítě. Ořízni liniové vrstvy *SilniceDalnice* a *ZeleznicniTrat* ze ZABAGED na území tvého SO ORP a nalezni průsečíky obou liniových vrstev. Pomocí vhodné podkladové mapy zodpověz následující otázky: Jakým způsobem jsou průsečíky řešeny? Je zde nadjezd, podjezd nebo přejezd? Která varianta je nejčastější?

6.6 Najdi na internetu 5 nejvytíženějších letišť s osobní přepravou v ČR. Vytvoř liniovou vrstvu, která bude představovat trasy letů z jednotlivých letišť do všech zbylých (tzn.

propoj linií každé z pěti letišť s každým). Najdi místa, kde by mohlo docházet k možným kolizím, a bylo by proto nutné dbát zvýšené opatrnosti kontroly letového provozu. Kolik existuje celkem vzájemných spojení pro 5 letišť (kolik různých dvojic lze vytvořit)?

7 Množiny

Potřebné vstupní znalosti: operace s množinami

Jestliže umíme rozhodnout o tom, zda nějaký bod leží uvnitř polygonu, a jestli se dvě úsečky vzájemně protínají, máme k dispozici vše potřebné k tomu, abychom mohli rozhodovat, jaký je prostorový vztah dvou různých vrstev. V GIS mluvíme o překryvných funkcích, ale v této kapitole se nebudeme zaměřovat na to, jak přesně QGIS vypočítává překryvy jednotlivých vrstev, protože takové algoritmy jsou početně i časově pro ruční počítání příliš náročné. Stačí nám konstatování, že k tomu využívají funkce na principu dvou předchozích kapitol, tedy point in polygon algoritmus a algoritmus pro určování průsečíku úseček. Místo toho se podíváme na překryvné funkce pomocí jiného matematického aparátu – pomocí teorie množin.

Připomeňme si základní operace pro dvě množiny A a B:

Průnik množin A a B ($A \cap B$) je množina všech prvků, které patří zároveň do A a zároveň do B.

Sjednocení množin A a B ($A \cup B$) je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A a B.

Rozdíl množin $A \backslash B$ je množina všech prvků, které patří do A a zároveň nepatří do B. Podobně rozdíl množin $B \backslash A$ je množina všech prvků, které patří do B a zároveň nepatří do A.

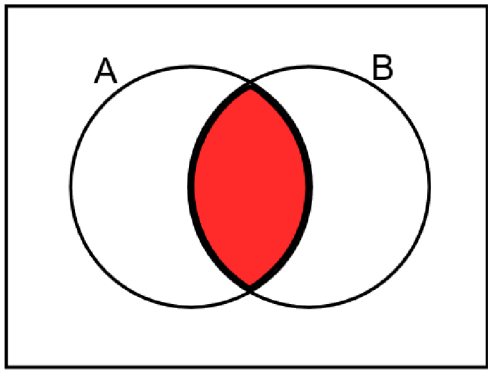
Symetrický rozdíl množin A a B ($A \triangle B$) je množina všech prvků, které náleží pouze do množiny A nebo do množiny B, ale zároveň nenáleží jejich průniku.

Nechť A je podmnožina B. Potom doplněk množiny A v množině B (značeno jako A'_B) je množina všech prvků, které náleží do B a zároveň nenáleží do A.

7.1 Jak to souvisí s QGIS?

Každou vektorovou vrstvu v QGIS si lze představit jako nějakou množinu – množinu bodů, množinu linií, množinu území (polygonů). Jednotlivé překryvné funkce pak nejsou ničím jiným než analogií k operacím s množinami.

Průnik

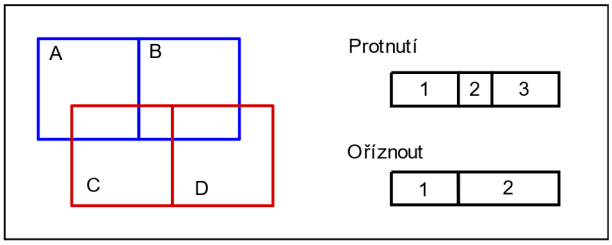


Obrázek 91: Průnik dvou množin, vlastní tvorba

K průniku existují dvě analogické operace v QGIS – *Oříznout (Clip)* a *Protnutí (Intersect)*. Obě funkce mají význam průniku, takže ve výsledné vrstvě zachovají pouze ty části vrstev, které se protínají (leží na sobě), ale liší se v určitých detailech. Obě nicméně využívají dvou vrstev – vstupní vrstvy (ta může být libovolného typu – bod, linie nebo polygon) a překryvné vrstvy (ta musí být pouze polygonová). Rozdíl mezi funkcemi je pak ten, že *Oříznout* zachovává v atributové tabulce pouze vlastnosti vstupní vrstvy – pokud tedy například ořezáváme vrstvu chráněných území vrstvou tvořenou Moravskoslezským krajem, potom atributová tabulka zachová všechny informace o chráněném území (název, kategorie..., ale POZOR, zachovává i informaci o plochách a délkách původního polygonu, i když ten se mohl v důsledku ořezu zmenšit), ale nepřiřadí žádné informace z vrstvy překryvné.

Naopak funkce *Protnutí* přiřadí v atributové tabulce jednotlivým polygonům informace jak ze vstupní, tak z překryvné vrstvy. Důležité také je, že pokud budeme mít vrstvy tak, jako na obrázku 92, kde modré čtverce představují vstupní vrstvu a červené překryvnou, potom funkce *Protnutí* rozdělí vrstvu na tři výsledné polygony (obecně pokud někde vznikne spojením hranic vstupní a překryvné vrstvy uzavřená část roviny, *Protnutí* ji

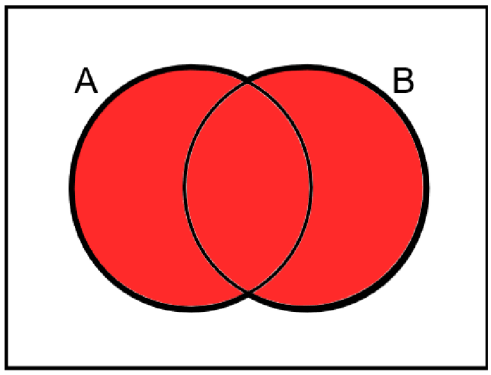
vyhodnotí jako samostatný polygon). Naopak *Oříznout* vytvoří jako výslednou vrstvu dva polygony, rozdělené pouze dle hranic vstupní vrstvy – ovšem vlivem buďto špatné topologie vstupních vrstev, nebo vnitřní chybou programu má QGIS snahu vytvářet hranice i dle hranic překryvné vrstvy, které se projeví jako různé nechtěné přerušované čáry v polygonu. Obecně je proto lepší, když při práci s funkcí *Oříznout* je překryvnou vrstvou pouze jeden polygon, případně polygony, které spolu vzájemně nesousedí. Tím se vyhneme zbytečným chybám.



Obrázek 92: Rozdíl mezi funkcemi Protnutí a Oříznout, vlastní tvorba

V případě bodů nebo linií jako vstupních vrstev je QGIS pouze ořeže dle překryvné vrstvy, a u funkce *Protnutí* jim navíc přidá atributy překryvné vrstvy.

Sjednocení

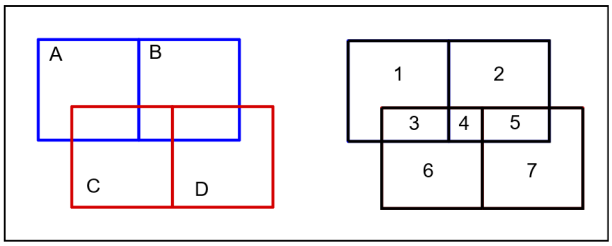


Obrázek 93: Sjednocení dvou množin, vlastní tvorba

Funkce analogická k množinové operaci sjednocení je celkem logicky nazvána *Sjednotit*. *Sjednotit* může mít jak ve vstupní, tak i v překryvné vrstvě libovolný typ geometrie, ale je nutné, aby vrstvy byly stejného typu (tedy sjednocovat pouze bodovou vrstvu s bodovou vrstvou atd.). Pokud se pokusíme udělat sjednocení liniové a polygonové vrstvy (což nedává příliš smysl ani z praktického pohledu), QGIS nás sice nechá vyplnit dialogové okno, ale následně dojde k chybě při tvorbě této nové vrstvy. Pro sjednocení bodových nebo liniových vrstev QGIS vytvoří novou vrstvu, které bude obsahovat všechny body

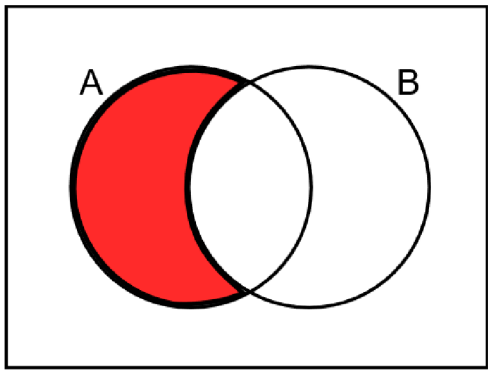
nebo linie z vrstev vstupních, a zachová jim v atributové tabulce pouze jejich vstupní hodnoty (respektive přiřadí NULL hodnotu pro všechna pole, která daný prvek neměl ve vstupní vrstvě).

Pro polygonové vrstvy pak vytvoří vrstvu, které obsahuje všechny plochy patřící alespoň do jedné z vrstev. Přitom navíc vytvoří samostatné polygony tam, kde se vrstvy překrývají (v obrázku 94 polygony 3, 4 a 5), a samostatné polygony pro nepřekrývající se vrstvy (v obrázku 94 polygony 1, 2, 6, 7). Nepřekrývajícím se polygonům přiřadí do atributové tabulky vlastnosti pouze jejich vrstvy (pole z druhé vstupní vrstvy budou mít hodnotu NULL), zatímco překrývajícím se polygonům přiřadí v atributové tabulce informace z obou vrstev.



Obrázek 94: Dělení polygonu ve výsledné vrstvě funkce Sjednotit, vlastní tvorba

Rozdíl

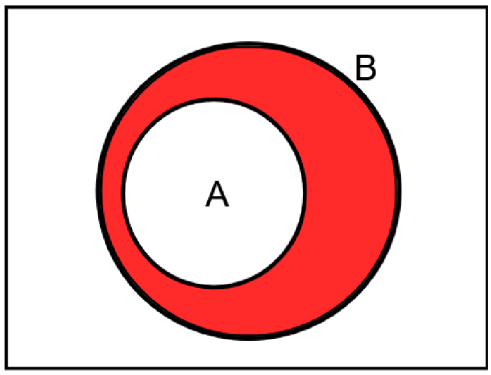


Obrázek 95: Rozdíl dvou množin, vlastní tvorba

Rozdíl množin má ve svých překryvných funkcích svoji analogii znovu logicky nazvanou *Rozdíl*. Ačkoliv pro *Rozdíl* QGIS umožňuje jako vstupní a překryvnou vrstvu zadat jakýkoliv typ geometrie, v praxi funguje pouze pro polygonové vrstvy. Jeho výsledkem je pak vrstva všech polygonů, které náleží do vstupní vrstvy a nejsou překryty překryvnou vrstvou. Samozřejmě, pokud je polygon vstupní vrstvy pouze částečně překryt polygonem překryvné vrstvy, je výsledný polygon oříznutý o překrývající se část. V atributové

tabulce pak obsahuje pouze data ze vstupní vrstvy.

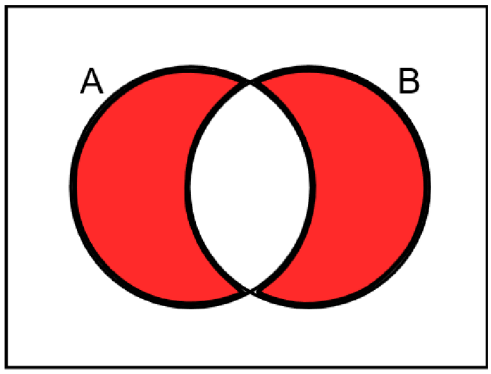
Doplněk



Obrázek 96: Doplněk množiny A v množině B, vlastní tvorba

Množinová operace doplněk nemá v QGIS svůj přímý protějšek. V konečném důsledku je ale doplněk pouze variantou operace rozdíl množin s tím, že odečítaná množina musí být podmnožinou množiny základní. Pokud tedy máme v QGIS dvě polygonové vrstvy, z nichž jedna (vrstva A) leží zcela uvnitř vrstvy druhé (B), potom doplněk vrstvy A ve vrstvě B není nic jiného než $B \backslash A$.

Symetrický rozdíl

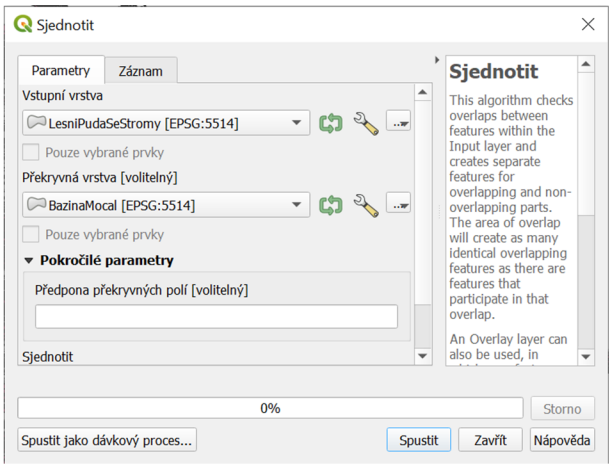


Obrázek 97: Symetrický rozdíl dvou množin, vlastní tvorba

Operace symetrický rozdíl má svůj protějšek v QGIS – funkci *Symetrický rozdíl*. Ta pro dvě polygonové vrstvy (ostatní typy geometrie nemají smysl) vytvoří novou vrstvu, která obsahuje všechna území, které leží v jedné nebo druhé vrstvě, ale nikoliv v obou vrstvách zároveň.

7.2 Jak na to v QGIS?

Všechny potřebné funkce nalezneme v panelu po pravé straně – okno *Nástroje zpracování*. Tady v sekci *Vektorový překryv* najdeme všechny výše uvedené funkce. Po rozkliknutí příslušné funkce (například *Sjednocení*) se zobrazí dialogové okno. Zde potřebujeme pouze vyplnit vstupní a překryvnou vrstvu, které je potřeba mít načtené v projektu. Je třeba dávat pozor na pořadí, tedy která vrstva je vstupní a která překryvná, protože špatné pořadí by zejména u funkcí *Oříznout* a *Rozdíl* vytvořilo obrácený výsledek, než potřebujeme. Vstupní je v těchto případech ta, jejíž části chceš zachovat, překryvná naopak ta, jejíž části chceš odstranit (nebo v případě funkce Oříznou jejíž atributy nechceš zachovat). Naopak u funkcí *Protnutí, Sjednocení* nebo *Symetrický rozdíl* z principu na pořadí příliš nezáleží. Po kliknutí na OK se vypočte výstupní vrstva, která se zobrazí mezi otevřenými vrstvami.



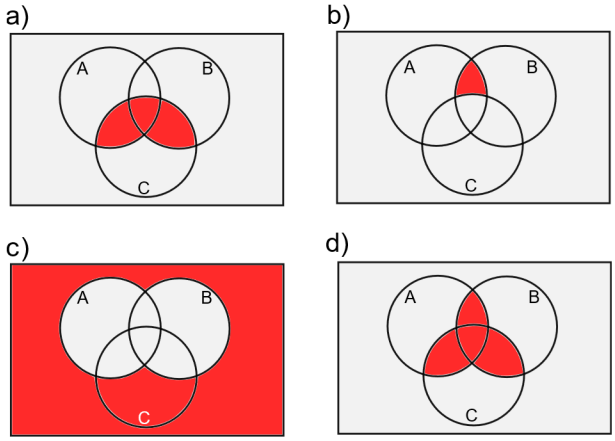
Obrázek 98: Dialogové okno funkce Sjednotit, QGIS

Pozor na to, že se výsledná vrstva automaticky tvoří jako dočasná pracovní vrstva – pokud ji neuložíme, tak se po uzavření projektu smaže. To můžeme změnit rovnou v dialogovém okně funkce – v kolonce, ve které je napsáno [*Vytvořit dočasnou pracovní vrstvu*], můžeme tlačítkem se symbolem tří teček vybrat možnost *Uložit do souboru...* a v průzkumníku souborů vybrat umístění souboru a název. Případně ji lze samozřejmě dodatečně uložit kliknutím na symbol dočasné vrstvy v panelu otevřených vrstev.

Je také dobré zmínit, že u vstupní i překryvné vrstvy lze v operacích uplatňovat také překryv pouze mezi vybranými prvky - lze například z jedné vrstvy vybrat pouze určitou množinu, a pak zaškrtnuím *Pouze vybrané prvky* provést překryvnou funkci.

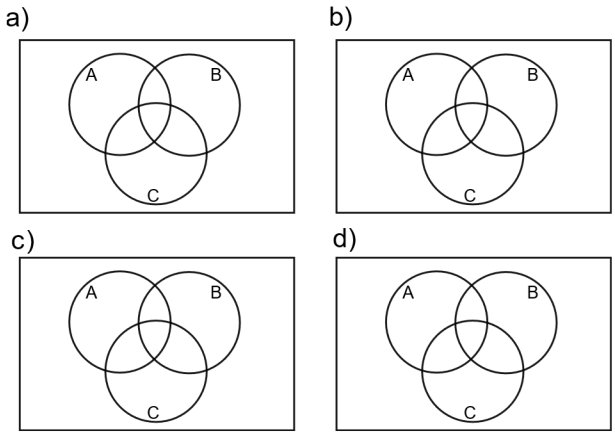
7.3 Příklady

7.1 Pro následující Vennovy diagramy znázorňující množiny A,B,C se pokus vybarvenou oblast zapsat co nejjednodušším způsobem pomocí množinových operací průnik, sjednocení, doplněk, rozdíl a symetrický rozdíl.



Obrázek 99: K úloze 7.1

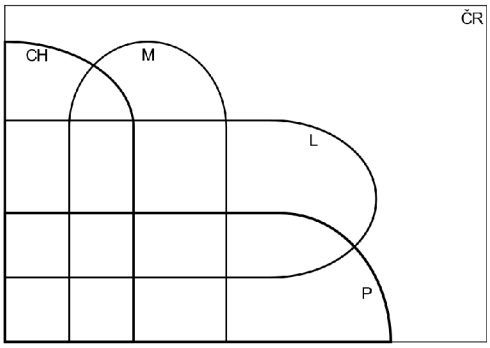
7.2 Zakresli do připravených Vennových diagramů následující množiny (doplněk množiny uvažuj vůči základní množině): a) $(A \cap B) \cup C$; b)$(A \triangle B) \cap C$; c)$B' \backslash A$; d) $(B \backslash A) \cup C$



Obrázek 100: K úloze 7.2

7.3 V připravených Vennových diagramech vybarvi všechny oblasti, které odpovídají zadané množině. Následně pomocí množinových operací co nejjednodušeji zapiš výslednou množinu. Zamysli se nad tím, zda všechny oblasti ve Vennových diagramech opravdu existují (zda například některé množiny nejsou ve skutečnosti podmnožinami ostatních množin).

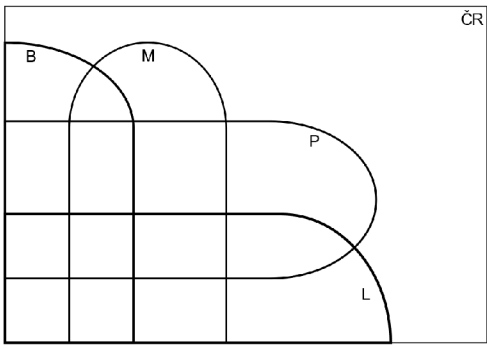
a)Na krajském úřadě v Ústeckém kraji chtějí vyhodnotit, která území jsou v okresech Chomutov a Most méně než 1 km od místa povrchové těžby. V SO ORP Litvínov už analýza provedena byla, tato území tedy do výzkumu nemají být zahrnuta.
CH = množina všech území v okrese Chomutov, M = množina všech území v okrese Most, L = množina všech území v SO ORP Litvínov, P = množina všech území do 1 km od povrchové těžby



Obrázek 101: K úloze 7.3, a)

b) Dále na krajském úřadě v Ústí nad Labem chtějí vyhodnotit, která území zastavěná budovami jsou na území okresu Most do 1 km od místa povrchové těžby. V SO ORP Litvínov byla analýza také provedena již dříve, zajímají nás tedy pouze území v okrese Most mimo SO ORP Litvínov.

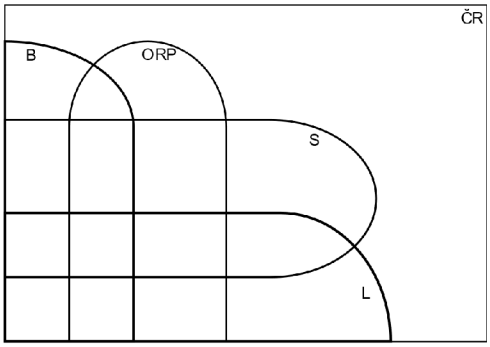
B = množina všech území zastavěná budovami, M = množina všech území v okrese Most, P = množina všech území v ČR do 1 km od místa povrchové těžby, L = množina všech území v SO ORP Litvínov, základní množina = množina všech území v ČR



Obrázek 102: K úloze 7.3, b)

c) ŘSD chce množinu všech silnic ve tvém SO ORP, které leží do 50 metrů od lesní půdy (a hrozí zde vyšší pravděpodobnost srážky se zvěří). Zároveň je ale nezajímají území do 200 metrů od území zastavěného budovami.

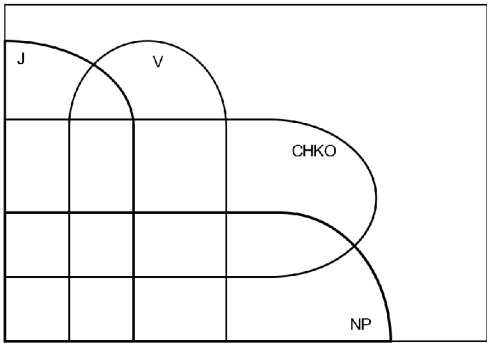
ORP = množina všech území ve tvém SO ORP, L = množina všech území v ČR vzdálených 50 metrů nebo méně od lesa, B = množina všech území v ČR do 200 metrů od území zastavěného budovami, S = všechna území v ČR zastavěná silnicemi, Základní množina = množina všech území v ČR



Obrázek 103: K úloze 7.3, c)

d) Všechna území, nacházející se v Jihočeském kraji, ve vzdálenosti 100 metrů od vodního toku a zároveň na území CHKO nebo NP.

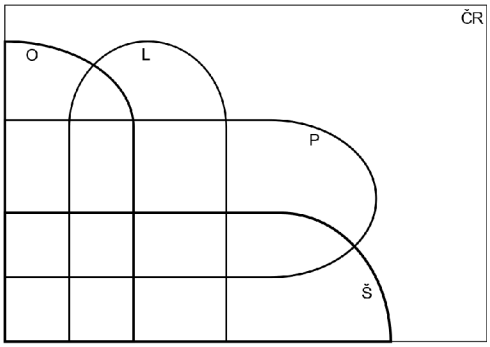
J = množina všech území v Jihočeském kraji, V = množina všech území, ve vzdálenosti 1 km od vodního toku v ČR CHKO = množina všech území CHKO, NP = množina všech území, v NP, základní množina = množina všech území v ČR



Obrázek 104: K úloze 7.3, d)

e) Všechny obce do 5000 obyvatel na území Libereckého kraje, které mají poštu, ale nemají školu

O = množina všech obcí do 5000 obyvatel v ČR, L = množina všech obcí v Libereckém kraji, P = množina všech obcí, které mají poštu, Š = množina všech obcí, které mají školu, základní množina = množina všech obcí v ČR



Obrázek 105: K úloze 7.3, e)

7.4 Zaměstnanci ministerstva zemědělství se přou v následující věci: bylo zjištěno, že do 15 km od Brna se nachází 98 sil na uskladnění zemědělských produktů. Zároveň zjistili, že do 15 km od Blanska se nachází 29 sil. 5 sil se pak nachází do 15 km od Blanska a zároveň do 15 km od Brna. Zaměstnanec A tvrdí, že do 15 km alespoň od jednoho z měst

se nachází celkem 127 sil. Zaměstnanec B tvrdí, že je to nesmysl, a že sil je celkem 117. Má některý z nich pravdu? Pokud ne, kde udělali chybu ve svých úvahách a jaký je správný výsledek?

Úlohy řešené v QGIS

7.5 Za pomoci funkce *Obalová zóna*, výše popsaných operací, atributové tabulky a funkce *Základní statistky pro pole* urči následující:

a) Jaká plocha lesa se nachází do 25 km od tvého krajského města včetně území katastru města. Ber v potaz celý katastr z polygonové vrstvy z *Obec_SLDB*.

b) Jaká plocha lesa se nachází do 25 km od katastru tvého krajské města, tentokrát ovšem bez území katastru.

c) Jaká je velikost plochy území ve tvém SO ORP, která jsou více než 1 km od vodního toku?

d) Jaká je plocha území ve tvém kraji, která se nachází do 40 km od jednoho ze dvou nejlidnatějších měst, ale ne zároveň do 40 km od obou dvou.

7.5 Pomocí vrstev z databáze ZABAGED se pokus vytvořit všechny zadané množiny z úlohy 3. Využij funkce vektorové analýzy *Oříznout, Protnutí, Sjednotit, Rozdíl, Symetrický rozdíl*. Potřebovat budeš také *Obalovou zónu*. Využít můžeš také funkce *Vybrat podle umístění* (ta je pro některé úlohy vhodnější).

7.6 Pomocí QGIS a vrstev ze ZABAGED (bodová vrstva *Silo_b*) a ArcČR (polygonová vrstva *Obce_SLDB*) vyřeš úlohu 4. Vytvoř 15 km buffer kolem Brna a Blanska, sjednoť do jedné vrstvy a pomocí funkce *Oříznout* ořízni vrstvu *Silo_b*. Z atributové tabulky následně zjisti počet sil.

8 Funkce síťové analýzy

Potřebné vstupní znalosti: základní početní dovednosti

Určitě jste si někdy plánovali cestu – ať už autem, na kole nebo pěšky. A určitě jste někdy potřebovali najít tu nejkratší nebo nejrychlejší cestu mezi vaším startovním a cílovým bodem, k čemuž jste nejspíš využili funkce v navigaci nebo internetovém mapovém prohlížeči. Jak ale vyhledávání nejkratší cesty funguje? Na to se podíváme v následující kapitole, kde využijeme jednu zajímavou kapitolu matematiky – teorii grafu.

8.1 Klíčové pojmy z teorie grafu

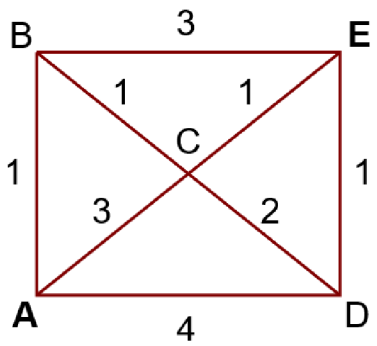
Pro hledání nejkratší cesty mezi dvěma body si potřebujeme definovat alespoň základní pojmy z teorie grafu:

Grafem rozumíme v teorii grafu dvojici (V, E), kde V představuje neprázdnou množinu vrcholů a E množinu hran, kde hrany představují propojení mezi dvěma vrcholy (a lze je zapisovat pomocí bodů, které spojují). V našem pojetí bude hranu představovat úsek komunikace (silnice, ulice, železnice. . . .) a vrcholy grafu všechna křížení, kde lze přejít z jednoho úseku silnice na jiný – tedy například všechny křižovatky u silnic a ulic, případně výhybky a železniční stanice pro železnice.

Uspořádaná dvojice uzlů, z nichž jeden je počáteční a jeden koncový, se nazývá orientovaná hrana. Naopak neorientovaná hrana nemá pevně stanoveno, který bod je počáteční a který koncový. Orientovanou hranu si lze na příkladu měst a silnic představit jako jednosměrnou silnici, po které se lze dostat z města A do města B, ale opačným směrem jet nelze. Naopak neorientovaná hrana by v našem příkladu byla silnicí obousměrnou. Hranu značíme jejím počátečním a koncovým bodem, tedy jako $h = \{A, B\}$ značí hranu h mezi body A a B.

Pokud je každé hraně z množiny E přiřazena reálná hodnota, pak graf nazýváme hranově ohodnoceným grafem. Reálná hodnota může být představována například délkou daného úseku silnice mezi křižovatkami, ale také časem k překonání daného úseku nebo náklady na cestu na daném úseku - záleží čistě na naší interpretaci a potřebách. Ohodnocení může být kladné i záporné, pro správné fungování Dijkstrova algoritmu pro získání nejkratší

cesty mezi body ale potřebujeme graf, který má kladné ohodnocení hran. Na obrázku 106 je zakreslen příklad neorientovaného grafu s vrcholy A, B, C, D, E s kladně ohodnocenými hranami, které vrcholy propojují.



Obrázek 106: Příklad grafu o pěti vrcholech, vlastní tvorba

Posloupnost vrcholů $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ neorientovaného (respektive orientovaného) grafu, kde $u_0 = a, u_k = b$ a $h_1 = \{a, u_1\}, h_i = \{u_{i-1}, u_i\}$ pro $i = 2, 3, \ldots, k-1, h_k = \{u_{k-1\}, b}$ jsou hrany grafu se nazývá neorientovaný (respektive orientovaný) sled z vrcholu a do vrcholu b. Sled, ve kterém se žádný uzel nevyskytuje dvakrát, se nazývá cesta. Sled je tedy libovolná trasa, kterou projedeme cestou mezi počátečním a koncovým bodem, cesta je pak taková trasa, na které neprojedeme žádnou křižovatku (uzel) více než jednou.

8.2 Dijkstrův algoritmus

Existuje více algoritmů, které umožňují zjistit nejkratší cestu mezi dvěma body v kladně ohodnoceném grafu. QGIS pro účely hledání cesty z jednoho bodu do druhého využívá Dijkstrův algoritmus, který je pro tyto účely časově nejméně náročný. Podívejme se nyní, jak Dijkstrův algoritmus funguje, na obrázku 107.

Na počátku máme neorientovaný, kladně ohodnocený graf – každé hraně je přiřazena kladná reálná hodnota a po každé hraně lze cestovat libovolným směrem. Chceme zjistit vzdálenost mezi vrcholy A a H. Algoritmus funguje následovně:

1. V prvním kroku přiřadí všem vrcholům, které jsou propojeny s bodem A hranou, dočasnou hodnotu podle hodnoty hrany – tedy pro B hodnotu 2, pro D také 2 a pro E hodnotu 3. Všechny ostatní vrcholy jsou v tuto chvíli nedostupné, a mají dočasnou hodnotu nekonečno.

2. V druhém kroku vyhodnotí, který z dostupných vrcholů má minimální dočasnou hodnotu. Pro vrchol, který má v tu chvíli nejnižší dočasnou hodnotu, je tato hodnota vyhodnocena jako potvrzená nejkratší. Pokud je více bodů se stejnou minimální hodnotou, lze si libovolně vybrat, kterou vzdálenost prohlásíme za potvrzenou. V našem příkladě vybereme vrchol B s hodnotou 2.

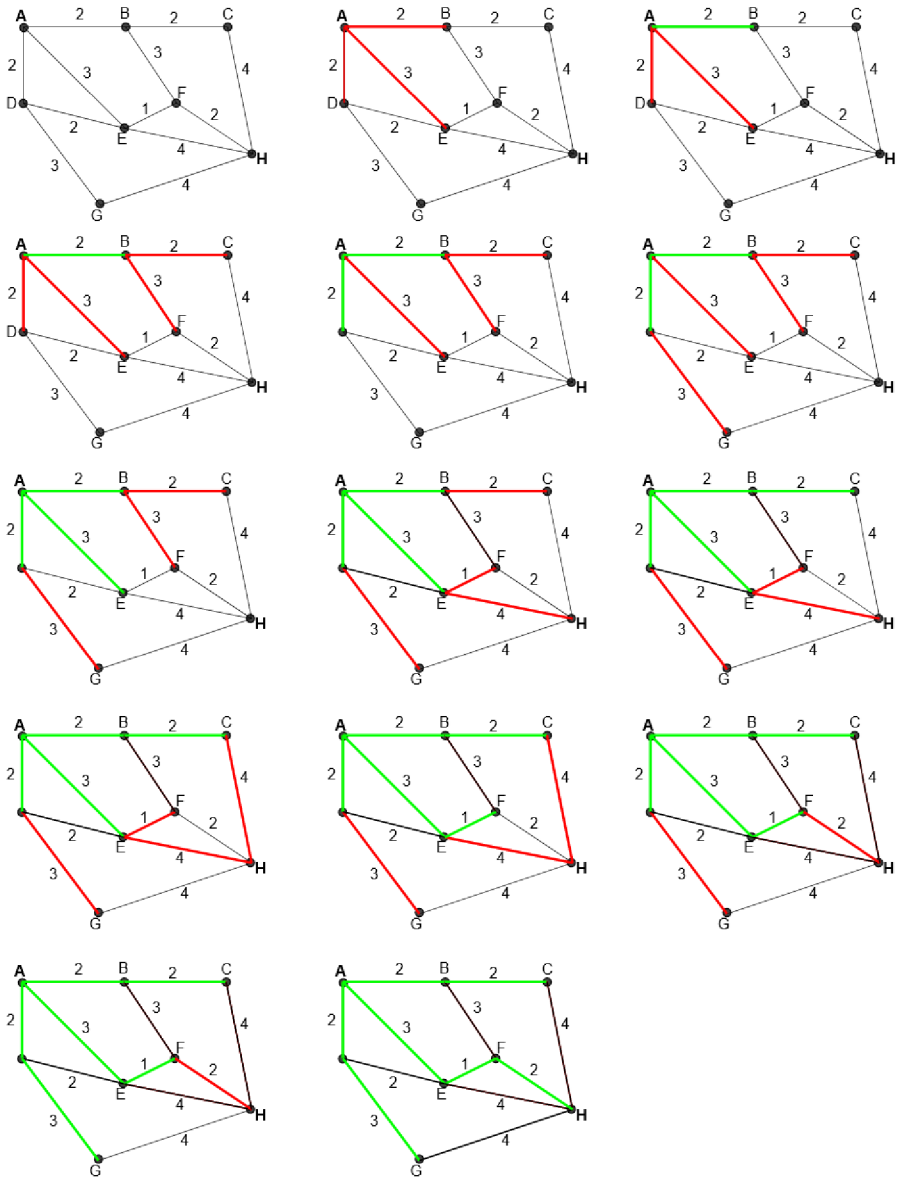
3. V dalším kroku procházíme všechny hrany vrcholu B, které ještě nebyly vyhodnoceny. Pokud existují nově dostupné vrcholy, sečteme hodnotu hrany, které do nich vede, s hodnotou vrcholu, ze kterého vycházíme. Následně tuto hodnotu porovnáme s dočasnými hodnotami, které mají body přiřazenou. V našem případě jsou z B dostupné body C a F. Hodnota hrany BC je 2, tuto hodnotu sečteme s hodnotou pro B, tedy 2, a získáme dočasnou hodnotu pro C = 4. Protože nyní byla hodnota C nekonečná (vrchol nebyl dostupný), stane se 4 novou dočasnou hodnotou pro C. Stejným způsobem pro BF má hodnotu 3, znovu tedy uděláme 3+2 = 5. To je znovu méně než současná nekonečná vzdálenost, dočasná hodnota pro F bude proto nyní 5.

4. Nyní znovu porovnáme, která z dočasných hodnot je nejnižší. Nyní je to hodnota D = 2, kterou prohlásíme za potvrzenou nejkratší cestu. Budeme tedy stejně jako pro B vyhodnocovat vrcholy dostupné z D, sčítat hodnoty hran s hodnotou pro D a porovnávat s dočasnými hodnotami pro dané vrcholy. Pro vrchol G je to v tuto chvíli 2+3 = 5. To je méně než nekonečno, a proto dočasnou hodnotou G bude 5. Naopak pro vrchol E je cesta přes D s hodnotou 2+2 = 4. E má ale v tuto chvíli dočasnou hodnotu 3 – ta tedy zůstane nezměněná.

Stejným způsobem pokračujeme do té doby, kdy si potvrdíme cestu do H jako nejkratší. V tomto grafu není vidět jedna výhodná vlastnost Dijkstrova algoritmu – totiž že není nutné procházet celý graf až do konce – stačí ho procházet pouze do chvíle, kdy algoritmem potvrdíme dočasnou hodnotu cesty do koncového bodu jako skutečně nejkratší. Celý průběh algoritmu je znázorněn na obrázku 107 - zelené hrany představují již potvrzené nejkratší cesty, červené dočasné hodnoty nejkratší cesty. Postup je třeba číst po řádcích.

8.3 Servisní oblast

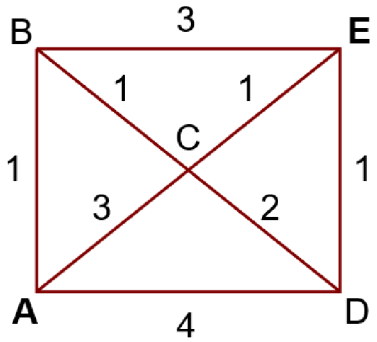
Dijkstrův algoritmus umožňuje nejen hledat nejkratší cestu z jednoho vrcholu grafu k jinému vrcholu, ale je schopen najít vzdálenost všech ostatních vrcholů grafu od jednoho určitého vrcholu. To slouží k daleko zajímavější aplikaci – hledání servisních oblastí. Servisní oblast zahrnuje všechny vrcholy grafu (v aplikované rovině například silniční sítě, ulic města), které mají nejkratší cestu ze zvoleného bodu kratší nebo rovnou zadané hodnotě. Například pokud v obrázku 107 zvolíme velikost servisní oblasti 4, budou do servisní oblasti patřit vrcholy B, C, D, E, F, pro které má nejkratší cesta z bodu A do daného bodu hodnotu 4 nebo menší.



Obrázek 107: Průběh Dijkstrova algoritmu, vlastní tvorba

8.4 Způsob zápisu

K zápisu algoritmu se obvykle nepoužívá vybarvování hran v grafu (tento postup by se stal po čase nejspíš nepřehledným), ale zápis do tabulky. Ukažme si ho na příkladu tohoto grafu (obrázek 108), kde chceme najít nejkratší cestu z vrcholu A k ostatním vrcholům grafu.



Obrázek 108: Kladně ohodnocený graf o pěti vrcholech, vlastní tvorba

1. Vyhodnotíme vrchol A: B získá hodnotu 1, C hodnotu 3 a D hodnotu 4. Bod E je nedostupný přímou hranou z A, proto má hodnotu nekonečno.

	B	C	D	E
A	1	3	4	∞

2. Nejnižší hodnotu má vrchol B, proto se jeho dočasná hodnota 1 stává potvrzenou (označíme podtržením číslice 1)

	B	C	D	E
A	$\underline{1}$	3	4	∞

3. Nyní vyhodnocujeme vrchol B: kromě hrany AB, kterou jsme prošli, vychází z B ještě hrany BC a BE. BC má hodnotu 1, po sečtení s hodnotu vrcholu B (která je 1, a představuje délku nejkratší cesty z A do B) dostáváme 1+1 = 2. To je nižší než současná hodnota 3, proto změním dočasnou hodnotu pro vrchol C na 2. Podobně pro E je cesta přes B s délkou AB+BE = 1+3 = 4, což je méně než současná nekonečná hodnota. Bod D nemá spojení hranou s B, proto se nemění.

	B	C	D	E
A	$\underline{1}$	3	4	∞
B(+1)	$\underline{1}$	2	4	4

4. Nyní je nejnižší dočasnou hodnotou C = 2, ta se v tomto kroku stává potvrzenou nejkratší cestou (cesta do B je už potvrzená jako nejkratší, proto ji nevyhodnocujeme).

	B	C	D	E
A	$\underline{1}$	3	4	∞
B(+1)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	4

5. Vyhodnocujeme vrchol C, kde jsme ještě neprošli hrany CD a CE. CD má délku 2, což v součtu s hodnotou vrcholu C dává 2+2 = 4, což je stejně jako nynější dočasná hodnota vrcholu D, proto ji ponecháme stejnou. CE má délku 1, což v součtu s hodnotou vrcholu C dává 2+1 = 3. Ta je nižší než nynější dočasná hodnota 4, a proto změníme hodnotu pro vrchol E na 3.

	B	C	D	E
A	$\underline{1}$	3	4	∞
B(+1)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	4
C (+2)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	3

6. Nejnižší dočasná nepotvrzená hodnota je nyní E = 3. Proto vyhodnotíme vrchol E. Hrany BE a CE byly vyhodnoceny v předchozích krocích, proto zbývá vyhodnotit hranu DE. Ta má velikost 1, v součtu s hodnotou E dává 1+3 = 4. To se rovná dočasné hodnotě vrcholu D.

	B	C	D	E
A	$\underline{1}$	3	4	∞
B(+1)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	4
C (+2)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	$\underline{3}$
E (+3)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	$\underline{3}$

7. Nyní je jedinou nepotvrzenou hodnotou D = 4, ta se stává poslední potvrzenou hodnotou.

	B	C	D	E
A	$\underline{1}$	3	4	∞
B(+1)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	4
C (+2)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	$\underline{3}$
E (+3)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$

Nyní máme hodnoty nejkratších cest z vrcholu A do všech ostatních vrcholů. Z tabulky lze také jednoduše zpětně zjistit, přes které vrcholy tato nejkratší cesta vede – stačí se vždy kouknout, v jakém kroku získal daný bod svou potvrzenou nejkratší hodnotu. Ukažme si na příkladu vrcholu E. Vrchol E získal svou nejnižší hodnotu (3) v řádku vyhodnocování vrcholu C. Cesta do E tedy vede přes C. C získalo hodnotu 2 v řádku, kde se vyhodnocoval bod B, cesta do C tedy vede přes B. Bod B získal hodnotu 1 v řádku, kde se vyhodnocovalo A. Tím pádem nejkratší cesta z A do E jde: $A \to B \to C \to E$. Žlutá barva značí moment, kdy daný vrchol získal nejnižší hodnotu.

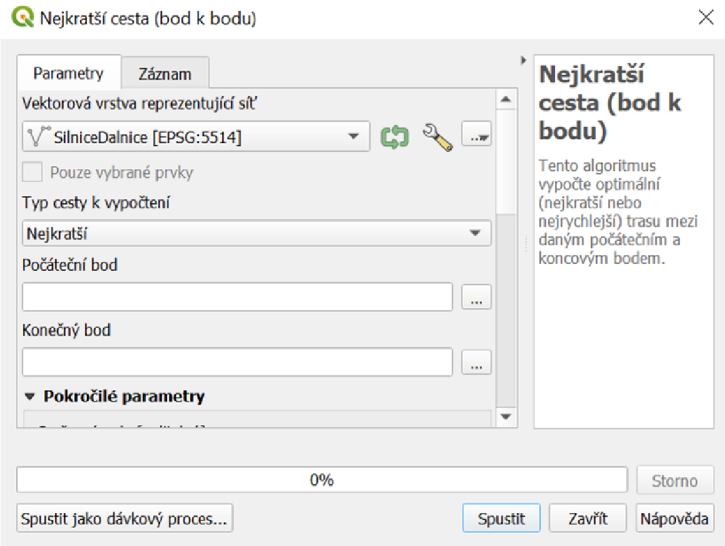
	B	C	D	E
A	$\underline{1}$	3	$\underline{4}$	∞
B(+1)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	4
C (+2)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	4	$\underline{3}$
E (+3)	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$

8.5 Jak na to v QGIS?

V QGIS existuje v sekci *Síťová analýza* několik různých variant pro hledání nejkratší cesty a servisní zóny. Liší se dle toho, zda chceme hledat cestu pouze mezi dvěma body, od bodu k vrstvě bodů atd. Nejprve vyzkoušíme nejjednodušší variantu – nejkratší cestu od bodu k bodu.

1. Načtěme do projektu vrstvu, kterou budeme využívat jako síť – tedy liniovou vrstvu představující hrany grafu. V tomto případě využijeme vrstvu *SilniceDalnice* ze ZABAGED.

2. V *Nástrojích zpracování* najdeme sekci *Síťová analýza*, nebo rovnou vyhledáme *Nejkratší cesta (od bodu k bodu)*. V dialogovém okně budeš muset navolit několik parametrů. Prvním je zvolení vektorové vrstvy reprezentující síť – v tomto případě vrstva *SilniceDalnice*.



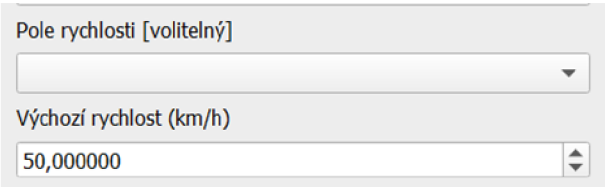
Obrázek 109: Funkce Nejkratší cesta (bod k bodu), QGIS

3. Dalšími parametry jsou:

a. *Typ cesty k vypočtení* – zde lze volit nejkratší (s výsledkem v délkových jednotkách projektu, tedy metrech nebo kilometrech) nebo nejrychlejší (s výsledkem v hodinách, kde je ale potřeba navolit ještě dodatečné parametry).

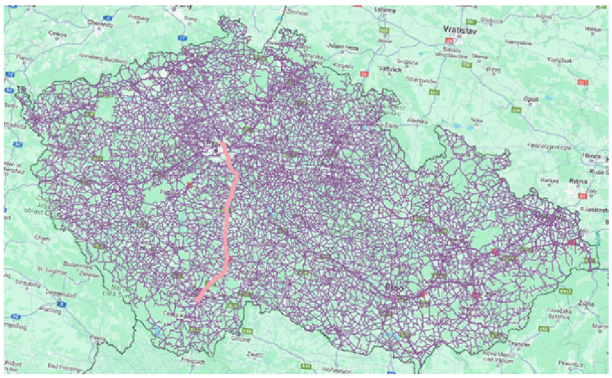
b. *Počáteční a koncový bod* – kliknutím na tlačítko s třemi tečkami se dostaneme do mapového okna a kurzor se změní na „zaměřovač“. Kliknutím do mapy vybereme potřebný počáteční a koncový bod.

c. V pokročilých parametrech lze zvolit například *Směrové pole* (to ale v tuto chvíli používat nebudeme), ale hlavně zde lze navolit rychlosti jízdy pro počítání časově nejrychlejší trasy. Jednodušší variantou je vyplnit pole *Výchozí rychlost* – všechny úseky pak budou mít stejnou rychlost. Složitější, ale realitě více odpovídající je zvolit možnost *Pole rychlosti* – tedy vytvořit v atributové tabulce silniční sítě pole, kde bude pro každý úsek přiřazena rychlost (viz níže).



Obrázek 110: Rychlostní pole a výchozí rychlost, QGIS

4. Do mapy se po spuštění algoritmu (ten bude nejspíše trvat nějakou chvíli) zobrazí nejkratší trasa mezi zvolenými body v mapě. Je dobré vrstvu představující síť (silnice, dálnice, ulice...) co nejvíce ořezávat – tím se zkrátí doba výpočtu algoritmu. Pokud nás tedy například zajímá pouze území tvého SO ORP, ořízneme nejdříve celou vrstvu sítě pouze na území SO ORP.



Obrázek 111: Příklad nejkratší cesty, QGIS, ZABAGED 4.1

5. Dalšími variantami funkce jsou buď nejkratší cesta od bodu k vrstvě (volíme počáteční bod z mapy, a koncové body jsou představovány vhodnou bodovou vrstvou), nebo naopak nejkratší cesta z vrstvy k bodu (kde volíme z mapy koncový bod, a počáteční body jsou představovány vhodnou bodovou vrstvou). Body dané vrstvy by ideálně měly ležet co nejblíže k síti.

Rychlostní pole

Pro výpočet nejrychlejší trasy jde kromě zvolení konstantní rychlosti použít i rychlostní pole – tedy například lze dálnicím přiřadit jinou rychlost než silnicím nižších tříd nebo ulicím města. Rychlostní pole můžeme vytvořit podle následujícího návodu:

1. Budeme chtít vytvořit vrstvu, ve které jsou jak silnice a dálnice, tak také ulice v obcích, pro naše ORP. Nejprve tedy ořízneme vrstvy *SilniceDalnice* a *Ulice* ze ZABAGED pomocí funkce *Oříznout* polygonem našeho ORP. Následně tyto dvě vrstvy sjednotíme do jedné. Opačný postup, tedy nejprve sjednotit a pak teprve oříznout, bude časově velmi náročný, volíme tedy raději tento postup.

2. Nyní otevřeme kalkulátor polí v atributové tabulce. Jednotlivé prvky mají přiřazený svůj typ silnice (dálnice, silnice pro motorová vozidla, silnice I.,II. a III. třídy), pro které mají v poli *typsil_k* přiřazený kód. Podle těchto kódů budeme přiřazovat rychlosti. Řekněme, že dálnici (kódy D1 a D2) přiřadíme rychlost 130 km/h, silnici pro motorová vozidla (M) 110 km/h, silnici I. třídy (S1) 90 km/h, II. třídě (S2) 80 km/h a nejhorším silnicím III. třídy (S3) 70 km/h. Ulice pak budou mít rychlost 50 km/h. Ve vrstvě *SilniceDalnice* existují i další hodnoty polí *typsil_k* – jedná se vždy buď o větve, nebo paprsky základních typů (například větve a paprsky dálnice atd.), jde tedy většinou o nájezdy na silnice, kruhové objezdy atd. I těmto krátkým úsekům tak můžeme ponechat rychlost 50 km/h.

3. Pro přiřazení je potřeba vytvořit příkaz v kalkulátoru polí. Tyto příkazy odpovídají jazyku Python, není ale nutné ho znát. Stačí do výrazu na pravé straně zkopírovat následující kód:

```
CASE
    WHEN "typsil_k" ='D1'   THEN 130
    WHEN "typsil_k" ='D2'   THEN 130
    WHEN "typsil_k" ='M'    THEN 110
    WHEN "typsil_k" ='S1'   THEN 90
    WHEN "typsil_k" ='S2'   THEN 80
    WHEN "typsil_k" ='S3'   THEN 70
```

```
    ELSE 50
END
```

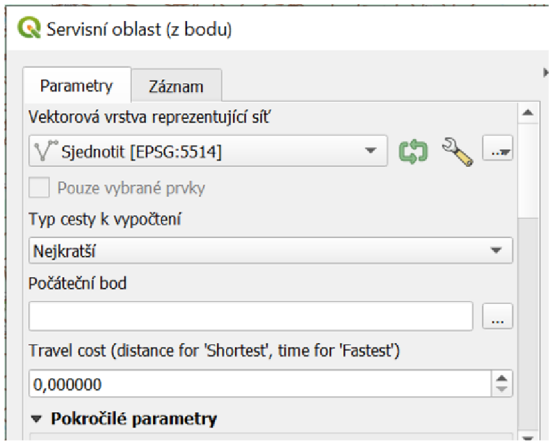
4. Budeme-li chtít změnit některou hodnotu rychlosti (například pro silnice III. třídy snížit rychlost ze 70 na 60 km/h), stačí v příslušném řádku přepsat hodnotu ze 70 na 60. Řádek bude nyní zapsán jako:

```
WHEN "typsil\_k" = 'S3' THEN 60
```

Servisní oblast

Kromě výpočtu nejkratší vzdálenosti umí na základě Dijkstrova algoritmu QGIS vytyčit i servisní oblast – tedy vybrat všechny části grafu (silniční sítě, ulic...), které jsou v určité dojezdové/časové vzdálenosti. Servisní oblast lze tvořit buď z jednoho bodu, nebo z bodové vrstvy - je třeba zadat počáteční bod, nebo vrstvu, která představuje počáteční body. Parametry funkce jsou víceméně podobné jako při hledání nejkratší cesty. Jediný odlišný parametr, který je třeba zvolit, je *Travel cost* – tedy buď maximální délkovou vzdálenost (v délkových jednotkách projektu) nebo maximální časovou vzdálenost (v hodinách), kterou chceme servisní oblast ohraničit.

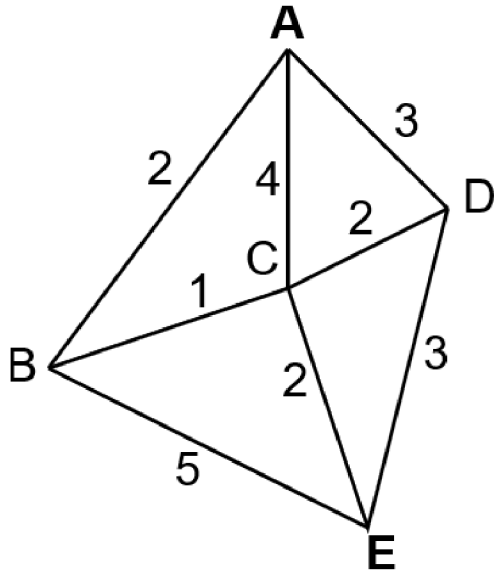
Můžeme tedy hledat například buď všechna místa ve vzdálenosti do 10 km (pozor, pokud jsou jednotky projektu nastaveny na metry, musíme zadat 10 000), nebo všechna místa, na která se dostaneme do půl hodiny (v pokročilém nastavení je potřeba znovu nastavit *Výchozí rychlost* nebo *Rychlostní pole*).



Obrázek 112: Servisní oblast (z bodu), QGIS

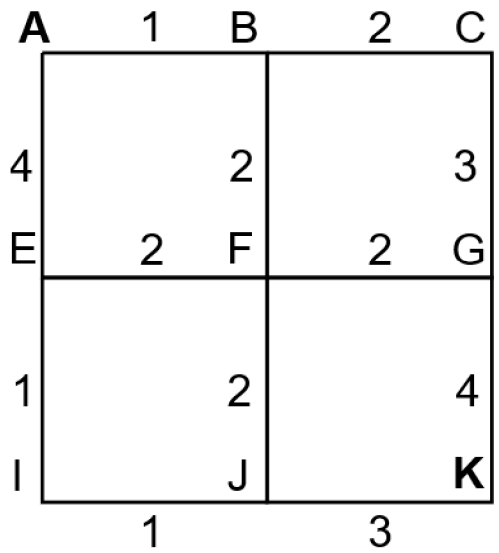
8.6 Příklady

8.1 Pro daný ohodnocený neorientovaný graf najdi pomocí Dijkstrova algoritmu nejkratší cestu z vrcholu A do vrcholu E.



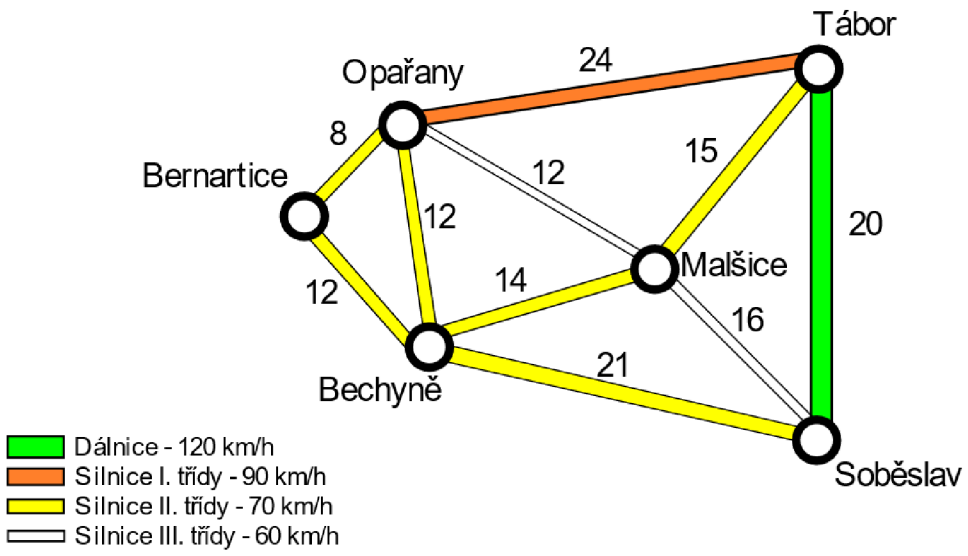
Obrázek 113: K úloze 8.1

8.2 Pro daný ohodnocený neorientovaný graf najdi pomocí Dijkstrova algoritmu nejkratší cestu z vrcholu A do vrcholu K. Následně zjisti, pro které vrcholy grafu je cesta z A kratší nebo rovna 4.



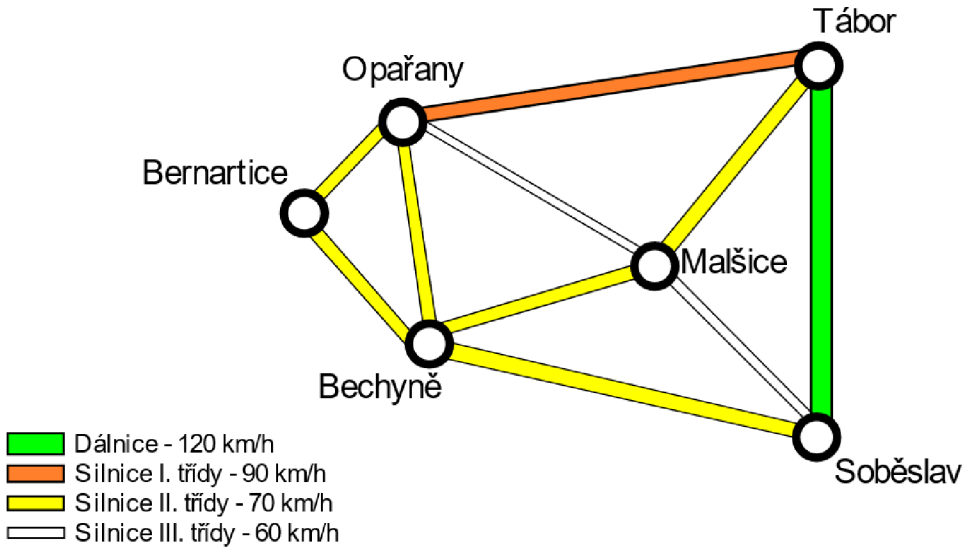
Obrázek 114: K úloze 8.2

8.3 V následující zjednodušené mapce silniční sítě urči pomocí Dijkstrova algoritmu nejkratší trasu ze Soběslavi do všech ostatních měst. Následně vymez servisní oblast 30 km (tj. všechny obce, které jsou od Soběslavi vzdáleny 30 km nebo méně). Kudy vede nejkratší trasa do Opařan a Bernartic?



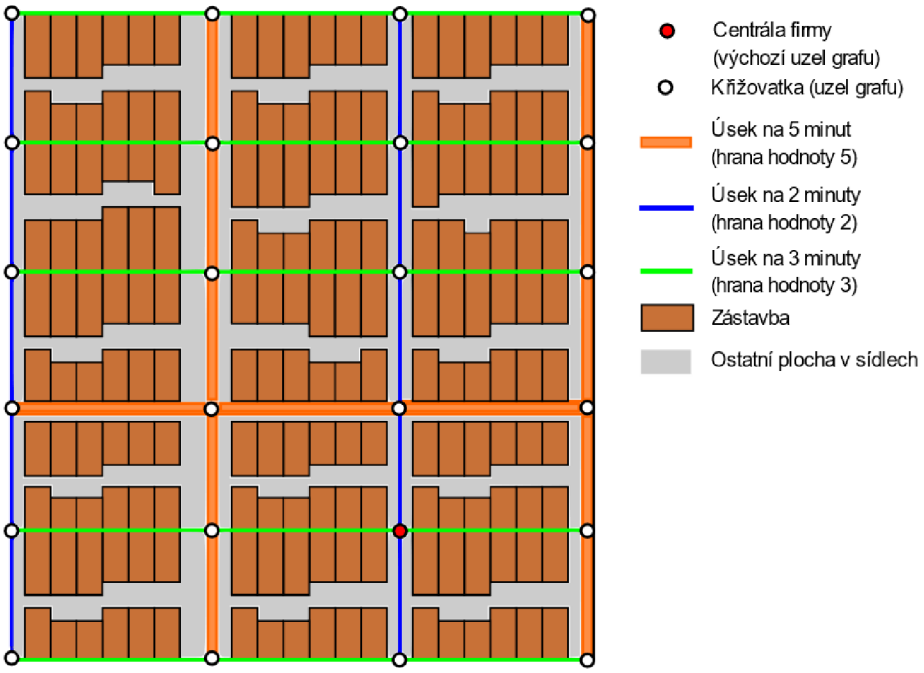
Obrázek 115: K úloze 8.3

8.4 Nyní v mapce z úlohy číslo 3 vypočítej pomocí legendy časy, za které lze jednotlivé úseky urazit. Znovu pomocí Dijkstrova algoritmu urči nejrychlejší cesty ze Soběslavi do ostatních měst, a vymez tentokrát 30 minutovou servisní oblast (obce dostupné ze Soběslavi do 30 minut), a 20 minutovou servisní oblast. Kudy vede nyní nejkratší trasa do Opařan a Bernartic?



Obrázek 116: K úloze 8.4

8.5 Následující obrázek představuje ulice města (zamysli se dle uspořádání ulic, kde bys asi takové město hledal/a). Urči z něj za pomocí legendy všechny křižovatky (uzly grafu), které jsou od centrály firmy rozvážející jídlo (červená tečka) vzdáleny méně než 10 minut jízdy – to bude naše servisní oblast. Jako jeden úsek (hrana) je vždy chápána spojnice dvou křižovatek (bílé tečky – uzly grafu). Modré hrany mají hodnotu 2, zelené hodnotu 3, oranžové představují problematické ucpané silnice a mají hodnotu 5. Vybarvi barevně všechny vrcholy, které patří do zadané servisní oblasti.



Obrázek 117: K úloze 8.5

Úlohy řešené v QGIS

V několika následujících úlohách budeme potřebovat vrstvu silnic a ulic ve tvém SO ORP. Pomocí funkce *Oříznout* ořízni vrstvy *SilniceDalnice* a *Ulice* na území tvého SO ORP, a následně je pomocí funkce *Sjednotit* sjednoť do jedné vrstvy. V textu je tato vrstva dále pojmenována jako *Komunikace_ORP*.

8.6 Pomocí funkce *Nejkratší cesta (bod k bodu)* a s využitím vrstvy *SilniceDalnice* ze ZABAGED najdi nejkratší cestu od tvého domu ke tvé škole. Následně najdi nejkratší cestu do centra tvého ORP a do centra tvého krajského města (vyber bod na silnici co nejblíže škole/centru). V atributové tabulce nově vzniklé vrstvy zjistíš v kolonce *cost* délku nejkratší cesty v délkových jednotkách projektu.

8.7 Vytvoř bodovou vrstvu několika zajímavých míst (přírodních nebo historických památek) ve tvém ORP. Potom pomocí funkce *Nejkratší cesta (bod k vrstvě)* zjisti nejkratší trasu (s využitím vrstvy *Komunikace_ORP*) k těmto památkám. Z atributové tabulky zjisti délku jednotlivých tras a pak pomocí nich navrhni, které výlety byste se školou byli schopni uskutečnit jako pěší a pro které budete potřebovat dopravu autobusem nebo vlakem.

8.8 Z vrstvy pražského metra (liniová vrstva *Metro* a bodová vrstva *StaniceMetra*) zjisti pomocí funkce servisní oblast, kam se lze dostat ze stanic: a) Můstek, b) Nádraží Holešovice, c) Petřiny do 10 minut (0,1666 hodiny). Jako výchozí rychlost zvol 35 km/h. Zanedbej časy na přestupy mezi trasami metra (tato servisní oblast by byla ve skutečnosti spíše cca 15 minutová, při započítání časů na přestupy a čekání na spoje).

8.9 Vytvoř bodovou vrstvu výjezdových základen záchranné služby (polohu najdi na internetu) ve tvém SO ORP. Pomocí vrstvy *Komunikace_ORP* vytvoř servisní oblast, kam se záchranka bude schopna dostat za 10 minut a za 20 minut (přepočítej na hodiny). Výchozí rychlost v dialogovém okně nastav na 90 km/h. Úlohu můžeš modifikovat na rozlohu okresu, několika okresů či celého kraje, pozor ale, výpočet a následné zobrazování výsledku může být pro počítač dost náročné.

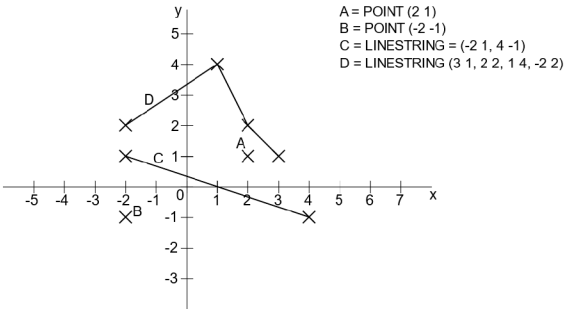
8.10 Podobně jako v předchozí úloze využij vrstvu výjezdových základen ZS ve tvém SO ORP. Tentokrát ale vytvoř v atributové tabulce pole rychlostí: přiřaď dálnicím 140 km/h, silnicím I. třídy 110 km/h, ostatním silnicím 100 km/h a ulicím 70 km/h. Rychlosti zadáš v kalkulátoru polí v atributové tabulce sloučené vrstvy pomocí následujícího výrazu: Následně znovu pomocí funkce *Servisní oblast (z vrstvy)* zjisti, kam stihne záchranná služba dojet za 10 a za 20 minut.

9 Výsledky

Poznámka: Mapové výstupy v této kapitole jsou pouze orientační, aby byla zřejmá možná podoba výsledku - ve většině případů se vaše vlastní řešení bude lišit

2.1 A = POINT (−3 −2); B = POINT (1 −2); C = LINESTRING (−5 1, −4 5, −2 2, −1 4); D = POLYGON (2 −3, 8 −2, 6 −1, 2 −3); E = POLYGON ((1 1, 5 1, 6 5, 2 4, 1 1),(4 2, 3 3, 5 4, 4 2))

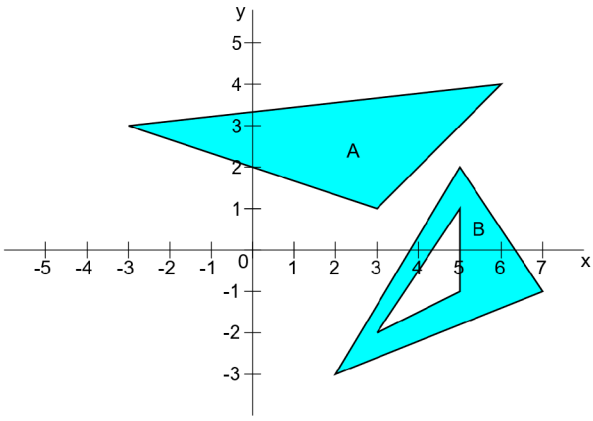
2.2



Obrázek 118: Řešení úlohy 2.2

2.3

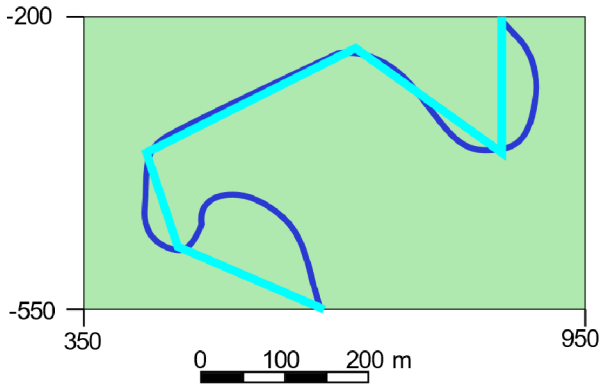
A = POLYGON = (-3 3, 3 1, 6 4, 2 5, -3 3))
B = POLYGON = ((2 -3, 7 -1, 5 2, 2 -3),(3 -2, 5 1, 5 -1, 3 -2))



Obrázek 119: Řešení úlohy 2.3

2.4 Příklad řešení pro zjednodušení na 6 lomových bodů: LINESTRING (630 −550, 460 −475, 425 −365, 675 −240, 850 −385, 850 −200)

Řešení ale může vypadat jakkoliv jinak, důležitá je především správnost zápisu do WKT

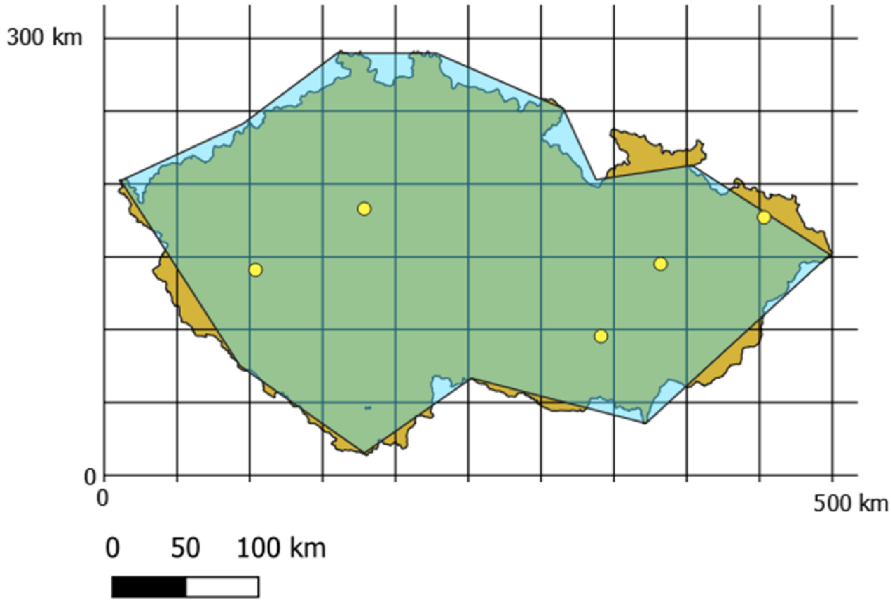


Obrázek 120: Řešení úlohy 2.4

2.5 Příklad řešení pro 12 lomových bodů: POLYGON(10 205, 90 75, 180 15, 250 65, 375 35, 500 150, 405 215, 335 205, 315 250, 230 290, 165 290, 95 245, 10 205)

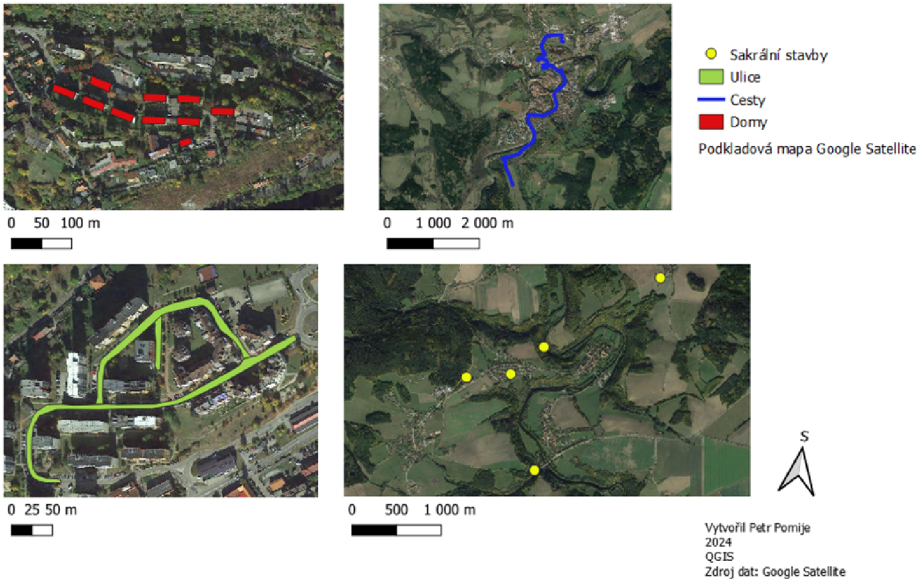
Města: Praha = POINT(180 180); Brno = POINT(340 95), Ostrava = POINT(405 180), Plzeň = POINT(105 140), Olomouc = POINT(380 145)

Řešení (pro polygon) ale může vypadat jakkoliv jinak, důležitá je především správnost zápisu do WKT



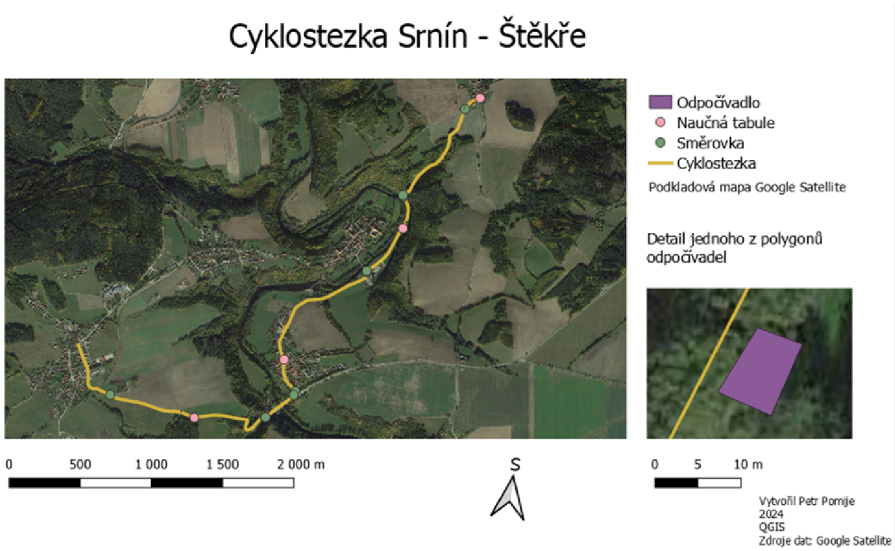
Obrázek 121: Řešení úlohy 2.5

2.6



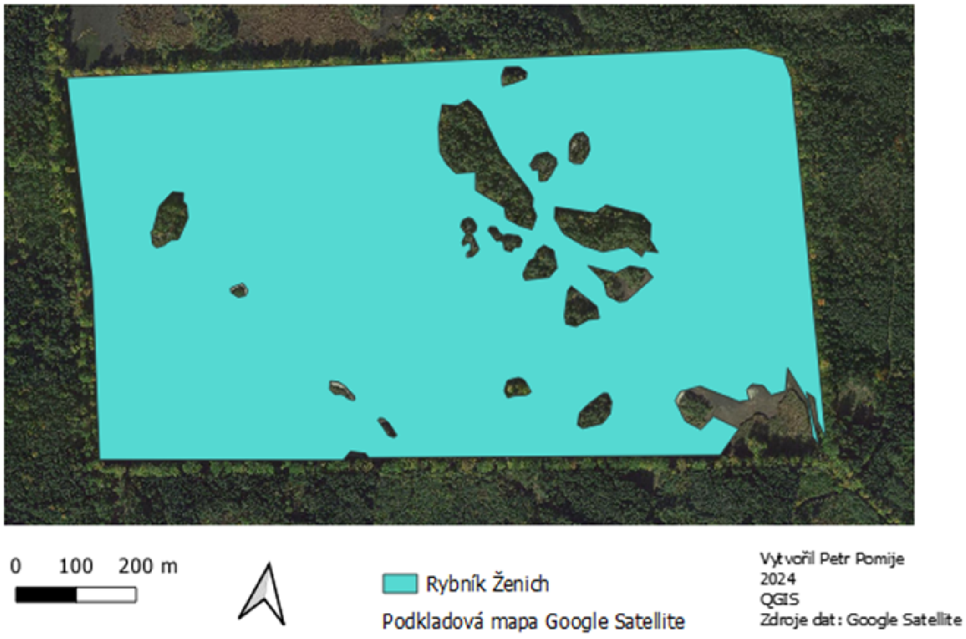
Obrázek 122: Řešení úlohy 2.6

2.7



Obrázek 123: Řešení úlohy 2.7

2.8



Obrázek 124: Řešení úlohy 2.8

3.1 $l = \sqrt{(2-5)^2+(1-3)^2} + \sqrt{(5-(-1))^2+(3-4)^2} + \sqrt{(-1-(-3))^2+(4-0)^2} =$
$= \sqrt{13} + \sqrt{37} + \sqrt{32} = 15,35\ j$

3.2 $l = \sqrt{(6-4)^2+(5-1)^2} + \sqrt{(4-2)^2+(1-4)^2} + \sqrt{(2-(-2))^2+(4-1)^2} + \sqrt{(-2-3)^2+(1-(-$
$= \sqrt{20} + \sqrt{13} + \sqrt{25} + \sqrt{41} = 19,48\ j$

3.3 $S_1 = \frac{1}{2}(1-(-3))(4+2) = 12\ j^2$; $S_2 = \frac{1}{2}(-4-(-1))(2+(-1)) = -1,5\ j^2$;
$S_3 = \frac{1}{2}(-1-(-2))(-1+(-4)) = -2,5\ j^2$; $S_4 = \frac{1}{2}(-2-2)(-4+1) = 6\ j^2$;
$S_5 = \frac{1}{2}(2-1)(1+4) = 2,5\ j^2$
$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 12 - 1,5 - 2,5 + 6 + 2,5 = 16,5\ j^2$

3.4 $S_{ext} = 41\ j^2; S_{int} = -6\ j^2; S = S_{ext} + S_{int} = 41 - 6 = 35\ j^2$

3.5 $l = 20,53\ km$

3.6 POLYGON(10 205, 90 75, 180 15, 250 65, 375 35, 500 150, 405 215, 335 205, 315 250, 230 290, 165 290, 95 245, 10 205), jeho obsah je $S = 80\ 275\ km^2$. Lambertovo **plochojevné** zobrazení je využito kvůli tomu, že počítáme plochu. 3.7 POLYGON (10 205, 40 165, 60 95, 160 20, 210 20, 225 70, 330 45, 440 75, 500 155, 475 195, 425 195, 410

230, 350 235, 335 200, 305 255, 240 265, 215 290, 160 290, 105 240, 10 205), jeho obsah je $S = 81\,737\ km^2$

3.8 a) LINESTRING (165 25, 180 20, 175 40, 190 60, 185 90, 175 90, 160 125, 180 150, 175 185, 170, 205, 180 215), její délka je $S = 242,05\ km$, skutečná délka řeky vltavy je ale 430 km - kromě nepřesností ve výpočtu nebo zkreslení délky v mapě je hlavním problémem to, že řeka po většinu svého toku meandruje - to značně prodlužuje délku toku.

c) POLYGON((130 120, 240 135, 255 165, 240 210, 210 245, 160 210, 105 180, 135 165, 130 120),(165 185, 185 195, 195 185, 195 175, 170 170, 165 185)), jeho obsah je $S = S_1 + S_2 = 11\,000 + (-462,5) = 10\,537,5\ km^2$, skutečná rozloha Středočeského kraje je $11\,015\ km^2$

3.9 Například SO ORP Český Krumlov má 440,7 km silnic ⇒ 5 aut za hodinu odklidí 5·30 = 150 km silnic ⇒ 440,7/150 = 2,938 hodin = 2 hodiny 56 minut na odklizení všech silnic v SO ORP

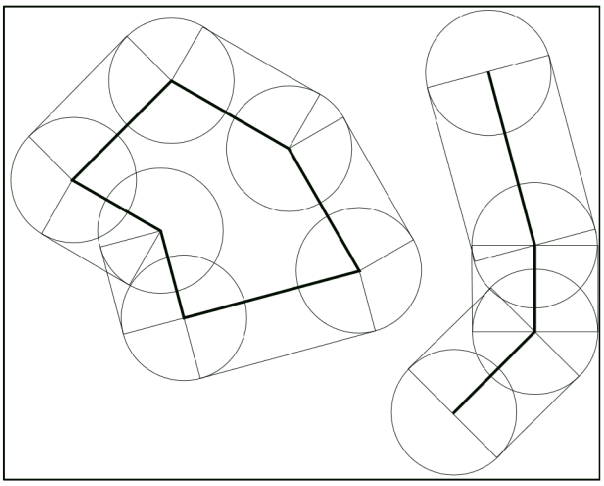
3.10 Délka navržené cyklostezky je 4818 metrů, plocha je tedy $4\,818 \cdot 3 = 14\,454\ m^2$, při ceně 500 Kč za metr čtvereční je tedy cena vyasfaltování celé cyklostezky $14\,454 \cdot 500 = 7\,227\,000\ Kč$

3.11 Plocha modelových polí je 62,4 ha, 47,1 ha a 30,1 ha - všechna tedy nesplňují podmínku velikosti do 30 hektarů, samozřejmě by se jich tedy týkal i zákon pro pole do 10 hektarů. Smyslem tohoto zákona je donutit zemědělce, aby přestali vytvářet rozsáhlé monokultury jedné plodiny. Rozdělení polí na menší celky by mělo umožnit lepší zadržování vody v krajiny, snadnější vsakování vody (což je velmi podstatné při současné klimatické změně, která přináší velká sucha, nebo naopak srážkové extrémy, které půda nestačí vsakovat), a mělo by docházet i k menšímu vyčerpávání půdy.

3.12 Plocha rybníku Ženich je $S = 724659 m^2$, dle internetových zdrojů je objem rybníku $V = 310\,000 m^3$, průměrná hloubka je tedy $V/S = 310\,000 : 724\,659 = 0,42$ metru

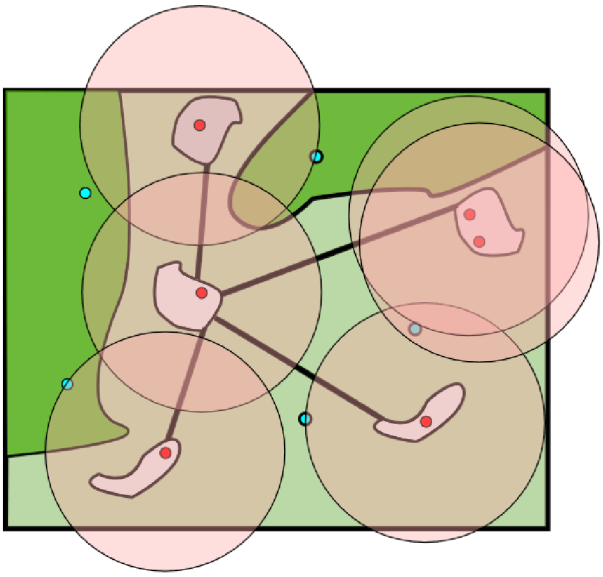
3.13 Vybrané ulice mají plochu $5\,993\ m^2$, objem je $5\,993 \cdot 0,05 = 299,65\ m^3$. Hmotnost asfaltu potřebného pro vyasfaltování silnic je $299,65 \cdot 2\,300 = 689\,195\ kg = 689,195\ tun$

4.1



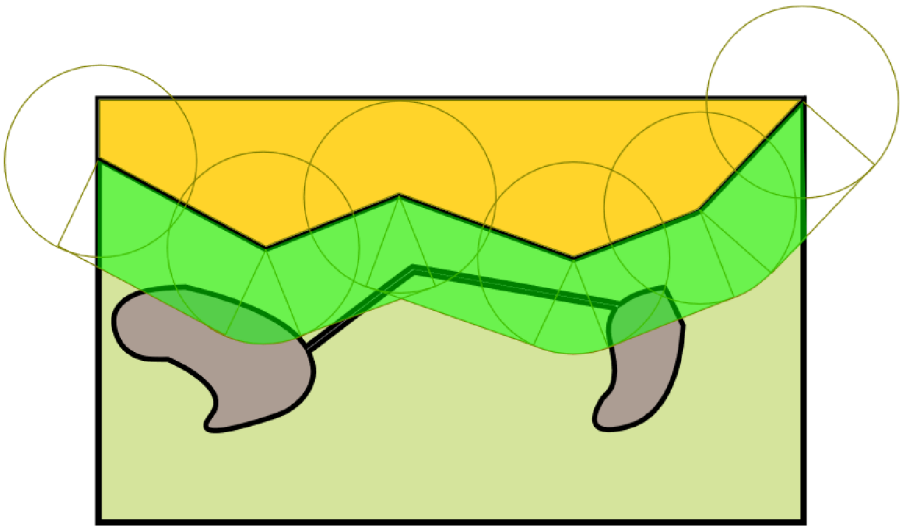
Obrázek 125: Řešení úlohy 4.1

4.2



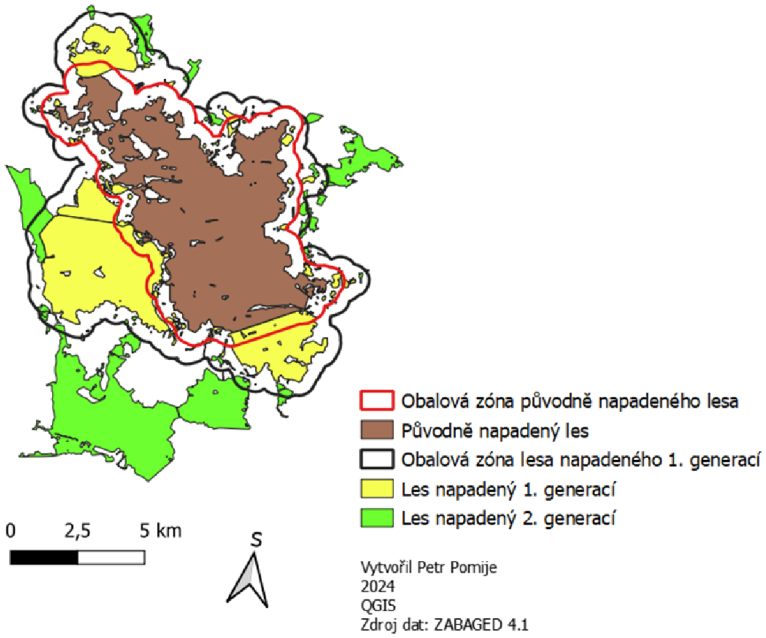
Obrázek 126: Řešení úlohy 4.2

4.3



Obrázek 127: Řešení úlohy 4.3

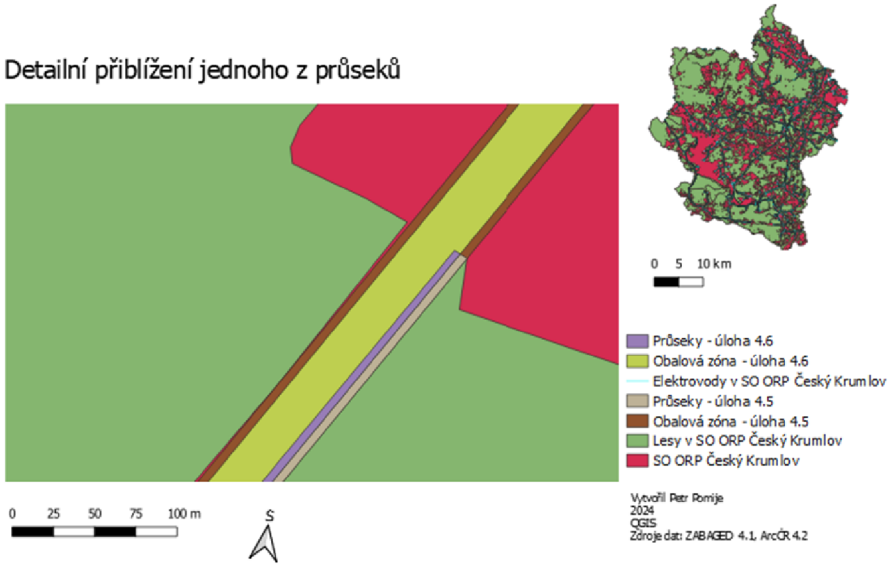
4.4



Obrázek 128: Řešení úlohy 4.4

4.5 Plocha lesních průseků kolem elektrického vedení je za těchto podmínek v SO ORP Český Krumlov 3 126 827 $m^2 = 3,126\ km^2$

4.6 Za těchto upravených podmínek je plocha průseků 1 668 105 $m^2 = 1,668\ km^2$



Obrázek 129: Řešení úloh 4.5 a 4.6

5.1 A = 4 průsečíky ⇒ mimo polygon; B = 1 průsečík ⇒ uvnitř polygonu; C = 5 průsečíků ⇒ uvnitř polygonu; D = 2 průsečíky ⇒ mimo polygon

5.2 POLYGON((1 5, −4 3, 1 1, 3 −2, 5 2, 1 5),(2 3, 4 1, 1 2, 2 3)), A = POINT (2 2), B = POINT(1 4), C = POINT (−2 1)

Hodnoty úhlů mezi jednotlivými vrcholy:

Pro bod A: vnější hranice: $wn_1 = 1,08 + 0,95 + 1,03 + 1,33 + 1,89 = 6,28\ rad \doteq 2\pi\ rad$
vnitřní hranice : $wn_2 = -2,03 - 2,68 - 1,57 = -6,28\ rad \doteq -2\pi\ rad$
$wn = wn_1 + wn_2 = 2\pi - 2\pi = 0\ rad \Rightarrow$ bod A leží mimo polygon

Pro bod B: vnější hranice: $wn_1 = 1,76 + 1,37 + 0,32 + 0,79 + 2,03 = 6,27\ rad \doteq 2\pi\ rad$
vnitřní hranice : $wn_2 = 0 - 0,79 + 0,79 = 0\ rad$
$wn = wn_1 + wn_2 = 2\pi - 0 = 2\pi\ rad \Rightarrow$ bod B leží uvnitř

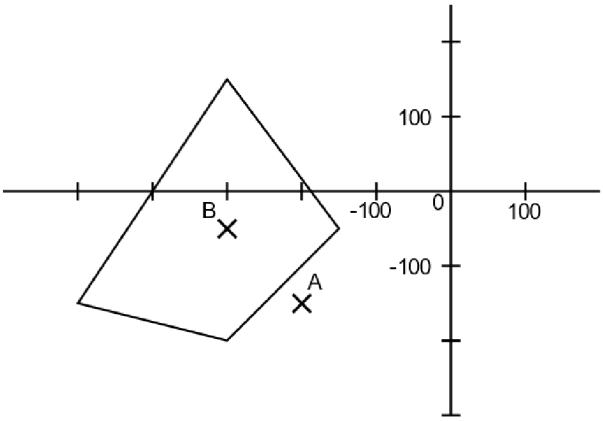
Pro bod C: vnější hranice: $wn_1 = 1,43 - 2,36 - 0,54 + 0,68 + 0,79 = 0\ rad$
vnitřní hranice : $wn_2 = -0,46 + 0,32 + 0,14 = 0\ rad$
$wn = wn_1 + wn_2 = 0 + 0 = 0\ rad \Rightarrow$ bod C leží mimo polygon

5.3

Pro bod A: $wn = 2,03 + 1,57 + 1,89 + 0,79 = 6,28\ rad \doteq 2\pi\ rad \Rightarrow$ bod A leží v polygonu

Pro bod B: $wn = 1,00 + 0,71 - 2,50 + 0,79 = 0\ rad \Rightarrow$ bod B leží mimo polygon

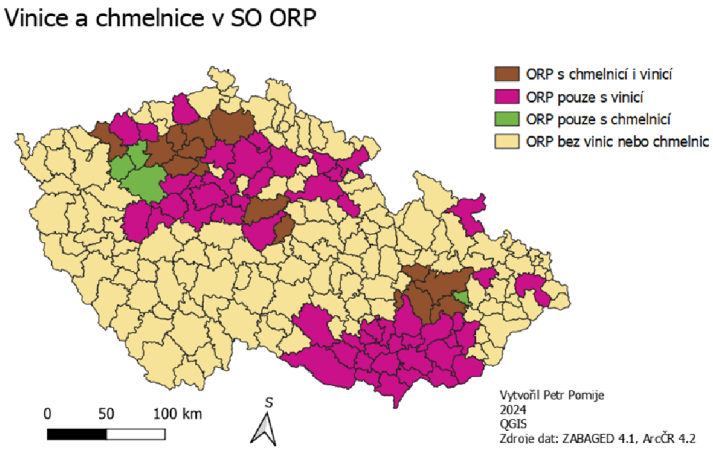
5.4



Obrázek 130: Řešení úlohy 5.4

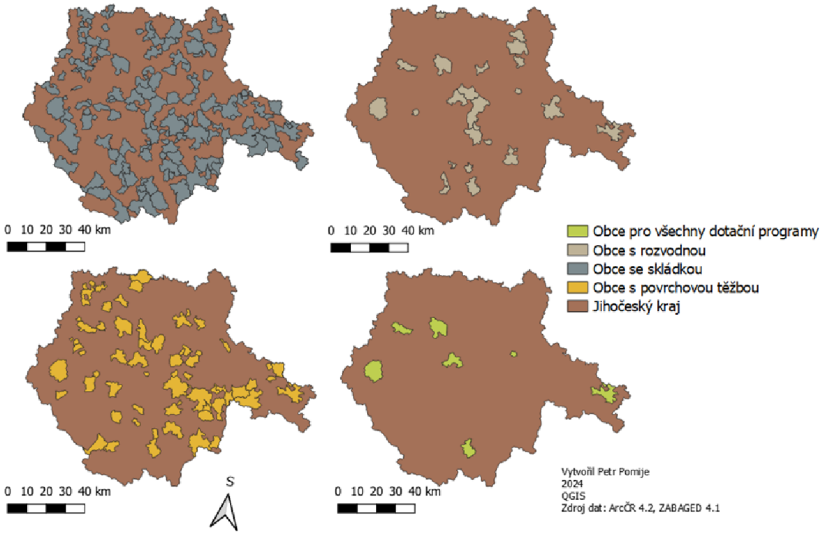
5.5 Ano, ostrůvek patří Velké Británii. O Falklandy vedla Velká Británie spor s Argentinou, který eskaloval 74 denním ozbrojeným konfliktem v roce 1982, po kterém Falklandy (pro Argentince Malvíny) připadly Velké Británii.

5.6 Celkem 14 SO ORP má chmelnici i vinici, 49 pouze vinici a 4 pouze chmelnici. Celkově vyplacená částka tedy bude 134,5 milionu Kč.



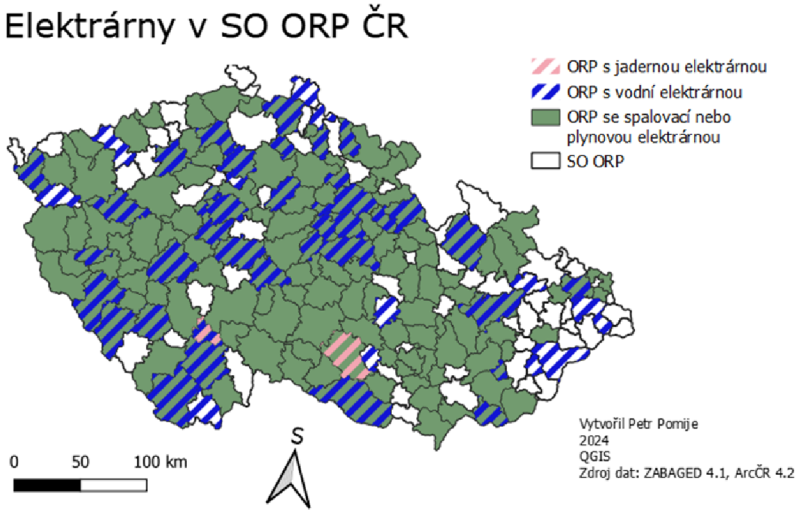
Obrázek 131: Řešení úlohy 5.5

5.7



Obrázek 132: Řešení úlohy 5.6

5.8



Obrázek 133: Řešení úlohy 5.7

6.1 a) $\mathbf{AC} \times \mathbf{AD} = (0, 0, 4)$, $\mathbf{BC} \times \mathbf{BD} = (0, 0, -9) \Rightarrow$ vektory směřují do opačných poloprostorů $\Rightarrow$ body A, B leží v opačných polorovinách vůči přímce CD

$\mathbf{CA} \times \mathbf{CB} = (0, 0, -6)$, $\mathbf{DA} \times \mathbf{DB} = (0, 0, 7) \Rightarrow$ vektory směřují do opačných poloprostorů $\Rightarrow$ body C, D leží v opačných polorovinách vůči přímce AB

Spočtením průsečíku přímek AB a CD (vyjádřených například parametricky jako $AB : x = 2 + 3t; y = 2 - 2t; t \in R$; $CD : x = 2 + 3s; y = 3s; s \in R$) získáme průsečík úseček $P = [2,92; 1,38]$

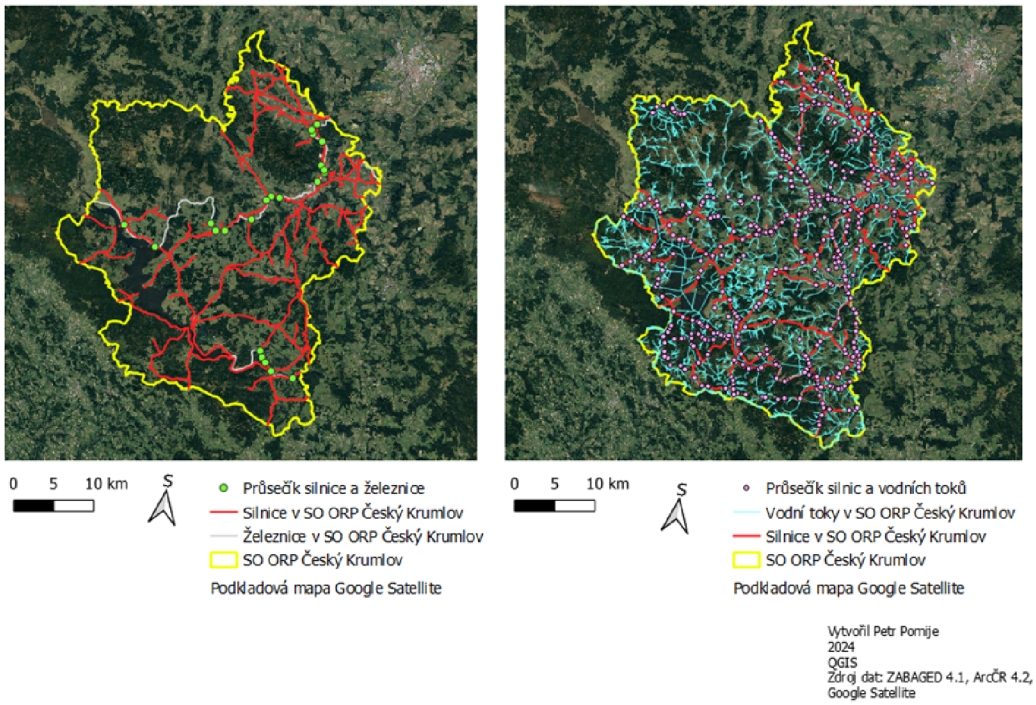
b) Koncové body úseček leží v navzájem opačných polorovinách, průsečík $P = [3,64; 0,91]$

c) Body C, D leží ve stejné polorovině vůči přímce EF - průsečík úseček neexistuje

6.2 $P = [6,14; 2,86]$ - průsečík existuje pouze pro úsečky BC a DE

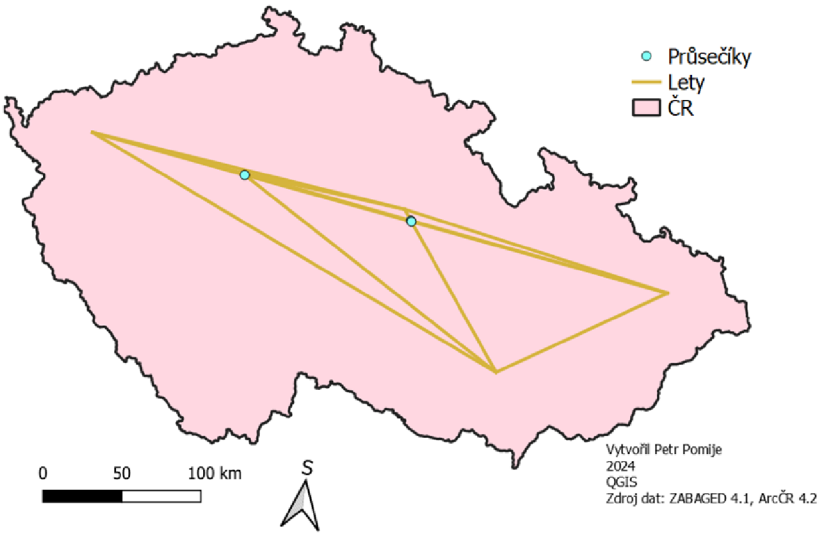
6.3 Exisutjí dva průsečíky: $P_1 = [-0,17; -0,39]$; $P_2 = [-0,75; 1,75]$

6.4 a 6.5



Obrázek 134: Řešení úloh 6.4 a 6.5

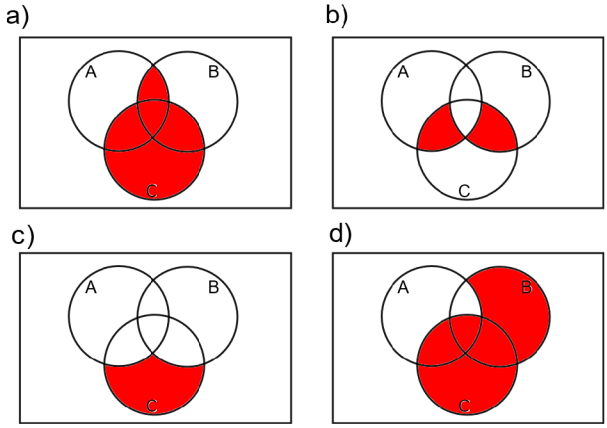
6.6



Obrázek 135: Řešení úlohy 6.6

7.1 a) $C \cap (A \cup B)$ nebo $(A \cap C) \cup (B \cap C)$; b) $(A \cap B) \backslash C$ nebo $(A \cap B) \cap C'$; c) $(A \cup B)'$; d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

7.2



Obrázek 136: Řešení úlohy 7.2

7.3

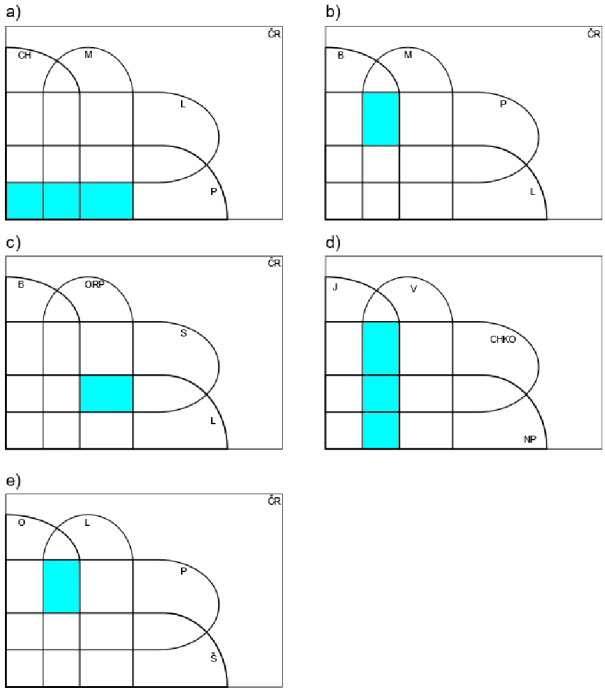
a) $((CH \cup M) \backslash L) \cap P$ (ve realitě je SO ORP Litvínov celý v rámci okresu Most - tím pádem platí $L \subset M$ a můžeme množinu zapsat jako $(CH \cup L'_M) \cap P$

b) $((M \backslash L) \cap B) \cap P$ (v realitě opět lze $L'_M \cap B \cap P$)

c) $((ORP \cap S) \cap L) \backslash B$

d) $((CHKO \cup NP) \cap J) \cap V$

e)$((O \cap P) \backslash Š) \cap L$



Obrázek 137: Řešení úlohy 7.3

7.4 Pravdu nemá ani jeden - sil je do 15 km alespoň od jednoho z měst 122. Zaměstnanec A zanedbal to, že 5 sil je zároveň do 15 km od obou měst, zaměstnanec B tuto skutečnost neopomněl, ale naopak daných 5 sil nezapočítal ani jednou.

7.5 a) Vytvoř obalovou zónu kolem krajského města, následně použij funkci *Oříznout* (vstupní vrstva LesniPudaSeStromy, překryvná vrstva Obalová zóna). Následně v kalkulátoru polí urči plochu lesů v oříznuté vrstvě a pomocí Základní statistiky pro pole urči celkový součet.

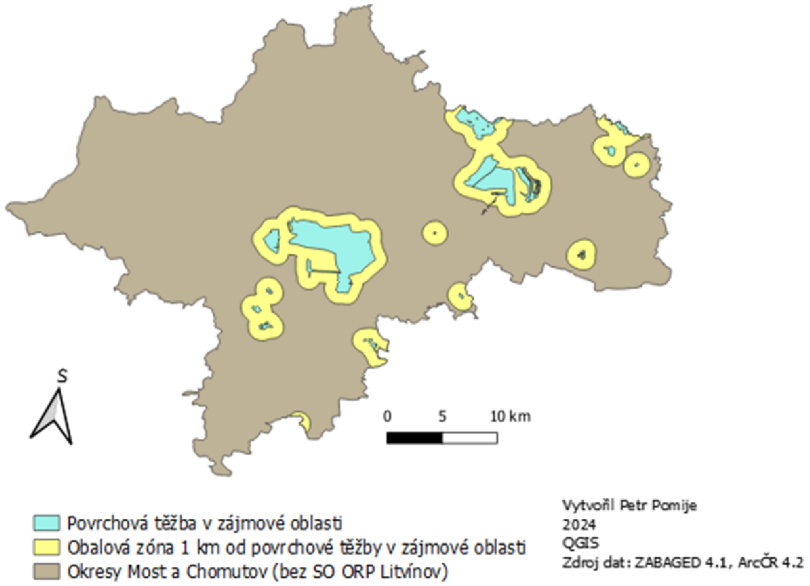
b) Z oříznuté vrstvy lesů z podúlohy a) pomocí funkce *Rozdíl* odstraň polygon krajského města, následně stejným způsobem urči celkovou plochu.

c) Obalová zóna vrstvy vodních toků (tu předtím radši ořízni na velikost tvého SO ORP), následně funkce *Rozdíl* (vstupní vrstva polygon tvého kraje, překryvná obalová zóna vodních toků). Následně zjisti celkovou plochu.

d) Obalové zóny kolem dvou největších měst, následně funkce *Symetrický rozdíl*. Výslednou vrstvou ještě ořízni polygon tvého kraje a zjisti plochu vrstvy.

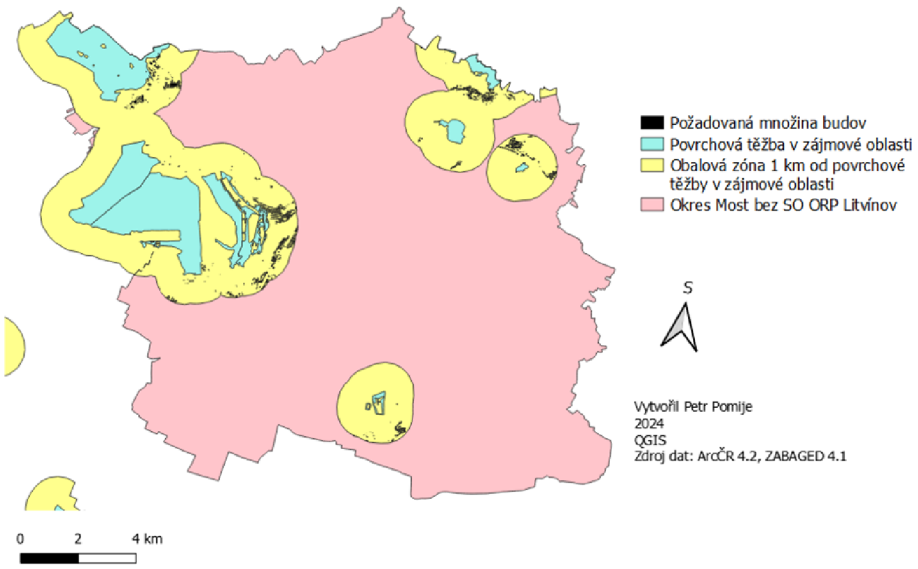
7.6

a)



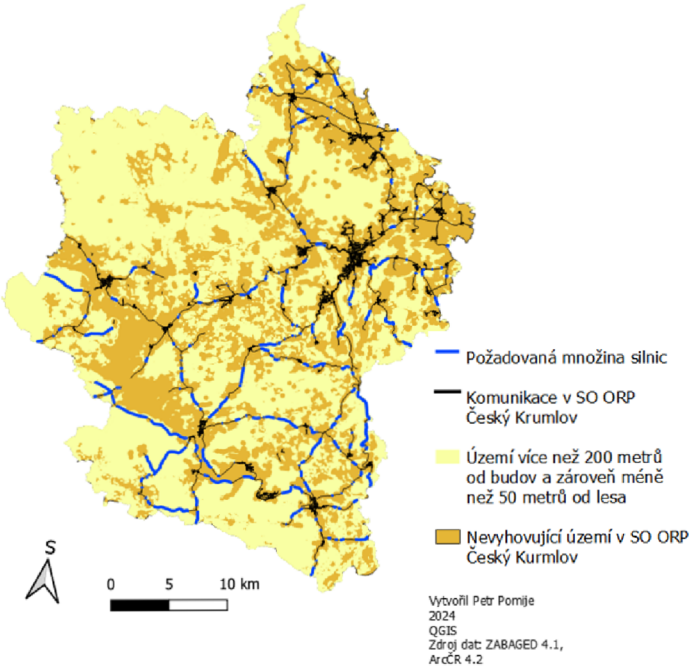
Obrázek 138: Řešení úlohy 7.5, a)

b)



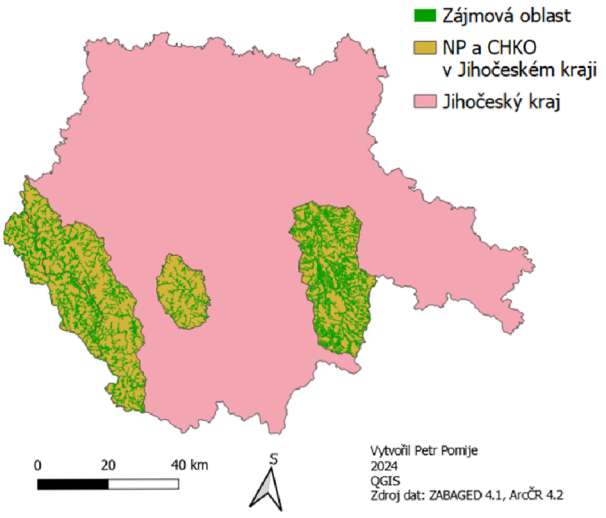
Obrázek 139: Řešení úlohy 7.5, b)

c)



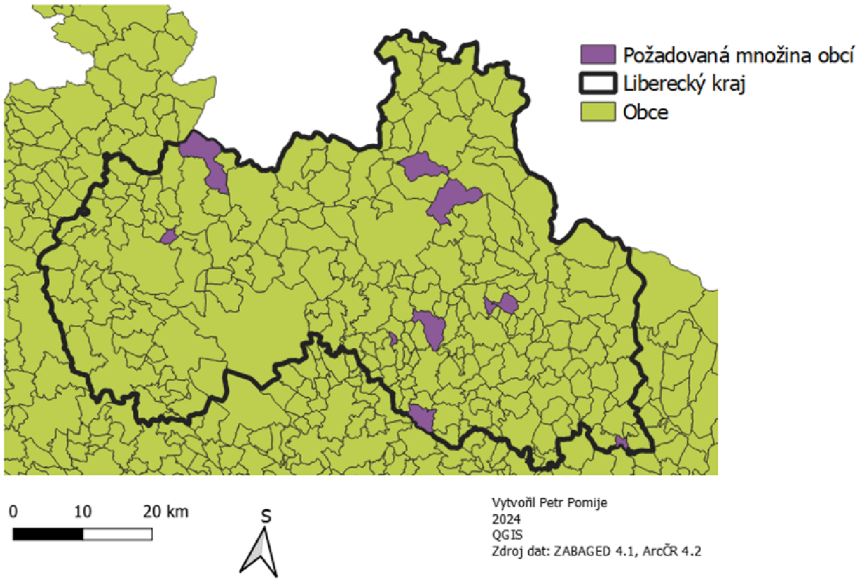
Obrázek 140: Řešení úlohy 7.5, c)

d)



Obrázek 141: Řešení úlohy 7.5, d)

e)



Obrázek 142: Řešení úlohy 7.5, e)

8.1

	B	C	D	E
A	2	4	3	∞
B(+2)	3	3	3	7
C (+3)	2	3	3	5
D (+3)	2	3	3	5

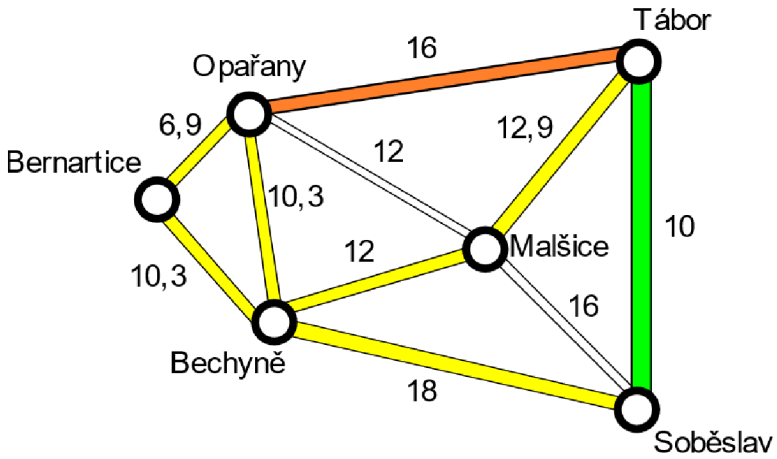
8.2 Nejkratší cesta z A do K vede přes body B, F, J a má délku 8. Ve vzdálenosti 4 nebo menší leží body B (=1), C (=2), E (=4), F (=3).

8.3

	Tábor	Bechyně	Malšice	Opařany	Bernartice
Soběslav	20	21	16	∞	∞
Malšice(+16)	20	21	16	28	∞
Tábor(+20)	20	21	16	28	∞
Bechyně (+21)	20	21	16	28	33
Opařany (+28)	20	21	16	28	33

Do servisní oblasti 25 km patří pouze Tábor, Bechyně a Malšice. Nejkratší cesta do Opařan je vede Malšice, nejkratší cesta do Bernartic vede přes Bechyni.

8.4

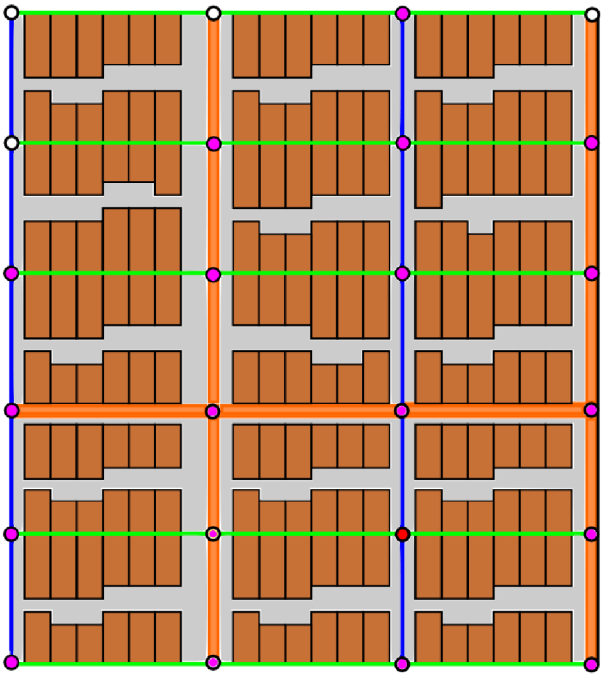


Obrázek 143: Mapka s přepočítanými časy

	Tábor	Bechyně	Malšice	Opařany	Bernartice
Soběslav	10	18	16	∞	∞
Tábor (+10)	10	18	16	26	∞
Malšice(+16)	20	18	16	26	∞
Bechyně (+18)	20	18	16	26	28,3
Opařany (+26)	20	18	16	26	28,3

Do servisní zóny 30 minut patří všechny obce, do servisní zóny 20 minut patří opět pouze Tábor, Bechyně a Malšice. Nejrychlejší cesta do Bernartic vede přes Bechyni, nejrychlejší cesta do Opařan ovšem nyní vede přes Tábor.

8.5 Fialově vyznačené křižovatky spadají do servisní zóny 10 minut



Obrázek 144: Řešení úlohy 8.5

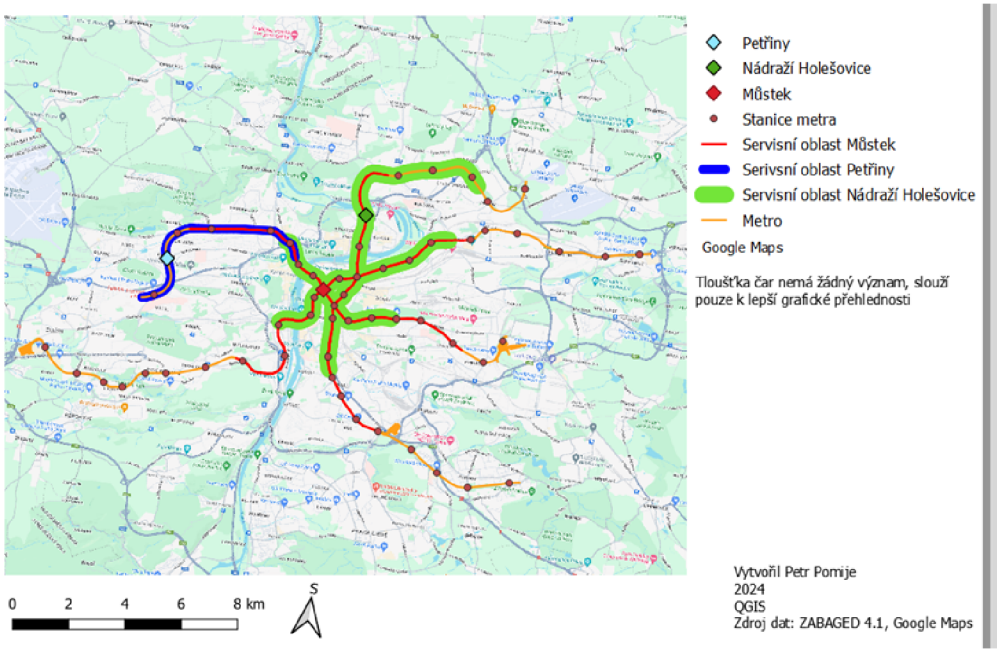
8.7 Kolonka *cost* v atributové tabulce vrstvy, která vznikne po provedení operace *Nejkratší cesta (bod k vrstvě)*, udává délku nejkratší cesty z vybraného bodu do všech bodů vybrané vrstvy v dané síti. Jednotkou je délková jednotka projektu (v tomto případě metry)

Nejkratší cesta — prvků celkem: 7, Filtrováno: 7, Vybráno: 0

	id	Typ	Nazev	cost
1	1	Historické	Klášter Zlatá Koruna	7593,51230941...
2	3	Přírodní	Rybník Olšina	32990,9838431...
3	4	Historické	Hrad Rožmberk	24657,4977973...
4	4	Přírodní	Stezka v korunách stromů	32007,7505897...
5	5	Přírodní	Kleť	15697,8337774...
6	6	Historické	Vítkův Hrádek	49345,0388457...
7	7	Historické	Zámek Český Krumlov	1235,15955551...

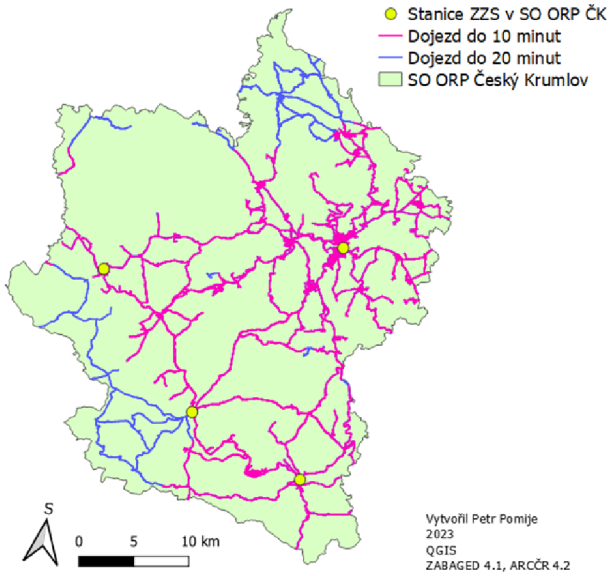
Obrázek 145: Řešení úlohy 8.7

8.8



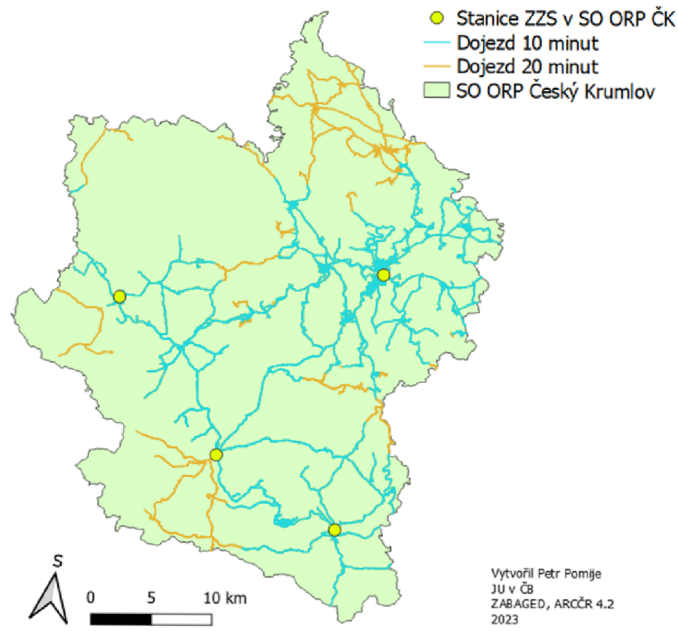
Obrázek 146: Řešení úlohy 8.8

8.9



Obrázek 147: Řešení úlohy 8.9

8.10



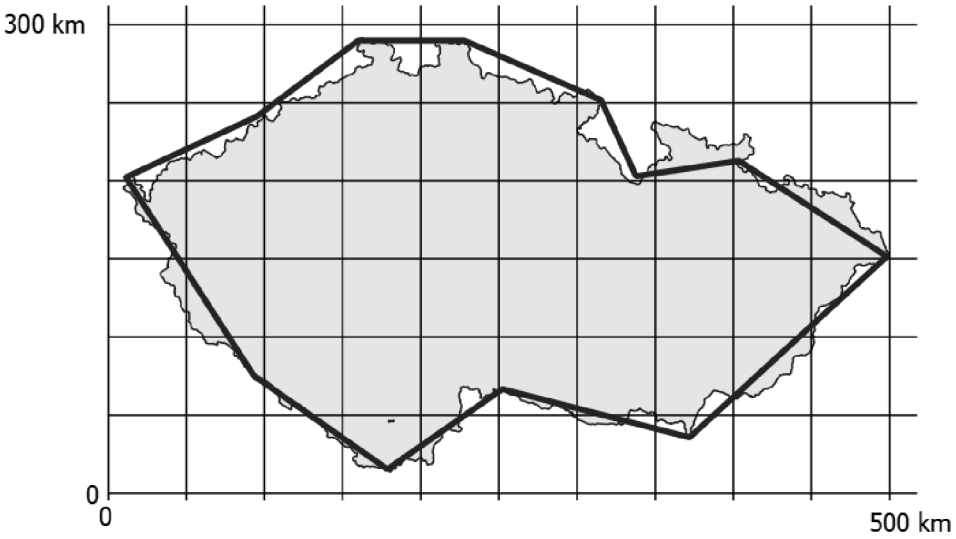
Obrázek 148: Řešení úlohy 8.10

Příloha 2 – Dotazník pro třetí ročníky gymnázia

1. Máš rád/a matematiku (ANO/NE) a geografii (ANO/NE)?

2. Vidíš v analytické geometrii smysluplné uplatnění?
   ROZHODNĚ ANO - SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ

3. Je pro tebe důležité vidět uplatnění učiva v praxi?
   ROZHODNĚ ANO - SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE



4. Poté, co jsi viděl/a řešení příkladu a počítačovou ukázku, přijde ti analytická geometrie smysluplnější a využitelnější?
   ROZHODNĚ ANO - SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE

5. Měl/a bys zájem o další podobné úlohy propojující matematiku a geografii?
   ROZHODNĚ ANO - SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE

Příloha 3 – Dotazník pro první ročníky gymnázia

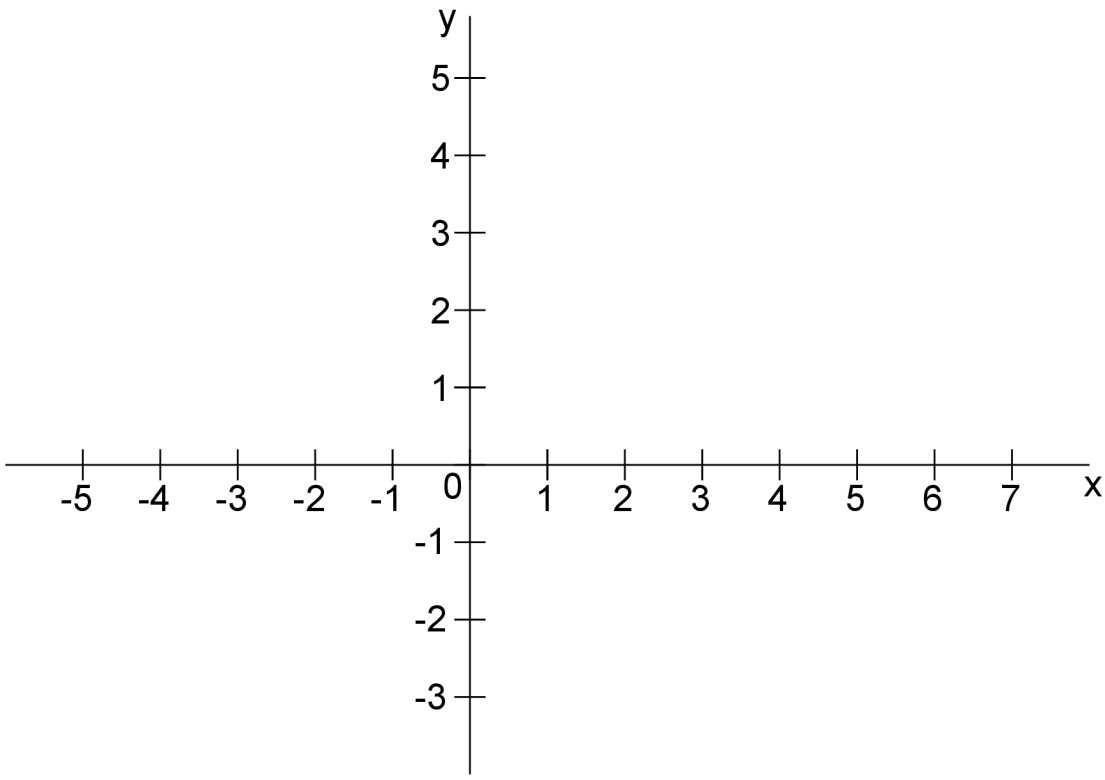
1. Máš v oblibě matematiku (ANO/NE) a geografii (ANO/NE)?
2. Je pro tebe důležité vidět uplatnění probírané látky v praxi?
   ROZHODNĚ ANO – SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE

3. Vidíš praktické využití toho, co se učíte v matematice (ANO/NE)? A v geografii (ANO/NE)?

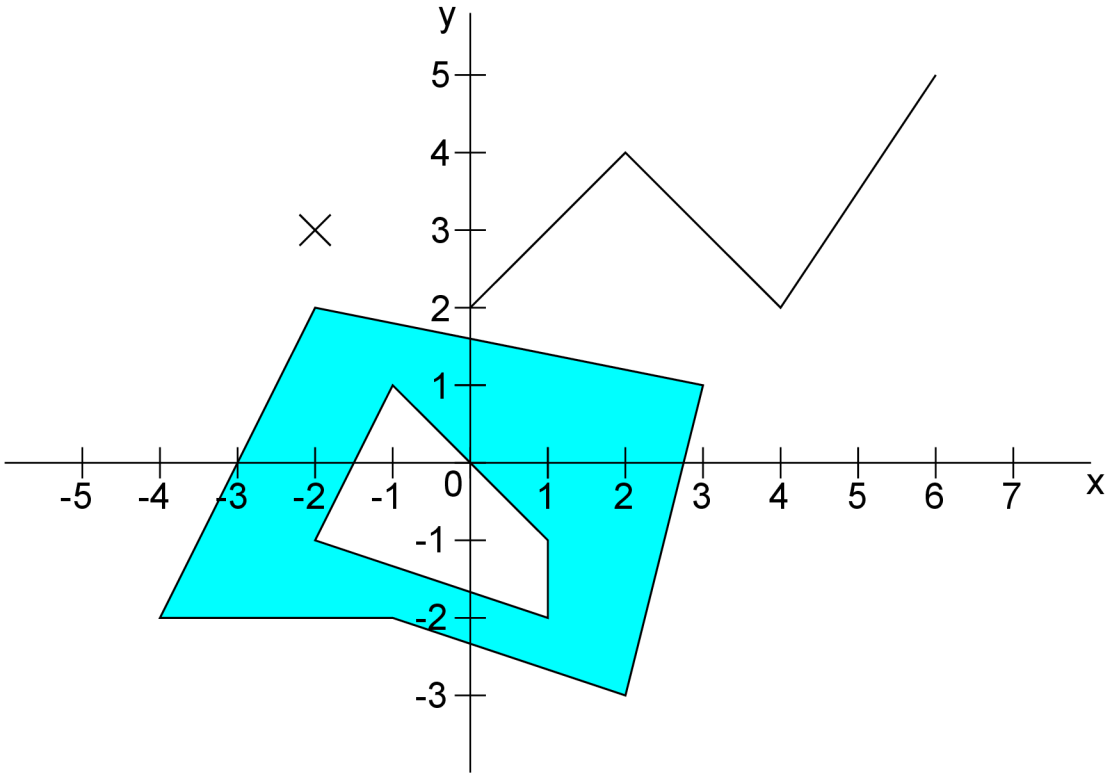
Matematické příklady

Zakresli následující geometrické objekty popsané ve WKT

A = POINT (-2 1)
B = LINESTRING (3 1, 2 2, 1 4, -2 2)
C = POLYGON= ((0 -3, 2 -2, 3 -1, 0 1, -1 -1, -2 -2, 0 -3),(-1 -2, 0 -1, 2 -1, -1 -2))



Zapiš WKT reprezentaci následujících geometrických objektů:



4. Zaujala tě prezentace o praktickém využití GIS?
   ROZHODNĚ ANO – SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE

5. Líbila se ti ukázka využití matematiky v GIS?
   ROZHODNĚ ANO – SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE

6. Líbil se ti program QGIS? Máš v úmyslu ho někdy v budoucnu použít?
   ROZHODNĚ ANO – SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE

7. Měl/a bys zájem o podobné příklady na využití matematiky v geografii?
   ROZHODNĚ ANO – SPÍŠE ANO – SPÍŠE NE – ROZHODNĚ NE