UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Saatyho Analytický hierarchický proces

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Michaela Slavíková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 15. dubna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za obětavou spolupráci, za čas, který mi věnoval při konzultacích, a také za trpělivost, se kterou mi odpovídal na všemožné dotazy. Dále bych chtěla poděkovat prodavačům obchodního domu Elpos Josef Tkadlec ve Vsetíně, za cenné rady při sběru informací o kávovarech. A v neposlední řadě bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům, jak za textovou korekturu, tak i za cenné rady při výběru kritérií v praktických příkladech.

Obsah

1 Úvod

Každý den se dostáváme do situací, kdy je nutné se rozhodnout. Ať už jde o každodenní rozhodnutí (jako např. kterou tramvají jet do školy/do práce, co si vybrat z menu na oběd, či jakou značku zubní pasty koupit), nebo o velmi důležité rozhodnutí, na jehož řešení jsme potřebovali určitý čas, ba dokonce jsme si zjišťovali názory ostatních a snažili se najít pro nás co možná nejlepší řešení. K takovýmto velkým rozhodnutím může patřit např. volba vysoké školy, koupě osobního automobilu, výběr dražšího domácího spotřebiče, či volba vhodného bytu k pronájmu.

Cílem mé bakalářské práce je popsat Saatyho metodu Analytického hierarchického procesu (dále jen AHP), jako metodu vícekriteriálního rozhodování, která nám s těmito důležitými rozhodnutími může pomoci. Pomocí této metody můžeme určit, která varianta je podle našich kritérií ta nejvhodnější, a tím se lépe zorientovat v dané rozhodovací úloze.

Autorem Saatyho metody (AHP) je Thomas L. Saaty, profesor Pittsburghské univerzity v USA. Pro nás je ale důležitější, že tuto metodu uvedl do praxe a vytvořil z ní i se svými spolupracovníky model, který je dnes běžně užíván po celém světě. O popularitě tohoto modelu svědčí i to, že byl použit při řešení mnoha komplikovaných situací. Zmínit můžeme, že pan Saaty pomáhal např. firmě Ford Motor Company při analyzování dalšího vývoje, dále pak při dohodách o odzbrojování v Íránu, pomáhal také Agentuře na ochranu životního prostředí (viz [7]).

Tato bakalářská práce se skládá ze čtyř částí. První část nás seznamuje s teoretickými pojmy, které v práci dále využíváme. Druhá část se týká problematiky vícekriteriálního rozhodování. Ve třetí části je teoreticky popsán AHP, jednotlivé podkapitoly jsou vždy vysvětleny na vlastních příkladech. Poslední čtvrtá část je praktický příklad, kde metodou AHP vybíráme kávovar. Analyzujeme v ní dva přístupy. V prvním se snažíme příklad pojmout laicky, vzít skupiny kritérií a navzájem je porovnávat, a tím dojít k řešení. V druhém přístupu řešíme ten samý problém se stejnými variantami i kritérii, jen použijeme složitější hierarchii (uspořádání kritérií). Na závěr srovnáme výsledky těchto dvou postupů, a to nejen jestli se výběr optimální varianty shoduje, ale také, který postup je složitější při výpočtech nebo při vzájemném porovnávání kritérií.

Doufám, že čtenáře tato práce zaujme a také jim nastíní problematiku vícekriteriálního rozhodování, konkrétně pak Saatyho AHP.

2 Základní pojmy

Saatyho Analytický hierarchický proces je matematický model, který se používá ve vícekriteriálním rozhodování. Pro jeho pochopení je nutné znát základní pojmy z lineární algebry (jako jsou např. relace uspořádání, matice a operace s nimi, determinanty, vlastní čísla, vlastní vektory matic atd.) Proto se nejdříve blíže seznámíme s těmito pojmy.

Při zpracování této kapitoly jsem pracovala s knihami: Algebra 1 od Daniela Horta a Jiřího Rachůnka [3], Úvod do teorie matic od Jindřicha Klůfa [4] a z doplňku knihy Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání od Jaroslava Ramíka [6].

2.1 Relace

Definice 2.1. Nechť S je množina, $S \times S$ je kartézský součin, tj. množina všech dvojic $(u, v), u \in S, v \in S$. Podmnožina $R \subseteq S \times S$ se nazývá *relace* na S. Jsou-li dva prvky $u, v \in S$ spolu v relaci R značíme je uRv.

Definice 2.2. Relace R na množině S se nazývá:

- *reflexivní*, jestliže platí
$$\forall u \in S : uRu, \tag{1}$$
- *symetrická*, jestliže platí
$$\forall u \in S, \forall v \in S : uRv \Rightarrow vRu, \tag{2}$$
- *antisymetrická*, jestliže platí
$$\forall u \in S, \forall v \in S : (uRv \wedge vRu) \Rightarrow u = v, \tag{3}$$
- *tranzitivní*, jestliže platí
$$\forall u \in S, \forall v \in S, \forall w \in S : (uRv \wedge vRw) \Rightarrow uRw, \tag{4}$$

- *úplná*, jestliže platí

$$\forall u \in S, \forall v \in S : uRv \vee vRu. \tag{5}$$

Definice 2.3. Relace R na množině S se nazývá *částečné uspořádání*, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Definice 2.4. Relace R na množině S se nazývá *uspořádání*, jestliže je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná.

2.2 Matice a determinant

Definice 2.5. *Matice* $A_{m\times n}$ je obdélníkové schéma reálných čísel uspořádaných v m řádcích a n sloupcích. Prvek matice A, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci se označuje a_{ij}. Matici A typu $m \times n$ potom zapisujeme takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Poznámka 2.1. *Matici A typu $m \times n$ budeme zapisovat ve zkráceném tvaru $A = \{a_{ij}\}$*

Definice 2.6. *Permutací* n prvků rozumíme jejich libovolné přeuspořádání.

Poznámka 2.2. *Permutaci značíme p. Permutace je chápána jako bijektivní zobrazení z indexové množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do indexové množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.*

Definice 2.7. Dvojice k_i, k_j se nazývá inverze v permutaci $(k) = k_1, k_2, \dots, k_n$, jestliže $i < j$ a $k_i > k_j$.

Definice 2.8. *Matice* $A_{m\times n}$ se nazývá:

- *nulová*, platí-li $n_{ij} = 0$ pro každé $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,
- *čtvercová*, jestliže se $m = n$,

- *diagonální*, pokud je čtvercová a všechny její prvky, které neleží na hlavní diagonále jsou nulové, kde hlavní diagonálou rozumíme prvky a_{ii} pro každé $i = 1, \ldots, m$,
- *skalární*, jestliže je diagonální a pro všechny prvky na hlavní diagonále platí, že jsou si rovny,
- *identická matice*, pokud je skalární a navíc pro kterou platí, že všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny jedné. Jednotkovou matici značíme I, popř. I_n,
- *transponovaná* k matici A, pokud platí, že prvek v ij-té pozici matice A se rovná prvku v ji-té pozici matice A^T,
- *matici* $P = \{p_{ij}\}$ nazveme *permutační*, jestliže platí $p_{ij} = 1$ pro $j = p(i)$, $p_{ij} = 0$ pro $j \neq p(i)$, kde $p(i)$ značí permutaci indexové množiny.

Poznámka 2.3. *Řádky a sloupce matice se nazývají vektory. Někdy se matice A může skládat pouze z jednotlivého řádkového (sloupcového) vektoru, v tom případě stačí pouze jeden index prvku matice. Např.* $A = (a_1, \ldots, a_n)$ *je řádkový vektor a*
$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *je sloupcový vektor.*

Definice 2.9. Matici $A_{m\times n}$ nazveme *symetrickou*, pokud pro ni platí a_{ij}=a_{ji} pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 2.10. Matici $A_{m\times n}$ nazveme *reciprokou*, pokud pro ni platí $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 2.11. Nechť $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ jsou matice typu $m \times n$. *Matice* A je *nezáporná* (píšeme $A \geq 0$), jestliže $a_{ij} \geq 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Matice* A je *kladná* (píšeme $A > 0$), jestliže $a_{ij} > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Definujeme také $A \geq B$, jestliže platí $a_{ij} \geq b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 2.12. *Matice* $C = \{c_{ij}\}$ je *součtem matic* $A = \{a_{ij}\}$ a $B = \{b_{ij}\}$, jestliže platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 2.13. *Skalární násobek matice* $A = \{a_{ij}\}$ je matice jejíž všechny prvky jsou rovny součinu každého prvku z matice A s konstantou $a \in \mathbb{R}$, tj. $a\mathrm{A} = \{a \cdot a_{ij}\}$

Definice 2.14. Nechť $A = \{a_{ij}\}$ je matice typu $m \times n$, $B = \{b_{jk}\}$ je matice typu $n \times r$. Matice $C = \{c_{jk}\}$, typu $m \times r$ je *součinem matic* A a B, tzn. $C = A{\cdot}\mathrm{B}$, jestliže platí $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, r$.

Pro součin matic odpovídajícího typu (počet sloupců matice A je stejný jako počet řádků matice B) platí asociativní a distributivní zákony stejně jako pro násobení reálných čísel.

Definice 2.15. *Matice* A je *kogradientní* k matici B, jestliže existuje permutační matice P taková, že platí:

$$A = P^T B P. \tag{7}$$

Definice 2.16. *Matici* A nazveme *reducibilní*, pokud je kogradientní k matici ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

kde B_1 a B_3 jsou čtvercové matice, 0 je nulová matice, jinak je A ireducibilní.

Definice 2.17. *Matice* A je *sloupcově stochastická*, jestliže $a_{ij} \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Matice* B je *řádkově stochastická*, jestliže B^T je sloupcově stochastická.

Definice 2.18. Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$. *Determinantem matice* A pak rozumíme číslo $detA$ takové, že platí

$$detA = \sum_{p} (-1)^{\alpha} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}, \tag{9}$$

kde α je počet inverzí v permutaci a kde sčítáme všechny permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \tag{10}$$

množiny {1, 2, ..., n}.

2.3 Vlastní čísla

Definice 2.19. Nechť A je čtvercová matice. Komplexní číslo λ, které vyhovuje rovnici:

$$det(A - \lambda I) = 0, \tag{11}$$

se nazývá *vlastní číslo* matice A. Rovnice $det(A - \lambda I) = 0$ se nazývá *charakteristická rovnice* matice A.

Poznámka 2.4. *Hledáme-li vlastní čísla čtvercové matice A typu $n \times n$, řešíme charakteristickou rovnici:*

$$\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + k_2\lambda^{n-2} + \ldots + k_{n-1}\lambda + k_n = 0, \tag{12}$$

která se nazývá algebraická rovnice n-tého stupně o jedné neznámé λ, která má alespoň jeden kořen. Rovnice se dá napsat jako:

$$(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n) = 0, \tag{13}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou komplexní čísla, která nemusí být od sebe různá. Odtud plyne, že čtvercová matice A typu $n \times n$ má právě n vlastních čísel.

Definice 2.20. Nechť λ je vlastní číslo čtvercové matice A. Nenulový vektor $\mathbf{x} \in K_n$, pro který platí:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{14}$$

se nazývá *vlastní vektor* matice A příslušný vlastnímu číslu λ, kde K_n značí množinu všech uspořádaných n-tic komplexních čísel.

Poznámka 2.5. *Vektor* $\mathbf{x}$ *můžeme nazývat vlastním vektorem matice, právě když existuje nenulové řešení soustavy:*

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

pro nějaké číslo λ*. Tento vztah používáme při výpočtu.*

Věta 2.1. ***Perron-Frobeniova věta o vlastních číslech***
Nechť $S \geq 0$ *je ireducibilní čtvercová matice typu* $m \times m$*. Potom platí:*

- S *má jednoduché (nikoliv vícenásobné) kladné maximální vlastní číslo* $\lambda_{\max}$*.*
- *Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu* $\lambda_{\max}$ *má kladné složky a je určen jednoznačně až na kladný násobek.*
- *Pro maximální vlastní číslo* $\lambda_{\max}$ *a libovolný vektor* $\mathbf{x} \geq 0$*,* $x \in \mathbb{R}^m$ *platí:*

$$\lambda_{\max} = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq m} \frac{(S\mathbf{x})_i}{x_i} = \min_{x \geq 0} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{(S\mathbf{x})_i}{x_i}, \tag{16}$$

kde $S(\mathbf{x}_i)$ *je* i*-tý prvek vektoru* $S\mathbf{x}$*.*

Důkaz: Viz [2] ∎

Věta 2.1 zajišťuje pro matici párových porovnávání $S_f = \{s_{ij}\}$ existenci, jak kladného maximálního vlastního čísla $\lambda_{\max}$, tak i příslušného vektoru s kladnými složkami, z něhož po normalizaci získáme požadovaný vektor vah. Poslední část věty poskytuje odhad $\lambda_{\max}$. Tento odhad je dále zpřesněn v následujících dvou větách.

Věta 2.2. *Nechť* $S \geq 0$ *je ireducibilní čtvercová matice typu* $m \times m$*, kde* $\mathbf{x} \geq 0$ *je libovolný vektor z* $\mathbb{R}^m$*. Potom platí:*

$$\min_{1 \leq i \leq m} \frac{(S\mathbf{x})_i}{x_i} \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1 \leq i \leq m} \frac{(S\mathbf{x})_i}{x_i} \tag{17}$$

Důkaz: Viz [2] ∎

Věta 2.3. *Za předpokladu věty 2.2 je* $\lambda_{\max}$ *shora omezená maximálním řádkovým (sloupcovým) součtem matice* $S = \{s_{ij}\}$*, zdola je omezená minimálním řádkovým (sloupcovým) součtem, tedy platí:*

$$\min_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} s_{ij} \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} s_{ij} \tag{18}$$

$$\min_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} s_{ij} \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{m} s_{ij} \tag{19}$$

Důkaz: Viz [2] ∎

Věta 2.4. ***Wielandtova věta***

Nechť $S \geq 0$ *je ireducibilní čtvercová matice typu* $m \times m$*, a také* $\lambda_{\max}(S)$ *označuje maximální vlastní číslo matice* S*. Potom pro čtvercovou matici* S^* *typu* $m \times m$*, pro kterou* $S^* \geq S$ *platí:*

$$\lambda_{\max}(S^*) \geq \lambda_{\max}(S) \tag{20}$$

Důkaz: Viz [5] ∎

Wielandtovu větu lze přeformulovat takto: Vzroste-li hodnota některého prvku s_{ij} matice S, pak hodnota příslušného vlastního čísla rovněž vzroste.

3 Vícekriteriální rozhodování

V této kapitole budu vycházet z knihy Manažerské rozhodování, od autorů Jiřího Fotra, Jiřího Dědiny a Heleny Hrůzové [1] a také z knihy Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání od Jaroslava Ramíka [6].

Z názvu vícekriteriálního rozhodování je zřejmé, že se jedná o rozhodování podle více kritérií. Jako příklad si můžeme uvést koupi osobního automobilu, kdy vybíráme mezi 6 vozy (stejné kategorie - např. rodinný vůz střední třídy) a rozhodujeme se např. podle ceny, bezpečnostních prvků, typu převodovky, výkonu motoru, průměrné spotřeby, velikosti zavazadlového prostoru, ceny náhradních dílů, vzdálenosti k nejbližšímu autorizovanému servisu atd. Z našeho příkladu, kdy hledáme vhodný rodinný vůz, se rázem stal pro laika téměř nevyřešitelný případ, kdy se místo racionální úvahy přiklání spíše ke zkušenostem a intuici. Naším úkolem je i na takový složitý příklad nalézt co možná nejlepší řešení a tím laikovi usnadnit rozhodování.

Už na začátku je dobré zmínit, že modely vícekriteriálního hodnocení neurčí obecnou nejlepší variantu, ale nejoptimálnější variantu pro rozhodovatele. Tedy např. pokud si bude vybírat auto rodina, kde mají dvě malé děti, určitě upřednostní jiné parametry, než rodina, kde jsou děti už dospělé a rodiče auto používají jen k dopravě do práce a zpět. I když budou vybírat ze stejných 6 vozů, podle stejných kritérií, u kterých ale jinak ohodnotí jejich důležitost, vyjde každé rodině jiný optimální vůz.

Nejdříve si ovšem zavedeme pojmy, které budeme v textu dále užívat.

Rozhodování (neboli **rozhodovací proces**) je řešení rozhodovacího problému tj. problému s více variantami řešení. Řešením vícekriteriální rozhodovací úlohy se rozumí postup, který vede k nalezení „optimálního“ stavu systému vzhledem k uvažovaným kritériím. Vzájemně provázané činnosti tvořící náplň rozhodovacích procesů je možné charakterizovat jednotlivými složkami (prvky):

- cíl rozhodování

- subjekt a objekt rozhodování
- kritéria rozhodování
- varianty rozhodování
- stavy světa (scénáře rozhodování)

Cílem rozhodování rozumíme určitý budoucí stav systému, kterého lze dosáhnout realizací některé z variant rozhodování. Většinou se cíl rozhodování rozkládá do dílčích cílů, které se transformují do podoby rozhodovacích kritérií.

Kritéria hodnocení se zpravidla odvozují od stanovených cílů řešení. Jsou to hlediska zvolená rozhodovatelem, která slouží k posouzení výhodnosti jednotlivých variant. Je třeba rozlišovat **nákladová** a **výnosová kritéria**. U nákladových kritérií se preferují nižší hodnoty (např. výrobní náklady, v našem případě: cena automobilu, průměrná spotřeba), zatímco u výnosových kritérií preferuje rozhodovatel vyšší hodnoty (např. zisk, v našem případě: velikost zavazadlového prostoru, výkon motoru). Dále se kritéria dělí na **kvantitativní** (hodnoty kritéria jsou vyjádřena číselně) a **kvalitativní** (důsledky variant vzhledem k těmto kritériím jsou vyjádřeny slovně).

Variantami rozumíme nejrůznější prvky, které má smysl porovnávat. (Např. při nákupu se zákazník rozhoduje mezi variantami určitého typu - např. osobní automobily, mobilní telefony atd.) S variantami rozhodování jsou úzce spojeny jejich **důsledky**, které chápeme jako předpokládané dopady variant, po jejich zvolení.

Subjektem rozhodování neboli rozhodovatelem označujeme subjekt, který rozhoduje, tj. volí variantu určenou k realizaci. Subjektem rozhodování může být jednotlivec, nebo skupina lidí (orgán).

Objekt rozhodování se zpravidla chápe jako systém, v němž je formulován rozhodovací problém, cíl, kritéria i varianty rozhodování. Objektem rozhodování může být např. koupě nového osobního automobilu.

Stavy světa chápeme jako budoucí vzájemně se vylučující situace, které mohou po realizaci varianty rozhodování nastat mimo kontrolu rozhodovatele.

Pracujeme s nimi jako s náhodnými faktory. Stavy světa hrají důležitou úlohu v případě rozhodování za rizika popř. za nejistoty.

Rozhodovací procesy za jistoty, rizika a nejistoty

Základní prvky rozhodovacího procesu máme uvedeny, teď nám zbývá rozdělit rozhodovací proces podle budoucích stavů světa a důsledků variant podle jednotlivých kritérií. **Rozhodování za jistoty** je rozhodovací proces, kdy rozhodovatel zná přesné důsledky jednotlivých variant i budoucích situací (stavů světa). Pokud rozhodovatel zná možné budoucí situace, které mohou nastat, a tím i důsledky při těchto stavech světa, a zároveň zná i pravděpodobnosti, ke kterým dochází po volbě určité varianty, pak hovoříme o **rozhodování za rizika**. Pokud rozhodovatel nezná ani možné budoucí stavy světa pak jde o **rozhodovací proces za nejistoty**.

O tom jakou metodu rozhodování použijeme, můžeme rozhodnout podle většího počtu hledisek. My jsme si vybrali základní členění tedy **metody rozhodování za jistoty a metody rozhodování za rizika a nejistoty**. Metody, které se využívají při rozhodování za jistoty jsou např. Bodová stupnice, Alokace 100 bodů, Metoda párového srovnávání a další. K metodám rozhodování za rizika a nejistoty patří např. Metoda aspirační úrovně, Metoda očekávaného užitku, Metoda očekávané hodnoty a rozptylu, Pravidlo minimaxu, Pravidlo maximaxu a další. O těchto metodách se můžete dočíst např. v knize Manažerské rozhodování od Jiřího Fotra, Jiřího Dědiny a Heleny Hrůzové [1], nebo v knize Jaroslava Ramíka Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání [6].

Saatyho metoda nám pomáhá nalézt optimální řešení jak za jistoty tak také za rizika. V této práci se budeme zabývat pouze případem za jistoty. O tom, jak využít metodu AHP v situaci za rizika se můžete více dočíst v knize Jaroslava Ramíka Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání [6]

4 Saatyho Analytický hierarchický proces

Jak je již zmíněno v předchozí kapitole, rozhodovací úlohy můžeme dělit na dvě skupiny a to na jednoduché a ty složitější. Ve složitějších rozhodovacích úlohách počet prvků (variant a kritérií) a celková komplexnost narůstá natolik, že má rozhodovatel problém v úloze se zorientovat. Proto v 70. letech 20. století vytvořil profesor Thomas L. Saaty metodu analytického hierarchického procesu (dále jen AHP), kterou se svými kolegy rozvinul do praktického nástroje k řešení těchto komplikovaných úloh.

AHP se dá popsat jako metoda rozkladu složité nestrukturované situace na jednodušší části - tzv. **hierarchický systém**. Poté pomocí subjektivního hodnocení párového porovnávání tato metoda přiřazuje jednotlivým komponentům číselné hodnoty, které vyjadřují jejich relativní důležitost. Následnou syntézou těchto hodnocení se pak stanoví komponenta s nejvyšší prioritou.

Metoda AHP řeší problém podobně jako lidský mozek dvěma přístupy a to deduktivní a induktivní cestou. Deduktivní metoda (pomocí logiky) analyzuje strukturu prvků a vztahů, hledá příčiny fungování jednotlivých částí, a pak zobecní výsledek pro celý systém. Induktivní metoda (neboli systémový přístup) řeší fungování systému jako celku v rámci jeho okolí. AHP kombinuje oba přístupy v jednotném rámci (nejprve problém strukturuje do vzájemně propojených částí, poté měřením a uspořádáním jednotlivých částí syntetizuje jejich dopad na celý systém).

Metoda AHP existuje také ve formě počítačového softwaru a to pod názvem *Expert Choice (EC)*, který zohledňuje jak kvalitativní, tak i kvantitativní informace včetně intuice a zkušeností.

V této kapitole budu vycházet z knihy Jaroslava Ramíka Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání [6].

V další části této kapitoly se budeme zabývat hierarchií, prioritami a následně syntézou.

4.1 Hierarchie

Hierarchická struktura (neboli *hierarchie*) představuje zvláštní typ systému, kdy lze prvky seskupit do disjunktních množin, kde prvky jedné skupiny ovlivňují prvky jiné skupiny a samy jsou ovlivňovány prvky jediné jiné skupiny. Prvky ve skupině, kterou nazýváme úroveň nebo shluk, jsou vzájemně nezávislé.

Definice 4.1. Nechť S je množina, relace $\preceq$ je částečné uspořádání na S, H je podmnožina, tj. $H \subseteq S$. Řekneme, že $s_{\max} \in H$ je *maximální prvek* v H, jestliže platí:

$$x \preceq s_{\max} \tag{21}$$

pro každé $x \in H$. Analogicky řekneme, že $s_{\min} \in H$ je *minimální prvek* v H, jestliže platí:

$$s_{\min} \preceq x \tag{22}$$

pro každé $x \in H$.

Definice 4.2. Nechť H je konečná množina, částečně uspořádaná relací $\preceq$, nechť $s_{\max}$ je maximální prvek v H. Řekneme, že $\mathbf{H} = (H, \preceq)$ je *hierarchie* jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. Existuje rozklad H na množiny $L_k, k = 1, 2, \ldots, h$, tj. $H = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_h, L_i \cap L_j = \emptyset$.
2. Jestliže $x \in L_k$ potom $x^- = \{y \mid y \preceq x\} \subseteq L_{k+1} k = 1, 2, \ldots h - 1$.
3. Jestliže $x \in L_k$ potom $x^+ = \{y \mid x \preceq y\} \subseteq L_{k-1} k = 2, 3, \ldots, h$.

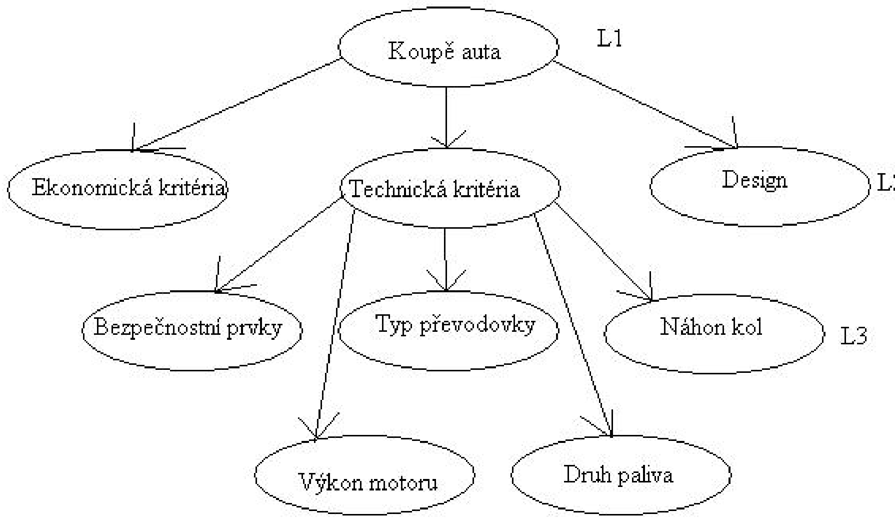
Množiny L_k se nazývají hierarchické úrovně (hladiny) $\mathbf{H}$, $L_1 = \{s_{\max}\}$ je nejvyšší hierarchická úroveň $\mathbf{H}$, L_h je nejnižší hierarchická úroveň $\mathbf{H}$.

Definice 4.3. $\mathbf{H}$ z předcházející definice se nazývá *úplná*, jestliže platí:

$$x^+ = L_{k-1}, k = 2, 3, \ldots, h, \text{ pro všechna } x \in L_k. \tag{23}$$

V úplné hierarchii libovolný prvek vyšší hierarchické úrovně ovlivňuje každý prvek nižší hierarchické úrovně.

Hierarchii $\mathbf{H} = (H, \preceq)$ je možné vyjádřit pomocí orientovaného grafu $G = (U, S)$. Prvky množiny H tvoří uzly grafu G, tj. $U = H$, množina hran S grafu G je tvořena všemi dvojicemi prvků $x, y \in H$, pro něž platí: $x \preceq y$.



Obrázek 1: Hierarchické úrovně kritérií při výběru osobního automobilu

Příklad 4.1. Hierarchii si ukážeme na praktickém příkladu (viz Obr. 1), kdy si chce rozhodovatel koupit osobní automobil. Jeho cíl je „Koupě osobního automobilu“, tento cíl nazveme úrovní L_1, neboli nejvyšší úrovní. Tento cíl se nám rozpadá na dílčí kritéria, podle kterých se budeme rozhodovat, a to konkrétně na „Ekonomická kritéria, Technická kritéria a Design“. Tato dílčí kritéria jsou v úrovni L_2, neboť přímo ovlivňují úroveň L_1 a jsou přímo ovlivňována kritérii z úrovně L_3, zde jsou uvedena pro zjednodušení pouze technická kritéria „Bezpečnostní prvky, Výkon motoru, Druh paliva, Typ převodovky a náhon kol“. V tomto zjednodušeném příkladu se nejedná o úplnou hierarchii, protože všechny prvky z úrovně L_2 (konkrétně Ekonomická kritéria a Design) neovlivňují prvky z

L_3, které jsou ovlivňovány pouze jedním nadřazeným kritériem (technickým).

4.2 Priority

Prioritou rozumíme věc mající přednost. Tedy věc, kterou upřednostníme před jinou, protože má pro nás větší význam. O tom, jak určit v komplikované situaci rozhodování, co je pro nás prioritou, pojednává následující kapitola.

Psychologové tvrdí, že existují dva druhy porovnávání (srovnávání) a to *absolutní* a *relativní*. Při *absolutním srovnávání* jsou kritéria porovnána se zavedeným standardem, který je znám z minulosti na základě zkušeností. Při *relativním srovnávání*, porovnáváme kritéria párově obvykle podle hodnotících výrazů „lepší“ a „horší“. V AHP budeme v obou typech srovnávání používat kardinální škály (stupnice). V této kapitole se budeme zabývat postupem, jak každému i-tému prvku z k-té hierarchické úrovně L_k přidělit relativní ohodnocení w_{ki}. Prvky mezi sebou porovnáváme ve stejné hierarchické úrovni vzhledem k nadřazenému prvku z úrovně L_{k-1}. Výsledek porovnávání je interpretován jako poměr $\frac{w_{ki}}{w_{kj}}$. Tímto vzájemným porovnáváním všech kritérií mezi sebou dostaneme matici párových porovnávání a z ní vypočítáme maximální vlastní číslo, následně pak vlastní vektor, jehož normalizací získáme požadované váhy w_{ki}.

Definice 4.4. Nechť $f_i \in L_{k-1}$ je maximalizační kardinální kritérium na množině L_k, dále nechť $f_i : L_k \to \mathbb{R}$. Předpokládáme, že kritérium f_i nabývá pouze kladných hodnot, tj. $f_i(x_j) > 0$ pro všechna $x_j \in L_k$. Pro každé $f_i \in L_{k-1}$, zavedeme místo původního kritéria f_i normalizované kritérium G_i:

$$G_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} f_i(x_j)}, x \in L_k. \tag{24}$$

Je zřejmé, že normalizovaná kritéria transformují původní hodnoty kritérií do jednotkové škály [0,1], kde součet všech normalizovaných kritérií je roven 1.

Párová porovnávání prvků ze stejné hierarchické úrovně se provádí pomocí tzv. Základní stupnice. V této stupnici jsou seřazeny významnosti kritérií od $1 - 9$, navíc jsou jednotlivé hodnotící stupně popsány slovně, což usnadňuje zvolení příslušné hodnoty. Pro lepší orientaci zde uvádím tabulku pouze s pěti prvky, tabulku je možné rozšířit a tím stupně porovnávání zjemnit.

Základní stupnice

Počet bodů	Deskriptor
1	Kritéria jsou stejně významná
3	První kritérium je slabě významnější než druhé
5	První kritérium je dosti významnější než druhé
7	První kritérium je prokazatelně významnější než druhé
9	První kritérium je absolutně významnější než druhé

Poznámka: Hodnoty 2, 4, 6, 8 lze využít k jemnějšímu rozlišení velikostí preferencí dvojic kritérií. [1]

Číselné hodnoty hodnotících stupňů uvádí, kolikrát je jedno srovnávané kritérium důležitější než druhé.

Definice 4.5. Matice párových porovnávání $S_j = \{s_{ij}\}$, je matice, jejíž prvky s_{ij} vyjadřují poměr mezi významností prvku x_i a významností prvku x_j, vzhledem k prvku $f \in L_{k-1}$, tj. poměr vah v_i a v_j.

$$s_{ij} = \frac{v_i}{v_j}, x_i, x_j \in L_k, i, j = 1, 2, \dots m, \tag{25}$$

kde m je počet prvků v L_k.

Protože však váhy v_i nejsou předem známy (naším cílem je váhy stanovit), využívá se k jejich stanovení matice párových porovnávání $S = \{s_{ij}\}$ a její prvky s_{ij}, které jsou prvky základní škály. Je - li x_i významnější než x_j, potom:

$$s_{ij} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}. \tag{26}$$

V opačném případě platí:

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}}. \tag{27}$$

Vztah (27) je přirozené interpretovat jako: pokud prvek x_j je s_{ji}-krát důležitější než prvek x_i, potom můžeme opačně interpretovat významnost prvku x_i jako

[1] Tabulka je převzata z knihy Manažerské rozhodování od autorů Jiřího Fotra, Jiřího Dědiny, Heleny Hrůzové, s.127 [1]

$\frac{1}{S_{ji}}$-tou část významnosti prvku x_j. Pokud tento vztah platí pro všechny prvky s_{ij} matice $S_f = \{s_{ij}\}$, pak říkáme, že matice S_f je **reciproká**.

Ke stanovení vah uvažovaných kritérií metodou AHP potřebujeme znát vlastní vektor odpovídající maximálnímu vlastnímu číslu $\lambda_{\max}$ matice párových porovnávání S_f. Řešením soustavy m rovnic o m neznámých $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ve vektorovém tvaru:

$$(S_f - \lambda_{\max} I)\mathbf{w} = 0. \tag{28}$$

Nebo jinak napsáno:

$$S_f \mathbf{w} = \lambda_{\max} \mathbf{w}, \tag{29}$$

kde získáme vlastní vektor $\mathbf{w}$, z něhož pak stanovíme váhy takto:

$$v_i = \frac{w_i}{\|\mathbf{w}\|}, i = 1, 2, \ldots, m. \tag{30}$$

Symbol $\|\mathbf{w}\|$ zde označuje velikost vektoru $\mathbf{w}$, tj. $\|\mathbf{w}\| = \sum_{i=1}^{m} w_i$.

Jak již bylo řečeno metoda AHP je založena na párovém porovnávání alternativ, což má své výhody i nevýhody. Hlavní nevýhodou je, že může být porušena konzistentnost.

O matici $S = \{s_{ij}\}$ předpokládáme, že je reciproká, dále že je konzistentní (tzn. že relace, kterou matice reprezentuje, je tranzitivní):

$$s_{ij} = s_{iq} \cdot s_{gj}, \text{ pro všechna } i, j, q = 1, 2, \ldots, m. \tag{31}$$

Konzistenci matice párových porovnání $S = \{s_{ij}\}$ můžeme vysvětlit takto: Pokud řekneme, že prvek x_i je s_{iq}-krát důležitější než prvek s_q (podle hodnotícího kritéria f), a dále prvek s_q je s_{qj}-krát důležitější než prvek x_j, potom prvek x_i je $s_{ij} = s_{iq} \cdot s_{qj}$-krát důležitější než prvek x_j. V praxi je však naprostá konzistentnost porovnávání kvalitativních kritérií spíše výjimečná.

Naopak typickým příkladem konzistentní matice párových porovnávání je situace, kdy váhy - hodnoty kvantitativního kritéria $v_i > 0$, $v_j > 0$ jsou známy, tedy pro prvky matice párových porovnávání $S = \{s_{ij}\}$ platí:

$$s_{ij} = \frac{v_i}{v_j}, \text{ pro všechna } i, j = 1, 2, \dots, m. \tag{32}$$

Věta 4.1. *Nechť $S = \{s_{ij}\}$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, jejíž prvky splňují předpis (32). Potom matice S je reciproká a konzistentní.*

Důkaz: Viz [6]. ■

Věta 4.2. *Nechť $S = \{s_{ij}\}$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, jejíž prvky splňují podmínku (32), kde $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ je vektor kladných čísel. Potom platí:*

$$S\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v} \tag{33}$$

tuto rovnost je možné přepsat jako:

$$(S - mI)\boldsymbol{v} = 0 \tag{34}$$

tudíž m je vlastní číslo matice S a $\boldsymbol{v}$ je příslušný vlastní vektor.

Důkaz: Viz [6]. ■

Věta 4.3. *Nechť $S = \{s_{ij}\}$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, jejíž prvky splňují předpis (32), kde $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ je vektor s kladnými složkami $v_i > 0$. Potom platí:*

$$\lambda_{\max} = m \tag{35}$$

a všechna ostatní vlastní čísla jsou rovna 0.

Důkaz: Viz [6]. ■

Jak jsem již uvedla dříve, konzistentnost matice párových porovnávání bývá obvykle porušena. Reciprocita bývá zachována díky tomu, že většinou provádíme pouze jedno porovnání každých dvou alternativ s tím, že opačné páry ohodnotíme automaticky převrácenou hodnotou. V této části ukážeme, že vlastní číslo matice párových porovnávání, která je reciproká (nemusí být konzistentní) je větší nebo rovno m, jestliže je maximální vlastní číslo rovno m, pak je matice párových porovnávání konzistentní. Zavedeme si zde také míru nekonzistence pomocí koeficientu nekonzistence.

Věta 4.4. *Nechť $S = \{s_{ij}\}$ je čtvercová matice typu $m \times m$, která je reciproká, tzn. splňuje vztah (27). Potom pro její maximální číslo platí:*

$$\lambda_{\max} \geq m. \tag{36}$$

Důkaz: Viz [6]. ∎

Věta 4.5. *Nechť $S = \{s_{ij}\} > 0$ je čtvercová matice typu $m \times m$, která je reciproká. Jestliže pro její maximální číslo platí:*

$$\lambda_{\max} = m, \tag{37}$$

potom matice S je konzistentní.

Důkaz: Viz [6]. ∎

Definice 4.6. Nechť $S > 0$ je ireducibilní čtvercová matice typu $m \times m$. *Indexem nekonzistence* matice S nazýváme číslo I_S definované vztahem:

$$I_S = \frac{\lambda_{\max} - 1}{m - 1}. \tag{38}$$

Čím větší je index nekonzistence, tím větší nekonzistence je mezi jednotlivými párovými porovnáními. Naopak čím více se index nekonzistence blíží k 0, tím více se konzistence blíží k naprosté konzistenci.

Jak jsem již uvedla, v praktickém modelu bývá naprostá konzistence spíše výjimečná. Pokud se nám ale index nekonzistence blíží k 0, můžeme říci, že rozhodovatel měl o kritériích poměrně jasnou představu, a proto si kritéria vzájemně neodporují. Blíže si to uvedeme na příkladu.

Příklad 4.2. Máme dva rozhodovatele, kteří chtějí koupit osobní automobil a srovnávají pouze technická kritéria, konkrétně: typ převodovky, bezpečnostní prvky a náhon kol.

Rozhodovatel A bydlí v dostupném místě, proto pro něj náhon kol není moc důležité kritérium. Ohodnotí kritéria takto:

- typ převodovky je absolutně důležitější než náhon kol (dle deskriptoru 9)
- bezpečnostní prvky jsou dosti důležitější než náhon kol (dle deskriptoru 5)
- bezpečnostní prvky jsou slabě důležitější než typ převodovky (dle deskriptoru 3)

Rozhodovatel B bydlí na nedostupném místě (v zimě má problém vyjet do kopce k domu), proto je pro něj náhon kol důležitým kritériem. Ohodnotí kritéria takto:

- typ převodovky je slabě důležitější než náhon kol (dle deskriptoru 3)
- bezpečnostní prvky jsou slabě důležitější než náhon kol (dle deskriptoru 3)
- typ převodovky je stejně důležitý jako bezpečnostní prvky (dle deskriptoru 1)

U rozhodovatele A je vidět, že kritéria nemá jasně utříbená. Z prvních dvou porovnání vyplývá, že typ převodovky je důležitější než bezpečnostní prvky, při jejich vzájemném porovnávání se však rozhodovatel popře. Po dosazení hodnot do matice párového porovnávání a zjištění maximálního vlastního čísla $\lambda_{\max} = 3,324$ nám vyšel index nekonzistence $I_S = 0,162$. Normovaný vlastní vektor odpovídající maximálnímu vlastnímu číslu vypadá následovně

$$\mathbf{x}_A = (0,344; 0,589; 0,067)^T.$$

Jednotlivé prvky vektoru představují váhy jednotlivých kritérií (typ převodovky má váhu $0,344$, bezpečnostním prvkům odpovídá váha $0,589$ a na náhon kol nám vyplývá váha $0,067$). Tyto výsledky si odporují s tím, jak nám rozhodovatel jednotlivá kritéria ohodnotil. Pokud je typ převodovky absolutně důležitější než náhon kol (tedy dle dekriptoru 9) a bezpečnostní prvky jsou dosti důležitější než náhon kol (dle dekriptoru 5), pak by nám měla vyjít hodnota váhy u kritéria typ převodovky větší, než u kritéria bezpečnostní prvky. Vzhledem k tomu, že se rozhodovatel ve třetím bodu popřel, výsledné váhy neodpovídají všem jeho tvrzením.

U rozhodovatele B jsou kritéria setříbená. Po dosazení hodnot do matice párového porovnávání nám vyšlo $\lambda_{\max} = 3$ a index nekonzistence $I_S = 0$. Normovaný vlastní vektor odpovídající maximálnímu vlastnímu číslu vypadá následovně

$$\mathbf{x}_B = (0,429; 0,429; 0,143)^T$$

.

Stejně jako v předešlém případě představují prvky vektoru váhy jednotlivých kritérií (typ převodovky má váhu 0,429, bezpečnostní prvky mají váhu a 0,429 a náhonu kol přiřazujeme váhu 0,143). Což nám přesně odpovídá stanoveným podmínkám od rozhodovatele. Kritériím typ převodovky a bezpečnostní prvky přiřazujeme stejnou váhu, a oproti třetímu kritériu tedy náhonu kol, jsou slabě důležitější.

Indexem nekonzistence zjišťujeme, jestli rozhodovatel vnímá jednotlivá kritéria při párovém porovnávání stejně. Pokud máme jako tady v příkladu pouze 3 kritéria, dokážeme sami říci, zda si při určování významnosti kritérií neodporuje. V případě většího počtu kritérií je však pro nás index nekonzistence velice užitečný. Pokud dochází k velké nekonzistenci, nejsou výsledky poskytnuté Saatyho metodou zcela transparentní.

4.3 Syntéza

V této kapitole se budeme zabývat syntézou dílčích hodnocení jednotlivých prvků v hierarchii s cílem získat **celkové hodnocení**.

Uvažujme nejprve hierarchii $\mathbf{H} = (H, \preceq)$, která má minimálně dvě úrovně, tj. $h \geq 2$. Zvolíme úroveň k a vyšetřujeme konkrétně po sobě následující hierarchické úrovně L_k, L_{k+1}, jejich prvky označíme takto:

$$L_k = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_{m_k}^k\}, \tag{39}$$

$$L_{k+1} = \{x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{m_{k+1}}^{k+1}\}. \tag{40}$$

Definice 4.7. Ke každému prvku $x \in L_k$, který je „kritériem“ pro párová porovnání prvků z L_{k+1} obdržíme reciprokou matici párových porovnání S_x na prvcích z $x^- \subseteq L_{k+1}$. K této matici přísluší maximální vlastní číslo a k němu vlastní vektor - vektor vah:

$$v^k(x) = (v_1^k(x), v_2^k(x), \dots, v_{m_{k+1}}^k(x)). \tag{41}$$

Zde jsme přiřadili váhu 0 těm prvkům z L_{k+1}, které nepatří do x^-. Tento vektor nazýváme *vektor priorit k-té hierarchické úrovně vzhledem k prvku* $x \in L_k$.

Definice 4.8. Matici priorit k-té hierarchické úrovně B_k hierarchie $\mathbf{H} = (H, \preceq)$, která má minimálně dvě úrovně, tj. $h \geq 2$, kde $k \in \{1, 2, \dots, h-1\}$, nazveme matici typu $m_{k+1} \times m_k$, jejíž prvky jsou tvořeny vahami $v^k(x)$ pro všechny prvky $x \in L_k$, takto:

$$B_k = \begin{pmatrix} v_1^k(x_1^k) & v_1^k(x_2^k) & \dots & v_1^k(x_{m_i}^k) \\ v_2^k(x_1^k) & v_2^k(x_2^k) & \dots & v_2^k(x_{m_i}^k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m_{i+1}}^k(x_1^k) & v_{m_{i+1}}^k(x_2^k) & \dots & v_{m_{i+1}}^k(x_{m_i}^k) \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Definice 4.9. Nechť $1 \leq p < q \leq h-1$. *Vektorem priorit q-té hierarchické úrovně vzhledem k prvku $x \in L_p$* nazveme vektor $v_p^q(x)$ definovaný takto:

$$v_p^q(x) = B_q B_{q-1} \dots B_{p+1} v^p(x). \tag{43}$$

Nejčastějším případem je situace, kdy $p = 1$, $q = h - 1$. Potom nejvyšší hierarchická úroveň obsahuje jediný prvek g - „Globální cíl“, tedy $L_1 = \{g\}$ a na nejnižší hierarchické úrovni L_h se nacházejí obvykle základní prvky hierarchie - hodnocené varianty. Vektor priorit je potom syntetickým vektorem vah hodnocených variant vzhledem ke globálnímu cíli:

$$v_1^{h-1}(g) = B_{h-1} B_{h-2} \dots B_2 v^1(g). \tag{44}$$

Nyní si nadefinujeme souhrnný index nekonzistence hierarchie $H = (H, \preceq)$, která má $h \geq 2$ hierarchických úrovní. Již máme nadefinovaný index nekonzistence I_S pro každý prvek hierarchie s výjimkou prvků, které leží v nejnižší hierarchické úrovni L_h. Pro každý prvek $x \in L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_{h-1}$ existuje kladná reciproká matice párových porovnání S_x k prvkům ležícím v x^-.

Definice 4.10. Nechť $1 \leq k \leq h-1$. Indexem nekonzistence I_S^k prvku z hierarchické úrovně L_k definujeme takto:
Pro $k = h-1$ položíme:
$I_x^{h-1} = I_x$ pro všechna $x \in L_{h-1}$.
Pro $1 \leq k < h-1$ definujeme index nekonzistence postupně takto:
Je-li definováno I_y^{k+1} pro všechna $y \in L_{k+1}$, potom definujeme:

$$I_x^k = \max\left\{ I_x, \sum_{y \in L_{k+1}} v_y^k(x) I_y^{k+1} \right\}, \text{ pro všechna } x \in L_k. \tag{45}$$

Index nekonzistence I_H hierarchie H je definován vztahem:

$$I_H = I_g^l. \tag{46}$$

5 Praktický příklad - výběr kávovaru

Doposud jsme o modelu Saatyho AHP hovořili pouze teoreticky - nadefinovali jsme si důležité pojmy a zmínili jejich „užitečné“ vlastnosti. Nyní přichází na řadu jeho praktické využití.

Nejprve si uvedeme rozhodovací problém, kterým je výběr domácího spotřebiče - kávovaru. Na tomto příkladu budeme analyzovat důležitost hierarchického uspořádání, zda je pro nás rozčlenění do hierarchických úrovní výhodné, tzn. jestli usnadní rozhodovateli - nematematikovi porovnávání jednotlivých variant.

5.1 Popis variant a kritérií

Uvažujme rodinu se čtyřmi dospělými lidmi (rodiče a dvě odrostlé děti), kteří rádi pijí kávu. Z tohoto důvodu se rozhodnou ke koupi kávovaru. Rodina má roční příjmy přibližně 450 000 - 500 000 Kč, od čehož se odvíjí maximální cena kávovaru. Do výběru jsou zařazeny pouze kávovary typu „espresso“, které dokáží vyrobit také cappuccino. Jelikož nikdo z rodiny překapávanou kávu nepreferuje, překapávače ani kombinované kávovary (espresso + překapávač) jsme do výběru nezařadili.

Jako aspirační úrovně, které musí kávovar nutně splňovat, aby byl zařazen do výběru, jsme zvolili tyto hodnoty:

- cena $\leq$ 10 000Kč,
- tlak čerpadla minimálně 15 barů (pro správnou pěnu espressa),
- tryska na páru (pro přípravu cappuccina a mléčných káv).

Přes zúžení výběru se nám stále nabízí velké množství kávovarů, které splňují námi stanovené aspirační úrovně. Proto zvolíme dalších 10 kritérií, podle kterých budeme kávovary posuzovat. Tato kritéria jsou roztřízena podle jednotlivých hledisek:

- **Ekonomická hlediska**

- **Cena kávovaru** - aktuální ceny jsou čerpány z internetové stránky [8], která porovnává ceny domácích spotřebičů z různých obchodů a nabízí nám jejich srovnání.
- **Cena kávy** (popř. speciálních náplní do kávovarů) - tato cena je uvedena pouze u kávovaru KRUPS 5006 Circolo Dolce Gusto, do kterého není možné dát jiné náplně. U ostatních kávovarů je možné zvolit si libovolný druh kávy, tudíž je obtížné spočítat průměrnou cenu používané kávy. Proto budou hodnoty do tohoto kvalitativního kritéria dosazeny expertně.

• **Technická hlediska**

- **Integrovaný nahřívač šálků** - v předem nahřátem šálku má espresso lepší chuť, déle mu vydrží pěna a káva si uchová svou teplotu, což hodnotíme kladně.
- **Nastavitelná výška adaptéru pro různou velikost šálků** - tato funkce je důležitá především pro milovníky mléčné kávy (jako latte macchiato). Rodina ji využije zejména v případě, že její členové mají rádi různě velkou a silnou kávu.
- **Samočisticí funkce** - zahrnuje automatické čištění, které nám vyčistí „vnitřnosti" kávovaru, a odvápnění. Tyto funkce se nám podepíší na chuti kávy, zejména při delším používání kávovaru. Jednotlivé druhy kávovarů je nutně nemusí mít obě, vyskytují se i kávovary pouze s funkcí automatického čištění.

• **Vlastnosti kávy**

- **Nastavitelné množství kávy** - tuto funkci ocení hlavně ti, kteří mají rádi různou sílu kávy. Tím se rozumí, že kávovar umí dávkovat rozdílné porce kávy (6-9g kávy).
- **Nastavitelné množství vody** - tato funkce, podobně jako u nastavitelného množství kávy, souvisí s výslednou silou nápoje. To je

ovlivněno volbou malé (cca 100ml) nebo velké kávy (cca 300ml).

  - **Typ kávy** - pokud má kávovar mlýnek, vaří nápoj ze zrnkové kávy. Některé kávovary mají dva zásobníky. Díky nim si můžeme zvolit, jestli chceme šálek z kávy mleté či zrnkové. Naopak kávovary bez mlýnku jsou pouze na mletou kávu. Zde nastává problém, jak do tohoto kritéria zařadit kávovar KRUPS 5006 Circolo Dolce Gusto, který je plněn speciálními kapslemi. Protože kapsle tvoří mletá káva, budeme jej hodnotit jako varianty na kávu mletou.

- **Design kávovaru**

  - **Celkový design kávovaru** - u tohoto kvalitativního kritéria porovnáváme vzhled kávovarů, například podle designu naší kuchyně.
  - **Jednoduchá údržba a manipulace** - porovnáváme, s jakým kávovarem se nám bude lépe pracovat. Hodnotíme náročnost přípravy šálku kávy - od mletí kávy či vložení náplně až po výsledný šálek.

V uvedených kritériích nám chybí ukazatel kvality kávy - chuť a vůně kávy, u espressa hustota pěny, u cappuccina našlehané mléko, apod. Podle tohoto kritéria však nemůžeme jednotlivé varianty hodnotit, protože každý výrobce či distributor uvádí, že nejlepší káva je právě ta z jeho kávovaru. Bez ochutnání káv ze všech kávovarů by ovšem takové porovnání nebylo možné. Proto jsme se snažili vybrat taková kritéria (ať už technická, designová nebo vlastnosti kávy), která nám určí ten nejvhodnější.

Z široké nabídky produktů jsme vybrali 8 variant, ze kterých zvolíme pomocí našeho modelu AHP nejlepší kávovar. Varianty jsou blíže představeny v Tabulkách 1 a 2 v Příloze.

5.2 Porovnávání variant vzhledem k jednotlivým kritériím

Jednotlivé varianty a kritéra byly konzultovány s celou rodinou. V naší práci však budeme dále zpracovávat pouze názory jednoho člena rodiny, a to toho, kdo bude kávovar nejvíce požívat. Tohoto člena dále nazýváme - rozhodovatel.

Abychom rozhodovateli jeho úkol co nejvíce zjednodušili, seřadili jsme všechny varianty do tabulky, kde pomocí deskriptorů vzájemně porovnává všechny varianty vůči zvolenému kritériu. V tabulce vždy srovnává pouze dvě varianty, které jsou uvedeny na stejném řádku a tomu důležitějšímu přidělí hodnotu ze škály 1, 3, 5, 7, 9. To znamená, že označí jednu z těchto hodnot na straně důležitějšího kritéria, viz. tabulka deskriptorů (4.2). Opačný vztah (méně důležitého vzhledem k důležitějšímu) si dopočítáme pomocí vztahu (27), abychom zaručili reciprocitu příslušné matice.

Rozhodovatel vyplnil 9 tabulek, které jsou uvedeny v Příloze, a to Tabulky 5 až 13. Z těchto tabulek sestavíme matice párových porovnávání, se kterými budeme dále pracovat. Je zřejmé, že rozhodovatel může subjektivně ohodnit kvalitativní kritéria (design kávovaru, samočistící funkce atd.). Kvantitativní kritéria, jejichž hodnoty známe, (v našem případě pouze cena) ohodnotíme přesně dle předpisu $s_{ij} = \frac{v_i}{v_j}$. Pro každou matici vypočítáme vlastní číslo $\lambda_{\max}$ a vlastní vektor $\mathbf{x}$ odpovídající maximálnímu vlastnímu číslu, stejně tak budeme vždy uvádět i indexy nekonzistence I_S.

Nejdříve jsme nechali rozhodovatele porovnat všech 8 variant kávovarů podle kritéria „Celkový design kávovaru“ (K_1). Výsledná srovnání podle tohoto kritéria jsou uvedena v Příloze v Tabulce 5. Matice párových porovnávání pak vypadá následovně:

$$S_{K_1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 7 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 5 \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 5 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 5 \\ 7 & 5 & 1 & \frac{1}{3} & 9 & 1 & 3 & 9 \\ 7 & 7 & 3 & 1 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 1 \\ 3 & 5 & 1 & \frac{1}{3} & 9 & 1 & \frac{1}{3} & 7 \\ 5 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 9 & 3 & 1 & 9 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}.$$

Maximální vlastní číslo odpovídající této matici je $\lambda_{\max} = 8,973$. Index nekonzistence této matice je roven $I_S = 0,139$, z čehož můžeme usuzovat, že rozhodovatel si při porovnávání jednotlivých dvojic variant příliš neprotiřečil. Tento index nekonzistence matic párových porovnávání patřil k těm největším. To je způsobeno tím, že toto kritérium je hodnoceno velmi subjektivně. Pro úplnost uvedeme i normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$, odpovídající maximálnímu vlastnímu číslu $\lambda_{\max}$,

$$\mathbf{x}_{K_1} = (0,048; 0,058; 0,215; 0,331; 0,017; 0,137; 0,179; 0,017)^T.$$

Pro druhé kritérium „Cena kávovaru“ (K_2) byl postup odlišný. Jedná se totiž o kvantitatvní kritérium, jehož hodnoty předem známe. Matici párových porovnávání proto vyplníme následovně:

$$S_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8747}{4512} & \frac{7990}{4512} & \frac{9389}{4512} & \frac{3278}{4512} & \frac{3664}{4512} & \frac{3477}{4512} & \frac{2430}{4512} \\ \frac{4512}{8747} & 1 & \frac{7990}{8747} & \frac{9389}{8747} & \frac{3278}{8747} & \frac{3664}{8747} & \frac{3477}{8747} & \frac{2430}{8747} \\ \frac{4512}{7990} & \frac{8747}{7990} & 1 & \frac{9389}{7990} & \frac{3278}{7990} & \frac{3664}{7990} & \frac{3477}{7990} & \frac{2430}{7990} \\ \frac{4512}{9389} & \frac{8747}{9389} & \frac{7990}{9389} & 1 & \frac{3278}{9389} & \frac{3664}{9389} & \frac{3477}{9389} & \frac{2430}{9389} \\ \frac{4512}{3278} & \frac{8747}{3278} & \frac{7990}{3278} & \frac{9389}{3278} & 1 & \frac{3664}{3278} & \frac{3477}{3278} & \frac{2430}{3278} \\ \frac{4512}{3664} & \frac{8747}{3664} & \frac{7990}{3664} & \frac{9389}{3664} & \frac{3278}{3664} & 1 & \frac{3477}{3664} & \frac{2430}{3664} \\ \frac{4512}{3477} & \frac{8747}{3477} & \frac{7990}{3477} & \frac{9389}{3477} & \frac{3278}{3477} & \frac{3664}{3477} & 1 & \frac{2430}{3477} \\ \frac{4512}{2430} & \frac{8747}{2430} & \frac{7990}{2430} & \frac{9389}{2430} & \frac{3278}{2430} & \frac{3664}{2430} & \frac{3477}{2430} & 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož jsme do matice vyplnili přesné hodnoty, podle věty 4.5 platí, že matice je reciproká, konzistentní a $\lambda_{\max} = m$. Tuto skutečnost jsme si ověřili výpočtem. Maximální vlastní číslo je rovno $\lambda_{\max} = 8 = m$. Protože je index nekonzistence $I_S = 0$, znamená to, že je matice konzistentní. Normovaný vlastní vektor matice nám vyšel:

$$\mathbf{x}_{K_2} = (0,120; 0,062; 0,068; 0,058; 0,165; 0,148; 0,156; 0,223)^T.$$

Již jsme si uvedli obě možnosti sestavování matic párových porovnávání, proto je u dalších kritérií už uvádět nebudeme.

Třetí kritérium „Cena kávy“ (K_3) se dá interpretovat mnoha způsoby. Zařadili jsme ho zde z důvodu, že jednou z variant je kávovar KRUPS 5006 Circolo Dolce Gusto. Jak již bylo uvedeno výše, tento kávovar není uzpůsoben na jinou kávu než na speciální kapsle, které se prodávají v balení po 16 kusech za cca 120Kč. Cena jedné kávy se tedy pohybuje kolem 7,50Kč, což je poměrně nákladné. Do ostatních kávovarů můžeme dát buďto mletou nebo zrnkovou kávu různé kvality a tedy i ceny. Z tohoto důvodu budeme toto kritérium srovnávat expertně. Výsledná srovnání variant podle tohoto kritéria jsou uvedena v Příloze v Tabulce 6.

Maximální vlastní číslo je rovno $\lambda_{\max} = 8$ a matice je tedy konzistentní (index nekonzistence $I_S = 0$). Normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ je ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{K_3} = (0,140; 0,140; 0,140; 0,140; 0,140; 0,140; 0,020; 0,140)^T.$$

Čtvrtým kritériem je „Integrovaný nahřívač šálků“ (K_4), tabulka výsledných srovnání podle tohoto kritéria je uvedena v Příloze jako Tabulka 7, u tohoto kritéria je hodnocení poměrně jednoduché. Daný kávovar buď tuto funkci má, nebo nemá.

Maximální vlastní číslo $\lambda_{\max} = 8$, matice je tedy opět konzistentní s indexem nekonzistence $I_S = 0$, normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ je ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{K_4} = (0,161; 0,161; 0,161; 0,161; 0,161; 0,161; 0,018; 0,018)^T.$$

Páté kritérium „Jednoduchá údržba a manipulace“ (K_5), které prosazovaly zejména ženy, bylo nejvíce diskutovaným kritériem. Kávovary jsme tedy rozdělili do tří skupin. V první skupině byl jediný zástupce: Krups 5006 Circolo Dolce Gusto, který je podle rozhodovatelů nejjednodušší. U něj si pouze vybereme, jaký typ kávy chceme a příslušnou náplň vložíme do kávovaru. Po zapnutí už jen čekáme na připravenou kávu. Druhou skupinu tvoří pákové kávovary (reprezentované např. kávovarem DéLonghi ECO 310), které mají středně těžkou obsluhu. Do sítka na kávu si vložíme tolik gramů kávy, podle toho jak silnou kávu chceme.

Kávovar zapneme a následně vypneme, až budeme mít dostatek nápoje. Třetí skupina poloautomatické kávovary (reprezentovaná např. kávovarem Siemens TK 520) byla ohodnocena jako nejsložitější. Hodnotící tabulka podle tohoto kritéria je uvedena v Příloze jako Tabulka 8.

Maximální vlastní číslo $\lambda_{\max} = 8,172$, index nekonzistence I_S se rovná 0,025, normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ je ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{K_5} = (0,111; 0,027; 0,027; 0,027; 0,111; 0,111; 0,474; 0,111)^T.$$

Šesté kritérium „Nastavitelná výška adaptéru pro různou velikost šálků“ (K_6) je další z kritérií, která jsou pro vzájemná porovnávání variant snadná. Toto kritérium buď kávovar splňuje, nebo mu absolutně nevyhovuje. Výsledná srovnání jsou uvedena v Příloze v Tabulce 10.

Maximální vlastní číslo $\lambda_{\max} = 8$, index nekonzistence I_S je opět roven 0 a normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ je ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{K_6} = (0,042; 0,042; 0,375; 0,375; 0,042; 0,042; 0,042; 0,042)^T.$$

Sedmé kritérium „Nastavitelné množství kávy“ (K_7) je dalším kritériem, se kterým jsme měli při porovnávání nemalé problémy. Nejdříve jsme chtěli jednotlivé varianty ohodnotit pouze deskriptory 1 a 9 a tím ocenit, jestli kávovar danou funkci má, či nemá, nakonec jsme se ale po dlouhé debatě rozhodli, že toto kritérium zpřísníme a budeme brát v úvahu i to, do jaké míry dokáže kávu dávkovat (tedy jaký má rozsah). Proto je 3. varianta (kávovar Siemens TK 520) hodnocen hůře než 2. a 4. varianta. Výsledná srovnání variant podle tohoto kritéria jsou uvedena v Příloze v Tabulce 11.

Maximální vlastní číslo $\lambda_{\max} = 8,186$, index nekonzistence $I_S = 0,027$, normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ je ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{K_7} = (0,032; 0,327; 0,188; 0,327; 0,032; 0,032; 0,032; 0,032)^T.$$

Osmé kritérium „Nastavitelné množství vody“ (K_8) bývá často zaměňováno s předcházejícím kritériem nastavitelného množství kávy, proto musíme být při porovnávání kritérií opatrní. Tímto kritériem máme na mysli pouze to, zda kávovar má, či nemá funkci, kde si nastavíme velikost kávy v mililitrech. Pokud ano, pak plně vyhovuje tomuto kritériu. Výsledná srovnávání variant podle tohoto kritéria jsou uvedena v Příloze v Tabulce 12.

Maximální vlastní číslo $\lambda_{\max} = 8$, index nekonzistence I_S je roven 0 a normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ má tvar:

$$\mathbf{x}_{K_8} = (0,031; 0,281; 0,281; 0,281; 0,031; 0,031; 0,031; 0,031)^T.$$

Deváté kritérium je „Samočistící funkce“ (K_9). Po konzultaci se členy rodiny toto kritérium také více specifikujeme. Samočistící funkce se skládá z automatického čištění a automatického odvápnění. V našem případě mají poloautomatické kávovary obě tyto funkce. Varianta číslo 6 (tedy kávovar DéLonghi ECO 310) má pouze funkci automatické čištění, proto bude před ostatními pákovými kávovary, které tyto funkce nemají vůbec, zvýhodněn. Tabulka výsledných srovnání variant podle desátého kritéria jsou uvedena v Příloze jako Tabulka 13.

Maximální vlastní číslo $\lambda_{max} = 8,138$, index nekonzistence $I_S = 0,197$, normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ je ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{K_9} = (0,025; 0,255; 0,255; 0,255; 0,025; 0,135; 0,025; 0,025)^T.$$

U posledního, desátého kritéria „Typ kávy“ (K_{10}) jsme porovnávali, zda je kávovar uzpůsoben pouze na jeden typ kávy (mletou či zrnkovou), nebo má zásobníky dva. My si pak můžeme zvolit, jestli si nameleme čerstvou, nebo zvolíme rychlejší způsob - mletou kávu. U porovnávání opět nastal problém s kávovarem Krups 5006 Circolo Dolce Gusto, který využívá speciálních náplní. Po dlouhé úvaze a několika konzultacích s odborníky jsme tento typ kávy zařadili do kategorie mletá káva. Výsledná srovnání variant podle tohoto kritéria jsou uvedena v Příloze v Tabulce 9.

Maximální vlastní číslo $\lambda_{\max} = 8$, index nekonzistence I_S je tedy roven 0 a normovaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ je ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{K_{10}} = (0,042; 0,375; 0,042; 0,375; 0,042; 0,042; 0,042; 0,042)^T.$$

Jednotlivé varianty máme porovnány vždy vzhledem ke každému kritériu zvlášť. Nyní přichází na řadu syntéza dílčích výsledků, kterou provedeme podle definice 4.7, tedy z jednotlivých vlastních vektorů $\mathbf{x}_{K_1}$ až $\mathbf{x}_{K_{10}}$ vytvoříme matici typu 8×10. Matici budeme pro přehlednost značit S_V.

$$S_V = \begin{pmatrix} 0,048 & 0,120 & 0,140 & 0,161 & 0,111 & 0,042 & 0,032 & 0,031 & 0,025 & 0,042 \\ 0,058 & 0,062 & 0,140 & 0,161 & 0,027 & 0,042 & 0,327 & 0,281 & 0,255 & 0,375 \\ 0,215 & 0,068 & 0,140 & 0,161 & 0,027 & 0,375 & 0,188 & 0,281 & 0,255 & 0,042 \\ 0,331 & 0,058 & 0,140 & 0,161 & 0,027 & 0,375 & 0,327 & 0,281 & 0,255 & 0,375 \\ 0,017 & 0,165 & 0,140 & 0,161 & 0,111 & 0,042 & 0,032 & 0,031 & 0,025 & 0,042 \\ 0,137 & 0,148 & 0,140 & 0,161 & 0,111 & 0,042 & 0,032 & 0,031 & 0,135 & 0,042 \\ 0,179 & 0,156 & 0,020 & 0,018 & 0,474 & 0,042 & 0,032 & 0,031 & 0,025 & 0,042 \\ 0,017 & 0,223 & 0,140 & 0,018 & 0,111 & 0,042 & 0,032 & 0,031 & 0,025 & 0,042 \end{pmatrix} \qquad (47)$$

Jednotlivé prvky v matici nám vyjadřují jakým podílem se konkrétní kávovar podílí na hodnocení podle určitého kritéria. Například hodnoty v prvním sloupci nám vyjadřují hodnocení variant podle prvního kritéria - „Celkový design kávovaru“ atd. Tuto matici budeme využívat v dalších podkapitolách k výpočtům.

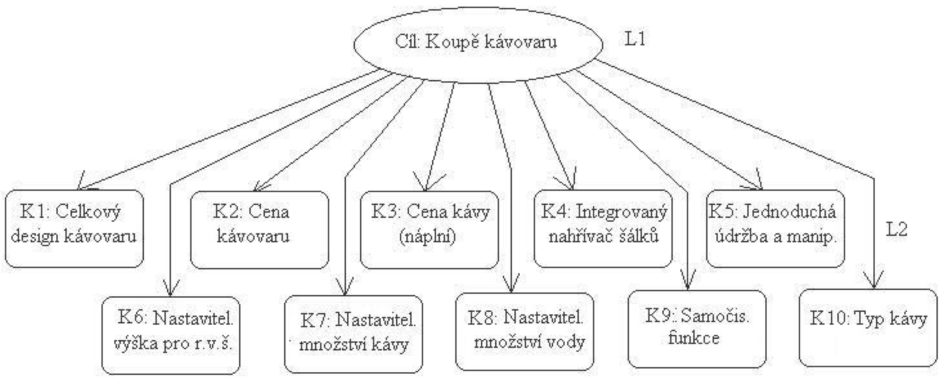
Jednotlivá kritéria i varianty jsme si již uvedli. Teď je před námi jedna z nejtěžších částí rozhodovacího problému - zjistit, která z 10 kritérií jsou pro rozhodovatele ta důležitější a která méně důležitá.

K tomu bude zapotřebí zvolit hierarchickou strukturu. Nabízí se nám dva možné způsoby - všechna kritéria dát do jedné úrovně (výsledkem tak bude jednoduchá třístupňová hierarchická struktura) nebo je rozdělit podle hledisek do určitých shluků (viz. 5.1).

Naším cílem bude analyzovat, jaký vliv má zvolená hierarchická struktura na výsledný výběr optimální varianty (kávovaru).

5.3 Výpočet s tří-stupňovou hierarchickou strukturou

Nejprve naši rozhodovací úlohu popíšeme pomocí jednoduché tří-stupňové hierarchie. První hierarchická úroveň L_1 tvoří hlavní cíl (Výběr kávovaru pro domácnost), ve druhé úrovni L_2 je našich 10 kritérií a v poslední L_3 jsou všechny varianty. Laicky řečeno, porovnáváme každé kritérium s každým. Následně pak i se všemi variantami navzájem - to nám již vyjadřuje matice S_V (47). Hierarchii hlavního cíle s kritérii si můžeme prohlédnout na Obr. 2. Pro přehlednost do něj nejsou zahrnuty jednotlivé varianty.



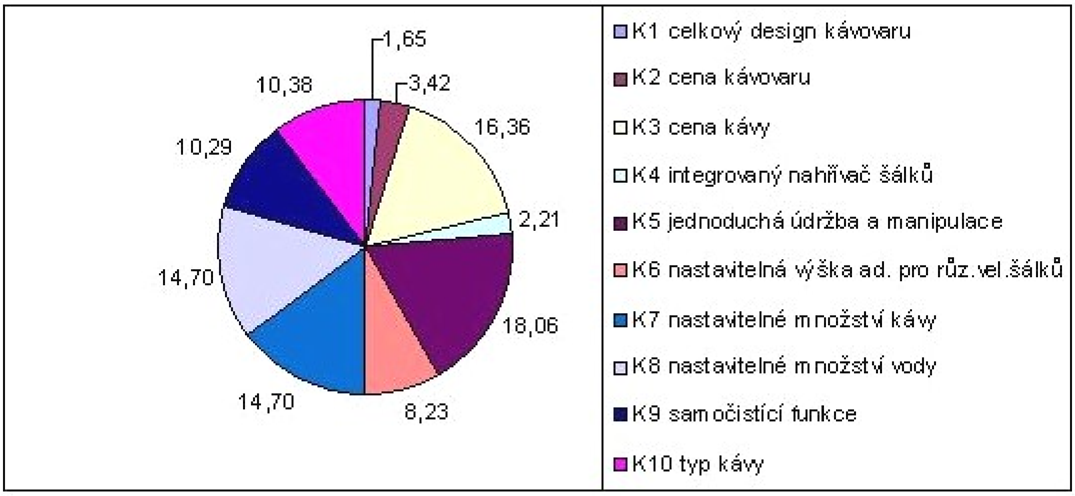
Obrázek 2: Kritéria v jedné hierarchické úrovni

Tabulka 3, která nám vyjadřuje, jaká kritéria rozhodovatel upřednostňuje, se nachází v Příloze. Z tabulky získáme matici párových porovnávání a obdobně jako v předcházející podkapitole zjistíme maximální vlastní číslo a k němu příslušný vlastní vektor. Z maximálního vlastního čísla následně vypočítáme index nekonzistence.

Pro námi zvolený přístup tří-stupňové hierarchie získáme matici typu 10×10. Z maximálního vlastního čísla $\lambda_{\max}$, které se rovná 11,896, vypočítáme index nekonzistence $I_{S_{H3}} = 0,211$ a vlastní vektor, který budeme značit $\mathbf{x}_{kc}$, nabývá hodnot:

$$\mathbf{x}_{H3} = (0,017; 0,034; 0,164; 0,022; 0,181; 0,082; 0,147; 0,147; 0,103; 0,104)^T$$

Hodnoty tohoto vektoru nám zobrazují, jakou část celku ovlivní jednotlivá kritéria. Pokud bychom si hodnoty z vektoru vynásobili 100, dostaneme procentuální rozčlenění podle důležitosti jednotlivých kritérií. Tzn. pouze z 1,65% vybíráme kávovar podle kritéria K_1 - „Celkový design kávovaru“, zatímco kritérium K_5 - „Jednoduchá údržba a manipulace“ - naše rozhodnutí ovlivní z 18,06%. Pro lepší orientaci v těchto datech jsme je zakreslili do grafu viz. Obr. 5.3.



Obrázek 3: Graf vah významností jednotlivých kritérií - tří-stupňová hierarchie

Abychom z výpočtu získali optimální kávovar pro rodinu rozhodovatele, musíme vynásobit matici S_V (47) zprava vektorem $\mathbf{x}_{H3}$. Výsledkem bude vektor, který vyjádří, jaký kávovar je pro rozhodovatele nejoptimálnější.

Tedy $\mathbf{x}_{opt_{H3}} = (0,071; 0,192; 0,168; 0,224; 0,072; 0,085; 0,117; 0,071)^T$.

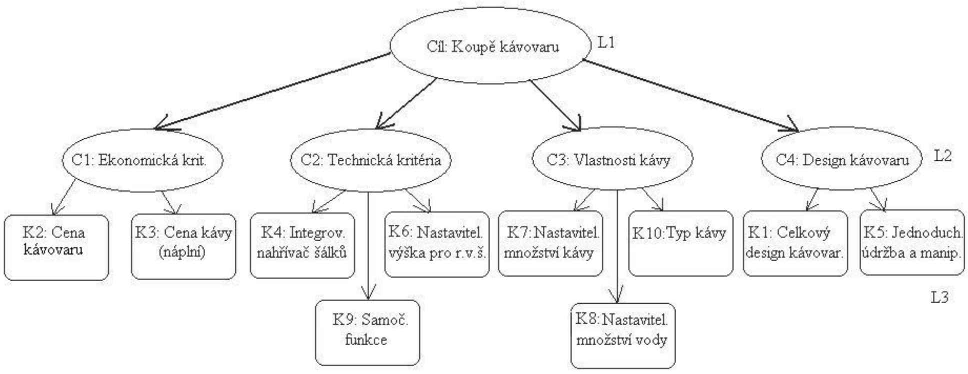
Pro lepší přehlednost jsou výsledky přepsány do tabulky:

Pořadí	Název kávovaru	Procenta
1.	DéLonghi ESAM 4000	0,224
2.	Fagor CAT 40	0,192
3.	Siemens TK 520	0,168
4.	Krups 5006 Circilo D.G.	0,117
5.	Délonghi ECO 310	0,085
6.	Zelmer 13Z012	0,072
7.	Bosch TCA 4101 Barino	0,071
8.	Espresso Krups XP 4050	0,071

Z výše popsané analýzy vyplývá, že nejlepším rodinným kávovarem podle zadaných kritérií je DéLonghi ESAM 4000. Za zmínku stojí fakt, že rozdíly hodnot na prvních 4 místech žebříčku jsou poměrně velké, což znamená, že výsledky našeho příkladu by při malé změně kritérií zůstaly stejné. Kávovary umístěné na 6. až 8. místě mají rozestupy velmi malé, z čehož usuzujeme, že kdybychom kritéria ohodnotili jen trošku odlišně, pořadí by se na těchto místech změnilo.

5.4 Výpočet s čtyř-stupňovou hierarchickou strukturou

V této podkapitole budeme řešit stejný rozhodovací problém s jediným rozdílem, kritéria si uspořádáme do dvou hierarchických úrovní. Celý rozhodovací problém tedy bude mít čtyři hierarchické úrovně, kde první L_1 je hlavní cíl (Výběr kávovaru pro domácnost), ve druhé úrovni L_2 jsou naše hlediska - Ekonomická kritéria, Technická kritéria, Vlastnosti kávy a Design kávovaru. Ve třetí úrovni L_3 jsou všechna kritéria, vždy patřící k určitým nadřazeným kritériím z úrovně L_2. Ve čtvrté L_4 úrovni, pak máme jednotlivé varianty. Hierarchii hlavního cíle s kritérii si můžeme prohlédnout na Obrázku 4. Z důvodu přehlednosti do něj nejsou zahrnuty jednotlivé varianty.



Obrázek 4: Kritéria rozdělena do dvou hierarchických úrovní

Rozhodovatel nám tentokrát vyplní 5 menších tabulek (uvedeno v Příloze v Tabulce 4). V těchto tabulkách nám ohodnotí jednotlivé skupiny kritérií, a následně porovnává vždy jen kritéria z jedné skupiny. My si ze všech tabulek vytvoříme matice párového rozhodování, z těchto matic si určíme maximální vlastní čísla a následně pak normované vlastní vektory. U tohoto postupu to bude ovšem trošku složitější.

Máme vypočítány vlastní vektory jednotlivých matic, tyto vektory znormujeme a následně pak vynásobíme vektory jednotlivých skupin příslušnou váhou té skupiny.

Vlastní vektor skupinových kritérií nám vyšel následovně:

$$\mathbf{x}_{L2} = (0,129; 0,248; 0,549; 0,074)^T.$$

Tedy Ekonomickým kritériím přísluší váha $0,129$, Technickým kritériím odpovídá váha $0,248$, Vlastnostem kávy přiřazuje rozhodovatel váhu $0,549$ a na Design kávovaru připadá váha $0,074$. Ekonomická kritéria máme dvě: Cenu kávovaru a Cenu kávy (náplní). Jejich vektor odpovídající vlastním číslům nabývá hodnot:

$$\mathbf{x}_{L3_{ek}} = (0,167; 0,833)^T.$$

Pokud tedy hodnoty vektoru ekonomických kritérií vynásobím jejich vahou, vyjdou nám hodnoty:

$$\mathbf{x}_{L3_{eks}} = (0,022; 0,108)^T.$$

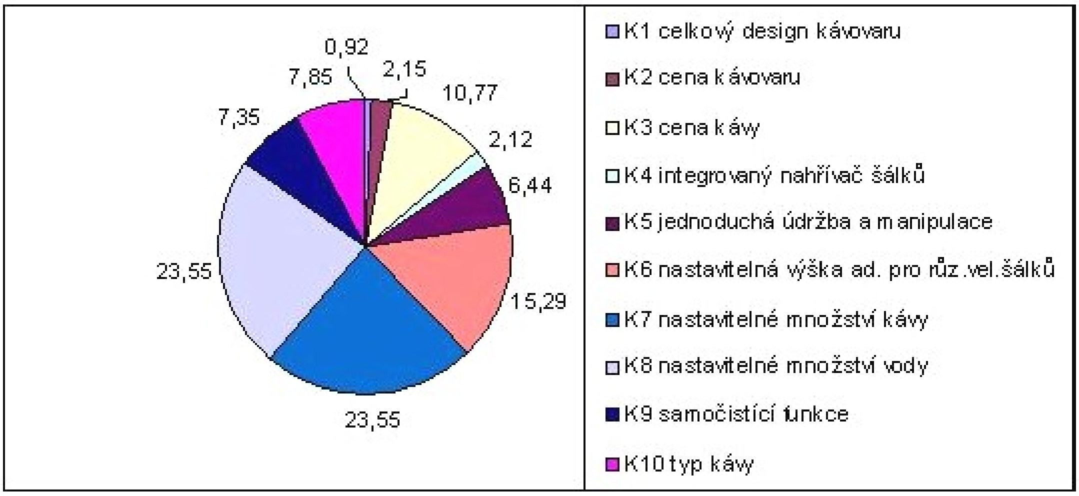
Analogickým způsobem obdržíme jednotlivé váhy všech kritérií. Ty budou následující:

$$\mathbf{x}_{H4} = (0,009; 0,0215; 0,108; 0,021; 0,064; 0,153; 0,235; 0,235; 0,074; 0,078).$$

Hodnoty jsou již upraveny, aby odpovídaly po řadě jednotlivým kritériím K_1 až K_{10}.

Pro lepší přehlednost máme tyto hodnoty uvedeny i v grafu viz. Obrázek 5.

Abychom z výpočtu získali optimální kávovar pro rodinu rozhodovatele musíme vynásobit matici S_V (47) zprava vektorem $\mathbf{x}_{H4}$. Výsledkem bude opět vektor, který již ale bude vyjadřovat, jaký kávovar je pro rozhodovatele nejoptimálnější.Tedy



Obrázek 5: Graf vah důležitostí jednotlivých kritérií - čtyř-stupňová hierarchie

$$\mathbf{x}_{opt_{H4}}(0,055; 0,220; 0,213; 0,273; 0,056; 0,065; 0,065; 0,054)^T.$$

Pro lepší přehlednost jsou výsledky přepsány do tabulky:

Pořadí	Název kávovaru	Procenta
1.	DéLonghi ESAM 4000	0,273
2.	Fagor CAT 40	0,220
3.	Siemens TK 520	0,213
4.	Krups 5006 Circilo D.G.	0,065
5.	Délonghi ECO 310	0,065
6.	Zelmer 13Z012	0,056
7.	Bosch TCA 4101 Barino	0,055
8.	Espresso Krups XP 4050	0,054

U této metody je zapotřebí spočítat celkový index nekonzistence, pro celou hierarchii, který jsme spočítali podle definice 4.10, nám vyšel $I_{S_{H4}}$=0,066.

Ve čtyř-stupňové hierarchické struktuře vyhrál jako nejlepší rodinný kávovar podle zadaných kritérií opět DéLonghi ESAM 4000. Tento hierarchický přístup nám zvětšil rozdíly mezi variantami. Kávovar, který jsme vyhodnotili jako nejlepší, má před druhým více než 5% náskok. Vzhledem k minimálním rozdílům mezi variantami na 5. až 8. místě můžeme říci, že již při malé změně ohodnocení jednotlivých kritérií by se nám pořadí na těchto místech mohlo změnit.

Celý rozhodovací problém jsme nejdříve rozčlenili do tří-stupňové a následně do čtyř-stupňové hierarchie. Pořadí variant nám vyšlo, až na 4. a 5. místo, stejně. Značné rozdíly se však objevily při ohodnocení jednotlivých kritérií. Zde si můžeme všimnout, že v druhém případě jasně převažovala kritéria ze skupiny „Vlastnosti kávy“, kterou jsme ohodnotili jako nejdůležitější.

Když jsme tato rozdílná zadání úkolů konzultovali s rozhodovateli, kteří nám tabulky vyplňovali, jednoznačně jsme se shodli na tom, že hierarchická struktura rozdělená do více stupňů byla přehlednější a i lépe pochopitelná. Navíc s výsledky, které nám poskytla rozhodovatelé více souhlasili.

Pokud budeme tyto dva postupy hodnotit pomocí celkového indexu nekonzistence, vyjde nám, že druhý postup, tedy zvolení čtyř-stupňové hierarchie je přesnější ($I_{S_{H3}} > I_{S_{H4}}$). Připomeňme si, že index nekonzistence pro tří-stupňovou hierarchii je $I_{S_{H3}} = 0,211$, zatímco index nekonzistence čtyř-stupňové hierarchie nám vyšel $I_{S_{H4}} = 0,066$. Je to způsobeno i tím, že při větším počtu vzájemných porovnávání je těžké si neodporovat. Proto bychom doporučili používat, co možná nejvíce strukturované modely (tedy rozdělené do jednotlivých hierarchických úrovní), kdy je pro rozhodovatele snažší ohodnotit vzájemně jednotlivé varianty (či kritéria).

6 Závěr

V této práci jsme se zabývali Saatyho metodou AHP, která slouží k řešení úloh vícekriteriálního rozhodování. Jako každá metoda své výhody i nevýhody. K přednostem AHP patří snažší pochopitelnost pro nematematiky, kteří mohou pomocí deskriptorů popsat důležitost jednotlivých kritérií. Vždy mezi sebou porovnávají pouze dvě kritéria, což je snažší a přehlednější. Nevýhodou jsou již zmíněné deskriptory, které nemusí na každého působit zcela srozumitelně. Například pro mne asi největší nevýhodou zůstává špatná „uchopitelnost“ deskriptorů. Když rozhodovatel uvede, že „Cena kávy“ je pro něj mírně důležitější než „Cena kávovaru“, chtěl tím opravdu říci, že cena náplní je pro něj 3-krát důležitější než cena kávovaru? To může naše hodnocení zkreslit a tudíž nám metoda nemusí poskytnout zcela transparentní výsledek.

I přes tyto drobné výhrady musím říci, že nám Saatyho metoda vždy poskytla výsledek, který se shodoval s „vnitřním pocitem“ rozhodovatele, což je důležité k prokázání její důvěryhodnosti.

Na model AHP jsme se snažili nahlédnout ze dvou úhlů a prozkoumat význam hierarchie. Zvolili jsme proto dva postupy k řešení totožného rozhodovacího problému. Poprvé jsme zvolili tří-stupňovou hierarchii, ve které jsou všechna kritéria na stejné úrovni. Touto metodou jsme kávovary porovnali a vybrali ten optimální, podle námi zadaných kritérií. V případě použití čtyř-stupňové hierarchie byla kritéria rozčleněna do dvou úrovní a vyšly nám až na drobné výjimky stejné výsledky jako v předcházející metodě. Rozložení významnosti mezi jednotlivá kritéria bylo však poněkud odlišné. Vzhledem k tomu, že ve druhém případě byl index nekonzistence nižší, se domníváme, že vícestupňový model lépe reflektuje preference rozhodovatele.

Po konzultování s rozhodovateli v mém okolí - nematematiky, jsme se shodli, že se lépe pracuje s hierarchickou strukturou, která je více rozčleněná, v našem případě tedy čtyř-úrovňová. Tato hierarchie je pro rozhodovatele snažší, neboť jak uvedl jeden z nich: „Nemůžeme porovnávat jablka a hrušky.“ Navíc výsledky mají výmluvnější charakter.

Tuto práci jsem psala v typografickém programu LaTeX. Výpočty jsem prováděla v matematickém softwaru Matlab a tabulky jsem vytvářela v programu Microsoft Excel. Během vytváření této práce jsem získala nové poznatky z teorie rozhodování, naučila se pracovat se získanými daty a aplikovat je do modelu AHP, což jistě využiji i v praxi při důležitých rozhodováních.

Literatura a internetové zdroje

[1] Fotr, J.; Dědina, J.; Hrůzová, H.. *Manažerské rozhodování.* 3. upravené a rozšířené vydání. Praha: EKOPRESS, 2003. 250 s. ISBN 80-86119-69-6.

[2] Gantmacher,F. R. *Teorija matric.* Nauku, Moskva,1966.

[3] Hort, D.; Rachůnek, J.. *Algebra I.* Dotisk 1. vydání. Olomouc: UP Olomouc, 2005. 172 s. ISBN 80-244-0631-4.

[4] Klůfa, J.. *Úvod do teorie matic.* 1. vydání. Praha: VŠE v Praze, 1998. 247 s. ISBN 80-7079-538-7.

[5] Nikaido, H. *Introdiction to sets and mappings in modern economics.* North Holland, Amsterdam/New York, 1970.

[6] Ramík, J.. *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání.* Karviná: Slezská univerzita v Opavě, 2000. 217 s. ISBN 80-7248-088-X.

[7] *University of Pittsburgh* [online]. 2009 [cit. 2010-03-30]. Thomas L. Saaty. Dostupné z WWW: <http://www.business.pitt.edu/faculty/saaty.html>

[8] *Můj nákupní rádce* [online]. 2010 [cit. 2010-03-15]. Heureka.cz. Dostupné z WWW: <http://kavovary-cajovary-espressa.heureka.cz>

[9] *Průvodce světem kávovarů* [online]. 2010 [cit. 2010-03-10]. Kávovary.info. Dostupné z WWW: <http://www.kavovary.info/>

Přílohy

číslo varianty:	1.	2.	3.	4.
obrázek:				
typ kávovaru	Espresso Krups XP 4050	Fagor CAT 40	Siemens TK 520	DéLonghi ESAM 4000
značka	KRUPS	FAGOR	Siemens	DéLonghi
cena:	4 512 Kč	8 747 Kč	7 990 Kč	9 389 Kč
integrovaný nahř. šálků:	Ano	Ano	Ano	Ano
typ kávy:	(mletá)	(mletá i zrnková)	(zrnková)	(zrnková i mletá)
nastavitelná výška pro růz.vel.šálků:	Ne	Ne	Ano	Ano
nastavitelné množství (síla) kávy:	Ne	4 - 16g na šálek	8 - 12g na šálek	4 - 16g na šálek
nastavitelné množství vody:	Ne	Ano	Ano	Ano
samočisticí funkce (automatické čištění a odvápnění):	Ne	Automatické čištění i odvápnění	Automatické čištění i odvápnění	Automatické čištění i odvápnění

Tabulka 1: Výběr variant 1. část

číslo varianty:	5.	6.	7.	8.
obrázek:				
typ kávovaru	Zelmer 13Z012	DéLonghi	KRUPS 5006 Circolo Dolce Gusto	Bosch TCA 4101 Barino
značka	Zelmer	DéLonghi ECO 310	KRUPS	Bosch
cena:	3 278 Kč	3 664 Kč	3 477 Kč	2 430 Kč
integrovaný nahř. šálků:	Ano	Ano	Ne	Ne
na mletou i zrnkovou kávu:	(mletá)	(mletá)	(speciální náplně)	(mletá)
nastavitelná výška pro růz.vel.šálků:	Ne	Ne	Ne	Ne
nastavitelné množství (síla) kávy:	Ne	Ne	Ne	Ne
nastavitelné množství vody:	Ne	Ne	Ne	Ne
samočistící funkce (automatické čištění a odvápnění):	Ne	Automatické čištění	Ne	Ne

Tabulka 2: Výběr variant 2. část

celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	cena kávovaru
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	5	**7**	9	cena kávy
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	integrovaný nahřívač šálků
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	5	**7**	9	jednoduchá údržba a manipulace
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelné množství kávy
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelné množství vody
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	samočistící funkce
celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	typ kávy
cena kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	cena kávy
cena kávovaru	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	integrovaný nahřívač šálků
cena kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	jednoduchá údržba a manipulace
cena kávovaru	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků
cena kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelné množství (síla) kávy
cena kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelné množství vody
cena kávovaru	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	samočistící funkce
cena kávovaru	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	typ kávy
cena kávy	9	**7**	5	3	1	3	5	7	9	integrovaný nahřívač šálků
cena kávy	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	jednoduchá údržba a manipulace
cena kávy	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků
cena kávy	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	nastavitelné množství kávy
cena kávy	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	nastavitelné množství vody
cena kávy	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	samočistící funkce
cena kávy	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	typ kávy
integrovaný nahřívač šálků	9	7	5	3	1	3	5	**7**	9	jednoduchá údržba a manipulace
integrovaný nahřívač šálků	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků
integrovaný nahřívač šálků	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelné množství kávy
integrovaný nahřívač šálků	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	nastavitelné množství vody
integrovaný nahřívač šálků	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	samočistící funkce
integrovaný nahřívač šálků	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	typ kávy
jednoduchá údržba a manipulace	9	7	**5**	3	1	3	5	7	9	nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků
jednoduchá údržba a manipulace	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	nastavitelné množství kávy
jednoduchá údržba a manipulace	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	nastavitelné množství vody
jednoduchá údržba a manipulace	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	samočistící funkce
jednoduchá údržba a manipulace	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	typ kávy
nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	nastavitelné množství kávy
nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	nastavitelné množství vody
nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	samočistící funkce
nastavitelná výška ad. pro růz.vel.šálků	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	typ kávy
nastavitelné množství kávy	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	nastavitelné množství vody
nastavitelné množství kávy	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	samočistící funkce
nastavitelné množství kávy	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	typ kávy
nastavitelné množství vody	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	samočistící funkce
nastavitelné množství vody	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	typ kávy
samočistící funkce	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	typ kávy

Tabulka 3: Tabulka celkového párového porovnání kritérií - tří-stupňová hierarchie

Porovnávání skupin kritérií										
Ekonomická kr.	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	Technická kr.
Ekonomická kr.	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	Vlastnosti kávy
Ekonomická kr.	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	Design kávovaru
Technická kr.	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	Vlastnosti kávy
Technická kr.	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	Design kávovaru
Vlastnosti kávy	9	7	**5**	3	1	3	5	7	9	Design kávovaru
Ekonomická kritéria										
Cena kávovaru	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	Cena náplní (kávy)
Technická kritéria										
Integrovaný nahř.šálků	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	Nastavitelná výška pro růz.vel.šálků
Integrovaný nahř.šálků	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	Samočistící funkce
Nastavitelná výška pro růz.vel.šálků	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	Samočistící funkce
Vlastnosti kávy										
Nastavitelné množství (síla) kávy	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	Nastavitelné množství vody
Nastavitelné množství (síla) kávy	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	Typ kávy
Nastavitelné množství vody	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	Typ kávy
Design kávovaru										
Celkový design kávovaru	9	7	5	3	1	3	5	**7**	9	Jednoduchá údržba a manipulace

Tabulka 4: Tabulka celkového párového porovnání kritérií - čtyř-stupňová hierarchie

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	**7**	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	**7**	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	**7**	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	**5**	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	**7**	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	**5**	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	**5**	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	**5**	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	**9**	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	**9**	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	**9**	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	**3**	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	**9**	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	**9**	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	**9**	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	**1**	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	**3**	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	**7**	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	**9**	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 5: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Celkový design kávovaru“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 6: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Cena kávy (náplní)“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 7: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Integrovaný nahřívač šálků“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 8: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Jednoduchá údržba a manipulace“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 9: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Typ kávy“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 10: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Nastavitelná výška adaptéru pro různou výšku šálků“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 11: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Nastavitelné množství (síla) kávy“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 12: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Nastavitelné množství vody“

Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Fagor CAT 40
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Espresso Krups XP 4050	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Siemens TK 520
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Fagor CAT 40	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ESAM 4000
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Siemens TK 520	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Zelmer 13Z012
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ESAM 4000	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	DéLonghi ECO 310
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
Zelmer 13Z012	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Circolo Dolce Gusto
DéLonghi ECO 310	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino
Circolo Dolce Gusto	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Bosch TCA 4101 Barino

Tabulka 13: Tabulka vzájemného porovnání variant vzhledem ke kritériu „Samočistící funkce“